Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Os números reais na escola básica

Pollyanna Santana Silva

Orientador: Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann

São José dos Campos
Setembro, 2018

PROFMAT

Título: *Os números reais na escola básica*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
Setembro, 2018

Silva, Pollyanna Santana

Os números reais na escola básica, Pollyanna Santana Silva – São José dos Campos, 2018.

viii, 39f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

The real numbers in Elementery School

1. Números reais. 2. Sequências. 3. Segmentos.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:
Prof. Dr. Carlos Marcelo Gurjão de Godoy

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:
Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

POLLYANNA SANTANA SILVA

OS NÚMEROS REAIS NA ESCOLA BÁSICA

Presidente da banca: Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann

Banca examinadora:

Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes

Prof. Dr. Thiago Castilho de Melo

Prof^{a}. Dr^{a}. Fernanda de Andrade Pereira

Data da Defesa: 14 de Setembro de 2018

"Os números são a ciência do tempo e a geometria a ciência do espaço".
Autor desconhecido.

AGRADECIMENTOS

A todas as pessoas com as quais compartilhei longas conversas e boas risadas.

RESUMO

Neste trabalho abordamos a construção do conjunto dos números reais. Este assunto possui grande importância pois é base para a compreensão de conceitos essenciais à matemática tais como limite, continuidade e integrais. Apesar de tal construção poder ser realizada de diferentes formas, optamos pelas sequências de Cauchy. Apresentamos uma construção rigorosa, voltada para a formação do professor. Contudo, a par das dificuldades relativas ao ensino deste tópico, também apresentamos uma abordagem de caráter geométrico, que acreditamos ser mais acessível aos estudantes de nível básico.

Palavras-chave: 1. Números reais. 2. Sequências. 3. Segmentos.

ABSTRACT

In this work we present the construction of the set of real numbers. This subject has a great importance because it is the basis for the understanding of essential concepts to mathematics such as boundary, continuity and integrals. Although such construction can be made in different ways, we choose the Cauchy sequences. We present a rigorous construction, focused on teacher training. However, along with the difficulties related to the teaching of this topic, we also present a geometric approach, which we believe is more accessible to students at the entry level.

Keywords: 1. Real numbers. 2. Sequences. 3. Segments.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Apesar da concepção numérica, principalmente no que diz respeito às quantidades, estar presente no cotidiano das pessoas, o conceito de número sempre foi abstrato, ainda mais se considerarmos o conjunto real. A necessidade da introdução deste conjunto remonta à Grécia Antiga, com a descoberta da incomensurabilidade de segmentos, o que, posteriormente, nos levou à criação dos números irracionais. Entretanto, tal avanço não aconteceu de modo rápido: segundo Ávila (2006), a descoberta dos segmentos incomensuráveis representou um momento de crise na matemática, pois os gregos entendiam como "números"apenas números inteiros e por isso, deixaram de lado o estudo das grandezas incomensuráveis e desenvolveram todos seus estudos utilizando números inteiros positivos. Ainda de acordo com Ávila (2006), desde então, a matemática evoluiu de modo extenso, porém sobre bases não tão bem estabelecidas quanto à fundamentação dos sistemas numéricos.

Somente na segunda metade do século XIX, que a construção rigorosa dos sistemas numéricos foi realizada e tais fundamentações abriram espaço para diversos conceitos da matemática moderna. Diversos matemáticos como Capelli (1855-1910), Weierstrass (1815-1897), Dedekind (1831-1916) e Cantor (1845-1918) propuseram suas construções do conjunto dos números reais, mas as realizadas pelos dois últimos foram as mais difundidas. Dedekind trabalhou com a ideia de cortes, enquanto Cantor propôs uma construção por meio de classes de equivalências das sequências de Cauchy, que será abordada neste trabalho.

Este percurso da matemática, quanto à fundamentação teórica dos conjuntos, é similar à forma com que hoje formamos nosso conceito de número e trabalhamos as propriedades e operações dos conjuntos na educação básica, pois temos uma abordagem muito mais intuitiva do que formal. Esta rasa abordagem da teoria dos conjuntos pode levar os estudantes a lacunas e a dificuldades em conteúdos de nível superior acordo com Penteado (2004). Neste sentido, este trabalho apresenta uma construção rigorosa do conjunto dos números reais e está estruturado do seguinte modo. No primeiro capítulo apresentamos os resultados essenciais da Teoria de Conjuntos para a compreensão da construção do conjunto real. No segundo capítulo, realizamos tal construção por meio das classes de equivalências das sequências de Cauchy. Já no terceiro capítulo fazemos uma breve abordagem do conjunto dos reais na educação básica e apresentamos uma construção de caráter geométrico. No quarto capítulo estão as considerações finais sobre o tema.

1

SOBRE CONJUNTOS

De forma rigorosa, a formalização da Teoria dos Conjuntos ocorreu de modo mais sistemático a partir do século XIX e proveu à matemática uma base sólida à inúmeros conceitos. Neste capítulo não ousamos apresentar todos os resultados pertinentes à ela, mas optamos por uma abordagem pontual daquilo que será útil à compreensão da construção do conjunto dos números reais. Para isso, consideraremos conhecidos e munidos de suas propriedades o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) e o corpo dos números racionais ($\mathbb{Q}$).

1.1 RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Definição 1.1. *Uma relação binária entre os elementos de um conjunto A é dita* **relação de equivalência** *se possui três propriedades seguintes.*

(i) **Reflexiva***: para todo $a \in A$, a está relacionado a a.*

(ii) **Simétrica***: para todo a, $b \in A$, se a está relacionado a b então b está relacionado a a.*

(iii) **Transitiva***: para todo a, b, $c \in A$, se a está relacionado a b e b está relacionado a c então a está relacionado a c.*

Definição 1.2. *Se $\sim$ denota uma relação de equivalência sobre o conjunto A, então a* **classe de equivalência** *de um elemento $a \in A$ é o conjunto não vazio*

$$[a] := \{x \in A | x \sim a\}.$$

Teorema 1.3. *Seja A um conjunto não vazio munido da relação de equivalência $\sim$. Para qualquer $a, b \in A$, ou $[a] = [b]$ ou $[a] \cap [b] = \varnothing$.*

Demonstração. Seja $a, b \in A$. Suponha um elemento r tal que $r \in [a]$ e $r \in [b]$. Seja $s \in [a]$. Como $s \sim a$ e $a \sim r$, por transitividade, $s \sim r$ e, portanto, $s \sim b$. Logo $s \in [b]$. Deste modo, $[a] \subseteq [b]$. Analogamente, seja $t \in [b]$. Como $t \sim b$ e $b \sim r$, por transitividade, $t \sim r$ e, portanto, $t \sim a$. Logo $t \in [a]$. Deste modo, $[b] \subseteq [a]$. Assim, se houver, pelo menos, um elemento na intersecção entre dos conjuntos $[a]$ e $[b]$, temos que $[a] = [b]$. Caso contrário, $[a] \cap [b] = \varnothing$. □

Corolário 1.4. *Seja A um conjunto não vazio munido de uma relação de equivalência então A é a união disjunta de todas as classes de equivalência formada pelos elementos de A.*

Demonstração. Temos que duas classes de equivalência distintas são sempre disjuntas. Além disso, pela propriedade reflexiva, para cada $a \in A$, $a \in [a]$ e então toda classe de equivalência é um conjunto não vazio. E como cada $a \in A$ está em alguma dessas classes de equivalência, a união de todas as classes de equivalência é o conjunto A. □

1.2 RELAÇÕES DE ORDEM

Definição 1.5. *Uma relação binária entre os elementos de um conjunto A é dita* **relação de ordem parcial** *se possui as três propriedades seguintes.*

(i) **Reflexiva**: *para todo $a \in A$, a está relacionado a a.*

(ii) **Antissimétrica**: *para todo a, $b \in A$, se a está relacionado a b e b está relacionado a a, então $a = b$.*

(iii) **Transitiva**: *para todo a, b, $c \in A$, se a está relacionado a b e b está relacionado a c então a está relacionado a c.*

Para exprimir que (a, b) estão associados segundo uma relação de ordem parcial, usaremos a notação $a \leq b$, a qual se lê *"a precede b na relação"*. Vale destacar que " $\leq$ " não significa necessariamente *"menor ou igual a"* no sentido numérico usual e sendo assim, o leitor deve ficar atento ao contexto em foco. Analogamente, para exprimir que (a, b) estão associados por uma relação de ordem parcial e $a \neq b$, usaremos a notação $a < b$, que se lê *"a precede estritamente b na relação"*.

Definição 1.6. *Uma relação de ordem parcial entre os elementos de um conjunto A é dita* **relação de ordem total** *se também possuir a seguinte propriedade:*

Para todo a, $b \in A$, a está relacionado a b ou b está relacionado a a.

Definição 1.7. *Um conjunto não vazio no qual esteja definida uma relação de ordem é dito* **conjunto ordenado.**

Definição 1.8. *Seja A um conjunto ordenado e X um conjunto não vazio tal que $X \subset A$. Se existir um $\alpha \in A$ tal que $x \leq \alpha$ para todo $x \in X$ dizemos que X é* **limitado superiormente** *e denominamos α como* **cota superior** *de X.*

De forma similar, se existir um $\beta \in$ A tal que $x \geq \beta$ para todo $x \in X$ dizemos que X é **limitado inferiormente** e denominamos β como **cota inferior** de X se, e somente se, $\beta \leq x$.

Definição 1.9. *Seja A um conjunto ordenado e X um conjunto não vazio tal que* $X \subset A$ *e seja limitado superiormente. Se existir um* $\alpha \in A$ *tal que* $x \leq \alpha\ \forall x \in X$*, dizemos que* α *é cota superior de X. Se* α *é a* **menor das cotas superiores** *de X, a denominamos* **supremo** *de X, ao qual denotamos por* $\alpha = supX$*.*
Assim, α *é o supremo de X quando cumpre duas condições:*

(i) $\forall x \in X$*, tem-se que* $x \leq \alpha$*;*

(ii) se $\gamma \in A$ *tal que* $x \leq \gamma\ \forall x \in X$*, então* $\alpha \leq \gamma$*.*

Analogamente, a **maior cota inferior** *ou* **ínfimo** *do conjunto X, limitado inferiormente, será a cota inferior* $\beta \in A$*, de modo que não exista outra cota inferior* γ *com* $\gamma > \beta$*. O ínfimo de X será denotado por* $\beta = infX$*.*

Definição 1.10. *Um conjunto A possui a* **propriedade da menor cota superior** *se para todo conjunto não vazio X, tal que* $X \subset A$ *e seja limitado superiormente, então* $supX \in A$*.*

1.3 COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

Definição 1.11. *Seja A um conjunto não vazio, munido de duas operações, denominadas, respectivamente, adição e multiplicação, conforme segue:*

(i) $(a, b) \in A \times A \mapsto a + b \in A$

(ii) $(a, b) \in A \times A \mapsto ab \in A$

O conjunto A é chamado de **anel** *se suas operações satisfazem as propriedades a seguir.*

- *Associativa da adição:* $a + (b + c) = (a + b) + c\ \forall a, b, c \in A$
- *Comutativa da adição:* $a + b = b + a\ \forall a, b \in A$
- *Existência de elemento neutro para a adição:* $\exists 0 \in A$ *tal que* $a + 0 = a\ \forall a \in A$
- *Existência de oposto ou simétrico:* $\forall a \in A$, $\exists -a \in A$ *tal que* $a + (-a) = 0$
- *Associativa da multiplicação:* $a(bc) = (ab)c\ \forall a, b, c \in A$
- *Distributivas:* $(a + b)c = ac + bc$ *e* $a(b + c) = ab + ac\ \forall a, b, c \in A$

Definição 1.12. *Um anel A é dito* **comutativo** *se a operação de multiplicação goza da propriedade comutativa, isto é, verifica-se o axioma:*

$$ab = ba\ \forall a, b \in A.$$

Definição 1.13. *Um anel A é dito* **unitário** *se a operação de multiplicação possui elemento neutro, isto é, verifica-se o axioma:*

$$\exists 1_A \in A \text{ tal que } a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a \ \forall a \in A$$

Definição 1.14. *Seja A um anel unitário e comutativo. Um* **ideal** *de A é um subconjunto não vazio I de A que possui as seguintes propriedades:*

(i) *se $a, b \in I$ então $a + b \in I$;*

(ii) *se $\alpha \in A$ e $a \in I$ então $\alpha \cdot a \in I$.*

Definição 1.15. *Se A e B são dois anéis unitários e comutativos, chama-se* **homomorfismo** *de A em B toda aplicação $\psi : A \to B$ que verifica as seguintes condições:*

- $\psi(a + a') = \psi(a) + \psi(a') \ \forall a, a' \in A$
- $\psi(a \cdot a') = \psi(a) \cdot \psi(a') \ \forall a, a' \in A$
- $\psi(1) = 1$ *se* $\psi \neq 0$ *($\psi = 0$ significa que $\psi(a) = 0 \ \forall a \in A$).*

Definição 1.16. *Dizemos que $\psi : A \to B$ é um* **isomorfismo** *de A sobre B se ψ é um homomorfismo de A em B e ψ é bijetora.*

Definição 1.17. *Seja A um anel comutativo e unitário, tal que $A \neq \{0\}$. A é denominado* **corpo** *se todo elemento não nulo de A é inversível, isto é, verifica-se o axioma:*

$$\forall a \in A \text{ e } a \neq 0, \exists a^{-1} \in A \text{ tal que } a \cdot a^{-1} = 1_A \ \forall a \in A.$$

Vejamos alguns resultados sobre corpos:

Proposição 1.18. *Seja A um corpo e $a, b, c \in A$. São válidas as seguintes propriedades:*

- *os elementos neutros 0 e 1_A são únicos.*
- *os elementos simétrico e inverso são únicos. Ou seja, $\forall a \in A$, $-a$ é único e $\forall a \neq 0, a^{-1}$ é único.*
- $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \ \forall a \in A$.
- *leis de corte: $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ e, para $c \neq 0$, $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$.*
- $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ *ou* $b = 0 \ \forall a, b \in A$.
- *regra de sinais: $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ e $(-a) \cdot (-b) = ab$.*

Demonstração. As propriedades acima decorrem de forma imediata das definições 1.11, 1.12, 1.13 e 1.17. □

Definição 1.19. *Um corpo A é dito* **corpo ordenado** *quando munido da relação de ordem parcial $\leq$ são válidos os seguintes axiomas:*

(i) $\forall a, b, c \in A$, *se* $a \leq b$ *então* $a + c \leq b + c$.

(ii) $\forall a, b, c \in A$, *se* $a < b$ *e* $0 \leq c$, *então* $ac \leq bc$.

Proposição 1.20. *Em um corpo ordenado A, para todo $a, b \in A$ são equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) $a \leq b$;

(ii) $a - b \leq 0$;

(iii) $-b \leq -a$.

Demonstração. $(i) \to (ii)$: De $a \leq b$ e pelo primeiro axioma, apresentado na definição 1.19, segue que $a + (-b) \leq b + (-b)$. Portanto, $a - b \leq 0$.

$(ii) \to (iii)$: Por hipótese, $a - b \leq 0$. Dessa relação, associada ao primeiro axioma da definição 1.19, temos que $(a - b) + (-a) \leq 0 + (-a)$. Donde, $-b \leq -a$.

$(iii) \to (i)$: Para este caso, basta somarmos $(a + b)$ aos membros de $-b \leq -a$, conforme a definição 1.19. Assim, obtemos: $-b + (a + b) \leq -a + (a + b)$. Logo, $a \leq b$. □

Em relação aos corpos ordenados, também podemos definir um outro conceito que nos será muito útil, o de valor absoluto.

Definição 1.21. *Seja A um corpo ordenado. O* **valor absoluto** *(ou módulo) do elemento $x \in A$ é simbolicamente representado por $|x|$ e definido por:*

$$|x| = x \text{ se } x \geq 0 \text{ e}$$
$$|x| = -x \text{ se } x < 0.$$

Da definição 1.21, $|x| \in A_+$, em que A_+ corresponde ap subconjunto com os termos não negativos a A, pois se $x \geq 0$ então $|x| = x \geq 0$. Da mesma forma, se $x \leq 0$ então $-x \leq 0$ e $|x| = -x \geq 0$. Note que, como $|x| = max\{-x, x\}$, temos que $-|x| \leq x \leq |x|$ para todo $x \in A$.

Teorema 1.22. *Sejam x, y e z elementos quaisquer de um corpo ordenado A. São válidas as seguintes propriedades:*

(i) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(iii) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$

Demonstração. (i) Como $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$, temos que $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$. Deste modo, observamos que $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$ e, portanto $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(ii) Veja que, da definição 1.21, $|x| = x$ ou $|x| = -x$. Como A é um corpo, segue que $|x|^2 = x^2$. Assim,

$$|x \cdot y|^2 = (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 = (|x| \cdot |y|)^2$$

De onde temos as seguinte possibilidades: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ ou $|x \cdot y| = -(|x| \cdot |y|)$. Contudo, da definição 1.21, decorre que $|x \cdot y|, |x|$ e $|y| \in A_+$. Logo, $|x| \cdot |y| \in A_+$ então concluímos que $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(iii) Decorre de forma direta do item (i) acima:

$$|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z|.$$

□

Definição 1.23. *Sejam a um elemento qualquer de um corpo ordenado A e um número $n \in \mathbb{N}$. Definimos o produto de um elemento de A por um elemento de $\mathbb{N}$ do seguinte modo recursivo:*

$$1 \cdot a = a$$
$$(n + 1) \cdot a = n \cdot a + a.$$

Definição 1.24. *Um corpo ordenado A é dito* **arquimediano** *se, qualquer que seja $a \in A$, existe um número $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot 1_A > a$.*

Proposição 1.25. *As seguintes propriedades num corpo arquimediano A são equivalentes:*

(i) $\mathbb{N} \subset A$ *é ilimitado superiormente;*

(ii) Dados $a, b \in A$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$;

(iii) $\forall a \in A$ e $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.

É importante ressaltar que $\mathbb{N} \subset A$ denota o seguinte subconjunto de A: $\{n \cdot 1_A : n \in \mathbb{N}\}$. Isso implica um homomorfismo entre $\mathbb{N}$ e os elementos do corpo A e assim, tal subconjunto mantém a estrutura algébrica e de ordem de $\mathbb{N}$.

Demonstração. $(i) \to (ii)$: Sendo $a > 0$, por (i) , existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{b}{a}$. Ou seja, $n \cdot a > b$.
$(ii) \to (iii)$: Em (ii) ao tomarmos $b = 1$, obtemos $n \cdot a > 1$, isto é, $\frac{1}{n} < a$. Logo, $0 < \frac{1}{n} < a$.
$(iii) \to (i)$: Para todo $a \leq 0$ existe $1 \in \mathbb{N}$ tal que $a < 1$. Se $a > 0$ então $\frac{1}{a} > 0$. Por (iii) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{1}{a}$. Portanto, $n > a$. Isto é, $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente em A. □

Definição 1.26. *Um corpo ordenado A é dito* **ordenado completo***, se todo subconjunto não-vazio de A limitado superiormente possui supremo em A.*

Proposição 1.27. *Todo corpo ordenado completo é arquimediano.*

Demonstração. Seja A um corpo ordenado completo. Suponhamos que A não é arquimediano. Isso implica que o conjunto $\mathbb{N} \in A$ é limitado superiormente. Então, existe $\beta = sup\mathbb{N}$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 \leq \beta$, e daí temos que $n \leq \beta - 1$. Isso significa que $\beta - 1$ é uma cota superior de $\mathbb{N}$ que é menor do que o supremo de $\mathbb{N}$, o que é absurdo. $\square$

2

NÚMEROS REAIS

A seguir, faremos a construção do conjunto dos números reais e para tanto foram utilizados como suporte Aragona (2010) e Kemp (2016).

2.1 MOTIVAÇÃO INTUITIVA

Intuitivamente, consideramos como um número real, seja ele racional ou irracional, e que por simplificação consideraremos positivo, são aqueles representados por uma expressão decimal do tipo:

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + ... \text{ em que } a_i \geq 0$$

Considerando que já dispomos de $\mathbb{Q}$ e suas propriedades, ao tomarmos um $\alpha \in \mathbb{Q}$ a sequência de números inteiros formada pelos termos a_i $\forall i \in \mathbb{N}$ será sempre periódica e, eventualmente, constante a partir de um índice n. Então nos interessa todos os casos em que $\alpha \notin \mathbb{Q}$ e, para este caso, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$ teremos:

$$\alpha \neq a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_m}{10^m}$$

Contudo, quanto maior m, mais próxima do valor real α a expressão acima se tornará. Por exemplo, ao tomarmos o número $\phi = 1,618...$ estamos dizendo que ϕ é o número real que até a 3^a casa decimal se aproxima da sequência

$$\phi \approx 1 + \frac{6}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{8}{10^3}$$

Em outras palavras, estamos afirmando que

$$|\phi - 1,618| < 10^{-3}$$

Por exemplo, se quiséssemos uma aproximação mais apurada para ϕ, poderíamos desenvolver a sequência, a seguir, de números racionais até a 20^a casa decimal

1; 1,6; 1,62; 1,618; 1,6180; 1,61803; 1,618033; 1,6180339; 1,61803398; 1,618033988; ...

Conforme citamos anteriormente, quanto maior for m, ou seja, a quantidade de casas decimais, melhor será a aproximação de ϕ. Além disso, note que esta não é a única sequência de números racionais que nos aproximam de ϕ. Outro exemplo é:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55} \cdots$$

Além dos exemplos citados, existe uma infinidade de sequências de números racionais distintas que podem nos aproximar de ϕ, sendo que nenhuma delas é preferível em relação às demais, já que o início da sequência é irrelevante - o que realmente importa é para onde ela se aproxima.

Seguindo a ideia apresentada, de que sequências distintas de números racionais podem nos levar a aproximações de um mesmo número real, definiremos que um número real α será o conjunto de todas as sequências de números racionais que se aproximam de α, tais que o módulo da diferença entre os termos m e n da sequência termos sejam arbitrariamente pequenas, desde que tomados m e n suficientemente grandes.

2.2 SEQUÊNCIAS DE CAUCHY

Partindo de nossa noção intuitiva, inicialmente precisamos formalizar o que são sequências racionais.

Definição 2.1. *Uma* **sequência de números racionais***, a qual chamaremos de* **sequência em $\mathbb{Q}$** *é uma função f: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ que associa números naturais n a números racionais a_n. Usualmente, denotamos tal função por $n \mapsto a_n$, e deste modo, os termos da sequência são $\{a_1, a_2, ...\}$ e a indicaremos, por simplicidade, por (a_n) ou a_n, quando não houver possibilidade de confusão.*

No restante deste trabalho a palavra "sequência"refere-se a "sequência em $\mathbb{Q}$".

Nós estamos interessados no comportamento das sequências a_n quando tomamos um n suficientemente grande aos nossos propósitos e, por isso, definimos:

Definição 2.2. *Uma sequência racional (a_n) tem* **limite** *L racional e o notaremos por:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \text{ ou } a_n \longrightarrow L \text{ quando } n \longrightarrow \infty$$

se para cada $\mathcal{E} > 0$ existir $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N$ então $|a_n - L| < \mathcal{E}$. Neste caso, dizemos que a_n tende a L.

Isso significa que uma sequência é limitada a L se pudermos fazer com que os termos a_n sejam tão próximos de L quanto quisermos, ao tomarmos n suficientemente grande. Quando $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, dizemos que a sequência **converge**. Caso contrário, dizemos que a sequência **diverge**. Em tempo, vejamos um caso particular da definição acima:

Uma sequência racional (a_n) **tende 0** *se para cada $\mathcal{E} > 0$ existir um natural correpondente N tal que se $n > N$ então $|a_n| < \mathcal{E}$. Simbolicamente, representamos: $a_n \to 0$.*

Algumas destas sequências não convergem para números racionais, embora seus termos fiquem cada vez mais p'roximos, quando tomamos um n suficientemente grande. Veja, por exemplo, uma sequência de números racionais que se aproxima de π:

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}142;\ 3{,}1416;\ 3{,}14159;\ ...$$

Apesar da sequência acima não tender a nenhum número racional, percebemos que a sequência vai aumentando um algarismo da representação decimal de π a cada termo e, deste modo, a diferença entre os termos finais fica cada vez menor. Este é um exemplo do que chamamos de **Sequência de Cauchy**, cuja definição será dada a seguir.

Definição 2.3. *Uma sequência racional* (a_n) *é dita* **de Cauchy** *se dado um racional* $\mathcal{E} > 0$*, existe um* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para qualquer* m*,* $n > N$*,* $|a_n - a_m| < \mathcal{E}$*.*

A seguir, provaremos alguns resultados sobre as sequências de Cauchy.

Teorema 2.4. *Toda sequência convergente em* $\mathbb{Q}$ *é de Cauchy.*

Demonstração. Por hipótese, sabemos que a sequência racional $a_n \to q$ e isso significa que dado o racional $\mathcal{E} > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - q| < \frac{\mathcal{E}}{2}$, para $n > N$. Assim, para $n, m > N$, pela desigualdade triangular, temos:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - q) + (a_m - q)| \leq |a_n - q| + |a_m - q| < \frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} = \mathcal{E}.$$

E portanto, a_n é uma sequência de Cauchy. □

Proposição 2.5. *Nem toda sequência de Cauchy é convergente em* $\mathbb{Q}$*.*

Demonstração. Considere a seguinte sequência de aproximações racionais para π:

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}1415;\ 3{,}14159,\ ....$$

Nesta sequência, ao tomarmos $\mathcal{E} = \frac{1}{10}$, então $|a_n - a_m| < \mathcal{E}$ quando $m, n > 1$.
De mesmo modo, ao tomarmos $\mathcal{E} = \frac{1}{100}$, então $|a_n - a_m| < \mathcal{E}$ quando $m, n > 2$, e assim sucessivamente.
Podemos observar que tal sequência é de Cauchy, contudo não converge a nenhum número racional. □

Teorema 2.6. *Toda sequência racional de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Suponha a sequência racional (a_n) de Cauchy. Ao tomarmos $\mathcal{E} = 1$, existe um $N \in \mathbb{N}$, tal que $|a_n$ - $a_m| < 1$, sempre que m, $n > N$. Então, $|a_n$ - $a_{N+1}| < 1$, e pela desigualde triangular, temos:

$$|a_n - a_{N+1}| \geq |a_n| - |a_{N+1}| \Rightarrow |a_n| \leq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}|.$$

Como $|a_n - a_{N+1}| < 1$, podemos escrever que $|a_n| \leq 1 + |a_{N+1}|$. E isso implica que

$$|a_{N+1} - 1| < a_n < a_{N+1} + 1, \text{ para } n > N.$$

Agora, definimos

$$\mathrm{M} = max\{|a_0|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_N|, |a_{N+1} - 1|, |a_{N+1} + 1|\}.$$

Então, se $n < N$, então $|a_n|$ está na listagem acima e portanto, $|a_n| \leq \mathrm{M}$. Caso contrário, se $n > N$, $|a_n|$ é menor do que pelo menos um dos últimos termos da listagem, então também é válido que $|a_n| \leq \mathrm{M}$. Desta forma, temos que M é um limitante da sequência racional (a_n). □

Os teoremas 2.4, 2.5 e 2.6 nos mostram que quanto mais termos uma sequência de Cauchy possui, menor a distância entre seus termos. Contudo, nem sempre estas sequências convergem para um número racional, conforme exemplificamos com π e ϕ. Assim, intuitivamente, podemos compreender a construção do conjunto dos números reais como um completamento dos racionais. E isso quer dizer que, ela se baseia na ideia de que o conjunto dos números reais é composto pelas sequências limitadas que convergem para os números racionais acrescido das sequências limitadas que convergem para *outros números*, não racionais, para os quais estas sequências estão tendendo. A estes *outros números* denominaremos *irracionais*.

Sendo assim, mostraremos que o conjunto dos números reais pode ser entendido como o conjunto das classes de equivalência das sequências de Cauchy e, desta forma, partiremos do conjunto de todas as sequências de Cauchy de números racionais, as quais denotaremos por C_Q e as agruparemos, em classes de equivalências, de acordo com o valor para o qual convergem, pois conforme vimos na seção 2.1 há inúmeras sequências numéricas racionais distintas que convergem a um mesmo número. Para isso, definiremos uma relação de equivalência sobre tal conjunto.

2.3 CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS PELAS SEQUÊNCIAS DE CAUCHY

Definição 2.7. *Sejam $(a_n), (b_n) \in C_Q$. As sequências a_n e b_n são ditas equivalentes se $a_n - b_n \to 0$. Ou seja, duas sequências são equivalentes se a diferença entre elas tende a zero.*

Teorema 2.8. *A relação definida em 2.7 é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Para provar que a relação definida em 2.7 é uma relação de equivalência, devemos mostrar que a mesma é reflexiva, simética e transitiva.

(i) Reflexiva: como $a_n - a_n = 0$ e a sequência formada por zeros converge para 0, temos que (a_n) está relacionada a (a_n).

(ii) Simétrica: suponha que (a_n) esteja relacionada a (b_n), logo $a_n - b_n \to 0$. Como $b_n - a_n = -(a_n - b_n)$ então $|b_n - a_n| = |-(a_n - b_n)|$. Então, pela definição **??** $b_n - a_n \to 0$ e, portanto, (b_n) está relacionada a (a_n).

(iii) Transitiva: suponhamos que (a_n) está relacionada a (b_n) e (b_n) está relacionada a (c_n). Isso implica que $a_n - b_n \to 0$ e $b_n - c_n \to 0$. Fixado um $\mathcal{E} > 0$ existe um natural correpondente N tal que se $n > N$ então $|a_n - b_n| < \frac{\mathcal{E}}{2}$. Também existe um natural M tal que se $n > M$ então $|b_n - c_n| < \frac{\mathcal{E}}{2}$. Para cada $n > max\{N, M\}$, temos então que:

$$|a_n - c_n| = |(a_n - b_n) + (b_n - c_n)| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} = \mathcal{E}.$$

Ou seja, $a_n - c_n \to 0$, o que implica que (a_n) está relacionada a (c_n). □

Agora, munidos dessa relação de equivalência, definiremos a seguir o conjunto dos números reais.

Definição 2.9. *Os números reais são o conjunto das classes de equivalências das sequências de Cauchy de números racionais, conforme a definição* 2.7. *Cada classe de equivalência corresponde a um número real. Denotamos tal conjunto por* $\mathbb{R}$.

Definição 2.10. *Dado um número racional* q*, denotaremos por* $[q]$ *a classe de equivalência correspondente à sequência constante* $(q, q, q, ...)$ *que convergem para* q.

Assim, temos uma cópia de $\mathbb{Q}$ contida em $\mathbb{R}$.

Precisamos mostrar que ao definirmos o conjunto $\mathbb{R}$ como 2.9 temos um corpo arquimediano completo que possui supremo e, por isso, ele se difere de $\mathbb{Q}$. Então, estabeleçamos duas operações e uma relação de ordem:

Definição 2.11. *Seja* $s, t \in \mathbb{R}$ *e sequências de Cauchy de números racionais* a_n *e* b_n *tais que* $s = [a_n]$ *e* $t = [b_n]$.

(i) Definimos $s + t$ *como a classe de equivalência da sequência* $[a_n + b_n]$*;*

(ii) Definimos $s \cdot t$ *como a classe de equivalência da sequência* $[a_n \cdot b_n]$.

Teorema 2.12. *As operações* $+, \cdot$ *, denominadas adição e multiplicação, respectivamente, conforme* 2.11 *estão bem definidas.*

Demonstração. Iniciemos com a operação $(+)$:
Suponha que $[a_n] = [c_n]$ e $[b_n] = [d_n]$, isso significa que $a_n - c_n \to 0$ e $b_n - d_n \to 0$. Ou seja, fixado $\mathcal{E} > 0$, existem $N, M \in \mathbb{N}$ tais que para $n > N, |a_n - c_n| < \frac{\mathcal{E}}{2}$ e, para $n > M, |b_n - d_n| < \frac{\mathcal{E}}{2}$. Tomando $n = max\{N, M\}$, temos:

$$|(a_n + b_n) - (c_n + d_n)| = |(a_n - c_n) + (b_n - d_n)| < |a_n - c_n| + |b_n - d_n| < \frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} = \mathcal{E}$$

Então, vemos que $|(a_n + b_n) - (c_n + d_n)|$ tende a 0, e portanto $[a_n + b_n] = [c_n + d_n]$.

Agora, vejamos a operação $(\cdot)$: Suponha novamente que $[a_n] = [c_n]$ e $[b_n] = [d_n]$. Nosso objetivo é mostrar que $a_n \cdot b_n = c_n \cdot d_n$, o que em outras palavras significa que $|(a_n \cdot b_n) - (c_n \cdot d_n)|$ tende a 0.

Temos que:

$$a_n \cdot b_n - c_n \cdot d_n = a_n \cdot b_n - b_n \cdot c_n + b_n \cdot c_n - c_n \cdot d_n = b_n \cdot (a_n - c_n) + c_n \cdot (b_n - d_n)$$

Assim,

$$|a_n \cdot b_n - c_n \cdot d_n| \leq |b_n| \cdot |a_n - c_n| + |c_n| \cdot |b_n - d_n|$$

Como b_n e c_n são sequências de Cauchy, pelo teorema 2.6, existem $M, L \in \mathbb{N}$ tais que $|b_n| < M$ e $|c_n| < L$. Agora, tomando um $R \in \mathbb{N}$, maior que M e L, temos:

$$|a_n \cdot b_n - c_n \cdot d_n| \leq R \cdot (|a_n - c_n| + |b_n - d_n|)$$

Por hipótese, $a_n - c_n \to 0$ e $b_n - d_n \to 0$, então, fixado $\mathcal{E} > 0$, existem $N, M \in \mathbb{N}$ tais que para $n > N$, $|a_n - c_n| < \frac{\mathcal{E}}{2R}$ e, para $n > M$, $|b_n - d_n| < \frac{\mathcal{E}}{2R}$.

Tomando $n = max\{N, M\}$, temos:

$$|a_n \cdot b_n - c_n \cdot d_n| \leq R \cdot (|a_n - c_n| + |b_n - d_n|) \leq R \cdot (\tfrac{\mathcal{E}}{2R} + \tfrac{\mathcal{E}}{2R}) \leq \mathcal{E}.$$

Logo, $|a_n \cdot b_n - c_n \cdot d_n|$ tende a 0, e deste modo, $a_n \cdot b_n = c_n \cdot d_n$. □

Conforme visto acima, temos que $\mathbb{R}$ possui duas operações bem definidas, contudo ainda devemos provar que tais operações garantem a $\mathbb{R}$ a estrutura de corpo.

Teorema 2.13. *As operações definidas em* 2.11 *garantem a* $\mathbb{R}$ *uma estrutura de corpo.*

Demonstração. Devemos mostrar que são válidas as propriedades apresentadas em 1.11, 1.12, 1.13 e 1.17.

- A operação $(+)$ é associativa, isto é, $\forall [a_n], [b_n]$ e $[c_n] \in \mathbb{R}$, temos:
  $[a_n] + [b_n + c_n] = [a_n + b_n + c_n] = [a_n + b_n] + [c_n]$.

- A operação $(+)$ é comutativa, isto é, $\forall [a_n], [b_n] \in \mathbb{R}$, temos:
  $[a_n] + [b_n] = [a_n + b_n] = [b_n + a_n] = [b_n] + [a_n]$.

- Existe elemento neutro na operação $(+)$. Tal elemento é o 0, correspondente à classe de equivalência $[0]$ que contém a sequência constante (0). Assim, $\forall [a_n] \in \mathbb{R}$, é válido: $[a_n] + [0] = [a_n]$.

- Em $\mathbb{R}$ existe oposto aditivo, pois: Seja $\alpha = [a_n]$ um elemento qualquer de $\mathbb{R}$. Consideraremos - $\alpha = [-a_n]$. temos:
  $\alpha + (-\alpha) = [a_n] + [-a_n] = [a_n - a_n] = [0] = 0$.

- A operação $(\cdot)$ é associativa, isto é, $\forall [a_n], [b_n]$ e $[c_n] \in \mathbb{R}$, temos:
  $[a_n] \cdot [b_n \cdot c_n] = [a_n \cdot b_n \cdot c_n] = [a_n \cdot b_n] \cdot [c_n]$.

- A operação $(\cdot)$ é distributiva, isto é, $\forall [a_n], [b_n]$ e $[c_n] \in \mathbb{R}$, temos: $[a_n + b_n] \cdot [c_n] = [a_n \cdot c_n] + [b_n \cdot c_n]$ e $[a_n] \cdot [b_n + c_n] = [a_n \cdot b_n] + [a_n \cdot c_n]$.
- Seja $1 = [1]$, determinada pela sequência constante (1). $\forall [a_n] \in \mathbb{R}$, é válido: $[a_n] \cdot 1 = [a_n \cdot 1] = [a_n]$ Portanto, $\mathbb{R}$ é dito unitário.
- A operação $(\cdot)$ é comutativa, isto é, $\forall [a_n], [b_n] \in \mathbb{R}$, temos: $[a_n] \cdot [b_n] = [a_n \cdot b_n] = [b_n \cdot a_n] = [b_n] \cdot [a_n]$.

- Todos os elementos de $\mathbb{R}$ devem ser inversíveis, ou seja, $\forall [a_n] \in \mathbb{R}$, tal que $a_n \neq 0$, existe $[b_n]$ tal que $[a_n] \cdot [b_n] = 1$.
  Considere a sequência de Cauchy a_n tal que $[a_n] \neq 0$. Isso implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$, $a_n \not\to 0$.
  Agora, seja a sequência (b_n) definida por $b_n = 0$ para todo $n \leq N$ e $b_n = \frac{1}{(a_n)}$ para todo $n > N$. Então, $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n) \cdot 0 = 0$ para todo $n \leq N$ e $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n) \cdot \frac{1}{(a_n)} = 1$ para todo $n > N$.
  Note que a sequência $(1, 1, 1, ...) - (a_n) \cdot (b_n) = 1 - 0 = 1$, se $n \leq N$ e $(1, 1, 1, ...) - (a_n) \cdot (b_n) = 1 - 1 = 0$, se $n > N$. Ou seja, para $n > N$, $a_n \cdot b_n = 1$ e, então $[(a_n \cdot b_n)] = [(1, 1, ...)] \in \mathbb{R}$. Então (b_n) é o inverso de (a_n).

$\square$

Portanto, já sabemos que $\mathbb{R}$, da forma como foi definido, é um corpo. Agora mostremos que trata-se de um corpo ordenado.

Definição 2.14. *Dizemos que s é positivo se existe uma sequência (a_n), e $\exists N \in \mathbb{N}$ com $a_n > 0$ $\forall n > N$ tal que $s = [(a_n)]$ e $s \neq 0$. Dados dois números $s, t \in \mathbb{R}$, dizemos que $s > t$ se $s - t > 0$.*

Teorema 2.15. $\mathbb{R}$ *é um corpo arquimediano.*

Demonstração. Seja $s, t \in \mathbb{R}$ e $s, t > 0$, precisamos determinar m tal que $m \cdot s > t$. Consideremos $s = [(a_n)]$ e $t = [(b_n)]$. Queremos provar, de acordo com a definição 2.14, que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ é válido que $m \cdot a_n - b_n > 0$ e que $m \cdot a_n - b_n \not\to 0$.
Suponhamos, por absurdo, que para todo m e N, existe um $n > N$ tal que $m \cdot a_n \leq b_n$.
De fato, como (b_n) é uma sequência de Cauchy, pelo teorema 2.6, é limitada. Isso implica que existe $M \in \mathbb{Q}$ tal que $|b_n| < M$ para todo n. Como $\mathbb{Q}$ é arquimediano, temos que dado um $\mathcal{E} > 0$ existe um m tal que $\frac{M}{m} < \frac{\mathcal{E}}{2}$. Então, fixado m, se $m \cdot a_n \leq b_n$ então $a_n \leq \frac{b_n}{m} \leq \frac{M}{m} < \frac{\mathcal{E}}{2}$.
Agora, como (a_n) também é de Cauchy, existe N tal que para todo $n, k > N, |a_n - a_k| < \frac{\mathcal{E}}{2}$.
Como, tomamos por hipótese que existe um $n > N$ tal que $m \cdot a_n \leq b_n$, temos que $a_n \leq \frac{b_n}{m} \leq \frac{M}{m} < \frac{\mathcal{E}}{2}$. Mas, para todo $k > N$, temos que $a_k - a_n < \frac{\mathcal{E}}{2}$, de onde vemos que,

$a_k < a_n + \frac{\mathcal{E}}{2} < \frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{\mathcal{E}}{2} = \mathcal{E}$.
Assim, $a_k < \mathcal{E}$ para todo $k > N$. Portanto, $a_k \to 0$, contradizendo a hipótese de que $s = [(a_n)] > 0$ e assim, concluimos que exite algum $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \cdot a_n - b_n > 0$.
Mostremos agora que $m \cdot a_n - b_n \not\to 0$.
De fato, é possivel que $m \cdot a_n - b_n \to 0$, como por exemplo se $[(a_n)] = [1]$ e $[(b_n)] = [m]$. Contudo, neste caso, basta tomar o inteiro $m + 1$. Como $[(a_n)] > 0$, para n suficientemente grante, é válido $(m+1) \cdot a_n - b_n = m \cdot a_n + a_n - b_n > a_n > 0$. Assim, se $m \cdot a_n - b_n \to 0$, $(m+1) \cdot a_n - b_n \not\to 0$ desde que $s = [(a_n)] > 0$. □

Até este ponto, na verdade, nada do que fizemos distingue os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. E, pelas definições 2.9 e 2.10, fica claro que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. O interessante é que isso ocorre de tal modo que $\mathbb{R}$ preserva todas as propriedades e estruturas algébricas de $\mathbb{Q}$ enquanto corpo arquimediano. Isso signigica que há um homomorfismo injetor entre o conjunto $\mathbb{Q}$ e o conjunto $\mathbb{R}$, conforme esperado, já que construímos $\mathbb{R}$ partindo de $\mathbb{Q}$.

Adiante, verificamos que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ ou seja, a grosso modo, mostremos que entre dois números racionais há sempre um número real.

Teorema 2.16. *Dado um número real r e qualquer $\mathcal{E} > 0$, existe um número racional q tal que $|r - q| < \mathcal{E}$.*

Demonstração. Seja r um número real, $r = [(a_n)]$, onde (a_n) é uma sequência de Cauchy. Logo, dado $\mathcal{E} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > N$, temos que $|a_n - a_m| < \mathcal{E}$. Escolhendo algum $l > N$, considere o número racional q, que pode ser expresso por $q = [(a_l)]$. Então, $r - q = [(a_n - a_l)]$ e $q - r = [(a_l - a_n)]$ com $n \in \mathbb{N}$. Então, para todos $l > N$ e $n > N$, teremos $(a_n - a_l) < \mathcal{E}$ e $(a_l - a_n) < \mathcal{E}$. Portanto,$|r - q| < \mathcal{E}$. □

Ainda na busca de diferenciar os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, trataremos de alguns resultados que auxiliarão nosso entendimento da propriedade da menor cota superior.

Sejam $S \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio e M uma cota superior para S. Como S é não vazio, seja $s_0 \in S$. A seguir, usaremos os termos M e s_0 na construção de duas sequências: (u_n) e (l_n).

- Tomemos $u_0 = M$ e $l_0 = s_0$;
- Suponha definidos u_n e l_n. Considere a média entre tais termos o número $m_n = \frac{(u_n + l_n)}{2}$;
- Se m_n é cota superior de S, definimos $u_{n+1} = m_n$ e $l_{n+1} = l_n$;
- Se m_n não é cota superior de S, definimos $u_{n+1} = u_n$ e $l_{n+1} = m_n$.

Dado que $s_0 < M$, prova-se por indução que (u_n) é uma sequência não crescente, já que $u_{n+1} \leq u_n$ e (l_n) é uma sequência não decrescente, já que $l_{n+1} \geq l_n$.

Lema 2.17. *As sequências (u_n) e (l_n), conforme definidas anteriormente, são sequências de Cauchy de números reais.*

Demonstração. Da forma como definimos, (l_n) é uma sequência não decrescente e limitada pois $l_n \leq M$ para todo n. Isso implica que (l_n) é convergente e, pelo teorema 2.4, temos que (l_n) é de Cauchy. Agora, em relação à (u_n), note que $u_n \geq s_0$ para todo n, e assim, $-u_n \leq -s_0$. Dado que (u_n) é não crescente, sabemos que $(-u_n)$ é não decrescente e limitada e, assim como (l_n), $(-u_n)$ é de Cauchy e, portanto, (u_n) também é de Cauchy. □

Lema 2.18. *Toda sequência de Cauchy (u_n) converge para o número real que representa.*

Demonstração. Como (u_n) é de Cauchy, existem $n, m > M \in \mathbb{N}$ tal que $|u_n - u_m| < \frac{\mathcal{E}}{3}$. Ao fixarmos um termo u_n na sequência (u_n), pelo teorema 2.16 existe um número racional q_n tal que $|u_n - q_n| < \frac{1}{n}$.
Note que a sequência (q_n) é Cauchy, pois ao fixarmos um $\mathcal{E} > 0$, pela propriedade arquimediana, podemos tomar um $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{\mathcal{E}}{3}$. Deste modo, contanto que $n, m > max\{N, M\}$, temos:

$$|q_n - q_m| = |(q_n - u_n) + (u_n - u_m) + (u_m - q_m)| \leq |q_n - u_n| + |u_n - u_m| + |u_m - q_m| < \frac{\mathcal{E}}{3} + \frac{\mathcal{E}}{3} + \frac{\mathcal{E}}{3} = \mathcal{E}.$$

Então, como a sequência (q_n) é de Cauchy, ela representa um número real $\alpha = [(q_n)]$. Agora, devemos mostrar que $u_n - \alpha \to 0$.

Seja β_n um número real equivalente a uma sequência racional constante $[(q_n)]$, ou seja $\beta_n = [(q_n, q_n, q_n, ...)]$. Pela definição de α, temos que $\beta_n - \alpha \to 0$. Entretanto, por construção, $u_n - \beta_n < \frac{1}{n}$. Logo, se $\beta_n \to \alpha$ e $u_n - \beta_n \to 0$, então $u_n \to \alpha$. □

Temos que (u_n) é uma sequência não crescente de cotas superiores para S, que tende para um número real α. Provemos que α é a menor cota superior para o conjunto S.

Lema 2.19. *$l_n \to \alpha$.*

Demonstração. Da forma como definimos (u_n) e (l_n), se m_n é uma cota superior para S, temos:

$$u_{n+1} - l_{n+1} = m_n - l_n = \frac{u_n + l_n}{2} - l_n = \frac{u_n - l_n}{2}.$$

Agora, se m_n não é uma cota superior para S, temos:

$$u_{n+1} - l_{n+1} = u_n - m_n = u_n - \frac{u_n + l_n}{2} = \frac{u_n - l_n}{2}.$$

Isso significa que $u_1 - l_1 = \frac{1}{2}(M-s)$, e $u_2 - l_2 = \frac{1}{2}(u_1 - l_1) = (\frac{1}{2})^2(M-s)$, e por indução, pode-se verificar que $u_n - l_n = 2^{-n}(M-s)$.

Então, desde que $M > s$ e $2^{-n} < \frac{1}{n}$, pela propriedade arquimediana para $\mathbb{R}$, temos que para qualquer $\mathcal{E} > 0$ tal que $2^{-n}(M-s) < \mathcal{E}$ para n suficientemente grande. Portanto, $u_n - l_n \leq 2^{-n}(M-s) < \mathcal{E}$ e então, $u_n - l_n \to 0$. Assim, desde que $u_n \to \alpha$, teremos $l_n \to \alpha$. □

Enfim, chegamos ao clímax:

Teorema 2.20. $\mathbb{R}$ *possui a propriedade da menor cota superior.*

Demonstração. Inicialmente devemos mostrar que α é uma cota superior.
Suponha, por absurdo, que α não é cota superior. Ou seja, $\alpha < s$ para algum $s \in S$. Então, $s - \alpha > 0$. Tomando um $\mathcal{E} = s - \alpha$ e, desde que $u_n \to \alpha$ e seja não crescrente, existe um n tal que $u_n - \alpha < \mathcal{E}$. Isso significa que $u_n < \alpha + \mathcal{E} = \alpha + (s - \alpha) = s$. Contudo, u_n é uma cota superior para S. Temos uma condradição e então, α é cota superior para S.

Também sabemos que para cada n, l_n não é uma cota superior. Ou seja, para cada n existe um $s_n \in S$ tal que $l_n \leq s_n$. Como a sequência (l_n) é não-decrescente e $l_n \to \alpha$, pelo lema 2.19, temos que dado $\mathcal{E} > 0$, existe um N tal que para $n > N$, $l_n > \alpha - \mathcal{E}$. Dessa forma, nenhum número menor do que α pode ser cota superior para S. Logo, α é a menor cota superior de S. □

Isso conclui nossa construção do conjunto dos reais: ao longo do texto definimos o conjunto dos reais como aquele formados por elementos que correspondem à classes de equivalência de sequências de Cauhy e mostramos que tal conjunto é um corpo ordenado e completo.

3

PROPOSTA DIDÁTICA

A abordagem sobre números reais na escola básica, tanto no Brasil quanto no exterior, tem ocorrido de forma insatisfatória de acordo com Boff (2006). Os problemas surgem já na caracterização deste conjunto, na forma em que é feita pelos professores e constante em diversos livros didáticos. Segundo Rezende (2003) é possível encontramos a definição de número irracional como sendo os reais extraindo-se os racionais e a seguir a definição de números reais como a união entre racionais e irracionais, e assim, não estabelecendo, de fato, o conjunto. Ripoll (2004) nos mostra que também é possível encontrar em livros didáticos, definições tais como "irracional é todo número de representação infinita e não periódica" ou ainda "irracional é todo número que não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ com a, b $\in \mathbb{R}$ e b não-nulo". Estas formas de definição do conjunto dos números reais além de abstratas para alunos da escola básica podem contribuir para uma concepção equivocada sobre o conjunto já que, por exemplo, de acordo com a última definição apresentada pode-se concluir que todos os números são reais, inclusive os complexos, já que estes não podem ser escritos na forma fracionária. Além disso, nas definições citadas parte-se do pressuposto que os alunos saibam da existência de outros números, além do conjunto dos racionais que é por eles conhecido.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a abordagem do conjunto dos reais na escola básica deve ocorrer a partir do quarto ciclo do ensino fundamental, correspondente ao 8^{o} ano, contudo, no 7^{o} ano os alunos se deparam com um número irracional, já que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) prevê que o estudo de "Medidas do comprimento da circunferência" e determina que os alunos sejam capazes de "Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica." (BNCC, 2017, p. 307). Esta situação, na prática, faz com que os professores citem que "π " trata-se um número irracional, mas o definam como o racional 3,14, sem maiores critérios ou comentários.

No ensino médio, a análise do conjunto dos reais também não é aprofundada, se restringindo a uma revisão dos mesmos conceitos, às vezes equivocados, vistos no ensino fundamental, podendo gerar dificuldades aos estudantes ao atingirem níveis superiores de ensino. Penteado (2004) aponta que pesquisas nacionais e internacionais mostram que as dificuldades que os alunos apresentam na compreensão de conteúdos tais como limite, continuidade, derivada e integral de funções são consequência da incompreensão do conjunto dos reais. Dentre as dificuldades ou equívocos conceituais citados por Penteado (2004) destacamos: a definição de número irracional como sendo infinito ou aquele que contém infinitos dígitos após a vírgula ou ainda que tratam-se apenas de raízes; a ideia de que duas grandezas são sempre comensuráveis; a confusão entre número irracional e sua aproximação, por exemplo tomando $e = 2{,}71$; e que as propriedades atribuídas à reta real continuavam válidas mesmo sem os números irracionais.

Tais dados suscitam que os números reais e suas propriedades são um tema complexo e de grande relevância e que, apesar deste conteúdo ser trabalhado desde o ensino fundamental e ocupar um volume considerável do currículo educacional, isso ocorre com defazagens e, em alguns casos, de forma conceitualmente incorreta, desfavorecendo a compreensão efetiva dos conceitos envolvidos pelos estudantes. Os PCN indicam que a falta de modelos materiais que exemplifiquem os irracionais pode ser uma das justificativas para tais problemas. Ademais, tais obstáculos enfrentados pelos alunos quanto ao entendimento do conjunto dos números reais e a rasa abordagem do tema na escola básica são compreensíveis à vista que alguns professores também não possuem verdadeiro entendimento sobre este assunto. Moreira e Ferreira (1999) realizaram uma pesquisa com 84 alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFMG e da UFSC e tal apuramento mostrou que quase 50% associa os números irracionais a "números indefinidos", "difíceis de imaginar" e "não-exatos".

Considerando tais questões, os PCN indicam que o conceito de número deve ser trabalhado como instrumento na resolução de problemas. O aluno deve observar que existem diversos tipos de números (números naturais, negativos, racionais e irracionais) com significados diferentes à medida que se depara com situações-problema propícias ao trabalho com cada um deles. Assim, os PCNs sugerem que

> Na perspectiva de que o aluno amplie e aprofunde a noção de número, é importante colocá-lo diante de situações em que os números racionais são insuficientes para resolvê-las, tornando-se necessária a consideração de outros números: os irracionais. Recomendase, no entanto, que a abordagem destes últimos não siga uma linha formal, que se evite a identificação do número irracional com um radical e que não se enfatizem os cálculos com radicais, como ocorre tradicionalmente. O importante é que o aluno identifique o número irracional como um número de infinitas casas decimais não-periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso. Esse trabalho inicial com os irracionais tem por finalidade, sobretudo, proporcionar contra-exemplos para ampliar a compreensão dos números. (PCN, 1998, p. 83)

Diante do exposto é certa a importância de desenvolver o pensamento sobre esse tema, por parte dos professores, com o intuito de que não se propaguem conceitos equivocados e seja feita uma abordagem mais acessível aos estudantes de nível básico. Sendo assim, mostraremos uma outra forma de construir o conjunto dos números reais - uma forma geométrica que valoriza as raízes históricas deste conjunto e possui menor caráter abstrato, já que segundo D'Ambrósio (1999)

> "As práticas educativas se fundem em estilos de aprendizagem e nas tradições, e a história compreende o registro desses fundamentos. Portanto, é praticamente impossível discutir educação sem recorrer a esses registros e interpretações dos mesmos. Isso é igualmente verdade ao se fazer o ensino das várias disciplinas, em especial da Matemática, cujas raízes se confundem com a história da humanidade".

Para a construção geométrica do conjunto dos números reais, tomaremos como conhecidos o conjunto dos números racionais e suas propriedades e, portanto, consideramos ser de conhecimento a associação entre um número racional e os pontos da reta orientada. Assim, tomaremos o conjunto de todos os segmentos comensuráveis e incomensuráveis sobre a reta orientada e definiremos duas operações chamadas *adição* e *multiplicação* entre estes segmentos e mostraremos que tal conjunto é um corpo ordenado completo, que definimos como reais.

3.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

Contar e medir são duas ações que remontam, ao que podemos dizer, início da civilização, da forma como a conhecemos. Segundo Eves (2002), para as necessidades diárias, como a contagem de objetos, os números inteiros supriram qualquer demanda, contudo, para outras atividades, que envolvem, por exemplo, a aferição de tempo, massa e comprimento precisávamos de *frações*, no sentido de uma representação para *partes*, já que não é raro realizarmos uma medida que não seja um número exato de vezes de uma unidade linear. E assim, os números racionais vieram a suprir essa demanda. Definindo os números racionais como o quociente $\frac{p}{q}, q \neq 0$, de dois números inteiros as questões relativas às medidas, supúnhamos estar superadas.

O conjunto dos números racionais possui uma representação geométrica simples, a saber: em uma reta orientada, marcamos dois pontos distintos O e U e tomamos o segmento $\overline{OU}$ como unidade de comprimento. Associamos os pontos O e U aos números inteiros 0 e 1, respectivamente, e deste modo, os números inteiros positivos serão os pontos à direita de O, espaçados pela unidade de comprimento definida. De forma análoga, os números inteiros negativos serão os pontos espaçados pela unidade de comprimento que estão à esquerda de O. Quanto a representação dos números fracionários $\frac{p}{q}, q \neq 0$, estes serão os pontos em que tomamos p partes das q partes em foram divididas a unidade.

Essa simples representação geométrica do conjunto dos racionais, como pontos em uma reta orientada, nos fez supor que todos os números estariam ali compreendidos. Contudo, por volta do século VI a.C, a descoberta de que tal premissa era falsa causou estranhamento em alguns matemáticos gregos, conhecidos como pitagóricos.

Pitágoras nasceu por volta de 572 a.c. na ilha de Samos, mas foi em Crotona, na costa sul de onde, hoje, é a Itália, que ele fundou a Escola Pitagórica, que além de ser um centro de estudo de aritmética, música, geometria e astronomia, era também uma irmandade muito unida por cerimônias e rituais secretos. Hoje, há poucos registros históricos escritos do que foi desenvolvido pela Escola Pitagórica e isso, deve-se em muito às tradições da época de transmissão oral do conhecimento. Deste modo, não sabemos se as descobretas atribuídas à Pitágoras foram, de fato, realizadas por ele ou por algum membro da irmandade, pois era comum que as descobertas da irmandade fossem imputadas ao mestre ou à escola de modo geral. De acordo com Mol (2013) a filosofia de Pitágoras e seus discípulos baseava-se na suposição de que "todas as coisas são números"e como *números* entenda-se *números inteiros.* Assim, os números ocupavam uma posição de destaque, inclusive de caráter místico e isso levou os pitagóricos à uma exaltação e ao amplo estudo da teoria dos números. Nesta época, acreditava-se que dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sempre seria possivel determinar um terceiro segmento $\overline{EF}$ que estivesse contido um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e outro número inteiro de vezes em $\overline{CD}$. Esta suposição correponde ao fato de que a medida do segmento $\overline{EF}$ é submúltipla das medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e quando isso ocorre dizemos que estes segmentos são *comensuráveis* ÁVILA (2006). Inicialmente, esta ideia parece bem coerente, pois poderíamos pensar em tomar um segmento $\overline{EF}$ tão pequeno quanto desejarmos, entretanto essa premissa nem sempre é verdadeira e, foi justamente esta descoberta que acredita-se ter abalado os pilares da escola de Pitágoras. Os pitagóricos provaram que não há um segmento submúltilplo comum aos segmentos correspondentes ao lado e à diagonal de um quadrado - quando isso acontece, os segmentos são ditos *incomensuráveis.* Em outras palavras, eles perceberam que não há nenhum número racional ao qual corresponda o ponto P da reta no caso em que $\overline{OP}$ é igual à diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade.

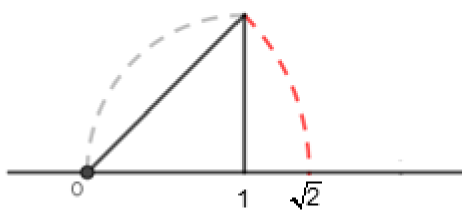

Figura 1: $\sqrt{2}$ na reta real.

Dizer que não há nenhum número racional ao qual corresponda o ponto P da reta no caso em que OP é igual à diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade, implica que não há solução racional para a equação $x^2 = 2$. Segue a prova:

Teorema 3.1. *Não há solução racional para a equação $x^2 = 2$.*

Demonstração. Suponhamos x um número racional. Então existem dois números inteiros p e q, sendo $mdc(p,q) = 1$ tais que $x = \frac{p}{q}$.
Então,

$$x^2 = 2 \rightarrow (\tfrac{p}{q})^2 = 2 \rightarrow p^2 = 2 \cdot q^2$$

Isso nos mostra que p^2 é par e, portanto, p é par. Logo, p^2 é divisível por 4, de onde decorre que $2 \cdot q^2$ também é divisível por 4 e assim, concluímos que q^2 é par e, por consequência, q é par.
Ou seja, concluimos que p e q são pares, contradizendo a hipótese de que $(p,q) = 1$. Assim, a premissa de que x é um número racional é falsa. Portanto, não há solução racional para a equação $x^2 = 2$. □

A princípio este resultado parece um tanto quanto singelo, contudo é interessante observar que ao determinar uma lacuna na reta associada ao conjunto dos racionais, correspondente ao $\sqrt{2}$ em linguaguem atual, na verdade os pitagóricos mostraram que há infinitas lacunas, já que todos os múltiplos de $\sqrt{2}$ também não pertencem ao conjunto $\mathbb{Q}$, conforme mostra a figura 2.

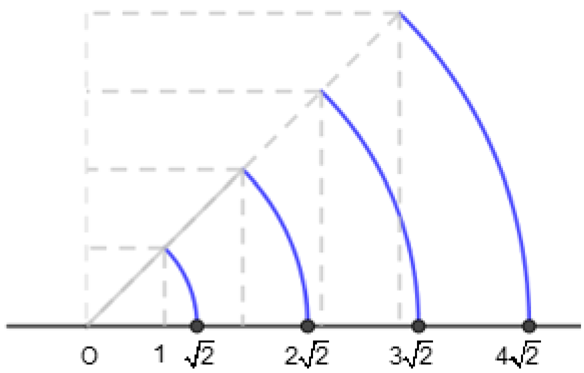

Figura 2: Múltiplos de $\sqrt{2}$ na reta real.

Então, a premissa de que a reta estava completamente preenchida pelos números racionais era falsa. Muito além dos múltiplos de $\sqrt{2}$, por uma construção geométrica similar, é possível notar a existência de outros números que não são racionias e cuja prova de tal fato é similar à realizada em 3.1. Veja alguns exemplos na figura 3.

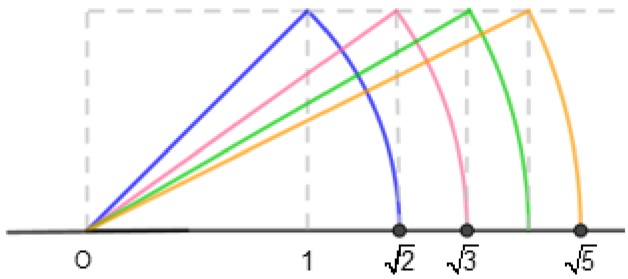

Figura 3: Números irracionais na reta: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$.

Deste modo, novos números foram inventados para serem associados a esses pontos e enfim, preencher, de fato, a reta. Como tais números não são racionais, foram denominados números irracionais, o que significa números não racionais. A descoberta desses números assinalou um dos grandes marcos da história da matemática.

A união dos conjuntos dos números racionais, representados pelos segmentos comensuráveis, com os números irracionais, representados pelos segmentos incomensuráveis, é o que denotamos por conjunto dos números reais. A seguir, mostraremos, de forma geométrica, que tal conjunto é um corpo ordenado completo.

3.2 CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS REAIS

A construção geométrica a seguir foi elaborada com base em Santos (2015).

Definiremos número real como a medida de um segmento de reta que está associado a um ponto de uma reta orientada. Assim, um número real p é a medida do segmento $\overline{OP}$ em relação ao segmento unitário $\overline{OU}$. Como P é a imagem geométrica do número real p, temos três possibilidades:

- Se o ponto $P = O$ então a medida do segmento $\overline{OP}$ corresponde ao número zero;

- Se P estiver na semirreta $\overrightarrow{OU}$ então a medida do segmento OP corresponde aos números reais positivos, notados por p;

- Se P estiver na semirreta oposta a U então a medida do segmento OP corresponde aos números reais negativos, notados por -p.

Cabe ressaltar que se a medida do segmento $\overline{OP}$ for comensurável em relação a unidade, correspondente a medida do segmento $\overline{OU}$, tratamos dos números racionais. De modo análogo, se a medida do segmento $\overline{OP}$ for incomensurável em relação a unidade, correspondente a medida do segmento $\overline{OU}$, tratamos dos números irracionais.

Definiremos o conjunto dos números reais, simbolizado por $\mathbb{R}$, como o conjunto formado por estes segmentos de reta, comensuráveis e incomensuráveis em relação à unidade, e mostraremos que este conjunto possui as estruturas algébricas de um corpo ordenado completo. Para isso, iniciemos definindo duas operações, pois segundo Ávila (2006),

> este conjunto precisa ter a estrutura que dele se espera; daí termos de definir nele as operações usuais de adição, multiplicação, etc., e a relação de ordem. E devemos fazer isso de maneira a podermos provar as propriedades usuais (...) que conhecemos e usamos desde o ensino fundamental.

3.2.1 *Operações em $\mathbb{R}$*

Ao longo do texto, ao notarmos operações entre pontos nos referimos a operações entre as medidas dos segmentos formados pelos pontos e a origem fixada da reta orientada.

Adição

Definição 3.2. *Em uma reta r orientada, sobre a qual esteja fixada a origem O, a unidade de medida e o sentido positivo, definiremos a adição dos pontos A e B como o ponto C obtido da seguinte forma:*

1. *Por um ponto M, não pertencente a r, traça-se uma reta s paralela a r. Traça-se a transversal t_1 pelos pontos M e O;*

2. *Traça-se uma reta t_2, paralela a t_1, que passe por B. A intersecção de s e t_2 é ponto N;*

3. *Traça-se a reta t_3 que contém os pontos A e M;*

4. *Traça-se a reta t_4, paralela a t_3, pelo ponto N. A intersecção de t_4 e r é o ponto C.*

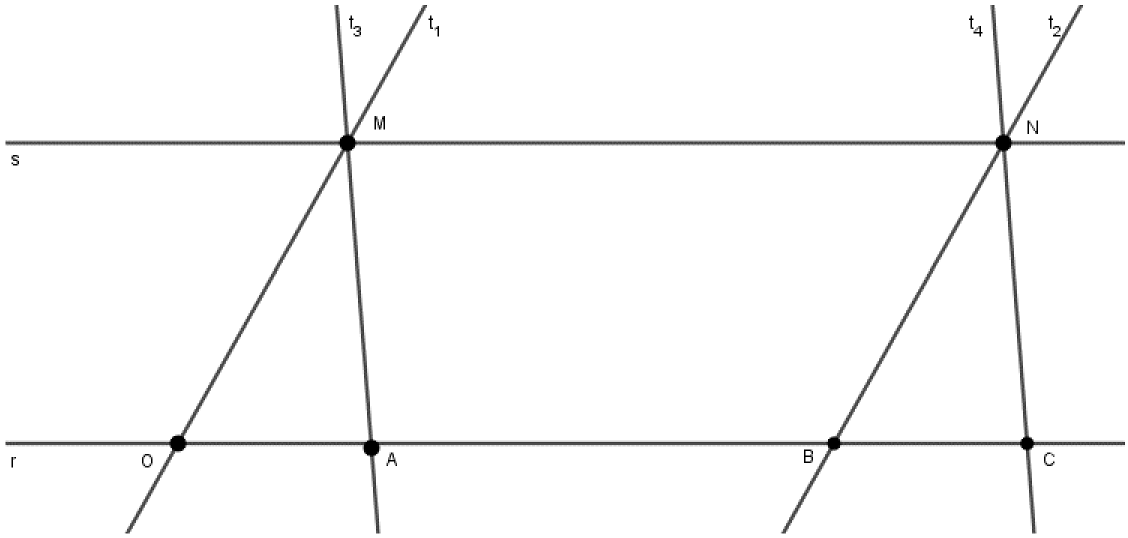

Figura 4: Definição de adição de A e B.

Tal resultado justifica- se, pois M é um ponto arbitrário e por construção s//r e $t_1//t_2$, logo OMNB é um paralelogramo e, portanto, OB = MN. Da mesma forma, como s//r e $t_3//t_4$, AMNC é um paralelogramo e assim, AC = MN.

Temos:

$$A + B = OA + OB = OA + MN = OA + AC = OC = C.$$

Propriedades da adição

(A1) **Comutativa:** Para quaisquer dois pontos A e B pertencentes à reta r, tem-se que $A + B = B + A$.

(A2) **Associativa:** Para quaisquer dois pontos A e B pertencentes à reta r, tem-se que $(A + B) + C = A + (B + C)$.

(A3) Possui **simétrico:** Para todo ponto A pertencente à reta r, existe um ponto simétrico $-A$, também pertencente à r, tal que $A + (-A) = 0$.

(A4) Possui **elemento neutro:** Existe um ponto X pertencente à reta r tal que $A + X = A$, para qualquer A pertencente à r. Esse ponto X é a origem da reta r, que denotamos por O.

Demonstração. (A1) **Comutativa:** Considere a reta orientada r e os pontos A e B sobre ela. Por construção, conforme a definição 3.2, ao efetuamos a soma $A + B$, para a qual utilizamos a reta s//r e as retas transversais t_1, t_2, t_3 e t_4, tal que $t_1//t_2$ e $t_3//t_4$, representadas em azul e a soma $B + A$, para a qual utilizamos as retas transversais t_1, t'_2, t'_3 e t'_4, de modo que $t_1//t'_2$ e $t'_3//t'_4$, representadas em vermelho. Note que, em ambos os casos, obtemos o mesmo ponto C.

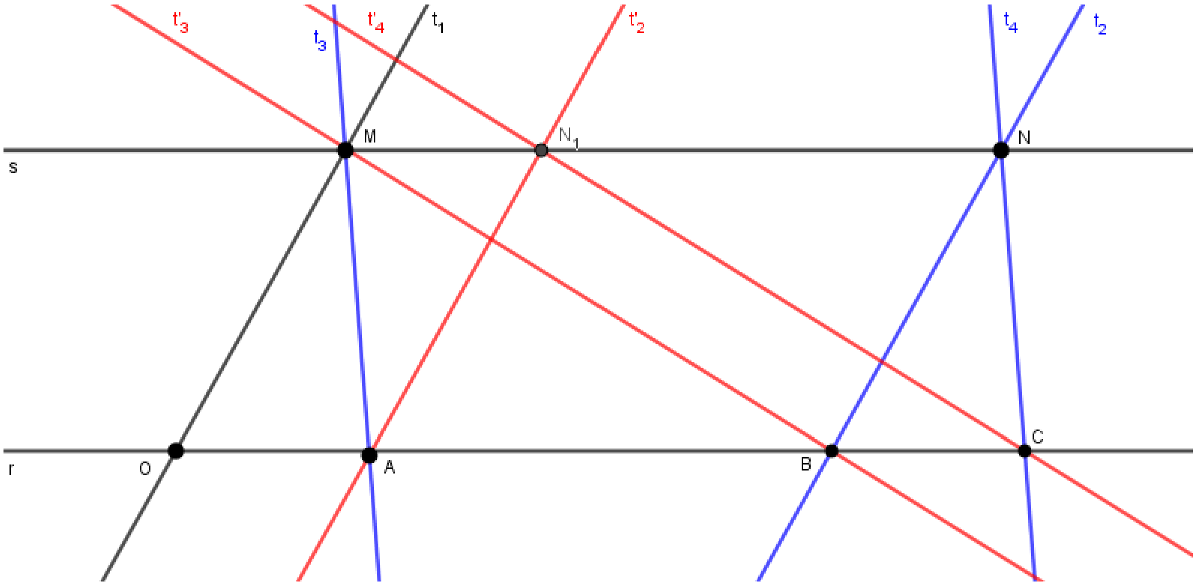

Figura 5: Propriedade comutativa da adição.

(A2) **Associativa:** Considere a reta orientada r e os pontos A, B e C sobre ela. Denotaremos por D a soma $A + B$ e por E a soma $B + C$, realizadas conforme a definição 3.2. Agora, de forma análoga, utilizando a reta s//r e as retas transversais t_1, t_2, t_3 e t_4, tal que $t_1//t_2$ e $t_3//t_4$, representadas em azul, efetuamos a soma $D + C$ e utilizando as retas transversais t_1, t'_2, t'_3 e t'_4, tal que $t_1//t'_2$ e $t'_3//t'_4$, representadas em vermelho, efetuamos a soma $A + E$. Veja que determinamos o mesmo ponto F.

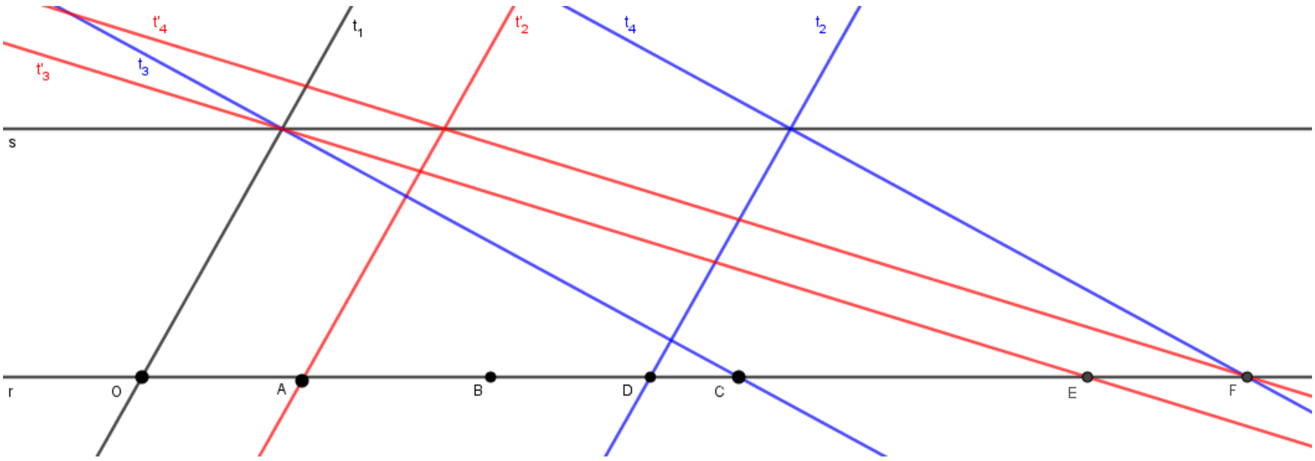

Figura 6: Propriedade associativa da adição.

(A3) Possui **simétrico:** Para determinarmos o simétrico de um ponto A pertencente à reta r, basta utilizarmos a definição de soma apresentada em 3.2, considerando a condição de que $A + (-A) = 0$. Deste modo, efetuamos a seguinte construção:

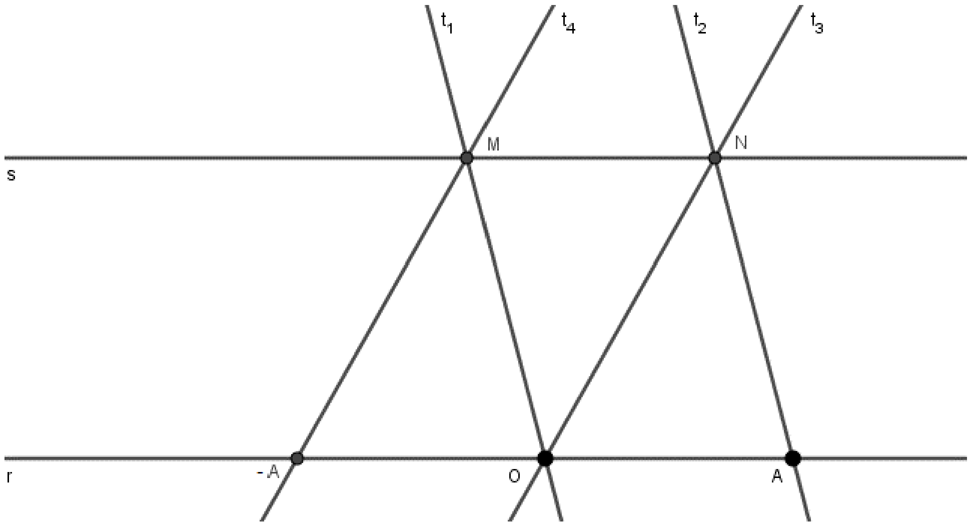

Figura 7: Elemento simétrico aditivo.

Como s//r e $t_1//t_2$ e $t_3//t_4$, novamente $-AONM$ e $OANM$ são paralelogramos e assim, $\overline{-AO} \equiv \overline{NM} \equiv \overline{OA}$.

(A4) Possui **elemento neutro:** Considere a reta orientada r e o ponto A pertencente a ela. Novamente, utilizaremos a definição da operação de adição apresentada em 3.2, associada ao fato de que a $A + (-A) = 0$. Assim, temos a seguinte construção:

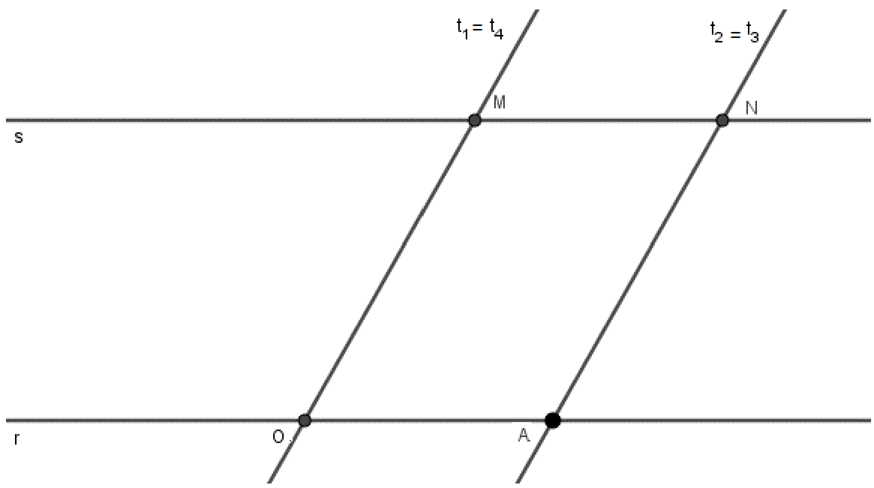

Figura 8: Elemento neutro aditivo.

Como há apenas uma reta definida por dois pontos e uma única paralela a ela por um ponto determinado, temos que $t_1 = t_4$ e $t_2 = t_3$. A interseção das retas t_4 e r será o ponto X, que representa o elemento neutro da soma, ou seja será o ponto O.

□

Multiplicação

Definição 3.3. *Em uma reta r orientada, sobre a qual esteja fixada a origem O, a unidade de medida de medida OU e o sentido positivo, definiremos a multiplicação dos pontos A e B como o ponto C obtido da seguinte forma:*

1. *Por um ponto M, não pertencente a r, traça-se uma semirreta s com origem em O;*

2. *Traça-se o segmento $\overline{UM}$;*

3. *Por B, traça-se uma reta t_1 paralela a $\overline{UM}$. Denotaremos por N a intersecção de s com t_1;*

4. *Traça-se o segmento $\overline{AM}$;*

5. *Por N, traça-se uma reta t_2 paralela a $\overline{AM}$. O ponto C será a intersecção de r com t_2.*

Indicaremos o produto de A por B como C na forma $A \cdot B = C$.

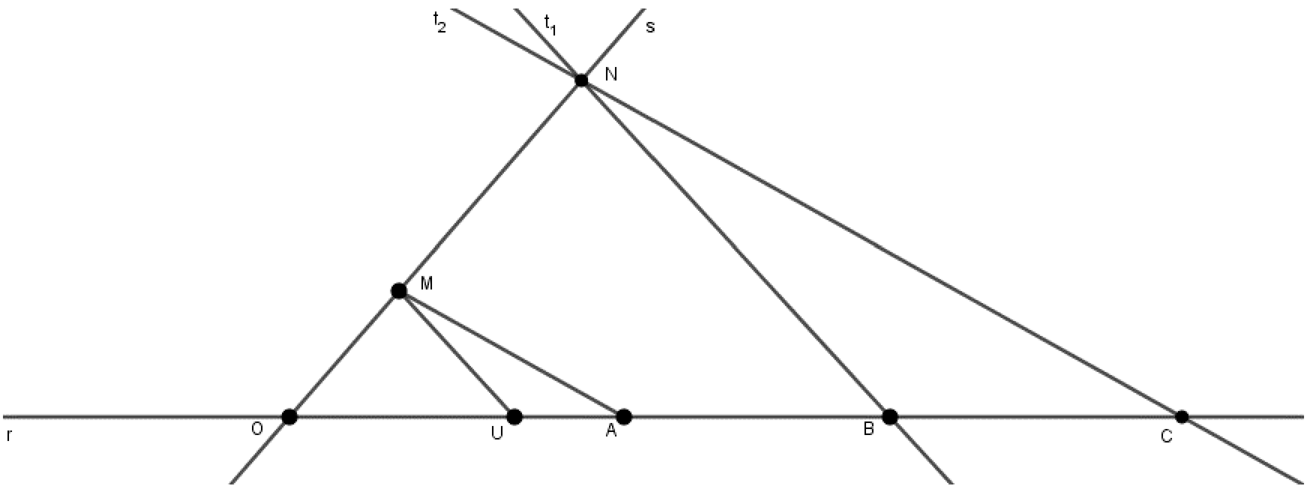

Figura 9: Definição de multiplicação de A e B.

Tal resultado justifica- se, pois s é uma reta arbitrária e por construção $\overline{UM}//\overline{BN}$ e $\overline{AM}//\overline{CN}$. Assim, pelo teorema de Tales, o triângulo OMU é semelhante ao triângulo ONB e o triângulo OMA é semelhante ao triângulo ONC e portanto, temos:

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} \text{ e } \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}$$

Donde,

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \longleftrightarrow \overline{OC} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} \longleftrightarrow C = A \cdot B$$

Propriedades da multiplicação

(M1) **Comutativa:** Para quaisquer dois pontos A e B pertencentes à reta r, tem-se que $A \cdot B = B \cdot A$.

(M2) **Associativa:** Para quaisquer dois pontos A e B pertencentes à reta r, tem-se que $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

(M3) Possui **inverso:** Para todo ponto A pertencente à reta r, com $A \neq O$, existe um ponto A^{-1}, também pertencente à r, tal que $A \cdot A^{-1} = OU = 1$.

(M4) Possui **elemento neutro:** Existe um ponto X pertencente à reta r tal que $A \cdot X = A$, para qualquer A pertencente à r. Esse ponto X é a unidade de medida da reta r, ou seja, o ponto U.

(M5) **Distributiva em relação à adição:** Para quaisquer pontos A, B e C pertencentes à reta r, tem-se $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Demonstração. (M1) **Comutativa:** Considere os pontos A e B pertencentes à reta r. Faremos a construção, conforme a definição 3.3 dos pontos C e C' tais que $C = A \cdot B$, em azul e de $C' = B \cdot A$ em vermelho.

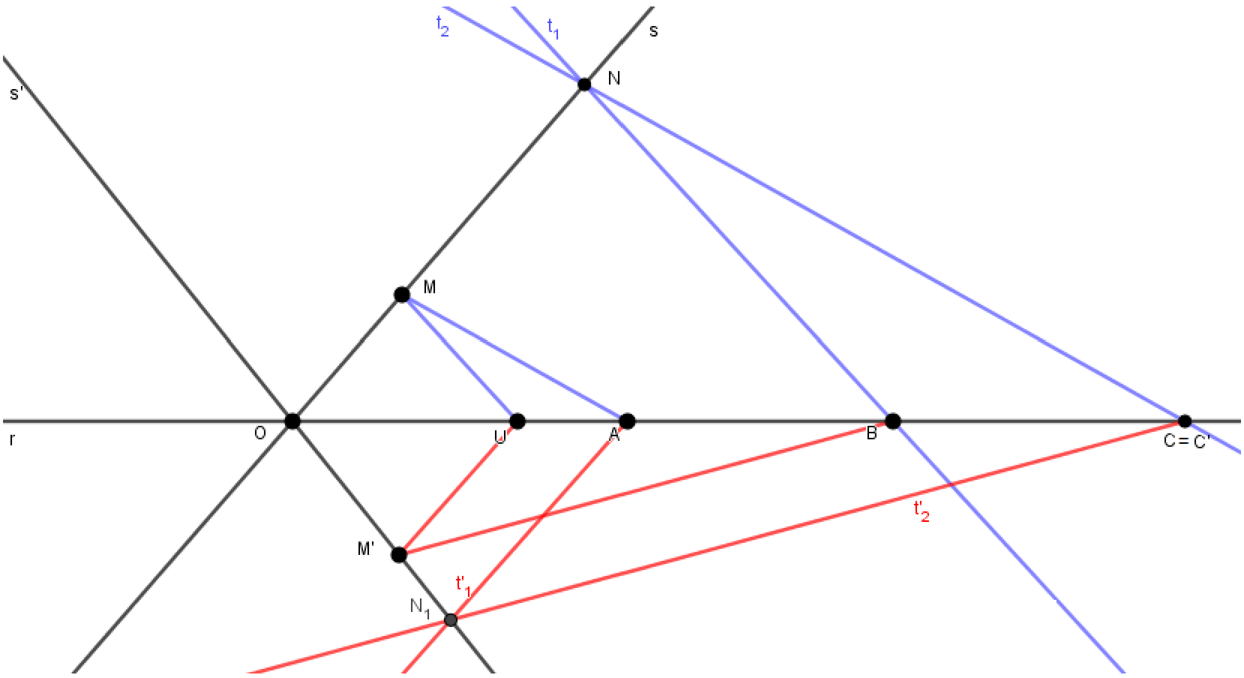

Figura 10: Propriedade comutativa da multiplicação.

Note que os pontos C e C' são coincidentes, logo $A \cdot B = B \cdot A$.

(M2) **Associativa:** Considere três pontos A, B e C sobre a reta r orientada. Denotaremos por $D = A \cdot B$ e $E = B \cdot C$ os produtos já efetuados, conforme a definição 3.3, sendo que tais construções estão representadas pelas retas pontilhadas. Determinamos o ponto F tal que $F = D \cdot C$, em azul e o ponto F' tal que $F' = A \cdot E$, em vermelho.

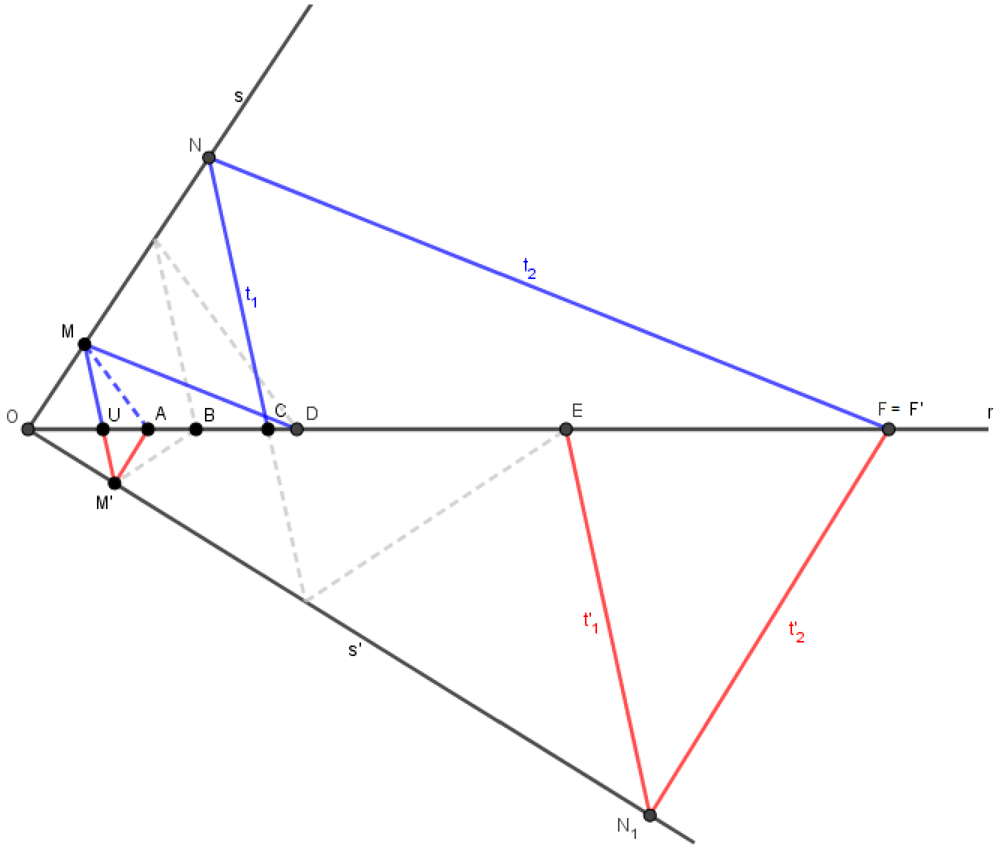

Figura 11: Propriedade associativa da multiplicação.

As construções foram realizadas, novamente conforme a 3.3, e podemos observar que os pontos F e F' são coincidentes. Logo, $F = F' \longleftrightarrow D \cdot C = A \cdot E \longleftrightarrow (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

(M3) Possui **inverso:** Considere um ponto A sobre a reta r orientada. Para determinar o inverso multiplicativo substituiremos os dois últimos passos da definição 3.3 por:

4. Traça-se uma reta por U e N.
5. Por M, traça-se um reta t_2 paralela a $\overline{UN}$, o ponto A^{-1} será a intesecção de t_2 e r.

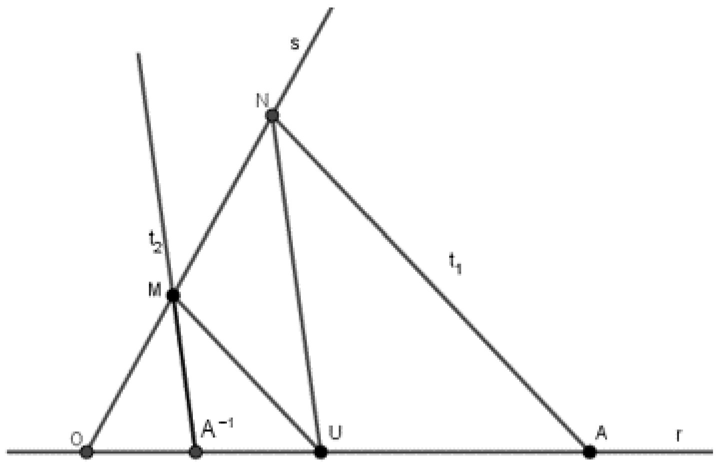

Figura 12: Determinação do inverso multiplicativo.

A construção acima, descrita para determinação do inverso multiplicativo, apoia-se na semelhança dos seguintes triângulos: $OA^{-1}M \cong OUN$ e $OUM \cong OAN$ e, portanto temos:

$$\frac{\overline{OA^{-1}}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}} \text{ e } \frac{\overline{OU}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{ON}}$$

Donde,

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA^{-1}}}{\overline{OU}} \longleftrightarrow \overline{OU}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA^{-1}} \longleftrightarrow A \cdot A^{-1} = 1$$

(M4) Possui **elemento neutro:** Considere um ponto A sobre a reta r orientada. Para determinar o elemento neutro multiplicativo substituiremos os dois últimos passos da definição 3.3 por:

4. Traça-se a reta t_2, definida pelos pontos A e N. Note que t_2 é coincidente à t_1;
5. Por M, traça-se um reta t_3 paralela a $\overline{AN}$. Observe que t_3 é coincidente a $\overleftrightarrow{UN}$. A intersecção de t_3 com r será o ponto correspondente ao elemento neutro, ou seja, o ponto U.

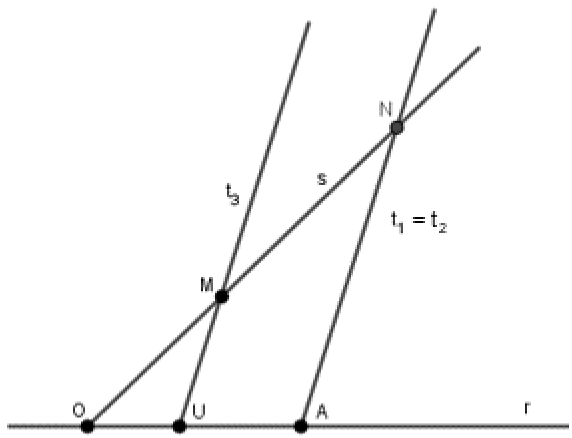

Figura 13: Determinação do elemento neutro multiplicativo.

Assim, o elemento neutro da multiplicação será a unidade definida. Associaremos tal ponto ao 1.

(M5) **Distributiva em relação à adição:** Para mostrarmos que para quaisquer pontos A, B e C pertencentes à reta r, tem-se $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, denotaremos por D o ponto tal que $D = B + C$, sendo esta operação realizada, em pontilhado, conforme a definição 3.2. A seguir, em azul, efetuaremos o produto $A \cdot D$, conforme a definição 3.3. Veja que determinaremos o ponto G.
Para melhor visualização, refletiremos as retas s e p em relação à r para realização dos produtos $A \cdot B$ e $A \cdot C$, que realizaremos em vermelho.
De acordo com a definição 3.3 determinaremos os pontos E e F, tais que $E = A \cdot B$ e $F = A \cdot C$ e depois, pela definição 3.2 o ponto G' tal que $G' = E + F$. Veja que os pontos G e G' são coincidentes.

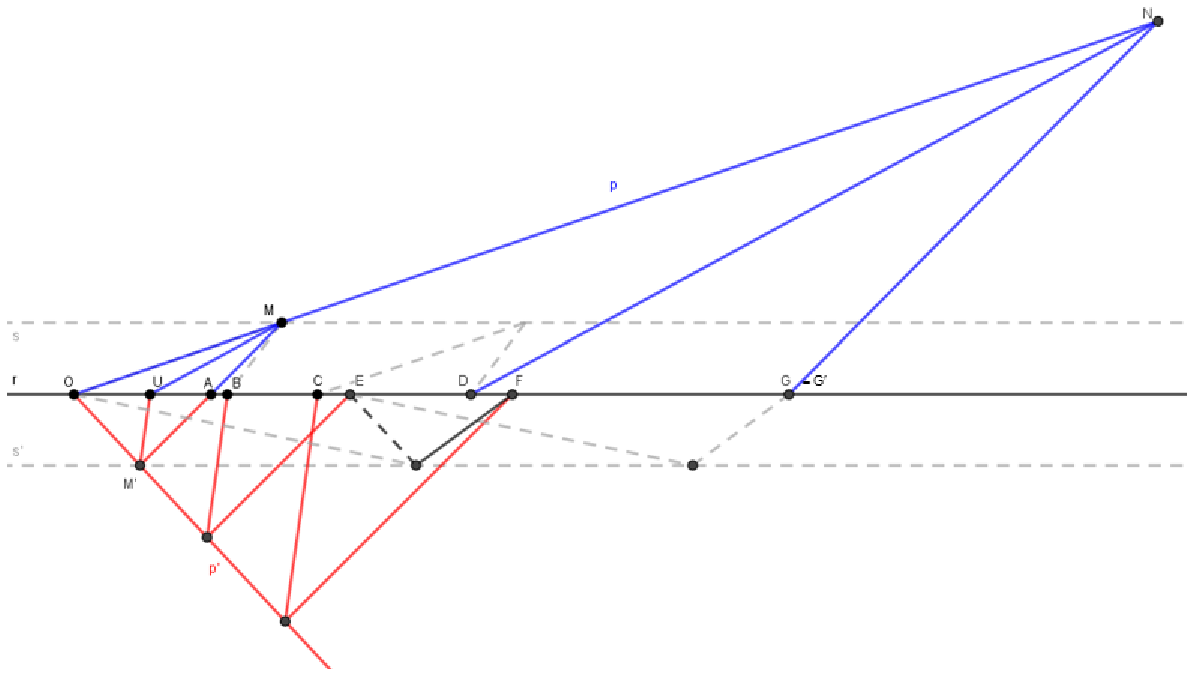

Figura 14: Propriedade distributiva.

Logo,

$$G = G' \longleftrightarrow A \cdot D = E + F \longleftrightarrow A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

$\square$

Agora, munidos de duas operações, estabelaçamos um relação de ordem.

3.2.2 *Relação de ordem em* $\mathbb{R}$

Da forma como definimos um número real, na seção 3.2, deixamos implícita a relação de ordem deste conjunto.

Seja $\mathbb{P}$ um subconjunto dos elementos positivos de $\mathbb{R}$. Então $\mathbb{P}$ é o conjunto de pontos à direta da origem, que está associada ao 0, da reta orientada, e $-\mathbb{P}$ o conjunto dos simétricos de $\mathbb{P}$. Veja que $\mathbb{R}$ corresponte à união disjunta entre $\mathbb{P}$, $-\mathbb{P}$ e 0.

Geometricamente, isso significa que um ponto qualquer está à direta, à esquerda ou sobre a origem da reta orientada. Algebricamente, significa que todo número real ou é positivo, ou negativo ou é zero. Assim,

- Dado $x \in \mathbb{R}$, temos que $x = 0$, ou $x = positivo$ ou $-x = positivo$
- Para todo $x,y \in \mathbb{P} \leftrightarrow x + y \in \mathbb{P}$ e $x \cdot y \in \mathbb{P}$.

Com isso, podemos definir a relação de ordem ($<$) em $\mathbb{R}$ de tal modo que $x < y$ signifique que $y - x \in \mathbb{P}$. A rigor:

Definição 3.4. *Considere uma reta r orientada e os pontos A e B pertencentes à ela. Definiremos:*

- *A é menor do que B se A estiver à esquerda de B e notaremos por $A < B$;*
- *A é igual a B se A coincidir com B e notaremos por $A = B$;*
- *B é menor do que A se B estiver à esquerda de A e notaremos por $B < A$;*

Sobre a definição 3.4 , são válidas as seguintes equivalências: Se $A < B$, então $B - A \in \mathbb{P}$, ou seja, a semirreta $\overrightarrow{AB}$ tem orientação positiva e a semirreta oposta, $\overrightarrow{BA}$ tem orientação negativa. Se $B < A$, o contrário.

Proposição 3.5. *Dados dois pontos A e B pertencentes à reta r orientada, ocorre uma e apenas uma das três possibilidades:*

$$A < B,\ A = B,\ B < A.$$

Demonstração. Sejam A e B dois pontos quaisquer sobre a reta r. Há apenas duas possibilidades: $A = B$ ou $A \neq B$.
Se $A = B$ não há o que provar. Se $A \neq B$, então ou $A < B$ ou $B < A$. Mostremos que tais opções se excluem mutuamente: suponhamos que $A < B$ e $B < A$ ocorresm de modo simultâneo. Se $A < B$ então $\overrightarrow{AB}$ possui sentido positivo e se $B < A$ então $\overrightarrow{BA}$ possui sentido positivo. Um absurdo, pois as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ são opostas. □

Proposição 3.6. *Dados três pontos distintos A, B e C sobre a reta orientada r, se $A < B$ e $B < C$ então $A < C$.*

Demonstração. Se $A < B$ então $B - A \in \mathbb{P}$ e se $B < C$ então $C - B \in \mathbb{P}$. Sabendo que a soma de dois números positivos é positiva, temos:

$$(B - A) + (C - B) = B - A + C - B = C - A$$

Então $C - A \in \mathbb{P}$ e, portanto, $A < C$. □

Com isso, mostramos que da forma como foi definida, a relação de ordem preserva a ordem já existente em $\mathbb{Q}$, bem como todas as propriedades usuais das racionais e assim, concluimos nossa construção.

4 CONCLUSÕES

Os conceitos relativos aos números reais transitam por diversas áreas da matemática, portanto compreendê-los é essencial. Procuramos apresentar tal assunto de uma forma didática visando o aprimoramento do docente da escola básica, por esta razão iniciamos garantindo as bases algébricas para a compreensão do texto e a seguir fizemos uma construção rigorosa do conjunto dos números reais, por meio das classes de equivalência das sequências de Cauchy. Acreditamos que estes capítulos proporcionam uma fundamentação sólida, acerca do tema, aos professores de nível básico.

Quanto à proposta didática, motivados pelas questões educacionais acerca dos números reais na escola básica e suas implicações nos estudos em nível superior, apresentamos uma forma geométrica de definição do conjunto real, que acreditamos ser uma representação mais atraente e inteligível ao estudante e, por isso possibilita uma melhor compreensão dos conceitos pertinentes ao conjunto real. Entretanto, não indicamos que tal proposta de apresentação do conjunto seja feita de uma só vez. Conforme já citamos, os PCN e a BNCC indicam que os primeiros contatos com o conjunto real aconteçam no quarto ciclo do ensino fundamental, e para esta etapa acreditamos que a sedimentação da ideia de que os números racionais não preenchem a reta orientada, da associação dos racionais aos segmentos de reta comensuráveis e dos irracionais aos segmentos incomensuráveis, do posicionamento de cada um destes números sobre a reta real e a correta definição de números irracionais, e por consequência, do conjunto real são apropriadas. Quanto à demonstração das propriedades algébricas, recomendamos que seja aplicada à alunos do ensino médio.

Esperamos que este trabalho, de modo singelo, motive e seja uma fonte de consulta para docentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2006. 246 p.

[2] PENTEADO, Cristina Brendt. **Concepções do professor do Ensino médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade**. 2004. 247 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Acadêmico, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

[3] ARAGONA, Jorge. **Números reais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010. 178 p.

[4] KEMP, Todd. **Foundations of real analysis**. 05 jan. 2016, 02 jun. 2016. 174 p. Notas de Aula.

[5] BOFF, Daiane Scopel.**A construção dos números reais na escola básica**. 2006. 254 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissionalizante no Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

[6] Rezende W. M., **Ensino de Cálculo - Dificuldades de Natureza Epistemológica**,Tese (Doutorado em Educação) da Universidade de São Paulo, 2003.

[7] RIPOLL, Cydara Cavedon. **A construção dos números reais no ensino fundamental e médio**. 2004. 23 p. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M54.pdf>. Acesso em: 04 de mar. 2018.

[8] PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DO ENSINO MÉDIO: Pcns. 1997. Disponível em `http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>`. Acesso em: 24 mar. 2018.

[9] BRASIL. 2017. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 20 dez. 2017.

[10] SOARES, E. F. E.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. **Números reias: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura**. Zetetiké, Campinas, v.7, n.12, p. 95-117, jul/dez. 1999.

[11] D AMBRÓSIO, U. **A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática**. In: BICUDO, M. A. V.(org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 97-115.

[12] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2011. 848 p. Tradução de Hygino H. Domingues.

[13] MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: Editora Caed, 2013. 138 p.

[14] SANTOS, Simone de Carvalho. **Uma construção geométrica dos números reais**. 2015. 97 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2015.