Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Uma introdução sobre EDOs e suas contribuições no ensino de tópicos de Ciências Exatas no Ensino Médio

Rodrigo de Sene Maciel Silva

Orientador: Profa. Dra. Cláudia Aline A. S. Mesquita

São José dos Campos

Setembro, 2018

Título: *Uma introdução sobre EDOs e suas contribuições no ensino de tópicos de Ciências Exatas no Ensino Médio*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
Setembro, 2018

Silva, Rodrigo

Uma introdução sobre EDOs e suas contribuições no ensino de tópicos de Ciências Exatas no Ensino Médio, Rodrigo de Sene Maciel Silva – São José dos Campos, 2018.

LXXVIII, 87f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

An introduction to EDOs and their contributions in teaching Science topics in high school.

1. Equações Diferenciais Ordinárias. 2. Modelagem. 3. Funções. 4. Taxas de variação. 5. Equações horárias do MRU e MRUV.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:
Prof. Dr. Eduardo Antonelli

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:
Prof. Dr. Ângelo Calil Bianchi

RODRIGO DE SENE MACIEL SILVA

UMA INTRODUÇÃO SOBRE EDOS E SUAS CONTRIBUIÇÕES NO ENSINO DE TÓPICOS DE CIÊNCIAS EXATAS NO ENSINO MÉDIO

Presidente da banca: Profa. Dra. Cláudia Aline A. S. Mesquita

Banca examinadora:

Prof. Dr. Renan Edgard Brito de Lima

Profa. Dra. Gleiciane da Silva Aragão

Profa. Dra. Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz

Data da Defesa: 20 de setembro de 2018

"O período de maior ganho em conhecimento e experiência é o período mais difícil da vida de alguém".

Dalai Lama

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado a força necessária para concluir este trabalho.

Agradeço aos meus Guias por estarem sempre comigo me iluminando, guiando e orientando durante a minha caminhada.

Agradeço a minha família, em especial minha mãe, esposa e filha, pelo apoio e encorajamento para enfrentar os momentos difíceis, sendo minha fonte de sabedoria e inspiração para continuar.

Agradeço a minha orientadora Cláudia Aline A. S. Mesquita por ter me ajudado a conquistar esse sonho com sua dedicação, paciência, atenção, compreensão e por fazer a palavra professor ter realmente sentido.

Agradeço, ainda, aos meus colegas de curso por todos os momentos divertidos e difíceis que enfrentamos e vencemos juntos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES)- código do financiamento 001. Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho faremos uma abordagem introdutória sobre Equações Diferenciais Ordinárias, trazendo suas premissas históricas as principais definições, resultados e métodos de resolução. Em nossos exemplos abordaremos problemas de áreas diversas como física, matemática financeira, crescimento demográfico, desde sua modelagem até sua solução. Esses exemplos são comumente usados em aulas do ensino médio, de uma forma mais superficial. Além disso, iremos propor uma abordagem de conceitos físicos importantes envolvidos no estudo do movimento retilíneo uniforme (MRU) e do movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV), usando noções intuitivas e conceitos básicos de EDOs. Essa traz consigo uma importante sugestão de como fazer a conexão entre o estudo de funções e o das fórmulas físicas envolvidas nesses contextos. Acreditamos que, ao serem tratados de forma conjunta, ambos os assuntos ganham maior significado para o aluno, que, além de tudo, será colocado diante do forte elo que existe entre as disciplinas de um núcleo comum.

Palavras-chave: 1. Equações Diferenciais Ordinárias. 2. Modelagem. 3. Funções. 4. Taxas de variação. 5. Equações horárias do MRU e MRUV.

ABSTRACT

In this work we will introduce an introductory approach on Ordinary Differential Equations, bringing its historical premises, the main definitions, results and methods of resolution. In our examples we will address problems from diverse areas such as physics, financial mathematics, demographic growth, from modeling to solution. These examples are commonly used in high school classes in a more superficial way. In addition, we will propose an approach of important physical concepts involved in the study of uniform rectilinear motion (MRU) and uniformly varied rectilinear motion (MRUV), using intuitive notions and basic concepts of ODEs. This brings with it an important suggestion of how to make the connection between the study of functions and that of the physical formulas involved in these contexts. We believe that when they are handled together, both subjects gain more meaning for the student, who will, moreover, be placed before the strong link that exists between the disciplines of a common core.

Keywords: 1. Ordinary Differential Equations. 2. Modeling. 3. Functions. 4. Variation rates. 5. MRU and MRUV hourly equations.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Equações Diferenciais é uma das subáreas da Análise Matemática que mais tem se destacado nos últimos 300 anos. Este fato certamente deve-se ao grande número de problemas da área de ciências no qual o entendimento destas equações tem papel fundamental. A construção da teoria sobre tais equações está intimamente associada ao desenvolvimento geral do cálculo, após a formalização e o entendimento do conceito de derivadas, estas vieram de maneira natural.

Para entendermos melhor como essa teoria começou a ser estruturada, devemos voltar nossos olhares para o final do século XVII, época na qual ocorreu um dos maiores avanços na matemática, o desenvolvimento do Cálculo. Com o objetivo de dar sentido as intuições e observações sobre os problemas estudados, o físico Isaac Newton (1642-1727) e o matemático Gottfried Wilhelm Leibniz (1646- 1716), sistematizaram então o que hoje chamamos de Cálculo Diferencial Integral. A partir daí reproduzir fenômenos naturais ganhou uma outra diretriz, dando assim origem a Teoria das Equações Diferenciais.

Os estudos nessa área foram ganhando importância de acordo com que os matemáticos e físicos entendiam melhor o Cálculo, grandes problemas da época exigiam que se entende-se muito bem o conceito de taxa de variação, e como esse se relacionava em uma equação. Vários problemas de outras áreas da ciência (Química, Biologia, Engenharia, entre outras), fizeram com que Equações Diferenciais se tornassem um ramo da matemática a ser explorado. Com o passar do tempo a matemática foi se aprofundando e novas dúvidas foram se formando, dúvidas as quais não tinham suas necessidades atendidas com os conceitos até então desenvolvidos. Dar um maior rigor ao Cálculo era fundamental para continuar a evolução dos estudos, e isso se deu no século XVIII, quando a Análise Matemática começou a ser desenvolvida. Os estudiosos das Equações Diferenciais encontraram um caminho para seguir e avançar seus estudos, a visão quantitativa das soluções deu lugar para um olhar qualitativo.

As soluções das Equações Diferenciais são funções, logo, para analisarmos estas é preciso ter um entendimento mais profundo a respeito das funções e suas propriedades. Sendo este um assunto já estudado no ensino médio, acreditamos que as Equações Diferenciais podem ser grandes instrumentos de motivação dos alunos no estudo deste tópico.

Este trabalho terá como ênfase o estudo introdutório das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) de primeira ordem e de segunda ordem, apresentando alguns métodos existentes para resolução de alguns tipos destas, e algumas de suas interessantes aplicações. As situações escolhidas para exemplificar os métodos, em geral, estão ligadas a conteúdos estudados no ensino médio. Com isso, daremos uma ferramenta a mais para a abordagem desses problemas.

Nos Capítulos 1 e 2 do trabalho assumiremos que o leitor tem familiaridade com os conceitos de funções, séries, limites, derivadas ordinárias, derivadas parciais, integral de Riemann, e das relações existentes entre estes conceitos. Para uma rápida revisão destes conceitos indicamos [14] e [15].

No primeiro capítulo trazemos uma visão geral sobre a história das Equações Diferenciais, descrevendo um pouco sobre os estudos que deram base a essa teoria, quem são seus precursores e quais ideias levaram esses matemáticos e físicos da época a ampliar seus horizontes e elevar a matemática desenvolvida até então.

O segundo capítulo foi subdividido em três seções. Na primeira seção apresentaremos a classificação dessas equações, na segunda seção temos como principal premissa apresentar as EDOs de primeira ordem e como são desenvolvidos métodos de soluções para alguns tipos particulares desta. Apresentaremos modelos para esses tipos de equações usando como exemplo assuntos que são pontos de discussão nas aulas de física e matemática no ensino médio, como crescimento populacional, matemática financeira, resfriamento de corpos e circuitos elétricos. A terceira secção traz uma abordagem para EDOs lineares de segunda ordem, explorando métodos de solução para tipos particulares destas, dando ênfase em modelos que também estão presentes nos conteúdos abordados no ensino médio.

Ao final pretendemos apresentar uma sugestão de como introduzir Equações Diferenciais como instrumento de motivação para o estudo das funções polinomiais de primeiro e segundo grau já no Ensino Médio, usando com ferramenta ideias intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral, introduzindo as fórmulas do MRU e MRUV como solução de EDOs de simples resolução através do estudo da taxa de variação das funções de primeiro e segundo grau. A ideia é despertar o interesse pelo estudo qualitativo e quantitativo das funções, mostrando a importância destas como objeto matemático abstrato, bem como a sua aplicabilidade no ensino de tópicos da Física. Ressaltamos que esse modelo sugerido, pode ser estendido para o estudo de outras funções como por exemplo a função exponencial (ver modelo obtido para juros compostos na Aplicação 2.2).

1

CONTEXTO HISTÓRICO

Neste capítulo iremos apresentar e apontar uma visão histórica geral sobre os estudos que deram base ao surgimento destas equações como objeto de pesquisa, quem são seus precursores e quais as principais ideias que levaram esses pesquisadores a voltarem seus olhares para esta nova ferramenta matemática. As informações históricas contidas neste texto podem ser encontradas com maiores detalhes nas referências [4] e [5].

1.1 O CÁLCULO AOS OLHOS DE ISAAC NEWTON

Motivado pela vontade de entender melhor o movimento dos corpos, o físico e matemático Inglês, Isaac Newton (1643 - 1727), conseguiu de forma brilhante sistematizar as ideias do que hoje conhecemos como Cálculo Diferencial e Integral. Newton desenvolveu estudos relacionando os conceitos de tangência em curvas, área sob curvas, taxa de variação, entre outros, nos quais provou novos resultados e conseguiu reunir, aprimorar e conectar resultados de vários estudiosos entre os mais citados temos Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.), Johannes Kepler (1571-1630), Pierre de Fermat (1601-1665), John Wallis (1616–1703) e Isaac Barrow (1630-1677). Cada um destes tem uma inestimável contribuição para o desenvolvimento do Cálculo, a saber:

Arquimedes - Usava o método da exaustão (o qual ele creditava a Eudoxo-370 a.C) para o cálculo de áreas e volumes. Tal método equivale ao Cálculo Integral e se baseia na ideia de que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente. Em seus estudos já retratava o que hoje em dia vemos de forma mais rigorosa nos livros de Cálculo;

Johannes Kepler - Segundo Eves, em [4], *"Kepler utilizou o processo de integração (pensado por Arquimedes) para calcular as áreas envolvidas na sua segunda lei do movimento planetário, e também para calcular os volumes de que se ocupou em seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho. Apesar das objeções levantadas sobre seu trabalho do ponto de vista do rigor matemático, conseguiu resultados corretos, e de maneira bem simples, e seus métodos são utilizados até hoje por físicos e engenheiros"*;

Pierre de Fermat - Conseguiu estabelecer um método para encontrar os pontos de máximo ou de mínimo de uma função e encontrou uma forma para determinar a tangente no ponto de uma curva cuja equação é conhecida;

John Wallis - Usou séries em análise e considerou, pela primeira vez, as cônicas como curvas de segundo grau. Além disso, explicou de uma maneia razoável o significado dos expoentes zero, negativos e fracionários, e introduziu o símbolo do infinito (∞);

Isaac Barrow - Explorava problemas envolvendo velocidades variadas e foi o primeiro a identificar que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra.

Mesmo conhecendo todos estes resultados, segundo Eves, em [4] *"faltava a criação de um simbolismo geral com um conjunto sistemático de regras analíticas formais e também um redesenvolvimento, consistente e rigoroso, dos fundamentos da matéria."*

Newton desenvolveu um método que chamou de "*método dos fluxos*", segundo Eves, em [4] *"...nesse trabalho considerou que uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto, feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de fluxo do fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por* y*, então o fluxo desse fluente era denotado por* $\dot{y}$*. Em notação moderna esse fluxo equivale a* $\frac{dy}{dt}$*, onde* t *representa o tempo. A despeito dessa intromissão do tempo em geometria, pode-se excluir a ideia de tempo, admitindo-se que alguma quantidade, digamos, a abscissa do ponto móvel, cresça de maneira constante. Essa taxa de crescimento constante de alguma fluente é o que ele chamava fluxo principal, podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal. Newton indicava o fluxo de* y *por* $\dot{y}$ *e assim por diante. Newton fez numerosas e notáveis aplicações de seu método dos fluxos. Determinou máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas; aplicou-o também a muitas quadraturas e retificações de curvas."*

Em 1686, Newton publicou a obra *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Princípios matemáticos da filosofia natural), obra que contém algumas ideias do Cálculo e Fundamentos da Física. Foi somente em 1736 (após sua morte) que a obra *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (Métodos dos fluxos e séries infinitas), foi publicada. Nesta Newton expõe todas as suas ideias a respeito do *método das fluxões*. Esta foi escrita em 1671 mas só foi publicada em 1736 . Na Figura 1 temos uma foto de uma das páginas de seu trabalho.

Posteriormente, outros matemáticos melhoraram seus resultados, mas coube a Newton a chave que abria para um novo horizonte. Sua contribuição é tão gigantesca que, segundo Eves, em [4], Leibniz dissera *"Tomando a matemática desde o início do mundo até a época em que Newton viveu, o que ele fez foi, em grande escala, a metade melhor"*.

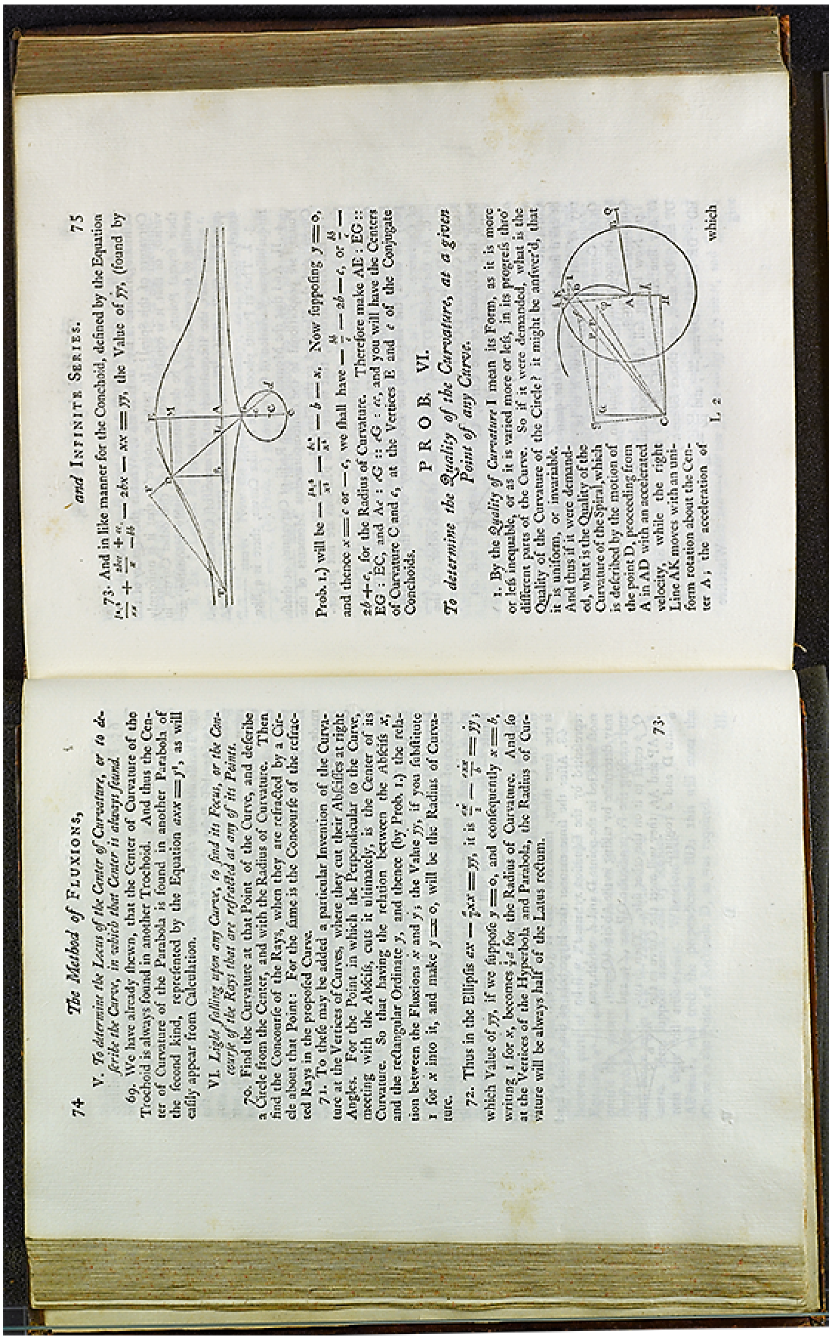


Figura 1: Paginas do livro "Métodos dos fluxos e séries infinitas".

1.2 O CÁLCULO AOS OLHOS DE GOTTFRIED LEIBNIZ

Leibniz era um matemático alemão, que compararmos com Newton seria grande tolice. Apesar dos dois terem se envolvido em polêmicas sobre a primazia da criação do Cálculo, ambos tem parcelas irredutíveis na expansão e disseminação de tal estudo.

Ao contrário de Newton, Leibniz não se preocupou com taxa de variação para o desenvolvimento de seus estudos. Em 1672, Leibniz teve seu primeiro contato com os tratados de 1658, escrito por Blaise Pascal, sobre "os indivisíveis". A partir daí a matemática passou a ser interesse de suas investigações.

Como aconteceu com Newton, o estudo de séries infinitas foi muito importante no início de suas descobertas. Relacionando o triângulo de Pascal e o triângulo harmônico, Leibniz percebeu uma maneira de encontrar o resultado de muitas séries infinitas convergentes. Ao voltar-se para o trabalho *Traite des sinus du quart de cercle* de Pascal, Leibniz teve uma das ideias mais geniais da história da ciência: a determinação da tangente a uma curva dependia das diferenças das abscissas e ordenadas na medida em que essas se tornassem infinitamente pequenas e que a quadratura, isto é, a área, dependia da soma das ordenadas ou retângulos infinitamente finos.

Essa ideia levou Leibniz, em 1676, a chegar a conclusão de que tinha em mãos um método muito importante e abrangente. Seu primeiro trabalho sobre Cálculo Diferencial foi publicado em 1684, sob o longo título *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur* (Um novo método para máximos e mínimos e para tangentes não obstruídas por quantidades irracionais). Neste trabalho Leibniz define dx como um intervalo finito e arbitrário e dy pela proporção $dy : dx = y : subtangente$. Boyer, em [5], *"Para achar tangentes fez uso do* calculus differentialis *e para encontrar quadraturas utilizou o* calculus summatorius *ou* calculus integralis*, de onde se originou a nomenclatura atualmente utilizada"*. Em 1686, Leibniz fez outra importante publicação, onde enfatizou a relação inversa entre derivação e integração no Teorema Fundamental do Cálculo.

A notação que Leibniz utilizou para seus estudos era bem diferente da de Newton, e foi mais difundida e presente nos trabalhos posteriores nesta área (veja na Figura 2). A notação utilizada atualmente para derivadas e integrais é bem próxima das notações sugeridas por Leibniz. Eves,([4] 443- 444) diz sobre Leibniz que ele *"tinha uma sensibilidade muito grande para a forma matemática e discernia com clareza as potencialidades de um simbolismo bem engendrado. Sua notação para o cálculo mostrou-se muito feliz e, inquestionavelmente, é mais conveniente e flexível do que a de Newton"*.

Leibniz tem outras contribuições importantes em outras áreas como probabilidade e análise combinatória, mas certamente ficaram pequenas diante de suas contribuições para o Cálculo e para a matemática como um todo.

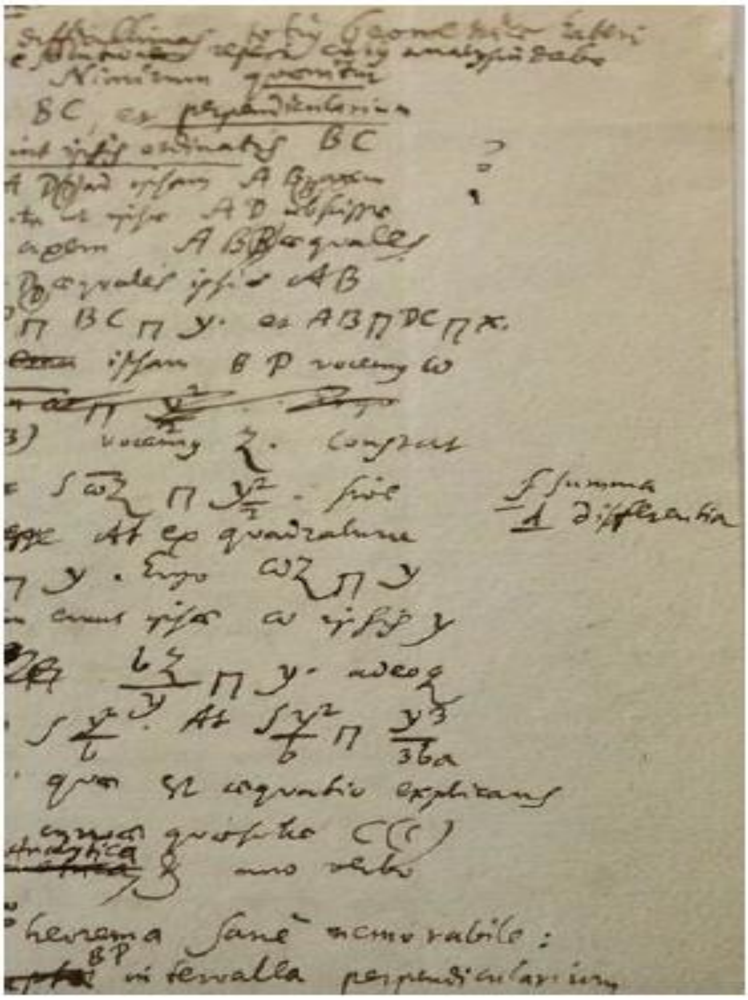


Figura 2: Documento que mostra as primeiras notações de Leibniz usando o símbolo de integral.

1.3 A EXPLORAÇÃO DO CÁLCULO E AS EQUAÇÕES DIFERENCIAS

Se para a história geral o século XVIII é conhecido como Século das Luzes, para a história da matemática é conhecido como Século da Exploração do Cálculo. Os trabalhos realizados nesta época garimparam de todas as maneiras esta ferramenta mostrando o quão defasada ela ainda era. Mesmo com os enormes avanços realizados no século anterior tais como, a Geometria Analítica de Fermat e Descartes e o Cálculo Infinitesimal de Newton e Leibniz, o rigor matemático ainda deixava a desejar.

A maneira de pensar estava modificada, o maior estímulo para época era entender e descrever fenômenos naturais, explorar o movimento contínuo de partículas no espaço e entender como a variação da velocidade se relacionava com a aceleração. Essas explorações levaram a matemática para um novo rumo. Tanto Newton quanto Leibniz perceberam que as equações que descreviam os modelos físicos, tinham como base a variação e que poderiam ser modeladas por derivadas, e a matemática base para resolvê-las era o Cálculo desenvolvido por eles, foi então que surgiu o estudo das *Equações Diferenciais*.

Apesar de ter atuado pouco nesta área Newton teve papel fundamental para o desenvolvimento dos estudos que fundamentaram a teoria das Equações Diferenciais. Sua teoria que descrevia o comportamento estático e dinâmico de corpos, conhecida hoje como **Leis de Newton** e também a **Lei da Gravitação Universal**, nortearam e deram as bases necessárias para os estudos dos movimentos de corpos e a mecânica celeste. Foi então que o uso destas equações ficou evidente, pois ao descrever suas leis, Newton tinha a necessidade do uso de funções derivadas, algo que poderia ser interpretado apenas com o conhecimento do Cálculo.

Leibniz teve papel decisivo no desenvolvimento da teoria e métodos de resolução das Equações Diferencias, sua destreza na matemática o colocava a frente de seu tempo, suas brilhantes notações para derivada e integral, tornaram muito mais claras as interpretações de seus trabalhos. Leibniz desenvolveu e sintetizou alguns estudos dessas equações, como por exemplo o método de separação de variáveis para as equações $\frac{dy}{dx} = \frac{P(y)}{Q(x)}$, a redução de equações homogêneas à equações separáveis e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$. Estes métodos serão apresentados no próximo capítulo.

A partir daqui faremos um resumo dos principais trabalhos do século XVIII que contribuíram com a consolidação da área Equações Diferenciais

Jacques(1654–1705) e Johann (1667–1748) Bernoulli - Baseados nos estudos de Leibniz, foram os primeiros que deslumbraram o grande potencial que o Cálculo continha, explorando suas propriedades em inúmeras aplicações nos campos da Mecânica e Astronomia. As explorações e descobertas feitas por esses dois irmãos utilizando o Cálculo, serviram para cientistas como Abraham De Moivre, Brook Taylor, Colin Maclaurin, Leonhard Euler, Alexis Claude Clairaut, Jean-le-Rond d'Alembert, Johann Heinrich Lambert, Joseph Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace, Adrien-Marie Legendre, Gaspard Monge e Lazare Carnot.

Os Bernoulli ficaram muito conhecidos no meio científico, durante o século XVIII suas pesquisas nortearam os ramos das Equações Diferencias, probabilidade, hidrodinâmica, mecânica entre outros.

Jacques Bernoulli resolveu a equação diferencial $y' = \sqrt{\frac{a^3}{b^2y - a^3}}$, usando pela primeira vez a palavra "integral"com o mesmo sentido que usamos nos dias atuais, seu irmão Johann resolveu de forma brilhante o problema da catenária que é a forma que os cabos suspensos adquirem sob seu próprio peso.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

O problema da braquistócrona (a trajetória de uma partícula que, sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula, se desloca entre dois pontos no menor intervalo de tempo), foi resolvido pelos irmãos Bernoulli e também por Leibniz e Newton.

Daniel Bernoulli (1700 – 1782) - Filho de Johann Bernoulli, fez numerosas contribuições em vários ramos da matemática. Daniel tem contribuições nas áreas da astronomia, náutica, magnetismo, Mecânica, correntes oceânicas, hidrodinâmica , conservação de energia e teoria cinética dos gases, nesta última elucidou muitos fatos que contribuiram para o desenvolvimento da equação geral dos gases.

Leonhard Euler (1707 - 1783)- Grande amigo de Daniel, Euler foi um dos, se não o matemático mais prolífero que já existiu. Por seu grande talento com a matemática, Euler teve papel decisivo no desenvolvimento da Teoria das Equações Diferenciais nos aspectos de soluções e classificações, muitos métodos utilizados hoje são devido aos trabalhos realizados por ele. Deu início ao estudo deste tipo de equações, após o contato com os trabalhos de Newton sobre mecânica do movimento e métodos para resolver Equações Diferenciais.

Euler estendeu as classificações dessas equações feitas por Newton, identificando a condição para que equações de primeira ordem sejam exatas e desenvolveu a teoria de fatores integrantes (este tipo de equação será estudada na Seção 2.2.3 do Capítulo 2). Também encontrou a solução geral para equações de coeficientes constantes tal como $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ (esta será estudada na Seção 2.3.2 do Capítulo 2). Usou séries de potências para resolver Equações Diferenciais. Propôs também um procedimento numérico para resolver equações do tipo $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ com valores iniciais $y(x_0) = y_0$.

Além disso, ele deu contribuições importantes em equações diferencias parciais, descobrindo a importância da equação $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$, apresentando o primeiro tratamento sistemático ao Cálculo das Variações.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) - Outro matemático que contribuiu na área do Cálculo das Variações foi Lagrange, de todos os matemáticos da época Lagrange era lacônico e extremamente preocupado com os detalhes e rigor, não só em sua obra mas também nas obras de seus contemporâneos.

Lagrange foi um dos primeiros a identificar a necessidade de trazer um maior rigor para a Análise em vigor na época. Esta empreitada só teve sucesso anos mais tarde com outros matemáticos, mas sua dedicação rendeu uma obra chamada *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du Calcul Différential* (Teoria das funções analíticas contendo os princípios do Cálculo Diferencial).

Nesta obra é discutido de forma inovadora as operações envolvendo o cálculo diferencial e integral. Sua proposta incide em manipulações algébricas a partir de expansões de séries já conhecida, e representação de funções $f(x)$ por série de Taylor de $f(x+h)$. Esta ideia então deu início as funções derivadas, que eram representadas por Lagrange como $f'(x), f"(x), \ldots, f^n(x)$ para definir derivadas de uma função. Sua intenção era eliminar os limites e o uso de infinitesimais, mas como seu trabalho não dava grande importância as convergências e divergências nas séries de potências seu método foi falho, porém de grande influência para estudos posteriores.

Seus estudos sobre cálculo fizeram com que Lagrange desenvolvesse as primeiras ideias sobre a Teoria das funções de variável real, onde deu ao cálculo de variações uma roupagem mais analítica. Uma de suas maiores obras, *Mécanique Analytique* (Mecânica Analítica), estuda as equações gerais de movimento para sistemas dinâmicos, nomeadas mais tarde por equações de Lagrange. Ele também aplicou à mecânica os métodos estudados por ele, indo assim na contra mão de Newton que deu uma abordagem geométrica a esses movimentos. Como todo estudo no campo da física, este trabalho fez com que Lagrange desenvolvesse um método para solução de equações diferencias chamado *método da variação de parâmetros* (que estudaremos na Seção 2.3.7 do Capítulo 2). Suas contribuições para este tipo de equação, alavancaram um grande desenvolvimento nessa área.

D'Alembert (1717-1783) - O matemático D'Alembert e seu amigo Denis Diderot (1713-1784) foram vanguarda , criando a *Enciclopédia ou dicionário sistemático das ciências, das artes e dos ofícios*, este periódico tinha como principal premissa sistematizar e dar um maior rigor as produções da época, sua primeira publicação foi em 1751. D'Alembert era um homem extremamente culto e de grande iniciativa cientifica e política. Foi convidado a presidir a *Academia Prussiana*, mas recusou por acreditar que ninguém poderia ocupar um cargo superior ao de seu amigo Leonhard Euler, que na sua opinião era detentor da mente mais brilhante da época.

A importância de D'Alembert foi muito maior do que o destaque que ele tem, dificilmente ele é colocado na lista dos grandes matemáticos do século XVIII, uma injustiça porque além das contribuições já destacadas, podemos citar uma que ajudou a colocar Pierre Simon Laplace (1749-1827) entre os grandes da época.

Seu amor pela álgebra era incontestável, porém seu interesse na física é evidente, suas publicações mais famosas são nos campos da mecânica, mecânica de fluidos e cordas vibrantes, áreas onde seus problemas sempre recaiam em Equações Diferenciais Parciais, isso ajudou com que D'Alembert seja considerado um dos pioneiros no estudo deste tipo de equação.

O problema das cordas vibrantes gerou à Equação Diferencial Parcial $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, para a qual, o próprio deu a solução $u = f(x+t) + g(x-t)$ sendo f e g funções arbitrarias.

Pierre Simon Laplace (1749-1827) - Um dos grandes nomes deste século, sem dúvida nenhuma, foi Laplace. Seu brilhantismo foi enaltecido por D'Alembert, segundo Eves, em [4], o mesmo dissera *"Não costumo dar crédito a recomendações, e você não precisa delas. Você demonstrou que é digno de ser conhecido e eu lhe darei o meu apoio"*, homem cujo qual ajudou com que Laplace visse parte do cenário científico. Seus estudos nas áreas de matemática e astronomia logo ganharam destaque no meio acadêmico, fazendo com que seu nome fosse reconhecido nas grandes academia de ciência da época, suas principais áreas de atuação foram Mecânica celeste, Probabilidade, Equações Diferenciais e Geodésia.

Praticamente todos os estudos desenvolvidos por Laplace, são utilizados a fins de resolver problemas vinculados a física, não atoa que ganhou o apelido de *"Newton da França*, um exemplo é a *Equação de Laplace*, uma Equação Diferencial elíptica que se considerada no espaço euclidiano é dada por $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, que aparece em modelos de áreas como Astronomia, Electromagnetismo e Mecânica dos Fluidos.

Na Análise Funcional, sua contribuição foi a *Transformada de Laplace*, um método que permite levar a resolução de problemas envolvendo Equações Diferenciais e valor inicial à resolução de equações polinomiais. A transformada de uma função $f(t)$, cuja integral existe, está definida para todo número real $t \geq 0$ e é dada por

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Laplace também tinha interesse em assuntos como teoria das probabilidades, equações algébricas, refração, pêndulos, efeitos capilares, medidas barométricas, velocidade do som e dilatação dos corpos sólidos e desenvolveu um calorímetro instrumento capaz de medir o calor específico dos corpos.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)- Incentivado por Laplace e Lagrange, Cauchy foi um dos grandes nomes do XIX, se desbravou em vários ramos da Análise e também tem suas contribuições para as Equações Diferenciais. Uma delas são as famosas Equações de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, estudadas hoje em dia em cursos de graduação da área de ciências exatas devido sua importância.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) - No século XIX podemos encontrar inúmeros matemáticos que por conta de suas contribuições, se destacaram de forma brilhante e decisiva no processo da maturação da matemática. Sendo assim daremos enfoque para Fourier por suas contribuições que alavancaram a teoria das Equações Diferenciais. Seu primeiro trabalho de destaque foi um artigo que trazia uma problemática muito prática porém pouco explorada até então, a propagação do calor em barras, chapas e sólidos metálicos. Para tal ideia, Fourier fez uma afirmação que mudaria a maneira de se tratar uma função, seu artigo afirmava que toda função definida num intervalo finito $(-\pi, \pi)$ por um gráfico descrito arbitrariamente pode ser decomposta numa soma de funções seno e cosseno, fa dorma abaixo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

onde a_0, a_n e b_n são números reais convenientes.

Apesar de seu brilhantismo Fourier pecava em sua escrita, e isso atrasou de certa maneira sua carreira, a validade de seus artigos era questionável pela falta de rigor, este primeiro artigo por exemplo não foi aceito na academia, os julgadores em questão Lagrange, Laplace e Legendre não se sentiram convencidos por seus argumentos. Os percalços não o desanimaram e em 1816, publicou um dos grandes clássicos da matemática *Théorie Analytique de la Chaleur* (Teoria Analítica do Calor). Mesmo não tendo conseguido provar sua ideia de que toda função pode ser representada pela série chamada hoje de Série de Fourier, a validade da sua afirmação atende uma extensa classe de funções, e também se mostrou muito útil nas áreas da acústica, óptica, eletrodinâmica, termodinâmica entre outros, e com isso se fez fundamental na solução de Equações Diferenciais. Em [4], Eves escreve que *"De fato, foram as séries de Fourier que motivaram os métodos modernos de física-matemática que envolvem a integração de Equações Diferenciais Parciais sujeitas a condições de contorno"*.

Ainda hoje temos grandes matemáticos contemporâneos que ganham destaque com seus estudos nesta área, citamos o matemático italiano Alessio Figalli, que foi laureado com a medalha Fields em 2018, por suas *"contribuições para a teoria do transporte ótimo e suas aplicações nas Equações Diferenciais e na geometria métrica"*, como anunciado pelos organizadores do Congresso Internacional de Matemática deste ano.

2 O ESTUDO SISTEMATIZADO DE ALGUMAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Neste capítulo iremos expor de forma sistematizada as principais definições, resultados e métodos para soluções de algumas Equações Diferenciais, da forma como, em geral, são apresentados em um curso de Cálculo. Neste estudo ficará claro que apenas alguns poucos tipos destas equações podem ser resolvidas e entendidas por meio de métodos gerais. Porém, dentro deste pequeno grupo encontram-se equações envolvidas em assuntos de grande interesse, como por exemplo, crescimento populacional, matemática financeira, eletricidade, transferência de calor e cinemática. As informações contidas neste capítulo podem ser encontradas com maiores detalhes nas referências [1],[2] e [3].

2.1 CLASSIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

2.1.1 *Classificação por tipo*

Se uma equação envolve derivadas ordinárias (derivada com relação a sua única variável independente) de uma ou mais funções, ela será chamada de **Equação Diferencial Ordinária (EDO)**. Uma equação envolvendo derivadas parciais (derivada em relação a uma de suas variáveis de forma independente) de uma ou várias funções de duas ou mais variáveis independentes é chamada de **Equação Diferencial Parcial (EDP)**.

Exemplo 2.1.

(A) As equações a seguir, são EDOs:

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad e \quad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y,$$

onde $y = y(x)$ é uma função de x.

(B) As seguintes equações são EDPs.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

onde $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ são funções de duas variáveis.

2.1.2 *Classificação por ordem*

A **ordem de uma Equação Diferencial** (EDO ou EDP) é a ordem da maior derivada na equação. Por exemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5(\frac{dy}{dx})^3 - 4y = e^x$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. No Exemplo 2.1, a primeira e a terceira equação em (A) são EDOs de primeira ordem, enquanto em (B) as duas primeiras equações são EDPs de segunda ordem.

Neste trabalho apresentaremos alguns métodos que resolvem alguns tipos de EDOs. Por essa razão abaixo iremos nos concentrar em entender melhor a forma destas.

EDOs de primeira ordem são eventualmente escritas na forma diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Por exemplo, se nós assumirmos que y denota a variável dependente na equação $(y - x)dx + 4xdy = 0$, então $y' = dy/dx$, logo dividindo pela diferencial dx, nós obtemos a forma alternativa $4xy' + y = x$.

Em símbolos, podemos expressar uma EDO de ordem n em uma variável dependente na forma geral

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0,$$

onde F é uma função de valores reais de $n + 2$ variáveis, $x, y, y', ..., y^{(n)}$, e onde $y^{(n)} = d^n y/dx^n$. Assumiremos que sempre é possível resolver uma EDO para sua maior derivada, e escreveremos a derivada mais alta $y^{(n)}$ em termos das $n + 1$ variáveis remanescentes, obtendo a equação

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

onde f é uma função contínua de valores reais de $n + 1$ variáveis. A última equação é conhecida por forma normal de $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$. Assim, quando servir aos nossos propósitos, usaremos a forma normal para representar EDOs gerais de ordem qualquer. Por exemplo, a forma normal da equação de segunda ordem $y'' - y' + 6y = 0$ é dada por $y'' = y' - 6y$.

2.1.3 *Classificação por linearidade*

Dizemos que uma Equação Diferencial de ordem n é linear se a expressão envolvendo a função e suas derivadas é linear com relação a estas, isto é, as funções y, e todas as derivadas que aparecem nesta, estão com potência um, e não aparecem se multiplicando em nenhuma parcela.

Exemplo 2.2.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5x\frac{dy}{dx}-4y=e^x \text{ e } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

são uma EDO linear e uma EDP linear, respectivamente.

Analisemos um pouco melhor as EDOs lineares. Pela definição, dada uma EDO linear da forma

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0,$$

esta pode ser escita na forma

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y-g(x)=0$$

ou

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x),$$

onde $a_j(x)$ são funções de x (de um tipo qualquer) para todo $j=0,1,...,n$.

Assim podemos observar duas propriedades das EDOs lineares:

- A função y e todas as suas derivadas $y',y'',\dots y^n$ são do primeiro grau, ou seja, a potência de cada termo envolvendo y é um.
- Os coeficientes $a_0,a_1,\dots,a_n$ de $y,y',\dots,y^{(n)}$ dependem somente da variável independente x ou são constantes.

Uma equação diferencial ordinária **não linear** é simplesmente uma que não é linear.

Exemplo 2.3.

(a) As equações a seguir

$$(y-x)dx+4xdy=0, \quad y''-2y'+y=0 \quad \text{e} \quad x^3\frac{d^3y}{dx^3}+x\frac{dy}{dx}-5y=e^x$$

são respectivamente, EDOs *lineares* de primeira, segunda e terceira ordem. A primeira equação é linear na variável y, pois pode ser escrita na forma alternativa $4xy'+y=x$.

(b) As equações a seguir

$$(1-y)y'+2y=e^x, \quad \frac{dy^2}{dx^2}+\sin y=0 \;\; e \;\; \frac{d^4y}{dx^4}+y^2=0$$

são exemplos de EDOs não lineares de primeira, segunda e quarta ordem, respectivamente.

2.2 EDOS DE PRIMEIRA ORDEM

Nesta seção apresentaremos alguns métodos para resolver EDOs primeira ordem,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

onde f é uma função dada de duas variáveis, x e y. Qualquer função diferenciável $y = y(x)$, que satisfaz essa equação para todo x em algum intervalo, é chamada de uma solução. Quando, além da equação diferencial temos ainda uma informação sobre o comportamento da função envolvida em algum ponto, $y(x_0) = y_0$, dizemos que o que temos em mãos é um *Problema de valor inicial* (PVI). Em geral, este é colocado como

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

Dado um PVI como o acima, algumas questões podem ser levantadas:

1. Este PVI possui solução?

2. Se a solução existe será que ela é única?

3. Esta solução está bem definida em qual intervalo?

4. Temos uma forma explícita para a solução?

Estas questões de existência e unicidade de solução para um PVI foram inicialmente estudadas por Rudolf Lipschitz, em 1876. Ele provou o conhecido *Teorema de Existência e Unicidade*, que garante que se f é contínua com relação a x em $I \subset \mathbb{R}$ e satisfaz a condição de Lipschitz

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq C|y - y_0|,$$

então o PVI em (2) tem uma única solução definida no intervalo I. Depois, em 1886, Giuseppe Peano, provou que para garantir a existência de solução para (2), era suficiente a continuidade da função f. Em 1890, Peano conseguiu estender seu resultado para um sistema de EDOs de primeira ordem. Em 1890, Charles Emile Picard and Ernst Leonard Lindelöf, demonstraram um resultado de existência e unicidade, um pouco menos abrangente que o de Lipschitz, usando as aproximações de Picard para encontrar uma sequência de funções que se aproximam da solução procurada. Enunciaremos abaixo o resultado provado por Picard -Lindelöf:

Teorema 2.4. *(Teorema de Existência e Unicidade) Considere o PVI em (2). Suponha que* f *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *são contínuas em um retângulo* $R : (x, y) \in \mathbb{R}, \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$ *com* $(x_0, y_0) \in R$. *Então, o PVI tem uma única solução* y *definida em um intervalo* I *com* $x_0 \in I$.

Foge aos objetivos deste texto apresentar a demonstração deste resultado, mas o leitor poderá encontrar uma prova deste em [16].

A seguir estaremos interessados em encontrar uma solução para a (1). Infelizmente, não existe método geral para resolver esta equação, em termos de funções elementares, para uma função arbitrária f. Em vez disso, descreveremos diversos métodos, cada um deles aplicável a uma determinada subclasse de equações de primeira ordem, a saber, equações separáveis, equações lineares e as equações exatas.

2.2.1 *Equações separáveis*

Ao se trabalhar com Equações Diferenciais do tipo

$$\frac{dy}{dt} = ay + b, \tag{3}$$

em que a e b são contantes, usamos um processo de integração direta, nesta seção iremos mostrar que esse processo pode ser aplicado, de fato, a uma classe muito maior de equações.

A equação geral de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y) \tag{4}$$

pode ser escrita na forma

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{5}$$

Para isso basta definir $M(x, y) = -f(x, y)$ e $N(x, y) = 1$. No caso em que M só depende de x, e N só depende de y, a equação em (5) pode ser escrita como

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{6}$$

Tal equação é dita **separável**. Note que, rearranjando os termos da equação, integrando em relação a x e usando mudança de variáveis na integral obtemos

$$\int M(x)dx = \int -N(y)\frac{dy}{dx}dx = -\int N(y)dy$$

cuja solução é da forma

$$H(x) + c_1 = -G(y) + c_2 \quad \Rightarrow \quad H(x) + G(y) = C,$$

em que $H(x)$ e $G(y)$, são as primitivas de $M(x)$ e $N(y)$ respectivamente e $C = c_1 - c_2$.

Ilustraremos o método nas aplicações a seguir:

Aplicação 2.1. *Lei de Newton do resfriamento*[6]

A lei de resfriamento de Newton trata de transferência ou troca de calor de um corpo com o meio. Algumas considerações podem se feitas a respeito deste fenômeno:

1. A temperatura $T(t)$ do corpo depende do tempo e é homogênea, ou seja, é a mesma em todos os pontos do corpo em um determinado instante;
2. A temperatura T_m, é a temperatura do meio ambiente e permanece sem variação ou seja é constante durante todo o processo;

Para modelarmos esse fenômeno partiremos do princípio de conservação de energia, o qual estabelece que a quantidade total de energia em um sistema isolado permanece constante, ou seja, a energia não pode ser criada ou destruída, apenas transformada. Assim, usando esse princípio, podemos supor que a quantidade de energia inicial é igual a quantidade de energia final do sistema, dessa forma, o aumento da quantidade de energia no corpo deve ser igual à quantidade total de calor transferida para o mesmo.

A energia na qual se baseia o problema é o calor (Q), que é definido como energia em trânsito,. Essa transferência é feita de maneira espontânea quando um corpo é inserido em um ambiente. Assim, cada corpo tem o que chamamos de Capacidade térmica, que é a quantidade de calor que um corpo necessita receber ou ceder para que sua temperatura varie uma unidade.

Podemos determinar essa capacidade térmica (C) da seguinte forma:

$$C = \frac{Q}{(T_m - T(t))} \qquad ou \qquad C = hA,$$

onde

- Q é a energia recebida pelo corpo;
- T_m é a temperatura do ambiente;
- $T(t)$ é a temperatura do corpo em um certo instante t;
- h é o coeficiente de transferência de calor entre o objeto e o ambiente;
- A é a área superficial do objeto.

[6] As informações que auxiliaram na modelagem desta aplicação podem ser encontradas em [3]

Igualando as duas fórmulas temos

$$\frac{Q}{(T_m - T(t))} = hA \quad \Rightarrow \quad Q = hA(T_m - T(t)).$$

O calor pode ser determinado também por $Q = mc\Delta T$, onde m é a massa do corpo, c é o calor específico que mede a quantidade de calor necessária para que cada grama de uma substância sofra uma variação de temperatura correspondente a 1^oC, e ΔT é a variação de temperatura sofrida pelo corpo.

Assim temos

$$Q = hA(T_m - T(t)) \quad \Rightarrow \quad mc\Delta T = hA(T_m - T(t)) \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{hA}{mc}(T_m - T(t)).$$

A variação de temperatura refere-se a uma unidade de tempo. Agora queremos analisar esta variação de forma contínua, isto é, fazendo este tempo variar continuamente e considerar intervalos cada vez menores:

$$\frac{Q}{\Delta t} = hA(T_m - T(t)) \quad \Rightarrow \quad \frac{mc\Delta T}{\Delta t} = hA(T_m - T(t)),$$

assim temos a equação

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{hA}{mc}(T_m - T(t)).$$

Passando ao limite quando $\Delta t \to 0$,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{hA}{mc}(T_m - T(t)),$$

de onde segue que

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T(t) - T_m),$$

onde k é a constante de proporcionalidade, e seu valor depende do corpo que será estudadoe é dada por $k = -\frac{hA}{mc}$. Já seu sinal, positivo ou negativo, é para mostrar se o estudo que está sendo feito é de aquecimento ou resfriamento. Esta equação obtida, em geral, é enunciada da seguinte forma: a taxa de variação da temperatura com relação ao tempo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente.

Note que a equação obtida é separável

$$\frac{1}{(T(t) - T_m)} dT(t) = kdt$$

integrando de ambos os lados, obtemos

$$\ln |T(t) - T_m)| = kt + c,$$

aplicando exponencial em ambos os lados obtemos

$$T(t) - T_m = \pm e^{kt+c} \qquad \text{ou} \qquad T(t) = T_m + Ce^{kt},$$

onde $C = \pm e^c$. Se consideramos que a temperatura inicial do corpo é $T(0) = T_0$, podemos obter a constante C que aparece na solução, de maneira simples

$$T(0) = T_m + Ce^{kt} \quad \Rightarrow \quad T_0 = T_m + Ce^{k(0)} \quad \Rightarrow \quad T_0 = T_m + C,$$

logo

$$C = T_0 - T_m,$$

e assim obtemos a seguinte solução

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}.$$

Para exemplificarmos como esta aplicação aparece no ensino médio, daremos um exemplo.

Exemplo 2.5. *(Resfriamento de corpos)* [7]

Em um trecho de mata próximo à cidade, a polícia encontrou, por volta das 17 horas, um cadáver. O médico legista chegou às 17h20min e imediatamente mediu a temperatura do corpo, que era de $32,5°C$. Uma hora mais tarde, ele mediu novamente a temperatura e verificou que era de $31,5°C$. A temperatura ambiente (na mata) se manteve constante, a $16,5°C$. O legista considera que a temperatura normal de uma pessoa viva é $36,5°C$. De acordo com as temperaturas coletadas, o horário da morte foi aproximadamente por volta de?

Solução:

Usando a Lei de resfriamento de Newton e os dados do problema temos::

- $T_0 = 32,5°C$
- $T_m = 16,5°C$
- $T(1) = 31,5°C$

$$C = 32,5 - 16,5 = 16°C \quad \Rightarrow \quad T(t) = 16,5 + 16e^{kt}.$$

Como uma hora após chegar, a temperatura era de $31,5°C$,temos

$$T(1) = 16,5 + 16e^{k(1)} \quad \Rightarrow \quad 31,5 = 16,5 + 16e^{k},$$

então

$$31,5 - 16,5 = 16e^{k(1)} \quad \Rightarrow \quad 15 = 16e^{k} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{15}{16}\right) = k.$$

Assim $k \approx -0,06$. Logo, a temperatura em função do tempo é dada por

$$T(t) = 16,5 + 16e^{-0,06t}.$$

[7] Este exercício pode ser encontrado em [8]

Como a temperatura normal de um corpo é $T = 36,5°C$, podemos calcular o tempo que se passou entre sua morte e a chegada do médico legista

$$36,5 = 16,5 + 16e^{-0,06t} \quad \Rightarrow \quad \frac{20}{16} = e^{-0,06t},$$

de onde segue que

$$\ln(\tfrac{20}{16}) = -0,06t \quad \Rightarrow \quad t \approx 3,71.$$

Sendo assim, como a primeira medição foi feita as 17h20 e a hora da morte foi 3h40 antes da mesma, temos que o óbito se deu as 13h40 do mesmo dia.

$\square$.

Aplicação 2.2. *Taxas de capitalização compostas instantâneas* [8]

Considere que uma certa quantia A foi aplicada em um banco que oferece uma taxa de rendimento anual k. Essa taxa de rendimento pode ser assumida como taxa simples ou composta, iremos tratar aqui de um problema que envolva taxas compostas instantâneas. Primeiramente iremos obter a Equação Diferencial que nos mostra o comportamento da variação da quantia A aplicada no banco, em função do tempo t.

Seja $A(t)$ a função que me dá a quantia no banco em um instante t. Sabemos que o valor a ser acrescentado ao depósito inicial, no final do período de capitalização, é proporcional à quantia depositada A e ao tempo de depósito em anos. A constante de proporcionalidade é a taxa de rendimento anual k. Dessa forma teremos

$$A(t+\Delta t) - A(t) = kA(t)\Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} = kA(t),$$

onde Δt é a variação do tempo. Para analisar essa variação em períodos cada vez menores, aplicamos limite na equação acima, quando Δt tende a zero:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} = kA(t).$$

Com isso obtemos a equação

$$\frac{dA(t)}{dt} = kA(t),$$

que é uma EDO separável e pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{A(t)} dA(t) = kdt.$$

Integrando em ambos os membros, obtemos

$$\ln|A(t)| = kt + C.$$

[8] As informações que auxiliaram na modelagem desta aplicação podem ser encontradas em [3]

Aplicando exponencial obtemos

$$|A(t)| = Ce^{kt}.$$

Se consideramos a aplicação inicial sendo $A(0) = A_0$, podemos obter a constante C que aparece na solução, de maneira simples

$$|A(0)| = Ce^{k(0)} \quad \Rightarrow \quad |A_0| = C.$$

e assim, desde que a quantia inicial é positiva pois estamos tratando de aplicação, obtemos a seguinte solução

$$A(t) = A_0e^{kt}.$$

A seguir um exemplo de exercício do ensino médio no qual aplicamos a solução obtida.

Exemplo 2.6. *(Juros compostos)*[9]

Um cartão de crédito cobra juros de 9 % a.m. sobre o saldo devedor. Um usuário desse cartão tem um saldo devedor de 505,00 reais. Em quanto tempo essa dívida chegará a 600,00 reais se não for paga?

Solução:

Sendo assim, temos que $A_0 = 505$, $k = 0,09$ *e* $A(t) = 600$, *então*

$$A(t) = A_0e^{kt} \quad \Rightarrow \quad 600 = 505e^{0,09t}.$$

Podemos determinar t,

$$600 = 505e^{0,09t} \quad \Rightarrow \quad \frac{600}{505} = e^{0,09t} \quad \Rightarrow \quad 1,188 = e^{0,09t}.$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados

$$1,188 = e^{0,09t} \quad \Rightarrow \quad \ln\ 1,188 = 0,09t \quad \Rightarrow \quad t \approx 2.$$

Portanto essa dívida chegará a 600,00 reais em 2 meses.

$\square$.

[9] Este exercício pode ser encontrado em [8]

2.2.2 *Equações lineares: o método dos fatores integrantes*

Considere uma equação linear de primeira ordem na forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \tag{7}$$

em que p e g são funções dadas da variável independente t.

Se a $p(t) = 0$, então temos o caso mais simples

$$\frac{dy}{dt} = g(t).$$

Neste caso, a resolução é uma consequência do Teorema Fundamental do Cálculo

$$y = \int g(x)dx = G(x) + C,$$

com G uma primitiva de g.

Se a $p(t) \neq 0$, então algumas vezes é mais conveniente escrever a equação na forma

$$P(t)\frac{dy}{dt} + Q(t)y = G(t), \tag{8}$$

em que P, Q e G são funções dadas. É claro que, sempre que $P(t) \neq 0$, você pode converter a (8) na (7) dividindo a (8) por $P(t)$.

Iremos apresentar um método para solução de equações lineares de primeira ordem, conhecido como método dos fatores integrantes. Este baseia-se em encontrar uma função $\mu(t)$ que ao ser multiplicada na equação em (7), transforma o primeiro membro da equação em uma derivada de um produto, e portanto, em uma função integrável. Vejamos:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t). \tag{9}$$

Vemos que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na (9) é a derivada do produto de $\mu(t)y$, desde que $\mu(t)$ satisfaça a equação

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t). \tag{10}$$

Encontremos a solução $\mu(t)$ desta equação.

Da equação em (10) obtemos

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = p(t),$$

e em consequência,

$$\ln \mu(t) = \int p(t)dt + k.$$

Escolhendo a constante arbitrária k como zero, obtemos a função mais simples possível para $\mu(t)$, a saber,

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}. \tag{11}$$

Agora, desde que a função $\mu(t)$ encontrada é solução de (10), temos substituindo em (9) que

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + y\frac{d\mu(t)}{y} = \frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t). \tag{12}$$

Portanto, integrando os dois últimos membros da equação acima com relação a t, obtemos

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + C, \tag{13}$$

em que C é uma constante arbitrária.

Abaixo iremos apresentar alguns exemplos de fenômenos que podem ser modelados por meio de EDOs lineares de primeira ordem e iremos obter soluções para estas por meio do método apresentado. Também apresentaremos exemplos de problemas que são aplicados no ensino médio, nos quais a fórmula usada para resolução é exatamente a solução que obtemos.

Aplicação 2.3. *Crescimento Populacional*[1]

No final do século XVIII, início do século XIX o inglês Thomas Malthus, chegou em um modelo matemático que, em sua concepção, descrevia o comportamento de uma população em função do tempo. Suas hipóteses iniciais foram as seguintes:

- $N = N(t)$, onde N é o número de indivíduos da população;

- $N(t_0) = N_0$ é a população, no instante t_0;

- As taxas de nascimento (a) e mortalidade (b), são proporcionais a população no instante t.

Assim podemos supor que

$$N(t+1) = N(t) + aN(t) - bN(t) \quad \Rightarrow \quad N(t+1) = (1 + a - b)N(t)$$

onde $(a - b)$ pode ser considerado um fator de crescimento que chamaremos de k.

A pergunta que surge em seguida é, o que acontece se diminuirmos esse intervalo de tempo? Usando nossas hipóteses sobre as taxas de nascimento e mortalidade, podemos obter a seguinte equação

$$N(t + \Delta t) = N(t) + aN(t)\Delta t - bN(t)\Delta t,$$

onde Δt é a variação de tempo considerada. Manipulando um pouco essa equação, obtemos

[1] As informações que auxiliaram na modelagem desta aplicação podem ser encontradas em http://ecovirtual.ib.usp.br

$$kN(t) = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}.$$

Passando ao limite, quando $\Delta t \to 0$ na expressão acima, obtemos

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = kN(t),$$

onde k é a taxa instantânea de crescimento da população.

Com isso obtemos a equação

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t),$$

que é uma EDO linear de primeira ordem. Resolveremos usando o método dos fatores integrantes. Note que podemos escrever a equação como em (3), da seguinte forma

$$\frac{dN(t)}{dt} - kN(t) = 0 \qquad onde \qquad p(t) = -k \quad e \quad g(t) = 0.$$

Multiplicando toda a equação por uma função $\mu(t)$ ficamos com

$$\mu(t)\frac{dN(t)}{dt} - \mu(t)kN(t) = \mu(t)0.$$

Pelo constatado no método, o fator integrante $\mu(t)$ é dado por $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$, então

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = e^{\int -kdt} \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = e^{-kt+C}.$$

Tomando $C = 0$ obtemos $\mu(t) = e^{-kt}$, e substituindo o fator integrante na equação temos

$$e^{-kt}\frac{dN(t)}{dt} - e^{-kt}kN(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-kt}\frac{dN(t)}{dt} + [-e^{-kt}kN(t)] = 0.$$

Assim, a equação pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}[N(t)e^{-kt}] = 0,$$

integrando em ambos os lados com relação a t, temos

$$N(t)e^{-kt} = C.$$

Organizando a equação temos

$$N(t) = Ce^{kt}.$$

Se consideramos a população inicial sendo $N(0) = N_0$, podemos obter a constante C que aparece na solução, de maneira simples

$$N(0) = Ce^{k(0)} \quad \Rightarrow \quad N_0 = C.$$

Logo, a função que nos dá a população em qualquer instante t será

$$N(t) = N_0 e^{kt}.$$

A fórmula obtida aparece em contextos já no ensino médio (estudo da função exponencial e logarítmica). Para exemplificar, apresentaremos um exemplo a seguir:

Exemplo 2.7. *(Crescimento Populacional [2])*

Os biólogos afirmam que, sob condições ideais, o número de bactérias em uma certa cultura cresce de tal forma que a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes no início do intervalo de tempo considerado. Suponhamos que 2 000 bactérias estejam inicialmente presentes em uma certa cultura e que 4 000 estejam presentes 30 minutos depois. Quantas bactérias estarão presentes no fim de 2 horas?

Solução:

Sendo assim, temos que $N(0) = 2000$ *e* $N(1/2) = 4000$*, então*

$$N(t) = N_0 e^{kt} \quad \Rightarrow \quad N(t) = 2000e^{kt},$$

e podemos determinar k

$$N(1/2) = 2000e^{\frac{k}{2}} \quad \Rightarrow \quad 4000 = 2000e^{\frac{k}{2}} \quad \Rightarrow \quad 2 = e^{\frac{k}{2}}.$$

Aplicando logaritmo natural em ambos os lados

$$2 = e^{\frac{k}{2}} \quad \Rightarrow \quad \ln 2 = \frac{k}{2} \quad \Rightarrow \quad k \approx 1,4.,$$

Logo

$$N(t) = 2000e^{1,4t}.$$

Agora vamos descobrir quantas bactérias estarão presentes no fim de 2 horas, para isso basta fazer $t = 2$ *na ultima equação,*

$$N(2) = 2000e^{1,4(2)} \quad \Rightarrow \quad N(2) = 2000e^{2,8} \quad \Rightarrow \quad N(2) \approx 32.889.$$

Portanto após 2 horas terá aproximadamente 32.889 *bactérias.*

□.

[2] Este exercício pode ser encontrado em [8]

Aplicação 2.4. *Circuito RC* [3]

Um circuito que contenha um resistor, um capacitor e uma fonte que possa fornecer força eletromotriz (ϵ), é denominado circuito RC. Sendo esse circuito um circuito fechado, podemos calcular as tensões em cada terminal, onde (U_1) é a tensão no resistor e (U_2) é a tensão no capacitor.(Ver Figura 3)

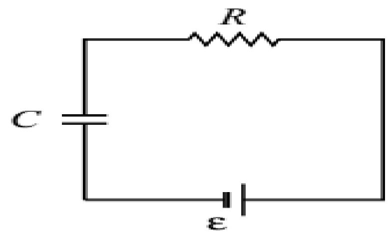


Figura 3: esquema de um circuito RC

Assim, pela lei das malhas de Kirchoff, a qual diz que: a soma das diferenças de potencial para qualquer circuito fechado é nula, isto é, a soma das intensidades das tensões tanto positivas quanto negativas, ao longo de todo circuito é zero), temos:

$$\varepsilon - U_1 - U_2 = 0.$$

A tensão em um resistor pode ser encontrada pela primeira Lei de Ohm

$$U = iR \quad \Rightarrow \quad U_1 = iR,$$

onde i é a corrente do circuito e R a resistência no resistor.

Já a tensão no capacitor pode ser encontrada com

$$U = \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad U_2 = \frac{q}{C},$$

onde q é a quantidade de carga acumulada no capacitor e C é sua capacitância.

A intensidade da corrente elétrica (i) é a variação da quantidade de carga por unidade de tempo,

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t},$$

e passando ao limite quando $\Delta t \to 0$, obtemos

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

[3] As informações que auxiliaram na modelagem desta aplicação podem ser encontradas em [7]

Substituindo todas as informações acima em $\varepsilon - U_1 - U_2 = 0$, temos

$$\varepsilon - R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0,$$

que é uma EDO linear de primeira ordem e pode ser escrita na forma

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\varepsilon}{R} \qquad \textit{com} \qquad p(t) = \frac{1}{RC} \quad e \quad g(t) = \frac{\varepsilon}{R}.$$

Procedendo como no método de fatores integrantes, multiplicaremos toda a equação por uma função $\mu(t)$

$$\mu(t)\frac{dq}{dt} + \mu(t)\frac{q}{RC} = \mu(t)\frac{\varepsilon}{R}.$$

Sabemos que o fator integrante é dado por $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ e $p(t) = \frac{1}{RC}$, então

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = e^{\int \frac{1}{RC}dt} \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = e^{\frac{t}{RC}+C}.$$

Tomando $C = 0$ e substituindo o fator integrante na equação, temos

$$e^{\frac{t}{RC}}\frac{dq}{dt} + e^{\frac{t}{RC}}\frac{q}{RC} = e^{\frac{t}{RC}}\frac{\varepsilon}{R}.$$

O primeiro membro da equação é a derivada de um produto, então a equação pode ser reescrita como

$$\frac{d[qe^{\frac{t}{RC}}]}{dt} = e^{\frac{t}{RC}}\frac{\varepsilon}{R}.$$

Integrando em ambos os lados com relação a t, temos

$$qe^{\frac{t}{RC}} = \varepsilon C e^{\frac{t}{RC}} + K,$$

organizando a equação temos

$$q(t) = \varepsilon C + Ke^{\frac{-t}{RC}}.$$

Logo, podemos determinar a corrente por

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{d}{dt}[\varepsilon C + Ke^{\frac{-t}{RC}}] \quad \Rightarrow \quad i = -\frac{K}{RC}e^{\frac{-t}{RC}}.$$

Para exemplificarmos onde essa fórmula obtida aparece no ensino médio, iremos apresentar um problema da eletrodinâmica.

Exemplo 2.8. *Circuito RC*[4]

Um circuito RC é dado por uma conexão em série de uma fonte de $120V$*, um interruptor, um resistor de* $34M\Omega$ *e um capacitor de* $15\mu F$*. Este circuito serve para se estimar a velocidade de um cavalo que corre por uma pista de* $4km$*. O interruptor se fecha quando o cavalo começa a correr e se abre quando o animal cruza a linha de chegada. Supondo que a tensão no capacitor no instante da chegada seja de* $85,6V$*, calcule a velocidade média do cavalo no percurso em questão.*

Solução:

Do enunciado, temos:

- $\varepsilon = 120V$
- $R = 34M\Omega$
- $C = 15\mu F$
- $U(t) = 85,6V$ *(tensão no capacitor em um instante t)*
- $\Delta s = 4000m$

Com as informações dadas, vamos calcular o tempo que decorreu até o fim do circuito. Da aplicação de circuitos RC temos que a tensão em um capacitor é

$$U(t) = \frac{\varepsilon C + Ke^{\frac{-t}{RC}}}{C},$$

no instante $t = 0$ *a quantidade de carga no capacitor é nula, sendo assim* $q(0) = 0$*, e neste caso* $K = -\varepsilon C$*. Portanto podemos reescrever a equação acima como*

$$U(t) = \varepsilon(1 - e^{\frac{-t}{RC}}).$$

Substituindo os dados do problema

$$85,6 = 120(1 - e^{\frac{-t}{510}}),$$

agora isolando t*, temos* $t \approx 637,21s$*.*

Assim a velocidade média do cavalo será

$$v_m = \frac{4000}{637,21} = 6,278m/s.$$

$\square$.

[4] Este exercícios pode ser encontrado em [7]

2.2.3 *Equações exatas e fatores integrantes*

Para equações de primeira ordem, existem diversos métodos de integração aplicáveis a várias classes de problemas. As mais importantes são as equações lineares e as separáveis, que discutimos anteriormente. Vamos considerar aqui uma classe de equações conhecidas como equações exatas, para as quais também existe um método bem definido de solução. Lembre-se, no entanto, de que as equações de primeira ordem, que podem ser resolvidas por método de integração elementares são bastantes especiais; a maioria das equações de primeira ordem não podem ser resolvidas dessa maneira.

Se a função f na equação (1) depender da variável dependente y e da variável independente x, então esta é dita uma equação exata de modo geral, considere a equação diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0. \tag{14}$$

Suponha que possamos identificar uma função $\psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = M(x,y), \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = N(x,y), \tag{15}$$

e $\psi(x,y) = c$, onde $c \in \mathbb{R}$ define $y = \phi(x)$ implicitamente como uma função diferenciável de x. Então

$$M(x,y) + N(x,y)y' = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\psi[x,\phi(x)]$$

e a equação diferencial (14) fica

$$\frac{d}{dx}\psi[x,\phi(x)] = 0. \tag{16}$$

Nesse caso, a (14) é dita uma equação **exata**. Soluções da equação (14), ou da equivalente em (16), são dadas implicitamente por

$$\psi(x,y) = c, \tag{17}$$

onde c é uma constante arbitrária.

Em alguns casos é relativamente fácil ver que a equação diferencial é exata, e encontrar sua solução, pelo menos implicitamente, reconhecendo-se a função desejada ψ. Para equações mais complicadas, pode não ser possível fazer isto tão facilmente. Como podemos saber se determinada equação é exata? e se for, como podemos encontrar a função $\psi(x,y)$? O teorema a seguir responde a primeira pergunta, e sua demonstração fornece um modo de responder à segunda.

Teorema 2.9. *Suponha que as funções M, N, M_y e N_x, em que os índices denotam derivadas parciais, são contínuas em uma região retangular* [1]

$$R = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Então a equação

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

é uma equação diferencial exata em R se, e somente se,

$$M_y(x, y) = N_x(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{18}$$

em cada ponto de R. Ou seja, existe uma função ψ satisfazendo as equações

$$\psi_x(x, y) = M(x, y) \qquad e \qquad \psi_y(x, y) = N(x, y)$$

se, e somente se, M e N satisfazem a (18).

Demonstração: A demostração desse teorema tem duas partes. Primeiro, vamos mostrar que, se existir uma função ψ tal que as equações $\psi_x(x, y) = M(x, y)$, e $\psi_y(x, y) = N(x, y)$ são verdadeiras, então a equação (18) será satisfeita. Calculando M_y e N_x das equações $\psi_x(x, y)$ e $\psi_y(x, y)$, obtemos

$$M_y(x, y) = \psi_{xy}(x, y) \qquad N_x(x, y) = \psi_{yx}(x, y). \tag{19}$$

Como M_y e N_x são contínuas, segue que ψ_{xy} e ψ_{yx} também são. Isto garante a igualdade dessas funções, e a equação em (18) é válida.

Vamos mostrar agora que, se M e N satisfazem (18), então a equação em (14) é exata. A demostração envolve a construção de uma função ψ satisfazendo as equações

$$\psi_x(x, y) = M(x, y) \qquad \text{e} \qquad \psi_y(x, y) = N(x, y).$$

Começamos integrando a função $\psi_x(x, y)$ em relação a x deixando y constante. Obtemos

$$\psi(x, y) = Q(x, y) + g(y), \tag{20}$$

em que $Q(x, y)$ é qualquer função diferenciável tal que $\partial Q(x, y)/\partial x = M(x, y)$. Por exemplo, poderíamos escolher

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y) ds, \tag{21}$$

[1] Não é essencial que a região seja retangular, só que seja simplesmente conexa. Em duas dimensões, isto significa que não há "buracos"em seu interior. Assim, por exemplo, regiões circulares ou retangulares são simplesmente conexas, mas regiões anelares não.

em que x_0 é alguma constante especificada, com $\alpha < x_0 < \beta$. A função g na equação (20) é uma função diferenciável arbitrária de y, fazendo o papel da constante de integração. Agora, precisamos mostrar que sempre é possível escolher $g(y)$ de modo que $\psi_y(x, y) = N(x, y)$.

Derivando a equação (20) em relação a y e igualando o resultado a $N(x, y)$, obtemos

$$\psi_y(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) + g'(y) = N(x, y).$$

Então, resolvendo para $g'(y)$, temos

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y). \tag{22}$$

Para que possamos determinar $g(y)$ na equação acima, a expressão à direita do sinal de igualdade, apesar de sua aparência, tem que ser uma função só de y. Um modo de mostrar que isto é verdade é provando que sua derivada em relação a x é igual a zero. Assim, derivamos a expressão à direita em relação a x, obtendo

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y). \tag{23}$$

Trocando a ordem das derivadas na segunda parcela, temos

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Como $\partial Q(x, y)/\partial x = M(x, y)$, então

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y),$$

que é zero por causa da equação $M_y(x, y) = N_x(x, y)$.

Logo, apesar de sua forma aparente, a expressão à direita na equação (22) não depende de x. Assim, encontramos $g(y)$ integrando a esta em relação à y. Substituindo essa função na equação $\psi(x, y) = Q(x, y) + g(y)$, obtemos a função $\psi(x, y)$. Isto completa a demostração do teorema citado acima. $\square$.

É possível obter uma expressão explícita para $\psi(x, y)$ em termos de integrais, mas para resolver equações exatas específicas, em geral, é mais simples repetir o procedimento usado na demostração precedente. Ou seja, integrar $\psi_x = M$ em relação a x, incluindo uma função arbitrária $g(y)$ em vez de uma constante arbitrária, depois diferenciar o resultado em relação a y e igualar a N. Finalmente, usar esta última equação para encontrar $g(y)$.

Aplicação 2.5. *(Campos conservativos)*

Na teoria de campos de vetores do plano podemos encontrar uma interessante aplicação do estudo de equações exatas. Antes de definirmos formalmente o que seria um campo vetorial, daremos alguns exemplos simples destes:

1. Considere a água em movimento dentro de uma tubulação. Note que cada gota possui certa velocidade, caminha em certa direção e segue certo sentido. Se o fluxo de água nessa torneira permanece constante, então temos um campo vetorial cujos vetores estarão associados à velocidade do líquido na tubulação;

2. Considere um fio elétrico sendo perpassado por uma carga elétrica em toda extensão com certa velocidade, um certo sentido e fluxo constante pode ser associado a um campo vetorial semelhante ao da tubulação de água;

De modo geral, um campo vetorial é uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ da forma

$$F(x, y) = (M(x, y), N(x, y)).$$

Podemos obter novos campos, associados a um campo dado, que fornecem informações sobre o campo original, por exemplo o *campo gradiente.*

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

onde $\frac{\partial F}{\partial x}$ é a derivada parcial da função F em relação a x e $\frac{\partial F}{\partial y}$ é a derivada parcial da função F em relação a y.

Um campo de vetores é dito *potencial*, se existir uma função $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que ψ e F satisfazem $\nabla\psi = F$, isto é, F é exatamente o campo gradiente de ψ.

Estes tipos de campo são de muito interesse, pois temos importantes campos neste conjunto, por exemplo, o campo gravitacional!

Algumas características destes campos são obtidas a partir de sua definição:

- Dado um campo conservativo F, o trabalho realizado pela força potencial ψ para mover um objeto sobre uma curva só depende de seus pontos inicial e final (no caso do trabalho da força potencial gravitacional este fato é bem conhecido);

- Se um campo $F(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ é conservativo, então teremos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Sem essa igualdade, não teríamos a existência de uma função potencial.

Note que, esta última observação nos faz lembrar da condição necessária e suficiente para que a EDO de primeira ordem

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

seja exata, que foi enunciada no Teorema 2.9.

Equações Diferenciais exatas aparecem, no estudo de campos conservativos, quando procuramos por curvas no plano, onde a função potencial é constante sobre estas curvas. Mais especificamente, procuramos pontos (x, y) tais que $y = y(x)$ e $\psi(x, y(x)) = C$, onde

$C \in \mathbb{R}$. Estas curvas são chamadas de *curvas equipotenciais* e podem ser obtidas como solução de uma EDO exata.

Note que se um campo $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ é conservativo, com $F = \nabla\psi =$, onde ψ é uma função de classe C^2, isto é, suas derivadas parciais existem até segunda ordem e são contínuas, então

$$M(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial x} \text{ e } N(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Supondo que y é uma função de x, teremos que ψ pode ser derivada em relação a x e esta é dada por:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}.\frac{dy}{dx},$$

de onde segue que

$$\frac{d\psi}{dx} = M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx}.$$

Sobre as curvas equipotenciais $y(x)$ teremos que $\dfrac{d\psi}{dx} = 0$. Obtendo assim a EDO exata

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Exemplo 2.10. *Mostre que o campo de vetores $F(x,y) = (2(x+y), 2(x+y))$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, é um campo conservativo e apresente a equação das curvas sobre as quais a função potencial deste é constante.*

Solução:

Para verificar que este campo é conservativo é preciso verificar que

$$\frac{\partial(2x+2y)}{\partial y} = \frac{\partial(2x+2y)}{\partial x} = 2.$$

Agora apresentemos sua função potencial ψ. Para isso, note que queremos uma função ψ tal que $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2x+2y$ e $\frac{\partial\psi}{\partial y} = 2x+2y$. Procedendo como no processo descrito para solução de EDOs exatas,

Integremos $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ em relação a x,

$$\psi = x^2 + 2xy + C_y,$$

onde C_y é uma constante em relação a y. Agora derivamos $x^2 + 2xy + C_y$ em relação a y, e igualemos à $\frac{\partial\psi}{\partial y}$

$$2x + C_y' = 2x + 2y.$$

Por comparação temos

$$C_y' = 2y,$$

integrando ambos os lados em relação a y

$$C_y = y^2.$$

E assim obtemos $\psi(x, y)$ sendo

$$\psi(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Como queremos encontrar uma função $y(x)$ tal que $\psi(x, y) = C$, sobre esta curva, então y é dada por

$$x^2 + y^2 + 2xy = C.$$

2.3 EDOS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Vimos na seção anterior que existem métodos gerais para encontrar solução para alguns tipos de EDOs de primeira ordem, inclusive englobando algumas equações não lineares. Para equações de ordem maior que um já não existem tantos métodos gerais para encontrar soluções. Os métodos estudados englobam apenas alguns tipos de equações lineares (isso mesmo, não temos uma forma geral para resolução de EDOs lineares de ordem maior que um). Ainda assim, temos motivos para desenvolver um estudo sobre tais métodos: além de uma estrutura teórica rica, subjacentes a diversos métodos sistemáticos de resolução, o estudo destas equações é essencial para tópicos como mecânica dos fluidos, condução de calor, movimento ondulatório ou fenômenos eletromagnéticos.

Nesta seção iremos fazer um estudo sobre as soluções de EDOs lineares de segunda ordem e traremos algumas importantes características do conjunto solução destas.

Relembremos que uma EDO linear de segunda ordem tem a seguinte forma

$$P_0(t)\frac{d^2y}{dt^2} + P_1(t)\frac{dy}{dt} + P_2(t)y = G(t), \tag{24}$$

onde supomos que as funções P_0, P_1, P_2 e G são funções reais e contínuas definidas em algum intervalo $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, e que P_0 nunca se anula nesse intervalo. Então, dividindo a equação (24) por $P_0(t)$, obtemos

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p_1(t)\frac{dy}{dt} + p_2(t)y = g(t). \tag{25}$$

Como a (25) envolve a segunda derivada de y em relação a t, serão necessárias, a *grosso modo*, duas integrações para resolve-la. Cada uma dessas integrações vai gerar uma constante arbitrária. Podemos esperar, portanto, que, para obter uma única solução, será preciso especificar duas condições iniciais,

$$y(t_0) = y_0 \quad e \quad y'(t_0) = y_0^1. \tag{26}$$

em que t_0 pode ser qualquer ponto no intervalo I e y_0 e y_0^1 é qualquer conjunto dado de constantes reais.

A teoria fundamental para problemas de valor inicial para equações lineares de ordem n maior que um é similar a teoria para equações de primeira ordem. A seguir enunciaremos o Teorema de Existência e Unicidade para PVIs envolvendo EDOS lineares de ordem qualquer (uma demonstração deste pode ser vista em [16]).

Teorema 2.11. *(Existência e Unicidade)*

Se as funções $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e g em (25)são contínuas em um intervalo aberto I, então existe exatamente uma solução $y = \phi(t)$ da equação diferencial (25) que também satisfaz as condições iniciais (26), em que t_0 é qualquer ponto em I. Essa solução existe em todo o intervalo I.

Gostaríamos de chamar atenção para as três mensagens repassadas pelo Teorema 2.11:

1. O problema de valor inicial *tem* uma solução; *existe* uma solução.
2. O problema de valor inicial tem *apenas uma* solução; a solução é *única.*
3. A solução ϕ está definida *em todo o intervalo I*, em que os coeficientes são contínuos, e é, pelo menos, n vezes diferenciável aí.

2.3.1 *Equações homogêneas*

Uma equação linear de ordem 2 é dita **homogênea** se a função $g(t)$ em (25), ou $G(t)$ em (24), for igual a zero para todo t. Caso contrário, a equação é dita **não homogênea**. Em consequência, a função $g(t)$, ou $G(t)$, é chamada, muitas vezes, de termo não homogêneo. Vamos começar nossa discussão com equações homogêneas, que escreveremos na forma

$$y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = 0. \tag{27}$$

Se as funções y_1 e y_2 são soluções da (27), segue, por cálculo direto que a combinação linear

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \tag{28}$$

onde c_1,e c_2 são constantes arbitrárias, também é solução da equação (27). É natural, então, perguntar se as soluções podem ser expressas como uma combinação linear de y_1 e y_2. Isso será verdade, se for possível escolher as constantes c_1 e c_2 de modo que a combinação linear (28) satisfaça as condições iniciais. Ou seja, para qualquer escolha do ponto t_0 em I e para qualquer escolha de y_0 e y_0^1, precisamos ser capazes de determinar c_1 e c_2 de modo que as equações

$$c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = y_0$$

$$c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = y_0^1$$

sejam satisfeitas. As equações acima podem ser resolvidas de maneira única para as constantes c_1 e c_2, desde que o determinante da matriz dos coeficientes não seja nulo. Por outro lado, se o determinante da matriz dos coeficientes for nulo, então sempre é possível escolher valores de y_0 e y_0^1 de modo que as equações citadas não tenham soluções. Portanto, uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução para essas equações para valores arbitrários de y_0 e y_0^1 é que o determinante **wronskiano**.

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

não se anule em $t = t_0$. Como t_0 pode ser qualquer ponto do intervalo I, é necessário e suficiente que $W(y_1, y_2)$ seja diferente de zero em todos os pontos do intervalo. Pode-se mostrar que, se y_1 e y_2 são soluções da (27), então $W(y_1, y_2)$ ou é zero para todo t no intervalo I, ou nunca se anula aí, portanto temos o seguinte teorema:

Teorema 2.12. *Se as funções p_1 e p_2 forem contínuas no intervalo aberto I, se as funções y_1 e y_2 forem soluções da equação (27), e se $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ para pelo menos um ponto t em I, então toda solução da (27) pode ser expressa como uma combinação linear das soluções y_1 e y_2.*

Um conjunto de soluções y_1 e y_2 da equação (27) cujo wronkiano não se anula é chamado de **conjunto fundamental de soluções**. Como todas as soluções da equação (27) são da forma $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, usamos o termo **solução geral** para nos referir a uma combinação linear arbitrária de qualquer conjunto fundamental de soluções da equação de (27).

Dependência e independência lineares. Vamos explorar agora a relação entre conjuntos fundamentais de soluções e conceito de independência linear, uma ideia central no estudo de álgebra linear. As funções f_1, f_2 são ditas **linearmente dependente** em um intervalo I se existir um conjunto de constantes k_1, k_2, nem todas nulas, tais que

$$k_1f_1(t) + k_2f_2(t) = 0, \tag{29}$$

para todo t em I. As funções f_1, f_2 são ditas **linearmente independente** em I se não forem linearmente dependentes aí, isto é, $k_1f_1(t) + k_2f_2(t) \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$.

O conceito de independência linear fornece uma caracterização alternativa do conjunto fundamental de soluções da equação homogênea (27). Suponha que as funções y_1 e y_2 são soluções definidas em um intervalo I, e considere a equação

$$k_1y_1(t) + k_2y_2(t) = 0. \tag{30}$$

Diferenciando a equação acima, obtemos uma equação adicional

$$k_1y_1'(t) + k_2y_2'(t) = 0. \tag{31}$$

O sistema constituindo por (30) e (31) é um sistema de 2 equações algébricas lineares para as 2 incógnitas k_1 e k_n. O determinante da matriz dos coeficientes desse sistema é o wronskiano $W(y_1, y_2)(t)$ de y_1 e y_2. Isso nos leva ao teorema a seguir.

Teorema 2.13. *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação*

$$y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = 0,$$

*em um intervalo I, então $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são linearmente independente em I. Reciprocamente,se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são as funções **linearmente independente** em I, então elas formam um conjunto fundamental de soluções em I.*

Na próxima subseção apresentaremos um método para encontrar um conjunto fundamental de soluções para um EDO linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes.

2.3.2 *Equações homogêneas com coeficientes constantes*

Considere a Equação Diferencial homogênea de segunda ordem

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0, \tag{32}$$

onde a_0, a_1 e a_2 são constantes reais e $a_0 \neq 0$. É natural esperar que $y = e^{rt}$ seja solução da (32) para valores apropriados de r. De fato,

$$e^{rt}(a_0r^{(2)} + a_1r + a_2) = e^{rt}Z(r), \tag{33}$$

para todo r, em que

$$Z(r) = a_0r^{(2)} + a_1r + a_2. \tag{34}$$

Para os valores de r tais que $Z(r) = 0$, segue que $y = e^{rt}$ é uma solução da (32). O polinômio $Z(r)$ é chamado de **polinômio característico**, e a equação $Z(r) = 0$ é a **equação característica** da (32). Como $a_0 \neq 0$, sabemos que $Z(r)$ é um polinômio de grau 2, e pelo Teorema Fundamental da Álgebra[1], tem 2 raízes, digamos r_1 e r_2, podendo as mesmas ser iguais. Podemos, portanto, escrever a equação característica na forma

$$Z(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2) = 0. \tag{35}$$

Temos três casos destacáveis para análise das soluções desta equação:

[1] O Teorema Fundamental da Álgebra afirma que qualquer polinômio com coeficientes complexos de uma variável e de grau possui alguma raiz complexa.

2.3.3 *Raízes reais e distintas.*

Se as raízes da equação característica em (35) são reais e distintas entre si, então temos 2 soluções distintas $e^{r_1 t}$ e $e^{r_2 t}$ da equação 32. É possível verificar que estas funções são linearmente independentes, e neste caso a solução geral de(32) será

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \tag{36}$$

Mostraremos a independência linear destas $e^{r_1 t}$ e $e^{r_2 t}$. Note que

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2)t}(r_2 - r_1) \neq 0$$

para todo t pertencente aos reais, de onde segue o resultado.

Exemplo 2.14. *Considere a equação*

$$y'' + 5y' + 6y = 0,$$

sua equação característica associada é

$$r^2 + 5r + 6 = 0,$$

suas raízes são $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$. Das quais obtemos as soluções

$$y_1 = e^{-2t} \qquad e \qquad y_2 = e^{-3t}.$$

Para que essas soluções sejam linearmente independente e assim formem um conjunto fundamental de soluções, o $W(y_1, y_2) \neq 0$.

Temos

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix}.$$

como $W(y_1, y_2) = -e^{-5t}$, temos que a solução

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}.$$

é uma solução geral.

□

2.3.4 *Raízes complexas.*

Se a equação característica em (35) tiver raízes complexas, as mesmas ocorrem em pares conjugados $\lambda \pm i\mu$. Supondo que $y_1 = e^{(\lambda+i\mu)t}$ e $y_2 = e^{(\lambda-i\mu)t}$ são soluções da equação (32), e usando a fórmula de Euler $\pm e^{i\mu t} = \cos(\mu t) \pm i\sin(\mu t)$, temos

$$y_1 = e^{\lambda t}(\cos\mu t + i\sin\mu t) \qquad \text{e} \qquad y_2 = e^{\lambda t}(\cos\mu t - i\sin\mu t).$$

Usando uma combinação linear destas, obtemos as seguintes soluções reais

$$u_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\lambda t}\cos\mu t \quad e \qquad u_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\lambda t}\sin\mu t. \tag{37}$$

Dessa forma, mesmo que algumas das raízes da equação característica sejam complexas, ainda é possível expressar a solução geral da equação (32) como combinação linear de soluções reais.

Exemplo 2.15. *Considere a equação*

$$y'' + 2y' + 2y = 0,$$

sua equação característica associada é

$$r^2 + 2r + 2 = 0,$$

suas raízes são $r_1 = -1 + i$ e $r_2 = -1 - i$. Das quais obtemos as soluções

$$y_1 = e^{-t}(\cos t + i\sin t) \qquad\qquad e \qquad\qquad y_2 = e^{-t}(\cos t - i\sin t),$$

que por combinação linear obtemos as seguintes soluções reais

$$y_1 = e^{-t}\cos t \qquad\qquad e \qquad\qquad y_2 = e^{-t}\sin t,$$

Para que essas soluções sejam linearmente independente e assim formem um conjunto fundamental de soluções, o $W(y_1, y_2) \neq 0$.

Temos

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{-t}(\cos t + \sin t) & -e^{-t}(-\cos t + \sin t) \end{vmatrix}.$$

como $W(y_1, y_2) = e^{-2t}$, temos que a solução

$$y = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\sin t.$$

é uma solução geral.

$\square$

2.3.5 *Raízes repetidas.*

Se as raízes forem repetidas, teremos que as soluções $e^{r_1 t}$ e $e^{r_2 t}$ não formam um **conjunto fundamental de soluções** para (32), pois não serão linearmente independentes. É possível verificar que se r_1 for uma raiz que se repete, então $u_1 = te^{r_1 t}$ também é solução para a equação (32), e além disso u_1 e $e^{r_1 t}$ são linearmente independentes.

Verifiquemos a veracidade dessa afirmação

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{38}$$

onde a, b e c são contantes reais, com $a \neq 0$. A equação característica associada a equação (38) é dada por

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Sejam r_1 e r_2 raízes desta equação. Suponha que $r_1 = r_2$ (isto é, $b^2 - 4ac = 0$), e assim temos que

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

Logo, até o momento, obtemos apenas uma solução de (38)

$$y_1(t) = e^{\frac{-bt}{2a}}.$$

Precisamos de uma outra solução que não seja combinação linear da primeira, para que assim tenhamos um conjunto fundamental de soluções. Para encontrar uma segunda solução, supomos que esta tenha a seguinte forma

$$y = v(t)y_1(t) = v(t)e^{\frac{-bt}{2a}}$$

e substituímos na equação diferencial, para determinar $v(t)$. Temos

$$y' = v'(t)e^{\frac{-bt}{2a}} - \frac{b}{2a}v(t)e^{\frac{-bt}{2a}}$$

e

$$y'' = v''(t)e^{\frac{-bt}{2a}} - \frac{b}{a}v'(t)e^{\frac{-bt}{2a}} + \frac{b^2}{4a^2}v(t)e^{\frac{-bt}{2a}}$$

agora, substituindo na equação

$$\left\{a[v''(t) - \frac{b}{a}v'(t) + \frac{b^2}{4a^2}v(t)] + b[v'(t) - e^{-\frac{b}{2a}}v(t)] + cv(t)\right\}e^{\frac{-bt}{2a}} = 0.$$

Cancelando o fator $e^{\frac{-bt}{2a}}$, que não se anula e arrumando os termos restantes, encontramos

$$av''(t) + (-b+b)v'(t) + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)v(t) = 0.$$

A parcela envolvendo $v'(t)$ é obviamente nula. Além disso, o coeficiente de $v(t)$ é $c - (b^2/4a)$, que também é zero, pois $(b^2 - 4ac = 0)$ na situação considerada. Assim a equação acima se reduz a

$$v''(t) = 0,$$

logo,

$$v(t) = c_1 + c_2 t.$$

Portanto, a solução $y = v(t)e^{\frac{-bt}{2a}}$ é dada por

$$y = c_1 e^{\frac{-bt}{2a}} + c_2 t e^{\frac{-bt}{2a}}.$$

Então, y é uma combinação linear das duas soluções

$$y_1(t) = e^{\frac{-bt}{2a}}, \qquad y_2(t) = te^{\frac{-bt}{2a}}.$$

Podemos verificar que o wronskiano $W(y_1, y_2)$ nunca se anula, e as soluções acima formam um conjunto fundamental de soluções para (38).

Exemplo 2.16. *Considere a equação*

$$4y'' + 12y' + 9y = 0,$$

sua equação característica associada é

$$4r^2 + 12r + 9 = 0,$$

com uma única raiz $r = \frac{-3}{2}$ *. Da qual obtemos as soluções*

$$y_1 = e^{\frac{-3}{2}t} \qquad \text{e} \qquad y_2 = te^{\frac{-3}{2}t}.$$

Para que essas soluções sejam linearmente independente e assim formem um conjunto fundamental de soluções, o $W(y_1, y_2) \neq 0$.

Temos

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{\frac{-3}{2}t} & te^{\frac{-3}{2}t} \\ \frac{-3}{2}e^{\frac{-3}{2}t} & e^{\frac{-3}{2}t}[1 - \frac{3}{2}t] \end{vmatrix}.$$

como $W(y_1, y_2) = e^{-2t}$, *temos que a solução*

$$y = c_1 e^{\frac{-3}{2}t} + c_2 t e^{\frac{-3}{2}t}.$$

é uma solução geral.

$\square$

2.3.6 *Equações não homogêneas*

Uma equação linear de segunda ordem é dita **não homogênea** se a função $g(t)$ na (25), ou $G(t)$ na (24), for diferente de zero para todo t. Em consequência, a função $g(t)$, ou $G(t)$, é chamada, muitas vezes, de terno não homogêneo. Vamos começar nossa discussão para encontrar soluções de equações não homogêneas, que escreveremos na forma

$$y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = g(t), \tag{39}$$

com $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluções da equação acima. Para isso enunciaremos o teorema a seguir.

Teorema 2.17. *Princípio da superposição*

Sejam y_{p_1} e y_{p_2}, soluções particulares para a Equação Diferencial linear de segunda ordem (39) em um intervalo I, correspondendo a funções distintas g_1 e g_2. Isto é, suponhamos que y_{p_i} seja uma solução particular para a Equação Diferencial correspondente

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = g_i(t).$$

em que $i = 1, 2$. Então

$$y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t)$$

é uma solução particular para

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = g_1(t) + g_2(t).$$

Toda equação não homogênea tem uma equação homogênea associada do tipo

$$y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = 0, \tag{40}$$

a qual conseguimos encontrar a solução $y_h(t)$, com os métodos discutidos anteriormente.

Dessa forma, podemos escrever uma estrutura de solução geral para equação não homogênea (39) na forma

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t), \tag{41}$$

onde y_h é a solução geral da equação homogênea associada e y_p é uma solução particular da equação não-homogênea.

A seguir detalharemos dois métodos usados para encontrar soluções particulares para uma equação não homogênea: método da variação de parâmetros e método dos coeficientes indeterminados.

2.3.7 *O método de variação dos parâmetros*

Para usar o método de variação dos parâmetros é necessário, primeiramente, resolver a Equação Diferencial homogênea associada. Isso, em geral, pode ser difícil, a menos que os coeficientes sejam constantes. No entanto, o método de variação dos parâmetros é mais geral do que o método de coeficientes indeterminados (a ser detalhado no próximo tópico), pois leva a uma expressão para a solução particular qualquer que seja a função contínua g, enquanto o método dos coeficientes indeterminados fica restrito, a uma classe limitada de funções g.

Iremos detalhar o método para uma EDO linear de segunda ordem arbitrária

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{42}$$

em que p, q e g são funções contínuas dadas. Como ponto de partida, vamos supor que conhecemos a solução geral

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \tag{43}$$

da equação homogênea associada

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{44}$$

A ideia crucial, é substituir as constantes c_1 e c_2 na (43) por funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$, respectivamente; isso nos dá

$$y = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t). \tag{45}$$

Podemos, então, tentar determinar $u_1(t)$ e $u_2(t)$, de modo que a expressão na (45) seja solução da equação homogênea (42). Derivando a (45), obtemos

$$y' = u_1'(t)y_1(t) + u_1(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2(t) + u_2(t)y_2'(t). \tag{46}$$

Agora, considere a seguinte hipótese em relação as somas das parcelas envolvendo $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$ na (46):

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0. \tag{47}$$

Então, da (46), temos

$$y' = u_1(t)y_1'(t) + u_2(t)y_2'(t). \tag{48}$$

Derivando novamente, obtemos

$$y'' = u_1'(t)y_1'(t) + u_1(t)y_1''(t) + u_2'(t)y_2'(t) + u_2(t)y_2''(t). \tag{49}$$

Agora vamos substituir y, y' e y'' na (42) pelas expressões nas (45), 46 e 49, respectivamente. Após arrumar os termos na equação resultante, vemos que

$$\begin{aligned} u_1(t)[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)] \\ +u_2(t)[y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)] \\ +u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t). \end{aligned}$$

Cada uma das expressões entre colchetes na equação acima é nula, pois ambas as funções y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea (44). Portanto podemos reduzi-la a

$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t). \tag{50}$$

As equações (47) e (50) formam um sistema de duas equações lineares algébricas para as derivadas $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$ das funções desconhecidas.

Resolvendo o sistema formado pelas equações (47) e (50), obtemos

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} \qquad e \qquad u_2'(t) = -\frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}, \tag{51}$$

em que $W(y_1, y_2)$ é o wronskiano de y_1 e y_2. Note que a divisão por W é permitida, já que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções e, portanto, seu wronskiano não se anula. Integrando as (51), encontramos as funções desejadas $u_1(t)$ e $u_2(t)$, a saber,

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}dt + c_1, \qquad u_2(t) = -\int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}dt + c_2, \tag{52}$$

Se as integrais nas equações (52) puderem ser calculadas em termos de funções elementares, substituímos os resultados na (45), obtendo assim a solução geral da (42). De maneira geral, a solução sempre pode ser expressa como integrais. De maneira geral, a solução sempre pode ser expressa como integrais, conforme enunciado no teorema a seguir.

Teorema 2.18. *Se as funções p,q e g forem contínuas em um intervalo aberto I e se as funções y_1 e y_2 formarem um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada à equação não homogênea*

$$y" + p(t)y' + q(t)y = g(t),$$

então uma solução particular é

$$y_p(t) = -y_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)}ds + y_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)}ds, \tag{53}$$

em que t_0 é qualquer ponto escolhido convenientemente em I. A solução geral é

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + y_p(t).$$

Uma grande vantagem do método de variação dos parâmetros é que a (53) fornece uma expressão para a solução particular $y_p(t)$ em termos de uma função não homogênea arbitrária $g(t)$. Essa expressão é um bom ponto de partida se você quiser investigar o efeito da variação no termo não homogêneo, por exemplo, se quisermos analisar a resposta de um sistema sujeito a um número de forças externas diferentes.

Vejamos um exemplo de aplicação desse método,

Exemplo 2.19. *Encontre a solução geral da equação*

$$y'' + y = \tan(t),$$

cujo a equação homogênea associada $y'' + y = 0$, tem como solução geral

$$y_h(t) = c_1 \cos t + c_2(t) \sin t.$$

A ideia básica do método de variação dos parâmetros é substituir as constantes c_1 e c_2 por funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$, de modo que

$$y_p(t) = u_1(t) \cos t + u_2(t) \sin t,$$

seja solução particular da equação estudada.

Para determinar $u_1(t)$ e $u_2(t)$ basta utilizar as expressões obtidas em (52)

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt \qquad u_2(t) = -\int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt,$$

como $W(y_1, y_2) = 1$, temos

$$u_1(t) = -\int \sin t \tan(t) dt \qquad u_2(t) = -\int \cos t \tan(t) dt,$$

onde

$$u_1(t) = -\sin t + \ln|\tan t + \sec t| \qquad u_2(t) = cost.$$

Logo a solução particular $y_p(t)$ da equação é dada por

$$y_p(t) = (-\sin t + \ln|\tan t + \sec t|) \cos t + cost \sin t,$$

onde, segue

$$y_p(t) = \ln|\tan t + \sec t| \cos t.$$

Portanto a solução geral é da forma

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2(t) \sin t + \ln|\tan t + \sec t| \cos t.$$

□

2.3.8 *O método dos coeficientes indeterminados*

Uma solução particular $y_p(t)$ da equação linear não homogênea de segunda ordem em (39) pode ser obtida pelo método dos coeficientes indeterminados, desde que $g(t)$ tenha uma forma apropriada que será detalhada a seguir.

Para utilizarmos este método, primeiro precisamos analisar o termo não homogêneo e assim supor uma hipótese inicial sobre a forma da solução particular $y_p(t)$. A suposição feita nos dá uma ideia sobre a solução, mas não nos garante os valores e nem a existência de seus coeficientes, para isso substituímos a hipótese feita na (39), e em caso de êxito encontraremos os coeficientes, e portanto, poderemos utilizar a expressão encontrada como solução particular da equação (39). Caso os coeficientes não possam ser encontrados, então a solução procurada não é da forma que supomos, assim será preciso supor uma nova forma para a solução $y_p(t)$, e proceder novamente com as fases do método.

Este método é muito prático, porém só é usado em problemas cujo a equação homogênea tem coeficientes constantes, pois as hipóteses são feitas apenas quando o termo não homogêneo $g(t)$ atende a uma classe relativamente pequena de funções. Em geral aplicaremos este método quando $g(t)$ é uma soma de polinômios, exponenciais, senos e cossenos, ou produtos de tais funções, esperamos que seja possível encontrar $y_p(t)$ através de uma escolha conveniente de combinações de polinômio, exponenciais, etc., multiplicadas por um número de constantes indeterminadas.

Para estender nossos argumentos a respeito da aplicabilidade do método, iremos expor as hipóteses iniciais em três casos gerais onde o termo não homogêneo $g(t)$ assume formas distintas.

Se $g(t)$ for um polinômio de grau n da forma $P_n(t)$, podemos supor uma hipótese inicial para a solução particular sendo

$$y_p(t) = t^s(a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0),$$

onde s é o menor expoente para que nenhuma das parcelas de y_p seja solução da equação homogênea associada. Assim poderemos garantir uma solução particular da equação não homogênea se conseguirmos determinar os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Se $g(t)$ for uma função da forma $P_n(t)e^{\alpha t}$, podemos supor uma hipótese inicial para a solução particular sendo

$$y_p(t) = t^s(a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0)e^{\alpha t},$$

onde s é o menor expoente para que nenhuma das parcelas de y_p seja solução da equação homogênea associada. Assim poderemos garantir uma solução particular da equação não homogênea se conseguirmos determinar os coeficientes do polinômio $P_n(t)$.

Se $g(t)$ for da forma $P_n(t)e^{\beta t}\cos(\alpha t)$ ou $Q_n(t)e^{\beta t}\sin(\alpha t)$, onde $P_n(t)$ e $Q_n(t)$ são polinômios de grau n, podemos supor uma hipótese inicial para a solução particular sendo

$$y_p(t) = t^s[(a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0)e^{\beta t}\cos(\alpha t)$$
$$+(b_nt^n + b_{n-1}t^{n-1} + \cdots + b_1t + b_0)e^{\beta t}\sin(\alpha t)],$$

onde s é o menor expoente para que nenhuma das parcelas de y_p seja solução da equação homogênea associada. Assim poderemos garantir uma solução particular da equação não homogênea se conseguirmos determinar os coeficientes dos polinômios $P_n(t)$ e $Q_n(t)$.

Vejamos exemplos onde encontraremos a solução particular de duas EDOs lineares não homogêneas.

Exemplo 2.20. *Encontre a família de soluções para a equação*

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}.$$

Solução:

Podemos encontrar a solução da equação homogênea associada fazendo $y'' - 3y' - 4y = 0$, *onde obtemos a equação característica* $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ *da qual obtemos as soluções* $\lambda_1 = 4$ *e* $\lambda_2 = -1$. *E assim a solução da homogênea associada é* $y_h(t) = C_1e^{4t} + C_2e^{-t}$. *Agora iremos supor que a solução particular é do tipo*

$$y_p(t) = k_1e^{2t},$$

em que o coeficiente k_1 *ainda precisa ser determinado. Para encontrar* k_1, *vamos calcular*

$$y_p'(t) = 2k_1e^{2t}, \qquad y"_p(t) = 4k_1e^{2t},$$

e substituir y, y' *e* y'' *na equação considerada por* y_p, y_p' *e* y_p'', *respectivamente. Obtemos*

$$(4k_1 - 6k_1 - 4k_1)e^{2t} = 3e^{2t}.$$

Portanto, $-6k_1e^{2t}$ *tem que ser igual a* $3e^{2t}$; *logo,* $k_1 = -\dfrac{1}{2}$. *Assim, uma solução particular é*

$$y_p(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}.$$

□

Exemplo 2.21. *Encontre a família de soluções para equação*

$$y'' + 4y = 3\sin 2t.$$

Solução:

Podemos encontrar a solução da equação homogênea associada fazendo $y'' + 4y = 0$, *onde obtemos a equação característica* $\lambda^2 + 4 = 0$, *da qual obtemos as soluções* $\lambda_1 = 2i$ *e* $\lambda_2 = -2i$. *E assim a solução da homogênea associada é* $y_h(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$. *Agora iremos supor que a solução particular é do tipo*

$$y_p(t) = k_1 t \cos(2t) + k_2 t \sin(2t),$$

em que k_1 *e* k_2 *são constantes a serem determinadas. Observe que o* t *aparece com potência* 1 *para que nenhuma parcela seja solução da homogênea associada. Logo*

$$y"_p(t) = -4k_1 sin(2t) - 4k_1 tcos(2t) 4k_2 tsin(2t)$$

Substituindo na equação considerada

$$-4k_1 sin(2t) - 4k_1 tcos(2t) 4k_2 tsin(2t) + 4[tk_1 \cos(2t) + tk_2 \sin(2t)] = 3 \sin 2t.$$

Para satisfazer a equação precisamos determinar k_1 *e* k_2*, de maneira que as equações a seguir sejam satisfeitas*

$$-4k_1 = 3 \quad e \quad k_2 = 0.$$

Resolvendo as equações para k_1 *e* k_2*, obtemos* $k_1 = \dfrac{-3}{4}$ *e* $k_2 = 0$*, de modo que a solução particular seja*

$$y_p(t) = \frac{-3}{4} t \cos(2t).$$

□

Aplicação 2.6. *Circuito RCL (Fechado)*[10]

Um circuito que contenha um resistor, capacitor, indutor e uma fonte que possa fornecer força eletromotriz (ε), é denominado circuito RCL. Sendo esse circuito um circuito fechado, podemos calcular as tensões em cada terminal, onde (U_1) é a tensão no resistor,(U_2) é a tensão no capacitor e (U_3) é a tensão no indutor.(Ver Figura 4)

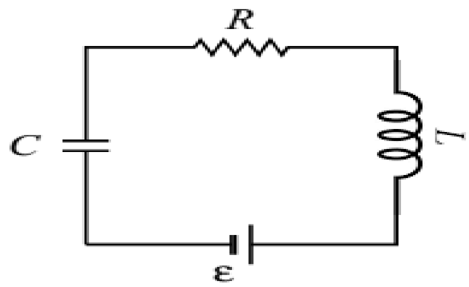


Figura 4: esquema de um circuito RCL (Fechado)

Assim podemos utilizar a lei das malhas de Kirchoff, a qual fala que soma das diferenças de potencial para qualquer circuito fechado é nula, de uma maneira mais prática a soma das intensidades das tensões tanto positivas quanto negativas, ao longo de todo circuito é zero, isto é,

$$U_1 + U_2 + U_3 = 0.$$

Como vimos na Aplicação 2.4, quando modelamos um *circuito RC*, a tensão em um resistor e em um capacitor são respectivamente

$$U_1 = iR \quad e \quad U_2 = \frac{q}{C},$$

onde i é a corrente do circuito, R a resistência no resistor, q é a quantidade de carga acumulada no capacitor e C é sua capacitância.

Já a tensão no indutor pode ser encontrada com

$$U_3 = L\frac{\Delta i}{\Delta t},$$

onde L é a indutância do indutor.

Substituindo todas as informações acima em $U_1 + U_2 + U_3 = 0$, temos

$$L\frac{\Delta i}{\Delta t} + Ri + \frac{q}{C} = 0.$$

Da definição de corrente elétrica (i) usada na Aplicação 2.4, podemos tirar que

[10] As informações que auxiliaram na modelagem desta aplicação podem ser encontradas em [7]

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}.$$

Reescrevendo a equação temos

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0.$$

Dividindo toda equação por L

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{CL}q = 0.$$

E assim obtemos uma equação diferencial linear de segunda ordem do tipo $y" + ay' + by = 0$, homogênea com coeficientes constantes, cujo método de solução foi discutido nesta seção.

Assim,

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{CL}q = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q" + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{CL}q = 0,$$

das equações acima obtemos a equação característica

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL} = 0.$$

A solução da equação acima é

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}},$$

chamando $\dfrac{R}{2L} = A$ e $\dfrac{1}{LC} = B$, temos

$$\lambda_{1,2} = -A \pm \sqrt{A^2 - B}.$$

Como estudado podemos avaliar as soluções em três casos:

- 1° caso: $A^2 - B > 0$ (Neste caso teremos duas raízes distintas);

- 2° caso: $A^2 - B = 0$ (Neste caso teremos duas raízes iguais);

- 3° caso: $A^2 - B < 0$ (Neste caso teremos duas raízes complexas).

Para o 1° caso: $A^2 - B > 0$, onde teremos duas raízes distintas

$$\lambda_1 = -A + \sqrt{A^2 - B} \qquad \text{e} \qquad \lambda_1 = -A - \sqrt{A^2 - B}.$$

As soluções podem ser explicitadas como

$$q_1 = e^{(-A+\sqrt{A^2-B})t} \qquad \text{e} \qquad q_2 = e^{(-A-\sqrt{A^2-B})t},$$

como $W(q_1, q_2) \neq 0$, temos que q_1 e q_2 formam um conjunto fundamental de soluções. Portanto a solução geral da equação é

$$q = c_1e^{(-A+\sqrt{A^2-B})t} + c_2e^{(-A-\sqrt{A^2-B})t}.$$

Para o 2° caso: $A^2 - B = 0$, onde teremos duas raízes iguais

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} = -A.$$

Assim teremos uma única solução

$$q_1 = e^{-At}$$

para obtermos um conjunto fundamental de soluções, precisamos de uma segunda solução, que iremos supor da forma $y = v(t)y_1$.

Como já discutimos $v(t) = c_1 + c_2 t$, e assim temos

$$q_1 = c_1 e^{-At} \quad \text{e} \quad q_2 = c_2 t e^{-At},$$

como $W(q_1, q_2) \neq 0$, temos que q_1 e q_2 formam um conjunto fundamental de soluções. Portanto a solução geral da equação é

$$q = c_1 e^{-At} + c_2 t e^{-At}.$$

Para o 3° caso: $A^2 - B < 0$, onde teremos duas raízes complexas

$$\lambda_1 = \alpha + iw \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \alpha - iw.$$

com $\alpha = -\frac{R}{2L} = -A$ e $w = \pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = \pm\sqrt{A^2 - B}$, ambos reais.

Portanto as soluções da equação são

$$q_1 = c_1 e^{(\alpha+iw)t} \quad \text{e} \quad q_2 = c_2 e^{(\alpha-iw)t},$$

e assim a partir de q_1 e q_2, obtemos as soluções reais

$$q_1 = c_1 e^{\alpha t} \cos wt \quad \text{e} \quad q_2 = c_2 e^{\alpha t} \sin wt,$$

como $W(q_1, q_2) \neq 0$, temos que q_1 e q_2 formam um conjunto fundamental de soluções. Portanto a solução geral da equação é

$$q = c_1 e^{\alpha} \cos wt + c_2 e^{\alpha} \sin wt.$$

$$q = c_1 e^{-At} \cos(\sqrt{A^2 - B})t + c_2 e^{-At} \sin(\sqrt{A^2 - B})t.$$

Aplicação 2.7. *Circuito RCL (Aberto)*[11]

Um circuito que contenha um resistor, capacitor, indutor e uma fonte que possa fornecer força eletromotriz (ε), é denominado circuito RCL. Sendo esse circuito um circuito aberto, podemos calcular as tensões em cada terminal, onde (U_1) é a tensão no resistor,(U_2) é a tensão no capacitor e (U_3) é a tensão no indutor.(Ver Figura 5)

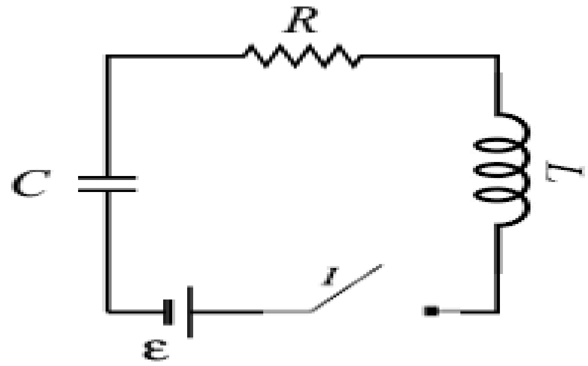


Figura 5: esquema de um circuito RCL (Aberto)

Assim podemos utilizar a lei das malhas de Kirchoff, a qual fala que a soma das diferenças de potencial para qualquer circuito aberto é igual a tensão fornecida pela fonte, de uma maneira mais prática a soma das intensidades das tensões tanto positivas quanto negativas, ao longo de todo circuito é igual a f.e.m. do sistema, isto é,

$$U_1 + U_2 + U_3 = \varepsilon,$$

como já foi discutido, a equação acima pode ser reescrita, como

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{CL}q = \frac{\varepsilon}{L}, \tag{54}$$

assim obtemos uma equação diferencial linear de segunda ordem do tipo $ay" + by' + cy = g(t)$, não homogênea com coeficientes constantes, cujo método de solução foi discutido nesta seção.

Podemos determinar a solução da equação encontrada sendo

$$q = q_h + q_p,$$

com q_h sendo a solução da equação homogênea associada e q_p a solução particular.

A solução q_h da homogênea associada $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{CL}q = 0$, é na verdade a solução para um circuito fechado, solução está discutida na aplicação anterior, sendo assim já a conhecemos, então agora precisamos definir a solução particular para equação (54).

Assim, reescrevendo a (54) temos

[11]As informações que auxiliaram na modelagem desta aplicação podem ser encontradas em [7]

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{CL}q = \frac{\varepsilon}{L}.$$

Para encontrar a solução particular, iremos usar o método dos coeficientes indeterminados. Como o termo não homogêneo é uma função polinomial, vamos supor que uma solução particular para a (54) é do tipo

$$Q = \frac{\varepsilon}{L}t^0,$$

derivando, temos

$$Q' = 0 \qquad \text{e} \qquad Q'' = 0.$$

Agora substituindo na Eq.54

$$0 + 0 + \frac{1}{CL}q = \frac{\varepsilon}{L} \qquad \Rightarrow \qquad q_p = \varepsilon C.$$

Portanto a solução geral para a Eq.54 é dada por

$$q = q_h + \varepsilon C.$$

Assim temos três possibilidades para a solução geral da (54),

$$q = c_1 e^{(-A+\sqrt{A^2-B})t} + c_2 e^{(-A-\sqrt{A^2-B})t} + \varepsilon C;$$

$$q = c_1 e^{-At} + c_2 t e^{-At} + \varepsilon C;$$

$$q = e^{-At}\left[c_1 \cos(\sqrt{A^2-B})t + c_2 \sin(\sqrt{A^2-B})t\right] + \varepsilon C.$$

3 PROPOSTA DIDÁTICA

Tentar estreitar os laços entre algumas matérias, como História, Física e Matemática, por exemplo, pode ajudar a desconstruir uma impressão inequívoca que muitos alunos tem de que a matemática se desenvolve por mágica ou lapsos de genialidade. Mostrar que para cada conceito, fórmula ou teoria desenvolvida, existiu um contexto histórico e interesses relacionados com a época, é essencial para aguçar o interesse e a curiosidade de muitos alunos.

De acordo com nossas pesquisas expostas no Capítulo 1, o estudo do movimento foi uma das grandes motivações que levaram a criação do Cálculo Diferencial e Integral. Explicar o movimento dos corpos a partir de suas trajetórias necessitou de uma nova teoria matemática que, além deste, foi capaz de modelar muitos outros fenômenos da natureza, através das Equações Diferenciais.

Neste capítulo traremos uma sugestão de abordagem do estudo de funções por meio de taxas de variação (ideias intuitivas sobre EDOs), trazendo como aplicação o estudo do movimento. Este é um conteúdo que faz parte do currículo nacional do ensino médio, mas que em geral é visto na disciplina Física. Nosso objetivo é propor uma atividade integradora de conhecimento para tratar de um tema que pode atender interesses de várias disciplinas, mas que, em geral, não é usado com toda sua potencialidade.

A introdução das ideias do cálculo para os alunos do Ensino Médio, não é uma ideia nova. Existem vários trabalhos nesta direção, podemos citar em [11],[12] e [13] . Estes trabalhos confirmam que estamos no caminho certo ao partir para este tipo de abordagem em sala de aula. Nosso trabalho tem a intenção de somar a estes.

3.1 OBJETIVO

Nesta abordagem buscamos esclarecer qual a relação existente entre uma função e sua taxa de variação (apenas para funções constantes, afins e quadráticas). Para isso definiremos taxas de variação e daremos a noção intuitiva de solução de uma Equação Diferencial Ordinária nestes casos em específico. Baseados no contexto histórico do surgimento do conceito de taxas de variação instantânea, iremos usar o estudo do movimento para aplicar os resultados apresentados. Para isso usamos como apoio [6] e [9].

3.2 CONTEÚDOS ENVOLVIDOS

Esta proposta tem por objetivo resgatar, integrar e aprofundar vários conteúdos e habilidades que fazem parte do Currículo Nacional do Ensino Médio, citamos: funções de primeiro e segundo grau, construção de gráficos, movimento retilíneo uniforme, movimento retilíneo uniforme variado, taxas de variação média e instantânea. O professor deve orientar a pesquisa desses conceitos, revisando-os de forma dinâmica, dando ênfase nos principais tópicos de cada conteúdo.

Sobre as habilidades, é essencial que o aluno saiba interpretar a realidade ao seu redor, para isso espera-se que ele também seja capaz de identificar e seguir o melhor caminho para a construção do seu conhecimento, por meio da apresentação dos tópicos a seguir:

1. Compreender o conceito de taxa variação;
2. Alcançar intuições relevantes a respeito de limites e derivadas;
3. Organizar e interpretar informações;
4. Construir, ler, analisar e interpretar gráficos de funções de primeiro e segundo grau;
5. Reconhecer, interpretar, bem como ser capaz de utilizar, os conceitos iniciais de Cálculo Diferencial;
6. Compreender e ser capaz de calcular, taxa de variação instantânea;
7. Identificar, descrever, desenvolver e empregar conceitos que envolvam taxas de variação, para resolver problemas e saber tirar inferências que auxiliem no entendimento do mundo ao seu redor.

3.3 A PROPOSTA

Abaixo segue a proposta de um roteiro que pode ser usado por professores de matemática e física, separadamente ou em conjunto. Indicamos aos interessados em aplicar esta proposta, a leitura dos capítulos anteriores desta dissertação para aprofundar seus conhecimentos a cerca das Equações Diferenciais.

3.3.1 *Taxas de variação de funções: a matemática por trás do estudo do movimento*

Sabemos que funções são formas de relacionar variáveis, isto é, quando definimos

$$f(x) = y,$$

estamos dizendo que a variável x e y estão relacionadas de acordo com a função f, por exemplo, a função que fornece o custo de uma corrida de táxi, fornece uma relação entre a quantidade de quilômetros rodados e o valor da corrida a ser paga. Entender a forma como as funções variam pode ser bastante importante para entendermos várias ações que fazem parte do dia-dia das pessoas, como a quantidade e os horários em que devemos tomar um medicamento, acelerar um carro quando queremos que este se locomova mais rápido, desacelerar (frear) quando queremos que este pare.

Definição 3.1. *Dada uma função f definida em um intervalo de números reais $a \leq x \leq b$, com $a, b \subset \mathbb{R}$, a taxa média de variação de f neste intervalo é dada por*

$$T_f(a,b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Usaremos a seguinte nomenclatura para expressar estas variações no intervalo considerado

$$\textit{Variação da variável } x\textit{:}\ \Delta x = b - a;$$

$$\textit{Variação da função } f(x) : \Delta f = f(b) - f(a).$$

Assim, a taxa média de variação de f no intervalo $a \leq x \leq b$ pode ser escrita como

$$T_f(a,b) = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Aqui é importante ficar claro que a variação depende do intervalo considerado e não necessariamente é a mesma para todos os intervalos.

Vejamos alguns exemplos de taxas de variação média:

Exemplo 3.2. *A prescrição de uma certa quantidade de um medicamento em um determinado tempo, depende de um estudo feito sobre a quantidade dessa substância no sangue (em miligramas por mililitro) medida em um intervalo de tempo.*

$$c_m[a,b] = \frac{\Delta C}{\Delta t} \text{ - } \textit{taxa de variação média da quantidade de medicamento entre os instantes } a \textit{ e } b,$$

onde $C(t)$ é a função que nos dá a quantidade dessa substância no sangue em um determinado instante t.

A taxa de variação média é positiva quando a concentração aumenta, e negativa quando a concentração diminui.

Exemplo 3.3. *A velocidade média de um objeto é a taxa de variação média da posição em uma unidade de tempo. Digamos,*

$$v_m(a,b) = \frac{\Delta S}{\Delta t} \text{ (variação da posição entre os instantes } a \text{ e } b\text{)},$$

onde $S(t)$ é a função que nos dá a posição do objeto (em relação a um referencial) em um determinado instante t.

OBS: É comum vermos somente a indicação $v_m = 20km/h$, por exemplo, isso ocorre quando independente do intervalo de tempo a ser considerado, a velocidade é a mesma.

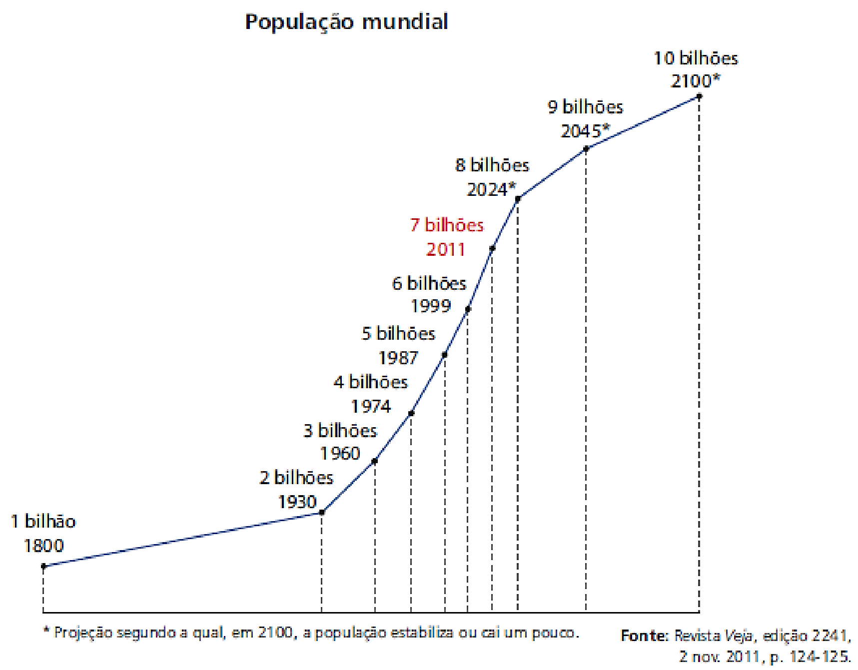
A taxa de variação média (velocidade média) é positiva quando o objeto está se movimento para o lado positivo em relação ao referencial, e negativa quando o objeto está se movimento para o lado negativo em relação ao referencial.

Exemplo 3.4. *A aceleração média de um objeto é a taxa de variação média da velocidade desenvolvida pelo objeto em um intervalo de tempo.*

$$a_m(a,b) = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ (variação da velocidade entre os instantes } a \text{ e } b\text{)},$$

onde $v(t)$ é a função que nos dá a velocidade do objeto em um instante t.

Exemplo 3.5. *Vamos calcular taxas de variação média da população abaixo em vários períodos. Usando as taxas de variação média é possível fazer estimativa de valores desconhecidos.* [11]



[11] Este exemplo pode ser encontrado em [10]

Temos que

• 1° *período: de* 1800 *a* 1930*, a taxa média de variação era de:*

$$T_m(1800, 1930) = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2000000000 - 1000000000}{1930 - 1800} = \frac{1000000000}{130} \approx 7,69 \ milhões/ano$$

Logo, quando analisamos as variações sofridas entre os anos de 1800 e 1930 a taxa média de variação é de 7,69 milhões/ano.

• 2° *período: de* 1987 *a* 2011*; a taxa média de variação, em pessoas/ano, é:*

$$T_m(1987, 2011) = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{7000000000 - 5000000000}{2011 - 1987} = \frac{2000000000}{24} \approx 83,3 \ milhões$$

observe que esse ritmo de aumento é quase 11 vezes o ritmo de aumento da população humana registrado no 1° *período, de* 1800 *a* 1930*.*

• 3° *período: de* 2045 *a* 2100*; a taxa média de variação, em pessoas/ano, é:*

$$T_m(2045, 2100) = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{10000000000 - 9000000000}{2100 - 2045} = \frac{1000000000}{55} \approx 18,2 \ milhões$$

esse valor indica uma diminuição na taxa de crescimento populacional até o final deste século.

Como vimos nos exemplos acima, algumas taxas de variação média recebem nomes particulares como concentração média de remédio no sangue, velocidade média, aceleração média, crescimento populacional médio entre outras. Cada uma das situações citadas são descritas por funções que descrevem aquele caso específico.

No Exemplo 3.5 podemos pensar que no ano de 1870, por não termos nenhum dado, a população pode ser estimada por meio da taxa de variação média de crescimento por

$$1000000000 + 70.7690000 = 1,54 \ bilhões.$$

Mas essa informação não é precisa, muitos fatores podem ter ocorrido e feito com que esse comportamento de crescimento fosse alterado. Por exemplo, suponhamos que depois de algum tempo uma pesquisa revelou que a população em 1830 era de 1,1 bilhões e em 1900 era de 1,3 bilhões. Com esses novos dados, seria possível melhorarmos a estimativa, pois eles nos fornecem o comportamento da população em um período mais próximo de 1870. A nova estimativa seria baseada na taxa de variação média entre os anos de 1830 e 1900 que seria de

$$T_m(1830, 1900) = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{1300000000 - 1100000000}{1900 - 1830} = \frac{1000000000}{70} \approx 2,86 \ milhões.$$

E a nossa nova estimativa para a população em 1970 seria de

$$1100000000 + 40.2860000 = 1,21 \ bilhões.$$

Este exemplo nos indica que dada uma função, para que nosso entendimento sobre a variação desta seja cada vez mais realista, devemos calcular a taxa de variação média em intervalos cada vez menores, mas que contenham o valor a ser analisado. Isso nos leva a seguinte definição

Definição 3.6. *A taxa de variação instantânea de f em um ponto a é o valor limite obtido calculando-se a taxa média de f em intervalos cada vez menores, em torno de a. Esta será denotada por $T_f(a)$.*

Na linguagem matemática dizemos que $T_f(a)$ é o limite de $T_f(b,c)$ quando b e c estão cada vez mais próximos de a, isto é denotado da seguinte forma

$$T_f(a) = \lim_{b,c\to a} T_f(b,c) = \lim_{b,c\to a} \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

OBS: Nem sempre é possível afirmar que esse limite existe, podemos citar o caso de uma função que sofre uma mudança inesperada, como por exemplo, a função posição de um veículo quando este para de forma brusca em um determinado instante. Assim, a função posição sofre uma variação repentina, que não pode ser medida conhecendo apenas os valores em sua proximidade.

Neste trabalho iremos estudar apenas casos em que este tipo de situação não ocorre, isto é, casos em que seja possível calcular a taxa de variação instantânea da função em todos os valores onde está definida.

Nos casos em que este limite existe para todos os pontos no domínio da função, a taxa de variação instantânea da função no valor a pode ser calculada apenas considerando intervalos da forma $[a,b]$. Neste caso, calculamos o seguinte limite:

$$T_f(a) = \lim_{b\to a} T_f(a,b) = \lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Abaixo daremos alguns exemplos de taxas instantâneas que recebem nomes especiais devido ao seu grande uso e importância de modo geral.

Exemplo 3.7. *Velocidade instantânea*

A velocidade instantânea em um determinado instante t_0 é taxa de variação instantânea da posição no instante t_0, isto é, o limite das velocidades médias calculadas em intervalos da forma $[t_0,t]$ quando t se aproxima de t_0,

$$v_i(t_0) = T_S(t_0) = \lim_{t\to t_0}[v_m(t_0,t)] = \lim_{t\to t_0} \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0},$$

onde $S(t)$ é a função que nos dá a posição do objeto (em relação a um referencial) em um determinado instante t.

Exemplo 3.8. *Aceleração instantânea*

A aceleração instantânea de um objeto em um determinado instante t_0 é a taxa de variação instantânea da velocidade no instante t_0, isto é, o limite das acelerações médias calculadas em intervalos da forma $[t_0,t]$ quando t se aproxima de t_0,

$$a_i(t_0) = T_v(t) = \lim_{t\to t_0}[a_m(t_0,t)] = \lim_{t\to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0},$$

onde $v(t)$ é a função que nos dá a velocidade do objeto (em relação a um referencial) em um determinado instante t.

Em casos como os que estudaremos, a taxa de variação instantânea de f está definida em cada ponto t de seu domínio e de maneira única, isto é, para cada t no domínio de f está associada a taxa de variação de f que denotamos por $T_f(t)$ e esta é calculada de forma única. Isto nos diz que a taxa de variação instantânea define também uma função de t. Esta função T_f é conhecida como a função "*derivada de f*". É com este nome que esta taxa aparece nos livros de Cálculo, estudados em cursos de graduação em áreas das ciências exatas e naturais, onde esta função é estudada com maior profundidade. Vamos preferir continuar chamando esta de taxa de variação instantânea de f pelo caráter introdutório deste texto.

Conhecer a taxa de variação instantânea de uma função em todos os pontos de seu domínio pode nos dizer muito sobre a função. Um exemplo que ilustra muito bem do que estamos falando é o do Movimento Retilíneo (MR). Como já comentado no Exemplo 3.7, a velocidade instantânea de um objeto em um tempo t_0 é a taxa de variação instantânea da posição deste (em relação a um referencial) no instante t_0. Se conhecemos a velocidade instantânea de um objeto em movimento retilíneo e sabemos de onde este partiu, então poderemos determinar de forma exata a sua posição.

Para entendermos melhor esta última afirmação, iremos fazer um estudo sobre a taxa de variação instantânea (sem se prender à exemplos) para três tipos específicos de função: função constante, função afim e função quadrática. Ao final deste, daremos uma belíssima aplicação dos resultados apresentados no estudo do movimento de corpos para o caso do MRU e MRUV.

Taxas de variação de uma função constante

A forma geral para as funções constantes é dada por

$$f(x) = a, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

onde a é um número real. Queremos analisar a taxa de variação de f em $x \in \mathbb{R}$.

Abaixo temos um exemplo de uma função constante que iremos explorar:

$$f(x) = 2,\ x \ \forall \in \mathbb{R}.$$

Seu gráfico é dado na Figura 6:

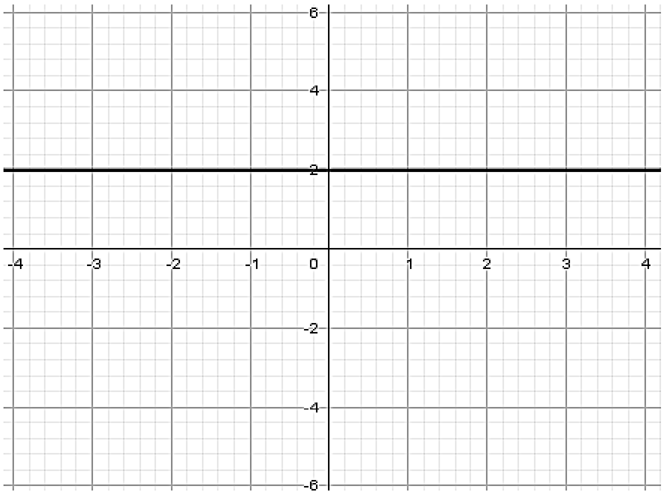


Figura 6: Gráfico da função $f(x) = 2$.

Calculando, a taxa média de variação de f no intervalo $[-3, -2]$, por exemplo, obtemos

$$T_f(-3, -2) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(-2) - f(-3)}{(-2) - (-3)} = \frac{0}{1} = 0.$$

E se nos aproximarmos do ponto -3 e considerarmos o intervalo $[-3, -2, 5]$, será que esse comportamento muda? A resposta é não! E novamente podemos recorrer ao gráfico para intuir esta conclusão. Note que, se diminuirmos o intervalo e tomarmos agora a taxa de variação média de f no intervalo $[-3,\ -2, 5]$ teremos

$$T_f(-3,\ -2, 5) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(-2, 5) - f(-3)}{(-2, 5) - (-3)} = \frac{0}{0, 5} = 0.$$

Isso nos mostra que a taxa de variação instantânea de f em $a = -3$ é

$$T_f(-3) = 0.$$

Da mesma forma como feito para $a = -3$ é possível calcularmos a taxa de variação instantânea de f em todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos apresentar uma tabela de valores (Figuras 7 e 8) que pode ser usada para verificar a variação de f em outros valores. Indicamos que o leitor preencha primeiramente as primeiras linhas de todas as tabelas na ordem em que estão organizadas, depois preencha a segunda linha e assim por diante.

x_1	x_2	$\Delta x = x_2 - x_1$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\Delta f = f_2 - f_1$	$T_f(x_1, x_1 + 1) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$
-3	-2	1	2	2	0	0
-2	-1	1	2	2	0	0
-1	-0	1	2	2	0	0
0	1	1	2	2	0	0
1	2	1	2	2	0	0
2	3	1	2	2	0	0
3	4	1	2	2	0	0

Figura 7: Tabela de taxas de variação média da função $f(x) = 2$.

x_1	x_2	$\Delta x = x_2 - x_1$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\Delta f = f_2 - f_1$	$T_f(x_1, x_1 + 0,5) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$
-3	-2,5	0,5	2	2	0	0
-2	-1,5	0,5	2	2	0	0
-1	-0,5	0,5	2	2	0	0
0	0,5	0,5	2	2	0	0
1	1,5	0,5	2	2	0	0
2	2,5	0,5	2	2	0	0
3	3,5	0,5	2	2	0	0

Figura 8: Tabela de taxas de variação média da função $f(x) = 2$.

x_1	$T_f(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} T_f(x_1, x_2)$
-3	0
-2	0
-1	0
0	0
1	0
2	0
3	0

Figura 9: Tabela de taxas de variação instantânea da função $f(x) = 2$.

Podemos verificar, pela última tabela (Figura 9), uma importante característica da função constante, a taxa de variação instantânea de f é igual a 0 em todos $x \in \mathbb{R}$.

Agora, uma pergunta se coloca? Se soubermos que a taxa de variação de uma função desconhecida g em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ é igual a zero, o que podemos afirmar sobre esta função? A resposta é intuitiva e verdadeira! Uma função que não varia em nenhum valor de x, só pode ser uma função constante.

Nossas observações são verdadeiras e podem ser compactadas no seguinte resultado:

Resultado 3.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função constante da forma $f(x) = a$, onde $x \in \mathbb{R}$. Então, a taxa de variação instantânea de f é tal que*

$$T_f(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Além disso, se a taxa de variação de uma função f em todo $x \in \mathbb{R}$ é igual a zero, então essa função é uma função constante.

Por exemplo, se um objeto tem velocidade instantânea $v_i(t) = 0$ em todo instante t, então podemos afirmar que este móvel está parado durante todo o tempo, isto é, sua posição $S(t)$ em relação ao referencial a é constante, $S(t) = a$.

Taxas de variação de uma função afim

A forma geral para as funções afins é dada por

$$f(x) = ax + b, \forall\ x \in \mathbb{R},$$

onde a, b são um números reais, com $a \neq 0$. Queremos analisar a taxa de variação de f em $x \in \mathbb{R}$.

Abaixo temos um exemplo de uma função afim:

$$f_1(x) = 2x + 1, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Seu gráfico é dado na Figura 10:

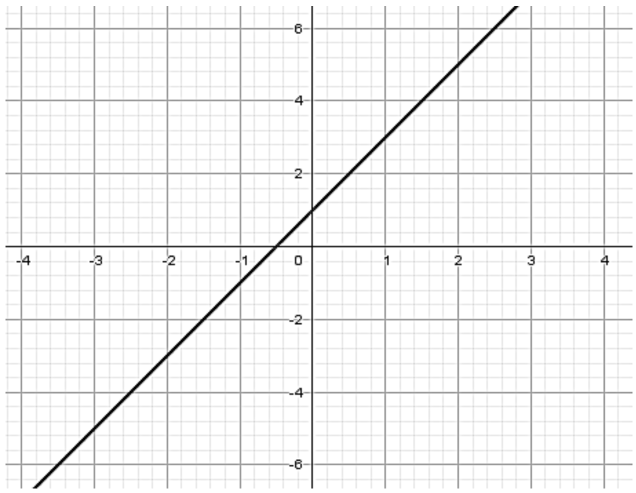


Figura 10: Gráfico da função $f_1(x) = 2x + 1$.

Calculando, a taxa média de variação de f_1 no intervalo $[-2, -1]$, por exemplo, obtemos

$$T_{f_1}(-2, -1) = \frac{\Delta f_1}{\Delta x} = \frac{f_1(-1) - f_1(-2)}{(-1) - (-2)} = \frac{2}{1} = 2.$$

Calculando a taxa de variação média de f_1 no intervalo $[-2,\ -1,5]$ teremos

$$T_{f_1}(-2,\ -1,5) = \frac{\Delta f_1}{\Delta x} = \frac{f_1(-1,5) - f_1(-2)}{(-1,5) - (-2)} = \frac{1}{0,5} = 2.$$

Isso nos indica que a taxa de variação instantânea de f em $a = -2$ é

$$T_{f_1}(-2) = 2.$$

Da mesma forma como feito para $a = -2$ é possível calcularmos a taxa de variação instantânea de f em todo $x \in \mathbb{R}$. Abaixo temos uma tabela de valores (Figuras 11 e 12) que pode ser usada para indicar a variação de f_1 em outros valores e assim concluirmos uma interessante característica destas funções. Novamente indicamos que o leitor preencha primeiramente as primeiras linhas de todas as tabelas na ordem em que estão organizadas, depois preencha a segunda linha e assim por diante.

x_1	x_2	$\Delta x = x_2 - x_1$	$f_1(x_1)$	$f_1(x_2)$	$\Delta f_1 = f_1(x_2) - f_1(x_2)$	$T_{f_1}(x_1, x_1 + 1) = \frac{\Delta f_1}{\Delta x}$
-3	-2	1	-5	-3	2	2
-2	-1	1	-3	-1	2	2
-1	-0	1	-1	1	2	2
0	1	1	1	3	2	2
1	2	1	3	5	2	2
2	3	1	5	7	2	2
3	4	1	7	9	2	2

Figura 11: Tabela de taxas de variação média da função $f_1(x) = 2x + 1$.

x_1	x_2	$\Delta x = x_2 - x_1$	$f_1(x_1)$	$f_1(x_2)$	$\Delta f_1 = f_1(x_2) - f_1(x_2)$	$T_{f_1}(x_1, x_1 + 1) = \frac{\Delta f_1}{\Delta x}$
-3	-2,5	0,5	-5	-4	1	2
-2	-1,5	0,5	-3	-2	1	2
-1	-0,5	0,5	-1	0	1	2
0	0,5	0,5	1	2	1	2
1	1,5	0,5	3	4	1	2
2	2,5	0,5	5	6	1	2
3	3,5	0,5	7	8	1	2

Figura 12: Tabela de taxas de variação média da função $f_1(x) = 2x + 1$.

x_1	$T_{f_1}(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} T_{f_1}(x_1, x_2)$
-3	2
-2	2
-1	2
0	2
1	2
2	2
3	2

Figura 13: Tabela de taxas de variação instantânea da função $f_1(x) = 2x + 1$

Podemos verificar, pela última tabela (Figura 13), que a taxa de variação instantânea de f_1 é igual a 2 em todo $x \in \mathbb{R}$, isto é, $T_{f_1}(x) = 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sugerimos ao leitor agora verificar que a taxa de variação instantânea da função $g_1(x) = -x + 2$ é igual a -1, isto é, $T_{g_1}(x) = -1$.

Com isso, estaremos em condições de intuir que a taxa de variação instantânea de uma função afim da forma $f_1(x) = ax + b$ é dada por $T_{f_1}(x) = a$.

E se ao invés de conhecermos a função, soubéssemos apenas que a taxa de variação dela é igual a constante a em qualquer ponto, será que esta função é uma função afim? Aim! Uma função que varia de forma constante, só pode ser uma função afim.

Por fim, nossas verificações nos ajudam a entender o seguinte resultado:

Resultado 3.2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim da forma*

$$f(x) = ax + b, \forall\ x \in \mathbb{R},$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. Então, a taxa de variação instantânea de f é dada por

$$T_f(x) = a, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Além disso, se a taxa de variação de uma função f em todo $x \in \mathbb{R}$ é igual a uma constante a, então essa função é uma função afim da forma $f(x) = ax + b$, onde b é uma constante real.

Como exemplo de onde podemos aplicar este resultado, considere um objeto em movimento retilíneo. É conhecido sobre este que sua velocidade instantânea é constante e dada por $v_i(t) = 2m/s$ para todo t em segundos. Assim, pelo resultado enunciado acima (lembre-se de que v_i é a taxa de variação instantânea da posição $S(t)$), podemos afirmar que sua posição (ou função horária da posição) $S(t)$ em cada instante t é dada por $S(t) = 2t + s_0$, onde s_0 é a posição inicial deste objeto em relação a um referencial.

Taxas de variação de uma função quadrática

A forma geral para as funções quadráticas é dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \forall\ x \in \mathbb{R},$$

onde a, b, c são um números reais, com $a \neq 0$. Queremos analisar a taxa de variação de f em $x \in \mathbb{R}$.

Abaixo temos um exemplo de uma função quadrática:

$$f_2(x) = x^2 + x - 2,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Seu gráfico é dado na Figura 14:

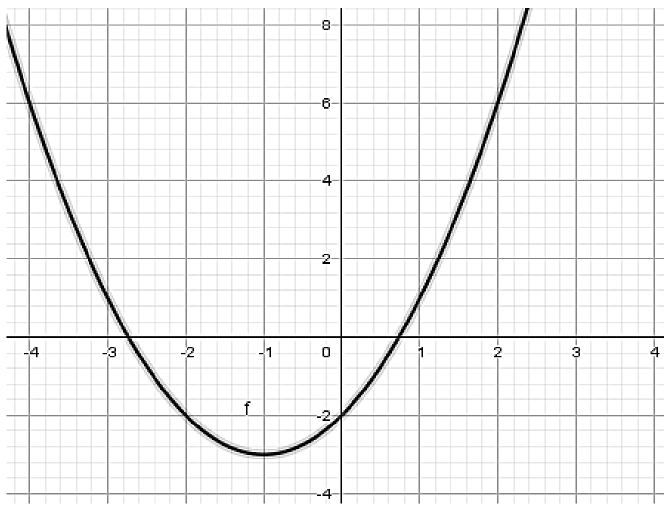


Figura 14: Gráfico da função $f_2(x) = x^2 + x - 2$.

Para chegarmos a uma conclusão sobre a taxa de variação da função f_2 em alguns valores preenchemos quatro tabelas de valores (Figuras 15, 16, 17 e 18).

x_1	x_2	$\Delta x = x_2 - x_1$	$f_2(x_1)$	$f_2(x_2)$	$\Delta f_2 = f_2(x_2) - f_2(x_1)$	$T_{f_2}(x_1, x_1+1) = \frac{\Delta f_2}{\Delta x}$
-3	-2	1	4	0	-4	-4
-2	-1	1	0	-2	-2	-2
-1	0	1	-2	-2	0	0
0	1	1	-2	0	2	2
1	2	1	0	4	4	4
2	3	1	4	10	6	6
3	4	1	10	18	8	8

Figura 15: Tabela de taxas de variação média da função $f_2(x) = x^2 + x - 2$.

x_1	x_2	$\Delta x = x_2 - x_1$	$f_2(x_1)$	$f_2(x_2)$	$\Delta f_2 = f_2(x_2) - f_2(x_1)$	$T_{f_2}(x_1, x_1+0{,}5) = \frac{\Delta f_2}{\Delta x}$
-3	-2,5	0,5	4	1,75	-2,25	-4,5
-2	-1,5	0,5	0	-1,25	-1,25	-2,5
-1	-0,5	0,5	-2	-2,25	-0,25	-0,5
0	0,5	0,5	-2	-1,25	0,75	1,5
1	1,5	0,5	0	1,75	1,75	3,5
2	2,5	0,5	4	6,75	2,75	5,5
3	3,5	0,5	10	13,75	3,75	7,5

Figura 16: Tabela de taxas de variação média da função $f_2(x) = x^2 + x - 2$.

x_1	x_2	$\Delta x = x_2 - x_1$	$f_2(x_1)$	$f_2(x_2)$	$\Delta f_2 = f_2(x_2) - f_2(x_1)$	$T_{f_2}(x_1, x_1 + 0{,}3) = \frac{\Delta f_2}{\Delta x}$
-3	-2,7	0,3	4	2,59	-1,41	-4,7
-2	-1,7	0,3	0	-0,81	-0,81	-2,7
-1	-0,7	0,3	-2	-2,21	-0,21	-0,7
0	0,3	0,3	-2	-1,61	0,36	1,2
1	1,3	0,3	0	0,99	0,99	3,2
2	2,3	0,3	4	5,59	1,59	5,2
3	3,3	0,3	10	12,19	2,19	7,2

Figura 17: Tabela de taxas de variação média da função $f_2(x) = x^2 + x - 2$.

x_1	x_2	$\Delta x = x_2 - x_1$	$f_2(x_1)$	$f_2(x_2)$	$\Delta f_2 = f_2(x_2) - f_2(x_1)$	$T_{f_2}(x_1, x_1 + 0{,}1) = \frac{\Delta f_2}{\Delta x}$
-3	-2,9	0,1	4	3,51	-0,49	-4,9
-2	-1,9	0,1	0	-0,29	-0,29	-2,9
-1	-0,9	0,1	-2	-2.09	-0,09	-0,9
0	0,1	0,1	-2	-1,89	0,11	1,1
1	1,1	0,1	0	0,31	0,31	3,1
2	2,1	0,1	4	4,51	0,51	5,1
3	3,1	0,1	10	10,71	0,71	7,1

Figura 18: Tabela de taxas de variação média da função $f_2(x) = x^2 + x - 2$.

Agora, podemos então tirar alguma conclusão a respeito do comportamento do limite das taxas de variações médias:

x_1	$T_{f_2}(x_1) = \lim\limits_{x_2 \to x_1} T_{f_2}(x_1, x_2)$
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5
3	7

Figura 19: Tabela de taxas de variação instantânea da função $f_2(x) = x^2 + x - 2$.

Note que, a função obtida acima tem exatamente os mesmos valores que a função $f_1(x)$ trabalhada no tópico anterior (ver os valores de $f_1(x_1)$ na tabela da Figura 12. Isso nos ajuda a concluir que a taxa de variação instantânea da função f_2 no ponto x é dada pela função afim $T_{f_2}(x) = 2x + 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Sugerimos ao leitor verificar que a taxa de variação instantânea da função $g_2(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 2$ em cada ponto x é dada por $T_{g_2}(x) = -x + 2$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Observando atentamente os coeficientes que aparecem nas funções $f_2(x)$, $g_2(x)$, e nas respectivas taxas de variação, $T_{f_2}(x)$ e $T_{g_2}(x)$, podemos concluir que dada uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, a sua taxa de variação instantânea é dada por $T_f(x) = (2a)x + b$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Mais ainda, se soubermos que a taxa de variação instantânea de uma função em um ponto x se comporta como uma função afim da forma $ax + b$ em todo ponto $x \in \mathbb{R}$, então essa função é uma função quadrática da forma $ax^2 + bx + c$ onde c é uma constante real.

As verificações feitas nos ajudam a entender o seguinte resultado:

Resultado 3.3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática da forma*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \forall\ x \in \mathbb{R},$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. Então, a taxa de variação instantânea de f é dada por

$$T_f(x) = (2a)x + b, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Além disso, se a taxa de variação de uma função f em todo $x \in \mathbb{R}$ é igual a função $T_f(x) = (2a)x + b$, então esta é uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde c é uma constante real.

Como exemplo deste resultado, considere um objeto em movimento retilíneo, sobre o qual conhecemos a velocidade instantânea $v_i(t)$ em cada instante t. Suponhamos que $v_i(t) = -2t + 1$, então pelo resultado anterior podemos afirmar que a função posição (ou função horária da posição) é dada por $S(t) = -t^2 + t + s_0$, onde s_0 é a posição inicial do objeto.

OBS: Se a taxa de variação instantânea de f é de uma das formas apresentadas anteriormente, podemos apenas dizer algo sobre o tipo de função em questão mas não podemos obtê-la de forma exata. Por exemplo, dado que a taxa de variação de uma função é dada por $T_f(x) = 4x - 1$, então podemos afirmar que f é da forma

$$f(x) = 2x^2 - x + c, \text{ onde } c \text{ é uma constante.}$$

Logo, podemos ter $f(x) = 2x^2 - x + 1$, ou ainda, $f(x) = 2x^2 - x + 2$. Mas se conhecermos algum ponto pelo qual a função passa, então esta pode ser determinada de forma única. Neste caso, se além da taxa de variação apontada para f tivermos que $f(0) = 1$, então já sabemos que $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

Funções horárias da posição no MRU e no MRUV

Agora que temos bem definidas a taxa de variação média e taxa de variação instantânea de uma função, podemos deduzir as fórmulas das funções horárias da posição no MRU e no MRUV.

Comecemos com as análises do MRU. Neste tipo de movimento consideramos que a aceleração (instantânea) do móvel é igual a zero, isto é, $a(t) = 0$ em todo instante t. Desde que, a aceleração em um instante t é a taxa de variação instantânea da velocidade no instante t, isto é,

$$a(t) = T_v(t) = 0,$$

podemos concluir pelo Resultado 3.1, que a função velocidade é constante. Supondo que conhecemos a velocidade inicial, $v(0) = v_0$, então

$$v(t) = v_0, \text{ em todo instante } t.$$

Agora, por sua vez, a velocidade é a taxa de variação instantânea da posição no instante t, isto é,

$$v(t) = T_S(t) = v_0.$$

Usando o Resultado 3.2, podemos concluir que a função posição é dada por uma função afim da forma

$$S(t) = v_0 t + s_0,$$

onde s_0 é a posição no instante inicial $S(0) = s_0$.

Esta última equação é conhecida como equação horária da posição no MRU.

Agora, vamos analisar o MRUV. Neste tipo de movimento consideramos que a aceleração do móvel é constante e diferente de zero, $a(t) = a$ em todo instante t. Assim, pelo observado anteriormente

$$a(t) = T_v(t) = a,$$

e pelo Resultado 3.2, podemos concluir que a função velocidade é dada por uma função afim da forma

$$v(t) = at + v_0,$$

onde v_0 é a velocidade inicial $v(0) = v_0$.

Agora, desde que

$$v(t) = T_S(t) = at + v_0,$$

pelo Resultado 3.3, podemos concluir que a função posição é dada por uma função quadrática da forma

$$S(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0,$$

onde s_0 é a posição no instante inicial $S(0) = s_0$.

A última equação é conhecida como equação horária da posição no MRUV.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentamos um estudo introdutório sobre Equações Diferenciais abrangendo três aspectos destas: o histórico, o teórico e o didático. Podemos verificar ao final, que estes aspectos estão entrelaçados. Nossa proposta didática buscou, no aspecto histórico e teórico, inspiração para desenvolver ideias e introduzir conceitos de conteúdos que fazem parte do currículo do ensino médio.

No aspecto histórico podemos perceber que o estudo destas equações tem forte relação com a matematização do natural. Com isso, encontramos aí um campo que pode ser muito explorado por um professor da área de ciências exatas em sala de aula. Além disso, segundo Ávila, em [11], *"no âmbito do Ensino Médio, seria mais vantajoso que todo o tempo gasto com formas e nomenclaturas ao conceito de função fosse utilizado no ensino das ideias fundamentais do Cálculo Diferencial"*. Para disciplinas como História e Física por exemplo, pode diminuir a velha impressão que os alunos tem de que a matemática foi criada por mágica ou um lapso de genialidade.

No decorrer dos estudos, ao começarmos a estudar as EDOs o principal objetivo é reconhece-las como uma ferramenta de grande importância, que busca nos oferecer instrumentos para modelagem de funções, cujo suas aplicações podem ser voltadas ao cotidiano de um aluno de ensino médio, em fórmulas, contextos didáticos e porta de entrada para incluir o Cálculo Diferencial como instrumento auxiliador na elaboração de inferências e tomadas de decisões pautadas em intuições utilizadas na Análise.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BOYCE, Willian E.; C.DIPRIMA, Richard. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 10. ed. Rio de Janeiro,rj: Ltc, 2017. 663 p. Tradução de: Valéria de Magalhães Iorio.

[2] ZILL, Dennis G.. Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem. 3. ed. São Paulo,sp: Cengage Learning, 2016. 437 p. Tradução de: Márcio Koji Umezawa.

[3] ÇENGEL, Yunus A.; III, William J. Palm. Equações Diferenciais. São Paulo,sp: Amgh, 2014. 598 p. Tradução de: Marco Elisio Marques.

[4] EVES, Howard. Introdução à história da matemática. 5 ed. Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011. 843 p. Tradução de: Hygino H. Domingues.

[5] BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. São Paulo,sp: Edgard Blücher, 1974. 487 p. Tradução de: Elza F. Gomide.

[6] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. Fundamentos de Matemática Elementar,8: limites, derivadas, noções de integral. 5. ed. São Paulo,sp: Atual, 1993. 269 p.

[7] ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew N. O.. Fundamentos de Circuitos Elétricos. 5. ed. Porto Alegre, Rs: Amgh Editora Ltda, 2013. 871 p. Tradução de: José Lucimar do Nascimento.

[8] DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto & Aplicações. 2. ed. São Paulo,sp: ática, 2014. 424 p. 2 v.

[9] BUSE, Andrei. Um olhar diferenciado sobre a cinemática no Ensino Médio: UMA ABORDAGEM PRAXEOLÓGICA DAS TAREFAS. 2014. 141 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Científica e Tecnológica., Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis,sc, 2014.

[10] IEZZI, Gelson et al. Matemática Ciências e Aplicações. 9. ed. São Paulo,sp: Sariava, 2016. 1 v.

[11] ÁVILA, G.S. de S. O Ensino de Cálculo no 2°Grau. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n° 18, p. 1-9, 1991.

[12] SILVA, Edson Rodrigues da. Uma proposta para o ensino da noção de taxa de variação instantânea no ensino médio. 2012. 169 f. Dissertação (Mestrado) - Profmat, Puc/sp, São Paulo,sp, 2012.

[13] SILVA, Carolini Cunha. O cálculo no ensino médio :: as taxas de variação e o conceito de derivada. 2012. 103 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campos dos Goytacazes, Rj, 2012.

[14] STEWART, James. CÁLCULO. 7. ed. São Paulo,sp: Cengage Learning, 2013. 1 v.

[15] STEWART, James. CÁLCULO. 7. ed. São Paulo,sp: Cengage Learning, 2013. 2 v.

[16] SOTOMAYOR, Jorge. Equações Diferenciais Ordinárias. São Paulo,sp: Livraria da Física, 2016. 180 p.