UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Oficinas de Matemática Experimental: Combatendo a seca, preservando o bolso. Um problema de otimização.

Robson da Silva Barreto

Mestrado em Matemática

Ilhéus - BA
2018

Robson da Silva Barreto

Oficinas de Matemática Experimental: Combatendo a seca, preservando o bolso. Um problema de otimização.

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión

Co-Orientador: Prof. Dr. Germán Ignacio Gomero Ferrer

Ilhéus-BA
2018

B273 Barreto, Robson da Silva.
Oficinas de matemática experimental: combatendo a seca, preservando o bolso. Um problema de otimização / Robson da Silva Barreto. – Ilhéus, BA: UESC, 2018.
65f. : il.

Orientador: Nestor Felipe Castañeda Centurión.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Inclui referências e apêndices.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Projeto experimental. 3. Tecnologia da informação. 4. Geometria. 5. Otimização matemática. 6. Controle de custos. I. Título.

CDD 510.7

Robson da Silva Barreto

Oficinas de Matemática Experimental: Combatendo a seca. preservando o bolso. Um problema de otimização.

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 01 de novembro de 2018. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión (Orientador-UESC)

Profa. Dra. Pryscilla dos Santos Ferreira Silva (UESC)

Prof. Dr. Matheus Correia dos Santos (UFRGS)

Agradecimentos

Ao grandioso Deus, por ter me dado o dom da vida.

A minha esposa, Luciana, por ter me incentivado durante esse curso de pós-graduação, e por tornar cada dia da minha vida mais especial, gerando minha maior bênção, nosso filho.

Aos meus pais e irmãos, por estarem sempre presentes, me aconselhando e dando força.

Aos alunos que participaram da oficina.

Ao Colégio Estadual Ruy José de Almeida pela contribuição na minha vida profissional e pessoal.

Aos meus colegas e amigos de curso: Adenilson, Edmilson, Lucas, Marivaldo, Tamiri, Watila, Fernando Eliel, Norislei e Joelson pelos momentos de descontração, contribuição e amizade durante o curso e que levarei pelo resto da vida.

À coordenação e todos os professores do PROFMAT - UESC, especialmente ao professor Nestor, pela paciência e contribuição nesta dissertação.

Aos meus orientadores: Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión e Prof. Dr. Germán Ignacio Gomero Ferrer, pela contribuição e paciência durante todo período de orientação.

Aos membros da banca examinadora pela participação e contribuição na avaliação deste trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Uma Oficina de Matemática Experimental (OME) constitui uma proposta metodológica de ensino de Matemática, que visa despertar o interesse do estudante, motivando-o a resolver o problema matemático apresentado. Este trabalho tem como objetivo utilizar a OME intitulada “Combatendo a seca, preservando o bolso”, que envolve um problema de otimização do custo da construção de um reservatório, para abordar conceitos de área da superfície e volume de prismas, modelagem e minimização. Esta oficina foi aplicada no Colégio Estadual Ruy José de Almeida, na cidade de Laje-BA, com alunos do segundo ano do Ensino Médio, seguindo as orientações gerais propostas por Araújo (2017) e Pereira (2017). Após um processo exaustivo de experimentação, que teve o auxílio de calculadoras, a oficina utilizou recursos de Tecnologia da Informação. Nesse sentido foram usadas planilhas e gráficos gerados pelo softwares Excel e Geogebra, respectivamente, para mostrar que o caminho seguido pelos alunos era o apropriado. Esta é a primeira vez que uma OME utiliza TI como suporte para alcançar os objetivos da oficina, no âmbito do PROFMAT-UESC. Os resultados obtidos com a aplicação da OME indicam que o ensino da Matemática utilizando esta metodologia proporciona motivação e espírito de investigação para a produção de conhecimento individual e coletivo. Nesse sentido, espera-se que este trabalho seja um suporte para professores do Ensino Fundamental e Médio que desejam despertar o interesse dos alunos nas aulas de Matemática, especificamente na área de geometria, a fim de melhorar a qualidade da Educação Básica.

Palavras-chave: Oficina de Matemática Experimental, Tecnologia da informação, Geometria, Otimização de custos.

Abstract

A Workshop on Experimental Mathematics (OME) is a methodological proposal for teaching mathematics, which aims to arouse the interest of the student, motivating him to solve the presented mathematical problem. This work aims to use the OME entitled “Combatting the drought, preserving the pocket”, which involves a cost optimization problem of the construction of a reservoir, to approach concepts of surface area and volume of prisms, modeling and minimization . This workshop was applied at Ruy José de Almeida State College, in the city of Laje-BA, with second-year high school students, following the general guidelines proposed by Araújo (2017) and Pereira (2017). After an exhaustive process of experimentation, which had the help of calculators, the workshop used Information Technology resources. In this sense, spreadsheets and graphs generated by Excel and Geogebra software were used, respectively, to show that the path followed by the students was appropriate. This is the first time that an OME uses TI as a support to achieve the goals of the workshop, within the scope of PROFMAT-UESC. The results obtained with the application of OME indicate that the teaching of mathematics using this methodology provides motivation and research spirit for the production of individual and collective knowledge. In this sense, it is expected that this work will be a support for teachers of Elementary and Middle School who wish to arouse the interest of students in mathematics classes, specifically in the area of Geometry, in order to improve the quality of Basic Education.

Keywords: Office of Experimental Mathematics, Information Technology, Geometry, Cost optimization.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

A qualidade da educação brasileira está passando por um período crítico, segundo as análises das avaliações governamentais. Os dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) mostram que 71,67% dos estudantes, na disciplina de Matemática, estão classificados em nível considerado insuficiente (0 a 3) e apenas 4,52% em nível adequado, como mostra o gráfico da Figura 1. Outra avaliação que mede o desempenho dos estudantes, o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), obtido a partir do SAEB e do Censo Escolar, também mostra que o nível da Educação Básica nas etapas do Ensino Fundamental II e Ensino Médio ficaram abaixo do esperado, como visto na Figura 2. Observa-se então, que a meta do IDEB em 2017 não foi atingida a nível nacional nem a nível estadual, sendo que no estado da Bahia a discrepância entre a meta esperada e o IDEB observado foi ainda maior.

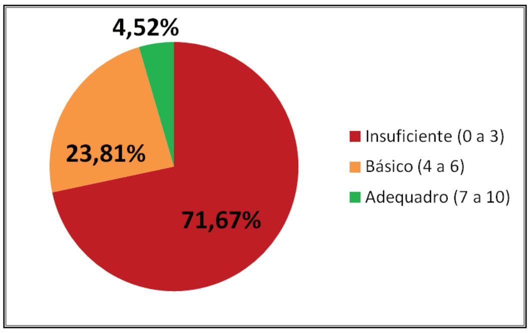


Figura 1: Resultado Nacional em Matemática do SAEB 2017
Fonte: INEP/MEC

Diante dos dados apresentados, fica evidente a necessidade da elaboração de políticas públicas por parte do governo, a fim de melhorar a qualidade da Educação Básica, principalmente para a disciplina de Matemática. Em contrapartida, algumas ações podem ser desenvolvidas pelos coordenadores e professores da Educação Básica para melhorar o ensino e aprendizagem da Matemática, e também das outras disciplinas, como por exemplo, a aplicação de novas metodologias, como as Oficinas de Matemática Experimental (OMEs).

Uma OME constitui uma proposta metodológica de ensino de Matemática elaborada pelo professor Germán Gomero Ferrer, integrante do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas – DCET da UESC. Existem evidências que a proposta consegue despertar o

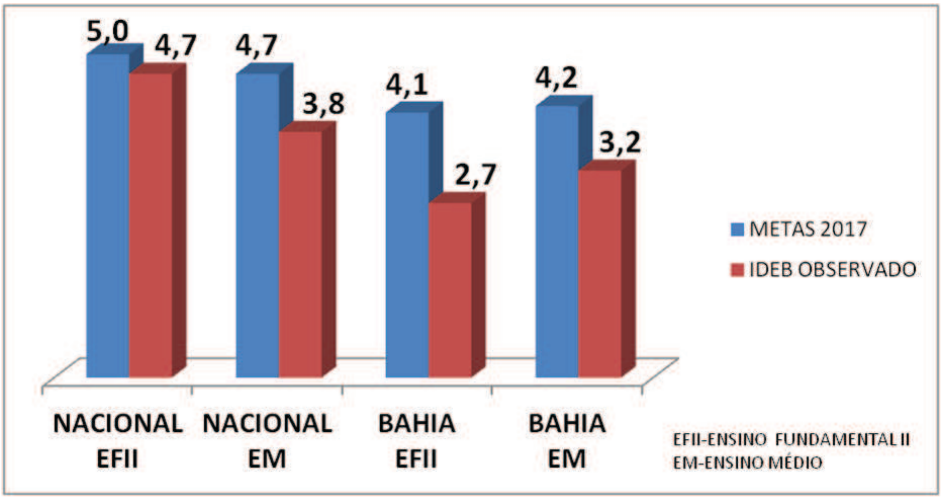


Figura 2: Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
Fonte: INEP/MEC

interesse do estudante, motivando-o a resolver o problema matemático apresentado, que pode ser de nível avançado, mas de fácil compreensão (SILVA M.O, 2015; SOUZA D. M, 2017; ARAÚJO, 2017; PEREIRA, 2017; SILVA, 2017; FRANÇA, 2018). Segundo o idealizador desta metodologia, a maneira mais eficiente de aprender envolve a participação ativa do aluno, e o papel do professor é mediar esse processo.

Dessa forma, este trabalho propõe utilizar a OME como proposta para o ensino e aprendizagem em Matemática, com o intuito de proporcionar a motivação no estudo da disciplina, tornando o aluno protagonista e o professor mediador. A OME apresentada neste trabalho foi intitulada “Combatendo a seca, preservando o bolso”, e envolve um problema de otimização de custo da construção de um reservatório, abordando os conteúdos de volume e área superficial de prismas.

O presente trabalho está organizado em cinco capítulos. No primeiro capítulo é apresentada a OME como metodologia de ensino de Matemática. No segundo capítulo mostramos a proposta da OME “Combatendo a seca, preservando o bolso”. O terceiro capítulo apresenta os aspectos matemáticos da OME: geometria plana e espacial, e a forma de resolver o problema usando cálculo diferencial. No quarto capítulo traz o relato de experiência, os resultados e discussão da oficina. E no quinto capítulo, são feitas as considerações finais.

Capítulo 1

Oficina de Matemática Experimental (OME)

Neste capítulo descrevemos de forma sucinta o que é uma OME e fazemos um breve histórico dos trabalhos já desenvolvidos até o momento no âmbito do Profmat-UESC.

1.1 Principios norteadores de uma OME

A Oficina de Matemática Experimental (OME) surgiu a partir do projeto de intervenção de parceria entre a UESC e o Colégio da Polícia Militar Rômulo Galvão (CPMRG) - Ilhéus, proposta pelo professor da UESC Germán Gomero Ferrer, baseado em um projeto bem sucedido nos Estados Unidos na década de 90 que estimulava em crianças pequenas o gosto pela matemática. Portanto, uma OME visa transpor os métodos tradicionais de ensino e, principalmente, motivar os alunos no estudo da disciplina de Matemática, através da resolução de problemas. Estas oficinas são baseadas em dois princípios, a participação ativa do aluno e o professor como mediador do processo de ensino e aprendizagem. O problema pode ser complexo, mas de fácil compreensão para o aluno, conforme Gomero apresenta:

> Uma oficina de matemática experimental propicia um ambiente inovador de ensino e aprendizagem de matemática cujos mecanismos se sustentam em dois princípios fundamentais; o de que a maneira mais eficiente de aprender envolve a participação ativa do aluno (aprender fazendo), e o de que o papel do professor é o de orientar o aluno no processo de aprendizagem (professor mediador). Nestas oficinas os alunos são confrontados com situações ou problemas matemáticos fáceis de compreender e de interesse suficiente para capturar sua atenção, mas muitas vezes difíceis de resolver. O aluno, sem ser ciente desta dificuldade, se sente impelido a procurar por uma solução; e é nessa busca que acontecem os processos de aprendizagem e de desenvolvimento das habilidades cognitivas. (GOMERO, 2017, p.2)

Percebe-se então, que a resolução de problemas é um princípio fundamental da OME, e tem sido defendida como uma alternativa para instigar a curiosidade dos alunos e, dessa forma, favorecer a aprendizagem do estudante. Essa proposta de metodologia está também evidenciada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), ratificando a importância dessa estratégia.

> Não somente em Matemática, mas particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.(BRASIL, 2002).

Para Polya (1978), o estudante deve ter independência ao resolver um problema. No entanto, o professor deve auxiliá-lo nesse processo, pois se tentar resolver sem ajuda, poderá não atingir os objetivos esperados. O autor reforça que esse auxílio deve ocorrer com naturalidade, observando o processo de raciocínio do estudante, fazendo questionamentos, sem interferir diretamente na resolução do problema. É importante destacar que o professor deve ter como objetivo, além de auxiliar na resolução do problema proposto, desenvolver no estudante a capacidade de resolver problemas futuros por si só. Evidentemente que os dois objetivos estão interligados, já que "se o aluno conseguir resolver o problema que lhe é apresentado, terá acrescentado alguma coisa a sua capacidade de resolver problemas" (POLYA, 1978).

Durante a aplicação de uma OME é necessário seguir as recomendações gerais abordadas por Pereira (2017) e Araújo (2017), que têm como objetivo facilitar as aplicações das oficinas e melhorar o desempenho dos aplicadores. A primeira orientação é "**evitar dar explicações longas**", apresentando apenas o problema e oportunizando a discussão em grupo. As autoras orientam à não dizer se está CERTO ou ERRADO, PODE ou NÃO PODE, e sempre que surgir dúvidas individuais ou coletivas, tentar proporcionar a discussão entre os componentes do grupo, ou entre os grupos, sempre contando com a mediação do aplicador. Sempre que um aluno ou um grupo estiver cometendo um erro, é recomendável ajudá-lo a perceber onde está errando e a descobrir como consertá-lo.

A segunda recomendação geral é "**manter uma 'bagunça produtiva'**", ou seja, partindo do principio de que a desordem acontecerá, principalmente pelo nível de envolvimento dos alunos, é necessário sempre manter uma desorganização produtiva, para que o aluno não confunda a discussão com o intervalo do recreio. Para isso, o professor deve ter "cartas na manga", que são atividades extras, mais simples para o aluno com maior dificuldade, ou mais complexas para o aluno que concluir as atividades mais rápido.

"**Manter uma boa logística**", é uma recomendação geral para organizar os materiais e o espaço da oficina. Recomenda-se um número máximo de 25 alunos por turma, organizados em grupos de 2 a 5 componentes, além de ter ao menos 3 aplicadores, para possibilitar uma maior participação e discussão dos alunos no grupo, evitando também a dispersão.

Por fim, deve-se "**respeitar o tempo de cada grupo**" e só avançar para próxima atividade quando todos os componentes do grupo tiverem terminado com uma atividade. Se um aluno ainda não tiver concluído, o professor deve estimular os colegas a ajudá-lo, mas sem dizer como se faz, nem realizar a atividade por ele.

1.2 Breve histórico das OMEs no âmbito do PROFMAT-UESC

Uma OME é uma metodologia apresentada recentemente, através de algumas dissertações de discentes do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da UESC (SILVA M.O, 2015; SOUZA D. M, 2017; ARAÚJO, 2017; PEREIRA, 2017; SILVA, 2017; FRANÇA, 2018). As experiências relatadas e as conclusões tiradas nesses trabalhos contribuíram para o melhor entendimento e aprimoramento da metodologia. Em geral, a motivação para a resolução de problemas em uma OME é feita a partir de uma história envolvente, com o intuito de despertar o interesse, a curiosidade e o instinto investigativo dos estudantes.

Em Silva M.O (2015) pode-se apreciar a gênese do conceito de OME, ao desenvolver um trabalho sobre o triângulo e a pirâmide de Pascal. Apesar de não iniciar com uma história instigadora, a autora buscou criar um espaço de experimentação, ou seja, os alunos tiveram o papel de investigadores no processo de ensino e aprendizagem, principalmente quando os próprios discentes descobriram as relações do triângulo e pesquisaram outras na internet. Além disso, a pirâmide de Pascal foi construída pelos discentes. No entanto, a autora não abordou o conceito dessa metodologia, nem os critérios de aplicação.

Nos trabalhos de Pereira (2017) e Araújo (2017), no âmbito de um projeto desenvolvido pelo CPM de Ilhéus e a UESC, e após dois anos de experimentação e aperfeiçoamento, foi apresentada de forma organizada a OME como proposta metodológica de ensino de Matemática, apresentando algumas orientações para aplicação das oficinas.

A oficina aplicada por Pereira (2017) intitulada "Entrando numa Fria" apresenta uma situação problema que permite desafiar os alunos a alocarem o menor número de sorveterias, minimizando o gasto da construção. A história versa sobre uma cidade fictícia chamada *"Suehli"*, representada por um grafo cujos vértices e arestas simbolizam esquinas e ruas, respectivamente. A cidade é quase perfeita, exceto pelo inconveniente de não possuir sorveterias. O aluno é desafiado a alocar sorveterias em algumas esquinas de modo que cada morador da cidade tenha que andar apenas uma rua para chegar em uma esquina com sorveteria. Segundo a autora, a inserção do lúdico na oficina, estimulou habilidades de raciocínio nos alunos e despertou o interesse dos mesmos em conhecer melhor a Matemática, criando assim novos caminhos para responder aos desafios do processo de ensino/aprendizagem.

Nessa mesma direção, a dissertação apresentada por Araújo (2017) busca desconstruir a ideia de que a Matemática é uma área de conhecimento de difícil compreensão. A autora aplicou a oficina intitulada “Uma história de TV. Minimizando custos”, a qual relata uma situação fictícia em que o governo de Minas Gerais precisava colocar 12 emissoras de televisão, uma para cada mesoregião do estado. No entanto, pessoas que moravam em lugares próximos das fronteiras, apresentavam interferência em seus televisores, pois assistiam a programação de duas regiões. Acontece que um cientista baiano inventou uma forma de mudar a frequência de emissão de sinal das antenas sem necessidade de trocá-las. Ele colocou a disposição uma lista de 06 novas frequências para efetuar mudanças nos sinais, mas o custo de cada mudança dependia da frequência escolhida. Portanto, o problema proposto aos alunos consiste em implementar a troca de frequências com o menor custo possível, de modo que as regiões com fronteira comum tenham frequências diferentes. O problema proposto é de minimização de custos e os resultados apontados no trabalho indicam um bom envolvimento dos alunos nas atividades.

Resultados similares no que tange a boa aceitação e motivação são relatados na dissertação desenvolvida por Silva D. M (2017) dentro da área de Análise Combinatória. O autor propôs e aplicou a oficina “Um Inglês em Salvador” em duas fases, envolvendo situações-problema relacionadas aos problemas “das duas possibilidades” e “dos caminhos mais curtos”, ambos do campo da Análise Combinatória.

A história narra a viagem de Peter para Salvador, um inglês que queria conhecer o Farol da Barra e o Parque Pituaçu, mas ele vai chegar às $6h$ da manhã no aeroporto de Salvador e voará de lá para o Rio de Janeiro às $11h$ do mesmo dia. Em um primeiro momento, a oficina propõe aos alunos que sugiram e identifiquem no mapa a maior quantidade de caminhos para Peter realizar o percurso até o Farol da Barra usando o transporte conhecido como VATT (Veiculo Anfíbio de Transporte de Turistas), que trafega tanto na terra quanto na água por vias de uso exclusivo dele, e que se desloca em linhas horizontais ou verticais, formando uma malha quadriculada, não sendo permitido percorrer um mesmo trecho de tais ruas ou avenidas mais de uma vez. A segunda etapa era determinar caminhos mais curtos que ligam o Aeroporto ao Parque Pituaçu, além da estratégia utilizada para encontrar esses caminhos. Durante a aplicação da oficina, o problema proposto divertiu, prendeu a atenção e motivou os alunos a encontrar o caminho mais curto, mostrando que a motivação amplifica a vontade de aprender. Além disso, essa metodologia proporcionou o compartilhamento do conhecimento e despertou a criatividade dos alunos.

Em sua dissertação, Souza (2017) abordou o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e o Fatorial, através de uma OME, que teve como título “O Senhor das Senhas”. A oficina foi iniciada com uma história fictícia com a qual os alunos foram estimulados, de forma lúdica, à utilização do método recursivo para contagem. Na história, o personagem Alexandre participa de um jogo chamado *"Galileu's"*, onde para passar de fase de forma rápida deveria inserir uma senha contendo de 1 a 7 caracteres. No entanto, Alexandre esqueceu a ordem dos caracteres e assim tinha que descobrir por tentativas, de forma mais rápida possível, pois já tinham uma programação agendada com a namorada, e seria punido por ela, dependendo do tempo de espera.

A tarefa dos alunos é determinar quanto tempo o personagem leva para testar todas as possibilidades e, para isso, eles devem determinar o número de anagramas que podem ser construídos com os caracteres. Assim, os alunos trabalham de forma lúdica o PFC, chegando naturalmente à definição de fatorial. Após a aplicação da oficina, a análise das anotações dos participantes demonstrou que alguns dos seus objetivos foram alcançados, entre eles, a utilização do método recursivo e o entendimento de definições matemáticas. A partir da análise dos resultados, o autor acredita que as OMEs podem ser aliadas dos docentes que desejam estudar e, consequentemente, experimentar novas abordagens dos conteúdos pertinentes à Análise Combinatória em sala de aula.

França (2018), aplicou a OME intitulada "A Batalha dos Trezentos", levando o aluno a interagir com conceitos da Teoria dos Jogos, que mesmo não pertencendo ao currículo do Ensino Básico, permite estimular o raciocínio através da análise de processos de tomada de decisão. Na OME aplicada, foi apresentada aos alunos a famosa batalha das Termópilas, um confronto épico entre o pequeno exército espartano e o grande exército persa, instigando o aluno a analisar possibilidades de ação de cada exército. Os espartanos tinham 3 opções de ataque: atacar diretamente, não defender o estreito e defender o estreito. Já os persas: dar a volta no estreito, atacar no estreito e não atacar. Dessa forma, sob mediação, o aluno foi estimulado a analisar as possibilidades, determinando as melhores decisões para cada exército e organizando-as em uma "Matriz de Ganho". Segundo o autor, a OME aplicada estimulou os alunos no desenvolvimento do raciocínio e na tomada de decisões, além de tornar a matemática mais atraente, através do uso da experimentação, de situações problemas e do lúdico.

Com base nesses trabalhos, observa-se que a metodologia da OME produz resultados promissores. E nessa perspectiva foi proposta uma oficina com alunos do segundo ano, sendo abordados conteúdos de geometria espacial, de modo específico o volume e a área superficial do prisma hexagonal regular, utilizando como metodologia a Oficina de Matemática Experimental (OME).

Capítulo 2

OME “Combatendo a seca, preservando o bolso”

Neste capítulo apresentamos os objetivos e metodologias da OME “Combatendo a seca, preservando o bolso”, bem como a forma de avaliação dos resultados da oficina.

2.1 Descrição da Oficina

A oficina “Combatendo a seca, preservando o bolso” basea-se numa história que se passa em um povoado de uma cidade do interior da Bahia, a qual enfrenta momentos de escassez de água. A localidade é distante da zona urbana e o poder público municipal não prioriza a resolução deste problema, desta forma os próprios moradores resolveram construir o reservatório para armazenamento de água. A comunidade contou com a contribuição do professor de matemática do povoado e um pedreiro, que tinham o desafio de propor o modelo do reservatório, optando pelo formato de um prisma hexagonal regular. Na sequência é proposto aos alunos que resolvam a seguinte situação-problema: “Determine as medidas do reservatório de forma que o custo de material seja o mais barato possível”, cumprindo assim, as funções do professor e do pedreiro. Assim, o problema se resume a encontrar as medidas do lado da base e da altura do reservatório de forma que o custo da construção seja mínimo. O roteiro desta oficina se encontra no Apêndice A.

Combatendo a seca, preservando o bolso.

Em um povoado localizado em um município da Bahia, bem distante da zona urbana, a seca está sendo considerada uma das piores das últimas décadas. A prefeitura não cumpriu a promessa de construir um reservatório para captar a água da chuva a fim de solucionar o problema. Revoltados com a situação, os moradores resolveram fazer a construção por conta própria, ficando acertado que o valor da obra seria obtido através de campanhas beneficentes.
Entre os integrantes da comunidade, tinha um pedreiro experiente, o sr. Tales, e o professor de matemática da escola do povoado, Pitágoras. Os dois ficaram responsáveis para definir o modelo, o custo, e as medidas do reservatório. Inicialmente, Pitágoras sugeriu que fosse um cilindro, mas Tales afirmou que a base não poderia ser circular, pois para a construção de toda a estrutura, incluindo a base, com exceção da tampa, seriam utilizadas placas quadradas de concreto de um metro de lado, sugerindo então que o reservatório fosse um cubo. Então Pitágoras recomendou que a base do reservatório seja um hexágono regular, explicando que com esse modelo poderia construir um reservatório com custo menor que o sugerido por Tales, além dos cálculos não complicarem demais.
Para determinar a capacidade que deveria ter o reservatório, foi feita uma pesquisa do consumo de água da comunidade. Eles notaram que haviam 100 famílias com 5 pessoas, em média, e cada integrante consumia 100 litros por dia. Ficou acertado que era necessário armazenar água para 20 dias.
Sabendo que o metro quadrado de placa de concreto custa R100,00, tente projetar o reservatório com base hexagonal que contemple as necessidades da comunidade, ou seja: Determine as medidas do reservatório de forma que o custo de material seja o mais barato possível.

Na oficina, o aluno é estimulado através de um problema matemático relacionado com seu cotidiano, contextualizado, visto que, as regiões onde os alunos moram apresentam características de transição entre a Mata Atlântica e o semiárido baiano, e assim, em determinadas épocas do ano ocorrem períodos de estiagem, ocasionando a falta de água (veja história acima). Como uma solução imediata para resolver o problema da seca é a construção de reservatórios, são usados conceitos de geometria espacial e plana, neste caso na escolha do formato de prisma hexagonal regular para o reservatório. É importante pontuar que dentro os Parâmetros Curriculares Nacionais, recomenda-se “usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções” (BRASIL, 2002, p.125). Além disso, é esperado que os alunos utilizem conceitos de álgebra no momento que manipular as equações do volume e da área superficial do prisma, a fim de encontrar o custo mínimo.

Desta forma, a oficina tem como objetivos matemáticos: *i*) Apresentar ao aluno uma situação interessante onde precisa solucionar um problema usando os conceitos de geometria plana e espacial, além das habilidades algébricas; *ii*) familiarizar o aluno com problemas de minimização de custo; e *iii*) estimular o aluno a modelar um problema através do desenvolvimento de uma função. A oficina também teve objetivos não matemáticos, como: *i*) Expor os participantes ao desafio de enfrentar um problema difícil de ser resolvido; *ii*) habituar os participantes a formular perguntas e discutir possíveis respostas; *iii*) estimular os participantes a reconhecer que regras são convenções; *iv*) estimular os participantes a formular e seguir instruções de ação; e *v*) introduzir a ideia de simplificação como estratégia de resolução de problemas.

Para atender os objetivos, a aplicação da oficina segue algumas etapas e recomendações. Primeiro os alunos são organizados em equipes e, na sequência, é solicitado que leiam a historia "Combatendo a seca, preservando o bolso". Após a leitura, os grupos devem discutir o problema proposto: "determine as medidas do reservatório de forma que o custo de material seja o mais barato possível", e iniciar a resolução para encontrar a capacidade do reservatório, com auxílio dos seguintes recursos: como lápis, borracha, folha A4 e calculadora. A atividade seguinte consiste em determinar a área da superfície e o custo do reservatório. Na sequência, com a mediação do professor, os grupos devem trabalhar na busca de medidas para o reservatório que minimizem o custo do material usado na construção, disponibilizando a Tabela 2.1 para anotar os valores encontrados.

Lado: x	**Altura:** y	**Área da base:** AB	**Área lateral - AL**	**Área total** AT	**Custo**

Tabela 2.1: Modelo da tabela de custo do reservatório

A seguir é recomendada uma discussão entre os grupos, mediada pelo professor, sobre as estratégias utilizadas para abordar o problema de minimização de custo. Após este momento, o mediador deve utilizar a planilha gerada no *software Excel* (veja Tabela 2.2), para discutir os valores mínimos encontrados por cada equipe, a qual deve ser preenchida juntamente com os alunos. Por fim, para uma melhor compreensão do processo de minimização, com o auxílio do *software Geogebra*, apresenta-se o gráfico da função que representa a área do reservatório em termos do lado da base, no qual pode-se visualizar o ponto de mínimo da função (veja Figura 3.15).

Lado: x	**Altura:** y	**Área da base:** S_b	**Área lateral:** S_l	**Área total:** S_t	**Custo:** $R\$$
10	3,85	259,81	256	467,04	49.074,77
9	4,75	210,44	256,60	467,04	46.704,43
8	6,01	166,28	288,68	454,95	49.495,20
7	7,86	127,31	329,91	457,22	45.722,02
7,5	6,84	146,14	307,92	454,06	45.406,19
7,6	6,66	150,06	303,87	453,93	45.393,34
7,7	6,49	154,04	299,92	453,96	45.396,22
7,65	6,58	152,05	301,88	453,93	45.392,84
7,63	6,61	151,25	302,67	302,67	45.392,57

Tabela 2.2: Tabela de custo do reservatório

2.2 Forma de Avaliação da Oficina

Para a avaliação dos resultados da oficina, são usados critérios semelhantes aos de Silva (2017), os quais são pautados em dois conceitos: “Envolvimento” e “Êxito”, como mostrado nas tabelas 2.3 e 2.4. Entende-se por envolvimento a medida do interesse, concentração e empenho na execução das atividades propostas pela oficina, e êxito como sendo o percentual de cumprimento das atividades propostas pela oficina calculado através das respostas expressas na Tabela 2.1. Os critérios de êxito tiveram uma modificação ao ser acrescentado o percentual de 75% correspondente ao cumprimento da etapa de determinar o custo, mas não encontrar outros valores que proporcionassem um custo menor. É considerado o percentual médio de êxito da turma como a média aritmética dos percentuais de êxito dos grupos que a compõem. Além desses critérios, também devem ser coletadas as opiniões dos participantes através da ficha de avaliação, elaborada pelo autor deste trabalho, apresentada na Figura 2.1, com o objetivo de saber se o aluno compreendeu o problema apresentado, se a história foi estimulante e qual é o nível que eles atribuem ao problema. Dessa forma, os resultados desta ficha colaboraram para a avaliação da oficina pelo aluno, o que constituiu um diferencial deste trabalho.

Características da envolvimento dos alunos de cada turma nas atividades propostas pela OME	**Envolvimento**
Inferior a 30% dos alunos da turma envolvidos na realização das atividades propostas pela oficina no período da aplicação.	Ruim
De 30% até inferior 50% dos alunos da turma envolvidos na realização das atividades propostas pela oficina no período da aplicação	Regular
De 50% até inferior a 75% dos alunos da turma envolvidos na realização das atividades propostas pela oficina no período da aplicação	Bom
De 75% até inferior a 90% dos alunos da turma envolvidos na realização das atividades propostas pela oficina no período da aplicação	Ótimo
Maior ou igual de 90% dos alunos da turma envolvidos na realização das atividades propostas pela oficina no período da aplicação	Excelente

Tabela 2.3: Avaliação de envolvimento

Características da resposta de cada grupo no formulário	**Percentual de êxito**
Não conseguiu determinar um lado ou a altura do reservatório.	0%
Determinou um lado e a altura do reservatório, mas não conseguiu determinar o custo.	50%
Determinou o custo, mas não encontrou outros valores que proporcionasse um custo menor.	75%
Determinou o custo aproximado com o mínimo.	100%

Tabela 2.4: Avaliação de êxito

OFININA DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL		DATA: 02/08/2018
ALUNO:_________________________________		GRUPO: _________
Questão 1: Você compreendeu o problema apresentado na história?		
Sim ( )	Não(_)	Um pouco ( )
Questão 02: A história despertou o interesse em resolver o problema?		
Sim ( )	Não(_)	Um pouco ( )
Questão 03: Qual foi o nível do problema para encontrar o custo do reservatório?		
Fácil ( )	Difícil (_)	Médio ( )
Questão 04: Você conseguiu encontrar o valor mínimo para o custo?		
Sim ( ): Qual:________________	Não(_)	
Questão 05: Qual sua crítica/sugestão desta atividade?		
____		
____		
____		

Figura 2.1: Ficha de avaliação do aluno

Capítulo 3

Aspectos Matemáticos da OME

No problema proposto da história o aluno é motivado a encontrar as medidas de um reservatório que atenda as necessidades da comunidade, de forma que o custo de material seja o mais barato possível. O formato escolhido pelos personagens, *Pitágoras* e *Tales*, para o reservatório foi um prisma hexagonal regular. Assim, nesta seção, abordamos alguns conceitos necessários para a resolução do problema. Primeiro o conceito de polígonos, seguido das áreas de algumas figuras planas, e depois a definição de poliedros e de prisma hexagonal regular, tratando da área superficial e volume. E por fim, mostramos a resolução por meio do cálculo diferencial.

3.1 Geometria plana

Nos tópicos a seguir serão abordados os conceitos de polígonos regulares e áreas de algumas figuras planas, como o quadrado, retângulo, paralelogramo e triângulo. Em particular serão apresentadas fórmulas para o cálculo da área do triângulo equilátero e do hexágono regular. Os conteúdos deste capítulo estão baseados em Giovanni e Bonjorno (2015) e Muniz Neto (2012).

3.1.1 Polígono regular

Definição 3.1 *Sejam $n \geq 3$ um natural e $A_1,A_2,...,A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2...A_n$ é um polígono (convexo) se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui e no que segue, $A_{n+1} = A_1$).*

Os pontos $A_1, A_2, ...,A_n$ são ditos vértices e os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, ...,A_{n-1}A_n, A_nA_1$ são os lados. Um polígono de n lados é chamado um n-ágono, sendo que nos casos $n = 3,4,5,\ldots,10$ são usados os nomes tradicionais, triângulo, quadrilátero, pentágono, hexágono, etc. Um polígono é dito regular quando as medidas dos ângulos internos são iguais e os lados são congruentes entre si, por exemplo, a Figura 3.1, cujos vértices são os pontos A, B, C, D e E, representa um pentágono regular. Para os casos particulares de polígonos regulares de $3, 4, 5, \ldots, 10$ lados são usados os nomes tradicionais: triângulo equilátero, quadrado, pentágono regular, etc.

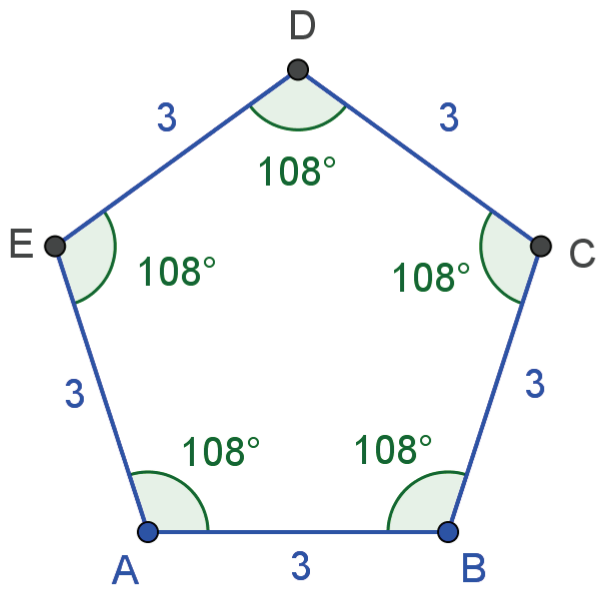


Figura 3.1: Pentágono regular

3.1.2 Áreas de algumas figuras planas

Segundo Muniz Neto (2012), “Intuitivamente, a área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado”. Como sabemos nosso ponto de partida para o cálculo de áreas é “um quadrado de lado 1 cm tem área de 1 cm^2”. Assim, para medir a área de um polígono devemos determinar o número de unidades de área (quadrados de lado 1) que ele contém. Dessa forma, sendo x, y e z números reais positivos, é possível demonstrar as seguintes fórmulas para a área dos polígonos listados a seguir:.

- Um quadrado de lado x tem área $S = x^2$
- Um retângulo de lados x e y tem área $S = xy$
- Um paralelogramo de base x e altura y tem área $S = xy$
- Seja ABC um triângulo de lados $\overline{BC} = x$, $\overline{AC} = y$ e $\overline{AB} = z$ e alturas h_x, h_y e h_z, respectivamente relativas aos lados x, y e z, então:

$$S = \frac{xh_x}{2} = \frac{yh_y}{2} = \frac{zh_z}{2} \tag{3.1}$$

3.1.3 Área do triângulo equilátero (S_T)

Um triângulo é dito equilátero se as medidas de seus lados são iguais. Desejamos então encontrar a área do triângulo equilátero em função do lado. Em primeiro lugar determinamos a altura h em função do lado e depois usamos a fórmula da área do triângulo.

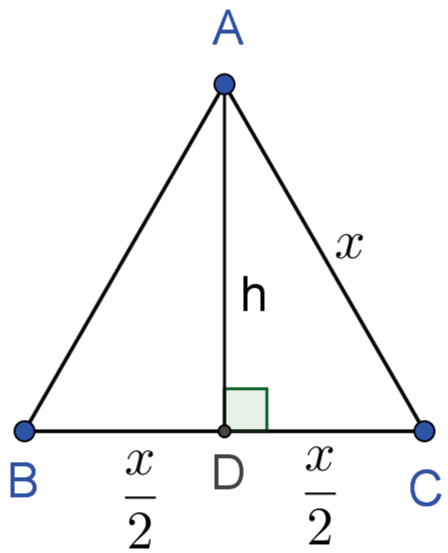


Figura 3.2: Triângulo equilátero

Analisando a Figura 3.2, com medida do lado igual a x, traçamos a altura relativa ao lado BC, a qual também é mediana e, portanto, determina duas partes de medidas iguais a $\frac{x}{2}$. Logo, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ADC temos.

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2,$$

O que nos dá:

$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2}. \tag{3.2}$$

Usando as equações (3.1) e (3.2), temos que:

$$S_T = \frac{xh_x}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}. \tag{3.3}$$

3.1.4 Área do hexágono regular (S_H)

Para calcular a área do hexágono regular devemos observar que é possível dividi-lo em 6 triângulos equiláteros congruentes, como mostra a Figura 3.3. Portanto, a área do hexágono será dada por:

$$S_H = 6S_T = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2}. \tag{3.4}$$

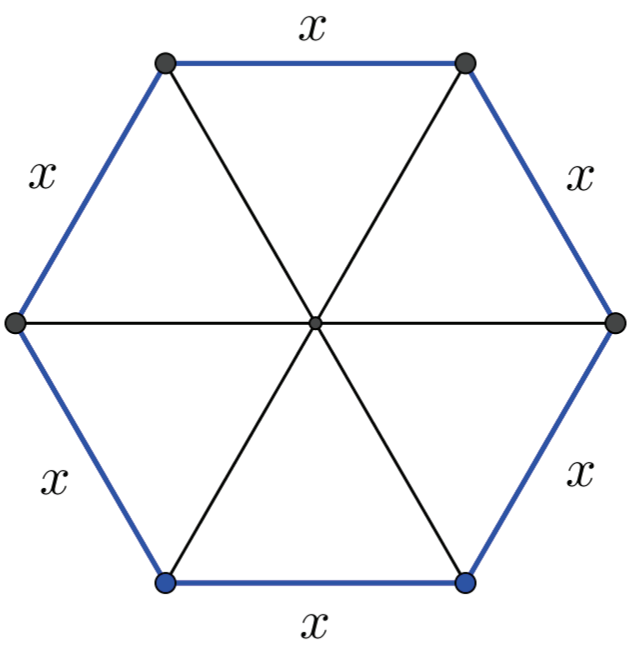


Figura 3.3: Hexágono regular

3.2 Geometria espacial

A geometria espacial trata do estudo da geometria em três dimensões. E nesta seção será dada uma abordagem aos poliedros, enfatizando o volume e área superficial dos prismas.

3.2.1 Poliedros

É bastante comum encontrar nos livros no Ensino Médio a definição de poliedros como sólidos limitados por polígonos planos. No entanto, Giovanni e Bonjorno (2005), traz uma extensão à definição, dizendo que "dois desses polígonos não estão num mesmo plano" e "cada lado de um polígono é comum a dois e somente dois polígonos". Esta definição está de acordo com Muniz Neto (2012), que, primeiramente, defini os poliedros como "uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono". No entanto, o autor chama a atenção de que a definição citada pode gerar um poliedro como das Figuras 3.4 ou 3.5, e este segundo parece ser estranho. Assim, Muniz Neto (2012) define poliedro da seguinte forma:

Definição 3.2 (Prisma) *Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:*

1. *Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.*

2. *A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.*

3. *É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).*

Com base nessa definição, evitamos poliedros "estranhos" como o da Figura 3.5, pois não atenderia o item 3.

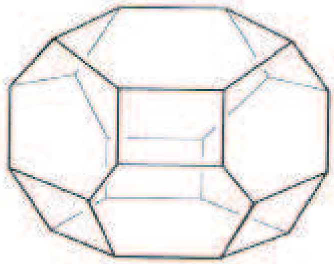


Figura 3.4: Poliedro

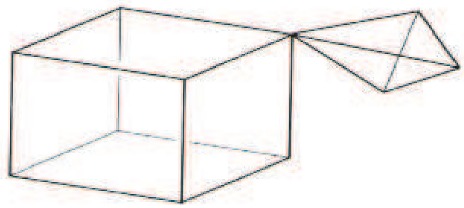


Figura 3.5: Poliedro estranho

Um poliedro é dito convexo "se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos" (MUNIZ NETO, 2012), como observado na Figura 3.6. E um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas. Estes poliedros são conhecidos deste a antiguidade, principalmente pelo filósofo grego Platão (427 – 347 a.C), e existem apenas cinco, a saber, o tetraedro (4 faces), hexaedro regular (cubo-6 faces), octaedro regular (8 faces), dodecaedro regular (12 faces) e o icosaedro (20 faces). A demonstração da existência de apenas cinco poliedros regulares pode ser encontrada em (MUNIZ NETO, 2012).

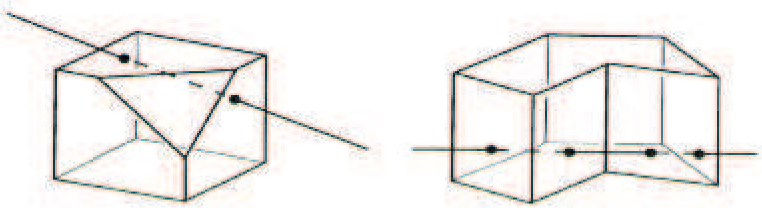


Figura 3.6: Poliedro convexo e poliedro não convexo

3.2.2 Prismas

Uma categoria especial dos poliedros são os prismas, definido por Giovanni e Bonjorno (2005) da seguinte forma:

Definição 3.3 (Prisma) *Considere dois planos paralelos α e β, um polígono P contido em α e uma reta r que intersecta α e β, mas não intersecta P. Chama-se de Prisma de base poligonal, ou apenas Prisma, a figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta r, com uma extremidade no polígono P e a outra no plano β.*

Em outras palavras, um prisma é um poliedro com duas faces congruentes e paralelas, chamadas de bases, e as demais faces são paralelogramos obtidos ligando-se os vértices correspondentes das duas faces paralelas. Os segmentos que unem duas faces são chamados de arestas. Para exemplificar, veja a Figura 3.7, onde as faces da base, ou simplesmente bases, são os polígonos $A_1A_2 \ldots A_6$ e $B_1B_2 \ldots B_6$, os polígonos $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \ldots, A_6A_1B_1B_6$ são as faces laterais e as arestas são os segmentos $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_6B_6$.

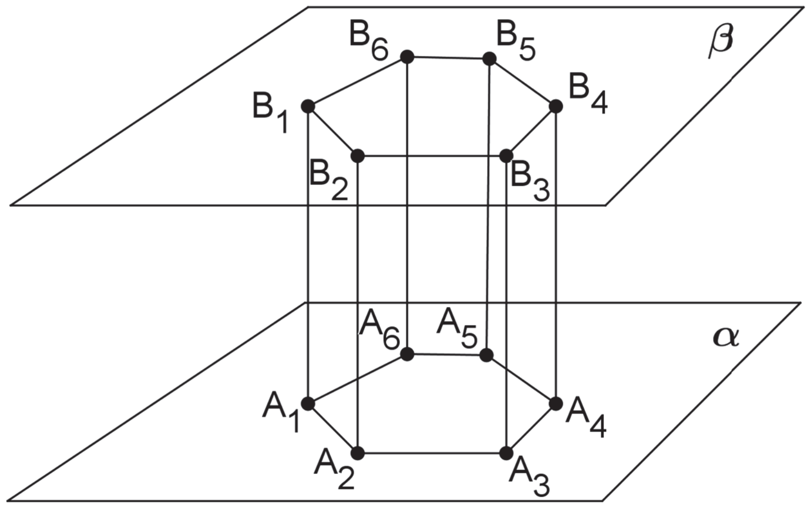


Figura 3.7: Prisma

Os prismas são classificados de acordo com o número de lados do polígonos da base. Assim, se o polígono da base tiver 3 lados, chama-se de prisma triangular, o polígono de 4 lados, prisma quadrangular, de base com 5 lados, prisma pentagonal, e assim sucessivamente. Além disso, se as arestas laterais forem perpendiculares à base, diremos que o prisma é reto.

Dentre os prismas, destaca-se o paralelepípedo (ver Figura 3.8), o qual é definido como o prisma cujas bases são paralelogramos. Quando a base for um retângulo e o prisma for reto, dizemos que é um paralelepípedo reto retângulo. Dentre esses paralelepípedos, o cubo é um tipo especial, o qual possui todas as arestas congruentes, bem como as faces e bases (ver Figura 3.9). E um prisma é dito regular se for reto e as bases forem polígonos regulares.

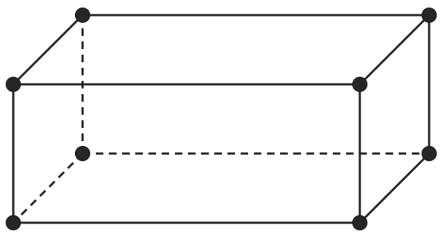


Figura 3.8: Paralelepípedo

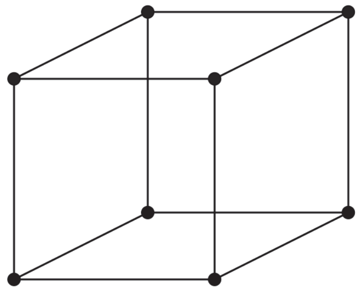


Figura 3.9: Cubo

3.2.3 Volume dos prismas

De forma intuitiva, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Para medir essa quantidade é necessário definir uma unidade padrão, neste caso, nossa unidade de medida será o volume de um cubo de aresta $1cm$, que por definição é $1cm^3$. A seguir, por sua simplicidade, enunciaremos sem demonstração a fórmula para o volume de um paralelepípedo (para uma prova veja (MUNIZ NETO, 2012)) .

Proposição 3.2.1 (Volume do paralelepípedo retângulo) *O volume, V, de um paralelepípedo retângulo de arestas a, b e c é $V = abc$. Aqui a, b e c são números reais positivos.*

No caso das arestas serem números inteiros positivos, essa fórmula é bem intuitiva e fácil de explicar aos alunos. Basta usar como unidade de medida de volume um cubo de aresta 1, e mensurar quantas vezes esse cubo cabe no paralelepípedo. De acordo com a Figura 3.10, observa-se que existem 12 (6×2) cubos em cada uma das 3 camadas horizontais, ou seja, um total de 36 ($6 \times 2 \times 3$) cubos. Ao considerar cada cubo com, por exemplo, 1 cm de aresta, chega-se a conclusão que o paralelepípedo tem $36cm^3$ de volume. Portanto, para calcular o volume do paralelepípedo deve-se multiplicar as medidas das arestas.

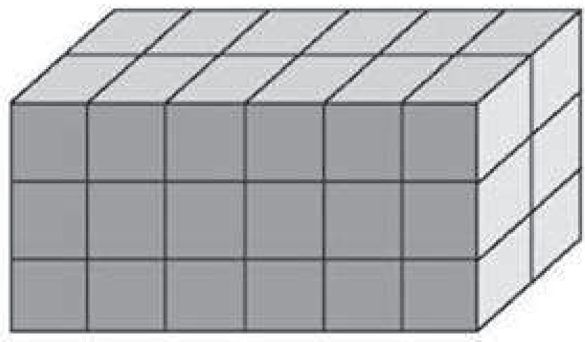


Figura 3.10: Paralelepípedo divido em cubos de aresta 1

Em particular, pode-se considerar uma de suas faces de dimensões a e b, que esteja contida em um plano horizontal, de base e a dimensão c de altura. Como o produto ab é área da base, é comum dizer que o volume do paralelepípedo é igual ao produto da área do retângulo da base pela altura c, ou seja $V = abc$.

Para o cálculo do volume de um prisma, usamos uma ferramenta poderosa, a saber: o Princípio de Cavalieri. Para uma demonstração veja (MUNIZ NETO, 2012).

Proposição 3.2.2 (Princípio de Cavalieri) *São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm mesmo volume.*

Uma forma de convencer o discente do Ensino Básico sobre a validade do Princípio de Cavalieri é através do uso de uma resma de papel como mostra a Figura 3.11. Nela, mostra-se a mesma resma na posição inicial e depois em duas posições produto de movimentos horizontais suaves. Percebe-se que os sólidos possuem uma mesma área de base (área de uma folha), e quando uma resma foi deslocada, formando figuras geométricas distintas, o volume não se alterou, pois as "secções" horizontais (as folhas) têm as mesmas áreas.

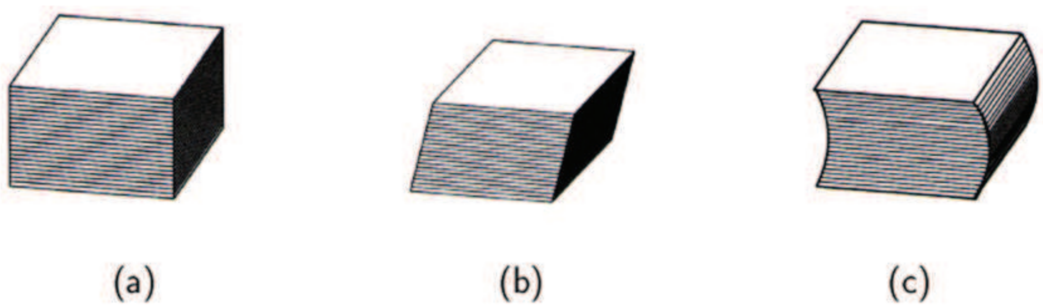


Figura 3.11: Princípio de Cavalieri

Proposição 3.2.3 (Volume do Prisma) *O volume, V, de um do prisma de área da base S_b e altura h é $V =$ área da base $\times$ altura $= S_bh$.*

A Proposição 3.2.3 diz que a forma de calcular o volume de um prisma é semelhante daquela usada para o cálculo do volume de um paralelepípedo retângulo: área da base vezes altura. Isso se justifica pelo Princípio de Calalieri. Ao tomar um prisma e um paralelepípedo retângulo, ambos de área da base S_b, como da Figura 3.12, e traçar um um plano paralelo ao plano que contém a base das figuras, as áreas das secções dos sólidos serão iguais, pois cada seção paralela ao plano que contém a base é congruente à base da figura. Dessa forma, pela Proposição 3.2.2, conclui-se que os volumes são iguais.

Em particular, usando a Proposição 3.2.3 e a equação (3.4), um prisma hexagonal regular de lado da base x e altura y, terá o seguinte volume::

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2y. \tag{3.5}$$

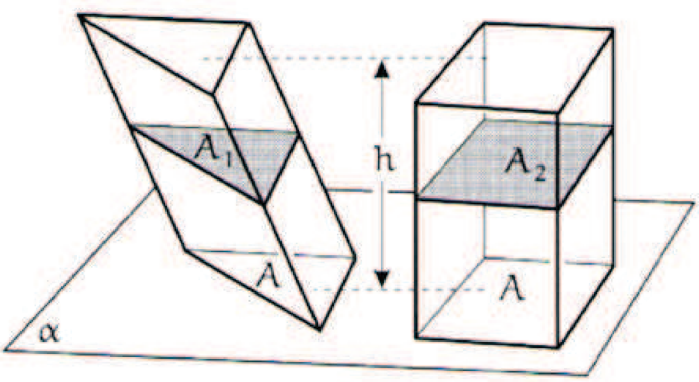


Figura 3.12: Volume do prisma

3.2.4 Área da superfície dos prismas

Para calcular a área da superfície S de um prisma é necessário calcular a área de suas faces. Por exemplo, no paralelepípedo reto retângulo, de dimensões a, b e c, a área total da superfície será dada pela soma das áreas das faces, as quais têm o formato de um retângulo, ou seja, $S = 2ab + 2bc + 2ac$, (ver Figura 3.13). De forma geral, considere S_b (soma das áreas das bases), S_l (soma das áreas laterais) e S (área total), então:

$$S = S_b + S_l.$$

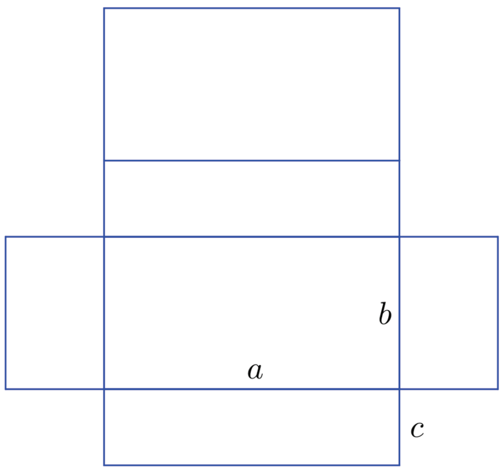


Figura 3.13: Paralelepípedo planificado

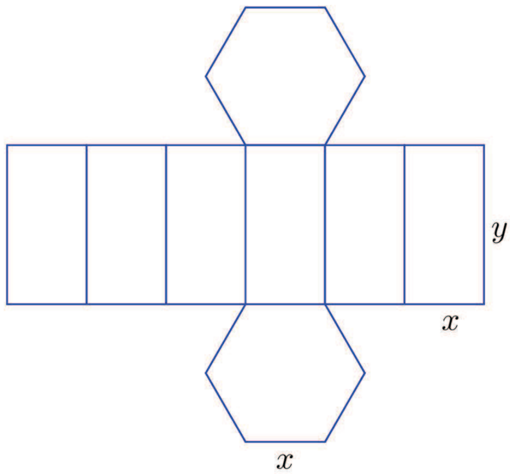


Figura 3.14: Prisma hexagonal planificado

No caso particular de um prisma triangular regular de altura y, como as bases serão triângulos equiláteros de lado x e as faces laterais retângulos de lados x e y, a área superficial total será dada por:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 3xy.$$

De forma análoga, um prisma hexagonal regular de lado da base x e altura y, como o prisma planificado da Figura 3.14, terá sua área superficial total igual a:

$$S = 3\sqrt{3}x^2 + 6xy. \tag{3.6}$$

3.3 Um problema de otimização

O problema proposto na OME "Combatendo a seca, preservando o bolso" pode ser abordado por meio de experimentações, ou seja, um processo de tentativa e erro, fazendo uso de estratégias para minimizar o custo. Por outro lado, o mesmo problema se enquadra dentro dos chamados problemas de otimização, do Calculo Diferencial, pois "tratam-se de problemas que são modelados por uma função e buscamos obter os valores de máximo ou mínimo da função"(MUNIZ NETO, 2012, Unidade 15).

Muniz Neto (2012) propõe o seguinte roteiro para resolver problemas de otimização:

1. Identificar as variáveis do problema, isto é, quais grandezas representam a situação descrita no problema. O desenho de gráficos e diagramas pode ser útil para isso.

2. Identificar os intervalos de valores possíveis para as variáveis. São os valores para os quais o problema tem sentido físico.

3. Descrever as relações entres estas variáveis por meio de uma ou mais equações. Em geral, uma destas equações fornece a grandeza que queremos otimizar, isto é encontrar seu máximo ou mínimo. Se há mais de uma variável no problema, substituir uma ou mais equações naquela principal permitirá descrever a grandeza que queremos otimizar em função de uma só variável.

4. Usar a primeira e segunda derivada da função que queremos otimizar, encontrar seus pontos críticos e determinar aquele(s) que resolve(m) o problema. Neste ponto é importante estar atento para o fato de que alguns dos pontos críticos da função podem estar fora do intervalo de valores possíveis para a variável (item 2) e devem ser desprezados.

Com relação ao item 1, note que as variáveis do problema da OME já foram determinadas, sendo elas o lado da base x, a altura y e a área superficial s. Do item 2, podemos afirmar que os valores possíveis para as variáveis são os números reais positivos, ou seja, o intervalo real $\mathbb{R}_+^*$.

Do item 3, é necessário otimizar a equação da área do reservatório em função do lado da base. Como o reservatório não tem tampa, a equação da área superficial total será

$$S = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2} + 6xy. \tag{3.7}$$

Devemos então escrever uma equação da área em função do lado da base. Analisando a história, percebe-se que a capacidade do reservatório deve ser de $1.000.000l = 1000m^3$. Assim, substituindo o volume e evidenciando a variável y em (3.5), temos

$$y = \frac{2000\sqrt{3}}{9x^2}. \tag{3.8}$$

E substituindo a equação (3.8) em (3.7), obtemos

$$s(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{4000\sqrt{3}}{3x}. \tag{3.9}$$

Para o item 4, também necessitamos dos conceitos de cálculo diferencial, pois precisamos encontrar os pontos críticos, e assim, o ponto mínimo da função.

Então, vamos recordar alguns conceitos de cálculo segundo o olhar de Muniz Neto (2012), seguindo a seguinte sequência para a construção de gráfico: (i) Domínio e continuidade da função; (ii) assíntotas verticais e horizontais; (iii) derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento; (iv) valores de máximo e mínimo locais; (v) concavidade e pontos de inflexão; (vi) esboço do gráfico.

Domínio e continuidade da função

O domínio da função (3.9) é o intervalo real positivo, assim temos uma função $s : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Observa-se que função s é derivável para todo ponto de seu domínio, já que $x = 0$ não pertence à $\mathbb{R}_+^*$.

O teorema a seguir garante que a função s também é contínua, pois é derivável em todo ponto de seu domínio.

Teorema 3.3.1 *Seja f uma função definida em um intervalo aberto I. Se f é derivável em $x_0 \in I$ então f é contínua em x_0.*

Esse resultado é importante para a construção do gráfico pois garante, no sentido mais informal da definição, que não haverá interrupção para todos os pontos do domínio.

Assíntotas verticais e horizontais

Uma função contínua f tem assíntota vertical na reta $x = a$ se $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$. E tem assíntota horizontal na reta $y = b$ se $\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$.

Dessa forma, a função s tem assíntota vertical em $x = 0$, pois:

$$\lim_{x\to 0^+} s(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{4000\sqrt{3}}{3x}\right] = +\infty.$$

A função não possui uma assíntota horizontal, pois $\lim\limits_{x\to+\infty} s(x) = +\infty$, de fato:

$$\lim_{x\to+\infty} s(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{9\sqrt{3}x^3}{6x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{8000\sqrt{3}}{6x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9\sqrt{3}x^2}{6} + \lim_{x\to+\infty} \frac{8000\sqrt{3}}{6x} = +\infty.$$

Vale ressaltar que não é necessário analisar o limite de x tendendo a 0^-, pois o domínio da função está restrito ao intervalo $]0, +\infty[$. Além disso, o fato de $\lim_{x\to+\infty} s(x) = +\infty$ dá um indicativo de como será o esboço do gráfico.

Derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento

Para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função como em (3.9), devemos usar o resultado da seguinte proposição:

Proposição 3.3.2 *Seja $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável em (a, b) então:*

i) *f é não decrescente em (a, b) se, e somente se, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Além disso, se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é crescente em (a, b).*

ii) *f é não crescente em (a, b) se, e somente se, $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Além disso, se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é decrescente em (a, b).*

Veja que no nosso caso $a = 0$ e $b = +\infty$.

Assim, derivando a função s dada em (3.9), obtemos

$$s'(x) = 3\sqrt{3}x - \frac{4000\sqrt{3}}{3x^2}. \tag{3.10}$$

Para determinar os valores de x positivos para os quais $s'(x) > 0$ fazemos,

$$\frac{9\sqrt{3}x^3 - 4000\sqrt{3}}{3x^2} > 0 \Leftrightarrow 9\sqrt{3}x^3 - 4000\sqrt{3} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{\frac{4000}{9}}.$$

Por simplicidade usaremos a notação $\theta = \sqrt[3]{4000/9}$, veja que θ é aproximadamente $7{,}6314\cdots$. Assim, acabamos de provar que $s'(x) > 0$ para $x > \theta$. De forma análoga concluímos que $s'(x) < 0$ para $0 < x < \theta$. Logo, pelo Teorema 4.4.2, s é crescente no intervalo $(\theta, +\infty)$ e decrescente no intervalo $(0,\theta)$.

Valores de máximo e mínimo locais

Como sabemos, os extremos de uma função são seus os valores máximos e mínimos locais. A proposição a seguir afirma que os pontos críticos de uma função, isto é, pontos onde a derivada não existe ou se anula, são os únicos onde a função pode assumir seus extremos.

Proposição 3.3.3 *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função f contínua definida em um intervalo aberto I. Se f tem máximo ou mínimo local em $x = c$, $c \in I$ e f é derivável em c então $f'(c) = 0$.*

Veja que o ponto θ é um ponto crítico da função s, pois $s'(\theta) = 0$. Mas, é claro que como s é decrescente antes de θ e crescente depois de θ, então θ é um ponto de mínimo local.

Concavidade

Para analisar a concavidade de uma função em um intervalo I do seu domínio é necessário analisar a segunda derivada f''. Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f tem concavidade para cima em I. Mas se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f tem concavidade para baixo em I.

De (3.10) segue que $s''(x) = 3\sqrt{3} + \frac{8000\sqrt{3}}{3x^3} > 0$, para todo $x > 0$. Dessa forma, o gráfico de s tem concavidade para cima para todo $x > 0$.

Esboço do gráfico

Observe que o mínimo local de s é obtido calculando a imagem de s na abcissa $x = \theta$ chegando a que $s(\theta)$ é aproximadamente igual a 453,93. Por outro lado, sendo $c(x)$ a função que descreve o custo do material para a construção do reservatório. É claro que

$$c(x) = 100s(x),$$

pois o valor do metro quadrado de placa de concreto é R\$100,00. Como 100 é uma constante positiva temos que s e c têm o mesmo ponto de mínimo. Portanto, o custo mínimo é $c(\theta)$ o que nos dá um valor aproximado de R\$45.393,00.

Juntando todas estas informações podemos esboçar o gráfico da função s. E estas informações conferem com o gráfico apresentado na Figura 3.15.

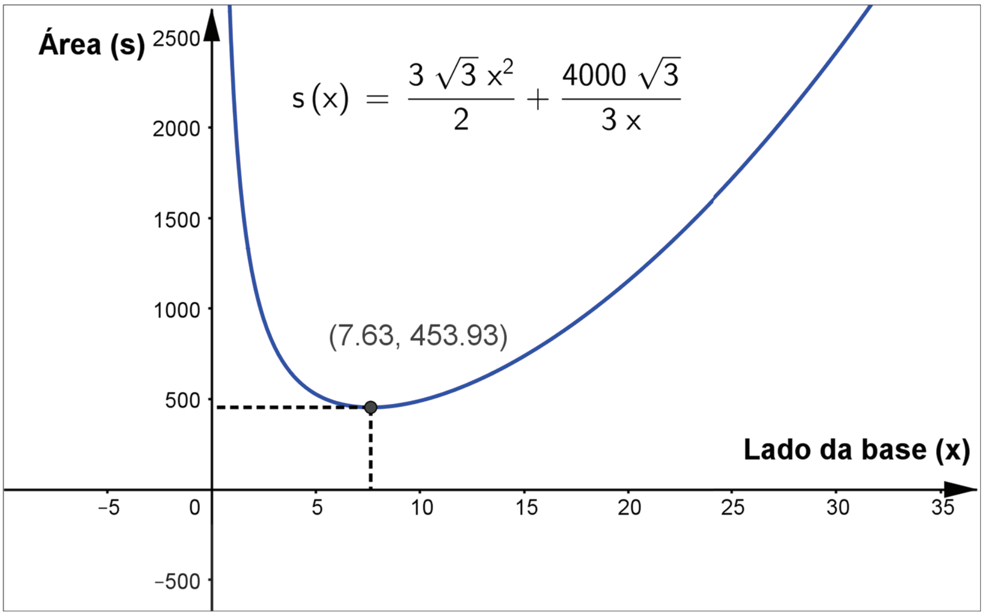


Figura 3.15: Gráfico da área em função do lado do reservatório

3.4 Otimizando o custo pela desigualdade das médias

Nesta seção, usaremos a desigualdade das médias para minimizar o custo do reservatório. Esse método é interessante pois está ao alcance dos alunos do Ensino Médio.

A desigualdade das médias (veja p. e. Morgado e Carvalho (2015)) afirma que a média aritmética (MA) dos números positivos x_1,x_2,...,x_n é maior do que ou igual a sua média geométrica (MG), ou seja,

$$MG = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = MA.$$

Além disso, a igualdade dessas médias será válida se, e somente se, os números forem todos iguais, isto é, $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n$.

Queremos então minimizar a função

$$s(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{4000\sqrt{3}}{3x}.$$

Tomando $x_1 = \frac{4000\sqrt{3}}{6x}$, $x_2 = \frac{4000\sqrt{3}}{6x}$ e $x_3 = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2}$, temos

$$s(x) = \frac{4000\sqrt{3}}{6x} + \frac{4000\sqrt{3}}{6x} + \frac{3\sqrt{3}x^2}{2} \geq 3\sqrt[3]{(\frac{4000\sqrt{3}}{6x})(\frac{4000\sqrt{3}}{6x})(\frac{3\sqrt{3}x^2}{2})} = 300\sqrt[6]{12}.$$

Por outro lado, $MA = MG$ se, e somente se, $x_1 = x_2 = x_3$, logo

$$s(x) = 300\sqrt[6]{12} \iff \frac{4000\sqrt{3}}{6x} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2} \iff x = \sqrt[3]{\frac{4000}{9}} := \theta.$$

Assim, $300\sqrt[6]{12}$ (aproximadamente 453,93) é o valor mínimo da função e $\theta = \sqrt[3]{4000/9}$ (aproximadamente 7,63) é o ponto mínimo, pois

$$s(\theta) = 300\sqrt[6]{12}.$$

Capítulo 4

Resultados e discussão

Neste capítulo apresentamos os resultados e discussão da oficina. Desta forma, iniciamos com o relato de experiência e em seguida com a análise da oficina, usando os critérios de avaliação determinados no Capítulo 2.

4.1 Relato de Experiência

A OME "Combatendo a seca, preservando o bolso" foi aplicada no Colégio Estadual Ruy José de Almeida na cidade de Laje - BA, situada no Vale do Jiquiriçá, Recôncavo baiano, no dia 02 de agosto de 2018, com duração de 04 aulas de 50 minutos. O público alvo foi os alunos do segundo ano do Ensino Médio de diferentes turmas, totalizando 16 participantes, divididos em quatro grupos (A, B, C e D). Vale salientar que a turma teve esse limite de alunos seguindo as recomendações de Pereira (2017) e Araújo (2017), visto que as turmas regulares tem em média 40 alunos, não sendo apropriado para aplicação de uma OME. A seleção dos participantes foi feita por meio de uma inscrição prévia, realizada pelos próprios alunos que expressaram interesse pela oficina.

A disposição do ambiente na sala e os materiais utilizados pelos alunos foram providenciados com antecedência, como recomendado por Pereira (2017) e Araújo (2017). Para iniciar a atividade foi distribuída uma apostila contendo a história e o problema proposto. Em seguida, os grupos iniciaram a leitura da história e organizaram os dados apresentados no texto para resolver o problema: determinar as medidas do reservatório de forma que o custo de material seja o mais barato possível. Os alunos utilizaram alguns recursos para auxiliar na resolução do problema, como folha A4, lápis, borracha e calculadora científica[1].

Uma forma de abordar o problema proposto é por experimentação. Dessa forma, o primeiro passo é calcular a capacidade do reservatório. Como existem 500 habitantes no povoado, e o consumo médio de água é de 100 litros, o gasto diário de água é de

[1] As calculadoras foram disponibilizas, mas os alunos optaram por usar a calculadora do próprio celular.

50.000 litros. Mas é necessário armazenar água para 20 dias, logo o reservatório deve ter a capacidade 1.000.000 de litros.

Na história é informado que a construção será feita por blocos de concretos com o custo de $R\$100{,}00$ o m^2. Dessa forma, devemos encontrar a área da superficial do reservatório, e como o formato é de um prisma hexagonal, é necessário encontrar a medida do lado e da altura. Mas as únicas informações disponíveis são o formato e a capacidade, o que nos leva a utilizar a equação do volume (3.5). Neste momento, é necessário um cuidado especial, pois é preciso utilizar a unidade[2] de medida em m^3, ou seja, a capacidade será de $1.000m^3$.

Vale salientar que os alunos já tinham conhecimento do conteúdo de geometria espacial através das aulas ministradas no período regular, mas antes da oficina, com duração de 01 aula de 50 minutos, foram revisadas as fórmulas da área superficial e do volume do prisma hexagonal regular.

Como na equação do volume existem três incógnitas, e conhecemos apenas o volume, o lado e a altura serão variáveis. Assim, uma das formas de encontrar as medidas procuradas é por tentativa e erro, anotando os dados calculados em uma tabela. Esse é um processo exaustivo, mas, com o auxilio de uma calculadora e utilizando uma estratégia adequada, é possível nos aproximarmos razoavelmente da solução.

Inicialmente vamos substituir o volume encontrado em (3.5), ficando

$$1000 = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2y. \tag{4.1}$$

A partir deste momento, para cada valor atribuído a x usamos (4.1) para encontrar o valor correspondente para y. Depois, calculamos a área superficial do prisma hexagonal, usando (3.7), multiplicando o resultado por $R\$100{,}00$ para encontrar o custo.

Quando os alunos iniciaram a resolução, apesar de relatarem que compreenderam o problema, alguns erros foram cometidos. Os grupos B e C calcularam que a capacidade do reservatório deveria ser de 50.000 litros, pois esqueceram de multiplicar pelos 20 dias previstos para o armazenamento da água. Seguindo as recomendações gerais, esses grupos foram orientados a reler e discutir a história, feito isso eles encontraram, corretamente, o valor de 1.000.000 litros. Os grupos A e D conseguiram esse valor com facilidade.

Ao iniciarem o cálculo da medida do lado da base e da altura do reservatório, todos os grupos tiveram dificuldades. O grupo A determinou a capacidade do reservatório e logo converteu para a unidade metro cúbico, encontrando $1000m^3$, mas tentou determinar a medida do lado da base utilizando a equação da área superficial do prisma (3.7), quando o certo seria usar a fórmula do volume (3.5). No entanto, alguns componentes deste grupo não estavam convictos da resposta, e pediram orientação. Novamente, seguindo as

[2]Para converter litros para m^3, basta dividir por 1.000, pois $1l = \frac{1}{1.000}m^3$.

recomendações gerais, a dúvida foi devolvida ao grupo pedindo para reavaliarem a resposta, e um dos componentes falou que deveria ser usada a fórmula do volume, justificando que o valor encontrado foi da capacidade.

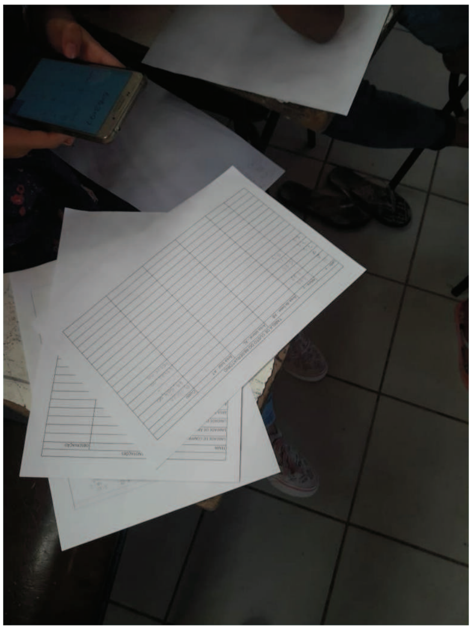


Figura 4.1: Grupo *A*

Figura 4.2: Grupo *B*

O grupo *D* encontrou o valor correto na unidade de metro cúbico, além de usar a equação do volume para determinar a capacidade, porém, achando que a medida do lado da da base deveria ser igual à altura do reservatório, visto que, na história a placa de concreto era de um metro quadrado. No entanto, um dos componentes desse grupo questionou aos demais se não poderia ter medidas diferentes. Eles consultaram o professor

Figura 4.3: Grupo C

Figura 4.4: Grupo D

sobre isso, quem por sua vez questionou se com os blocos de cerâmica disponíveis era possível construir um reservatório com medidas distintas para o lado da base e a altura. Após a discussão grupal, eles entenderam que seria possível.

O grupo C encontrou o valor da capacidade do reservatório e entendeu que deveria ser usada a fórmula do volume para determinar essas medidas. No entanto, o grupo estava usando o litro como unidade de volume, razão pela qual os integrantes foram orientados a mudar a unidade para o metro cúbico. Além disso, os componentes estavam convictos de que o lado da base deveria ter um metro, pelo fato da placa que seria usada na construção ter um metro quadrado, e que a altura poderia ser livre. Como os componentes não solicitaram ajuda, foram deixados à vontade deixando essa discussão para um momento posterior.

O grupo B encontrou o valor correto da capacidade, mas em litros, assim, os componentes foram orientados a fazer a conversão para metros cúbicos. A mesma equipe, ao determinar as medidas do reservatório, encontrou mais dificuldades do que as outras, não havendo convicção em relação à fórmula correta a ser usada. Ao ser solicitado, o professor indagou aos componentes da equipe acerca da grandeza que as medidas representavam, o que desencadeou uma discussão interna que levou à conclusão de que seria a fórmula do volume.

Após as primeiras orientações, os grupos começaram efetivamente a determinar as medidas dos lados, usando a álgebra para manipular a fórmula do volume, o que aconteceu, surpreendentemente, de forma natural, ou seja, expressando interesse na resolução sem apresentar grandes dificuldades. Os grupos A e D substituíram o valor do volume na incógnita V em (3.5), e questionaram o fato de ter duas grandezas, situação na qual não poderiam determinar uma medida específica. Mais uma vez, os grupos foram questionados se esse reservatório poderia ter medidas diferentes para o lado da base do reservatório. Neste momento, os componentes dos dois grupos perguntaram se poderiam "chutar" um valor para esse lado, e depois encontrar a medida da altura. Isso mostra que tinham encontrado uma forma de abordar o problema.

O grupo B estava com dificuldades, mas ouvindo os questionamentos do grupo A, pois estavam próximos, decidiram usar a mesma abordagem para resolver o problema. Esse fato foi confirmado quando foram indagados sobre o andamento da resolução do problema, afirmaram ter entendido, fazendo como o grupo A.

Já o grupo C, estava convicto do seu método de resolução, atribuindo $1m$ para o lado, até encontrar a altura aproximada de $270m$. Nesse momento, eles perguntaram se a abordagem estava correta, ouvindo sim como resposta, mas foram questionados se era possível construir um reservatório com essa altura. Os componentes disseram que era muito alto, por isso não era uma boa medida para a altura. Foi explicado que a medida do lado da base não era obrigatoriamente igual a $1m$, como eles tinham imaginado. A partir de então, eles começaram a determinar outros valores para o lado da base, obtendo novos valores para a altura.

Os grupos A e D, ao mesmo tempo, atribuindo $10m$ para o lado da base hexagonal e usando as calculadoras, conseguiram os valores aproximados de $3{,}85m$ e $3{,}9m$ para a altura, respectivamente, ou seja, praticamente o mesmo valor, como mostram as Tabelas 4.1 e 4.2. A partir desse momento, os grupos foram questionados sobre um dos problemas da história, o custo do material para a construção reservatório, na sequência, os grupos iniciaram os cálculos para determinar a área da superfície do mesmo.

Alguns instantes depois, o grupo C encontrou os valores de $6m$ para o lado da base e $16{,}6m$ (ver Figura 4.4) para a altura, errando no uso da fórmula do volume, pois esqueceram da divisão por quatro que aparece nela. Esse erro também foi cometido pelo grupo B, quando atribuíram o valor para o lado de $4m$ e encontraram $6{,}12m$ para a altura. Assim, percebido o erro, os grupos foram orientados a analisarem novamente a fórmula. Os valores da altura deveriam ser, respectivamente, $10{,}7m$ e $24m$. Após a correção da questão, os grupos iniciaram o processo de determinação da área e, consequentemente, do custo.

Depois de determinar os valores do lado da base da altura do prisma, os grupos partiram para determinar o custo do reservatório. Essa etapa foi mais fácil, porém alguns equívocos ainda foram cometidos. Um erro comum foi considerar o cálculo das duas bases, fugindo do recomendado pela história, que excluía a tampa do reservatório. Esse problema foi corrigido ao recomendar uma nova leitura do texto. Outro equívoco foi considerar apenas a área lateral ou a área da base, cometido apenas uma vez pelo grupo C e sendo superado após a mediação.

Após os grupos calcularem o custo para o reservatório, de acordo com as medidas do lado da base e da altura, que inicialmente foram encontrados, o professor questionou aos componentes, qual era o principal problema proposto na história. Então, depois da releitura da história e discussão em grupo, os alunos entenderam que seria necessário determinar as medidas que possibilitariam o custo mais barato possível.

Os grupos A e D iniciaram esta etapa, paralelamente, antes dos demais, o que gerou uma competição entre eles a fim de encontrar o menor custo para a construção do reservatório, sendo entregue a Tabela 2.1 para anotar os valores encontrados. A equipe A, após a atribuição de vários valores, chegou à conclusão que o intervalo que continha o ponto de mínimo era entre 7 e 8 metros, e encontrou o lado de $7{,}7m$, que gerou o custo aproximado de $R\$45.386{,}00$, como mostra a Tabela 4.1.

Analisando a Tabela 4.2, é possível perceber que o grupo D oscilou mais vezes até encontrar o valor de $8{,}5m$ para o lado, determinando o custo de $R\$45.107{,}00$, no entanto, houve um erro no cálculo da altura do prisma, e o valor correto para o custo deveria ser de aproximadamente $R\$45.940{,}00$. Após outras tentativas, o menor valor do custo encontrado pela equipe foi de $R\$45.708{,}00$, ao atribuir $7{,}5m$ para o lado da base.

Um fato curioso desta mesma equipe foi atribuir o valor de $0{,}1m$ para o lado da base,

Lado: x	**Altura:** y	**Área da base:** AB	**Área lateral:** AL	**Área total:** AT	**Custo**
10	3,85				49.050,00
8	6,02				45.504,00
7					
7,5	6,85				45.421,00
7,1	7,64				45.626,00
6,3	9,7				46.965,00
7,2	7,42				45.522,00
7,3	7,22				45.468,60
7,4	7,02				45.395,80
7,7	6,49				45.386,80
7,9	6,16				45.412,00
7,8	6,32				**45.383,00**

Tabela 4.1: Transcrição da tabela do custo do reservatório do grupo A

Lado: x	**Altura:** y	**Área da base:** AB	**Área lateral:** AL	**Área total:** AT	**Custo**
10	3,9			489	48.900,00
6	10,98			487,08	48.706,00
20	0,98			1137,6	113.760,00
5	15,68			534,15	53.415,00
8	6,12			456,96	45.696,00
12	2,72			563,04	56.304,00
2	98,03			1.086	118.656,00
9	4,84			467,91	46.791,00
7	8			460,95	46.095,00
8,5	4,84			431,07	**43.107,75**
0,1	39.215,68			23.529,43	2.352.943,35
7,5	6,97			457,08	45.708,00

Tabela 4.2: Transcrição da tabela do custo do reservatório do grupo D

encontrando uma altura de 39.215,68m e um custo de R\$2.352.943,35. Por se tratar de um valor altíssimo, o achado acabou gerando um momento de espanto e de descontração.

O grupo B, conseguiu determinar dois valores para o custo, um de R\$75.120,00, ao ser atribuído 4m para o lado da base, e o outro de R\$45.736,00, ao atribuir 7,3m. Vale salientar que o grupo testou outros valores usando a calculadora de forma direta, até chegar aos valores citados, sendo apenas estes anotados, como pode ser visto na Tabela 4.3.

A equipe C procedeu de forma análoga à equipe B, não anotando todos os valores testados. O grupo estava comprometido em resolver o propósito da atividade, no entanto, cometeu o erro ao calcular o custo, pois multiplicaram o valor da área lateral por R\$100,00, em vez da área total, como pode ser visto na Tabela 4.4. Esse erro foi percebido, pois quando o grupo atribuiu $5m$ para o lado da base, encontrou $470{,}4m^2$ para a área lateral e $63{,}75m^2$ para a área da base, anotando o custo de $R\$47.040$. O certo teria sido fazer o cálculo com base na área total, ou seja, a soma da área da base mais a área lateral.

Lado: x	**Altura:** y	**Área da base:** AB	**Área lateral:** AL	**Área total:** AT	**Custo**
4	24,5			751,2	75.120,00
7,3	7,36			457,36	**45.736,00**

Tabela 4.3: Transcrição da tabela do custo do reservatório do grupo B

Lado: x	**Altura:** y	**Área da base:** AB	**Área lateral:** AL	**Área total:** AT	**Custo**
6	16,6			1.523,88	
5	15,68	63,75	470,4		47.040,00
5,2	17,02			531,02	53.102,00
5,3	13,72	72,890			

Tabela 4.4: Transcrição da tabela do custo do reservatório do grupo C

Diante do desenvolvimento das atividades, percebeu-se que a equipe A encontrou uma forma para abordar o problema de determinar o custo mínimo, o qual foi compartilhado com os demais grupos. A estratégia da equipe para minimizar o custo foi atribuir um valor inicial para o lado da base e encontrar o custo, e depois atribuir outro valor e determinar o novo custo. Como o segundo valor do custo foi menor do que o anterior, o grupo foi escolhendo valores ainda menores para o lado da base, até encontrar um custo maior do que o anterior. E desta maneira encontraram um intervalo contendo a medida do lado que gerava um custo menor.

O grupo D, não usou uma técnica específica para minimizar o custo. Os chutes para o valor do lado da base oscilaram muito, não seguindo um padrão como a equipe A. Por outro lado, eles chegaram a um valor próximo do mínimo. Já as equipes B e C, como apresentaram dificuldades nas etapas anteriores, não desenvolveram uma estratégia para a minimização do custo. No entanto, após a socialização da equipe A, as demais equipes aprimoraram suas técnicas para se aproximarem do menor custo para a construção do reservatório, e ainda tentaram mais alguns valores.

A partir da estratégia desenvolvida, a equipe A concluiu que o intervalo da medida do lado da base que continha o ponto de mínimo estava compreendido entre $7{,}7m$ e $7{,}9m$. Desta forma, foi atribuído pelo grupo o valor de $7{,}8m$ para àquele que gera o custo mínimo, porém, cometeu um erro de aproximação, pois esse valor gerava um custo maior do que de 7,7m, ou seja, o valor de minimização seria menor do que 7,8. Mesmo assim, o grupo conseguiu encontrar um custo de R\$45.383,00, o qual é aproximadamente igual ao valor correto, mostrado no gráfico da Figura 3.15, que corresponde a um custo e lado da base de aproximadamente R\$45.392,57 e 7,63m, respectivamente.

A equipe D, encontrou um custo de R\$45.708,00, quando atribuiu a medida do lado do reservatório de 7,5m, sendo também um valor próximo ao mínimo. Já os grupos, B e C, não conseguiram calcular um custo próximo do mínimo.

Para o encerramento da oficina foram utilizados alguns recursos da Tecnologia da Informação (TI) com objetivo de compartilhar as experiências das equipes, bem como as dificuldades e estratégias utilizadas, o que foi de extrema importância para enriquecer o processo de aprendizagem dos participantes. Assim, foi proposto a construção da Tabela 2.2 gerada no *Excel*, contendo as fórmulas para encontrar o custo de construção do reservatório correspondente a alguns valores do lado da base (veja o Apêndice B). Com isso, os próprios alunos, de forma conjunta, foram dizendo os valores atribuídos ao lado, iniciando com 10m e diminuindo, até chegar no intervalo de 7 a 8. A partir daí, os valores variaram na casa dos décimos, ficando entre os números de 7,6 e 7,7. Com o objetivo de melhorar a precisão e após serem instigados, passaram a dizer números com duas casas decimais, chegando ao número 7,63. Vale ressaltar, que os alunos tinham convicção de que seus resultados poderiam ter pequenas distorções pelo fato de serem valores aproximados.

Em seguida, foi desenvolvida na lousa, com a participação dos alunos, a expressão da função que representa a área da superfície do reservatório em termos do lado da base, representando o esboço do gráfico no software *Geogebra*, como mostra a Figura 3.15 (veja os procedimentos da construção do gráfico no Apêndice C) . Os alunos ficaram surpreso ao perceber que o ponto mínimo mostrado no gráfico foi aproximadamente igual ao ponto encontrado na resolução por experimentação.

Por fim, foi distribuída a ficha de avaliação (ver Figura 2.1), onde os alunos puderam opinar, registrando as críticas e sugestões à oficina, como visto no Apêndice D . Esta foi a primeira vez que foi usado este critério de avaliação de uma OME por parte dos alunos.

4.2 Análise da oficina com base nos registros

A análise dos resultados desta oficina foi realizada com base nos critérios de avaliação apresentados no Capítulo 2. Também foram levados em consideração os depoimentos dos alunos após a aplicação da oficina, o que só foi possível porque também ministro aulas.

Analisando a avaliação do envolvimento foi possível classificar como excelente, pois todos os alunos se envolveram na realização das atividades propostas na oficina. Pode-se inferir que o envolvimento dos alunos na atividade se deu pela disputa gerada entre as equipes e, principalmente, pela motivação que a história proporcionou.

Em relação à avaliação de êxito, os grupos A e D tiveram um percentual de 100%, pois determinaram um custo aproximado com o mínimo. Os grupos B e C, obtiveram o percentual de 75%, visto que, determinaram alguns valores para o custo, mas não encontraram um valor próximo do mínimo. Assim, o percentual médio de êxito da turma de 87,5%. No entanto, foi possível observar que os grupos B e C estavam buscando outros valores, mas por conta do tempo da oficina esgotar, não alcançaram o resultado esperado. Além disso, após a discussão entre os grupos medida por mim, todos os grupos conseguiram encontrar um valor aproximado do custo mínimo, o que mostra a importância da discussão dos resultados encontrados para favorecer a aprendizagem do aluno.

Grupo	**Percentual de êxito**	**Envolvimento**
A	100%	excelente
B	75%	excelente
C	75%	excelente
D	100%	excelente

Tabela 4.5: Resumo da avaliação de "êxito" e "envolvimento"

A partir da análise da ficha de avaliação, foi observado que todos os componentes do grupo A entenderam o problema proposto e que a história despertou interesse para resolver o problema. Eles também consideraram o problema como de nível médio. A opinião dos componentes do grupo D foi semelhante a do grupo A, afirmando que compreenderam o problema e que a história foi motivadora, mas o nível do problema foi considerado difícil. Já os integrantes da equipe B, apesar de não conseguirem determinar um valor mínimo, compreenderam o problema e o consideraram motivador, além de ser classificado de nível médio por todos os componentes. Os alunos do grupo C, afirmaram que a história foi compreendida e despertou o interesse para resolver o problema apresentado, e apenas um dos componente achou o problema difícil, e os outros o consideraram de nível médio.

Ao analisar as críticas e sugestões apontados na ficha de avaliação pelos alunos sobre a oficina, foi possível observar que a maioria achou interessante e desafiadora, como mostra os seguintes relatos extraídos da ficha de avaliação.

> ‘‘A atividade foi muito boa pois nos desafiou a achar diferentes valores de custo para realizar a obra." (Aluno do grupo A).
> "Foi bom pois nos incentivou a pensar." (Aluno do grupo D).
> "Achei bem legal e gostaria que houvesse mais vezes." (Aluno do grupo B).
> "Produtiva! Me fez pensar muito e então encontrar o valor mínimo do problema." (Aluno do grupo C).
> "Produtiva, pois fez o aluno ir além nas atividades." (Aluno do grupo C).
> "Achei uma questão produtiva em que precisa de bastante atenção entre o grupo. Também aprofunda o conhecimento, até por não ser uma questão muito difícil, mas que precisa de bastante atenção." (Aluno do grupo C)

Cabe mencionar que os alunos demonstraram dificuldades nas manipulações algébricas. Por exemplo, no momento de colocar y (valor da altura) em função de x, ou ao esquecerem de colocar o denominador na fórmula do volume (3.5), ou ao considerar a tampa para o cálculo da área da superfície do reservatório. Mas vale salientar que os erros serviram para criar um ambiente de superação, principalmente, nos grupos que estavam demorando mais tempo para encontrar um valor para o custo.

As observações durante as aulas regulares depois da aplicação da oficina, reforçou que os alunos acharam a oficina interessante, ao demonstrarem entusiasmo e questionando se teria outra OME e quando seria. Também foi perceptível a insatisfação dos participantes da OME quando retornaram as atividades nas aulas regulares tradicionais, o que pode ser compreendido pelo fato da diferença entre as metodologias utilizadas.

A partir de todas avaliações realizadas para analisar a oficina, é possível inferir que a metodologia envolveu os alunos, despertando o interesse e o espírito investigador para resolverem o problema. Além disso, o problema foi considerado difícil, mas de fácil compreensão, estando em consonância com as recomendações de uma OME.

Capítulo 5

Considerações Finais

O presente trabalho aplicou uma OME que envolve resolver um problema de otimização de custos na construção de um reservatório para armazenamento de água. Após análise dos resultados da avaliação de "êxito" e "envolvimento", além das críticas e sugestões dos alunos no final da oficina, podemos afirmar que os alunos participaram com entusiasmo nas atividades, fazendo com que a mesma atingisse os objetivos planejados.

Os resultados obtidos com a aplicação da OME "Combatendo a seca, preservando o bolso" indicam que o ensino da Matemática utilizando esta metodologia proporciona uma aprendizagem significativa. Assim, pode-se concluir que a motivação é requisito fundamental nas aulas de Matemática, por despertar a vontade de aprender. Isso foi verificado mediante a avaliação do envolvimento, na qual a turma teve resultado excelente.

O uso de um problema difícil de resolver, mas contextualizado e de interesse suficiente, despertou o espírito investigador e a curiosidade do aluno. Durante todo processo de aplicação da oficina, o aluno teve participação ativa e coube a mim exercer a função de mediador, o que mostra a importância de fomentar o protagonismo do estudante no processo de aprendizagem. Além disso, o compartilhamento das dificuldades e estratégias de resolução de problemas desenvolvidas pelos grupos no final da oficina, mostrou a importância da construção coletiva do conhecimento.

Nos aspectos matemáticos da OME, podemos concluir que os alunos compreenderam o cálculo de volume e área superficial de prismas, lidaram com manipulações algébricas de forma natural, mesmo apresentando algumas dificuldades, e desenvolveram estratégias para minimização do custo do reservatório. Na avaliação de êxito, dois grupos atingiram a meta de 100% e os outros dois 75%, ficando a turma com um percentual médio de 87%.

Como visto, a OME usou recursos da Tecnologia da Informação (TI) durante sua execução. Em todo momento as calculadoras foram instrumentos de apoio nas atividades dado o grau de complexidade dos cálculos envolvidos. Por outro lado, a utilização de uma tabela elaborada no *Excel*, assim como um gráfico feito no software Geogebra serviram para amadurecer os conhecimentos adquiridos depois de um processo exaustivo de experimentação. Assim o uso de TI mostrou aos participantes o resultado que teriam obtido caso continuassem nesse processo. Esta é a primeira vez que uma OME faz uso de TI como suporte para alcançar os objetivos traçados.

Os resultados desse trabalho mostram que uma OME é uma metodologia que proporciona motivação, espírito de investigação e a produção de conhecimento individual e coletiva. Além disso, a OME "combatendo a seca, preservando o bolso" mostrou que também é possível motivar os alunos a resolver problemas de otimização envolvendo conteúdos nas áreas de geometria e álgebra, o que reforça a importância dessa metodologia.

Espera-se que este trabalho seja um suporte para professores do Ensino Fundamental e Médio que desejam despertar o interesse dos alunos nas aulas de Matemática, especificamente na área de geometria, a fim de melhorar a qualidade da Educação Básica. Ressaltando que a metodologia pode ser adaptada à outros conteúdos ligados, ou não, à geometria.

Devido aos resultados satisfatórios obtidos nesse trabalho, é possível lançar a hipótese de que o envolvimento de ferramentas tecnológicas poderia ampliar o nível de envolvimento e êxito da oficina. Neste trabalho foi constatada a conveniência do uso de TI para evitar um trabalho entediante para o aluno, o que levanta o interesse de estudar assuntos relacionados com o uso de planilhas e gráficos em Geogebra com o objetivo de modelar problemas de otimização ou até mesmo apreender, por exemplo, a graficar funções.

Referências

ARAÚJO, Luciene Liger do Nascimento. **Oficinas de matemática experimental:** uma história de TV. Dissertação de Mestrado. Ilhéus, BA: UESC, 2017. 51f.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2000.

______________. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN +)**. Brasília: MEC/SEF, 2002.

DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Fundamentos da matemática elementar 10**: Geometria espacial métrica e da posição. ed. 7. São Paulo:Atual, 2013.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

GIOVANNI, J. R. BONJORNO, J. R. **Matemática completa**. V.2. 2º ed. São Paulo: FTD, 2005.

GOMERO, G. I.; SILVA, M. O. **Matemática Experimental com o Triângulo de Pascal**. 2017.

LIMA, E. L.; et al. **A matemática do ensino médio**. v. 1. ed. 9. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **GEOMETRIA**. coleção PROFMAT. SBM: RJ, 2012.

______________. **FUNDAMENTOS DE CÁLCULO**. SBM, coleção PROFMAT, 2012.

MORGADO, A. C; CARVALHO, P. C. P. **MATEMÁTICA DISCRETA.** Coleção PROFMAT. 2º ed. SBM: RJ, 2015.

PEREIRA, Katiane. **Oficinas de matemática experimental entrando numa fria.** Dissertação de Mestrado. Ilhéus, BA: UESC, 2017. 60 f.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo.

Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

SILVA, Dickson Magno. **OFICINAS DE MATEMÁTICA EXPERIMENTAL:** Um Inglês em Salvador. Dissertação de Mestrado. Ilhéus, BA: UESC, 2017. 90f.

SILVA, M. de OLIVEIRA. **Do triângulo à pirâmide de pascal**. Dissertação de Mestrado. Ilhéus, BA: UESC, 2015. 52 f.

SOUZA, Vinícius Modesto Sertório de. **Oficinas de matemática experimental:** do princípio multiplicativo ao fatorial. Dissertação de Mestrado. Ilhéus, BA: UESC, 2017. 59 f.

Apêndice A

Roteiro da oficina “Combatendo a seca, preservando o bolso”

Universidade Estadual de Santa Cruz

Oficinas de Matemática Experimental: Combatendo a seca, preservando o bolso.

26 de novembro de 2018

Público-alvo

Alunos do 2° ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Ruy José de Almeida, em Laje.

Pré-requisito

Geometria plana

1. Área do triângulo equilátero.

Geometria espacial

1. Volume de prisma.
2. Área superficial de prisma.

Objetivos

Objetivos matemáticos

1. Apresentar ao aluno uma situação interessante onde precisa solucionar um problema usando os conceitos da geometria plana e espacial, além das habilidades algébricas.

2. Familiarizar o aluno com problemas de minimização de custo.
3. Estimular o aluno a modelar um problema através do desenvolvimento de uma função.

Objetivos não matemáticos

1. Expor os participantes ao desafio de enfrentar um problema extremamente difícil de ser resolvido.
2. Habituar os participantes a formular perguntas e discutir possíveis respostas.
3. Estimular os participantes a reconhecer que regras são convenções.
4. Estimular os participantes a formular e seguir instruções de ação.
5. Introduzir a ideia de simplificação como estratégia de resolução de problemas

Recursos Físicos

Régua, lápis, papel A4, borracha, tesoura, cola, fita adesiva, papelão, transferidor, régua, esquadro e calculadora, datashow e os softwares Geogebra e o Excel;

Atividades

1. **Proposta da atividade:** Solicite aos alunos para se organizarem em grupos de quatro componentes e lerem a história “Combatendo a seca, preservando o bolso.”.

Combatendo a seca, preservando o bolso.

Em um povoado localizado em um município da Bahia, bem distante da zona urbana, a seca está sendo considerada uma das piores das últimas décadas. A prefeitura não cumpriu a promessa de construir um reservatório para captar a água da chuva a fim de solucionar o problema. Revoltados com a situação, os moradores resolveram fazer a construção por conta própria, ficando acertado que o valor da obra seria obtido através de campanhas beneficentes.
Entre os integrantes da comunidade, tinha um pedreiro experiente, o sr. Tales, e o professor de matemática da escola do povoado, Pitágoras. Os dois ficaram responsáveis para definir o modelo, o custo, e as medidas do reservatório. Inicialmente, Pitágoras sugeriu que fosse um cilindro, mas Tales afirmou que a base não poderia ser circular, pois para a construção de toda a estrutura, incluindo a base, com exceção da tampa, seriam utilizadas placas quadradas de concreto de um metro de lado, sugerindo então que o reservatório fosse um cubo. Então Pitágoras recomendou que a base do reservatório seja um hexágono regular, explicando que com esse modelo poderia construir um reservatório com custo menor que o sugerido por Tales, além dos cálculos não complicarem demais.
Para determinar a capacidade que deveria ter o reservatório, foi feita uma pesquisa do consumo de água da comunidade. Eles notaram que haviam 100 famílias com 5 pessoas, em média, e cada integrante consumia 100 litros por dia. Ficou acertado que era necessário armazenar água para 20 dias.
Sabendo que o metro quadrado de placa de concreto custa R100,00, tente projetar o reservatório com base hexagonal que contemple as necessidades da comunidade, ou seja:
Determine as medidas do reservatório de forma que o custo de material seja o mais barato possível.

2. **Capacidade do reservatório** Determinar a capacidade do reservatório usando a unidade de medida metro cúbico, seguindo as recomendações específicas 2 e 3;

3. **Medida do lado da base e da altura do reservatório** Determinar uma solução para o valor do lado da base e da altura do reservatório, seguindo a recomendação específica 4;

4. **Custo do reservatório** Determinar a área da superfície e o custo do reservatório, seguindo as recomendações específicas 4 e 5;

5. **Custo mínimo:** Após determinar um valor do custo do reservatório, levante a possibilidade de haver outras medidas que geram um custo menor, seguindo a reco-

mendação específica 6;

6. **Estratégia para minimizar o custo:** Discuta uma estratégia para a minimização do custo. Em seguida distribua a Tabela 2.1 para o preenchimento das medidas do reservatório, aplicando a estratégia discutida. Faça uso da recomendação específica 7.

7. **Discussão:**

   (a) Compartilhe na sala os resultados dos custos encontrados pelos grupos para saber qual deles foi o menor;

   (b) Modele uma equação da área em função do lado da base do hexágono (Ver equação (A.1));

   (c) Faça um esboço do gráfico da função no Geogebra, como da Figura 3.15, mostrando o valor do lado que gera o custo mínimo.

$$a(x) = \frac{3x^2\sqrt{3}}{2} + \frac{4000\sqrt{3}}{3x} \tag{A.1}$$

Recomendações específicas durante as atividades

1. Caso os alunos tenham dificuldades para construir a base hexagonal da planta do reservatório, serão orientados a dividir o hexágono em triângulos equiláteros;

2. Caso os alunos usem como unidade de volume o litro, o professor deverá orientá-los utilizar o m^3, bem como a relação entre as unidades $1m^3 = 1000l$;

3. Se algum grupo não lembrar a fórmula da área do hexágono, o professor recordará da fórmula do triângulo equilátero;

4. Se os alunos começarem a testar medidas para a altura e para o lado, a fim de encontrar o volume de $1000m^3$, o professor não deve interromper inicialmente. Mas, após alguns instantes, deverá fazer a mediação para, ao atribuir um valor para o lado do hexágono, buscar um valor para a altura através da fórmula do volume, seguindo a recomendação específica 4;

5. Se algum grupo não lembrar como calcular a área superficial do prisma regular, lembrar da fórmula:

$$AT = AB + AL \tag{A.2}$$

   Considerando um prisma hexagonal regular e sendo AT - Área total, AB - Áreas das bases, AL - Áreas laterais

6. Quando um grupo propor os valores para as dimensões do reservatório e determinar seu custo, questionar se existem reservatórios com outras dimensões para os quais o custo seria menor, mediando para a seguinte estratégia:

   O valor do lado da base que minimiza o custo será feito por tentativa e erro, dando um valor inicial para o lado da base e mudando-o dependendo se o custo correspondente diminui ou aumenta. O valor para o lado da base que minimiza o custo pode estar entre dois valores já usados, um que gerou um custo maior e outro que gerou um custo menor, ou o inverso. Recomenda-se usar a média desses valores para continuar o processo, até encontrar um valor que seja considerado ideal pelo grupo.

7. Quando os grupos determinarem o custo que julgarem ser o mínimo, socializar as informações na sala promovendo um debate, levando à modelação da fórmula da área de forma conjunta, além da construção do gráfico no Geogebra.

Recomendações gerais

1. Se você perceber que algum participante está encontrando dificuldades para solucionar o problema, NÃO DIGA COMO FAZER, socialize a questão com a turma.

2. Se você perceber que algum participante está resolvendo o problema de forma inadequada os reservatórios, NÃO DIZER QUE ESTÁ ERRADO, socialize a questão com a turma.

3. Se alguém tiver sérias dificuldades para determinar as medidas do reservatório, verifique se o participante entendeu as regras ou se as está aplicando corretamente.

4. Se entendeu as regras, mas está encontrando dificuldades de abordagem para resolver o problema.

   (a) Socialize a questão NA MESA, não com a turma toda.

   (b) Quando conseguir resolver o problema, volte gradualmente à Figura.

Avaliação

Para a avaliação deste trabalho, será usado os critérios semelhantes aos de Silva (2017), os quais são pautados em dois conceitos: “ Envolvimento” e “Êxito”, como mostrado nas Tabelas 2.3 e 2.4.

Apêndice B

Tabela orientadora para o aplicador

A Tabela 2.2 tem como finalidade orientar o aplicador para conduzir o aluno a encontrar uma solução aproximada do problema. Além disso, no término da oficina, essa tabela tem a função de auxiliar a discussão final entre as equipes e o aplicador. Dessa forma, é importante entender o processo de elaboração da tabela e como analisar os dados apresentados.

Pode-se construir a Tabela 2.2 usando o software *Excel*, tornando a resolução mais rápida e mais eficiente. Mas é necessário escrever as fórmulas em cada planilha corretamente, deixando os valore da altura, área total e do custo, em função do lado da base, como é possível visualizar na Figura B.1. Observe que os valores de x estão representados na coluna A e as outras células representam as outras variáveis. É importante destacar a necessidade do sinal de igualdade ($=$) antes de cada fórmula, como visto na casa $B2$. Em seguida, copia as fórmulas usadas na linha 2 e cola nas demais linhas, e atribui os valores a x para obter os valores do custo.

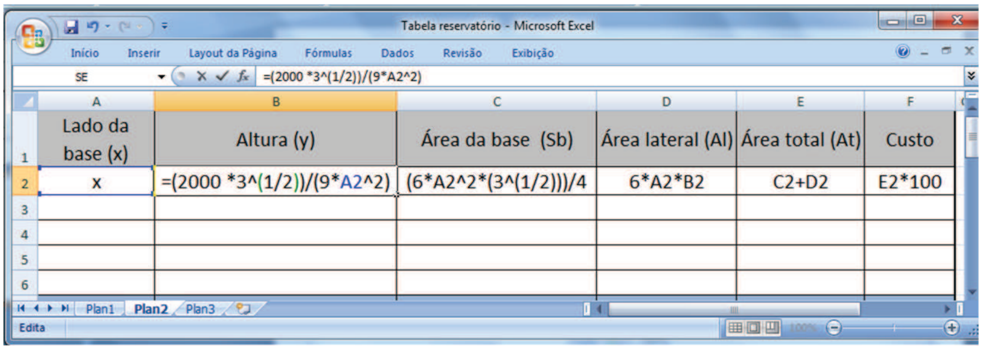


Figura B.1: Elaboração da tabela de custo do reservatório no software *Excel*

Analisando a Tabela 2.2, percebemos que ao considerar $x = 10$, encontramos os valores aproximados $y = 3{,}85$ para a altura e $R\$49.074{,}00$ para o custo. Ao diminuir o valor do lado para $x = 9$, a altura aumenta para $y = 4{,}75$ aproximadamente, mas diminuindo o custo. Fazendo $x = 8$, a altura aumenta e o custo diminui. Mas ao atribuir $x = 7$, o custo aumentou em relação ao valores anterior, o que sugere que o valor de x que torna o custo mínimo esteja no intervalo de 7 a 8. Tomando $x = 7{,}5$ e depois $x = 7{,}6$, o custo fica mais baixo, no entanto, para $x = 7{,}7$, o custo aumenta. Dessa forma, por uma questão de continuidade, podemos concluir que o custo mínimo é atingido quando x está no intervalo de 7,63 a 7,64. Note que o custo do reservatório, quando a medida do lado está compreendida entre 7,6 e 7,7, ficou aproximadamente em torno de $R\$45.390{,}00$, com pouca variação entre os valores, o que aponta certo tipo de "convergência".

Apêndice C

Gerando o esboço do gráfico da função de custos no software Geogebra

Uma outra forma de encontrar o custo mínimo é usar a equação (3.7), substituindo a variável y pela equação (3.8), resultando em:

$$S = \left(\frac{3x^2\sqrt{3}}{2}\right) + 6xy$$

$$S = \left(\frac{3x^2\sqrt{3}}{2}\right) + 6x\left(\frac{2000\sqrt{3}}{9x^2}\right)$$

$$s(x) = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2} + \frac{4000\sqrt{3}}{3x} \tag{C.1}$$

Como a equação encontrada não é elementar para o Ensino Básico, o gráfico pode ser esboçado no software *Geogebra*, escrevendo a função no campo de entrada e depois encontrando o ponto mínimo. Veja as etapas:

1. Escrever no campo de entrada a função s(x) =(3∗sqrt(3)∗x∧2)/2 + (4000∗sqrt(3))/(3∗x);

2. Usar o comando "Extremo(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)" no campo de entrada da seguinte forma, "Extremo(s,0,100)". Veja que os valores negativos não são interessantes para o problema;

3. Com o botão direito do *mouse* no ponto criado, selecione a opção "Propriedade" e em "Exibir rótulo" marque a opção "Valor".

A abcissa do ponto extremo representa o valor do lado que gera o custo mínimo, representado pela ordenada do ponto. Na Figura C.1, pode-se observar a função e o ponto mínimo do gráfico. Vale salientar que apesar do gráfico esboçado representar a área em função do lado, é possível determinar o custo mínimo multiplicando a área mínima encontrada por $R\$100{,}00$, correspondente ao valor do m^2.

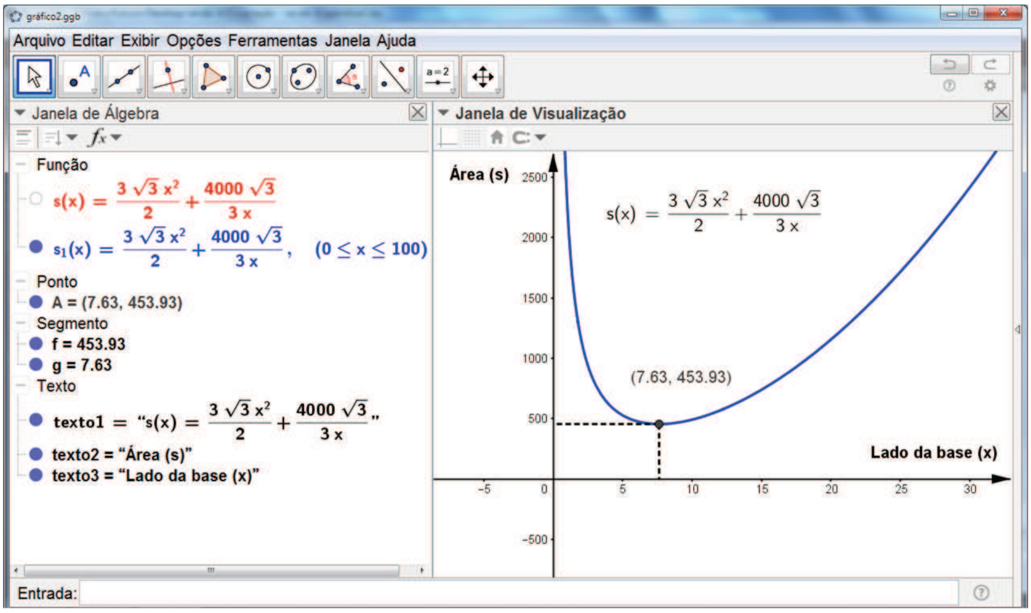


Figura C.1: Construção do gráfico da área em função do lado da base

Apêndice D

Atividades produzidas pelos alunos

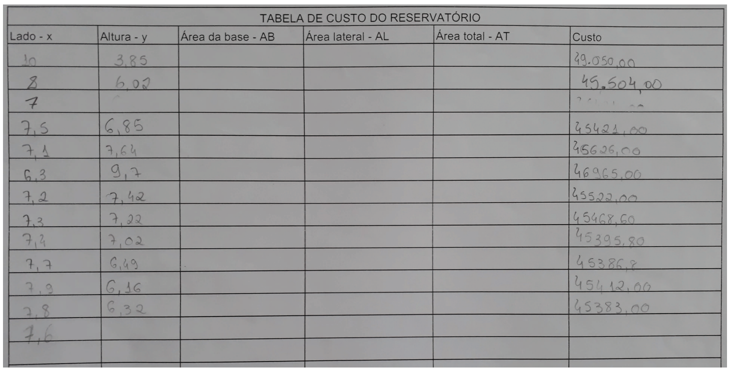


TABELA DE CUSTO DO RESERVATÓRIO					
Lado - x	Altura - y	Área da base - AB	Área lateral - AL	Área total - AT	Custo
10	3,85				49.050,00
8	6,02				45.504,00
7					[illegible]
7,5	6,85				45421,00
7,1	7,64				45626,00
6,3	9,7				46965,00
7,2	7,42				45522,00
7,3	7,22				45468,60
7,4	7,02				45395,80
7,7	6,49				45386,8
7,9	6,16				45412,00
7,8	6,32				45383,00
7,6					

Figura D.1: Tabela com custos do reservatório do grupo A

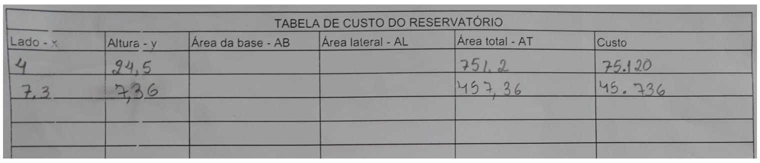


TABELA DE CUSTO DO RESERVATÓRIO					
Lado - x	Altura - y	Área da base - AB	Área lateral - AL	Área total - AT	Custo
4	24,5			751,2	75.120
7,3	7,36			457,36	45.736

Figura D.2: Tabela com custos do reservatório do grupo B

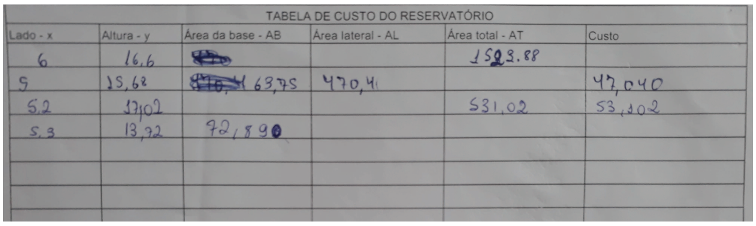


TABELA DE CUSTO DO RESERVATÓRIO					
Lado - x	Altura - y	Área da base - AB	Área lateral - AL	Área total - AT	Custo
6	16,6			1523.88	
5	15,68	63,75	470,41		47,040
5,2	17,02			531,02	53,102
5,3	13,72	72,890			

Figura D.3: Tabela com custos do reservatório do grupo C

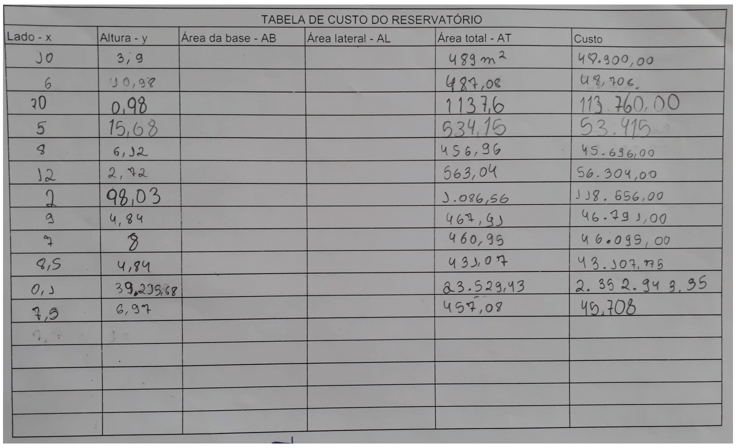
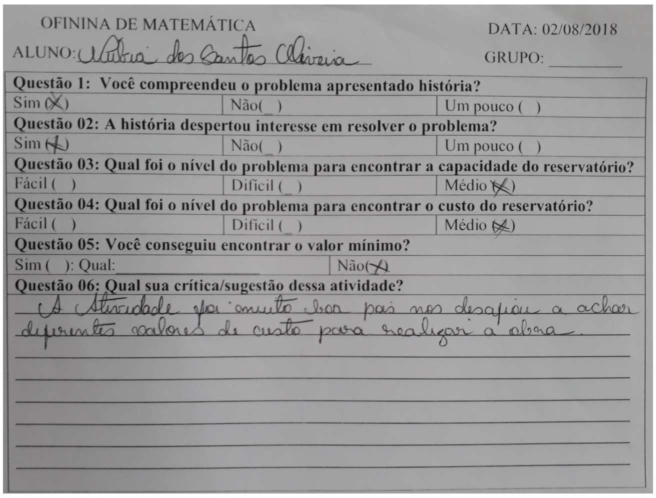


TABELA DE CUSTO DO RESERVATÓRIO					
Lado - x	Altura - y	Área da base - AB	Área lateral - AL	Área total - AT	Custo
10	3,9			489 m²	48.900,00
6	10,98			487,08	48.706,
20	0,98			1137,6	113.760,00
5	15,68			534,15	53.415
8	6,12			456,96	45.696,00
12	2,72			563,04	56.304,00
2	98,03			1.086,56	118.656,00
9	4,84			467,91	46.791,00
7	8			460,95	46.095,00
8,5	4,84			431,07	43.107,75
0,1	39,215,68			23.529,43	2.352.943,35
7,5	6,97			457,08	45.708

Figura D.4: Tabela com custos do reservatório do grupo D



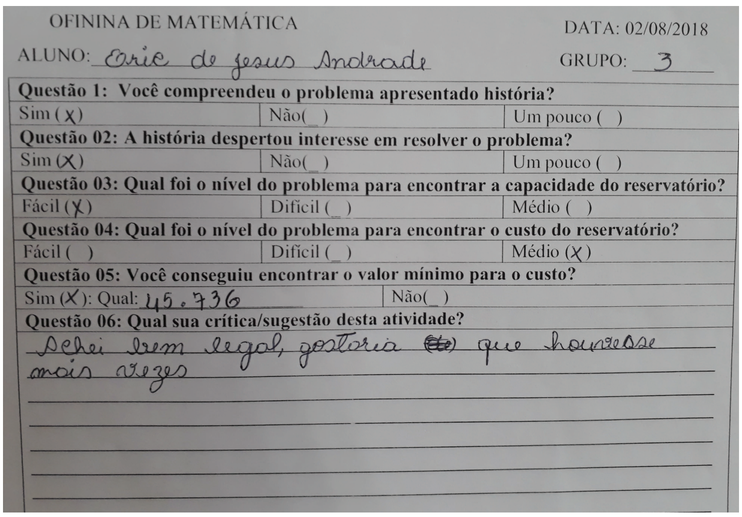
OFININA DE MATEMÁTICA DATA: 02/08/2018

ALUNO: Núbia dos Santos Oliveira GRUPO: ________

Questão 1: Você compreendeu o problema apresentado história?		
Sim (X)	Não( )	Um pouco ( )
Questão 02: A história despertou interesse em resolver o problema?		
Sim (X)	Não( )	Um pouco ( )
Questão 03: Qual foi o nível do problema para encontrar a capacidade do reservatório?		
Fácil ( )	Difícil ( )	Médio (X)
Questão 04: Qual foi o nível do problema para encontrar o custo do reservatório?		
Fácil ( )	Difícil ( )	Médio (X)
Questão 05: Você conseguiu encontrar o valor mínimo?		
Sim ( ): Qual:	Não(X)	
Questão 06: Qual sua crítica/sugestão dessa atividade?		

A Atividade foi muito boa pois nos desafiou a achar diferentes valores de custo para realizar a obra.

Figura D.5: Ficha de avaliação (Aluno do grupo A)



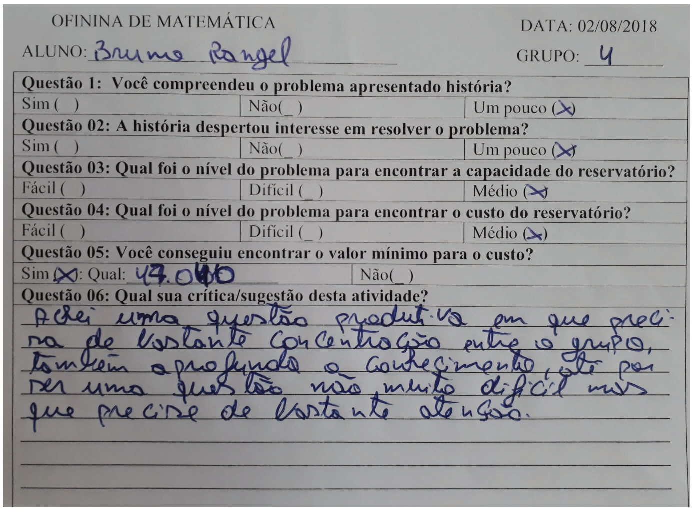
OFININA DE MATEMÁTICA DATA: 02/08/2018

ALUNO: Eric de Jesus Andrade GRUPO: 3

Questão 1: Você compreendeu o problema apresentado história?		
Sim (X)	Não( )	Um pouco ( )
Questão 02: A história despertou interesse em resolver o problema?		
Sim (X)	Não( )	Um pouco ( )
Questão 03: Qual foi o nível do problema para encontrar a capacidade do reservatório?		
Fácil (X)	Difícil ( )	Médio ( )
Questão 04: Qual foi o nível do problema para encontrar o custo do reservatório?		
Fácil ( )	Difícil ( )	Médio (X)
Questão 05: Você conseguiu encontrar o valor mínimo para o custo?		
Sim (X): Qual: 45.736	Não( )	
Questão 06: Qual sua crítica/sugestão desta atividade?		

Achei bem legal, gostaria que houvesse mais vezes

Figura D.6: Ficha de avaliação (Aluno do grupo B)



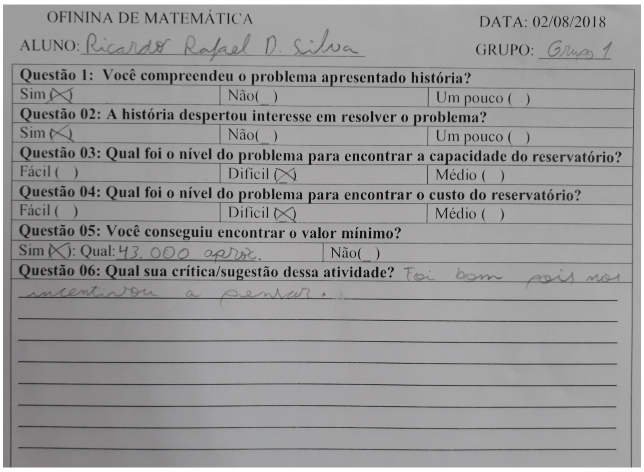
OFININA DE MATEMÁTICA DATA: 02/08/2018

ALUNO: Bruno Rangel GRUPO: 4

Questão 1: Você compreendeu o problema apresentado história?		
Sim ( )	Não(_)	Um pouco (X)
Questão 02: A história despertou interesse em resolver o problema?		
Sim ( )	Não(_)	Um pouco (X)
Questão 03: Qual foi o nível do problema para encontrar a capacidade do reservatório?		
Fácil ( )	Difícil (_)	Médio (X)
Questão 04: Qual foi o nível do problema para encontrar o custo do reservatório?		
Fácil ( )	Difícil (_)	Médio (X)
Questão 05: Você conseguiu encontrar o valor mínimo para o custo?		
Sim (X): Qual: 47.040	Não(_)	
Questão 06: Qual sua crítica/sugestão desta atividade?		

Achei uma questão produtiva em que precisa de bastante concentração entre o grupo, também aprofundo o conhecimento, até por ser uma questão não muito difícil mas que precise de bastante atenção.

Figura D.7: Ficha de avaliação (Aluno do grupo C)



OFININA DE MATEMÁTICA DATA: 02/08/2018

ALUNO: Ricardo Rafael D. Silva GRUPO: Grupo 1

Questão 1: Você compreendeu o problema apresentado história?		
Sim (X)	Não(_)	Um pouco ( )
Questão 02: A história despertou interesse em resolver o problema?		
Sim (X)	Não(_)	Um pouco ( )
Questão 03: Qual foi o nível do problema para encontrar a capacidade do reservatório?		
Fácil ( )	Difícil (X)	Médio ( )
Questão 04: Qual foi o nível do problema para encontrar o custo do reservatório?		
Fácil ( )	Difícil (X)	Médio ( )
Questão 05: Você conseguiu encontrar o valor mínimo?		
Sim (X): Qual: 43.000 aprox.	Não(_)	
Questão 06: Qual sua crítica/sugestão dessa atividade? Foi bom pois nos incentivou a pensar.		

Figura D.8: Ficha de avaliação (Aluno do grupo D)