Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Função Afim:
Uma proposta interdisciplinar

Thomaz Olivier da Silva

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Adilson Antonio Berlatto**

Barra do Garças - MT

Agosto de 2018

Função afim:
Uma proposta interdisciplinar

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Thomaz Olivier da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 28 de agosto de 2018.

Prof. Dr. Adilson Antonio Berlatto
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto (Presidente Banca/Orientador)
Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa (Examinador Interno)
Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira (Examinador Externo)

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S586f Silva, Thomaz Olivier da.
Função afim: : Uma proposta interdisciplinar / Thomaz Olivier da Silva. – 2018
xii, 57 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Adilson Antônio Berlatto.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2018.
Inclui bibliografia.

1. Interdisciplinaridade. 2. Ensino. 3. ENEM. 4. Sequência. 5. Calorimetria. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCACÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUACÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 – Boa Esperança – 78.060-900 – Cuiabá/MT
Fone: (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: **"Função afim: uma proposta interdisciplinar"**

Autor: **Thomaz Olivier da Silva**

defendida e aprovada em 25/07/2018.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor Adilson Antônio Berlatto Adilson A Berlatto
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Márcio Lemes de Sousa
Examinador Interno Doutor Márcio Lemes de Sousa
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Paulo César Cavalcante de Oliveira Paulo César Cavalcante de Oliveira
Instituição: Universidade Regional do Cariri

Cuiabá, 25/07/2018.

À minha família.

Agradecimentos

Obrigado à Camila, minha esposa, e aos meus pais, pelo incentivo!

Muito obrigado a todos que de alguma forma contribuíram para a realização do curso.

Não há problema que não possa ser
solucionado com paciência.

Chico Xavier.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo realizar uma proposta de como se trabalhar a interdisciplinaridade da função afim, tanto dentro de assuntos correlatos da própria matemática, como na progressão aritmética, quanto em assuntos tratados na disciplina de física, como calorimetria e dilatação térmica. A fim de se mostrar tais relações, são resolvidas algumas questões de vestibular utilizando os conceitos abordados.

Palavras chave: Interdisciplinaridade, ensino, ENEM, sequência, calorimetria.

Abstract

The present work has as objective to make a proposal of how to work the interdisciplinarity of related function, both within related subjects of mathematics itself, as well as in arithmetic progression, as well as in subjects treated in the discipline of physics, such as calorimetry and thermal expansion. In order to show such relationships, some vestibular questions are solved using the concepts discussed.

Keywords: Interdisciplinarity, teaching, ENEM, sequence, calorimetry.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Frequentemente no ambiente de sala de aula, principalmente quando se trata da disciplina matemática, nos deparamos com perguntas do tipo: "Para que serve isso?", repetida sistematicamente pelos alunos.

Além dessa pergunta, percebemos por diversas vezes que os alunos possuem bastante dificuldade de perceber que alguns problemas simples, tanto da disciplina matemática quanto da física, podem ser trabalhadas como um certo modelo de função, conforme suas características.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCN (BRASIL, 2000), as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN+ (BRASIL, 2006b) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006a) trazem como desafio aos professores a busca pela interdisciplinaridade e a contextualização dos conteúdos.

Tal proposta é uma das bases da reformulação dos novos vestibulares, principalmente, desde de 2009, do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM (INEP, 2009), o qual, em cada questão, traz um contexto de situações e notícias do dia-a-dia, mostrando, assim, a aplicabilidade dos conteúdos estudados no ensino médio. Nos editais do ENEM, a partir desse ano, temos que um dos itens de avaliação dos alunos é compreender fenômenos, ou seja, saber construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas

No PCN+ encontramos as competências esperadas de um estudante que está finalizando o ensino médio. Dentre essas encontramos a de "Investigação e Compreensão" que, conforme o texto é constituída por:

> ...identificação de dados e informações relevantes em situações-problema para estabelecer estratégias de solução; utilização de instrumentos e procedimentos apropriados para medir, quantificar, fazer estimativas e cálculos; interpretação e utilização de modelos explicativos das diferentes ciências; identificação e relação de fenômenos e conceitos em um dado campo de conhecimento científico; articulação entre os conhecimentos das várias ciências e outros campos do saber. (BRASIL, 2006b)

Ainda em relação às instruções do PCN+, vemos que a interdisciplinaridade se torna algo essencial no ensino:

> Essa articulação interdisciplinar, promovida por um aprendizado com contexto, não deve ser vista como um produto suplementar a ser oferecido eventualmente se der tempo, porque sem ela o conhecimento desenvolvido pelo aluno estará fragmentado e será ineficaz. (BRASIL, 2006b)

Na disciplina de matemática tais parâmetros trazem como instruções em seu ensino, quanto às relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas, dentre outras, as seguintes competências:

> Adquirir uma compreensão do mundo da qual a matemática é parte integrante, através dos problemas que ela consegue resolver e dos fenômenos que podem ser descritos por meio de seus modelos e representações e reconhecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, seja nas demais ciências, como a Física, Química e Biologia, seja nas ciências humanas e sociais, como a Geografia ou a Economia, ou ainda nos mais diversos setores da sociedade, como na agricultura, na saúde, nos transportes e na moradia. (BRASIL, 2006b)

De acordo com Rodella (2016), as últimas tendências de ensino, muito se fala em interdisciplinaridade e contextualização dos conteúdos ensinados. Tal tendência é acompanhada pelo formato dos novos vestibulares e do ENEM, e sua incorporação vem acontecendo paulatinamente nos livros didáticos. Entretanto, apesar dos parâmetros curriculares sugerirem o seu uso, muito pouco se fala sobre como este caminho deve ser trilhado.

Em Brasil (2006) tem-se a orientação de se construir a interdisciplinaridade no contexto do projeto pedagógico da escola. O PCNEM (BRASIL, 2000) traz como critério central quando da elaboração curricular, a interdisciplinaridade, ou seja, o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

O PCNEM traz como exemplo dessa interdisciplinaridade o conteúdo relativo às funções, cujo ensino isolado não permite a exploração de seu caráter integrador. Exemplifica que as sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que exemplos particulares funções. Descreve ainda que tais conceitos podem ser vistos fora da própria matemática:

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos,o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2000)

Desta forma, com o presente trabalho pretende-se propor uma forma de se trabalhar a interdisciplinaridade entre os conceitos de função afim em outros conteúdos, tanto dentro da própria matemática, como no estudo de progressão aritmética, quanto em conteúdos relacionados à disciplina de física.

O foco do trabalho dar-se-á no estudo da função afim por se tratar de um modelo linear, que, conforme Lima (1996) ocorre em praticamente todos os problemas durante os primeiros oito anos da escola e, com menos exclusividade porém ainda com grande destaque, os três anos finais.

Desta forma, no primeiro capítulo será realizada uma revisão dos conceitos de função, estudando o modelo de função afim, veremos como defini-la, como representá-la graficamente e como caracterizá-la.

No segundo capítulo, veremos os conceitos de progressão aritmética (PA), relacionando-os à função afim, de forma a mostrar que tais sequências podem ser entendidas como uma forma de função afim. Assim, objetivamos que se perceba que não é necessário que o aluno decore as fórmulas relacionadas à PA, bastando para estudá-las, entender o que ela representa e que pode ser modelada como uma simples função.

No terceiro capítulo, a fim de se perceber uma aplicabilidade do que foi proposto nos capítulos anteriores, veremos que algumas questões do Exame Nacional do Ensino Médio podem ser resolvidas utilizando tanto os conceitos da função afim quanto os conceitos de progressão aritmética, verificando-se, assim, o quão tais assuntos estão interligados.

Nos capítulos seguintes, quatro e cinco, veremos como a função afim pode ajudar na compreensão dos conceitos de duas áreas da física: calorimetria e dilatação térmica, verificando-se que as fórmulas apresentadas aos estudantes desses conteúdos podem ser tratadas com função. Ao final de cada capítulo, a fim de se verificar a aplicabilidade de tal abordagem, serão propostos e resolvidos exercícios sobre cada tema utilizando-se os conceitos de função vistos.

Capítulo 1

Função afim

Neste capítulo definiremos função, abordando, sem seguida, o conceito de função afim. Para tal, utilizaremos como referência Giovanni e Bonjorno (2000a) e em Lima (2013).

1.1 Conceitos básicos

Definição 1.1.1: Sejam A e B dois conjuntos não vazios e f uma relação[1] de A em B. Dizemos que essa relação f é uma função de A em B quando a cada elemento x do conjunto A está associado um e apenas um elemento y do conjunto B. Quando se tem uma função de A em B, podemos representá-la por:

$$f : A \to B,$$

em que se lê: função f de A em B.

O conjunto A é denominado *domínio da função* (também chamado de campo de definição ou campo de existência da função), que define em qual conjunto estamos trabalhando, ou seja, quais são os valores possíveis para x, chamado de variável independente da função.

O conjunto B é denominado *contradomínio da função*, o qual contém todos os elementos que podem corresponder aos elementos do domínio. Ou seja, quais os possíveis valores y aos quais x pode se associar.

Cada elemento x do domínio tem um único correspondente y no contradomínio.

[1]Relação é uma correspondência ou associação entre elementos de dois conjuntos não vazios

A esses valor de y dá-se o nome de *imagem* de x pela função f. O conjunto de todos os valores de y que são imagens de valores de x forma o conjunto imagem da função. Destaca-se que o conjunto imagem da função é um subconjunto do contradomínio da mesma.

Assim, uma função fica bem definida quando sabemos qual o seu domínio, o seu contradomínio e a regra de associação entre os conjuntos. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.1.1: considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Podemos dizer que realmente se trata de um função pois cada x pertencente ao domínio $\mathbb{Z}$ associa-se com um único y pertencente ao contradomínio, de tal forma que $y = x^2$. Temos, ainda, que o conjunto imagem de tal função é dado por: $0, 1, 2, 4, 9, 16, 25, ...$, que são os valores assumidos por y.

Exemplo 1.1.2: considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = -x$. Neste caso temos que o domínio é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, o contradomínio é o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e a imagem é o conjunto $\mathbb{Z}_{-}$.

Exemplo 1.1.3: considere, agora, a seguinte relação:

$$\begin{cases} x = y + 1, se & x \leq 1 \\ x = y^2 se & x \geq 1. \end{cases}$$

Nesse caso observamos que se $x = 1$, y pode assumir dois valores distintos: ou 2 ou 1. Portanto tal relação não pode ser considerada função.

Definição 1.1.2: O *gráfico de uma função* é o conjunto de todos os pontos (x, y), do plano cartesiano, tal que x pertence ao domínio e y pertence à imagem.

A função é representada graficamente de tal forma que os valores do domínio da função são colocados no eixo das abscissas (eixo x) e, os valores das respectivas imagens são colocados no eixo das ordenadas (eixo y).

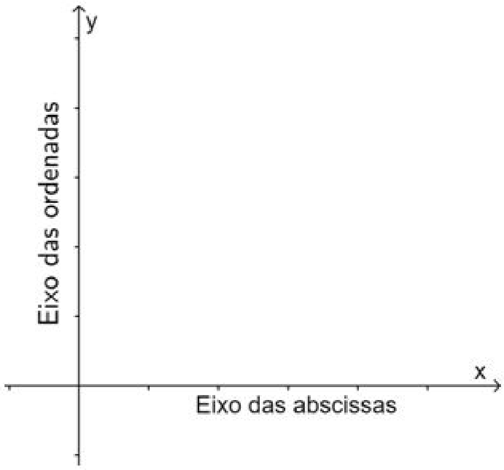


Figura 1.1: Plano cartesiano para representar uma função.
(Fonte: autor.)

Exemplo 1.1.4: façamos o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x$. Temos que se $x = -1$, $y = 1$; se $x = 0$, $y = 0$; $x = 1$, $y = -1$; assim por diante. Desta forma a partir de $x = -1$ traçamos uma reta paralela ao eixo y e, a partir de $y = 1$, traçamos uma reta paralela ao eixo x. A intersecção dessas retas será o ponto $(-1, 1)$. Repete-se tal procedimento para os demais valores de x, encontrando, dessa forma, os pontos pertencentes ao gráfico.

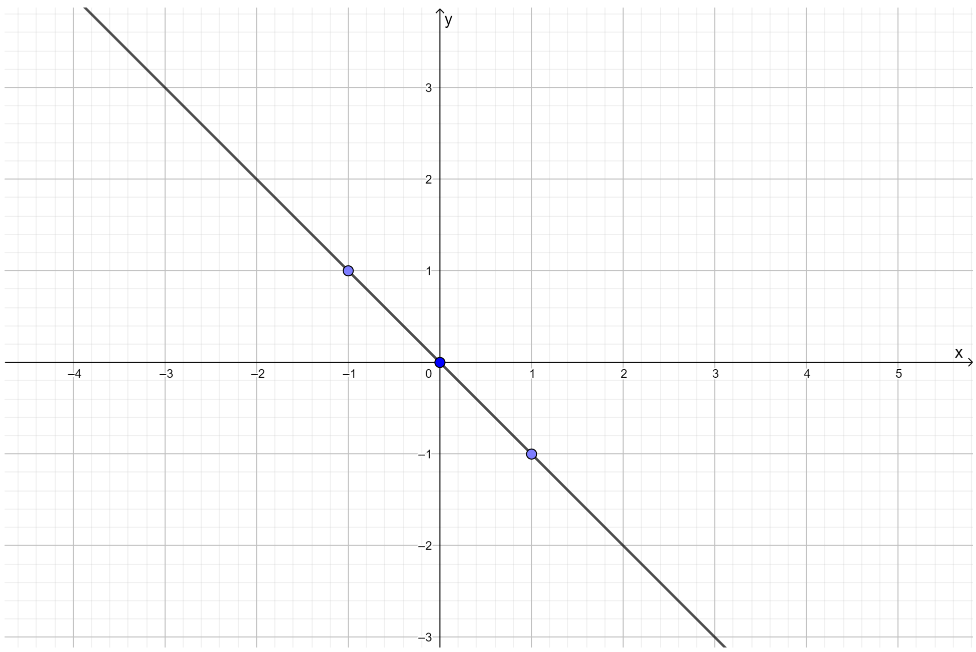


Figura 1.2: Gráfico da função $y = -x$.
(Fonte: autor.)

1.2 Função afim

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é denominada *afim* se sua representação matemática é dada por:

$$f(x) = ax + b,$$

sendo a e b números reais dados.

Quando temos $a = 0$, a regra da função afim fica definida como $f(x) = b$, e podemos denominá-la de *função constante*, pois a cada valor de x fica associado um único valor de y: b.

Exemplo 1.2.1: Vejamos o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1,8$.

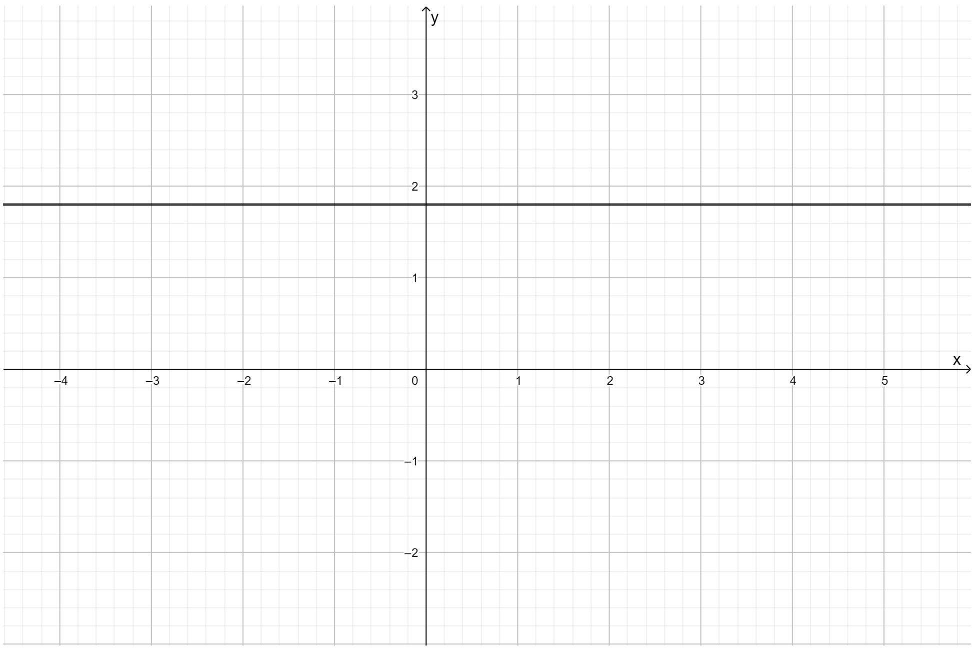


Figura 1.3: Gráfico da função $y = 1,8$.
(Fonte: autor.)

Quando temos $a \neq 0$, a função também é conhecida como polinomial do primeiro grau, já que sua regra é um polinômio[2] de grau 1.

Em geral, o domínio da função afim é o conjunto dos números reais, mas dependendo da situação, tais como algumas de suas aplicações, como juros simples, progressão aritmética, dentre outros, deve-se verificar o que a variável independente x representa para determinar o seu domínio.

[2]É uma expressão algébrica formada por monômios (ax^b, com $b \in \mathbb{N}$) e operadores aritméticos.

1.3 Gráfico da função polinomial de 1º grau

Teorema 1.1 Dada a função $f(x) = ax + b$, temos que o ponto $(0, b)$ pertence ao gráfico, pois $f(0) = b$. Dados x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$, tem-se que os pontos:

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b)$$

$$P_2 = (x_2, ax_2 + b)$$

$$P_3 = (x_3, ax_3 + b),$$

pertencem ao gráfico da função.

Supondo, sem perda de generalidade, $x_1 < x_2 < x_3$ e calculando a distância entre os pontos P_1 e P_2, P_2 e P_3 e P_1 e P_3, temos:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 + b - (ax_1 + b))^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

$$d(P_2, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (ax_3 + b - (ax_2 + b))^2} = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (ax_3 + b - (ax_1 + b))^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

Verificando as equações, temos que:

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

Desta forma, como a soma das distâncias $d(P_1, P_2)$ e $d(P_2, P_3)$ é igual à distância entre P_1 e P_3, utilizando o conceito da desigualdade triangular, qual seja, em um triângulo qualquer, nenhum dos lados pode ser maior ou igual que a soma dos outros dois lados, concluímos que P_1, P_2 e P_3 não formam um triângulo. Desta forma, percebemos que o segmento que liga P_1 e P_3 passa por P_2, ou seja, esses três pontos são colineares.

Concluímos então que o gráfico de uma função polinomial de 1° grau $f(x) = ax+b$, com $a \neq 0$, determina, no plano cartesiano, uma reta que corta o eixo das ordenadas no ponto b, chamado de coeficiente linear da função. Desta forma, precisamos de somente três pontos quaisquer da função para traçar o seu gráfico.

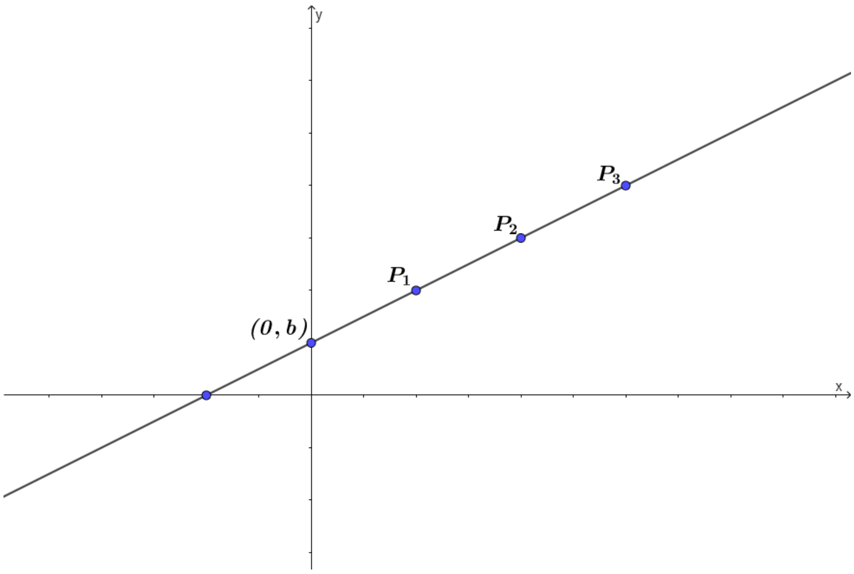


Figura 1.4: Gráfico de uma função afim.
(Fonte: autor.)

Da figura 1.4, temos que o gráfico da função corta o eixo x em um único ponto, chamado de zero da função. Para determinar tal ponto, basta encontrarmos qual o valor de x para o qual o valor correspondente y será igual a zero, portanto:

$$ax + b = 0,$$

que implica em:

$$x = \frac{-b}{a}.$$

Ainda em relação ao gráfico, por se tratar de uma reta, temos que sua inclinação (tangente do ângulo formado entre o eixo das abscissas e a reta que representa a função) é constante.

Para determinamos o valor dessa inclinação, denominamos de θ o ângulo formado entre o eixo x e consideremos os dois pontos do gráfico que cortam os eixos ordenados, quais sejam, $(0, b)$ e $(\frac{-b}{a}, 0)$, os quais formam, juntamente com a origem do plano cartesiano, um triângulo retângulo, conforme representado na figura 1.5.

Observando a figura 1.5, a partir do triângulo retângulo, podemos calcular a tangente de θ, como se segue:

$$tg(\theta) = \frac{b}{\frac{b}{a}} = a.$$

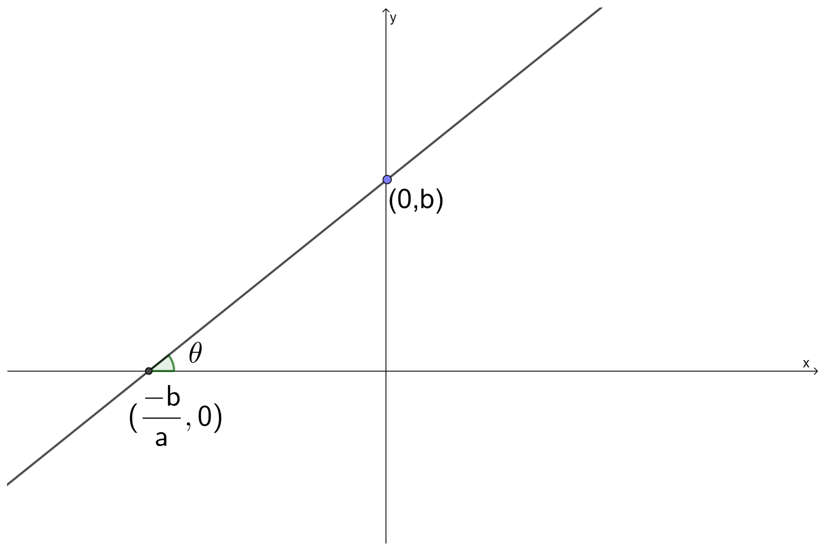


Figura 1.5: Ângulo formado entre os eixos e o gráfico de uma função crescente.
(Fonte: autor.)

Desta forma, podemos denominar uma função afim como *função crescente* se o seu ângulo θ estiver entre 0 e 90°. Nesse caso, temos que, dados x_1 e x_2 tal que $x_1 < x_2$, teremos que $f(x_1) < f(x_2)$.

Caso $90 < \theta < 180$, chamaremos a função de *função decrescente*. Sendo assim, dados x_1 e x_2 tal que $x_1 < x_2$, teremos que $f(x_1) > f(x_2)$. Para este caso, temos que o gráfico da função pode ser esboçado conforme a figura 1.6:

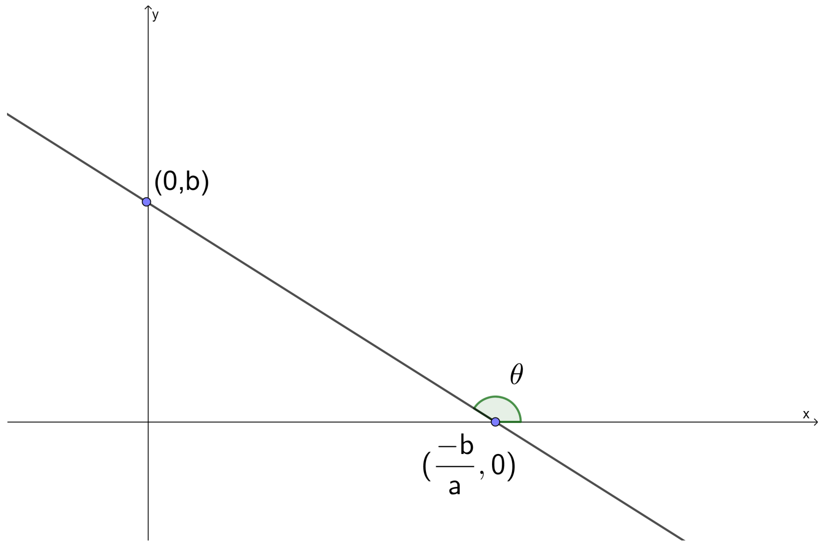


Figura 1.6: Ângulo formado entre os eixos e o gráfico de uma função decrescente.
(Fonte: autor.)

Neste caso, podemos calcular a tangente do ângulo θ como:

$$tg(\pi - \theta) = \frac{b}{\frac{-b}{a}}$$

Como

$$tg(\pi - \theta) = -tg(\theta),$$

teremos:

$$tg(\theta) = a$$

Portanto, o valor da inclinação do gráfico é constante e igual ao coeficiente a, denominado, desta forma, de *taxa de variação da função*.[3]

Percebemos, então, que podemos ter os possíveis esboços de gráficos para a função polinomial de 1° grau conforme a taxa de variação seja positiva ou negativa:

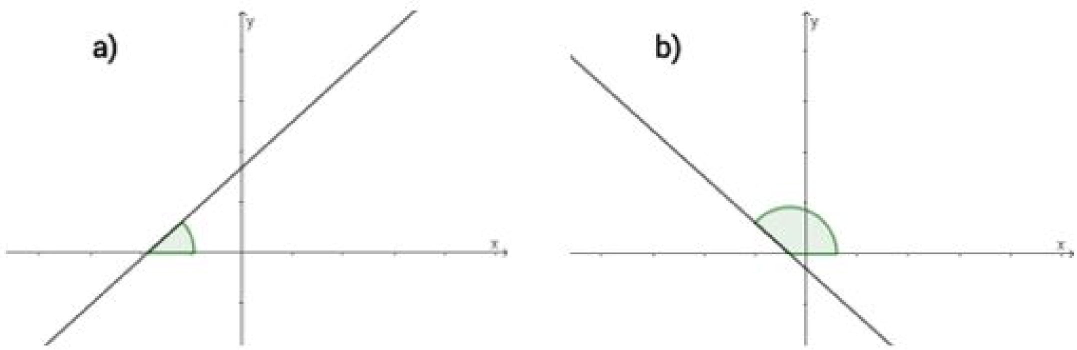


Figura 1.7: Gráfico da função $f(x) = ax + b$ para a) $a > 0$ e b) $a < 0$.
(Fonte: autor.)

Observando que o ângulo formado entre a reta e o eixo das abscissas é medido a partir do eixo cartesiano no sentido anti-horário, tem-se que $0 < \theta < 180°$ e $\theta \neq 90°$. Desta forma é direto perceber que quando θ assume valores entre 0 e 90°, a tangente do ângulo é positiva, portanto $a > 0$ e, assim, a reta é crescente. Caso contrário, quando θ está entre 90° e 180°, tem-se que a tangente do ângulo é negativa, portanto $a < 0$ e, assim, a reta é decrescente.

[3] A cada unidade que se aumenta x, a imagem da função varia de uma quantidade igual ao coeficiente a.

1.4 Caracterização da função polinomial de 1° grau

A função polinomial de 1º grau $f(x) = ax + b$ é caracterizada como tendo crescimento ou decrescimento constante, ou seja, um aumento ou uma diminuição no valor da função de um determinado ponto ($f(x)$) para outro ($f(x+h)$) não depende da variável x. Dizendo de outra forma, tem-se:

$$f(x+h) - f(x) = a(x+h) + b - (ax+b) = a \cdot h = \phi(h)$$

Ou seja, variando-se a função f em uma quantidade h, a diferença obtida não depende da variável x, diferentemente do que ocorre, por exemplo, na função polinomial do segundo grau $f(x) = x^2$:

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

Com o objetivo de melhor contextualizar tal caracterização, vejamos através de um exemplo como podemos perceber o seu significado e como identificar quando uma determinada situação pode ser modelada como uma função afim:

Exemplo: O valor da conta de água de uma residência é igual a um valor fixo (tarifas) de R\$10,00 mais R\$5,00 para cada m^3 consumidos. Determine o valor da conta em função do consumo x.

É direto perceber que o valor da conta depende do volume de água consumido x, assim, podemos descrevê-la conforme a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = 10 + 5x.$$

Observe que, caso se consuma $1m^3$ a mais em um mês em relação ao anterior, no qual se consumiu nm^3 a diferença D na conta será:

$$f(n+1) - f(n).$$

Substituindo pela equação que rege a função, temos:

$$D = 10 + 5 \cdot (n + 1) - (10 + 5 \cdot n) = 5.$$

Assim, cada unidade de aumento no consumo eleva em cinco reais o valor da conta. Ou seja, o acréscimo na conta não depende da variável x, caracterizando-se, portanto, uma função polinomial do $1^{\underline{o}}$ grau.

Capítulo 2

Progressões aritméticas

Neste capítulo abordaremos os conceitos de progressão aritmética utilizando Morgado e Carvalho (2013) e Giovanni e Bonjorno (2000b) como base para sua conceituação. Veremos como podemos desenvolver tais conceitos utilizando-se das definições de função afim vistas no capítulo 1.

Em Costa (2009) temos que as progressões são estudadas desde povos muito antigos, como os babilônios. Na época, procuravam padrões como o da enchente do Rio Nilo, com o objetivo de verificar quando ocorriam tais enchentes para poderem plantar na época certa.

Assim, observaram que o rio subia logo depois que a estrela Sírius aparecia no leste, um pouco antes do Sol. Vendo que tal fenômeno ocorria a cada 365 dias, os egípcios criaram um calendário solar, composto de doze meses, de 30 dias cada mês e mais cinco dias de festas, dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys. Dividiram, ainda os doze meses em três estações de quatro meses cada uma: período de semear, de crescimento e da colheita.

No ano de 1787, Johann Carl Friedrich Gauss, durante uma aula de matemática, após seu professor pedir para que todos os alunos obtivessem a soma dos números de 1 a 100, verificou rapidamente qual era o resultado procurado, obtendo, tendo apenas 10 anos de idade, a fórmula da soma dos termos de uma PA.

2.1 Sequência numérica

Definição 2.1.1: Uma *sequência numérica* é definida como qualquer função f cujo domínio é o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$. Desta forma, podemos ter como exemplo de sequência a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida por $f(n) = 5n^2 + 8$.

Costuma-se representar cada termo de uma sequência por uma letra qualquer acompanhada de um índice, que indica qual a posição ou ordem do termo na sequência. Ou seja, o termo a_1 será o primeiro da sequência, a_2 será o segundo, e assim sucessivamente. Desta maneira uma sequência pode ser escrita como:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...).$$

Desta forma podemos escrever a sequência f definida na função exemplificada acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_1 &= 13 \\ a_2 &= 28 \\ a_3 &= 53 \\ a_4 &= 88 \\ a_5 &= 133, \end{aligned}$$

ou, escrita de outra forma: (13, 28, 53, 88, 133,...).

2.2 Termo geral de uma progressão aritmética

Definição 2.2.1: Define-se progressão aritmética, ou simplesmente PA, como uma sequência tal que cada termo a partir do segundo é igual ao anterior mais um valor fixo, denominado *razão da progressão*, r.

A partir dessa definição e denominando cada termo da progressão como a_i, no qual o índice determina a posição do termo dentro da sequência, podemos escrevê-la, indutivamente, da forma que se segue:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r = a_1 + 2r \\
a_4 &= a_3 + r = a_1 + 3r \\
&\vdots \\
a_{n-1} &= a_{n-2} + r = a_1 + (n-2)r \\
a_n &= a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)r.
\end{aligned}
$$

Substituindo cada uma das linhas na linha seguinte, é direto perceber que a determinação do n-ésimo termo da sequência ocorre conforme a última igualdade acima. Observando a posição de cada termo e o número que aparece multiplicando a razão, vemos que o termo que ocupa a posição n é igual ao primeiro termo mais $(n-1)$ vezes a razão r. Desta forma, podemos escrever a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética como:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, \qquad n \geq 1.$$

Por vezes pode ser conveniente, dependendo daquilo que a progressão aritmética está representando, iniciar a contagem dos termos a partir do zero. Desta forma, o primeiro termo será o a_0 e a fórmula do termo geral será dada por:

$$a_n = a_0 + n \cdot r, \qquad n \geq 0.$$

2.3 Representação Gráfica da PA

Podemos representar graficamente os termos de uma progressão aritmética utilizando o plano cartesiano de forma que no eixo das ordenadas representaremos cada um dos termos da sequência (a_n) e, no eixo das abscissas, a posição dos respectivos termos (n).

Considerando-se três termos consecutivos da sequência, a partir da fórmula do

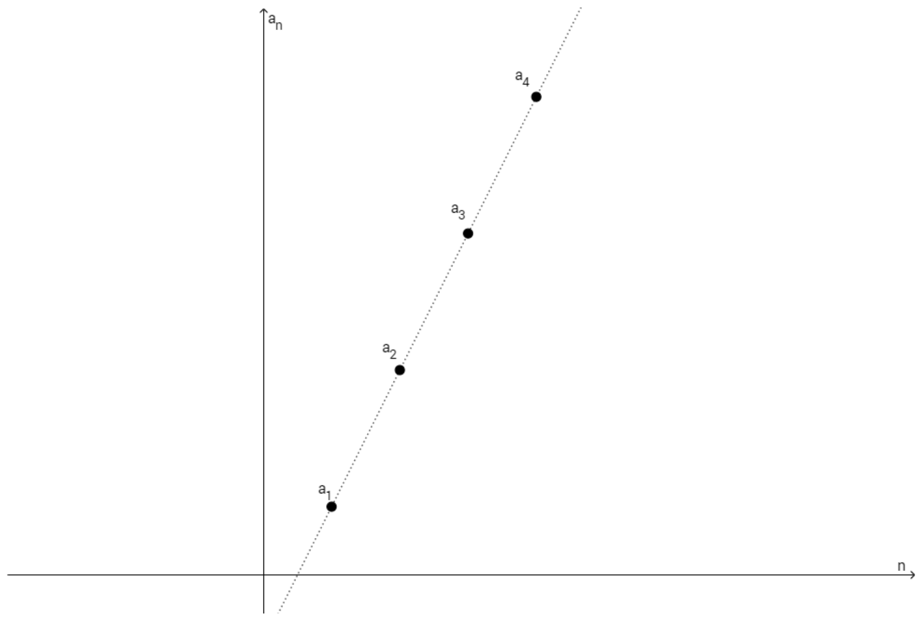


Figura 2.1: Representação de uma PA no plano cartesiano.
(Fonte: autor.)

termo geral da PA, temos que esses termos são:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_1 + n \cdot r \\ a_n &= a_1 + (n-1) \cdot r \\ a_{n-1} &= a_1 + (n-2) \cdot r. \end{aligned}$$

Podemos representar esses três pontos consecutivos no plano cartesiano e construir triângulos retângulos utilizando segmentos paralelos aos eixos coordenados de tal forma que a hipotenusa corresponderá ao segmento que liga um termo ao seu consecutivo, conforme figura 2.2 abaixo.

Observando a figura 2.2 percebemos que os dois triângulos possuem o cateto paralelo às abscissas com comprimento 1. O outro cateto tem comprimento igual à razão r da PA, pois:

$$a_{n+1} - a_n = a_1 + n \cdot r - [a_1 + (n-1) \cdot r] = r.$$

Portanto, pelo caso LAL (lado, ângulo, lado) de semelhança de triângulos, temos que os dois triângulos são congruentes. Desta forma, os ângulos correspondentes aos catetos paralelos à abscissa são iguais, portanto, os pontos a_{n-1}, a_n e a_{n+1} estão alinhados. Concluímos, então, que os segmentos que ligam a_{n-1} a a_n e a_n a a_{n+1} pertencem à mesma reta.

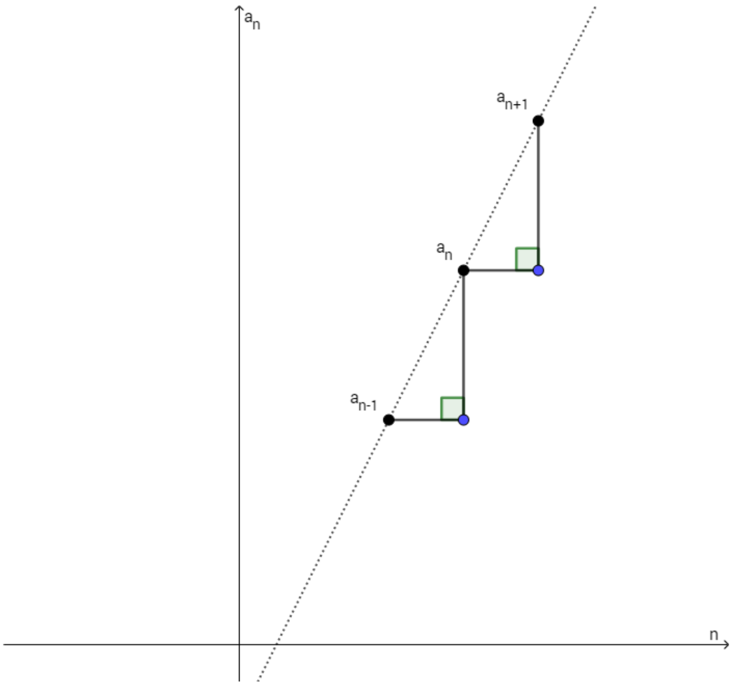


Figura 2.2: Triângulos definidos por 3 termos consecutivos de uma PA.
(Fonte: autor.)

Como os termos da sequência originam uma reta no plano cartesiano e o crescimento ou decrescimento da PA é contínuo, ou seja, não depende da variável n, característica da função afim vista no capítulo anterior, podemos expressar a progressão aritmética conforme uma função afim.

Tomando-se os devidos cuidados na definição da função quanto à escolha de seu domínio, que, no caso será o conjunto dos números naturais, e representando a variável independente por n, temos que a PA pode ser escrita como a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tal que:

$$f(n) = r \cdot n + (a_1 - r).$$

Relacionando os termos da PA aos coeficientes vistos quando do estudo da função afim, verifica-se que a razão r corresponde à taxa de variação da função, ou seja, se $r > 0$, a PA é crescente e, se $r < 0$, a PA é decrescente. E o termo $(a_1 - r)$ é o coeficiente linear, ou seja, considerando a reta cortando o eixo y, teríamos que ela passaria pelo ponto $(0, a_1 - r)$.

2.4 Soma dos termos de uma PA

Para determinar a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (S_n), basta resolvermos a fórmula seguinte:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n,$$

que, conforme a propriedade comutativa da adição, pode ser escrita de forma equivalente a:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_3 + a_2 + a_1.$$

Somando as equações para a soma do termo geral acima, teremos como resultado:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ...$$

Que, escrito de outra forma, fica:

$$2S_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{n-i+1}).$$

Observando o segundo parêntese, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_{n-1} &= a_n - r. \end{aligned}$$

Portanto, a soma indicada, $(a_2 + a_{n-1})$ resultará em $(a_1 + a_n)$. Utilizando-se do mesmo artifício para os demais termos da soma, ou seja, substituindo pela fórmula do termo geral, verificaremos que em cada um dos parênteses restará a mesma soma: $(a_1 + a_n)$. Haverá, desta forma, n parênteses iguais. Assim:

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n),$$

logo a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA fica:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Vejamos outra maneira de se demonstrar a equação da soma dos n termos de uma PA. Ao definirmos a progressão aritmética como uma função, podemos também interpretar a soma finita dos termos da PA através do gráfico dessa função. Representando graficamente a PA, observa-se que a soma de seus termos corresponde à soma das áreas (A_T) de cada um dos retângulos de base 1[1] e altura a_n[2] da figura 2.3:

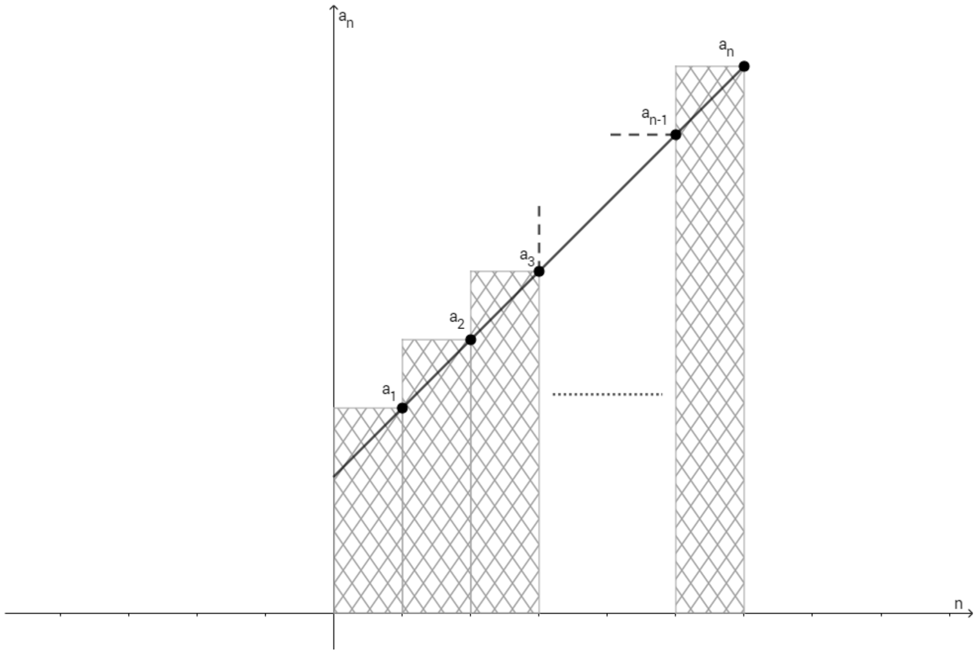


Figura 2.3: Soma das áreas definidas pelos termos da PA.
(Fonte: autor.)

Desta forma, podemos escrever tal área como:

$$A_T = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + ... + a_{n-1} \cdot 1 + a_n \cdot 1,$$

assim:

$$A_T = \sum_{i=1}^{n} a_i = S_n.$$

A fim de não utilizar de técnicas de integração, que são aprendidas apenas no ensino superior, focando-se, para no presente trabalho, os estudantes de ensino médio, calculemos a área hachurada através de conceitos da geometria.

Observando o gráfico, conseguimos perceber que é formada a figura de um trapézio cuja base menor pertence ao eixo das ordenadas. Para determinar seu comprimento, basta

[1] Basta observar que os lados paralelos ao eixo y coincidem com $n = 0$, $n = 1$, etc.
[2] Observe que a altura corresponde aos respectivos termos da PA.

substituir o n da fórmula do termo geral por zero, verificando que tal base mede $(a_1 - r)$.

A base maior do trapézio é paralela ao eixo ordenado e podemos observar que seu comprimento equivale ao módulo do valor do n-ésimo termo, a_n.

Temos que a área procurada será igual à área do trapézio mais a área dos n triângulos retângulos que estão na porção superior do segmento oblíquo (que corresponde ao gráfico da função que representa a PA). Esses triângulos possuem catetos medindo r e 1. Dessa forma, equacionando a área, temos:

$$A_T = \frac{[(a_1 - r) + (a_n)] \cdot n}{2} + \frac{r}{2} \cdot n.$$

Na qual o primeiro membro da soma corresponde à área do trapézio e o segundo, à dos triângulos. Desenvolvendo esta fórmula, chegamos na mesma equação encontrada acima:

$$A_T = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = S_n.$$

Concluímos, assim, que também podemos desenvolver a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA pensando nela como uma função. Na prática, tal formulação não será útil como ferramenta na solução de questões, haja vista que basta a substituição dos dados na fórmula da soma.

Capítulo 3

Resolução de questões do ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) especifica em seu edital, em consonância com o PCN, quais as competências esperadas dos estudantes na área da matemática. Dentre elas, destaca-se:

> Competência de área 4 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
> Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.(INEP, 2009)

Além das competências, o edital do ENEM discrimina quais os objetos de conhecimento associados à matemática, destacando-se para o presente trabalho: **conhecimentos numéricos** (sequências e progressões); **conhecimentos algébricos** (funções algébricas de 1º grau).

A fim de se trabalhar a relação entre diferentes áreas de conhecimento da matemática e mostrar a relação entre PA e função afim, foram selecionadas cinco questões do exame a fim de serem resolvidas de duas formas distintas, utilizando conceitos vistos no estudo de funções e no de progressões aritméticas.

Não serão vistos exemplos que trabalham a soma dos n primeiros termos de uma PA, pois como visto, tal relação com função é prática apenas quando do desenvolvimento da fórmula, sendo que para a resolução dos exercícios deste tipo basta realizar a substituição direta na fórmula.

3.1 Questão 01

ENEM (2004). Na seleção para as vagas deste anúncio (ver figura), feita por telefone ou correio eletrônico, proc punha-se aos candidatos uma questão a ser resolvida na hora. Deveriam calcular seu salário no primeiro mês, se vendessem $500m$ de tecido com largura de $1,40m$, e no segundo mês, se vendessem o dobro. Foram bem sucedidos os jovens que responderam, respectivamente:

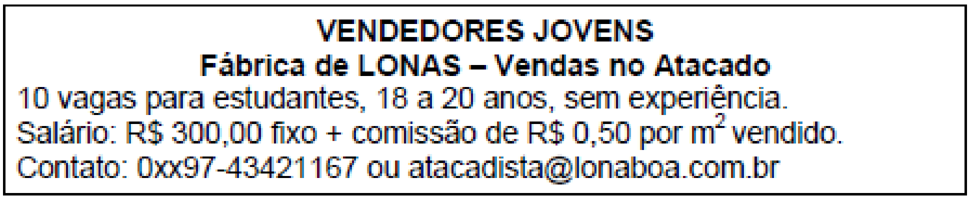


Figura 3.1: Figura da questão 1.

(A) R\$300,00 e R\$500,00. (B) R\$550,00 e R\$850,00.
(C) R\$650,00 e R\$1000,00. (D) R\$650,00 e R\$1300,00.
(E) R\$950,00 e R\$1900,00.

Podemo resolver essa questão utilizando conceitos de função. Para isto, partiremos determinando qual a regra que fornece o salário (S) em função da área (A) de tecido vendida. Como a variação do salário é constante de acordo com a quantidade de tecido vendida no mês, teremos uma função afim. Pelos dados fornecidos temos que tal função pode ser definida como $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$S(A) = 0,5A + 300.$$

Deseja-se saber qual o salário quando se vende um tecido de medidas $500m$ de comprimento por $1,4m$ de largura, ou seja, que tenha $700m^2$. Substituindo esse valor de área na função, temos:

$$S(700) = 0,5 \cdot 700 + 300 = 650.$$

Este é o valor do salário no primeiro mês. No segundo mês foi vendido o dobro de tecido, ou seja, $1400m^2$. Portanto o salário recebido será:

$$S(1400) = 0,5 \cdot 1400 + 300 = 1000.$$

Podemos pensar nessa questão também em termos de uma PA. Tem-se que caso nada se venda, o salário será de 300 reais e, para cada m^2 vendido, aumenta-se 0,50 reais (ou 50 centavos), caracterizando-se, assim, uma progressão aritmética na qual o primeiro termo é 300 e a razão é $0,5$. Primeiramente devemos observar que o n-ésimo termo da PA, a_n, corresponde à venda de $(n-1)m^2$ de tecido. Assim, para a venda de $700m^2$, procuramos o 701 termo da sequência. Substituindo na fórmula do termo geral, temos:

$$a_{701} = 300 + (701 - 1) \cdot 0,5 = 650.$$

Este é o valor do salário no primeiro mês. No segundo mês foi vendido o dobro de tecido, ou seja, $1400m^2$, que corresponde ao 1401° termo. Portanto o salário recebido será:

$$a_{1401} = 300 + (1401 - 1) \cdot 0,5 = 1000.$$

Logo, utilizando de ambos os conceitos, chega-se, como esperado, no mesmo resultado, ou seja, os salários no primeiro e no segundo mês são, respectivamente, R$650,00 e R$1000,00, conforme alternativa C.

3.2 Questão 02

ENEM (2007). O gráfico abaixo, obtido a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.
Se mantida, pelos próximos anos, a tendência de crescimento mostrada no gráfico, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a:
(A)465. (B) 493. (C) 498. (D) 538. (E) 699.

Para resolver a questão utilizando os conceitos vistos em função, podemos perceber que devemos determinar a regra que relaciona o número de espécies ameaçadas de extinção (n) em função do ano (x). Como o gráfico tem um crescimento linear, ou seja, a taxa de variação das espécies é constante para cada ano passado, significa que procuramos a função $n(x) = a \cdot x + b$ que satisfaças às condições pedidas.

O gráfico da função deverá conter os seguintes pontos: $(1983, 239)$ e $(2007, 461)$.

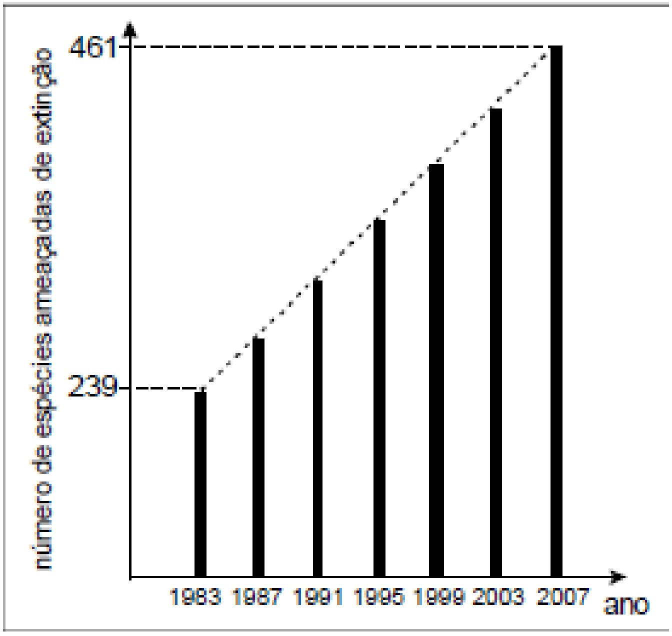


Figura 3.2: Gráfico da questão 2.

Assim, basta resolver o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 239 = 1983 \cdot a + b \\ 461 = 2007 \cdot a + b. \end{cases}$$

Subtraindo a 2ª equação da 1ª:

$$24 \cdot a = 222,$$

logo

$$a = \frac{37}{4}$$

e, desta forma,

$$b = \frac{-72415}{4}.$$

Assim, a relação de n em função de x, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ será:

$$n(x) = \frac{(37x - 72415)}{4}.$$

Para o ano pedido, 2011, temos que n vale:

$$n(2011) = 498.$$

Da mesma forma que a primeira questão, verifiquemos como resolver essa segunda utilizando conceitos de PA.

Temos que o primeiro termo da sequência (para o ano de 1983) vale 239 e o sétimo (ano de 2007) vale 461. Devemos observar que o segundo termo será o valor correspondente ao ano de 1987, o terceiro, ao ano de 1991, e assim por diante. Portanto, para o ano de 2011, devemos determinar qual o oitavo termo da sequência (pois passaram-se 8 períodos de 4 anos desde 1983). Substituindo na fórmula do termo geral afim de se determinar a razão da sequência, obtém-se:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r.$$

Substituindo para $n = 7$:

$$a_7 = a_1 + (7-1) \cdot r.$$

Colocando os dados da questão:

$$461 = 239 + 6 \cdot r.$$

Resolvendo a equação, teremos:

$$r = 37.$$

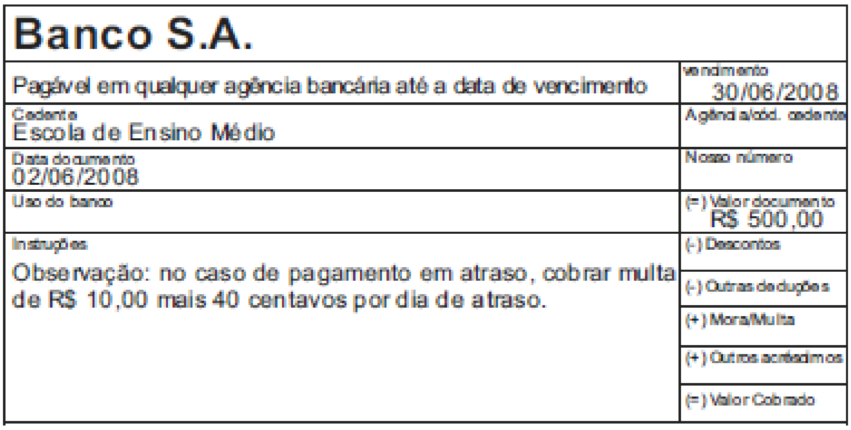
Portanto, para calcular o oitavo termo, basta somarmos a razão ao sétimo termo, ou seja:

$$a_8 = a_7 + r = 498.$$

Portanto, como esperado, tanto interpretando a questão como uma PA quanto como uma função, chegamos ao mesmo resultado: o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a 498, sendo a resposta a alternativa C.

3.3 Questão 03

ENEM (2008).A figura abaixo representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao mês de junho de 2008.
Se $M(x)$ é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, em que x é o número de dias em atraso, então:



Banco S.A.

Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência/cód. cedente
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(-) Descontos (-) Outras deduções (+) Mora/Multa (+) Outros acréscimos (=) Valor Cobrado

Figura 3.3: Figura da questão 3.

(A) M(x)=500+0,4x.

(B) M(x)=500+10x

(C) M(x)=510+0,4x.

(D) M(x)=510+40x.

(E) M(x)=500+10,4x.

Como o acréscimo no valor é constante para cada dia de atraso que se passa, temos um relação linear. Portanto a regra que relaciona o valor adicional cobrado (J) em função do número de dias (x) é a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$J(n) = 10 + 0,4n.$$

Já o valor total a ser pago (M) em função do número de dias é igual ao valor do documento mais o valor adicional cobrado. Dessa forma:

$$M(x) = 500 + J(x).$$

Ou seja:

$$M(x) = 510 + 0,4x.$$

Continuando com o proposto, pensemos, agora, no valor adicional cobrado (J) como sendo uma sequência. Temos que o primeiro termo é 10,4, pois o juros no primeiro é a soma dos 10 reais da multa mais os 40 centavos; e a razão é 0,4. Assim:

$$J_n = 10,4 + ((n-1) \cdot 0,4.$$

Simplificando, temos:

$$J_n = 10 + 0,4n.$$

O valor total a ser pago (M) é igual ao valor do documento mais os juros. Assim, afim de manter as variáveis dadas nas alternativas, designando o número de dias por x, teremos:

$$M(x) = 500 + J_n.$$

Portanto:

$$M(x) = 510 + 0,4x.$$

Desta forma, podemos ver que de qualquer forma o resultado é o mesmo: o valor a ser pago é $M(x) = 510 + 0,4x$, ou seja, alternativa C.

3.4 Questão 04

ENEM (2010). Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige um alto investimento financeiro. Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10km de corrida em um mesmo dia de treino. Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente:

(A)12 dias. (B) 13 dias.

(C) 14 dias. (D) 15 dias.

(E) 16 dias.

Podemos perceber, haja vista o aumento constante da distância percorrida ao longo dos dias, que a regra que relaciona a distância total corrida (d) em função do número de dias (n) será linear, definida como $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tal que:

$$d(n) = 3 + 0,5(n - 1).$$

Simplificando:

$$d(n) = 2,5 + 0,5n.$$

Assim, basta determinarmos o dia em que o corredor irá percorrer um total de 10km, substituindo-se o 10 no lugar da distância d:

$$10 = 2,5 + 0,5n.$$

Resolvendo, encontramos:

$$n = 15.$$

Podemos pensar na distância corrida como uma PA, de tal forma que o primeiro termo é 3 e a razão é 0,5. Assim, queremos determinar qual a posição do termo cujo valor será 10, ou seja, dado $a_n = 10$, quanto vale n? Utilizando a fórmula do termo geral de uma PA, teremos, substituindo os valores dados:

$$10 = 3 + (n - 1)0,5.$$

E, portanto:

$$n = 15.$$

Mais uma vez, pensando na questão como uma PA ou como uma função, conseguimos a mesma resposta: o corredor poderá percorrer 10km após 15 dias de treino - alternativa D.

3.5 Questão 05

ENEM (2016). Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro. Qual é o número de andares desse edifício?

A) 115 B) 60 C) 40

D) 100 E) 120

Resolvamos primeiramente percebendo que a numeração dos andares visitados pelo bombeiro hidráulico João formam uma PA cujo primeiro termo é 1 e e razão é 2. Sendo assim, os andares em que ele trabalhou podem ser determinados pelo termo geral da PA:

$$J_n = 1 + (n-1) \cdot 2, \qquad n \geq 1.$$

Verifica-se também que o número dos andares nos quais o eletricista Pedro trabalhou formam uma PA cujo primeiro termo é 1 e razão é 3. Seu termo geral é dado por:

$$P_m = 1 + (m-1) \cdot 3, \qquad m \geq 1.$$

Para definir quais os andares receberam os serviços tanto de João quanto de Pedro, devemos verificar os valores de m e de n que satisfazem a igualdade $J_n = P_m$. Tem-se, assim:

$$2 \cdot (n-1) = 3 \cdot (m-1).$$

Para que tal igualdade seja satisfeita e sabendo que 2 e 3 são primos entre si, tem-se que $n-1$ deve ser múltiplo de 3 e $m-1$ deve ser múltiplo de 2. Assim, o conjunto solução são os pares ordenados (n, m):

$$(1, 1), (4, 3), (7, 5), ...$$

Percebe-se que o número dos andares visitados por ambos os trabalhadores formam uma nova PA, com primeiro termo 1 e razão igual ao mínimo múltiplo comum das outras razões, 2 e 3, portanto, 6. Assim:

$$a_p = 1 + (p-1) \cdot 6.$$

Como em 20 andares foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica e ambos terminaram os serviços no último andar, basta calcularmos o vigésimo termo da sequência:

$$a_{20} = 1 + (20 - 1) \cdot 6.$$

Portanto:

$$a_{20} = 115.$$

Podemos, da mesma forma, escrever uma função que representa os andares visitados por João como:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

tal que

$$f(j) = 2j - 1,$$

e a função que representa os andares visitados por Pedro como:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

tal que

$$f(p) = 3p - 2.$$

Para sabermos quais os andares receberam os serviços dos dois, deve-se verificar quais os elementos pertencem, simultaneamente, ao conjunto imagem de cada uma das funções, ou seja, deve-se determinar a intersecção entre os conjuntos imagens das funções. Para tal iguala-se as funções, procedendo, em seguida, tal como a resolução anterior.

Capítulo 4

Calorimetria

A ideia de calor existe desde a antiguidade, quando era considerado como algo que fluía dos objetos quentes para os objetos frios. Pires (2008) conta que em 1760, Joseph Black (1728-1799), considerado o fundador da ciência da Termometria, visualizou calor como um fluido ponderável e indestrutível, capaz de interpenetrar todos os corpos materiais. Foi que observou também que sempre necessitamos de uma certa quantidade de calor para elevar a temperatura de um dado objeto, definindo a unidade de quantidade de calor como a quantidade do fluido necessária para elevar a temperatura de um dado corpo em uma unidade de temperatura.

Neste capítulo veremos como abordar no conteúdo de calorimetria, visto em física normalmente no segundo ano do ensino médio, utilizando os conceitos de função polinomial do 1° grau. Foram utilizados como referência os autores Rescnick et al. (2003) e Máximo e Alvarenga (2005).

4.1 Conceitos

Os objetos que conhecemos são constituídos por moléculas, as quais estão ligadas umas às outras por uma força de atração. Porém, apesar dessa atração, ainda conseguem realizar pequenas oscilações. A *temperatura* de um corpo é uma grandeza que indica o grau dessas oscilações.

Quando dois ou mais corpos com temperaturas diferentes são colocados em contato, há uma transferência de energia dos corpos mais quentes para os mais frios. Tal transferência é denominada de calor e ocorre até os corpos atingirem o equilíbrio térmico, ou seja, estarem a uma mesma temperatura.

Observa-se que para diferentes materiais é diferente a quantidade de calor necessária para alterar de uma mesma quantidade a temperatura de um corpo. Tal característica desses materiais é chamada de *calor específico*, que é definido como a quantidade de calor necessária para elevar em 1°C a temperatura de 1g de determinado material.

Desta forma, verificando-se a proporcionalidade entre as variáveis, é fácil perceber que a quantidade de calor Q necessária para alterar a temperatura de um determinado corpo depende diretamente de sua massa m, da variação da temperatura ΔT e do calor específico c. Assim, podemos calcular essa quantidade de calor através da equação:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T.$$

SUBSTÂNCIA	CALOR ESPECÍFICO $(cal/g \cdot °C)$
Água	1,0
Alumínio	0,214
Amônia (líquida)	1,125
Cobre	0,0921
Chumbo	0,0306
Etanol	0,581
Gelo	1,041
Mercúrio	0,03325
Areia	0,225
Vapor de água	0,481

Figura 4.1: Calor específico de algumas substâncias.
(Fonte: autor.)

Da equação pode-se construir a função $Q(\Delta T)$ cujo objetivo é melhorar o entendimento da relação de proporcionalidade existente entre tais grandezas e realizar comparações no sentido de:

1) Dados dois objetos de mesma massa, porém feitos com materiais diferentes. Querendo-se variar de uma mesma quantidade a temperatura de ambos, qual a relação entre as quantidades de calor necessárias para cada material?

2) Dados dois objetos feitos de um mesmo material, porém de massas diferente. Variando-se de uma mesma quantidade a temperatura de ambos, qual a relação entre as quantidades de calor necessárias para cada um?

4.2 Estudo da Função para Materiais Diferentes

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$Q(\Delta T) = m \cdot c \cdot \Delta T$$

Nessa função temos que a taxa de variação dependerá apenas do calor especifico do material e de sua massa. Assim, como tais grandezas são sempre positivas, verifica-se que os gráficos serão crescentes.

Como o domínio da função é o conjunto dos números reais, faz-se necessário o entendimento do significado físico de quando temos uma variação de temperatura com valor negativo. Nesse caso, a quantidade de calor Q também será negativa. Isso significa que o corpo está cedendo calor, de tal forma que sua temperatura final será menor que a inicial, ou seja, $\Delta T < 0$.

Construindo os gráficos da quantidade de calor em função da variação da temperatura para dois materiais distintos, água, cujo calor específico vale $c = 1,0 cal/g \cdot^\circ C$ e areia, que possui $c = 0,225 cal/g \cdot^\circ C$, e considerando uma mesma quantidade de cada material, para o caso, uma mesma massa $m = 1,0g$, temos:

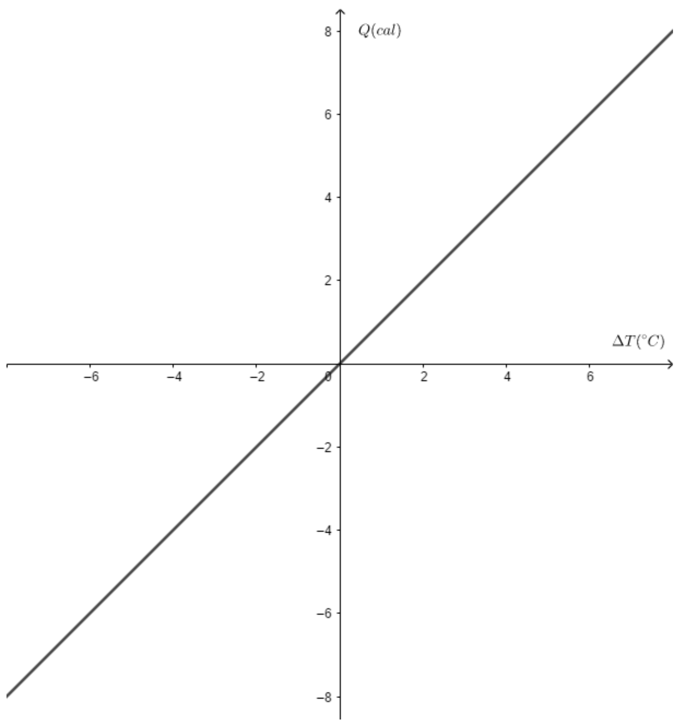


Figura 4.2: Quantidade de calor da água em função da variação da temperatura. *(Fonte: autor.)*

A função $Q(\Delta T)$ representada graficamente na figura 4.2 acima para a água é definida como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que:

$$Q = 1,0 \cdot \Delta T.$$

Para a areia, cuja função está representada graficamente na figura 4.3 abaixo, temos que sua função é definida por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que:

$$Q = 0,225 \cdot \Delta T.$$

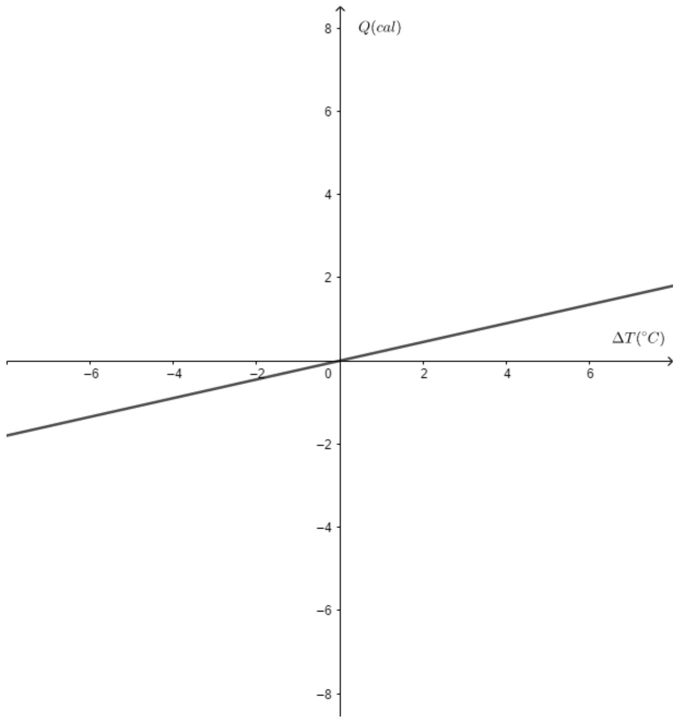


Figura 4.3: Quantidade de calor da areia em função da variação da temperatura. *(Fonte: autor.)*

Analisando ambos os gráficos, é fácil perceber que quando o calor específico é menor, a inclinação do gráfico é menor. A fim de melhor comparar a diferença do comportamento de ambos os materiais, plotaremos os gráficos em um mesmo plano, vistos na figura 4.4 abaixo.

Comparando-se as duas funções e observando seus respectivos gráficos, verifica-se que, para a água, a taxa de variação é maior, portanto, como visto no capítulo 1, teremos que a inclinação do seu gráfico também será maior. Isso significa, fisicamente, que para se ter uma mesma variação de temperatura, precisamos fornecer mais calor para a água

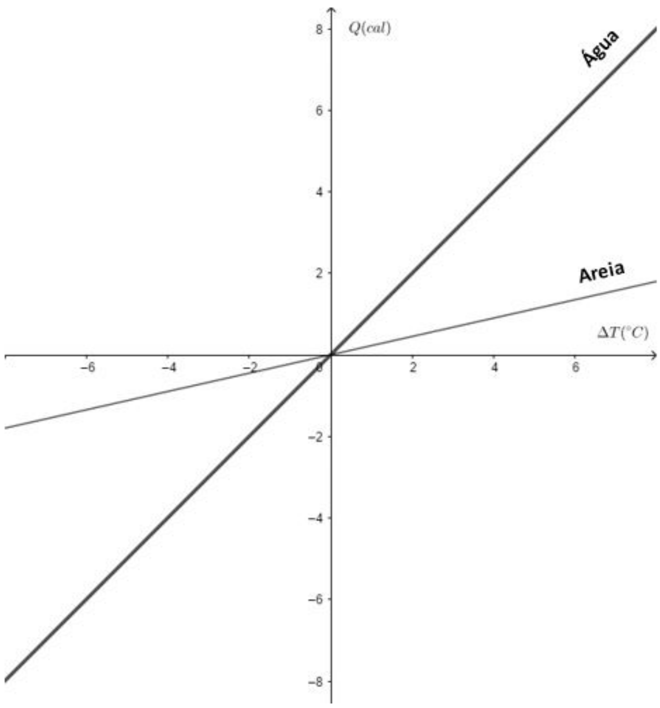


Figura 4.4: Quantidade de calor da água e da areia em função da variação da temperatura. *(Fonte: autor.)*

do que para a areia.

Numericamente, percebe-se que, dadas duas massas iguais de água e de areia para se obter uma mesma variação em suas temperaturas, deve-se fornecer uma quantidade de calor cerca de 4,5 vezes maior para água em comparação com a areia.

Tal fato pode ser percebido, na prática, em uma praia, na qual, em um dia ensolarado, perceberemos a areia mais quente do que a água.

4.3 Estudo da Função para Massas Diferentes

Agora estudemos o comportamento de duas quantidades diferentes de água, uma com massa de $0,25g$ e outra com massa de $1,5g$. Plotando-se o gráfico da quantidade de calor em função da variação da temperatura de ambas as quantidades em um mesmo plano, temos:

Nesse gráfico, temos que a função $Q(\Delta T)$ para $1,5g$ de água é escrita como:

$$Q = 1,5 \cdot \Delta T$$

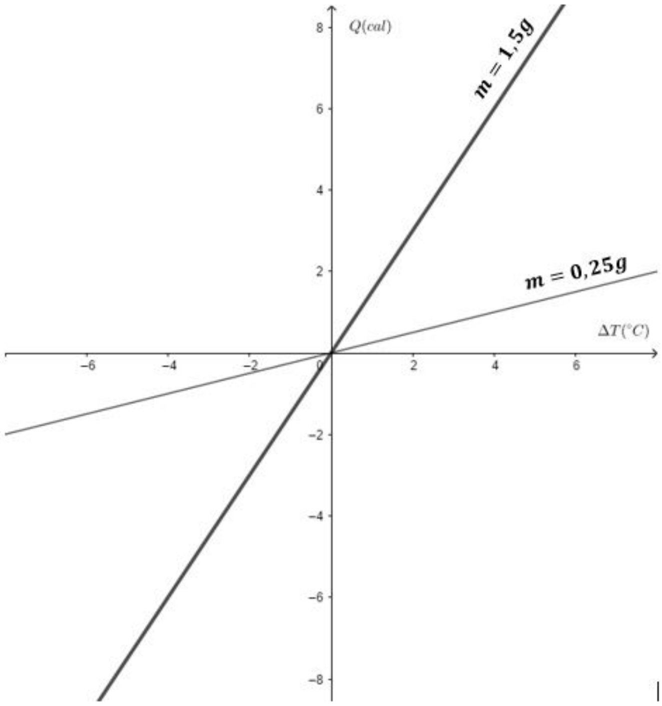


Figura 4.5: Quantidade de calor para massas diferentes de água em função da variação da temperatura.

(Fonte: autor.)

e, para $0,25g$ de água, temos:

$$Q = 0,25 \cdot \Delta T.$$

Comparando-se as duas funções e observando seus respectivos gráficos, verifica-se que, para uma massa maior de água, o coeficiente angular é maior, portanto a inclinação do seu gráfico também é maior. Isso significa, fisicamente, que para se obter uma mesma variação de temperatura, dadas duas massas diferentes de um mesmo material, aquele que tiver maior massa irá precisar de mais energia.

Numericamente, percebemos que, fornecendo uma mesma quantidade de calor, a variação da temperatura da massa de $1,5g$ será cerca de seis vezes menor que a de massa igual a $0,25g$.

Na prática fica fácil de perceber tal diferença quando aquecemos em um mesmo fogão duas quantidades diferentes de água. Verificamos que quanto maior a quantidade de água, mais tempo demorará para que ferva, sendo que tal diferença de tempo é diretamente proporcional à diferença das massas.

4.4 Questões

Observemos como o entendimento de tais conceitos pode auxiliar o aluno na resolução de alguns execícios propostos:

UFRN-2013. Ao visitar a praia durante um belo dia de sol, perceberemos que a areia estará bem quente, enquanto a água estará fria. Marque a alternativa que explica corretamente o motivo da diferença de temperatura entre as duas substâncias.
A) O calor específico da água é muito menor que o da areia, por isso ela não se esquenta facilmente.
B) O calor específico da areia é menor que o da água, por isso ela sofre variações de temperatura com maior facilidade.
C) A quantidade de água é infinitamente superior à quantidade de areia, por isso a água nunca se esquentará.
D) Por ser um líquido e apresentar maior proximidade das moléculas, a água sempre apresentará maior dificuldade para elevar sua temperatura.
E) Todas as explicações acima estão incorretas.

Como já visto, as substâncias que possuem menor calor específico, apresentam uma menor taxa de variação na função $Q(\Delta T)$, sendo assim, para uma mesma quantidade de calor, variam mais a sua temperatura. Portanto, como a água e a areia estão recebendo uma mesma quantidade de calor e a temperatura da areia se elevou mais que a da água, podemos concluir que o calor específico da areia é menor que o da água. Portanto a alternativa correta é a letra B.

Vejamos outra questão, a qual aborda a característica de proporcionalidade entre as variáveis vistas neste capítulo:
PUC-MG (2012). O equivalente em água de um corpo é definido como a quantidade de água que, recebendo ou cedendo a mesma quantidade de calor, apresenta a mesma variação de temperatura. Desse modo, o equivalente em água de 1000g de ferro ($c = 0,12cal/g \cdot^\circ C$) é igual a 120g de água ($c = 1,0cal/g \cdot^\circ C$). Visto isso, é correto dizer que o equivalente em alumínio ($c = 0,20cal/g \cdot^\circ C$) de 1000g de ferro vale, em gramas:
(A) 200. (B) 400. (C) 600. (D) 800. (E) 1000.

É interessante observar que entendendo que o comportamento da temperatura dos materiais ao receberem ou cederem calor caracteriza uma função afim, podemos resolver esses tipos de questão utilizando regra de três, aproveitando-se da proporcionalidade entre as variáveis envolvidas.

Interpretando o enunciando, tem-se que queremos descobrir qual massa de alumínio que terá a mesma variação de temperatura que 1000g de ferro, recebendo ambos os materiais a mesma quantidade de calor e sabendo quanto vale o calor específico de cada um.

Dada a proporcionalidade entre as variáveis envolvidas, podemos resolver a questão utilizando regra de três da seguinte forma: $1000g$ de ferro está para $0,12 cal/g \cdot^{\circ} C$ assim como xg de alumínio está para $0,20 cal/g \cdot^{\circ} C$, percebendo que tais quantidades são inversamente proporcionais, pois $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$. Assim, basta resolvermos a equação abaixo:

$$\frac{x}{0,12} = \frac{1000}{0,20}.$$

Portanto,

$$x = 600.$$

Ou seja, fornecendo-se uma mesma quantidade de calor, uma massa de $600g$ de alumínio varia em uma mesma quantidade sua temperatura que $1000g$ de ferro.

Vejamos mais uma questão que trabalha essa proporcionalidade. Um corpo feito de $250g$ de latão é aquecido de $0C$ até $100C$. Para isto foram utilizadas $2300cal$. Considerando essa temperatura final, calcule qual será a nova temperatura caso esse corpo perca $1000cal$.

Quando nas aulas de física, ao abordar tal questão, os professores normalmente solicitam aos alunos que primeiramente determinem o calor específico do latão para, em seguida, resolver o que se pede.

Trabalhando-se a questão da proporcionalidade vista, basta perceber que as quantidades calor e variação da temperatura são grandezas diretamente proporcionais.

Sendo assim, não precisamos saber o calor específico do latão e vemos que a massa do corpo não influi no resultado. Equacionando as proporções, temos que $2300cal$ geraram uma variação de 100°C na temperatura, então $-1000cal$ resultará em uma variação igual a $x°C$. Logo:

$$\frac{x}{-1000} = \frac{100}{2300}.$$

Portanto,

$$x = -43,48°C.$$

Ou seja, a temperatura do corpo irá reduzir de uma quantidade igual a 43,48°C, atingindo um valor de

$$100 - 43,48 = 56,52°C.$$

Outro exemplo, mais contextualizado, no qual podemos perceber tal proporcionalidade, é o seguinte: suponha que o fogão de uma residência fornece uma quantidade de calor constante no tempo. Percebemos que ao colocarmos, por exemplo, 1 litro de água para esquentar nesse fogão, a uma temperatura inicial de 20°C, demorará 20 minutos para que ela comece a ferver, ou seja, para chegar à temperatura de 100°C. Agora queremos ferver 2 litros de água inicialmente a 20°C nesse mesmo fogão. Sabendo da proporcionalidade das variáveis envolvidas em tal situação, é fácil perceber que neste caso, por termos o dobro da quantidade de água, o tempo necessário para que ela comece a ferver também será o dobro, ou seja, 40 minutos.

4.5 Proposta de atividade

Visto a linearidade da relação entre o calor recebido por um material e a variação de sua temperatura, pode-se conceber uma atividade prática de fácil aplicação para ser realizada com os alunos.

Utilizando-se de uma fonte que fornece calor de forma praticamente constante no tempo, como por exemplo um fogareiro cuja saída de gás tenha uma abertura fixa, coloca-se uma determinada quantidade de água para esquentar. Mede-se a temperatura da água em intervalos fixos de tempo, por exemplo, a cada minuto, até que comece sua ebulição.

Desta forma, teremos um conjunto de dados temperatura em função do tempo.

Ao plotar estes pontos em um plano cartesiano variação da temperatura *versus* tempo, poderá ser observada uma característica praticamente linear entre essas variáveis.

Traçando-se uma reta de forma que ela fique o mais equidistante possível de cada ponto e de posse do calor específico e a massa da água, poderá ser determinada a taxa de calor por minuto fornecida pelo fogareiro.

Sabendo-se tal taxa, pode-se colocar uma massa conhecida de outro material nesse mesmo fogareiro na mesma condição de chama, repetir o procedimento e, desta vez, determinar, utilizando o gráfico, qual o valor de seu calor específico.

Capítulo 5

Dilatação térmica

Outra área da física que possui as características de proporcionalidade já vistas e que trabalha com a ideia dos efeitos da variação da temperatura em um corpo é a da dilatação térmica.

Utilizando a mesma abordagem do capítulo anterior, verificaremos como tratar o conteúdo dessa área da física através dos conceitos de função polinomial do 1° grau.

5.1 Conceitos

Como visto no capítulo anterior, a temperatura de um corpo é uma grandeza que indica o grau das oscilações das moléculas que o compõe. Quanto maior sua temperatura, mais agitadas estão as moléculas em relação a outro corpo de menor temperatura. Desta forma, no corpo de maior temperatura as moléculas irão ocupar um espaço maior, resultando, assim, em um aumento no tamanho do objeto, fenômeno chamado de *dilatação*.

Na prática podemos perceber o uso dos conceitos de dilatação térmica em diversas situações, tais como na construção de pontes e rodovias, nas quais são deixadas pequenas fendas a fim de comportar a dilatação do material; quando são conectadas fiações elétricas entre postes, onde é deixada uma "barriga"a fim de suportar mudanças de temperaturas, que causam a dilatação dos fios; dentre outros.

Verificou-se, empiricamente, que a variação nas dimensões dos objetos depende do material do qual é feito tais objetos, chamando-se tal propriedade, de coeficiente de dilatação linear, representado por α.

Temos, na dilatação linear, que a variação nas dimensões do corpo (ΔL) é diretamente proporcional ao material do qual ele feito (pelo coeficiente de dilatação do material, α), ao comprimento inicial do objeto (L_0) e à variação de sua temperatura (ΔT). Assim, equacionando, temos:

$$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T.$$

Observa-se que as equações para dilatação superficial e dilatação volumétrica assemelham-se à de dilatação linear, substituindo-se o comprimento pela área ou volume e considerando os coeficientes de dilatação superficial e volumétrica. Por tratar-se de casos análogos, focar-se-á, no presente trabalho, apenas o estudo da dilatação linear.

TABELA DE COEFICIENTE DE DILATAÇÃO TÉRMICA

SUBSTÂNCIA	COEFICIENTE DE DILATAÇÃO LINEAR EM °C-1
Aço	$1{,}1 \times 10^{-6}$
Alumínio	$2{,}4 \times 10^{-6}$
Chumbo	$2{,}9 \times 10^{-6}$
Cobre	$1{,}7 \times 10^{-6}$
Ferro	$1{,}2 \times 10^{-6}$
Latão	$2{,}0 \times 10^{-6}$
Ouro	$1{,}4 \times 10^{-6}$
Prata	$1{,}9 \times 10^{-6}$
Vidro comum	$0{,}9 \times 10^{-6}$
Vidro pirex	$0{,}3 \times 10^{-6}$
Zinco	$6{,}4 \times 10^{-6}$

Figura 5.1: Coeficiente de dilatação para alguns materiais.
(Fonte: https://pt.slideshare.net/cassimironeto1/dilatao − 17513617)

Da equação pode-se construir a função $\Delta L(\Delta T)$ cujo objetivo é melhorar o entendimento da relação de proporcionalidade existente entre tais grandezas e realizar comparações no sentido de:

1) Dados dois objetos de mesmo comprimento, porém feitos com materiais diferentes. Variando-se de uma mesma quantidade a temperatura de ambos, como é o comportamento das variações do comprimento?

2) Dados dois objetos feitos de um mesmo material, porém de comprimentos diferente. Variando-se de uma mesma quantidade a temperatura de ambos, como é o comportamento das variações do comprimento?

5.2 Estudo da função para materiais diferentes

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\Delta L(\Delta T) = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T.$$

Nessa função temos que a taxa de variação dependerá apenas do coeficiente de dilatação linear do material e do seu comprimento inicial. Assim, como tais grandezas são sempre positivas, verifica-se que os gráficos serão sempre crescentes.

Construindo os gráficos da variação do comprimento em função da variação da temperatura para dois materiais distintos, aço ($\alpha = 1,1 \times 10^{-8} {}^\circ C^{-1}$) e vidro pírex ($\alpha = 0,3 \times 10^{-8} {}^\circ C^{-1}$), de mesmos comprimentos iniciais, $L_0 = 1,0m$, temos:

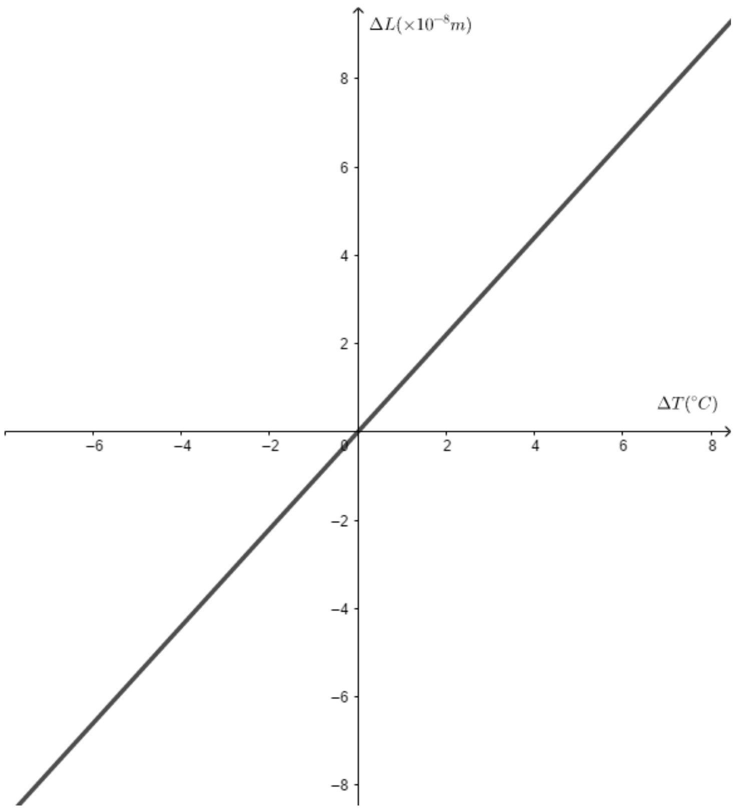


Figura 5.2: Dilatação do aço em função da variação da temperatura.
(Fonte: autor.)

Para o aço, temos que a função $\Delta L(\Delta T)$, representada graficamente na figura 5.2 acima, pode ser definida como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que:

$$\Delta L = 1,1 \times 10^{-8} \cdot \Delta T.$$

Para o vidro pírex, a função $\Delta L(\Delta T)$, representada graficamente na figura 5.3 abaixo, é definida como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que:

$$\Delta L = 0,3 \times 10^{-8} \cdot \Delta T.$$

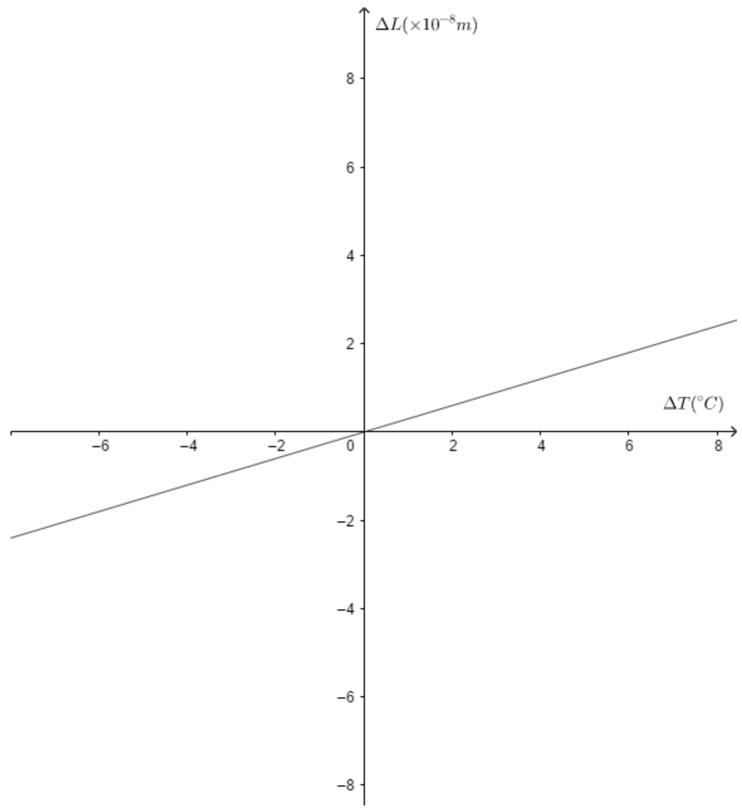


Figura 5.3: Dilatação do vidro pírex em função da variação da temperatura.
(Fonte: autor.)

Analisando ambos os gráficos, é fácil perceber que quando o corpo passa por processo de resfriamento, ou seja, quando sua temperatura final é menor que a inicial, teremos $\Delta T < 0$. Como L_0 e α são sempre positivos, verifica-se que a variação no comprimento do corpo também será negativa ($\Delta L < 0$), ou seja, o comprimento final será menor que o comprimento inicial.

A fim de melhor entender a diferença no comportamento de ambos os materiais, plotaremos os gráficos em um mesmo plano:

Comparando-se as duas funções e observando seus respectivos gráficos, verifica-se que, para o aço, a taxa de variação é maior, portanto a inclinação do seu gráfico também é maior. Isso significa, fisicamente, que para uma mesma variação de temperatura, um corpo feito em aço irá dilatar mais que um corpo de mesmas dimensões feito em vidro

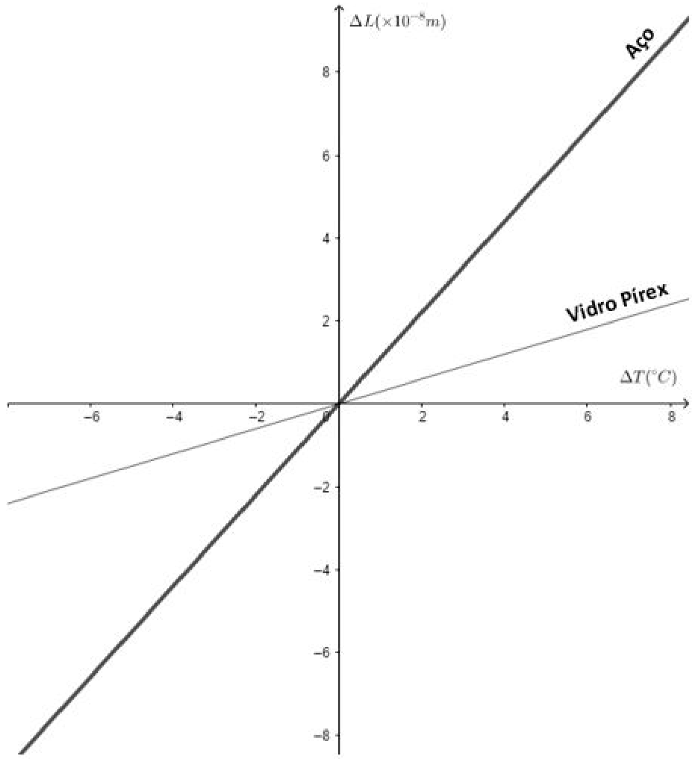


Figura 5.4: Dilatação do aço e do vidro pírex em função da variação da temperatura. (Fonte: autor.)

pírex.

Numericamente, percebe-se que, dadas duas barras, uma de vidro e outra de aço, ambas com mesmo comprimento, para se obter uma mesma variação em seus comprimentos, deve-se ter uma variação da temperatura da barra de vidro cerca de 3,7 vezes maior que da barra de aço.

5.3 Estudo da Função para Diferentes Comprimentos

Agora estudemos o comportamento de duas barras de aço, uma com comprimento inicial de $1,0m$ e outra de comprimento inicial de $0,3m$. Plotando-se o gráfico da variação do comprimento em função da variação da temperatura de ambas as barras em um mesmo plano, temos:

Nesse gráfico, temos que a função $\Delta L(\Delta T)$ para o aço com comprimento inicial igual a $0,3m$ é escrita como:

$$\Delta L = 0,33 \times 10^{-8} \cdot \Delta T.$$

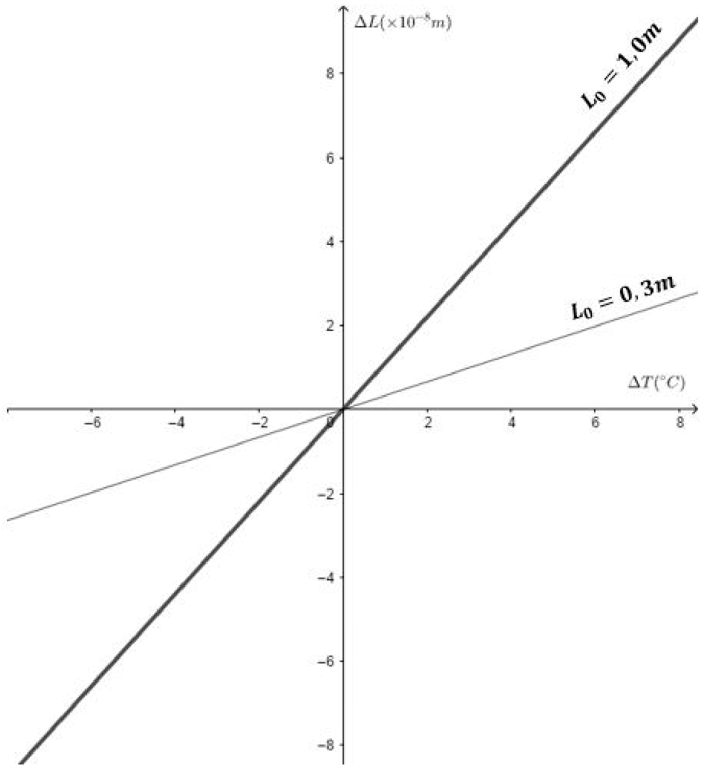


Figura 5.5: Dilatação do aço para diferentes comprimentos iniciais.
Fonte: autor

e, para aquela com comprimento inicial de $1,0m$, temos:

$$\Delta L = 1,1 \times 10^{-8} \cdot \Delta T.$$

Comparando-se as duas funções e observando seus respectivos gráficos, verifica-se que, para um comprimento inicial maior, a taxa de variação é maior, portanto a inclinação do seu gráfico também é maior. Isso significa, fisicamente, que para uma mesma variação de temperatura, dados dois corpos feitos de um mesmo material, aquele que tiver um maior comprimento inicial irá ter uma variação maior no seu comprimento.

Numericamente, percebemos que, caso queiramos ter uma mesma variação do comprimento da barra, devemos variar a temperatura daquela de menor comprimento cerca de 0,33 vezes mais que a de maior comprimento.

5.4 Aplicação

Penteado e Torres (2005) trazem aos alunos uma aplicação tecnológica na qual o conceito de dilatação térmica é aplicado. Trata-se da lâmina bimetálica.

Tal lâmina é um dispositivo utilizado em alguns aparelhos conhecidos, como o pisca-pisca e o ferro elétrico de passar. Consta basicamente de dois metais de diferentes coeficientes de dilatação, unidos fortemente. A lâmina só se mantém retilínea na temperatura em que foi feita a colagem. Caso haja variação na temperatura, a lâmina encurvará, pois a dilatação de cada metal será diferente.

A figura abaixo mostra uma lâmina constituída de dois metais A e B, de coeficientes de dilatação tais que $\alpha_A > \alpha_B$, colados à temperatura $\theta = 20°$C. Nessa temperatura, a lâmina é reta. Se a temperatura aumentar, a lâmina se encurva, de modo que sua parte externa corresponda ao metal A (que se dilata mais). Se a temperatura diminuir, a lâmina se encurva ao contrário, pois a parte externa agora deve ser ocupada pelo metal B (que se contrai menos). Como pode ser observado da função dilatação em função da variação da temperatura, o material que se dilata mais ao ser aquecido é o que se contrai mais ao ser resfriado.

No ferro elétrico, a lâmina bimetálica funciona com um termostato, isto é, um regulador de temperatura, de modo a manter a temperatura do ferro praticamente constante. O princípio é o mesmo: quando o ferro se aquece, a lâmina se encurva, desligando o circuito. A temperatura então diminui, a lâmina retoma sua posição inicial e o circuito se fecha. Novo aquecimento faz com que o ciclo se repita, de modo que a temperatura se mantém em torno de um valor praticamente constante.

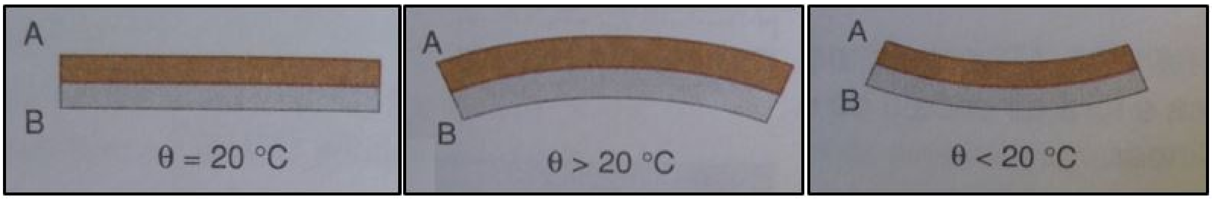


Figura 5.6: Funcionamento da lâmina bimetálica.
(Fonte: PENTEADO, 2005).

A lâmina bimetálica também é utilizada como dispositivo interruptor de corrente elétrica em vários outros aparelhos, como, por exemplo, relês e disjuntores. Nessas aplicações, quando a intensidade da corrente atinge um valor acima de um máximo estabelecido, a energia dissipada aquece a lâmina que, ao encurvar-se, desliga o circuito.

5.5 Questões

Veremos por meio de algumas questões, como tais conceitos podem auxiliar na resolução.

UFRN (2013). Em uma oficina mecânica, o mecânico recebeu um mancal "engripado", isto é, o eixo de aço está colado à bucha de bronze, conforme mostra a figura abaixo. Nessa situação, como o eixo de aço está colado à bucha de bronze devido à falta de uso e à oxidação entre as peças, faz-se necessário separar essas peças com o mínimo de impacto de modo que elas possam voltar a funcionar normalmente.

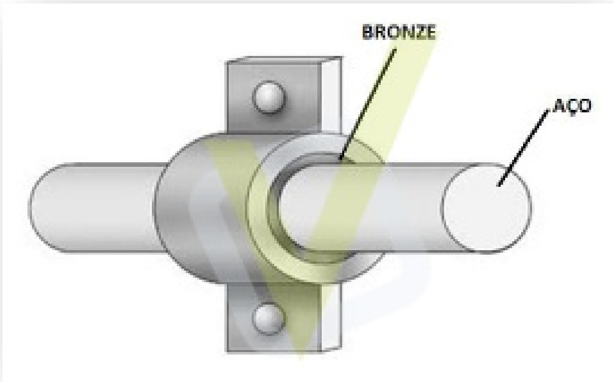


Figura 5.7: Figura da questão.

Existem dois procedimentos que podem ser usados para separar as peças: o aquecimento ou o resfriamento do mancal (conjunto eixo e bucha).
Sabendo-se que o coeficiente de dilatação térmica linear do aço é menor que o do bronze, para separar o eixo da bucha, o conjunto deve ser
A) aquecido, uma vez que, nesse caso, o diâmetro do eixo aumenta mais que o da bucha.
B) aquecido, uma vez que, nesse caso, o diâmetro da bucha aumenta mais que o do eixo.
C) esfriado, uma vez que, nesse caso, o diâmetro da bucha diminui mais que o do eixo.
D) esfriado, uma vez que, nesse caso, o diâmetro do eixo diminui mais que o da bucha.

A fim de soltar o eixo da bucha, faz-se necessário que o tamanho do eixo reduza ou que a bucha alargue. Foi dado que o coeficiente de dilatação térmica do aço é menor que o do bronze. Sabemos que a equação que rege a dilatação térmica é

$$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T.$$

Ou seja, tendo a função $\Delta L(\Delta T)$, o material que mais irá dilatar para uma mesma variação de temperatura, será aquele que possuir a função com maior taxa de variação, dada pelo coeficiente de dilatação linear α.

Como α do aço é menor que o do bronze, temos que o eixo irá dilatar menos para uma mesma variação da temperatura. Portanto devemos aquecer o conjunto, pois dessa forma o bronze irá sofrer uma dilatação maior que o aço, deixando o eixo livre.

UFRGS (2015). Duas barras metálicas, X e Y, de mesmo comprimento l em temperatura ambiente T_0, são aquecidas uniformemente até uma temperatura T. Os materiais das barras têm coeficientes de dilatação linear, respectivamente α_X e α_Y, que são positivos e podem ser considerados constantes no intervalo de temperatura $\Delta T = T - T_0$.

Na figura abaixo, a reta tracejada X representa o acréscimo relativo $\Delta l/l$ no comprimento da barra X, em função da variação da temperatura.

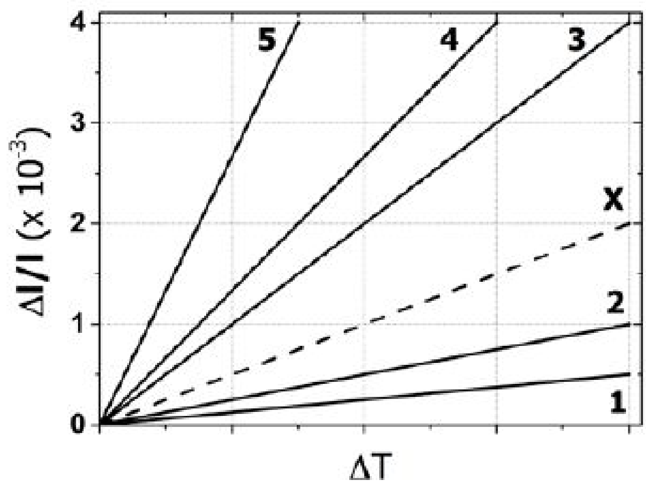


Figura 5.8: Figura da questão da UFRGS.

Sabendo que $\alpha_Y = 2 \cdot \alpha_X$, assinale a alternativa que indica a reta que melhor representa o acréscimo $\Delta l/l$ no comprimento da barra Y, em função da variação da temperatura.

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. (E) 5.

Sabemos que a equação da dilatação linear de um corpo em função da variação da temperatura é:

$$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta T.$$

A questão trabalha com a quantidade $\Delta l/l$ em função da variação da temperatura. Desta forma, podemos reescrever a equação acima como se segue:

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot \Delta T.$$

Como já visto, o coeficiente de dilatação linear α será a taxa de variação da função. O enunciado informa que $\alpha_Y = 2 \cdot \alpha_X$. Desta forma podemos concluir que a taxa de variação do material Y é o dobro da do material X.

Observando a escala indicada na figura, a reta que melhor representa a situação descrita será a 3, pois a variação $\Delta l/l$ nessa reta é o dobro da variação da reta X para uma mesma temperatura. Portanto a resposta é a letra C.

Outro exemplo de questão que pode ser trabalhada em sala de aula, de forma mais contextualizada e que trabalha a proporcionalidade entre as variáveis envolvidas na equação de dilatação linear é:

Questão: Uma empresa constrói linhas ferroviária em um país cuja amplitude térmica média durante o ano é de 40°C. De forma a evitar danos à linha férrea, ela deixa um espaço correspondente a 1,2mm entre as barras metálicas. Essa empresa foi contratada para a construção de linhas ferroviárias em outro país, cuja amplitude térmica média anual é de 20°C. Sabendo que usará o mesmo material utilizado no primeiro país, determine qual deve ser a distância entre as barras metálicas para evitar danos devido à dilatação linear.

Como vimos, sabemos que a variação no comprimento de um material é diretamente proporcional à variação da temperatura sofrida por ele. Sendo assim, como a temperatura das barras metálicas agora oscilará de um valor igual à metade da variação que sofria no primeiro país, concluímos que a variação em seu comprimento também será a metade do que variava. Ou seja, no segundo país a empresa pode deixar um espaço de 0,6mm entre as barras a fim de compensar as variações de seu comprimento devido à oscilação da temperatura.

Considerações finais

.

Com este trabalho percebemos que podemos abordar alguns conteúdos matemáticos e físicos utilizando conceitos de função, podendo, agora, responder ao questionamento dos alunos quando indagam a respeito da utilidade de função afim, mostrando que certas relações vistas na natureza, como no caso, calor e temperatura, podem ser modeladas utilizando tais funções.

Vimos que podemos resolver questões de crescimento ou decrescimento linear, ou seja, cuja taxa de variação é constante, utilizando tanto conceitos vistos em função polinomial do 1º grau quanto conceitos vistos em progressão aritmética. Algumas sendo mais facilmente resolvidas utilizando um ou outro.

Temos também que em calorimetria e dilatação térmica, vistos no ensino médio na disciplina de física, podemos utilizar os conceitos vistos em função afim, com o objetivo de melhor entender os seus significados, servindo, ainda, no auxílio à resolução de questões de vestibular, principalmente por serem, as grandezas envolvidas, proporcionais. Desta forma podemos aproximar as aulas às recomendações dos parâmetros curriculares para o ensino médio.

Com este trabalho podemos perceber que a matemática é uma ciência que, apesar de estar dividida em muitas áreas, diversas delas estão conectadas. Além dessas áreas, vimos também a estreita relação entre a matemática e a física. Mostrar ao aluno tais conexões torna-se importante para que não tenham a visão de uma matemática cheia de fórmulas e vejam que os conceitos podem ser desenvolvidos a partir das definições.

Esperamos que o presente trabalho possa contribuir para o ensino-aprendizagem de alunos e professores, bem como instigá-los a pesquisar outros conteúdos que podem ser relacionados com a função afim, como movimento retilíneo uniforme, juros simples, dentre outros; bem como outras relações interdisciplinares, como, por exemplo, trabalhar juros compostos, progressão geométrica e crescimento populacional utilizando função exponencial.

Referências Bibliográficas

BRASIL (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* MEC/SEMTEC, Brasília. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.

BRASIL (2006a). *Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2: ciência da natureza, matemática e suas tecnologias.* MEC, Brasília. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.

BRASIL (2006b). *Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais - ensino médio: ciência da natureza, matemática e suas tecnologias.* MEC, Brasília. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.

Costa, A. B. (2009). URL: http://principio.org/histria-das-sequncias-e-progressses.html. Acesso 12 de maio de 2018.

ENEM (2004). URL: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2004/2004_amarela.pdf. Exame Nacional do Ensino Médio. Acesso 12 de fev de 2018.

ENEM (2007). URL: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2007/2007_amarela.pdf. Exame Nacional do Ensino Médio. Acesso 12 de fev de 2018.

ENEM (2008). URL: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2008/2008_amarela.pdf. Exame Nacional do Ensino Médio. Acesso 12 de fev de 2018.

ENEM (2010). URL: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/AZUL_quinta-feira_GAB.pdf. Exame Nacional do Ensino Médio. Acesso 12 de fev de 2018.

ENEM (2016). URL: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/CAD_ENEM_2106_DIA_2_07_AZUL.pdf. Exame Nacional do Ensino Médio. Acesso 12 de fev de 2018.

Giovanni, J. R. e Bonjorno, J. R. (2000a). *Matemática: uma nova abordagem*, volume 1: versão trigonométrica. FTD, São Paulo/SP.

Giovanni, J. R. e Bonjorno, J. R. (2000b). *Matemática: uma nova abordagem*, volume 2: versão trigonométrica. FTD, São Paulo/SP.

INEP (2009). *Portaria número 109, de 27 de maio de 2009.* Diário oficial da união n. 100, de 28 de maio de 2009. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

Lima, E. L. (1996). *A Matemática do Ensino Médio.* Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro/RJ.

Lima, E. L. (2013). *Número e funções reais.* Coleção PROFMAT. SBM.

Máximo, A. e Alvarenga, B. (2005). *Física (Ensino Médio)*, volume 2. Scipione, São Paulo/SP, 1 edição.

Morgado, A. C. e Carvalho, P. C. P. (2013). *Matemática discreta.* Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro/RJ.

Penteado, P. C. M. e Torres, C. M. (2005). *Física - ciência e tecnologia*, volume 2. Moderna, São Paulo/SP, 1 edição.

Pires, A. S. T. (2008). *Evolução das ideias da física.* Livraria da física, São Paulo/SP.

PUC-MG (2012). URL: http://www.mundovestibular.com.br/articles/7291/1/Exercicios-de-Calorimetria/Paacutegina1.html. Vestibular da PUC-MG de 2012. Acesso 23 de mar de 2018.

Rescnick, R., Halliday, D., e Krane, K. S. (2003). *Física 2.* LTC, Rio de Janeiro/RJ.

Rodella, Y. M. (2016). Paralelos entre a física e a matemática para o ensino de geometria: aplicações da interdisciplinaridade como recurso didático. Dissertação de Mestrado, UFScar, São Carlos/SP.

UFRGS (2015). URL: http://www.infoescola.com/fisica/dilatacao-linear/exercicios/. Vestibular UFRGS. Acesso 25 de mar de 2018.

UFRN (2013). URL: http://www.comperve.ufrn.br/conteudo/provas/2013/expMatematica.pdf. Vestibular UFRN. Acesso 16 de mar de 2018.