Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Uma abordagem do ensino de funções polinomiais no ensino médio

Bruna Fernanda Sato Lopes
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT
julho de 2018

Uma abordagem do ensino de funções polinomiais no ensino médio

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Bruna Fernanda Sato Lopes e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 25 de julho de 2018.

Prof. Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos
Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto
Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

L864a Lopes, Bruna Fernanda Sato.
Uma abordagem do ensino de funções polinomiais no ensino médio / Bruna Fernanda Sato Lopes. -- 2018
xiii, 78 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Juan Elmer Villanueva Zevallos.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2018.
Inclui bibliografia.

1. Proposta pedagógica. 2. geogebra. 3. resolução de problemas. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCACÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUACÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 – Boa Esperança – 78.060-900 – Cuiabá/MT
Fone: (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: **"Uma abordagem do ensino de funções polinomiais no ensino médio"**

Autor: **Bruna Fernanda Sato Lopes**

defendida e aprovada em 25/07/2018.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor Juan Elmer Villanueva Zevallos
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutor Adilson Antônio Berlatto
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Paulo César Cavalcante de Oliveira
Instituição: Universidade Regional do Cariri

Cuiabá, 25/07/2018.

A Deus, pelo dom da vida e a minha família, por todo carinho, amor e dedicação.

Agradecimentos

À Deus, pois Ele é bom e o seu amor dura para sempre.

Ao meu orientador, pela paciência e dedicação ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais e irmã, que sempre acreditaram em mim e deram o suporte necessário para a conclusão desse mestrado.

Ao meu marido, por ter estado ao meu lado e mesmo diante das dificuldades encontradas me incentivou a continuar.

Ao meu filho, por todo amor e carinho.

Aos professores que acompanharam minha jornada e foram essenciais à minha formação como profissional e, além disso, minha evolução como pessoa.

Aos amigos do mestrado, que ao longo destes dois anos se tornaram parte da minha família.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pela concessão da bolsa de estudos.

E não somente isto, mas também nos gloriamos nas próprias tribulações, sabendo que a tribulação produz perseverança; e a perseverança, experiência; e a experiência, esperança. Ora, a esperança não confunde, porque o amor de Deus é derramado em nosso coração pelo Espírito Santo, que nos foi outorgado.

Romanos 5:3-5

Bíblia Sagrada

Resumo

Este trabalho apresenta algumas abordagens pedagógicas para o ensino de funções polinomiais, com o auxílio do software GeoGebra e a metodologia resolução de problemas, utilizando-se documentos propostos pelo governo, relativos ao tema. Para tal fim, apresenta-se a teoria necessária que dará embasamento ao conteúdo, assim como, algumas atividades propostas aos alunos em busca de uma aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Proposta pedagógica, geogebra, resolução de problemas.

Abstract

This work presents some pedagogical approaches for the teaching of polynomial functions, with the help of GeoGebra software and a problem methodology resolution, using documents proposed by the government, to the theme. For this purpose, the necessary theory will be presented which will support the content, as well as some the activities promoted by the students in search of meaningful learning.

Keywords: Pedagogic proposal, geogebra, resolution problems.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

O ensino de funções polinomiais tem grande relevância, possuindo aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento, no cotidiano e estabelecendo relação com vários conteúdos matemáticos. Dessa forma, seus conceitos são abordados nos últimos anos do Ensino Fundamental e retomados, revistos e aprofundados no 1º ano do Ensino Médio.

Esta dissertação tem por objetivo apresentar uma nova proposta para o ensino de funções polinomiais, com o apoio do software GeoGebra e da metodologia resolução de problemas, buscando compreender suas contribuições para a aprendizagem dos alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Nesse contexto, procura-se desenvolver atividades que estimulem os alunos a refletirem, proporcionando assim, uma aprendizagem realmente significativa em que o aluno deixa de ser passivo e passa a ser construtor do seu próprio conhecimento.

Para alcançar tais objetivos, esse trabalho foi estruturado em cinco capítulos, sendo o primeiro relativo a um estudo teórico-pedagógico para amparar o entendimento das propostas, o segundo, terceiro e quarto capítulo nos dão um suporte teórico-científico do que foi desenvolvido e serão apresentadas no quinto capítulo.

No Capítulo 1, serão apresentados aportes teóricos, na área de ensino, para o entendimento das propostas do governo para a melhoria do ensino de matemática, particularmente para o aprendizado de funções polinomiais. Dentre os documentos estudados, temos a Base Nacional Comum Curricular de 2016 e os Parâmetros Curriculares Nacionais de 2000. Além do mais, falaremos a respeito da metodologia utilizada, denominada resolução de problemas, amparada pelo software de geometria dinâmica GeoGebra.

No Capítulo 2, é abordado um breve relato do contexto histórico da funções. Posteriormente, trataremos de tópicos como polinômios, funções polinomiais e zeros de uma função que darão o suporte científico para o desenvolvimento desse trabalho.

No Capítulo 3, trataremos mais especificamente das funções polinomiais de grau menor ou igual a 3, em que relataremos brevemente a história das equações afins, quadráticas e cúbicas. Além do mais, descreveremos fórmulas e métodos para encontrar seus zeros.

No Capítulo 4, dedica-se a estudar transformações de funções, cujo objetivo é desenvolver a percepção de que o conhecimento do gráfico de uma função simples nos permitirá descobrir os gráficos de outras funções. Desse modo, existem vários tipos de transformações de funções, sendo as mais comuns: a reflexão (horizontal ou vertical), a translação (horizontal ou vertical), a homotetia, a expansão e a contração, as quais daremos ênfase nesse capítulo.

E, por fim, no Capítulo 5, são apresentadas as atividades propostas e aplicadas aos alunos do 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Heronides Araújo e, consequentemente, os resultados obtidos.

Capítulo 1

Estudo de Funções Polinomiais no Ensino Médio

O porquê de se estudar função nas instituições escolares é uma das grandes indagações dos alunos, já que comumente é abordada de forma mecânica, como um simples ato de decorar uma fórmula e reproduzir um exemplo passado pelo professor, não fazendo sentido algum para o estudante e sem qualquer relação com o cotidiano.

Embora a relevância do conteúdo de função, muitos alunos transparecem dificuldades em entendê-la. Assim, para que o estudante compreenda realmente o formalismo matemático desse conceito, precisa estar inserido em um ambiente que inclua suas experiências do dia a dia.

Para tanto, é perceptível a utilidade do conceito de função na vida cotidiana, podemos citar como exemplos, uma corrida de táxi, o salário de um vendedor, o preço da gasolina em relação a quantidade de litros colocadas, o preço da conta de energia.

Então, faz-se necessário uma reestruturação nos modelos de ensino, em que o professor deixa de ser transmissor do conhecimento e passa a ser mediador no processo de ensino-aprendizagem. Sendo assim é de suma importância estabelecer uma relação entre o conhecimento escolar e o conhecimento que o aluno já possui, inclusive aquele adquirido em sua experiência de vida.

Com a intenção de contribuir com o ensino de funções no Ensino Médio, nesse capítulo, serão descritos alguns conceitos do ensino de matemática, através do uso de recursos computacionais. Além disso, busca-se, analisar documentos tais como, os Parâmetros Nacionais Curriculares, Base Nacional Comum Curricular, dentre outros, de modo a orientar e facilitar a compreensão pedagógica do estudo de funções polinomiais, possuindo como meio facilitador o software GeoGebra e a metodologia resolução de problemas.

1.1 Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

Os Parâmetros Curriculares Nacionais são diretrizes elaboradas para orientar os educadores, com a finalidade de melhorar suas práticas pedagógicas e garantir a crianças e jovens brasileiros o direito de usufruir dos conhecimentos necessários para o exercício da cidadania.

Por conseguinte, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) de 2000, a formação do aluno deve abranger tanto os conhecimentos básicos, quanto a preparação científica e a capacidade de utilizar as diferentes tecnologias relativas às áreas de atuação. Além disso, deve-se trabalhar o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a habilidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização.

A escola tem como função promover a formação de um aluno mais ativo em sala de aula. Assim, os alunos não devem estar limitados a dominarem determinados conteúdos, mas precisam pensar, raciocinar, descobrir e resolver problemas, lhe permitindo maior autonomia, ação e participação no decorrer do processo educacional.

Por essa razão, a matemática do Ensino Médio, deve proporcionar conhecimentos e instrumentos necessários para que o aluno possa continuar aprendendo, auxiliando o desenvolvimento da autonomia e da pesquisa (Brasil, 2000).

Com o suporte dos parâmetros curriculares de matemática no Ensino Médio, procura-se criar condições para inserção dos alunos em um mundo de mudanças e propiciar as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional.

Para alcançar tal objetivo, a matemática deve ser ensinada de forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos, desenvolvendo nos alunos capacidades para compreender, interpretar situações e resolver problemas (Brasil, 2000).

Os alunos precisam estar inseridos em um ambiente que oportunize o "aprender a aprender", sendo valorizadas suas ideias, dúvidas e curiosidades. Nesse processo, precisam refletir e se tornarem protagonistas de suas ações na escola e em sociedade. Desenvolvendo, assim, competências para prepará-los para realizar seus projetos de vida e encarar um mundo em constante desenvolvimento.

Desse modo, em conformidade com o PCNEM de 2000 a resolução de problemas se torna um dos principais aliados no ensino de matemática, pois estimula o pensar e o fazer matemático, enquanto os alunos são motivados a enfrentar os desafios e oferece a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentação, relacionar diferentes conhecimentos e perseverar na busca de solução.

Tais habilidades não se desenvolvem apenas com exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas, uma vez que o simples exercício de fixação não garante que o aluno seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas, ou ainda, na tomada de decisões (Brasil, 2000).

Assim, como o propósito da escola é preparar o aluno para um aprendizado permanente e para a vida, não faz sentido o professor querer ensinar longos conteúdos fragmentados e sem significado, em que o aluno apenas reproduz o conhecimento transmitido pelo professor (Brasil, 2000).

Os conteúdos devem ser representativos e precisam estar diretamente ligados com os objetivos a serem atingidos, sendo necessário associar saberes e vinculá-los a realidade. Dessa forma, dentre os conteúdos importantes apresentados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de 2000, relacionado a disciplina de matemática, iremos dar ênfase nas funções polinomiais.

A ideia de *função* é necessária para expressar a relação de grandezas e modelar situações-problema e não deve ser trabalhada de modo isolado, mas precisa desempenhar seu papel de descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento. Para tanto, problemas de aplicação não devem ser deixados para o final do estudo de função, mas precisa permear todo o ensino, fazendo sentido e motivando os alunos a aprender (Brasil, 2000).

Sob o mesmo ponto de vista, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio de 2006, ressaltam que o estudo das funções possibilitam ao aluno adquirir a linguagem algébrica necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática (Brasil, 2006). De tal modo, (Lopes et al, 2003), vem retratar que a importância do conceito de função está ligada a sua grande aplicação, servindo de ponte para outros conceitos originados em diferentes áreas do conhecimento.

Na seção seguinte, comentaremos sobre a abordagem da Base Nacional Comum Curricular, a respeito do conteúdo de funções; mais especificamente, das funções polinomiais e seus descritores.

1.2 Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é uma das estratégias estabelecidas pelo Plano Nacional de Educação (PNE) com o intuito de melhorar a educação básica, orientando a elaboração de currículos e definindo as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver no decorrer da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Com relação a Base Nacional Comum Curricular, o ensino de matemática deve propiciar a compreensão do mundo e da prática social, qualificando para o mundo do trabalho, fornecendo meios para que os alunos consigam lidar com situações problemas e desafios diversos. Sendo assim, de suma importância a contextualização dos problemas propostos e a interdisciplinaridade (Brasil, 2016).

> A Base Nacional Comum Curricular, no tocante à matemática, também se aproxima dos Parâmetros Curriculares Nacionais, tendo em vista que esses documentos visam à construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que todos os estudantes brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite, de fato, sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura Brasil (2016, p. 134).

Os conteúdos ministrados em sala de aula devem ser contextualizados, considerando-se a experiência de vida do aluno e seu conhecimento de mundo. Pois, quando o assunto abordado desperta o interesse do aluno gera motivação para o estudo. Além do mais, busca-se a formação de um cidadão pleno, capaz de interferir na sociedade em que vive, melhorando-a.

Desse modo, seguindo as orientações da Base Nacional Comum Curricular, a área de matemática no Ensino Médio está organizada em cinco unidades de conhecimento: Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, Números e Operações, Álgebra e Funções (Brasil, 2016).

Entretanto, nesse trabalho, estamos interessados no estudo das funções polinomiais, referente a unidade de conhecimento Álgebra e Funções. Assim, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular de 2016, no Ensino Médio, o estudo das funções merece destaque por seu papel como modelo matemático para analisar e interpretar relações de dependência entre variáveis de duas grandezas em fenômenos do mundo natural ou social, incluindo os trabalhados em componentes de outras áreas de conhecimento como Física, Química e Biologia (Brasil, 2016).

Particularmente, com relação à função afim, deve-se proporcionar ao estudante compreender o modelo de variação que se estabelece entre as variáveis envolvidas e perceber aspectos importantes como taxa de variação, crescimento e decrescimento, incluindo os casos em que a relação entre as variáveis envolvidas é proporcional, o caso da função linear. Por outro lado, a função quadrática deve ser desenvolvida por meio de situações que favoreçam ao estudante compreender o modelo de variação que se estabelece entre as variáveis envolvidas e perceber aspectos importantes como os pontos de máximo e de mínimo (Brasil, 2016).

Na Base Nacional Comum Curricular, dentro de cada unidade de conhecimento são organizados os objetivos de aprendizagem, levando em consideração as progressões de aprendizagens, desenvolvendo nos alunos raciocínios mais sofisticados ao longo dos anos de escolarização. Para tanto, serão apresentados a seguir os objetivos referentes ao conteúdo de função, em particular as funções polinomiais, em conformidade com a base, correspondentes ao ano de 2016:

> (EM11MT06) Compreender função como uma relação de dependência entre duas variáveis, as ideias de domínio, contradomínio e imagem, e suas representações algébricas e gráficas, e utilizá-las para analisar, interpretar e resolver problemas em contextos diversos, inclusive fenômenos naturais, sociais e de outras áreas Brasil (2016, p. 580);
>
> (EM11MT07) Reconhecer função afim e suas representações algébrica e gráfica, identificar o modelo de variação e a taxa de variação, incluindo os casos em que a variação é proporcional (linear), e utilizar essas noções para representar e resolver problemas como os de Movimento Uniforme, entre outros Brasil (2016, p. 580);
>
> (EM12MT09) Reconhecer função quadrática e suas representações algébrica e gráfica, compreendendo o modelo de variação determinando domínio, imagem, máximo e mínimo, e utilizar essas noções e representações para resolver problemas como os de movimento uniformemente variado Brasil (2016, p. 580);
>
> (EM15MT09) Conjecturar, verificar e generalizar sobre o que ocorre com o gráfico de uma função de $f(x)$ ao transformá-la em $af(x)$, $f(ax)$, $f(x) + a$, $f(x + a)$, com $a \neq 0$, com apoio de softwares de geometria dinâmica e de funções Brasil (2016, p. 581).

A propósito, como pode ser visto nos descritores, a BNCC vem orientar a utilizar softwares educacionais, quanto recurso metodológico para auxiliar o professor em sala de aula no processo de ensino-aprendizagem. Dessa forma, daremos ênfase na metodologia *resolução de problemas* e no software de geometria dinâmica *GeoGebra*, que foi trabalhado com os alunos do 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Heronides Araújo.

1.3 Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino

Em conformidade com (Soares e Pinto, 2001), deve-se buscar desenvolver nos alunos a capacidade de aprender a aprender, lhes proporcionando condições para adquirir novos conhecimentos por si mesmos e não apenas a compreensão de informações prontas e acabadas. Sendo assim, essas mesmas autoras acreditam que o ensino através da metodologia de resolução de problemas contribui para que os alunos desenvolvam essas habilidades, estimulando-os a buscar as respostas as suas inquietações, sejam escolares ou de sua vivência diária, ao invés de aguardar uma resposta pronta.

Nessa abordagem o papel do professor será de incentivador, facilitador, mediador. Levando, desse modo, os alunos a pensarem e a gerarem seus próprios conhecimentos, criando um ambiente de colaboração, investigação, exploração e descoberta (Soares e Pinto, 2001).

Logo, o professor será gerenciador do conhecimento no processo de ensino aprendizagem, sendo agente ativo na formação do aluno, refletindo sobre seu papel na constituição do conhecimento e na formação de seus alunos, analisando sobre a forma de desenvolver seu trabalho.

Para tanto, os alunos serão incentivados no processo e não apenas a resposta final, estimulando as descobertas do aluno, as estratégias utilizadas, a exposição de dificuldades, a análise e verificação da solução, a criação de novos problemas e a identificação do erro (Soares e Pinto, 2001).

Faz necessário que o educando seja ativo, participativo, autônomo e independente em sala de aula, participando das tomadas de decisões, interagindo e se comunicando. Desse modo, não deve se limitar a ser espectador do processo, já que é um sujeito capaz de interpretar, problematizar, dialogar, compreender e construir conhecimento.

Assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais de 2000 vem abordar a metodologia resolução de problemas, devido a sua relevância no enfrentamento de desafios, em que o aluno ao se deparar com um problema, pensa por si mesmo, constrói estratégias de resolução, relaciona conhecimentos diversos e persiste na busca da solução.

Essas competências não podem ser desenvolvidas apenas na repetição de exercícios, pois, apesar da importância dos alunos saberem aplicar os algoritmos e fórmulas conhecidas, só reproduzir um conhecimento passado pelo professor, não permite ao aluno a construção mais abrangente de mundo, para a realização dos alunos no mundo social e profissional (Brasil, 2000).

O ensino de Resolução de Problemas, enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática começou a ser investigado de forma sistemática sob a influência de Polya, nos EUA nos anos 60, ganhando espaço no mundo na década 70. Sua pesquisa tinha o intuito de propiciar uma educação matemática mais significativa. Desse modo, uma das vertentes para o ensino com a resolução de problemas foi apresentada por (Polya, 1957) em quatro etapas:

- Compreender o problema: precisamos compreender o problema antes de começar a resolvê-lo. Desse modo, faz-se necessário retirar os dados relevantes nela contida, verificando o que está sendo perguntando e o que precisa ser resolvido em termos de conhecimentos matemáticos;

- Elaborar um plano: Elaborar um plano de ação para resolver o problema, fazendo a conexão entre os dados do problema. Nesta etapa, o aluno pode fazer vários planos ou estratégias e trocar ideias com os demais componentes;
- Executar o plano: O aluno deve executar o plano verificando cada passo a ser dado, colocando em prática suas estratégias;
- Fazer o retrospecto ou verificação. Nesta etapa, analisa-se a solução obtida e a verificação do resultado. Esse momento é importante para constatação da veracidade de uma solução que atenda aos questionamentos indagados no enunciado.

Na abordagem de resolução de problemas como uma metodologia de ensino, o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas como aprende matemática para resolver problemas, considerando a mediação do professor numa relação dialética entre teoria e prática.

Desse modo, a atuação do professor no processo de ensino-aprendizagem não pode ser restrita a repassar conhecimento, mas orientar e valorizar as habilidades do aluno. Sabendo da importância de se promover um ambiente de descobertas em sala de aula, apresentaremos na seção seguinte um software de geometria dinâmica como meio facilitador de aprendizagem.

1.4 O Dinamismo no Estudo de Funções: GeoGebra

(Gravina e Santarosa, 1998) vem nos dizer que, historicamente, os sistemas de representação do conhecimento matemático têm caráter estático, o que por diversas vezes atrapalham a construção do significado. Com o objetivo de resolver tal problema, as novas tecnologias vêm oferecer instâncias físicas em que a representação passa a ter caráter dinâmico.

De fato, (Isotani, 2005) retrata que o termo "dinâmica" vem em oposição à estrutura "estática" das construções da geometria tradicional e devido a esse dinamismo facilita a verificação de que a construção mantém as propriedades esperadas.

> Os softwares de Geometria Dinâmica têm como característica principal o movimento de objetos na tela. Possibilitam fazer investigações, descobertas, confirmar resultados, fazer simulações, e permitem levantar questões relacionadas com a sua aplicação prática Lopes (2011).

Os softwares de geometria dinâmica podem ser importantes ferramentas que facilitam a construção de conhecimento por parte dos alunos, incentivando a maior participação deles em seu próprio aprendizado, pois é através da interação e da superação das dificuldades propostas pelo professor que o aluno atinge a maturidade para compreender o conteúdo apresentado (Isotani e Brandão, 2006).

Enfim, dentro da grande variedade de softwares existentes para tal fim, destacam-se os softwares gratuitos GeoGebra, WinPlot, Régua e Compasso, Freemat. Além dos softwares citados, existem outros pagos, de natueza comercial, tais como Maple, Cabri Géomètre, Matlab, dentre outros. Entretanto, nesse trabalho, daremos ênfase e utilizaremos o GeoGebra, que é um programa livre de geometria dinâmica criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula, com início do projeto em 2001 na Universidade de Salzburgo.

O *GeoGebra* é um software para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema, permitindo construir vários objetos; dentre os quais usaremos pontos, vetores, segmentos, retas, gráficos representativos de funções, os quais podem depois ser modificados dinamicamente. Esse software tem a vantagem de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos, além de identificar pontos singulares de uma função, como zeros ou extremos (Hohenwarter, 2007).

Além do mais, esse software incentiva os alunos em um processo de investigação e descobertas, facilitando a construção de figuras, permitindo a exploração visual das mesmas, além de manter as características da construção, enquanto os dados são alterados graficamente. Estas características aumentam o poder de argumentação do aluno, sobretudo através do processo de arrastar as figuras pela tela do computador (Lopes, 2011).

Assim, com atividades realizadas no GeoGebra, podemos criar um ambiente mais propício para a aprendizagem da matemática.

Capítulo 2

Funções

Neste capítulo, abordaremos um breve relato acerca da origem do conceito de função, desde a sua utilização de maneira mais intuitiva, até sua formalização como pode ser vista nos dias atuais. Logo após, falaremos sobre alguns de seus tipos, utilizando como referências: (Gonçalves, 1999), (Lima, 2014).

De agora em diante, utilizaremos as notações $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, para indicar o conjunto dos números reais e complexos, respectivamente.

2.1 História do Conceito de Função

Em conformidade com (Botelho e Rezende, 2011), as primeiras ideias do conceito de função surgiram na busca de cientistas e filósofos de entender a realidade e encontrar estratégias em que fosse possível estudar e descrever os fenômenos naturais.

Para tanto, seu conceito levou muito tempo para ser aperfeiçoado, sendo necessário mais de quatro mil anos para seu desenvolvimento formal (Mariani e Souza, 2005). Desse modo, de acordo com (Mariani e Souza, 2005), a história do conceito de função se divide em três importantes etapas:

- Antiguidade (século VII - VIII a.C. ao século V): em que se relacionava a dependência entre duas quantidades de forma intuitiva, sem referenciar a noção de variáveis e funções. Surgiu, da necessidade de se resolver problemas práticos;

- Idade Média (século V ao XV): no qual a noção de função estava relacionado a forma geométrica e mecânica. Seu conceito apareceu mesmo pela primeira vez com o matemático Nicole Oresme (1323 - 1382) que descreveu graficamente a dependência entre a velocidade e o tempo usando linhas verticais e horizontais, para um corpo que se move com aceleração constante;

- Idade Moderna (século XV ao XVIII): momento em que passam a prevalecer as expressões analíticas de função.

Dessa forma, através de diversas contribuições para o desenvolvimento das funções, tal qual, podemos citar René Descartes (1596 - 1650), Isaac Newton (1642 - 1727) e GottFried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), dentre outros, houve um avanço significativo da matemática, até que chegasse nos conceitos de função utilizados atualmente (Mariani e Souza, 2005).

As demonstrações que vemos hoje em dia não são encontradas na matemática oriental antiga. Pois, ao invés de argumentação vemos a simples descrição de um processo, sendo que, as instruções dadas eram relacionadas a casos específicos e não ao caso geral. Dessa forma, é visível a falta de métodos gerais e a aplicação repetida de artifícios engenhosos para as necessidades de cada problema específico (Eves, 2004).

Dado a conhecer um breve relato da história da função, apresentaremos na seção seguinte a definição de *função* e um tipo especial de funções que são as *funções polinomiais.*

2.2 Definição de Função

Suponha que uma empresa de plano de saúde propõe a seus clientes as seguintes opções de pagamento mensais:

- **Plano** A**:** um valor fixo de R\$ $110,00$ mais R\$ $20,00$ por consulta dentro do período.

- **Plano** B**:** um valor fixo de R\$ $130,00$ mais R\$ $15,00$ por consulta dentro do período.

Um cliente interessado no plano de saúde dessa empresa, pergunta-se: Em quais condições um ou outro plano é mais vantajoso?

Para ambos os planos de saúde os valores a serem pagos y dependem da quantidade de consultas x. Dessa forma, se o plano de saúde A cobra R\$ $20,00$ por consulta dentro do período mais um valor fixo de R\$ $110,00$, então o valor a pagar y é dado por $y = 20x + 110$. De maneira análoga, o plano de saúde B cobra R\$ $15,00$ por consulta dentro do período mais um valor fixo de R\$ $130,00$, então o valor y é dado por $y = 15x + 130$.

Desse modo, se o cliente realizar 4 consultas por mês, ele pode optar por qualquer plano, pois corresponde ao momento em que os planos são vantajosos na mesma proporção, já que

$$20x + 110 = 15x + 130 \quad \Leftrightarrow \quad 5x = 20 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4.$$

Por outro lado, o custo do plano A é menor que o custo do plano B, se o número de consultas foi menor que 4, já que

$$20x + 110 < 15x + 130 \quad \Leftrightarrow \quad 20x - 15x < 130 - 110 \quad \Leftrightarrow \quad 5x < 20 \quad \Leftrightarrow \quad x < 4.$$

Portanto, o custo do plano B é menor que o custo do plano A se o número de consultas for maior que 4.

Podemos observar essas comparações na Figura 2.1.

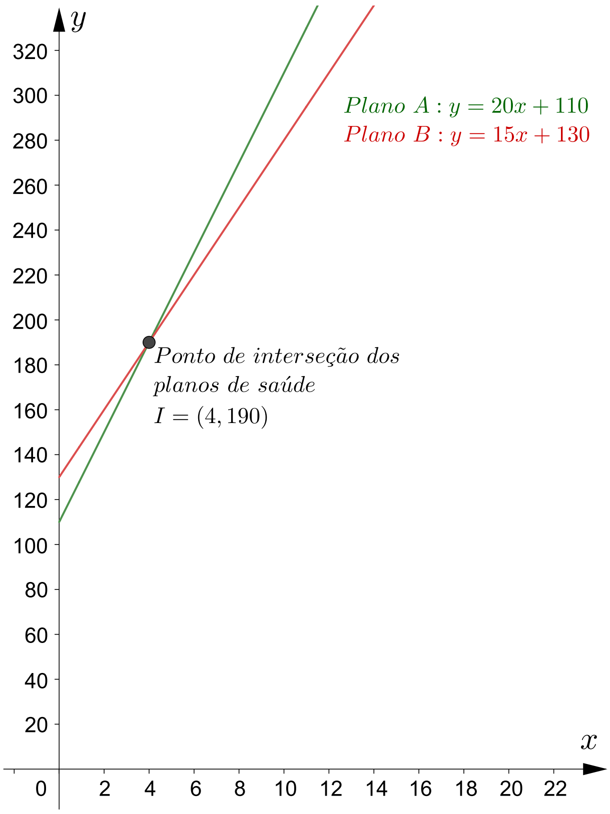


Figura 2.1: Plano de saúde mais vantajoso
Fonte: elaborada pela autora

Aqui observamos que o valor de um plano depende da quantidade de consultas. Isto é um exemplo cotidiano do que é uma *função*.

A seguir, apresenta-se a definição formal do conceito de *função*.

Definição 2.1. Sejam dois conjuntos X e Y e $f \subset X \times Y$. A terna (X, Y, f) é uma *função de X em Y* se, para todo $x \in X$, existe um único $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$.

O conjunto X é denominado *domínio da função* e o conjunto Y é denominado *contradomínio da função*. O conjunto dos elementos $y \in Y$, para os quais existe $x \in X$, tal que $(x, y) \in f$, é chamado de conjunto imagem e será denotado por $\operatorname{Im} f$.

A terna (X, Y, f) é usualmente denotada por $f : X \longrightarrow Y$ e lê-se: "função f de X em Y". Neste contexto, se $(x, y) \in f$, diz-se que y é a imagem de x por f e escreve-se

$y = f(x)$. Nessas condições, x é chamado de *variável independente* e y é chamado de *variável dependente*. Mais precisamente, representa-se

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

como sendo a função f de X em Y tal que a cada $x \in X$, faz corresponder um único elemento $f(x) \in Y$.

O *gráfico* de f é o conjunto

$$\operatorname{graf} f = \big\{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\big\}.$$

Se X e Y são subconjuntos de $\mathbb{R}$, a função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se *função real de variável real* e, o seu gráfico é representado no plano cartesiano.

Definição 2.2. Sejam X e Y dois conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$.

(a) Diz-se que f é *injetiva* se, para quaisquer x_1, x_2 pertencentes a X, tais que $f(x_1) = f(x_2)$, tenha-se $x_1 = x_2$.

(b) Diz-se que f é *sobrejetiva* se, para todo $y \in Y$, existe um $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

(c) Diz-se que f é *bijetiva* se, f for injetiva e sobrejetiva.

Dada uma função $f : X \longrightarrow Y$ e um subconjunto A de X, chama-se *imagem direta* de A pela função f ao conjunto

$$f(A) = \big\{y \in Y : y = f(x), \text{ para algum } x \in A\big\}.$$

Em particular, $f(X) = \operatorname{Im} f$.

Observação 2.3. Decorre imediatamente da definição que uma função $f : X \longrightarrow Y$ é sobrejetiva se, e somente se, $\operatorname{Im} f = Y$.

Exemplo 2.4. Consideremos a função $f : [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$. A função f pode ser reescrita como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{se } x^2 - 4x + 3 \geq 0; \\ -(x^2 - 4x + 3), & \text{se } x^2 - 4x + 3 < 0; \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{se } x \in [0, 1] \cup [3, 5]; \\ -(x^2 - 4x + 3), & \text{se } x \in (1, 3). \end{cases}$$

O gráfico de f é representado na Figura 2.2.

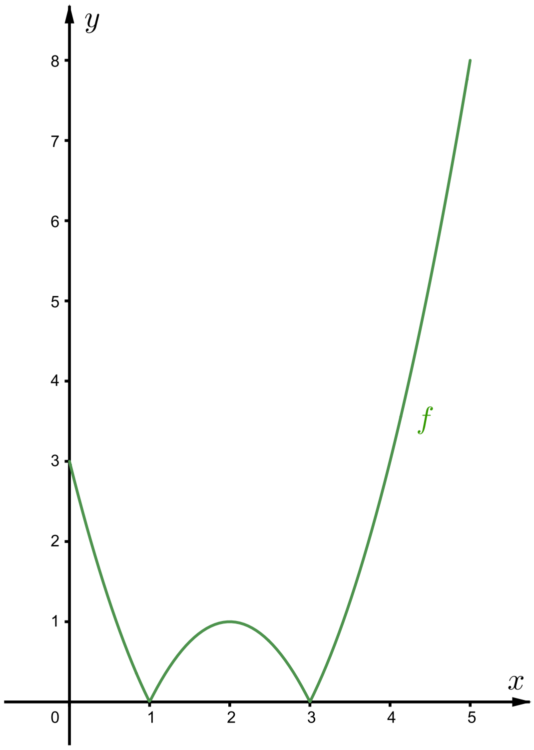


Figura 2.2: Gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$, $x \in [0, 5]$
Fonte: elaborada pela autora

A função f não é injetiva, pois $f(1) = 0 = f(3)$. Também, f não é sobrejetiva. De fato, afirmamos que $\operatorname{Im} f = [0, 8]$. Com efeito, dado $y \in [0, 8]$, consideremos $x = 2 + \sqrt{y+1}$. Como $0 \leq y \leq 8$, então $1 \leq y + 1 \leq 9$ e, assim, $1 \leq \sqrt{y+1} \leq 3$. Então, $x = 2 + \sqrt{y+1} \in [3, 5] \subset [0, 5]$ e,

$$\begin{aligned}
f(x) &= f\left(2 + \sqrt{y+1}\right) \\
&= \left|\left(2 + \sqrt{y+1}\right)^2 - 4\left(2 + \sqrt{y+1}\right) + 3\right| \\
&= \left|\left(4 + 4\sqrt{y+1} + y + 1\right) - \left(8 + 4\sqrt{y+1}\right) + 3\right| \\
&= |y| \\
&= y.
\end{aligned}$$

Logo, $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$ e, portanto,

$$[0, 8] \subset \operatorname{Im} f. \tag{2.1}$$

Vejamos agora que $\operatorname{Im} f \subset [0, 8]$. De fato, dado $y \in \operatorname{Im} f$, existe $x \in [0, 5]$ tal que $y = f(x)$. Consideremos os seguintes casos: $x \in [0, 1]$, $x \in [3, 5]$ e $x \in (1, 3)$.

Se $x \in [0,1]$ pomos $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (1-x)(3-x)$. Logo, se $0 \leq x \leq 1$, então $-1 \leq -x \leq 0$. Assim, temos $0 \leq 1 - x \leq 1$ e $2 \leq 3 - x \leq 3$. Portanto, $0 \leq (1-x)(3-x) \leq 3$.

Se $x \in [3,5]$ pomos $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. Logo, se $3 \leq x \leq 5$, então $2 \leq x - 1 \leq 4$ e $0 \leq x - 3 \leq 2$. Portanto, $0 \leq (x-1)(x-3) \leq 8$.

Se $x \in (1,3)$ pomos $f(x) = -(x^2 - 4x + 3) = -(x-1)(x-3) = (x-1)(3-x)$. Logo, se $1 < x < 3$, então $-3 < -x < -1$. Consequentemente, $0 < x - 1 < 2$ e $0 < 3 - x < 2$. Portanto, $0 < (x-1)(3-x) < 4$.

Logo, em qualquer caso, tem-se que $y = f(x) \in [0,8]$. Assim,

$$\operatorname{Im} f \subset [0,8]. \tag{2.2}$$

Portanto, de (2.1) e (2.2), $\operatorname{Im} f = [0,8]$.

Exemplo 2.5. No Exemplo 2.4, temos visto que $\operatorname{Im} f = [0,8]$. Logo, a função $g : [0,5] \longrightarrow [0,8]$, definida por $g(x) = |x^2 - 4x + 3|$ é sobrejetiva.

Exemplo 2.6. Se considerarmos $h : [3,5] \longrightarrow [0,8]$, definida por $h(x) = |x^2 - 4x + 3|$, temos que h é bijetiva. De fato, dado $y \in [0,8]$, como vimos no Exemplo 2.4, $x = 2 + \sqrt{y+1} \in [3,5]$ e $h(x) = y$, isto é, h é sobrejetiva.

Vejamos agora, que h é injetiva. Sejam x_1 e x_2 pertencentes a $[3,5]$, tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Desse modo, $x_1^2 - 4x_1 + 3 = x_2^2 - 4x_2 + 3$ ou, equivalentemente, $(x_1 - 2)^2 - 1 = (x_2 - 2)^2 - 1$. Assim, $|x_1 - 2| = |x_2 - 2|$. Como x_1 e x_2 pertencem a $[3,5]$, tem-se que $x_1 - 2 = |x_1 - 2| = |x_2 - 2| = x_2 - 2$. Portanto, $x_1 = x_2$. Logo, h é injetiva. Consequentemente, h é bijetiva.

Exemplo 2.7. Dado $a \in \mathbb{R}$, a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a$ é denominada *função constante*. Neste caso, $\operatorname{Im} f = \{a\}$ e, portanto, não é sobrejetiva. Também, como, $f(0) = a = f(1)$, segue que f não é injetiva. Em particular, se $a = 0$, f é chamada *função nula*.

Definição 2.8. Sejam X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) Diz-se que f é *crescente*, se para quaisquer x_1 e x_2 em X tais que $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$;

(b) f é *decrescente*, se para quaisquer x_1 e x_2 em X tais que $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$;

(c) Diz-se que f é *monótona não decrescente*, se para quaisquer x_1 e x_2 em X tais que $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) \leqslant f(x_2)$;

(d) Diz-se que f é *monótona não crescente*, se para quaisquer x_1 e x_2 em X tais que $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Proposição 2.9. *Sejam X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Então, f é crescente se, e somente se, $-f$ é decrescente.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que f é crescente e sejam x_1 e x_2 dois números reais em X tais que $x_1 < x_2$. Como f é crescente, então $f(x_1) < f(x_2)$ e assim, $-f(x_1) > -f(x_2)$. Portanto, $-f$ é decrescente.

Reciprocamente, suponhamos que $-f$ é uma função decrescente e sejam x_1 e x_2 dois números reais em X tais que $x_1 < x_2$. Como f é decrescente, então $-f(x_1) > -f(x_2)$ e assim, $f(x_1) < f(x_2)$. Portanto, f é crescente. □

Definição 2.10. Sejam X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) Diz-se que $f(x_0)$ é um valor *máximo absoluto* de f se $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $x \in X$. O número $f(x_0)$ é chamado *valor máximo* de f;

(b) Diz-se que $f(x_0)$ é um valor *mínimo absoluto* de f se $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in X$. O número $f(x_0)$ é chamado *valor mínimo* de f.

Definição 2.11. Sejam X um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) Diz-se que f é *limitada superiormente*, se existe uma constante real M tal que $f(x) \leq M$, para todo $x \in X$;

(b) Diz-se que f é *limitada inferiormente*, se existe uma constante real m tal que $m \leq f(x)$, para todo $x \in X$;

(c) Diz-se que f é *limitada*, se existem constantes reais m e M tais que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in X$;

(d) Se f não é limitada superiormente, diz-se que f é *ilimitada superiormente*;

(e) Se f não é limitada inferiormente, diz-se que f é *ilimitada inferiormente*;

(f) Se f não é limitada nem superior e nem inferiormente, diz-se que f é *ilimitada*.

Exemplo 2.12. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -10x + 4$. Esta função não é limitada nem inferiormente, nem superiormente, pois não existem constantes m e M tais que $m \leq -10x + 4 \leq M$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, f é ilimitada.

Exemplo 2.13. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x - 10|$. Esta função é limitada inferiormente, pois $0 \leq |x - 10|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.3 Função Polinomial

Definição 2.14. Sejam n um número inteiro não negativo e $a_0, \ldots, a_n$, números reais. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

denomina-se *função polinomial.*

Se $a_n \neq 0$, n é chamado de *grau* da função polinomial f.

(a) Se $n = 0$, a função polinomial f é a função constante. Além disso, se $a_0 \neq 0$, f possui grau 0. A função nula não possui grau;

(b) Se $n = 1$ e $a_1 \neq 0$, a função polinomial f denomina-se *função afim*;[1]

(c) Se $n = 2$ e $a_2 \neq 0$, a função polinomial f denomina-se *função quadrática*;

(d) se $n = 3$ e $a_3 \neq 0$, a função polinomial f denomina-se *função cúbica*;

(e) Se $n = 4$ e $a_4 \neq 0$, a função polinomial f denomina-se *função quártica.*

O conjunto de funções polinomiais munidos das operações de adição e multiplicação de funções usuais, constituem um domínio de integridade.[2] Em particular, satisfaz propriedades análogas às propriedades dos números inteiros.

2.4 Zeros de uma Função

Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que um elemento α pertencente a X é um *zero* (ou, também, chamado de *raiz*) de f se $f(\alpha) = 0$.

Exemplo 2.15. Os zeros da função cúbica $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ são -2, 0 e 3. Com efeito, temos que $f(x) = x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6) = x(x-3)(x+2)$. Logo, $f(x) = 0$ é equivalente a $x = 0$ ou $x = 3$ ou $x = -2$. Portanto, -2, 0 e 3 são os únicos zeros.

2.5 Polinômios

Definição 2.16. Chama-se *polinômio na indeterminada X com coeficientes reais* a uma expressão formal do tipo

$$p(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i,$$

[1] Alguns autores, consideram função afim sem a condição de que a_1 seja diferente de 0.

[2] Na literatura, existem muitos autores que tratam sobre teoria de domínios de integridade. O leitor interessado, pode ver, por exemplo, em (Gonçalves, 1999).

onde $a_0, \dots, a_n$ são números reais dados, e n é um número inteiro não negativo.

Se $a_n \neq 0$, n é chamado *grau* do polinômio $p(X)$.

O conjunto de polinômios munido de duas operações de *adição* e *multiplicação*, definidas naturalmente constituem um domínio de integridade. A cada função polinomial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

faz-se corresponder um único polinômio

$$\widetilde{f}(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i.$$

Esta correspondência é biunívoca entre o conjunto das funções polinomiais e o conjunto dos polinômios na indeterminada X com coeficientes reais, veja (Lima, 2014). Mais ainda, pode-se mostrar que essa correspondência é um isomorfismo de anéis.[3] Por esse motivo, muitas vezes costuma-se não fazer a distinção entre a função polinomial f e o polinômio $\widetilde{f}(X)$.

Seja $p(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ um polinômio com coeficientes reais dado. Diz-se que um elemento $\alpha \in \mathbb{C}$ é *raiz* de $p(X)$ se $p(\alpha) := \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i = 0$. No caso de α ser um número real (respect. complexo) dizemos que $p(X)$ possui uma raiz real (respect. raiz complexa) α.

[3]Na literatura, existem muitos autores que tratam sobre teoria de polinômios e anéis. O leitor interessado, pode ver, por exemplo, em (Gonçalves, 1999).

Capítulo 3

Funções Polinomiais de grau menor ou igual a 3

Neste capítulo, serão apresentados definições e propriedades das funções polinomiais, na qual, juntamente com os exemplos abordados nesse trabalho, serão utilizadas no Capítulo 5 com a utilização do GeoGebra no ensino de matemática. O conteúdo deste capítulo possui como referências: (Eves, 2004), (Ivorra, —), (Lima, 2014), (Muniz Neto, 2015), (Pedroso, 2010).

3.1 Função Afim

O matemático grego, Diofanto de Alexandria, teve grande importância para o desenvolvimento da álgebra, sendo considerado por muitos o *Pai da Álgebra*. Diofanto escreveu *Aritmética*, sendo parte deste trabalho dedicado à resolução de 130 problemas, numa variedade considerável, se ocupando, principalmente, de equações determinadas em uma incógnita (Eves, 2004). Ainda, Diofanto utilizou letras para representar um número desconhecido.

Entretanto, a convenção atual de se usar as últimas letras do alfabeto para indicar as incógnitas e as primeiras para as constantes foi introduzida por Descartes em 1637 (Eves, 2004).

Lembre-se que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *afim* quando existem números reais a e b, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$. O número b é chamado *termo independente*.

Observação 3.1. Uma função afim f, definida por $f(x) = ax + b$, possui um único zero $x = -\frac{b}{a}$. De fato, $f(x) = 0$ se, e somente se, $ax + b = 0$, o qual, pela sua vez, é equivalente a $x = -\frac{b}{a}$.

Proposição 3.2. *Se f é uma função afim, então f é bijetiva. Em particular,* $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

Demonstração. Sejam a e b números reais, com $a \neq 0$ tais que $f(x) = ax + b$. Provemos que f é injetiva. De fato, sejam x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Desse modo, $ax_1 + b = ax_2 + b$, que é equivalente a $ax_1 = ax_2$. Logo, $x_1 = x_2$, pois $a \neq 0$. Assim, f é injetiva.

Vejamos agora que f é sobrejetiva. Dado $y \in \mathbb{R}$, consideremos a função afim $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = ax + (b - y) = f(x) - y$. Pela Observação 3.1, a equação $g(x) = 0$ possui uma única solução $x = \frac{y-b}{a}$. Como $g(x) = 0$ é equivalente a $f(x) = y$, segue que $f\left(\frac{y-b}{a}\right) = y$. Logo, f é sobrejetiva. □

Observação 3.3. Pela Proposição 3.2, toda função afim é ilimitada.

Definição 3.4. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se *linear* quando existe um número real a diferente de 0 tal que $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

A função linear é um caso particular da função afim, quando o termo independente é nulo.

Proposição 3.5. *Seja f uma função afim, definida por $f(x) = ax + b$.*

(1) *se $a > 0$, então f é crescente;*

(2) *se $a < 0$, então f é decrescente.*

Demonstração.

(1) Sejam x_1 e x_2 dois números reais tais que $x_1 < x_2$. Então,

$$f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1).$$

Como $x_2 - x_1 > 0$ e $a > 0$, segue que $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) > 0$. Desse modo, $f(x_1) < f(x_2)$ e a função f é crescente.

(2) Consideremos $g = -f$, isto é, $g(x) = (-a)x + (-b)$. Como $a < 0$, então $-a > 0$ e assim, pelo item (1), g é crescente. Logo, pela Proposição 2.9, f é decrescente.

□

3.2 Função Quadrática

(Pedroso, 2010) retrata que os egípcios dominavam algumas técnicas para a resolução das equações do 2º grau. Apesar dos poucos registros, um exemplo se encontra no

Papiro de Berlim, aproximadamente em 1950 a.C. De acordo com o mesmo autor, o primeiro registro envolvendo equações desse tipo, datam por volta de 1700 a.C., entretanto, esse método, que era utilizado pelos mesopotâmios, fornecia apenas uma raiz positiva.

Assim, para a resolução de equações quadráticas, eram oferecidas várias equações específicas e, explicado o passo a passo de como proceder para resolver cada exemplo (Eves, 2004).

Com relação aos gregos, (Pedroso, 2010) diz que a preferência por geometria e a dificuldade com os números racionais e irracionais, levou essa civilização (500 a 200 a.C.) a solucionar equações do 2º grau, desenvolvendo um tratamento geométrico.

Já na Índia, surgiram grandes nomes que contribuíram para a resolução da equação do 2º grau, dentre os quais se destaca Bhaskara (1114 - 1185), cuja regra que usava, originou a fórmula que conhecemos atualmente como *Fórmula de Bhaskara* (veja o Teorema 3.6).

Lembre-se que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada *quadrática*, quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

A seguir expressaremos o trinômio $ax^2 + bx + c$ numa outra forma equivalente. Para cada $x \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]. \tag{3.1}$$

Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2}$, de (3.1), segue que

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \tag{3.2}$$

Teorema 3.6. *Seja f uma função quadrática, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$. A função f possui zero se, e somente se, $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. Mais precisamente,*

(1) *se $\Delta = 0$, a função f possui um único zero $x_1 = -\frac{b}{2a}$;*

(2) *se $\Delta > 0$, a função f possui exatamente dois zeros $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.*

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que f possui um zero x_0. Então, $f(x_0) = 0$ ou, equivalentemente, $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$. O qual, pela sua vez, por (3.2), equivale a $a\left[\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = 0$. Sendo $a \neq 0$, isto é equivalente a

$$\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{3.3}$$

Como $\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, $4a^2 > 0$, a equação (3.3) implica que $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

Reciprocamente, suponha que $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. Logo, por (3.2), tem-se que $f(x) = 0$ se, e somente se, $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$, ou equivalentemente,

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0. \tag{3.4}$$

Consideremos, agora, os casos $\Delta = 0$ e $\Delta > 0$.

(1) Se $\Delta = 0$, de (3.4), a função f possui um único zero $x = -\frac{b}{2a}$;

(2) Se $\Delta > 0$, de (3.4), tem-se que os únicos zeros de f são $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

□

O número real $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado *discriminante* da função quadrática f. A fórmula do item (2) é chamada de *Fórmula de Bhaskara* e, em geral, ela é sempre válida toda vez que o discriminante Δ seja maior ou igual a zero. Observe, pelo Teorema 3.6, se o discriminante for negativo, a função f não possui zero.

No caso de termos um polinômio de grau 2 com coeficientes reais, a fórmula de Bhaskara sempre é válida para calcular raízes no corpo dos números complexos.

Proposição 3.7. *Seja f uma função quadrática, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.*

(1) *se $a > 0$, então* $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{b^2-4ac}{4a}, +\infty\right)$;

(2) *se $a < 0$, então* $\operatorname{Im} f = \left(-\infty, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$.

Demonstração.

(1) Provemos, inicialmente, que $\operatorname{Im} f \subset \left[-\dfrac{b^2-4ac}{4a}, +\infty\right)$. Com efeito, se $y \in \operatorname{Im} f$, então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Logo, $ax^2 + bx + (c - y) = 0$. Então, pelo Teorema 3.6, segue que $\Delta = b^2 - 4a(c-y) \geq 0$. Assim, $4ay \geq -(b^2 - 4ac)$. Como $a > 0$, segue que $y \geq -\frac{b^2-4ac}{4a}$. Portanto, $y \in \left[-\frac{b^2-4ac}{4a}, +\infty\right)$ e, desse modo,

$$\operatorname{Im} f \subset \left[-\frac{b^2-4ac}{4a}, +\infty\right). \tag{3.5}$$

Mostremos, agora, que $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a}, +\infty\right) \subset \operatorname{Im} f$. De fato, dado $y \in \left[-\frac{b^2-4ac}{4a}, +\infty\right)$. Dessa forma, tem-se $y \geq -\frac{b^2-4ac}{4a}$. Como $a > 0$, temos $4ay \geq -(b^2 - 4ac)$ e, assim, $\Delta = b^2 - 4a(c - y) \geq 0$. Logo, pelo Teorema 3.6, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $ax_0^2 + bx_0 + (c-y) = 0$, ou equivalentemente, $f(x_0) = y$. Então, $y \in \operatorname{Im} f$. Portanto,

$$\left[-\frac{b^2-4ac}{4a},+\infty\right) \subset \operatorname{Im} f. \tag{3.6}$$

De (3.5) e (3.6), temos que $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{b^2-4ac}{4a},+\infty\right)$.

(2) Provemos, inicialmente, que $\operatorname{Im} f \subset \left(-\infty,-\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$. Com efeito, se $y \in \operatorname{Im} f$, então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) = ax^2+bx+c$. Logo, $ax^2+bx+(c-y)=0$. Então, pelo Teorema 3.6, segue que $\Delta = b^2-4a(c-y) \geq 0$. Assim, $4ay \geq -(b^2-4ac)$. Como $a<0$, segue que $y \leq -\frac{b^2-4ac}{4a}$. Portanto, $y \in \left(-\infty,-\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$ e, desse modo,

$$\operatorname{Im} f \subset \left(-\infty,-\frac{b^2-4ac}{4a}\right]. \tag{3.7}$$

Mostremos, agora, que $\left(-\infty,-\frac{b^2-4ac}{4a}\right] \subset \operatorname{Im} f$. De fato, dado $y \in \left(-\infty,-\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$, tem-se $y \leq -\frac{b^2-4ac}{4a}$. Como $a<0$, temos $4ay \geq -(b^2-4ac)$ e, assim, $\Delta = b^2 - 4a(c-y) \geq 0$. Logo, pelo Teorema 3.6, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $ax_0^2+bx_0+(c-y)=0$, ou equivalentemente, $f(x_0)=y$. Então, $y \in \operatorname{Im} f$. Portanto,

$$\left(-\infty,-\frac{b^2-4ac}{4a}\right] \subset \operatorname{Im} f. \tag{3.8}$$

De (3.7) e (3.8), temos que $\operatorname{Im} f = \left(-\infty,-\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$.

□

Corolário 3.8. *Seja f uma função quadrática, definida por $f(x)=ax^2+bx+c$.*

(1) *se $a>0$, então f possui mínimo absoluto em $x=-\frac{b}{2a}$. O mínimo absoluto de f é $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$;*

(2) *se $a<0$, então f possui máximo absoluto em $x=-\frac{b}{2a}$. O máximo absoluto de f é $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.*

Demonstração. Temos que

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c = a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c = \frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}.$$

Portanto,

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2-4ac}{4a}. \tag{3.9}$$

Provemos, agora, o item (1). Como $a > 0$, pelo item (1) da Proposição 3.7, tem-se que $f(x) \geq -\frac{b^2-4ac}{4a}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. No entanto, por (3.9), $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. Então, $f\left(-\frac{b}{2a}\right) \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e, assim, f possui mínimo absoluto em $x = -\frac{b}{2a}$.

A fim de provar o item (2) supomos que $a < 0$. Então, pelo item (2) da Proposição 3.7, tem-se que $f(x) \leq -\frac{b^2-4ac}{4a}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. No entanto, por (3.9), $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. Logo, $f\left(-\frac{b}{2a}\right) \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e, assim, f possui máximo absoluto em $x = -\frac{b}{2a}$. □

Observação 3.9. Quando $a > 0$, a função quadrática f, definida por $f(x) = ax^2+bx+c$, não assume valor máximo, ou seja, é uma função ilimitada superiormente (cf. Proposição 3.7 (1)). Analogamente, quando $a < 0$, f não assume valor mínimo, isto é, f é uma função ilimitada inferiormente, (cf. Proposição 3.7 (2)).

Proposição 3.10. *Seja f uma função quadrática, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.*

(1) *se $a > 0$, então f é decrescente em $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ e crescente em $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$;*

(2) *se $a < 0$, então f é crescente em $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ e decrescente em $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.*

Demonstração.

(1) Vejamos, inicialmente, que f é crescente em $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. De fato, sejam x_1 e x_2 em $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ tais que $x_1 < x_2$. Então,

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (ax_2^2 + bx_2 + c) - (ax_1^2 + bx_1 + c) \\ &= a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) \\ &= a(x_2 - x_1)\left(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

Como $x_2 > x_1 \geq -\frac{b}{2a}$, segue que $x_2 + \frac{b}{2a} > 0$ e $x_1 + \frac{b}{2a} \geq 0$. Logo, $x_2 + x_1 + \frac{b}{a} > 0$. Tem-se, também, que $x_2 - x_1 > 0$ e $a > 0$. Então,

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)\left(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}\right) > 0.$$

Desse modo, $f(x_1) < f(x_2)$ Portanto, f é crescente em $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

Provemos, agora, que f é decrescente em $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$. Com efeito, consideremos x_1 e x_2 em $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$, tais que $x_1 < x_2$. Como $x_1 < x_2 \leq -\frac{b}{2a}$, segue que $x_1 + \frac{b}{2a} < 0$ e $x_2 + \frac{b}{2a} \leq 0$. Logo, $x_2 + x_1 + \frac{b}{a} < 0$. Tem-se, também, que $x_2 - x_1 > 0$ e $a > 0$. Então,

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)\left(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}\right) < 0.$$

Desse modo, $f(x_2) < f(x_1)$. Portanto, f é decrescente em $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.

(2) Consideremos a função g, tal que $g(x) = -f(x) = (-a)x^2 + (-b)x + (-c)$. Como $a < 0$ segue que $-a > 0$. Então, pelo item (1), g é decrescente em $\left(-\infty, -\frac{-b}{2(-a)}\right] = \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ e crescente em $\left[-\frac{-b}{2(-a)}, +\infty\right) = \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. Portanto, pela Proposição 2.9, f é crescente em $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ e decrescente em $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

$\square$

3.3 Função Cúbica

Em conformidade com (Eves, 2004), dentre as descobertas mais surpreendentes do século XVI, por matemáticos italianos são as soluções algébricas das equações cúbicas e quárticas. O mesmo autor nos relata que por volta de 1515, Scipione del Ferro $(1465 - 1526)$, professor de matemática da Universidade de Bolonha, encontrou uma forma geral de resolver equações da forma $x^3 + px + q = 0$. O bolonhês Spicione morreu sem publicar sua descoberta, mas o revelou para seu aluno, Antônio Maria Fior.

Na época, era comum os estudiosos desafiarem uns aos outros com a resolução de problemas. Após Nicolo Fontana de Brescia, mais conhecido como Tartaglia, que em italiano significa Tartamudo (gago), anunciar ter descoberto a solução algébrica de equações cúbicas da forma $x^3 + mx^2 + n = 0$ em 1535, foi desafiado em uma disputa pública, por Fior, a resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$ (Eves, 2004).

(Eves, 2004) retrata ainda, que no dia marcado, Fior obteve resposta do desafio junto com novos problemas que não foi capaz de resolver e desse modo, Tartaglia triunfou ao conseguir solucionar dois tipos de cúbicas.

Entusiasmado no assunto, Girolamo de Cardano trocou correspondências com Tartaglia, que mostrou a resolução de um caso da equação cúbica. Mesmo, jurando a Tartaglia que não divulgaria a regra, Cardano publicou a solução da cúbica no seu Ars Magna, em 1545. E assim, a solução conseguida por Tartaglia ficou conhecida como *Fórmula de Cardano* (Eves, 2004).

Lembrem-se que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada *cúbica* quando existem números reais a, b, c e d com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

É um fato conhecido que toda função polinomial de grau ímpar tem ao menos um zero real, isto é uma consequência do Teorema do Valor Intermediário (Lima, 2013). Em particular, a função cúbica possui ao menos um zero. Ainda mais, utilizando a teoria de números complexos as funções cúbicas são totalmente analisadas e podem ser resumidas no seguinte resultado que enunciamos sem demonstração (cf. (Ivorra, —)).

Teorema 3.11. *Consideremos a função cúbica f, definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Sejam $p = \frac{-b^2+3ac}{3a^2}$, $q = \frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}$ e $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$.*

(1) *Se $D = 0$ a função cúbica possui no máximo dois zeros. Mais precisamente,*

(a) *Se $p = q = 0$ a função cúbica possui um único zero dado por $x = -\frac{b}{3a}$;*

(b) *Se $pq \neq 0$ a função cúbica possui dois zeros dados por $x_1 = \frac{3q}{p} - \frac{b}{3a}$ e $x_2 = \frac{-3q}{2p} - \frac{b}{3a}$.*

(2) *Se $D > 0$ a função cúbica possui um único zero dado por $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} - \frac{b}{3a}$;*

(3) *Se $D < 0$ a função cúbica possui três zeros dados por $x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\frac{\theta}{3}) - \frac{b}{3a}$, $x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\frac{\theta+2\pi}{3}) - \frac{b}{3a}$ e $x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(\frac{\theta+4\pi}{3}) - \frac{b}{3a}$, onde $\theta = \arccos \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$.*

O número real $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ é chamado *discriminante* da função cúbica f. A fórmula do item (2) é chamada de *Fórmula de Cardano* e, em geral, ela é sempre válida toda vez que o discriminante D seja maior ou igual a zero. A diferença entre a função quadrática e a função cúbica é que na primeira nem sempre a função possui zero.

No caso de termos um polinômio de grau 3 com coeficientes reais, a fórmula de Cardano sempre é válida para calcular raízes no corpo dos números complexos.

Nos exemplos a seguir, utilizaremos as mesmas notações do Teorema 3.11.

Exemplo 3.12. Encontremos os zeros da função cúbica f, definida por $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$. Temos que $a = 1$, $b = -5$, $c = 8$ e $d = -4$. Desse modo,

$$p = \frac{-b^2 + 3ac}{3a^2} = \frac{-(-5)^2 + 3 \cdot 1 \cdot 8}{3 \cdot 1^2} = \frac{-25 + 24}{3} = -\frac{1}{3}$$

e

$$\begin{aligned} q = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3} &= \frac{2(-5)^3 - 9 \cdot 1 \cdot (-5) \cdot 8 + 27 \cdot 1^2 \cdot (-4)}{27 \cdot 1^3} \\ &= \frac{-250 + 360 - 108}{27} \\ &= \frac{2}{27}. \end{aligned}$$

Neste caso, tem-se que $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{\frac{4}{729}}{4} + \frac{\frac{-1}{27}}{27} = \frac{1}{729} - \frac{1}{729} = 0$ e sendo $pq = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{27} = -\frac{2}{81} \neq 0$, pelo Teorema 3.11 (1), segue que a função cúbica possui exatamente dois zeros dados por

$$x_1 = \frac{3q}{p} - \frac{b}{3a} = \frac{3\frac{2}{27}}{\frac{-1}{3}} - \frac{-5}{3 \cdot 1} = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

e

$$x_2 = -\frac{3q}{2p} - \frac{b}{3a} = \frac{-3 \cdot \frac{2}{27}}{2 \cdot \frac{-1}{3}} - \frac{-5}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

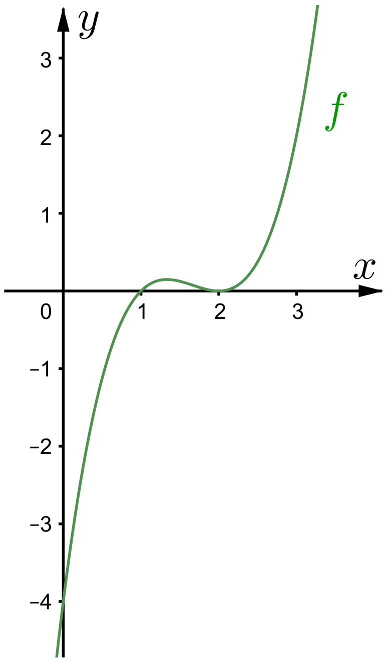


Figura 3.1: Função cúbica $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$
Fonte: elaborada pela autora

O gráfico de f é representado na Figura 3.1.

No Exemplo 3.12 vimos uma aplicação direta do Teorema 3.11. No entanto, neste caso, como $D = 0$, podemos resolvê-la, utilizando o fórmula de Cardano, obtendo-se

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{2}{27 \cdot 2} + \sqrt{\frac{4}{729 \cdot 4} - \frac{1}{27 \cdot 27}}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{27 \cdot 2} - \sqrt{\frac{4}{729 \cdot 4} - \frac{1}{27 \cdot 27}}} - \frac{-5}{3} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{1}{27} + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{27} - \sqrt{0}} + \frac{5}{3} \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \\ &= 1. \end{aligned}$$

A fórmula nos dá o zero $x_1 = 1$ da função cúbica $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$. Dividindo $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ por $x - 1$, obtemos $f(x) = (x-1)(x^2 - 4x + 4)$. Agora, podemos analisar a existência dos zeros da função quadrática $g(x) = x^2 - 4x + 4$, pela fórmula de Bhaskara. Temos que o discriminante da função quadrática g é $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$. Logo, pelo Teorema 3.6, g possui um único zero dado por

$$x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2.$$

Portanto, os zeros de f são $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ e, podemos escrever, $f(x) = (x-1)(x-2)^2$.

Exemplo 3.13. Encontremos os zeros da função cúbica f, definida por $f(x) = x^3 - 6x - 9$. Utilizemos o mesmos argumentos do Exemplo 3.12. Temos que, $a = 1$, $b = 0$, $c = -6$ e $d = -9$. Desse modo,

$$p = \frac{-b^2 + 3ac}{3a^2} = \frac{-18}{3} = -6$$

e

$$q = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3} = -\frac{243}{27} = -9.$$

Neste caso, tem-se que $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{81}{4} + \frac{-216}{27} = \frac{2187-864}{108} = \frac{1323}{108} = \frac{49}{4} > 0$. Logo, pelo Teorema 3.11 (2) (fórmula de Cardano), a função cúbica possui um único zero dado por

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{-\frac{-9}{2} + \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-9}{2} - \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} - \frac{0}{3} \\
&= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{1323}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{1323}{108}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} \\
&= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} \\
&= 2 + 1 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

O gráfico de f é representado na Figura 3.2.

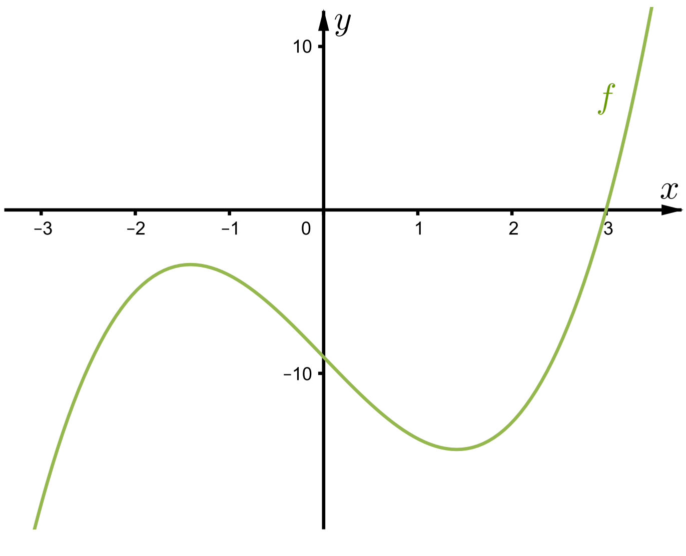


Figura 3.2: Função cúbica $f(x) = x^3 - 6x - 9$
Fonte: elaborada pela autora

No Exemplo 3.13 vimos uma aplicação direta do Teorema 3.11. No entanto, neste caso, como $x_1 = 3$ é um zero da função cúbica $f(x) = x^3 - 6x - 9$, dividindo $x^3 - 6x - 9$ por $x - 3$, obtemos $f(x) = (x-3)(x^2 + 3x + 3)$. Agora, podemos analisar a existência de zeros da função quadrática $g(x) = x^2 + 3x + 3$, pela Fórmula de Bhaskara. Temos que o discriminante da função quadrática g é $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3 < 0$. Logo, pelo Teorema 3.6, g não possui zeros. Portanto, o único zero de f é $x_1 = 3$.

Exemplo 3.14. Encontremos os zeros da função cúbica f, definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Da mesma forma que os dois exemplos anteriores, temos que $a = 1$, $b = -6$, $c = 11$ e $d = -6$. Desse modo,

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} = \frac{3 \cdot 11 - (-6)^2}{3} = \frac{33 - 36}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

e

$$q = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3} = \frac{2 \cdot (-6)^3 - 9 \cdot (-6) \cdot 11 + 27 \cdot (-6)}{27} = \frac{-432 + 594 - 162}{27} = 0.$$

Neste caso, tem-se que $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0 + \frac{(-1)^3}{27} = -\frac{1}{27} < 0$. Logo, pelo Teorema 3.11 (3), a função cúbica possui três zeros e são dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{b}{3a}, \\ x_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a}, \\ x_3 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) - \frac{b}{3a}, \end{aligned}$$

onde $\theta = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$. Portanto,

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{-6}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{3} = 1 + 2 = 3,$$

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{-6}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{3} = -1 + 2 = 1,$$

e

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{-6}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 + \frac{6}{3} = 0 + 2 = 2.$$

são os zeros de f.

O gráfico de f é representado na Figura 3.3.

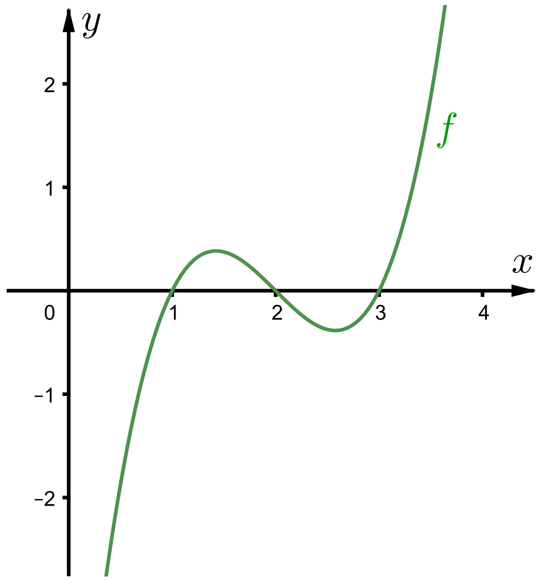


Figura 3.3: Função cúbica $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
Fonte: elaborada pela autora

No Exemplo 3.14 vimos uma aplicação direta do Teorema 3.11. No entanto, se estivéssemos trabalhando com polinômios dentro do corpo dos números complexos, a fórmula de Cardano nos dá o zero $x_3 = 2$ do polinômio $\widetilde{f}(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$. Dividindo $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ por $X - 2$, obtemos $\widetilde{f}(X) = (X - 2)(X^2 - 4X + 3)$. Logo, a função polinomial f pode ser escrita como $f(x) = (x - 2)(x^2 - 4x + 3)$. Agora, podemos analisar a existência de zeros da função quadrática $g(x) = x^2 - 4x + 3$, pela fórmula de Bhaskara. Temos que o discriminante da função quadrática g é $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$. Logo, pelo Teorema 3.6, g possui dois zeros dados por

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}.$$

Desse modo, os zeros restantes são $x_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$ e $x_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Assim, os zeros de f são $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$.

Capítulo 4

Transformações de Funções

Uma *transformação* T do plano $\mathbb{R}^2$ é uma função $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, isto é, uma correspondência que associa a cada ponto P do plano outro ponto $P_1 = T(P)$ do plano.

Existem vários tipos de transformações do plano. Mas, nesse capítulo, daremos ênfase às *translações* (vertical e horizontal), às *reflexões* (vertical e horizontal), à *homotetia*, à *expansão* e à *compressão*.

Com o auxílio de conhecimentos de transformações, podemos obter diversos outros gráficos a partir dos originais, podendo ser utilizadas no estudo de funções mais complexas. Para o desenvolvimento desse capítulo, foi utilizado como referência (Lima, 2002).

Definição 4.1. Sejam a, b, c, d, p e q números reais dados. A função $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (ax + by + p, cx + dy + q)$, denomina-se *transformação afim.*

A transformação afim T, também, costuma-se escrever como

$$T(x, y) = x(a, c) + y(b, d) + (p, q),$$

ou ainda,

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Uma transformação afim pode não ser injetiva, por exemplo, dados números reais p e q, a transformação constante $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (p, q)$ não é injetiva. Com efeito, dados pontos distintos $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$, temos que $T(x_1, y_1) = (p, q) = T(x_2, y_2)$.

Dentre estas transformações, abordaremos aquelas que são biunívocas, principalmente, as isometrias, homotetias, expansões e compressões.

Teorema 4.2. *Sejam a, b, c, d, p e q números reais dados. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (ax + by + p, cx + dy + q)$. A transformação T é bijetiva se, e somente se,*

$ad - bc \neq 0$. *Neste caso,*

$$T^{-1}(x,y) = \left(\frac{d}{ad-bc}x + \frac{-b}{ad-bc}y + \frac{bq-dp}{ad-bc}, \frac{-c}{ad-bc}x + \frac{a}{ad-bc}y + \frac{pc-aq}{ad-bc}\right).$$

Demonstração. Suponhamos inicialmente que T seja bijetiva. Logo, existe um único ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (0,0)$. Como $(ax+by+p, cx+dy+q) = (0,0)$, então

$$\begin{aligned} ax + by + p &= 0, \\ cx + dy + q &= 0. \end{aligned}$$

Isto é equivalente dizer que o sistema linear

$$\begin{aligned} aX + bY &= -p, \\ cX + dY &= -q. \end{aligned}$$

possui uma única solução. Portanto, pela Regra de Cramer, $ad - bc \neq 0$.

Reciprocamente, se $ad - bc \neq 0$, consideremos $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $G(x,y) = \left(\frac{dx-by+bq-dp}{ad-bc}, \frac{-cx+ay+pc-aq}{ad-bc}\right)$. Provemos que, $T \circ G = id_{\mathbb{R}^2} = G \circ T$. De fato, se (x,y) pertence a $\mathbb{R}^2$ então

$$\begin{aligned} T \circ G(x,y) =& T(G(x,y)) \\ =& T\left(\frac{dx-by+bq-dp}{ad-bc}, \frac{-cx+ay+pc-aq}{ad-bc}\right) \\ =& \left(\frac{adx-aby+abq-adp}{ad-bc} + \frac{-bcx+aby+bcp-abq}{ad-bc} + \frac{adp-bcp}{ad-bc},\right. \\ & \left.\frac{cdx-bcy+bcq-cdp}{ad-bc} + \frac{-cdx+ady+cdp-adq}{ad-bc} + \frac{adq-bcq}{ad-bc}\right) \\ =& \left(\frac{ad-bc}{ad-bc}x, \frac{ad-bc}{ad-bc}y\right) \\ =& (x,y) \end{aligned}$$

e,

$$
\begin{aligned}
G \circ T(x,y) =& G(T(x,y))\\
=& G\left(\frac{ax+by+p}{ad-bc}, \frac{cx+dy+q}{ad-bc}\right)\\
=& \left(\frac{d(ax+by+p)}{ad-bc} - \frac{b(cx+dy+q)}{ad-bc} + \frac{bq-dp}{ad-bc},\right.\\
& \left. -\frac{c(ax+by+p)}{ad-bc} + \frac{a(cx+dy+q)}{ad-bc} + \frac{pc-aq}{ad-bc}\right)\\
=& \left(\frac{adx+bdy+dp-bcx-bdy-bq+bq-dp}{ad-bc},\right.\\
& \left.\frac{-acx-bcy-pc+acx+ady+aq+pc-aq}{ad-bc}\right)\\
=& \left(\frac{ad-bc}{ad-bc}x, \frac{ad-bc}{ad-bc}y\right)\\
=& (x,y).
\end{aligned}
$$

Isto mostra que T é bijetiva e $T^{-1} = G$. □

4.1 Isometria

Isometria são movimentos do plano que preservam as distâncias entre dois pontos, ou seja, essas transformações mudam a posição dos objetos preservando suas características como ângulos, comprimento dos lados, distância, tamanhos, dando origem figuras congruentes.

Definição 4.3. Diz-se que uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma *isometria* se

$$||(T(P) - T(Q)|| = ||P - Q||,$$ [1]

para quaisquer pontos P e Q de $\mathbb{R}^2$.

Assim, a isometria é uma função que preserva distâncias.

Teorema 4.4. *Toda isometria é injetiva.*

Demonstração. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma isometria. Sejam $P, Q \in \mathbb{R}^2$ tais que $T(P) = T(Q)$. Então, $||P - Q|| = ||T(P) - T(Q)|| = 0$. Logo, $P = Q$. Assim, T é injetiva. □

Pode-se mostrar que toda isometria tem uma das seguintes formas:

$$T(x,y) = (cx - dy + a, dx + cy + b)$$

[1] A *norma* de um vetor $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, denotada por $||v||$, define-se como $||v|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ou

$$T(x, y) = (cx + dy + a, dx - cy + b),$$

onde a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ e $c^2 + d^2 = 1$, veja (Lima, 2002).

Doravante, os resultados apresentados neste capítulo, os quais são conhecidos e utilizados na literatura, mas não explicados em detalhes, foram desenvolvidos conjuntamente com meu orientador, a quem agradeço.

4.1.1 Translações

As isometrias mais simples são as *translações*. A *translação* é uma transformação $T_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T_{(a,b)}(x, y) = (x + a, y + b)$, onde a e b são números reais dados.

Geometricamente, uma translação do plano segundo o vetor (a, b) é a correspondência na qual todos os pontos do plano se deslocam numa mesma direção, sentido e preservando a mesma distância. Em particular, uma figura no plano é preservada na sua forma original, como na Figura 4.1.

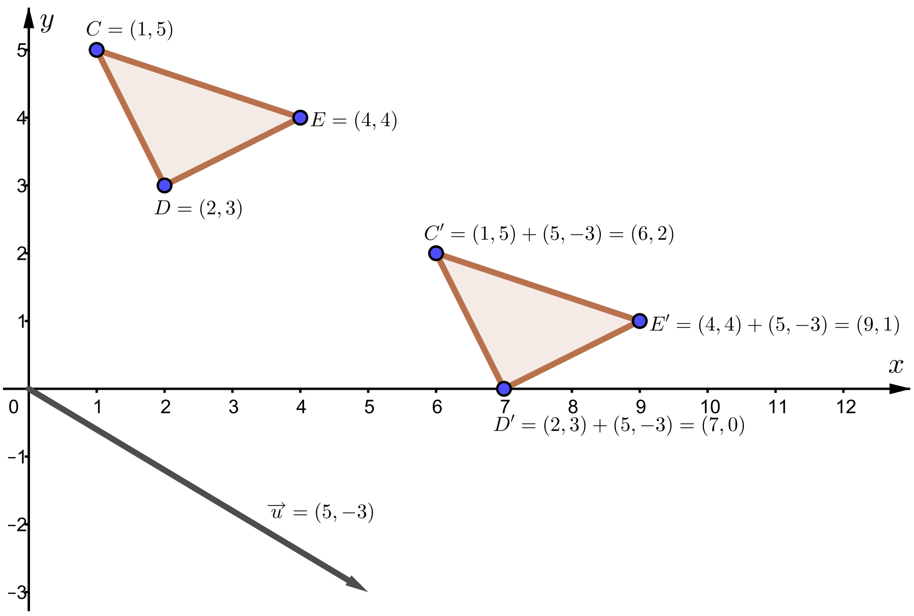


Figura 4.1: Translação de uma figura por um vetor
Fonte: elaborada pela autora

A seguir estudaremos dois tipos particulares de translações: a *translação vertical* e a *translação horizontal*.

4.1.1.1 Translação Vertical

A translação $T_{(0,b)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ denomina-se *translação vertical*.

Neste caso, os subconjuntos do plano são deslocados verticalmente (veja Figura 4.2). Em particular, a translação $T_{(0,b)}$ leva o gráfico de uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ no gráfico da função $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) + b$, onde X é um subconjunto de $\mathbb{R}$, como veremos na Proposição 4.5.

No que segue, denotaremos por $X+a = \{x+a : x \in X\}$, onde X é um subconjunto de $\mathbb{R}$ e a é um número real dado. Note que, se $X = \mathbb{R}$ então $X + a = \mathbb{R}$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

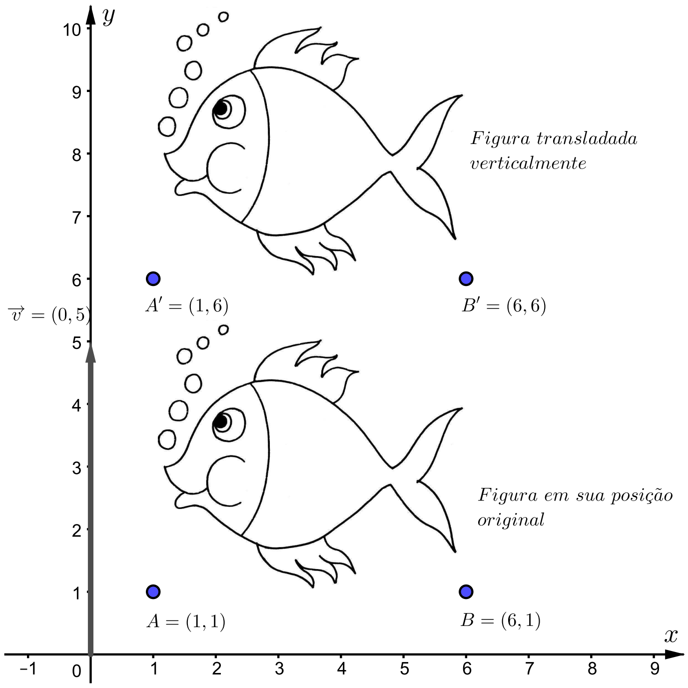


Figura 4.2: Translação Vertical
Fonte: elaborada pela autora
Fonte do desenho:
<http://www.colorir.blog.br/desenhos-para-colorir/peixe-para-colorir>

Proposição 4.5. *Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Considere b um número real e $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) + b$. A imagem do gráfico de f por meio da transformação $T_{(0,b)}$ é o gráfico de g, isto é,*

$$T_{(0,b)}(\operatorname{graf} f) = \operatorname{graf} g.$$

Neste caso, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f + b$.

Demonstração. Provemos, inicialmente, que $T_{(0,b)}(\operatorname{graf} f) \subset \operatorname{graf} g$. De fato, dado $(z, w) \in T_{(0,b)}(\operatorname{graf} f)$, existe $(x, y) \in \operatorname{graf} f$ tal que $(z, w) = T_{(0,b)}(x, y)$. Como $y = f(x)$, segue que $(z, w) = (x, y + b) = (x, f(x) + b)$. Assim, $z = x \in X$ e $w = f(x) + b = f(z) + b = g(z)$. Logo, $(z, w) \in \operatorname{graf} g$. Portanto,

$$T_{(0,b)}(\operatorname{graf} f) \subset \operatorname{graf} g. \tag{4.2}$$

Vejamos, agora, que $\operatorname{graf} g \subset T_{(0,b)}(\operatorname{graf} f)$. Com efeito, seja $(z, w) \in \operatorname{graf} g$, tem-se que $z \in X$ e $w = g(z) = f(z) + b$. Consideremos $x := z \in X$ e $y := f(z)$. Temos que $(x, y) = (z, f(z)) \in \operatorname{graf} f$. Tem-se, também, que $T_{(0,b)}(x, y) = (x, y + b) = (z, f(z) + b) = (z, g(z)) = (z, w)$. Logo, $(z, w) \in T_{(0,b)}(\operatorname{graf} f)$. Portanto,

$$\operatorname{graf} g \subset T_{(0,b)}(\operatorname{graf} f). \tag{4.3}$$

De (4.2) e (4.3) concluímos que, $T_{(0,b)}(\operatorname{graf} f) = \operatorname{graf} g$.

Provemos, agora, que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f + b$. Inicialmente, mostremos que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f + b$. De fato, dado $y \in \operatorname{Im} g$, existe $x \in X$ tal que $y = g(x) = f(x) + b$. Desse modo, $y = f(x) + b \in \operatorname{Im} f + b$. Portanto,

$$\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f + b. \tag{4.4}$$

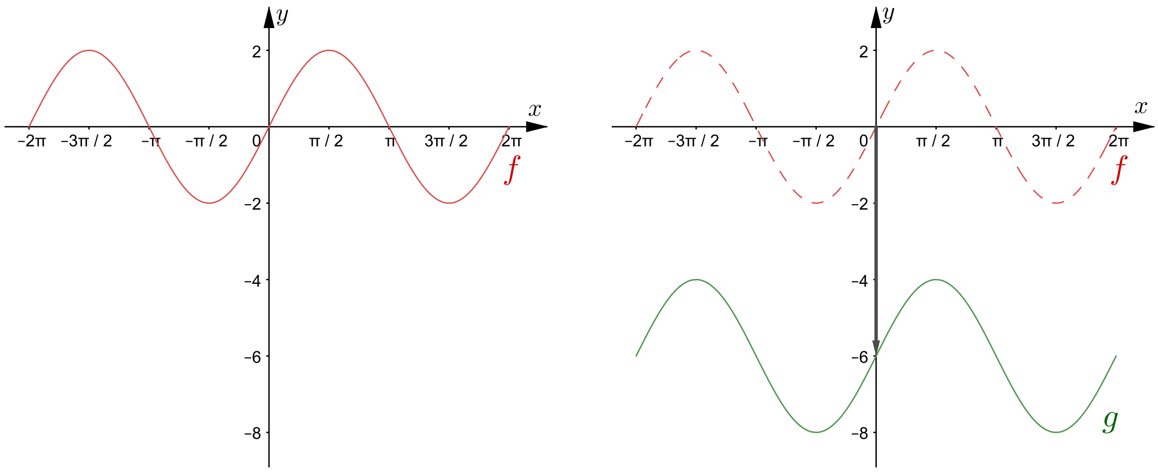
Vejamos, agora, que $\operatorname{Im} f + b \subset \operatorname{Im} g$. Com efeito, seja $y \in \operatorname{Im} f + b$. Então, existe $z \in \operatorname{Im} f$ tal que $y = z + b$. Como $z \in \operatorname{Im} f$, existe $x \in X$ tal que $z = f(x)$. Logo, $y = f(x) + b = g(x)$. Desse modo, segue que $y \in \operatorname{Im} g$. Portanto,

$$\operatorname{Im} f + b \subset \operatorname{Im} g. \tag{4.5}$$

De (4.4) e (4.5) concluímos que, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f + b$. $\square$

Na prática, veremos a seguir como utiliza-se a proposição anterior. Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, onde X é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, considerando as translações verticais e supondo $b > 0$, a fim de obter o gráfico de $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) + b$, desloca-se o gráfico de $y = f(x)$ em b unidades para cima. E para obter o gráfico de $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x) - b$, desloca-se o gráfico de $y = f(x)$ em b unidades para baixo.

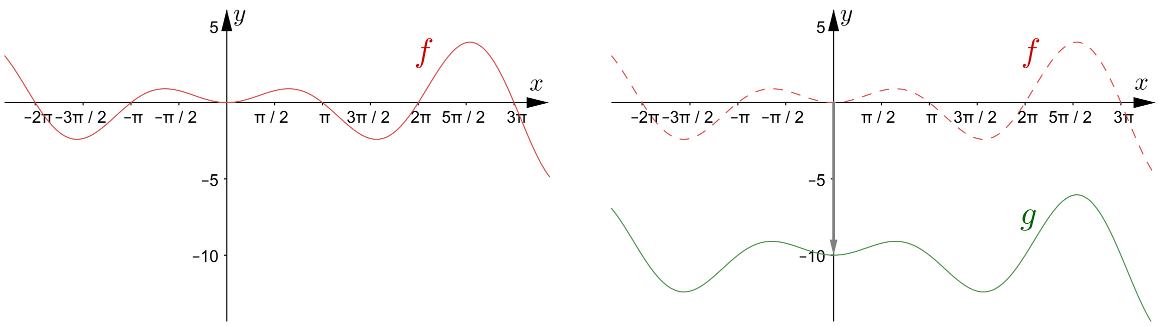
Na Figura 4.3(b), ilustra-se o gráfico da função $g : [-2\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2 \operatorname{sen} x - 6$, a qual foi obtida a partir do gráfico de $f : [-2\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$, que pode ser observada na Figura 4.3(a). Temos que $\operatorname{Im} f = [-2, 2]$ e $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f + (-6) = [-2, 2] - 6 = [-8, -4]$.



(a) Função original (b) Função transladada verticalmente

Figura 4.3: Translação vertical de uma função
Fonte: elaborada pela autora

Na Figura 4.4(b), ilustra-se o gráfico da função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{x}{2}\,\mathrm{sen}\, x - 10$, a qual foi obtida a partir do gráfico de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x}{2}\,\mathrm{sen}\, x$, que pode ser observada na Figura 4.4(a).



(a) Função original (b) Função transladada verticalmente

Figura 4.4: Translação vertical de uma função
Fonte: elaborada pela autora

4.1.1.2 Translação horizontal

A translação $T_{(a,0)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ denomina-se *translação horizontal*.

Neste caso, os subconjuntos do plano são deslocados horizontalmente (veja Figura 4.5). Em particular, a translação $T_{(a,0)}$ leva o gráfico de uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ no gráfico da função $g : X + a \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x - a)$, onde X é um subconjunto de $\mathbb{R}$, como veremos na proposição a seguir.

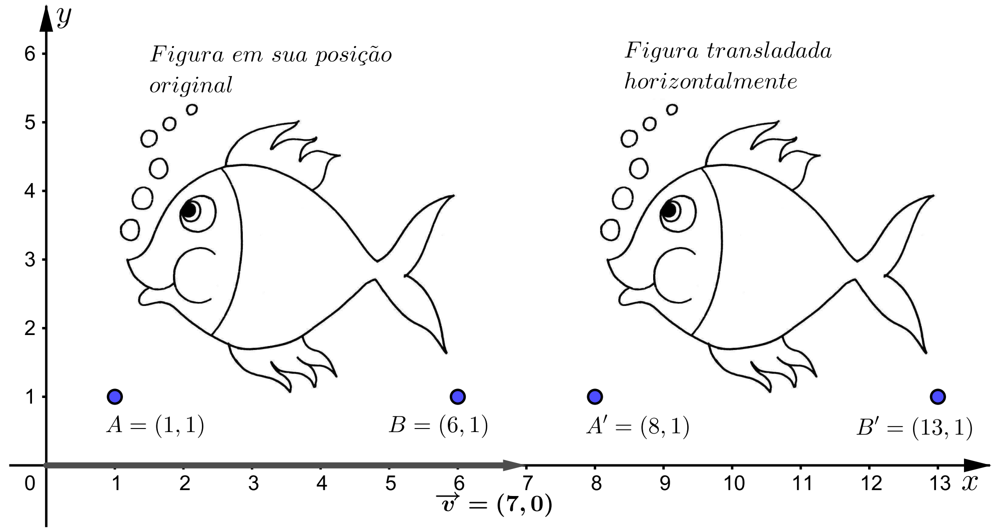


Figura 4.5: Translação Horizontal
Fonte: elaborada pela autora

Proposição 4.6. *Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Considere a um número real e $g : X + a \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x - a)$. A imagem do gráfico de f por meio da transformação $T_{(a,0)}$ é o gráfico de g, isto é,*

$$T_{(a,0)}(\operatorname{graf} f) = \operatorname{graf} g.$$

Neste caso, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$.

Demonstração. Provemos, inicialmente, que $T_{(a,0)}(\operatorname{graf} f) \subset \operatorname{graf} g$. De fato, dado $(z, w) \in T_{(a,0)}(\operatorname{graf} f)$, existe $(x, y) \in \operatorname{graf} f$ tal que $(z, w) = T_{(a,0)}(x, y)$. Como, $y = f(x)$, segue que $(z, w) = (x + a, y) = (x + a, f(x))$. Assim, $z = x + a$ e $w = f(x)$. Como, $x \in X$, temos $z = x + a \in X + a$ e, $g(z) = f(z - a) = f(x) = w$. Logo, $(z, w) \in \operatorname{graf} g$. Portanto,

$$T_{(a,0)}(\operatorname{graf} f) \subset \operatorname{graf} g. \tag{4.6}$$

Vejamos, agora, que $\operatorname{graf} g \subset T_{(a,0)}(\operatorname{graf} f)$. Com efeito, seja $(z, w) \in \operatorname{graf} g$, tem-se que $z \in X + a$ e $w = g(z) = f(z - a)$. Consideremos $x := z - a \in X$ e $y := f(z - a)$. Temos que $(x, y) = (z - a, f(z - a)) \in \operatorname{graf} f$. Tem-se, também, que $T_{(a,0)}(x, y) = (x + a, y) = (z, f(z - a)) = (z, g(z)) = (z, w)$. Logo, $(z, w) \in T_{(a,o)}(\operatorname{graf} f)$. Portanto,

$$\operatorname{graf} g \subset T_{(a,0)}(\operatorname{graf} f). \tag{4.7}$$

De (4.6) e (4.7) concluímos que $T_{(a,0)}(\operatorname{graf} f) = \operatorname{graf} g$.

Provemos, agora, que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$. Inicialmente, mostremos que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$. De fato, dado $y \in \operatorname{Im} g$, existe $z \in X + a$, tal que $y = g(z)$. Logo, $z = x + a$, para algum

$x \in X$. Então, $y = g(x+a) = f((x+a)-a) = f(x)$. Desse modo, $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$. Portanto,

$$\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f. \tag{4.8}$$

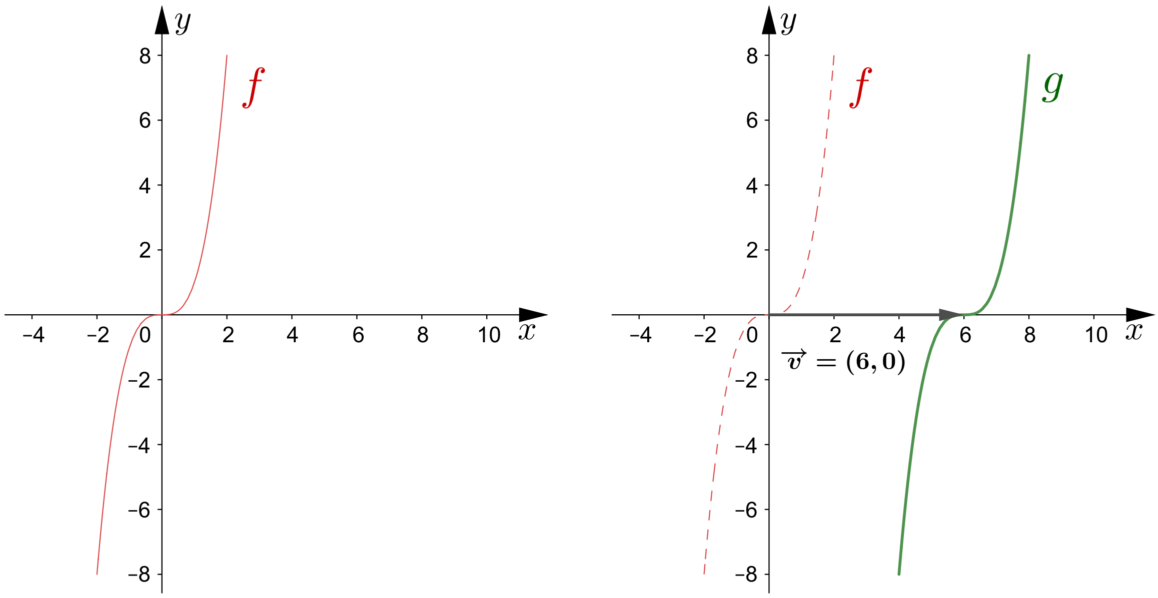
Vejamos, agora, que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$. Com efeito, seja $y \in \operatorname{Im} f$. Então, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Logo, $y = f((x+a)-a) = g(x+a)$. Desse modo, $y = g(x+a)$, com $x + a \in X + a$. Assim, segue que $y \in \operatorname{Im} g$. Portanto,

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g. \tag{4.9}$$

De (4.8) e (4.9) concluímos que, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$. $\square$

Na prática, veremos a seguir como utiliza-se a proposição anterior. Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, onde X é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, considerando as translações horizontais e supondo $a > 0$, a fim de obter o gráfico de $g : X + a \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x-a)$, desloca-se o gráfico de $y = f(x)$ em a unidades para a direita. E para obter o gráfico de $h : X + a \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x+a)$, desloca-se o gráfico de $y = f(x)$ em a unidades para a esquerda.

Na Figura 4.6(b), ilustra-se o gráfico da função $g : [4, 8] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = (x-6)^3$, a qual foi obtida a partir do gráfico de $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$, que pode ser observada na Figura 4.6(a). Temos que $\operatorname{Im} f = [-8, 8] = \operatorname{Im} g$.

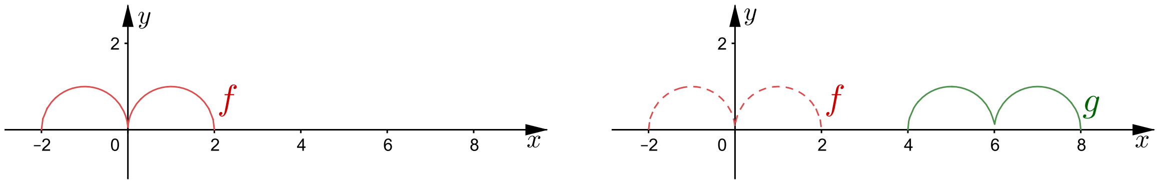


(a) Função original

(b) Função transladada horizontalmente

Figura 4.6: Translação horizontal de uma função
Fonte: elaborada pela autora

Na Figura 4.7(b), ilustra-se o gráfico da função $g : [4, 8] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \sqrt{1 - (|x-6|-1)^2}$, a qual foi obtida a partir do gráfico de $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{1-(|x|-1)^2}$, que pode ser observada na Figura 4.7(a).



(a) Função original

(b) Função transladada horizontalmente

Figura 4.7: Translação horizontal
Fonte: elaborada pela autora

4.1.2 Reflexão

O ponto P_1 chama-se *simétrico* do ponto P em relação à reta r quando r é a mediatriz do segmento PP_1. A *reflexão* em torno da reta r é a transformação T que faz corresponder a cada ponto P do plano o ponto $P_1 = T(P)$, simétrico de P em relação a r. Se A é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $T(A)$ é chamado *simétrico* de A.

Na isometria de reflexão há uma reta e passando pela figura ou fora dela que atua como espelho, refletindo a imagem desenhada. A reta e recebe o nome de *eixo de simetria*. A imagem A e sua simétrica, a imagem B, estão a uma mesma distância do eixo e, como pode ser observado na Figura 4.8.

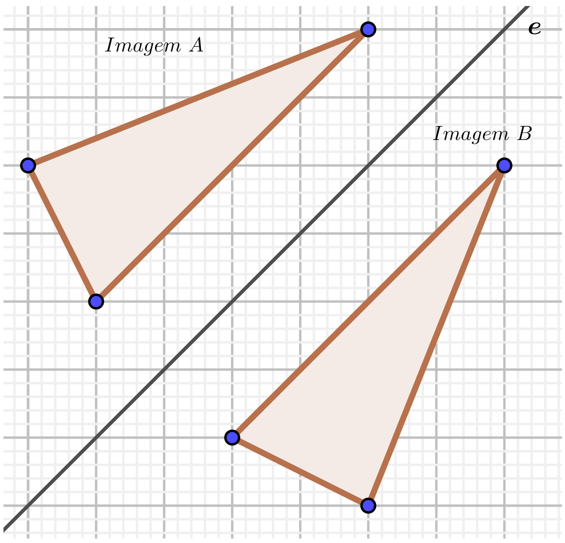


Figura 4.8: Reflexão de uma imagem em relação a reta e
Fonte: elaborada pela autora

A seguir estudaremos dois tipos particulares de reflexão: a *reflexão em torno do eixo x* e a *reflexão em torno do eixo y*.

4.1.2.1 Reflexão em torno do eixo x

A *reflexão em torno do eixo x* é a isometria $R_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $R_1(x, y) = (x, -y)$.

A reflexão em torno do eixo x reflete cada ponto P do plano de coordenadas (x, y) no ponto $R_1(P) = (x, -y)$ (veja Figura 4.9). Em particular, a reflexão R_1, leva o gráfico de uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ no gráfico da função $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -f(x)$, onde X é um subconjunto de $\mathbb{R}$, como veremos na Proposição 4.7.

No que segue, denotaremos por $-X = \{-x : x \in X\}$, onde X é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Note que, se $X = \mathbb{R}$ então $-X = \mathbb{R}$.

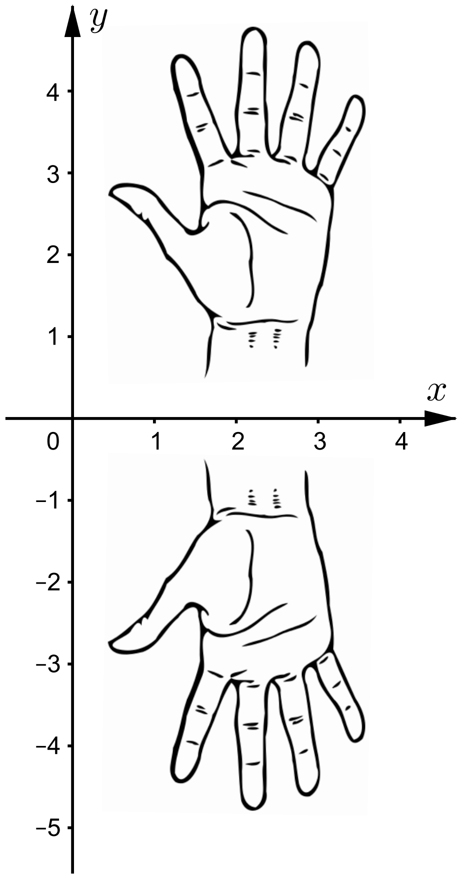


Figura 4.9: Reflexão em torno do eixo x
Fonte: elaborada pela autora
Fonte do desenho: <http://www.tudodesenhos.com/d/palma-da-mao-aberta>

Proposição 4.7. *Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Considere $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -f(x)$. A imagem do gráfico de f por meio da transformação R_1 é o gráfico de g, isto é,*

$$R_1(\operatorname{graf} f) = \operatorname{graf} g.$$

Neste caso, $\operatorname{Im} g = -\operatorname{Im} f$.

Demonstração. Provemos, inicialmente, que $R_1(\operatorname{graf} f) \subset \operatorname{graf} g$. De fato, dado $(z, w) \in R_1(\operatorname{graf} f)$, existe $(x, y) \in \operatorname{graf} f$ tal que $(z, w) = R_1(x, y)$. Como $y = f(x)$, segue que $(z, w) = (x, -y) = (x, -f(x)) = (x, g(x))$. Assim, $z = x \in X$ e $w = g(z)$. Logo, $(z, w) \in \operatorname{graf} g$. Portanto,

$$R_1(\operatorname{graf} f) \subset \operatorname{graf} g. \tag{4.10}$$

Vejamos, agora, que $\operatorname{graf} g \subset R_1(\operatorname{graf} f)$. Com efeito, seja $(z, w) \in \operatorname{graf} g$, tem-se que $z \in X$ e $w = g(z) = -f(z)$. Consideremos, $x := z \in X$ e $y := f(z)$. Temos que $(x, y) = (z, f(z)) \in \operatorname{graf} f$. Tem-se, também, que $R_1(x, y) = (x, -y) = (z, -f(z)) = (z, g(z)) = (z, w)$. Logo, $(z, w) \in R_1(\operatorname{graf} f)$. Portanto,

$$\operatorname{graf} g \subset R_1(\operatorname{graf} f). \tag{4.11}$$

De (4.10) e (4.11) concluímos que, $R_1(\operatorname{graf} f) = (\operatorname{graf} g)$.

Provemos, agora, que $\operatorname{Im} g = -\operatorname{Im} f$. Inicialmente, mostremos que $\operatorname{Im} g \subset -\operatorname{Im} f$. De fato, dado $y \in \operatorname{Im} g$, existe um $x \in X$ tal que $y = g(x) = -f(x)$. Desse modo, $y = -f(x) \in -\operatorname{Im} f$. Portanto,

$$\operatorname{Im} g \subset -\operatorname{Im} f. \tag{4.12}$$

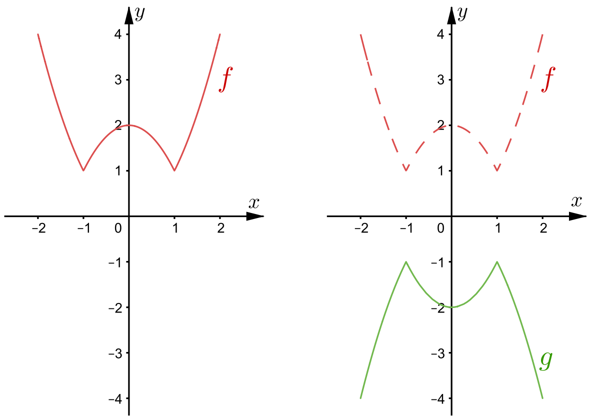
Vejamos, agora, que $-\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$. Com efeito, seja $y \in -\operatorname{Im} f$. Então, existe $z \in \operatorname{Im} f$ tal que $y = -z$. Como $z \in \operatorname{Im} f$, existe $x \in X$ tal que $z = f(x)$. Logo, $y = -f(x) = g(x)$. Desse modo, segue que $y \in \operatorname{Im} g$. Portanto,

$$-\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g. \tag{4.13}$$

De (4.12) e (4.13) concluímos que, $\operatorname{Im} g = -\operatorname{Im} f$. $\square$

Na prática, veremos a seguir como utiliza-se a proposição anterior. Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, onde X é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, considerando a reflexão R_1, a fim de obter o gráfico de $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -f(x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x.

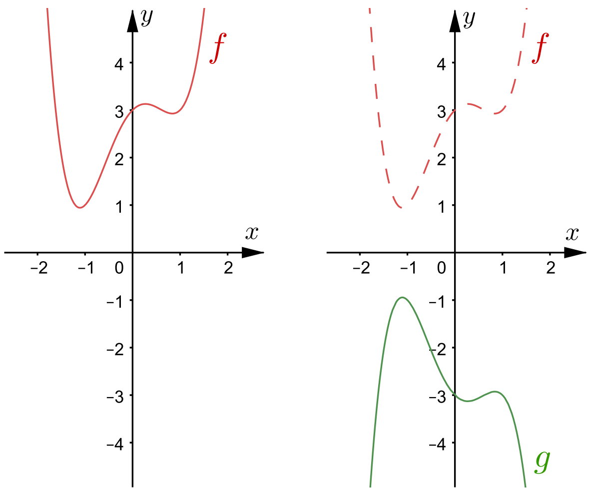
Na Figura 4.10(b), ilustra-se o gráfico da função $g : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -(|x^2 - 1| + 1) = -|x^2 - 1| - 1$, a qual foi obtida a partir do gráfico de $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x^2 - 1| + 1$, que pode ser observada na Figura 4.10(a). Observe que, sendo $\operatorname{Im} f = [1, 4]$, temos que $\operatorname{Im} g = -[1, 4] = [-4, -1]$.



(a) Função original (b) Função refletida em torno do eixo x

Figura 4.10: Reflexão em torno do eixo x
Fonte: elaborada pela autora

Na Figura 4.11(b), ilustra-se o gráfico da função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -(x^4 - 2x^2 + x + 3)$, a qual foi obtida a partir do gráfico de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 3$, que pode ser observada na Figura 4.11(a).



(a) Função original (b) Funções refletida em torno do eixo x

Figura 4.11: Reflexão em torno do eixo x
Fonte: elaborada pela autora

4.1.2.2 Reflexão em torno do eixo y

A *reflexão em torno do eixo* y é a isometria $R_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $R_2(x, y) = (-x, y)$.

A reflexão em torno do eixo y reflete cada ponto P do plano de coordenadas (x, y) no ponto $R_2(P) = (-x, y)$ (veja Figura 4.12). Em particular, a reflexão R_2, leva o gráfico de uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ no gráfico da função $g : -X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(-x)$, onde X é um subconjunto de $\mathbb{R}$, como veremos na proposição a seguir.

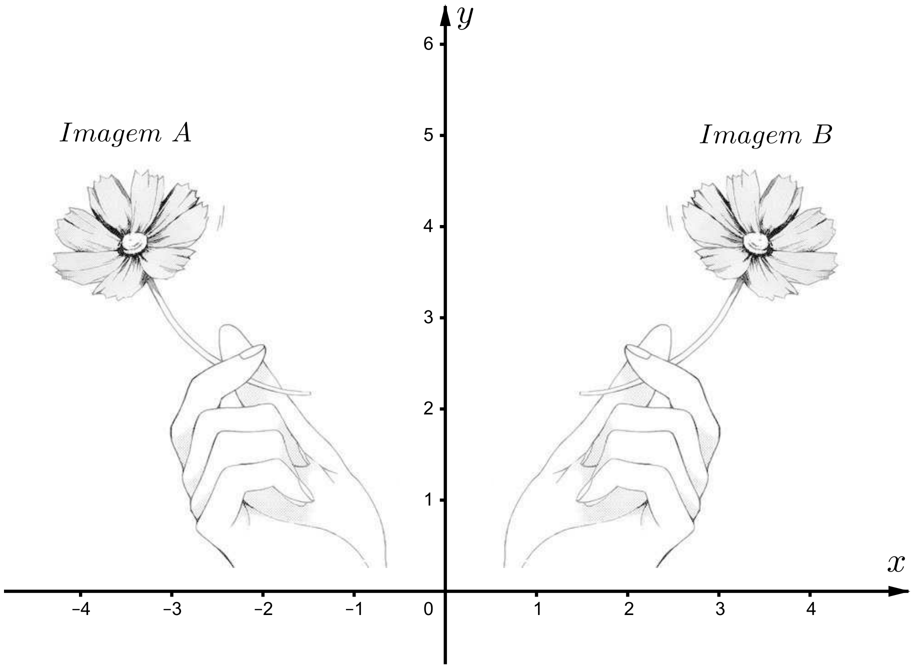


Figura 4.12: Reflexão em torno do eixo y
Fonte: elaborada pela autora
Fonte do desenho: <https://br.pinterest.com/pin/852095191967638401/>

Proposição 4.8. *Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Considere $g : -X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(-x)$. A imagem do gráfico de f por meio da transformação R_2 é o gráfico de g, isto é,*

$$R_2(\operatorname{graf} f) = \operatorname{graf} g.$$

Neste caso, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$.

Demonstração. Provemos, inicialmente, que $R_2(\operatorname{graf} f) \subset \operatorname{graf} g$. De fato, dado $(z, w) \in R_2(\operatorname{graf} f)$, existe $(x, y) \in \operatorname{graf} f$ tal que $(z, w) = R_2(x, y)$. Como $y = f(x)$, segue que $(z, w) = (-x, y) = (-x, f(x))$. Assim, $z = -x$ e $w = f(x)$. Como $x \in X$, temos $z = -x \in -X$ e, $g(z) = g(-x) = f(-(-x)) = f(x) = w$. Logo, $(z, w) = (z, g(z)) \in \operatorname{graf} g$. Portanto,

$$R_2(\operatorname{graf} f) \subset \operatorname{graf} g. \tag{4.14}$$

Vejamos, agora, que $\operatorname{graf} g \subset R_2(\operatorname{graf} f)$. Com efeito, seja $(z, w) \in \operatorname{graf} g$, tem-se que $z \in -X$ e $w = g(z) = f(-z)$. Consideremos, $x := -z \in X$ e $y := f(-z)$. Temos que $(x, y) = (-z, f(-z)) \in \operatorname{graf} f$. Tem-se, também, que $R_2(x, y) = (-x, y) = (z, f(-z)) = (z, g(z)) = (z, w)$. Logo, $(z, w) \in R_2(\operatorname{graf} f)$. Portanto,

$$\operatorname{graf} g \subset R_2(\operatorname{graf} f). \tag{4.15}$$

De (4.14) e (4.15) concluímos que $R_2(\operatorname{graf} f) = \operatorname{graf} g$.

Provemos, agora, que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$. Inicialmente mostremos que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$. De fato, dado $y \in \operatorname{Im} g$, existe $z \in -X$ tal que $y = g(z)$. Logo, $z = -x$, para algum $x \in X$. Então, $y = g(-x) = f(-(-x)) = f(x)$. Desse modo, $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$. Portanto,

$$\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f. \tag{4.16}$$

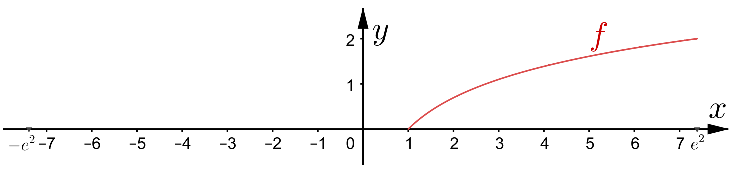
Vejamos, agora, que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$. Com efeito, seja $y \in \operatorname{Im} f$. Então, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Logo, $y = f(-(-x)) = g(-x)$. Desse modo, $y = g(-x)$, com $-x \in -X$. Assim, segue que $y \in \operatorname{Im} g$. Portanto,

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g. \tag{4.17}$$

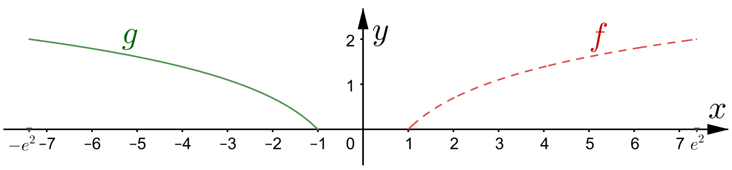
De (4.16) e (4.17) concluímos que, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$. $\square$

Na prática, veremos a seguir como utiliza-se a proposição anterior. Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, onde X é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, considerando a reflexão R_2, a fim de obter o gráfico de $g : -X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(-x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo y.

Na Figura 4.13(b), ilustra-se o gráfico da função $g : (-e^2, -1) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por $g(x) = \ln(-x)$, a qual foi obtida a partir do gráfico de $f : (1, e^2) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por $f(x) = \ln(x)$, que pode ser observada na Figura 4.13(a). Temos que, $\operatorname{Im} f = [0, 2] = \operatorname{Im} g$.



(a) Função original



(b) Função refletida em torno do eixo y

Figura 4.13: Reflexão em torno do eixo y
Fonte: elaborada pela autora

4.2 Homotetia

A *homotetia* é uma transformação que, mantendo fixo a origem, multiplica a distância entre dois pontos por uma constante positiva, chamada de *razão*. Desse modo, a homotetia de centro O e razão r no plano $\mathbb{R}^2$ é a transformação $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto P em $\mathbb{R}^2$ o ponto $P_1 = H(P)$ tal que $\overrightarrow{OP_1} = r \cdot \overrightarrow{OP}$, isto é, $H(x, y) = (rx, ry)$. Se $r = 1$, a homotetia H reduz-se à transformação identidade: $H(P) = P$, para todo $P \in \mathbb{R}^2$.

A homotetia é um tipo de transformação que altera o tamanho de uma figura, se a razão $r \neq 1$, mas sempre mantém as características principais, como a forma e os ângulos. Como pode ser observado na Figura 4.14, temos sempre um centro O, de onde partem linhas que irão passar por todos os pontos das outras figuras ampliadas (se $r > 1$) ou reduzidas (se $0 < r < 1$).

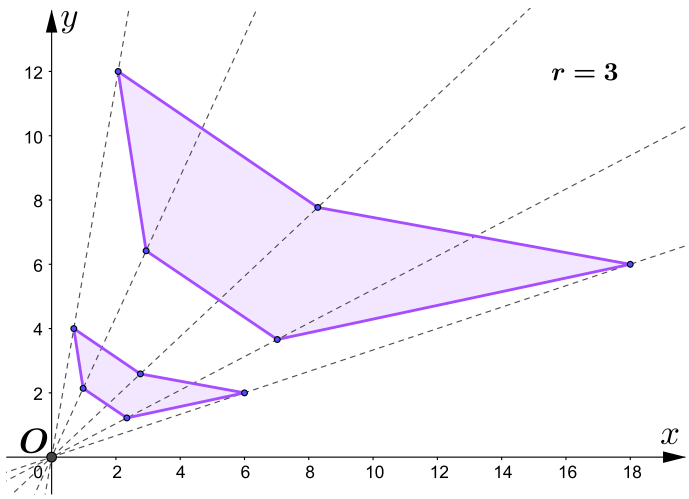


Figura 4.14: Homotetia de centro O e razão $r > 1$
Fonte: elaborada pela autora

No que segue, denotaremos por $rX = \{rx : x \in X\}$, onde X é um subconjunto de $\mathbb{R}$. Note que se $X = \mathbb{R}$ então $rX = \mathbb{R}$, para todo $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Proposição 4.9. *Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Considere r um número real positivo tal que $r \neq 1$ e $g : rX \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = rf\left(\frac{x}{r}\right)$. Considere $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $H(x, y) = (rx, ry)$. A imagem do gráfico de f sob a transformação H é o gráfico de g, isto é,*

$$H(\operatorname{graf} f) = \operatorname{graf} g.$$

Neste caso, $\operatorname{Im} g = r \operatorname{Im} f$.

Demonstração. Provemos, inicialmente, que $H(\operatorname{graf} f) \subset \operatorname{graf} g$. De fato, dado $(z, w) \in$

$H(\operatorname{graf} f)$, existe $(x,y) \in \operatorname{graf} f$ tal que $(z,w) = H(x,y)$. Como $y = f(x)$, segue que $(z,w) = (rx, ry) = (rx, rf(x))$. Como $x \in X$, temos $z = rx \in rX$ e, $g(z) = rf\left(\frac{z}{r}\right) = rf(x) = w$. Logo, $(z,w) \in \operatorname{graf} g$. Portanto,

$$H(\operatorname{graf} f) \subset \operatorname{graf} g. \tag{4.18}$$

Vejamos, agora, que $\operatorname{graf} g \subset H(\operatorname{graf} f)$. Com efeito, seja $(z,w) \in \operatorname{graf} g$, tem-se $z \in rX$ e $w = g(z) = rf\left(\frac{z}{r}\right)$. Consideremos $x := \frac{z}{r} \in X$ e $y = f\left(\frac{z}{r}\right)$. Temos que $(x,y) = \left(\frac{z}{r}, f\left(\frac{z}{r}\right)\right) \in \operatorname{graf} f$. Tem-se, também, que $H(x,y) = H\left(\frac{z}{r}, f\left(\frac{z}{r}\right)\right) = \left(r\frac{z}{r}, rf\left(\frac{z}{r}\right)\right) = (z, g(z)) = (z,w)$. Logo, $(z,w) \in H(\operatorname{graf} f)$. Portanto,

$$\operatorname{graf} g \subset H(\operatorname{graf} f). \tag{4.19}$$

De (4.18) e (4.19) concluímos que, $H(\operatorname{graf} f) = \operatorname{graf} g$.

Provemos, agora, que $\operatorname{Im} g = r \operatorname{Im} f$. Inicialmente, mostremos que $\operatorname{Im} g \subset r \operatorname{Im} f$. De fato, dado $y \in \operatorname{Im} g$, existe $z \in rX$ tal que $y = g(z) = rf(\frac{z}{r})$. Logo, $z = rx$, para algum $x \in X$. Então, $x = \frac{z}{r} \in X$. Desse modo, $y = rf(\frac{x}{r}) \in r \operatorname{Im} f$. Portanto,

$$\operatorname{Im} g \subset r \operatorname{Im} f. \tag{4.20}$$

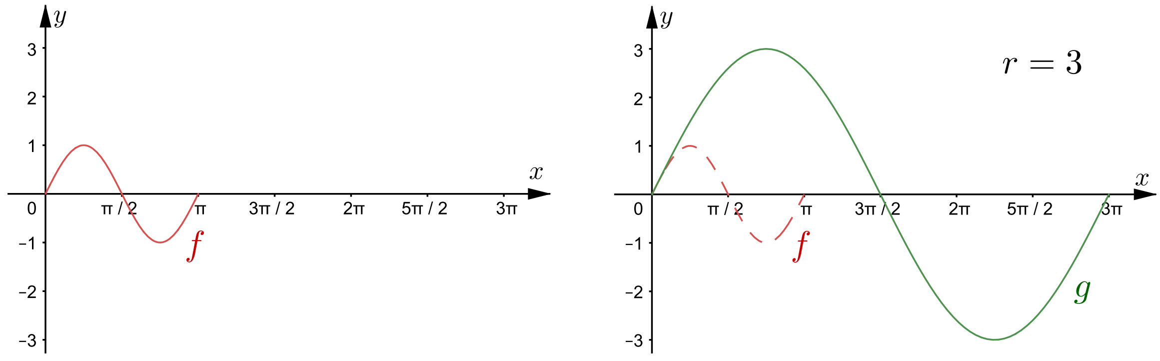
Vejamos, agora, que $r \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$. Com efeito, seja $y \in r \operatorname{Im} f$. Então, existe $z \in \operatorname{Im} f$ tal que $y = rz$. Como $z \in \operatorname{Im} f$, existe $x \in X$ tal que $z = f(x)$. Logo, $y = rf(x) = rf(\frac{rx}{r}) = g(rx)$. Desse modo, segue que $y \in \operatorname{Im} g$. Portanto,

$$r \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g. \tag{4.21}$$

De (4.20) e (4.21) concluímos que, $\operatorname{Im} g = r \operatorname{Im} f$. □

Na prática, veremos a seguir como utiliza-se a proposição anterior. Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, onde X é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, considerando a homotetia H, a fim de obter o gráfico $g : rX \longrightarrow \mathbb{R}$, definida $g(x) = rf(\frac{x}{r})$, multiplique por uma constante real positiva $r \neq 1$ todo ponto $(x, f(x))$, em que $x \in X$.

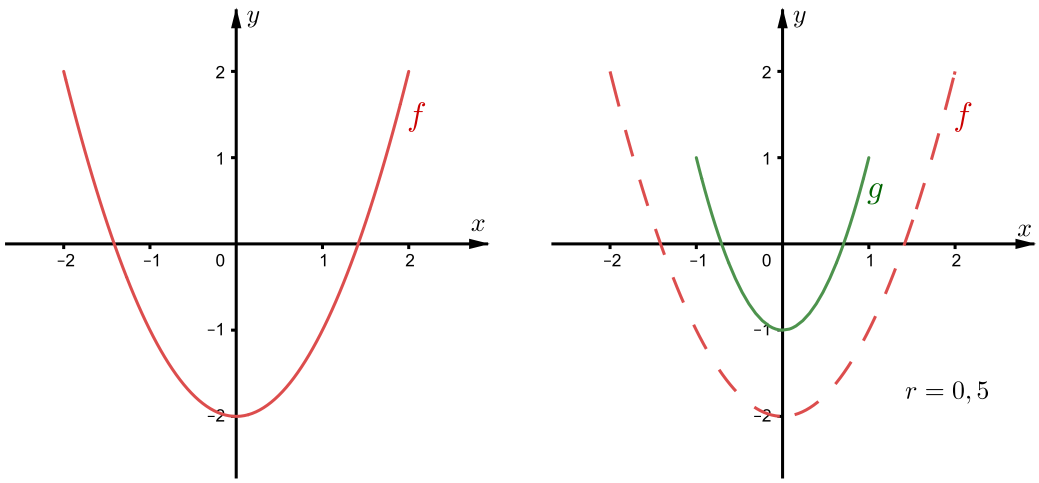
Na Figura 4.15(b), ilustra-se o gráfico da função $g : [0, 3\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 3\operatorname{sen}(\frac{2x}{3})$, a qual foi obtida a partir do gráfico da função $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} 2x$, que pode ser observada na Figura 4.15(a). Temos que $\operatorname{Im} f = [-1, 1]$ e $\operatorname{Im} g = 3 \operatorname{Im} f = 3[-1,1] = [-3,3]$.



(a) Função original (b) Função alterada o tamanho

Figura 4.15: Homotetia
Fonte: elaborada pela autora

Na Figura 4.16(b), ilustra-se o gráfico da função $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$, a qual foi obtida a partir do gráfico da função $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2$, que pode ser observada na Figura 4.16(b). Temos que $\operatorname{Im} f = [-2, 2]$ e $\operatorname{Im} g = \frac{1}{2} \operatorname{Im} f = \frac{1}{2}[-2, 2] = [-1, 1]$.



(a) Função original (b) Função alterada o tamanho

Figura 4.16: Homotetia
Fonte: elaborada pela autora

4.3 Expansão e Compressão

A *expansão* é uma transformação que aumenta uma das coordenadas de um ponto dado por uma constante $r > 1$, mantendo fixo a outra coordenada. A *compressão* é uma transformação que reduz uma das coordenadas de um ponto dado por uma constante $0 < r < 1$, mantendo fixo a outra coordenada.

4.3.1 Expansão e compressão vertical

A *expansão vertical* é uma transformação $E_v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $E_v(x, y) = (x, ry)$, onde r é um número real tal que $r > 1$. A *compressão vertical* é uma transformação $C_v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $C_v(x, y) = (x, ry)$, onde r é um número real tal que $0 < r < 1$.

Neste caso, as ordenadas dos pontos do plano são expandidas pelo fator r, se $r > 1$ (ou comprimidas se $0 < r < 1$) e suas abscissas permanecem fixas (veja Figura 4.17). Em particular, a expansão vertical (ou compressão vertical), leva o gráfico de uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ no gráfico da função $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = rf(x)$, onde $r > 1$ (ou $0 < r < 1$) e X é um subconjunto de $\mathbb{R}$, como veremos na proposição a seguir.

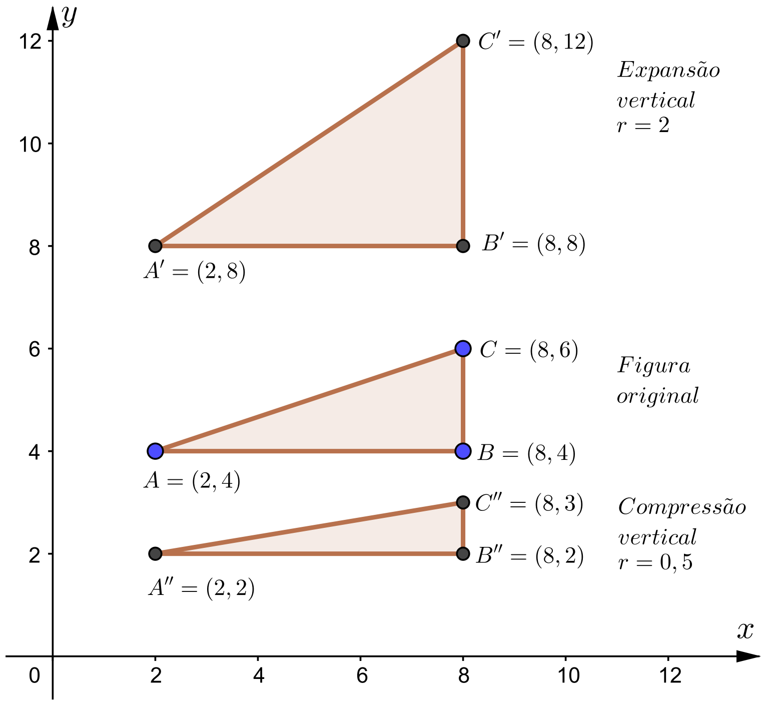


Figura 4.17: Expansão e compressão vertical de razão r
Fonte: elaborada pela autora

Proposição 4.10. *Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Considere r um número real positivo tal que $r \neq 1$ e $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = rf(x)$. Considere $V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $V(x, y) = (x, ry)$. A imagem do gráfico de f sob a transformação V é o gráfico de g, isto é,*

$$V(\operatorname{graf} f) = \operatorname{graf} g.$$

Neste caso, $\operatorname{Im} g = r \operatorname{Im} f$.

Demonstração. Provemos, inicialmente, que $V(\operatorname{graf} f) \subset \operatorname{graf} g$. De fato, dado $(z, w) \in V(\operatorname{graf} f)$, existe $(x, y) \in \operatorname{graf} f$ tal que $(z, w) = V(x, y)$. Como $y = f(x)$, segue que $(z, w) = (x, ry) = (x, rf(x)) = (x, g(x))$. Assim, $z = x \in X$ e $w = g(x) = g(z)$. Logo,

$(z, w) \in \operatorname{graf} g$. Portanto,

$$V(\operatorname{graf} f) \subset \operatorname{graf} g. \tag{4.22}$$

Vejamos, agora, que $\operatorname{graf} g \subset V(\operatorname{graf} f)$. Com efeito, seja $(z, w) \in \operatorname{graf} g$, tem-se que $z \in X$ e $w = g(z) = rf(z)$. Consideremos $x := z \in X$ e $y := f(z)$. Temos que $(x, y) = (z, f(z)) \in \operatorname{graf} f$. Tem-se, também, que $V(x, y) = (x, ry) = (z, rf(z)) = (z, g(z)) = (z, w)$. Logo, $(z, w) \in V(\operatorname{graf} f)$. Portanto,

$$\operatorname{graf} g \subset V(\operatorname{graf} f). \tag{4.23}$$

De (4.22) e (4.23) concluímos que, $V(\operatorname{graf} f) = \operatorname{graf} g$.

Provemos, agora, que $\operatorname{Im} g = r \operatorname{Im} f$. Inicialmente, mostremos que $\operatorname{Im} g \subset r \operatorname{Im} f$. De fato, dado $y \in \operatorname{Im} g$, existe um $x \in X$ tal que $y = g(x) = rf(x)$. Desse modo, $y = rf(x) \in r \operatorname{Im} f$. Portanto,

$$\operatorname{Im} g \subset r \operatorname{Im} f. \tag{4.24}$$

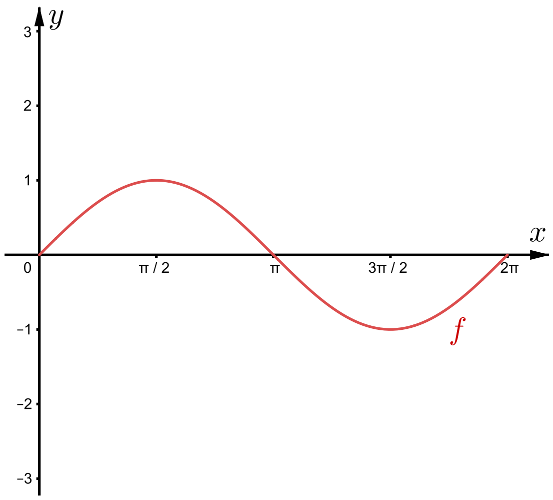
Vejamos, agora, que $r \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$. Com efeito, seja $y \in r \operatorname{Im} f$. Então, existe $z \in \operatorname{Im} f$ tal que $y = rz$. Como $z \in \operatorname{Im} f$, existe $x \in X$ tal que $z = f(x)$. Logo, $y = rf(x) = g(x)$. Desse modo, segue que $y \in \operatorname{Im} g$. Portanto,

$$r \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g. \tag{4.25}$$

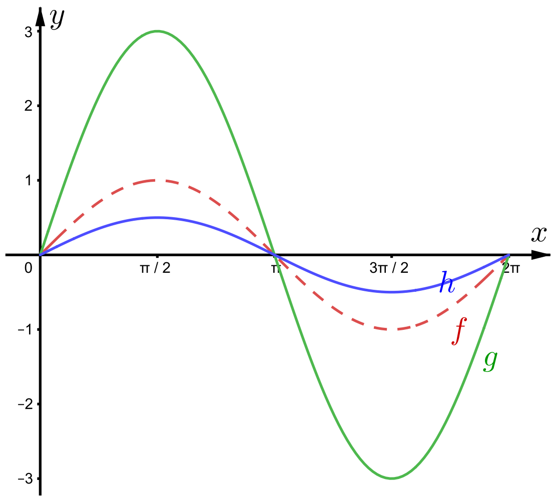
De (4.24) e (4.25) concluímos que, $\operatorname{Im} g = r \operatorname{Im} f$. □

Na prática, veremos a seguir como utiliza-se a proposição anterior. Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, onde X é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, considerando as expansões e compressões verticais, a fim de obter o gráfico de $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = rf(x)$, expanda o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator $r > 1$. Para obter o gráfico $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = rf(x)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator $0 < r < 1$.

Na Figura 4.18(b), ilustra-se o gráfico das funções $g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por $g(x) = 3 \operatorname{sen} x$ e $h(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$, a qual foi obtida a partir do gráfico da função $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, que pode ser observada na Figura 4.18(a). Observe que, sendo $\operatorname{Im} f = [-1, 1]$, tem-se que $\operatorname{Im} g = 3[-1, 1] = [-3, 3]$ e $\operatorname{Im} h = \frac{1}{2}[-1, 1] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.



(a) Função original



(b) Função expandida e comprimida verticalmente

Figura 4.18: Expansão e compressão vertical
Fonte: elaborada pela autora

4.3.2 Expansão e compressão horizontal

A *expansão horizontal* é uma transformação $E_h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $E_h(x, y) = (rx, y)$, onde r é um número real tal que $r > 1$. A *compressão horizontal* é uma transformação $C_h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $C_h = (rx, y)$, onde r é um número real tal que $0 < r < 1$.

Neste caso, as abscissas dos pontos do plano são expandidas pelo fator r, se $r > 1$ (ou comprimidas se $0 < r < 1$) e suas ordenadas permanecem fixas (veja Figura 4.19). Em particular, a expansão horizontal (ou compressão horizontal), leva o gráfico de uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ no gráfico da função $g : rX \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f\left(\frac{x}{r}\right)$, onde $r > 1$ (ou $0 < r < 1$) e X é um subconjunto de $\mathbb{R}$, como veremos na proposição a seguir.

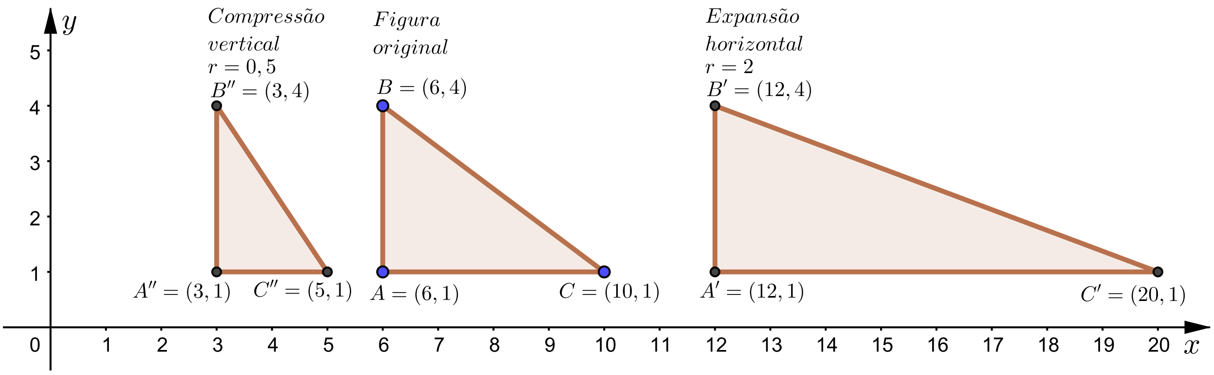


Figura 4.19: Expansão e compressão horizontal de razão r
Fonte: elaborada pela autora

Proposição 4.11. *Considere X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, sendo r um número real positivo com $r \neq 1$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : rX \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f\left(\frac{x}{r}\right)$.*

Seja $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$*, definida por* $H(x,y) = (rx, y)$*. A imagem do gráfico de* f *sob a transformação* H *é o gráfico de* g*, isto é,*

$$V(\operatorname{graf} f) = \operatorname{graf} g.$$

Neste caso, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$.

Demonstração. Provemos, inicialmente, que $H(\operatorname{graf} f) \subset \operatorname{graf} g$. De fato, dado $(z,w) \in H(\operatorname{graf} f)$, existe $(x,y) \in \operatorname{graf} f$ tal que $(z,w) = H(x,y)$. Como $x \in X$ e $y = f(x)$, segue que $(z,w) = (rx, y) = (rx, f(x))$. Assim, $z = rx \in rX$ e $g(z) = f\left(\frac{z}{r}\right) = f(x) = w$. Logo, $(z,w) \in \operatorname{graf} g$. Portanto,

$$H(\operatorname{graf} f) \subset \operatorname{graf} g. \tag{4.26}$$

Vejamos, agora, que $\operatorname{graf} g \subset H(\operatorname{graf} f)$. Com efeito, seja $(z,w) \in \operatorname{graf} g$, tem-se que $z \in rX$ e $w = g(z) = f\left(\frac{z}{r}\right)$. Consideremos $x := \frac{z}{r} \in X$ e $y = f\left(\frac{z}{r}\right)$. Temos que $(x,y) = \left(\frac{z}{r}, f\left(\frac{z}{r}\right)\right) \in \operatorname{graf} f$. Tem-se, também, que $H(x,y) = (rx,y) = \left(z, f\left(\frac{z}{r}\right)\right) = (z, g(z)) = (z,w)$. Logo, $(z,w) \in H(\operatorname{graf} f)$. Portanto,

$$\operatorname{graf} g \subset H(\operatorname{graf} f). \tag{4.27}$$

De (4.26) e (4.27) concluímos que, $H(\operatorname{graf} f) = \operatorname{graf} g$.

Provemos, agora, que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$. Inicialmente, mostremos que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$. De fato, dado $y \in \operatorname{Im} g$, existe um $z \in rX$ tal que $y = g(z)$. Logo, $z = rx$, para algum $x \in X$. Então, $y = g(rx) = f\left(\frac{rx}{x}\right) = f(x)$. Desse modo, $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$. Portanto,

$$\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f. \tag{4.28}$$

Vejamos, agora, que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$. Com efeito, seja $y \in \operatorname{Im} f$. Então, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Logo, $y = f\left(\frac{rx}{x}\right) = g(xr)$. Desse modo, $y = g(rx)$, com $rx \in rX$. Assim, segue que $y \in \operatorname{Im} g$. Portanto,

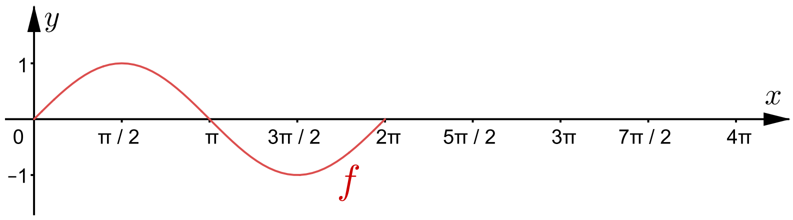
$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g. \tag{4.29}$$

De (4.28) e (4.29) concluímos que, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$. $\square$

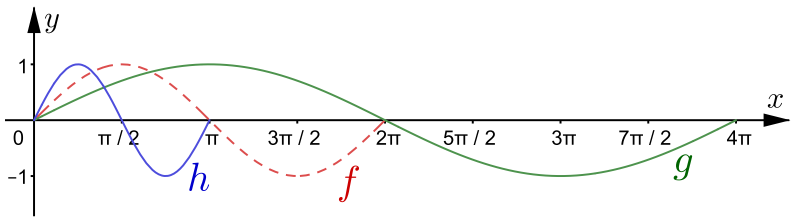
Na prática, veremos a seguir como utiliza-se a proposição anterior. Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, onde X é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, considerando as expansões e compressões horizontais e supondo $r > 1$, a fim de obter o gráfico de $g : rX \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f\left(\frac{x}{r}\right)$, expanda o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator

r. Para obter o gráfico de $h : r^{-1}X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(rx)$, comprima o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator r.

Na Figura 4.20(b), ilustra-se o gráfico das funções $g : [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $h : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ e $h(x) = \operatorname{sen} 2x$, a qual foi obtida a partir do gráfico da função $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, que pode ser observada na Figura 4.20(a). Temos que, $\operatorname{Im} f = [-1, 1] = \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} h$.



(a) Função original



(b) Função expandida e comprimida horizontalmente

Figura 4.20: Expansão e compressão horizontal
Fonte: elaborada pela autora

Capítulo 5

Aplicação do GeoGebra no Ensino de Funções Polinomiais

Neste capítulo, apresentaremos a proposta metodológica para o desenvolvimento das atividades desenvolvidas com os alunos e, por fim, mostraremos os resultados dessa pesquisa.

5.1 Metodologia

Nesta seção, apresentaremos os procedimentos metodológicos utilizados, com o intuito de compreender o caminho percorrido para o desenvolvimento desse trabalho.

Inicialmente, foi realizado um levantamento bibliográfico, a partir da sondagem de livros, artigos científicos, páginas de web sites. Posteriormente, foram efetuados estudos teóricos dos principais documentos apresentados pelo governo, que apresentam estratégias para a melhoria da educação básica e a forma como abordam o ensino aprendizagem de funções polinomiais.

Além do mais, foi feito um estudo para se conhecer o software GeoGebra, sua funcionalidade e a forma como ele poderia contribuir para o ensino de funções polinomiais, e entender através das literaturas estudadas o modo como a metodologia resolução de problemas pode facilitar a compreensão dos alunos com relação ao conteúdo trabalhado.

Em um segundo momento, foram planejadas uma sequência de atividades com problemas contextualizados, buscando como referência a metodologia de resolução de problemas, com o intuito de fazer sentido para o estudante e despertar neles o querer aprender.

Dessa forma, inicialmente foram propostas situações problemas em que os alunos mostravam a noção inicial que possuíam relacionado ao conceito de função, em particular as funções afins e quadráticas. Seja por conhecimentos científicos adquiridos anteriormente, seja através do conhecimento resultante do senso comum, baseados na sua experiência de vida e através da intervenção mediadora do professor foram aprimorando o seu conceito inicial. Assim, o professor evitava dar respostas prontas, mas estimulava os alunos a refletirem, raciocinarem sobre os problemas propostos, até a formalização do conteúdo.

As atividades foram aplicadas aos alunos do 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Heronides Araújo em Barra do Garças, Mato Grosso, Brasil. Assim, através das observações diárias do professor em sala de aula, do diálogo professor-aluno, das atividades que foram realizadas e das avaliações ao longo dos bimestres, permitiu ao professor compreender os avanços e as dificuldades apresentadas pelos alunos.

Desse modo, devido à dificuldade de levar todos os alunos de uma determinada sala ao laboratório, por ser uma turma com bastante alunos em contrapartida a quantidade de computadores em que seria possível a instalação do software GeoGebra, a aplicação foi destinada aos alunos que apresentaram maiores dificuldades em entender o conteúdo proposto.

Esses alunos, durante o bimestre foram chamados a realizar aula de reforço no contra turno. Nesse momento, extra sala de aula, foram propostas atividades no software GeoGebra para compreenderem o comportamento e conceitos relacionados as funções polinomiais.

5.2 Atividades Desenvolvidas

Nesta seção serão descritas algumas atividades, fundamentadas na metodologia resolução de problemas, com o apoio do software GeoGebra, que foi trabalhado com os alunos do 1º ano do Ensino Médio no 2º, 3º e 4º bimestre do ano de 2017, na Escola Estadual Heronides Araújo, localizada na Rua Waldir Rabelo, nº 40, centro do Município de Barra do Garças-MT e que foram adaptadas ao convívio de nossa região das seguintes referências: (Gomes, 2015), (Rubinstein et al, 2016), (Brandão, 2014), (Dierings, 2014), (Machado et al, 2011).

Atividade 1. Um litro de gasolina está custando R\$ $3,87$ em um posto de combustível em Barra do Garças-MT. Na Tabela 5.1, mostra-se os valores a pagar para se colocar gasolina no tanque de um carro.

Tabela 5.1: Preço da gasolina em função da quantidade de litros colocada no tanque

Litros	1	2	3	4	5
Preço a pagar (R$)	$3,87$	$7,74$	$11,61$	$15,48$	$19,35$

O que mostra essa tabela? Escreva uma expressão matemática que represente essa regra.

Solução: O preço (variável dependente) a pagar depende da quantidade de litros de gasolina (variável independente) que forem colocados no tanque, ou seja, o preço será igual à quantidade de litros multiplicada pelo preço de 1 litro de gasolina que é R\$ $3,87$. Assim, a Tabela 5.1 mostra que o preço a pagar está em função da quantidade de litros colocados no tanque. Desse modo, se representarmos por P o valor a ser pago e por L a quantidade de litros colocados, podemos escrever que $P = 3,87 \times L$.

Atividade 2. Um professor resolveu brincar com a turma de "adivinhe a regra". Ele dizia um número para um aluno e ele respondia outro número de acordo com uma regra previamente combinada. Na Tabela 5.2, mostra-se alguns números escolhidos pelo professor e os números que o aluno respondeu.

Tabela 5.2: Número respondido em função do número escolhido

Número escolhido	1	3	4	6	8
Número respondido	1	5	7	11	15

Consegue descobrir a regra? Se sua resposta for afirmativa, escreva uma expressão matemática que represente essa regra.

Solução: Observando a Tabela 5.2, os números respondidos pelo aluno, satisfazem a regra de serem iguais ao dobro do número escolhido pelo professor menos um. Determinaremos, agora, uma expressão matemática que representa essa regra. Se chamarmos de R o número respondido pelo aluno e x o número escolhido pelo professor, podemos dizer que a expressão que representa essa regra é $R = 2x - 1$.

Atividade 3. O salário base de um vendedor em uma loja de preço único do Município de Barra do Garças-MT, é de R\$ $700,00$. Para incentivar o crescimento das vendas dos produtos e aumentar seu lucro, o proprietário da loja oferece, aos seus vendedores, uma comissão de R\$ $0,50$ por venda de cada produto.

(a) Para cada produto vendido, o salário do vendedor é aumentado de quanto?

(b) Se em um mês o vendedor vender 10 produtos, que salário receberá no fim do mês?, e se vender 100 produtos?, e 200?

(c) Escreva um bilhete ao dono da loja, explicando como o vendedor deve fazer para calcular seu salário mensal.

(d) Escreva uma expressão matemática para esta situação.

(e) Maria, uma das vendedoras da loja, precisa faturar R\$ $1000,00$ para cobrir umas despesas que aumentaram no mês. Quantos produtos ela deve vender para conseguir este salário?

(f) Esboce o gráfico dessa função.

Solução:

(a) Para cada produto vendido o salário do vendedor é aumentado em R\$ $0,50$, que corresponde a comissão que o proprietário da loja oferece pela venda de cada produto.

(b) Um vendedor, receberá além dos R\$ $700,00$, que corresponde ao seu salário base, uma comissão de R\$ $0,50$ por produto vendido. Dessa forma, se esse vendedor vender 10 produtos, terá como salário em reais $700 + 0,5 \cdot 10 = 700 + 5 = 705$. Se vender 100 produtos terá como salário em reais $700 + 0,5 \cdot 100 = 700 + 50 = 750$. Se vender 200 produtos terá como salário em reais $700 + 0,5 \cdot 200 = 700 + 100 = 800$.

(c) Para que o vendedor consiga calcular seu salário mensal, basta multiplicar a quantidade de produtos que ele vendeu por R\$ $0,50$ e somar com seu salário base de R\$ $700,00$.

(d) Se chamarmos S o salário do vendedor e p a quantidade de produtos vendidos por esse vendedor, podemos dizer que a expressão que representa essa situação será em reais: $S = 700 + 0,5 \cdot p$. Logo, o salário do vendedor está em função da quantidade de produtos vendidos.

(e) Maria possui como salário base 700 reais. Assim, para que ela possa faturar 1000 reais, precisamos encontrar p da equação, $1000 = 700 + 0,5p$, ou seja, $p = \frac{1000-700}{0,5} = 600$. Portanto, Maria terá que vender 600 produtos.

(f) Na Figura 5.1, mostra-se o gráfico da função.

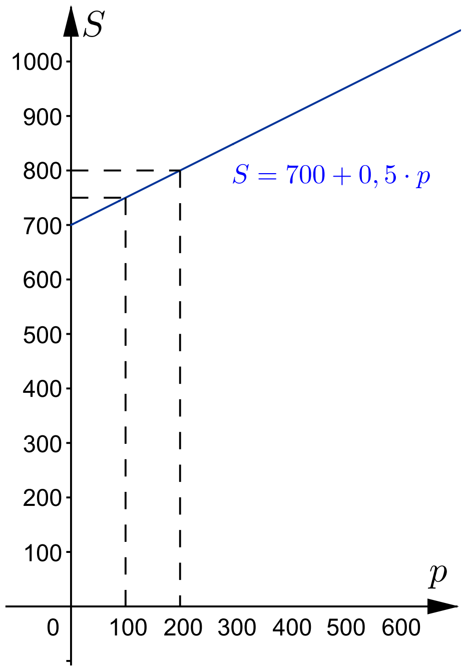


Figura 5.1: Salário do vendedor em função da quantidade de produtos vendidos
Fonte: elaborada pela autora

Atividade 4. Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R\$ $8,00$ mais um custo variável de R\$ $0,50$ por unidade produzida. Sendo x o número de unidades produzidas:

(a) escreva a lei de correspondência da função que fornece o custo total de x peças;

(b) calcule o custo para 100 peças.

Solução:

(a) Se chamarmos C o custo total de x peças, podemos dizer que a expressão que representa essa situação em reais será: $C = 8 + 0,5 \cdot x$. Assim, para calcularmos o custo total de x peças, basta multiplicarmos R\$ $0,50$ pela quantidade de unidades produzidas e somarmos com o custo fixo de 8 reais.

(b) Para calcularmos o custo 100 peças, basta fazer $x = 100$. Dessa forma, obtemos: $C = 8 + 0,5 \cdot 100 = 8 + 50,00 = 58$. Logo, o custo das 100 peças será R\$ $58,00$.

Atividade 5. Um golfista dá uma tacada que faz sua bola descrever uma trajetória na qual a altura, em metros, é dada pela função $f(x) = -0,008x^2 + x$, em que x é a distância horizontal da bola, em metros, medida a partir de sua posição antes da tacada.

(a) Determine a altura da bola quando ela está a uma distância horizontal de 40 m de seu ponto de partida.

(b) Com base em uma tabela de pontos, trace a trajetória da bola no plano cartesiano.

(c) Determine a que distância do ponto de partida a bola cai no chão.

Solução:

(a) A altura da bola quando ela está a uma distância de 40 m de sua posição original é dada por

$$f(40) = -0,008 \cdot (40)^2 + 40 = 27,2$$

Logo, a bola está a uma altura de 27, 2 m. A Tabela 5.3 nos fornece uma lista de pares ordenados obtidos a partir da definição de f.

Tabela 5.3: Pares ordenados obtidos a partir da definição de f

x	$f(x)$
0	0, 0
20	16, 8
40	27, 2
60	31, 2
80	28, 8
100	20, 0
120	4, 8
140	−16, 8

(b) Com base nos pontos obtidos na Tabela 5.3, traçamos o gráfico da figura, que mostra a trajetória descrita pela bola.

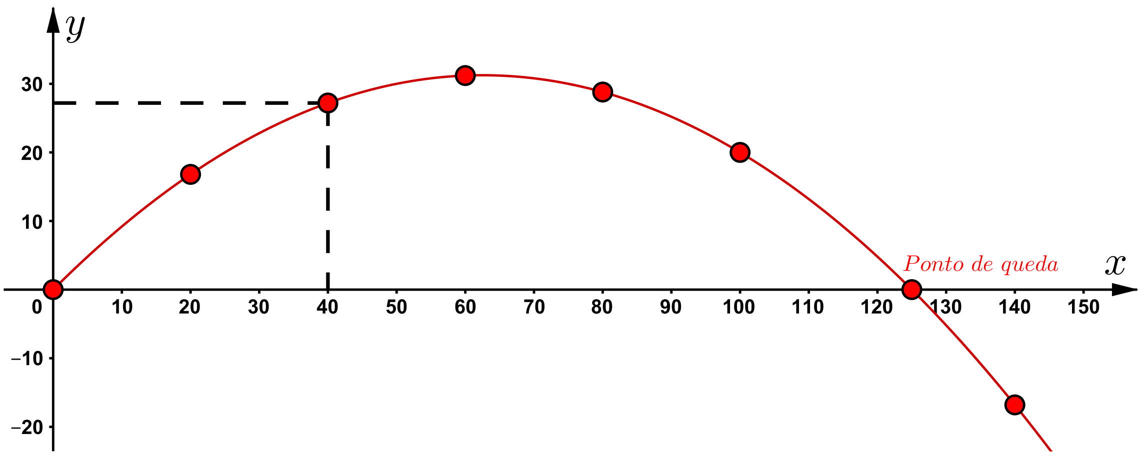


Figura 5.2: Gráfico da função que representa a trajetória da bola de golfe
Fonte: elaborada pela autora

(c) Observando a Figura 5.2, concluímos que a bola toca o solo acerca de 125 m do seu ponto de partida. Para determinar esse ponto, basta lembrar que dizer que a bola está sobre o solo é o mesmo que dizer que sua altura é zero. Assim, temos que $f(x) = 0$, ou seja,

$$-0,008x^2 + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(-0,008x + 1) = 0.$$

Os zeros dessa equação devem satisfazer $x = 0$ ou $-0,008x + 1 = 0$. Neste último caso, temos:

$$-0,008x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -0,008x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-1}{-0,008} = 125.$$

Logo, os pontos em que a bola toca o solo são aqueles nos quais $x = 0$ m (ponto de partida) e $x = 125$ m, que é a distância horizontal entre o ponto de partida e o ponto de queda da bola. Portanto, a distância do ponto de partida que a bola cai no chão é 125 m.

Atividade 6. Um fazendeiro pretende usar 500 m de cerca para proteger uma chácara retangular às margens do rio Araguaia, como mostra-se na Figura 5.3.

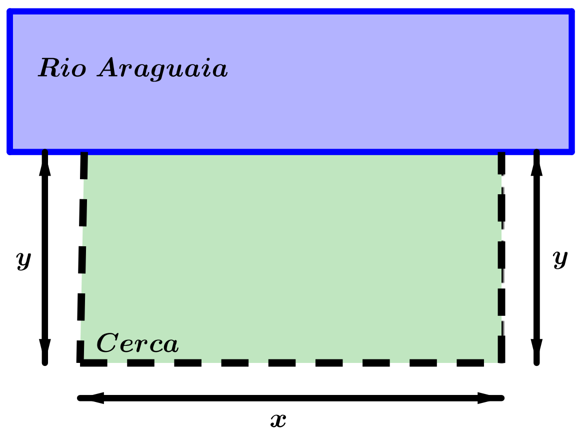


Figura 5.3: Região a ser cercada
Fonte: elaborada pela autora

(a) Usando o comprimento da cerca, escreva o valor de y em função de x.

(b) Com base na expressão que você encontrou no item (a), escreva a função A que fornece a área cercada, com relação a x.

(c) A fim de que o fazendeiro obtenha uma chácara protegida de área máxima, determine o valor de x que maximiza essa área cercada. Determine, também, o valor de y e a área máxima.

(d) Trace o gráfico de A.

Solução:

(a) Observando a Figura 5.3, notamos que apenas três dos lados da região da chácara precisam ser protegidos. Dessa forma, a cerca medirá apenas $2y+x$. Igualando essa expressão ao comprimento da cerca de que o fazendeiro dispõe, obtemos:

$$2y + x = 500.$$

Isolando y na equação, chegamos a

$$y = \frac{500 - x}{2}.$$

(b) A área de um retângulo de dimensões x e y é igual a xy. Assim, temos:

$$A(x) = xy = x\left(\frac{500 - x}{2}\right) = 250x - \frac{x^2}{2}.$$

(c) A área cercada é máxima quando,

$$x = -\frac{250}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 250 \text{ m}.$$

Nesse caso, a área do bosque é igual a:

$$A(250) = 250 \cdot 250 - \frac{(250)^2}{2} = 62500 - 31250 = 31250 \text{ m}^2.$$

(d) O gráfico de A é mostrado na Figura 5.4.

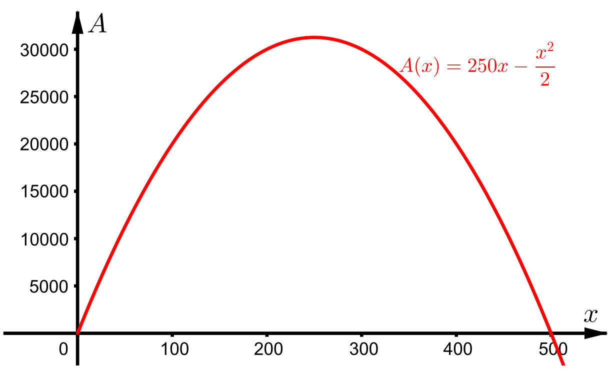


Figura 5.4: Gráfico de A
Fonte: elaborada pela autora

Atividade 7. Efetue os seguintes produtos e utilize o GeoGebra para gerar o gráfico da função polinomial formada. Na sequência, através do gráfico, localize os zeros dessa função polinomial.

(a) $f(x) = (x-3)(x+1)(x-1)$

(b) $g(x) = (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$

Solução:

(a) Observe que,

$$f(x) = (x-3)(x+1)(x-1) = (x^2-2x-3)(x-1) = x^3-3x^2-x+3.$$

No GeoGebra, obtemos a Figura 5.5. Como podemos observar a seguir, os zeros da função polinomial $f(x) = x^3-3x^2-x+3$ são -1, 1 e 3.

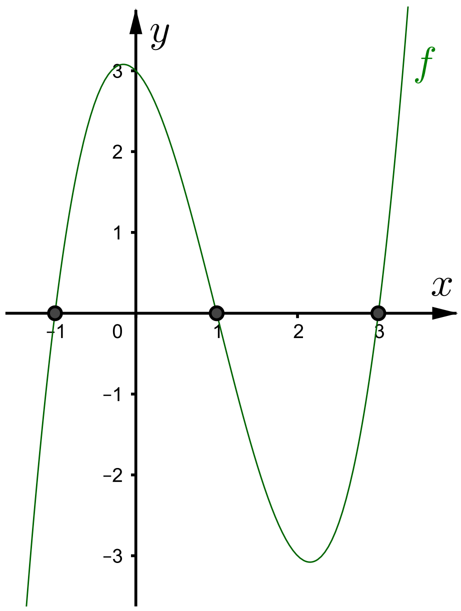


Figura 5.5: Gráfico da função polinomial $f(x) = x^3-3x^2-x+3$
Fonte: elaborada pela autora

(b) Observe que,

$$g(x) = (x-2)(x-1)(x+1)(x+2) = (x^2-3x+2)(x^2+3x+2) = x^4-5x^2+4.$$

No GeoGebra, obtemos a Figura 5.6. Como podemos observar a seguir, os zeros da função polinomial $g(x) = x^4-5x^2+4$ são -2, -1, 1 e 2.

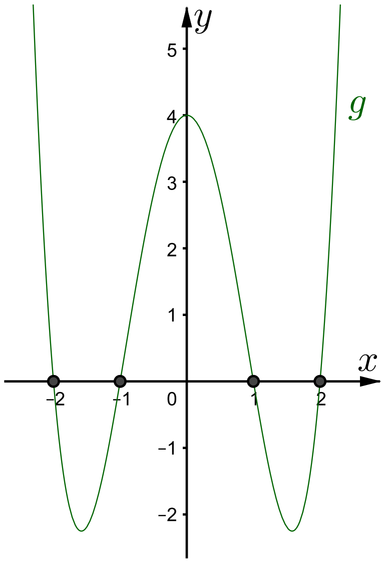


Figura 5.6: Gráfico da função polinomial $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
Fonte: elaborada pela autora

Atividade 8. No GeoGebra construa os gráficos das funções f, g, h: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$ e $h(x) = x + 2$, respectivamente. De que forma são esses gráficos? O que ocorre quando adicionamos uma unidade à função f? E quando adicionamos duas unidades à função f?

Solução: Utilizando o GeoGebra, obtém-se:

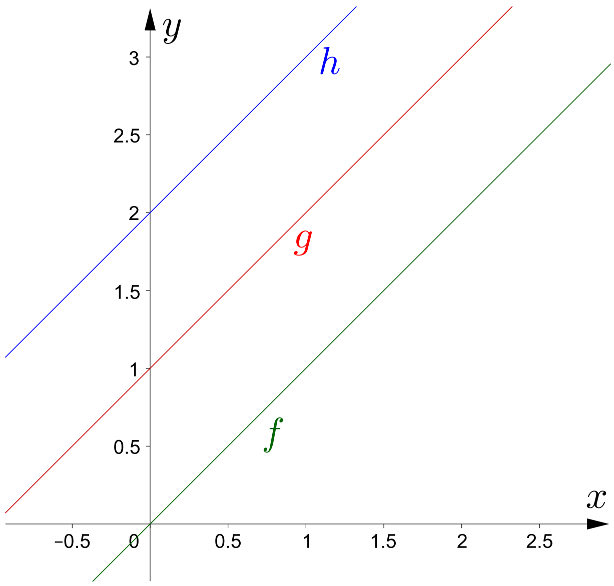


Figura 5.7: Translação da função $f(x) = x$
Fonte: elaborada pela autora

Como podemos observar na Figura 5.7, o gráfico sempre será uma reta. Ao adicionarmos uma unidade à função f, a reta que representa a função f é deslocada uma unidade para cima, com relação ao eixo das ordenadas, que é a função g. E ao adicionarmos duas unidades à função f, a reta que representa a função é deslocada duas unidades para cima, com relação ao eixo das ordenadas, que é a função h.

Atividade 9. Com respeito a Atividade 8, ao subtrairmos uma unidade da função f o que ocorre? Tente responder intuitivamente, sem a construção do gráfico. Depois confira sua resposta com o auxílio do software GeoGebra.

Solução: De forma similar ao visto na Atividade 8, a reta que representa a função seria deslocada uma unidade para baixo, com relação ao eixo das ordenadas. Neste caso, obtém-se a função $l(x) = x - 1$

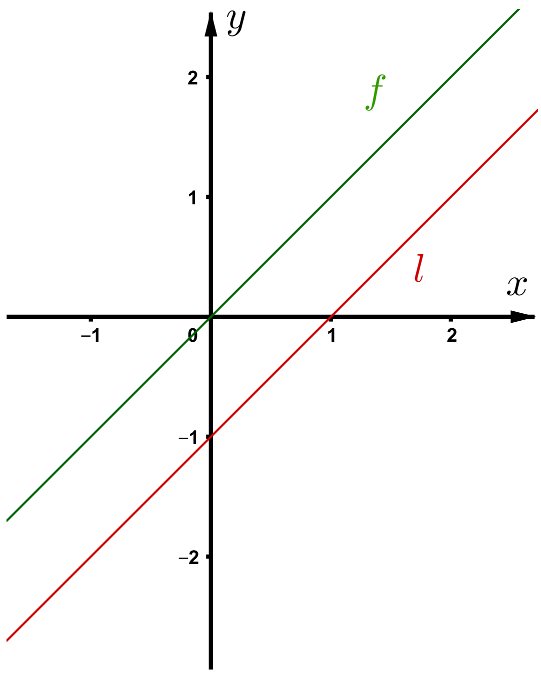


Figura 5.8: Translação da função $f(x) = x$
Fonte: elaborada pela autora

Atividade 10. No GeoGebra construa os gráficos das funções f, g, h: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x$, $g(x) = 2x$ e $h(x) = 4x$, respectivamente. O que ocorre ao multiplicarmos por 2 a função f? E se multiplicarmos por 4, o que ocorreria com o gráfico?

Solução: Utilizando-se o GeoGebra, obtém-se:

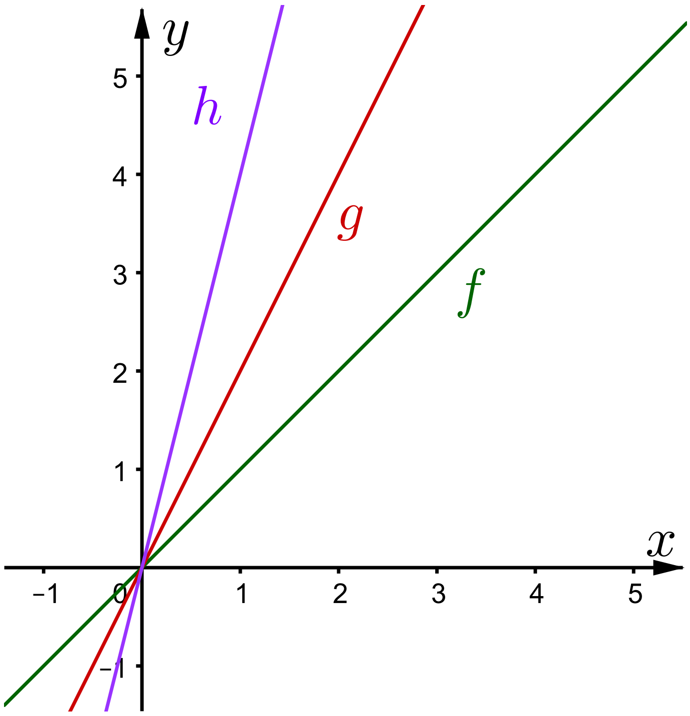


Figura 5.9: Expansão da função $f(x) = x$
Fonte: elaborada pela autora

Ao multiplicarmos por 2 a função f, a reta que representa a função f, aumenta sua inclinação com relação ao eixo das abscissas. Ao multiplicarmos por 2, obtém-se a função g. E se multiplicarmos por 4, a inclinação da reta aumentaria ainda mais, tendo como referência a função f. Ao multiplicarmos por 4, obtém-se a função h.

Atividade 11. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, com $a > 0$. Como as constantes a e b interferem no gráfico dessa função?

Solução: A constante a interfere na inclinação da reta com relação ao eixo das abscissas e a constante b interfere no deslocamento da reta com relação ao eixo das ordenadas.

Atividade 12. No GeoGebra visualize as funções afins f, g, h, t: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = -2x - 4$, $h(x) = 4x - 12$, $t(x) = -3x + 12$, respectivamente. De que forma são esses gráficos? Quais são crescentes? Quais são decrescentes? Quem são os zeros dessas funções?

Solução:

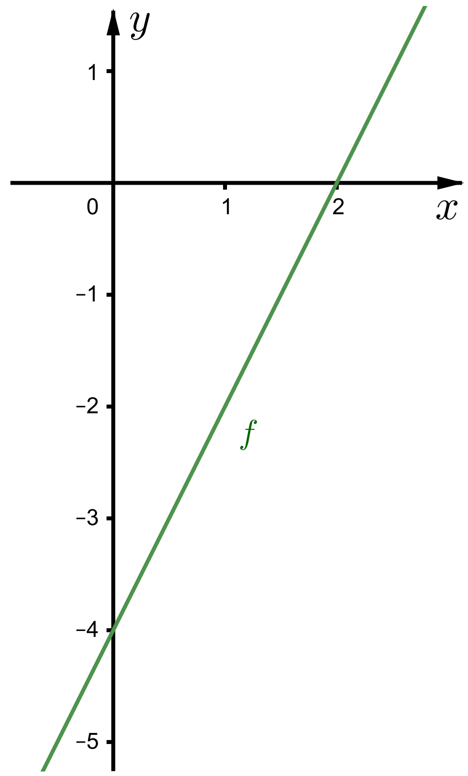


Figura 5.10: Gráfico da função $f(x) = 2x - 4$
Fonte: elaborada pela autora

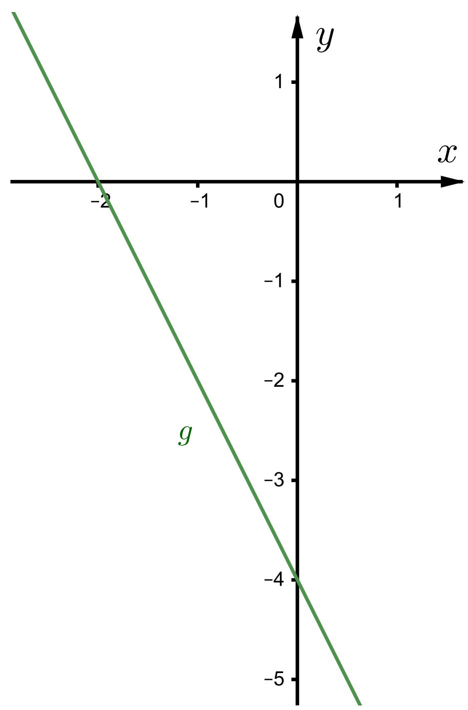


Figura 5.11: Gráfico da função $g(x) = -2x - 4$
Fonte: elaborada pela autora

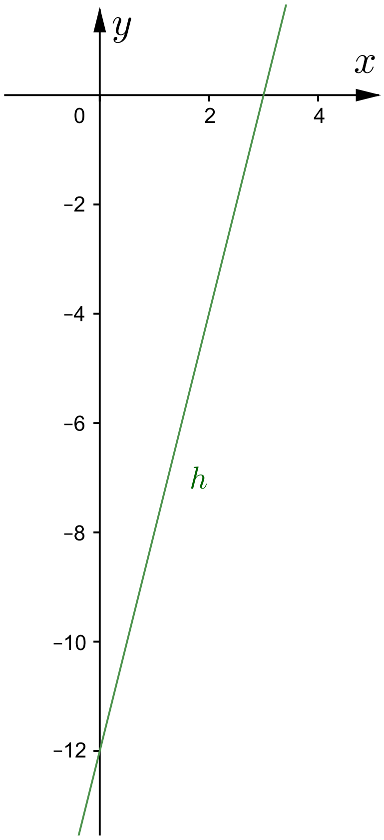


Figura 5.12: Gráfico da função $h(x) = 4x - 12$
Fonte: elaborada pela autora

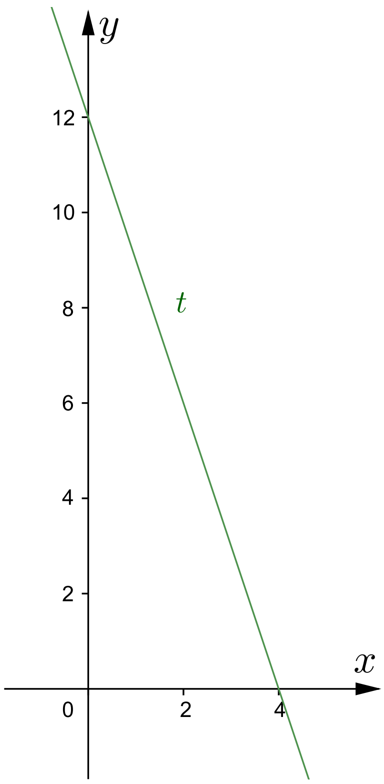


Figura 5.13: Gráfico da função $t(x) = -3x + 12$
Fonte: elaborada pela autora

Como todas as funções são afins, concluímos que seus gráficos são retas. Podemos constatar ainda, que as funções representadas nas figuras 5.10 e 5.12 são crescentes e as funções representadas nas figuras 5.11 e 5.13 são decrescentes. Em geral, concluímos que ao construir o gráfico da função afim $f(x) = ax + b$, notaremos sempre que quando o coeficiente angular é positivo a função f será crescente e quando o coeficiente angular é negativo a função f será decrescente.

Com relação os zeros dessas funções, pudemos perceber que a função $f(x) = 2x-4$ possui como zero $x = 2$, a função $g(x) = -2x - 4$ possui como zero $x = -2$, a função $h(x) = 4x - 12$ possui como zero $x = 3$, e a função $t(x) = -3x + 12$ possui como zero $x = 4$.

Atividade 13. No GeoGebra visualize as funções quadráticas f, g, h, t, r: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x^2 - 3x + 4$, $g(x) = -x^2 + 3x$, $h(x) = 2x^2 + 8x$, $t(x) = x^2 - 4$ e $r(x) = -2x^2 + 18$, respectivamente. Explique de que forma são esses gráficos. Quais estão voltadas para cima? Quais estão voltadas para baixo? O que podemos concluir com relação a concavidade dessas funções? Quem são os zeros dessas funções?

Solução:

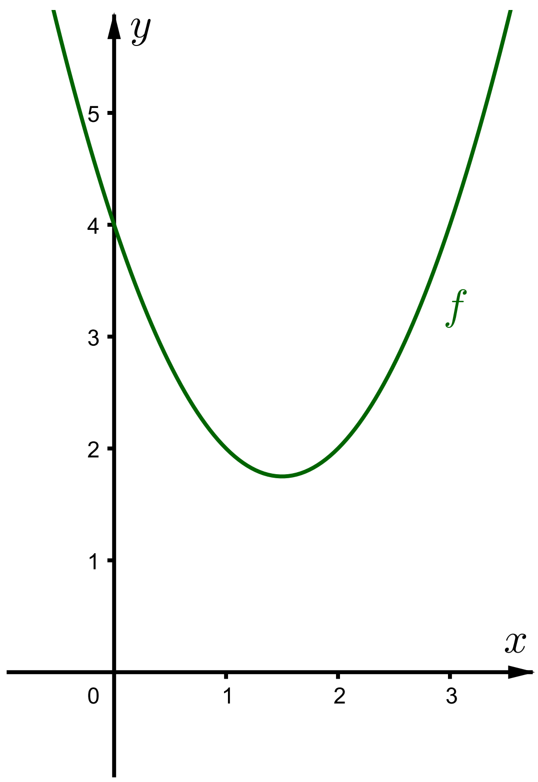


Figura 5.14: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 3x + 4$
Fonte: elaborada pela autora

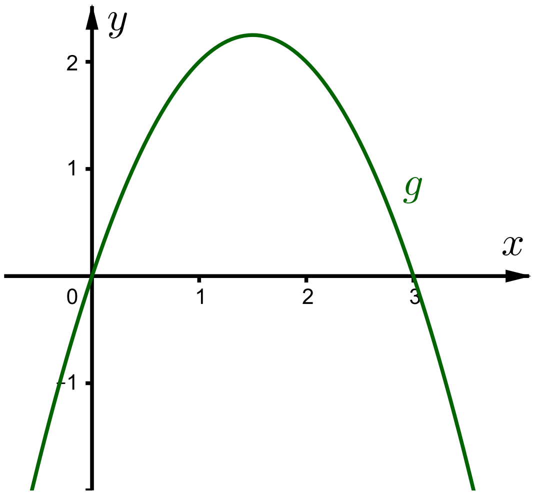


Figura 5.15: Gráfico da função $g(x) = -x^2 + 3x$
Fonte: elaborada pela autora

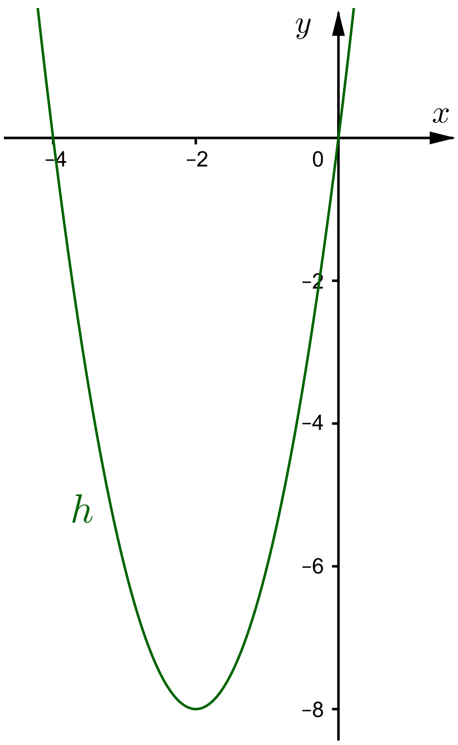


Figura 5.16: Gráfico da função $h(x) = 2x^2 + 8x$
Fonte: elaborada pela autora

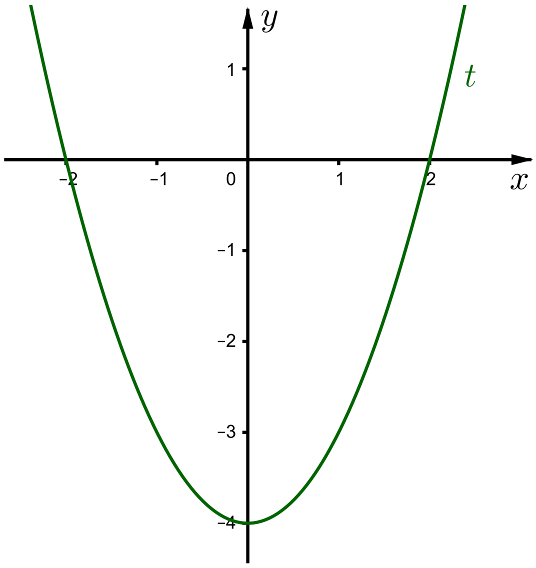


Figura 5.17: Gráfico da função $t(x) = x^2 - 4$
Fonte: elaborada pela autora

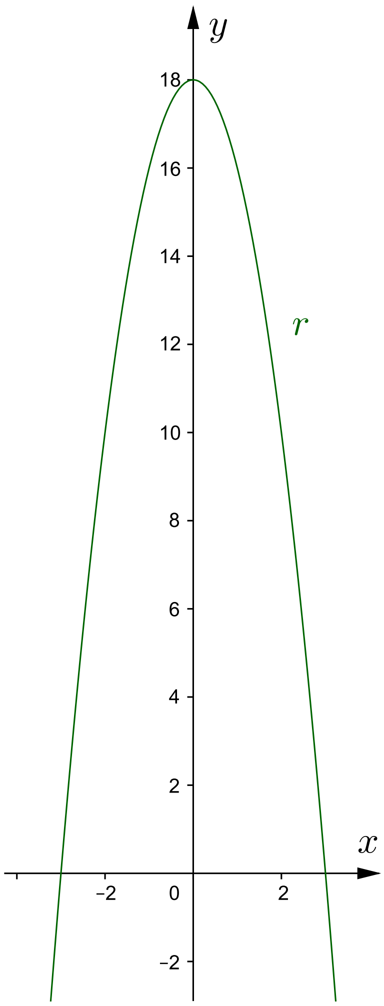


Figura 5.18: Gráfico da função $r(x) = -2x^2 + 18$
Fonte: elaborada pela autora

Como todas as funções são quadráticas, concluímos que seus gráficos são parábolas. Podemos constatar ainda, que os gráficos das funções representadas nas Figuras 5.14, 5.16 e 5.17, estão com a concavidade voltada para cima e que os gráficos representados nas Figuras 5.15, 5.18 possuem a concavidade voltada para baixo. Em geral, concluímos que ao construir o gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, notaremos sempre que:

- se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Com relação os zeros dessas funções, pudemos perceber que a função $f(x) = x^2 - 3x + 4$ não possui zeros reais, a função $g(x) = -x^2 + 3x = -x(x-3)$ possui como zeros $x = 0$ ou $x = 3$, a função $h(x) = 2x^2 + 8x = x(2x+8)$ possui como zeros $x = -4$ ou $x = 0$; a função $t(x) = x^2 - 4$ possui como zeros $x = -2$ ou $x = 2$ e a função $r(x) = -2x^2 + 18$ possui como zeros $x = -3$ ou $x = 3$.

5.3 Resultados

Inicialmente os alunos se sentiram incomodados, com dificuldades ao realizar as atividades propostas, por estarem acostumados a realizar as atividades de matemática mecanicamente, em que o professor explica o conteúdo, passa um exemplo e os alunos repetem o procedimento nos demais exercícios, sem muita reflexão.

Os alunos demonstravam esperar uma resposta pronta do professor e ao serem indagados, na busca de estimular o raciocínio lógico ou reflexão a respeito do problema apresentado, por diversas vezes reclamavam, devido a essa cultura do professor ser o detentor do conhecimento que deve ser transmitido ao aluno, e o aluno ser um mero reprodutor, em que se resolvem questões parecidas aos exemplos expostos pelo professor, sem muita contextualização.

Entretanto, a sequência de atividades propostas surtiram um efeito positivo no desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, de modo que entendessem o conteúdo de função polinomial e não meramente reproduzissem um exemplo passado anteriormente. Durante o processo os alunos se tornaram mais autônomos e críticos, ficando bem evidente na nova postura de alguns discentes, já que no começo eram totalmente dependentes do professor, tinham medo de resolver algum problema e errar, não queriam raciocinar e entender realmente o problema. Todavia queriam de imediato uma resposta, mas com o passar do tempo foram desenvolvendo sua autoconfiança.

Houve um avanço significativo da concepção dos alunos sobre o conceito de função, e apesar das dificuldades encontradas, permitiu que a grande parte dos alunos desenvolvessem esse lado de leitura, interpretação e extração dos dados do enunciado, que vem sendo bastante cobrado em provas como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). No ENEM, se exige do aluno uma nova postura, uma postura crítica, em que não basta que os alunos saibam a formalização da matemática, mas precisam entendê-la e interpretá-la dentro de um contexto.

Com relação a utilização do software GeoGebra, os alunos que tiveram mais dificuldades em compreender o conteúdo no decorrer do bimestre, necessitaram de um processo de familiarização para o manuseio do software. Posteriormente foram propostas as atividades para se entender o comportamento e as características principais das funções polinomiais.

Ao utilizar essa ferramenta, os alunos tiveram um maior entendimento na interpretação do gráfico de uma função, sendo capazes de reconhecer a função afim, $f(x) = ax+b$, com $a \neq 0$ e a partir dela observar comportamentos de gráficos com relação aos valores de a e b, tais como: função crescente ou decrescente, suas translações, função linear. E com relação a função quadrática compreenderam conceitos associados a concavidade da parábola, pontos de máximo ou mínimo e zeros.

Considerações Finais

Ao realizar as atividades desenvolvidas em sala de aula como mencionadas na Seção 5.2 do Capítulo 5, grande parte dos alunos demonstram dificuldades em compreender o conceito de função, pois por diversas vezes esse conteúdo é abordado sem fazer sentido para o estudante, sem relação com seu cotidiano.

Assim, o professor deve proporcionar um ambiente que desperte nos alunos o querer aprender e buscar formas de ensinar função para os alunos de forma contextualizada e interdisciplinar, mostrando ao aluno que os conteúdos estudados em sala de aula, possui uma aplicação na vida real, havendo relação entre o conteúdo de ensino e o contexto social em que o aluno vive.

O professor deve ainda, conhecer suas responsabilidades, seu ambiente de trabalho, seus alunos, com o intuito de planejar suas aulas com objetivos bem definidos, para que as atividades realizadas em sala de aula possibilitem a construção do conhecimento.

Logo, o principal objetivo desse trabalho foi investigar as contribuições do uso da metodologia resolução de problemas, com o apoio do software GeoGebra, para a aprendizagem dos alunos do 1º ano do Ensino Médio, relativamente ao estudo das funções polinomiais.

Desse modo, podemos concluir que ao se introduzir o "novo" para os alunos pode se gerar uma certa inquietação, mas o professor ao assumir seu papel de mediador no processo de ensino-aprendizagem, através da intervenção deve estimular e ajudar os alunos a desenvolverem habilidades de interpretação e compreensão dos problemas e ter uma postura de um sujeito investigativo.

Apesar de uma certa rejeição inicial por parte dos alunos ao que estava sendo proposto pelo professor, com o passar das aulas foram se desenvolvendo enquanto cidadãos críticos, capazes de resolver situações problemas.

O uso da metodologia que incentiva as descobertas do aluno, possuindo o professor como um mediador nesse processo de busca, exploração e cooperação foi de suma importância. De fato, quando o aluno é desafiado pelo professor a resolver situações problemas e o educador ajuda os estudantes a criarem estratégias para que possam superar seus próprios limites, desenvolvem neles o desejo de resolver a situação e torna o aprendizado mais empolgante.

Além do mais, propor atividades com o auxílio do software GeoGebra, permite aos alunos visualizarem com mais facilidade o comportamento de funções polinomiais facilitando assim o aprendizado.

Para tanto, nesse tipo de aula o aluno sai de sua zona de conforto e se torna protagonista, proporcionando maior oportunidade de aprendizagem.

Referências Bibliográficas

Botelho, L.; Rezende, W. (2011). *Um Breve Histórico do Conceito de Função.* Caderno Dá-Licença, volume 6, páginas 64-75.

Brandão, J. D. P. (2014). *Ensino Aprendizagem de Função Através da Resolução de Problemas e Representações Múltiplas.* Universidade Estadual da Paraíba, Campo Grande/PB.

Brasil (2006). Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. URL: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf

Brasil (2000). Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. URL: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf

Brasil (2016). Base Nacional Comum Curricular - 2ª versão. URL: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

Dierings, A. R. (2014). *Ensino de Polinômios no Ensino Médio: uma Nova Abordagem.* Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria/RS.

Eves, H. (2004). *Introdução à História da Matemática.* Editora Unicamp. Campinas, páginas 848, 4ª edição.

Gomes, F. M. (2015). *Matemática Básica.* Editora Unicamp. Campinas, páginas 440.

Gonçalves, A. (1999). *Introdução à Álgebra.* Editora Projeto Euclides. Rio de Janeiro, páginas 203.

Gravina, M. A.; Santarosa, L. M. (1998). *A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados.* IV congresso RIBIE. Brasília, páginas 1-24.

Hohenwarter, M. (2007). GeoGebra-informações. URL: https://app.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf

Ivorra, C. Las Fórmulas de Cardano-Ferrari. URL: https://www.uv.es/ivorra/Libros/Ecuaciones.pdf

Isotani, S. (2005). *Desenvolvimento de Ferramentas no iGeom: Utilizando a Geometria Dinâmica no Ensino Presencial e a Distância*. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo/SP.

Isotani, S.; Brandão, L. de O. (2006). *Como Usar a Geometria Dinâmica? Papel do Professor e do Aluno Frente às Novas Tecnologias*. XXVI congresso da SBC. Campo Grande, páginas 1-9.

Lima, E. L. (2013). *Curso de Análise*. Editora IMPA. Rio de Janeiro, páginas 432, 14ª edição.

Lima, E. L. (2002). *Coordenadas no Plano*. Editora SBM. Rio de Janeiro, páginas 169, 4ª edição.

Lima, E. L. (2014). *Números e Funções Reais*. Editora SBM. Rio de Janeiro, páginas 298, 1ª edição.

Lopes, M. M. (2011). *Contribuições do Software GeoGebra no Ensino e Aprendizagem de Trigonometria*. XIII CIAEM. Recife, páginas 1-12.

Lopes, J. P.; Angotti, J. A. P.; Moretti, M. T. (2003). *Função Afim e Conceitos Unificadores: o Ensino de Matemática e Física numa Perspectiva Conceitual e Unificadora*. IV ENPEC. Bauru, páginas 1-11.

Machado, A. R. L.; Lima, I. M. R. de; Venturi, S. (2011). *Estudo de Gráficos de Funções Através de Softwares Gráficos e Geométricos*. Universidade Federal do Paraná, Curitiba/PR.

Mariani, V. C.; Souza, V. Dal M. de;. (2005). *Um Breve Relato do Desenvolvimento do Conceito de Função*. V EDUCERE. Curitiba, páginas 1243-1254.

Muniz Neto, A. C. (2015). *Fundamentos de Cálculo*. Editora SBM. Rio de Janeiro, páginas 561, 1ª edição.

Pedroso, H. A. (2010). *Uma Breve História da Equação do 2º Grau*. Jataí, páginas 1-13.

Polya, G. (1957). *How to Solve it: a New Aspect of Mathematical Method*. Editora Stanford University. New York, páginas 251, 2ª edição.

Rubinstein, C.; Alves, D. P.; et al. (2016). *Matemática e suas Tecnologias: Unidades 11, 12 e 13*. Editora CECIERJ. Rio de Janeiro, páginas 64.

Soares, M. T. C.; Pinto, N. B. (2001). *Metodologia da Resolução de Problemas*. XXIV ANPED. Caxambu, páginas 1-9.