Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Equação do segundo grau: aspectos históricos e contemporâneos

Ezequiel Silva Chaves
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

agosto 2018

Equação do segundo grau: aspectos históricos e contemporâneos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Ezequiel Silva Chaves e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 12 de setembro de 2018.

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

C512e Chaves, Ezequiel Silva.
Equação do segundo grau: aspectos históricos e contemporâneos / Ezequiel Silva Chaves. -- 2018
xii, 45 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Aldi Nestor de Souza.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2018.
Inclui bibliografia.

1. Física. 2. Educação básica. 3. Pseudoproblemas. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 – Boa Esperança – 78.060-900 – Cuiabá/MT
Fone: (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: **"Equação do segundo grau: Aspectos históricos e contemporâneos"**

Autor: **Ezequiel Silva Chaves**

defendida e aprovada em 06/08/2018.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor Aldi Nestor de Souza
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutor Reinaldo de Marchi
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Junior Cesar Alves Soares
Instituição: UNEMAT - Barra do Bugres

Cuiabá, 06/08/2018.

A Jesus Cristo.

Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente a Jesus Cristo por toda graça concedida, pela sabedoria e pela força nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, Osvaldo Chaves e Avaniza Silva Chaves (*in memorium*) pelos sacrifícios e por não terem medido esforços para que eu chegasse até aqui.

À minha tia Aurea Silva Santos, aos meus irmãos Rute S.C. Barretos, Samuel Silva Chaves e Lídia Silva Chaves e a meu primo Moisés Silva Pereira pelos incontáveis momentos de apoio e incentivo que me deram nessa caminhada.

A todos os meus professores, desde a primeira, a "tia" Lúcia minha professora da pré escola, até o último no presente momento, meu professor e orientador Aldi Nestor de Souza.

Aos colegas do PROFMAT, em especial a Celso e Daniel, companheiros de viagens.

Por fim, os meus agradecimentos também a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante todo o período de realização deste mestrado.

Muito obrigado a todos.

"Um trabalho te dá um propósito e um significado.
A vida é vazia sem ambos".

Stephen Hawking.

Resumo

Nesse trabalho é apresentado uma análise dos problemas atuais referentes as equações do segundo grau e funções quadráticas. Esse é um tema que é abordado no final do Ensino Fundamental e início do Ensino Médio. Vê-se que desde a antiguidade as equações do segundo grau e posteriormente as funções quadráticas tem chamado a atenção de diversos povos, tendo em vista que se passaram aproximadamente 3500 anos (desde os egípcios até Viète) para se chegar a uma fórmula resolutiva para as mesmas. O objetivo desse trabalho é fazer um resgate histórico de problemas envolvendo a equação quadrática, em diversos povos, e explorar os aspectos contemporâneos da mesma, particularmente os contidos em livros didáticos, paradidáticos entre outros, verificando quais relações existem entre os problemas que são abordados em sala de aula com situações do dia a dia do aluno.

Palavras chave: Física, educação básica, pseudoproblemas.

Abstract

In this work we present an analysis of the current problems concerning the equations of the second degree equations and quadratic functions. This is an issue that is addressed at the end of elementary school and beginning of high school. It can be seen that since ancient times the quadratic equation and later the quadratic functions have attracted the attention of several peoples, considering that approximately 3500 years have passed (from the Egyptians to Viète) to arrive at a quadratic formula for the same. The objective of this work is to make a historical rescue of problems involving the quadratic equation in several peoples, and to explore the contemporaneous aspects of the same, particularly those contained in didactic books, supplementary educational materials among others, verifying which relationships exist between the problems which are addressed in the classroom with situations of the day by day of the student.

Keywords: Physics, basic education, pseudo-problems.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

> "O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano."
>
> Isaac Newton

Levar nossos alunos a gostarem mais de matemática é objetivo principal deste trabalho (Bassanezi, 2002).

Para tanto, no Capítulo 1 é apresentado alguns aspectos históricos acerca das equações do segundo grau, desde seus primeiros registros na Babilônia, passando pelo gregos - onde é apresentado a quadratura da parábola e sua definição segundo Arquimedes - hindus, árabes, idade média com os trabalhos de Viète até chegar aos dias atuais onde é apresentada uma fórmula resolutiva para toda e qualquer equação do segundo grau com coeficientes reais.

No segundo Capítulo é abordado as definições modernas de equação do segundo grau e função quadrática, são apresentadas a fórmula resolutiva de uma equação do segundo grau com coeficientes reais que possibilita obter suas raízes, e finaliza-se com a definição de parábola e sua representação gráfica.

No terceiro e último Capítulo são apresentados alguns problemas relacionados às equações do segundo grau e função quadrática que são propostos em livros didáticos, paradidáticos, arquivos eletrônicos e periódicos. O ponto de partida é de posse de determinados problemas (ou pseudoproblemas segundo Echeverría e Pozo (1998)) mostrar que em muitos deles não há uma coerência entre o que é enunciado com situações do cotidiano, e que além disso muitos são semelhantes aos problemas abordados pelos povos antigos, mudando apenas a linguagem.

Capítulo 1

Aspectos Históricos da Equação do Segundo Grau

Nesse capítulo abordaremos alguns aspectos históricos das equações do segundo grau, particularmente, do modo como diversos povos da antiguidade lidavam com o tema, como por exemplo, os Babilônios, os Gregos, os Hindus, os Árabes até chegar na representação algébrica proposta por Viète e consequentemente na fórmula resolutiva.

1.1 Introdução

As equações do segundo grau são um assunto presente nos mais variados campos da Matemática, e da Ciência de modo geral.

Está presente na Física quando se tem um móvel descrevendo um movimento uniformemente variado e na Econômia ao se tratar de custos, receitas e lucros.

Aqui veremos uma pequena parte do processo até se chegar a fórmula resolutiva para as equações do segundo grau, que não surgiu de maneira espontânea e natural. O que se vê através dos relatos históricos é exatamente o contrário, levou-se milhares de anos e o empenho sobre maneira de vários povos para que hoje nos fosse possível um algoritmo que resolve toda e qualquer equação do segundo grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$, de coeficientes reais a, b e c, com $a \neq 0$.

1.2 Os Babilônios

Segundo Pitombeira (2004) os babilônios faziam seus registros em tabletes de argila com uma espécie de estilete, através da escrita cuneiforme, e possuiam um sistema de numeração posicional, o sistema sexagesimal (de base 60) bem desenvolvido. De acordo com Roque e Pitombeira (2012) o enfoque será somente o sistema de numeração práticado pelos os escribas babilônios que habitaram a Mesopotâmia por volta de 2000 a 1600 a.C.

Nos inúmeros tabletes encontrados que hoje estão catalogados em museus da Europa, Oriente Médio e Estados Unidos, há aqueles que contém resultados de operações, e além desses os babilônios tinham um certo número de tabletes que tratavam de procedimentos, como se fossem exercícios resolvidos que nos dias atuais seriam tratados por meio de equações. Roque (2012) faz um alerta ao analizar um desses tabletes em detalhes, cujo objetivo é mostrar o quanto seria anacrônico considerar que os babilônios soubessem resolver equações.

Segundo Roque (2012), os dois exemplos citados a seguir encontram-se na coleção do British Museum, na placa BM 13901, cuja a base sexagesimal era a base da época.

Exemplo 1. *Procedimento: "Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive* $0,45$*. Qual o lado?"*

Solução

1. tome 1
2. fracione 1 tomando a metade (:0,30)
3. multiplique 0,30 por 0,30 (:0,15)
4. some 0,15 a 0,45 (:1)
5. 1 é a raiz quadrada de 1
6. subtraia os 0,30 de 1
7. 0,30 é o lado do quadrado

Cada passo desse procedimento era executado com a ajuda de um tablete. Por exemplo, a terceira etapa exigia a consulta a um tablete de multiplicação ou de quadrado, e a quinta etapa, evidente nesse caso particular, era resolvida pela consulta a um tablete de raízes quadradas.

O outro exemplo é o segunte:

Exemplo 2. *Procedimento: "Subtraí o terço da área e depois somei o terço do lado do quadrado à área restante:* $0,20$*."*

Solução

1. tome 1;0
2. subtraia o terço de 1;0, ou seja, 0,20, obtendo 0,40
3. multiplique 0,40 por 0,20, obtendo 0,13;20
4. encontre a metade de 0,20 (:0,10)
5. multiplique 0,10 por 0,10 (:0,1;40)
6. adicione 0,1;40 a 0,13;20 (:0,15)
7. 0,30 é a raiz quadrada
8. subtraia 0,10 de 0,30 (:0,20)
9. tome o recíproco de 0,40 (1,30)
10. multiplique 1,30 por 0,20 (:0,30)
11. 0,30 é o lado do quadrado

Percebe-se que os problemas dos exemplos 1 e 2, poderiam ser resolvidos através de uma equação do segundo grau.

Porém, os babilônios não dispunham de uma fórmula algébrica para resolver os problemas acima, na verdade eles não possuiam fórmula algébrica para resolverem problema algum, pois não havia símbolos para representarem os coeficientes e incógnitas, por exemplo, da equação geral $ax^2 + bx + c = 0$. Portanto, não havia sequer um sentido para aquilo que concebemos como "equação".

Hoje pode-se resolver problemas como os citados acima, mediante a regras gerais que aplicam-se a casos particulares. Os babilônios foram capazes de obterem os mesmos resultados a partir da construção de uma lista de exemplos típicos, que eram empregados em seguida para resolver novos problemas e não possuíam uma linguagem para expressar estes casos de modo genérico. No entanto, isto não significa que esta Matemática não fosse dotada de um certo tipo de generalidade. Ao observar, os primeiros passos do exemplo 2 percebe-se que eles servem para reduzir seu enunciado ao do exemplo 1, sendo possível interpolar o procedimento já enunciado para este problema, considerado um exemplo típico.

De acordo com Roque e Pitombeira (2012) a maneira de enunciar o procedimento babilônio para o caso geral de uma equação do tipo $ax^2+bx = c$ levou alguns historiadores a conjecturarem que a Matemática babilônia seria de natureza primordialmente algébrica. Entre eles destaca-se o historiador O. Neugebauer, um dos principais responsáveis pelas primeiras traduções de textos matemáticos babilônios.

Assim, dada uma equação do tipo $ax^2 + bx = c$ para encontrar a raiz

$$L = \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}\right) \times \frac{1}{a}$$

de acordo com o procedimento citado acima, basta seguir o roterio descrito abaixo.

1. Multiplique a por c (obtendo ac)
2. Encontre metade de b (obtendo $\frac{b}{2}$)
3. Multiplique $\frac{b}{2}$ por $\frac{b}{2}$ (obtendo $\left(\frac{b}{2}\right)^2$)
4. Adicione ac a $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ (obtendo $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac$)
5. A raiz quadrada é ($\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac}$)
6. Subtraia $\frac{b}{2}$ da raiz acima
7. Tome o recíproco de a (obtendo $\frac{1}{a}$)
8. Multiplique $\frac{1}{a}$ pela raiz para obter o lado do quadrado

9. O lado do quadrado é $\left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}\right) \times \frac{1}{a}$

Este paralelo é decorrente de traduções tendenciosas de historiadores mais antigos, que presumiam, tacitamente, a natureza algébrica da Matemática babilônia. Porém, temos hoje disponíveis trabalhos históricos, como os propostos por J. Høyrup apud Roque e Pitombeira (2012), apontando que essas traduções não eram fíeis ao estilo da Matemática que se praticava na época. Assim, foram propostas novas traduções que podem nos levar a novas conclusões bem distintas acerca da natureza da Matemática nessa cultura. (Roque e Pitombeira, 2012)

De acordo com Roque e Pitombeira (2012) veja a nova tradução do problema proposto no exemplo 1.

Exemplo 3. *(nova tradução)*

Procedimento: "A superfície e a minha confrontação acumulei: obtive $0,45$*"(Estaria suposto que o objetivo era encontrar a confrontação - o lado)*

Solução

1. 1 é a projeção
2. quebre 1 na metade (obtendo $0,30$) e retenha $0,30$, obtendo $0,15$
3. agregue $0,15$ a $0,45$
4. 1 é o lado igual
5. retire do interior de 1 os $0,30$ que você reteve
6. $0,30$ é a confrontação

A partir dessa nova versão a motivação já não é mais de natureza algébrica para o procedimento, mas sim , geométrica. Em primeiro lugar, faz-se uma "projeção"de 1, que permite interpretar a medida do lado procurado, suponhamos l, concretamente como um retângulo de lados 1 e l. Os babilônios transformavam, por meio de uma "projeção", essa linha de comprimento l em um retângulo com um lado dado por l e o outro medindo 1. Ou seja, eles "projetavam"o lado l para que se tornasse o lado de um retângulo com área igual a l (Figura 1.1).

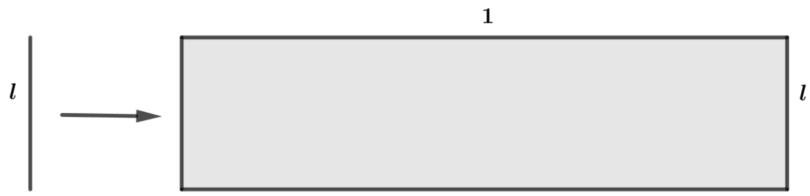


Figura 1.1: Passo (I): Projeção do lado l. Fonte: Roque e Pitombeira (2012)

Ao analizar a figura 1.2 vê-se um retângulo de dimensões 1 e l e um quadrado de lado l. Esta figura será “cortada e colada”a fim de se estabelecer uma equivalência entre medidas de áreas que resolva o problema.

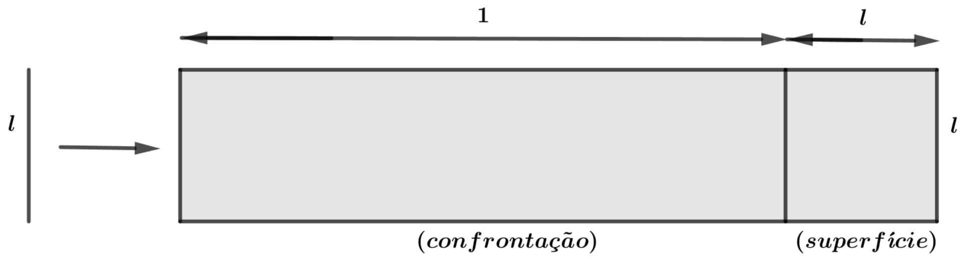


Figura 1.2: Superfície e confrontação. Fonte: Roque e Pitombeira (2012)

Agora no passo (II) (ver figura 1.3) “quebraremos”1 na metade, dividindo o retângulo inicial em duas partes. Rearrumando as duas metades do retângulo, obtemos a figura 1.3, cuja área é igual à área dada inicialmente $(0,45)$. Os lados quebrados, na figura em forma de **L** da Figura 1.3, delimitam um quadrado de lado $0,30$ que “retenho”, ou seja, multiplico por ele mesmo, obtendo a área de um novo quadrado $(0,15)$. Esta área pode ser agregada ao conjunto, completando o quadrado e formando um quadrado maior de área 1 (Figura 1.4).

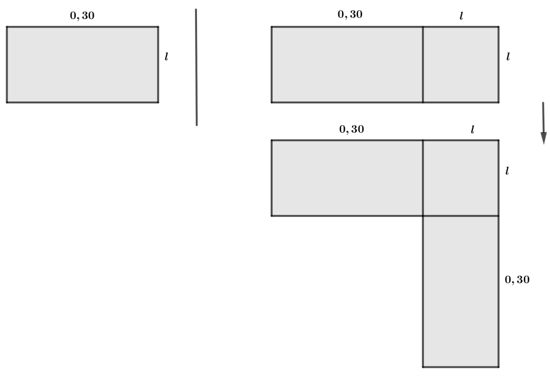


Figura 1.3: Passo (II): Quebre 1 no meio. Fonte: Roque e Pitombeira (2012)

Como 1 é o quadrado de 1, 1 é o lado igual. Deste lado, retiro o lado do quadrado menor $(0,30)$. Obtém-se, assim, que o lado procurado é $1 - 0,30 = 0,30$.

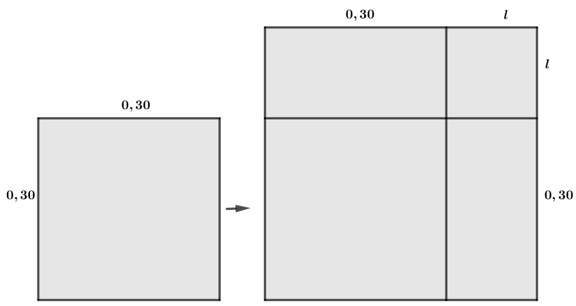


Figura 1.4: Passos (III) e (IV): Quadrado maior de área 1 e lado 1. Fonte: Roque e Pitombeira (2012)

Observe que este lado é chamado de "confrontação"e é pedido no enunciado do problema para que se acumule uma área e uma confrontação. Isto é, pretende-se somar a área de um quadrado com a medida de seu lado, que seria a confrontação da área. Este procedimento era efetudo pelos escribas babilônios que transformavam, esta linha, digamos de comprimento l, em um retângulo com um lado dado por l e o outro medindo 1. Sendo assim, eles projetavam o lado l na direção oposta à do quadrado, obtendo um retângulo cuja área possui medida igual à do lado em questão.

Novamente Roque e Pitombeira (2012) são enfáticos em destacar que é um tanto quanto precipitado aplicar as definições disciplinares que usamos hoje para caracterizar a Matemática dos povos antigos. Pois, apesar de ser bastante plausível a hipótese de que em seus procedimentos os babilônios usassem raciocínios geométricos, isso não quer dizer que eles faziam uma geometria, ao invés de possuírem uma álgebra.

1.3 Os Gregos: A Quadratura da Parábola

Para Arquimedes, uma parábola era definida pela seção de um cone circular reto, obtido a partir de um triângulo retângulo o qual é girado em torno de um dos catetos que formam o ângulo reto. Ao seccionar este cone por um plano perpendicular à hipotenusa do triângulo que foi girado obtém-se uma parábola.

Chama-se vértice da parábola o ponto no qual o plano intresecta a hipotenusa, sua intersecção com a base do cone é a "base" e ligando o vértice ao ponto médio de sua base obtém-se o diâmetro ou eixo da parábola.

A quadratura da parábola é um problema em que se compara a área determinada por uma parábola e por um segmento de reta paralelo a reta diretriz da parábola com a área de um triângulo tendo este segmento de reta como base. O que se pretende mostrar é que a área S entre a parábola e o segmento QQ' é 4/3 da área do triângulo PQQ' (veja a figura 1.5). Para tanto, há a necessidade de algumas proposições que Arquimedes supõe conhecidas.

Proposição 1. *Se por um ponto P de uma parábola traçarmos uma reta PV que é o próprio eixo da parábola ou é paralela a esse eixo, e se QQ' é uma corda paralela à tangente à parábola por P e que corta PV em V, então: $QV = VQ'$. Reciprocamente, se $QV = VQ'$, a corda QQ' será paralela à tangente em P (veja a figura 1.5).*

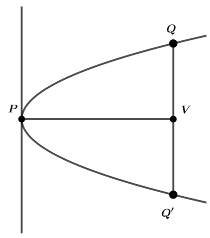


Figura 1.5: Parábola em que $QV = VQ'$. Fonte: Roque e Pitombeira (2012).

Proposição 2. *Se, em uma parábola, QQ' for uma corda paralela à tangente em P, e se uma linha reta que passa por P for o eixo ou paralela ao eixo, e que corta QQ' em V, e a tangente à parábola por P em T, então $PV = PT$ (Figura 1.6).*

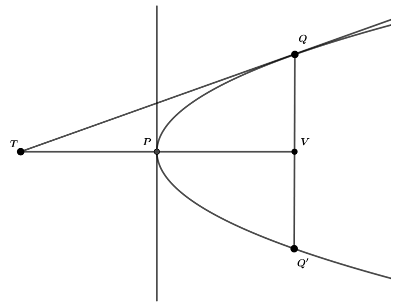


Figura 1.6: Parábola em que $PV = PT$. Fonte: Roque e Pitombeira (2012).

Proposição 3. *Se por um ponto da parábola traçarmos uma reta que é o eixo ou é paralela ao eixo da parábola, como PV, e se por dois outros pontos da parábola Q e R traçamos retas paralelas à tangente à parábola por P e que cortam PV, respectivamente, em V e W, então $PV : PW = (QV)^2 : (RW)^2$ (Figura 1.7).*

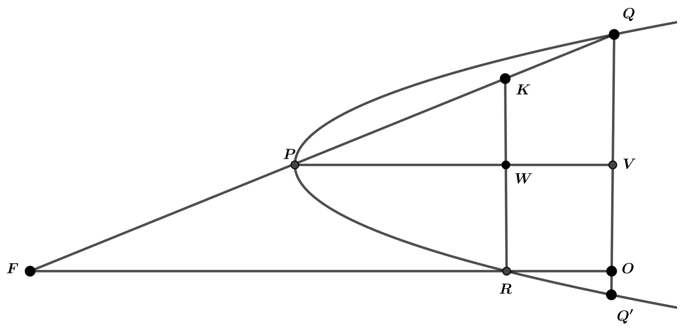


Figura 1.7: Parábola em que $PV : PW = (QV)^2 : (RW)^2$. Fonte: Roque e Pitombeira (2012).

Observamos que a equação da parábola, dada em linguagem atual por $y = kx^2$, pode ser deduzida desta última propriedade. Com efeito, considere o eixo que faz um ângulo reto com a tangente no vértice P, os segmentos PV medindo y, PW medindo y', QV medindo x e RW medindo x'. Pela proposição 3, temos que

$$PV : PW = (QV)^2 : (RW)^2$$

Logo

$$\frac{y}{y'} = \frac{x^2}{x'^2}$$

Para Arquimedes o ponto P, não necessariamente deveria ser o vértice e os eixos não precisavam ser fixos, e ele não fornece as provas das três proposições anteriores e, para suas demonstrações, ele apenas remete à obra sobre cônicas de Euclides, obra essa que se perdeu. (Roque e Pitombeira, 2012)

Agora serão apresentadas as proposições essencias para a quadratura da parábola. Lembrando que as proposições aqui enumeradas 4, 5, 6 e 7, correspondem, respectivamente, as proposições 19, 21, 23 e 24 apresentadas em Roque e Pitombeira (2012).

Proposição 4. *Sejam P o vértice e Q um ponto qualquer sobre a parábola e R o ponto no segmento parabólico no qual a tangente é paralela a PQ, e seja M o ponto em que a paralela ao eixo da parábola por R corta QQ', paralela à tangente em P. Então, $PV = (4/3)RM$ (Figura 1.8).*

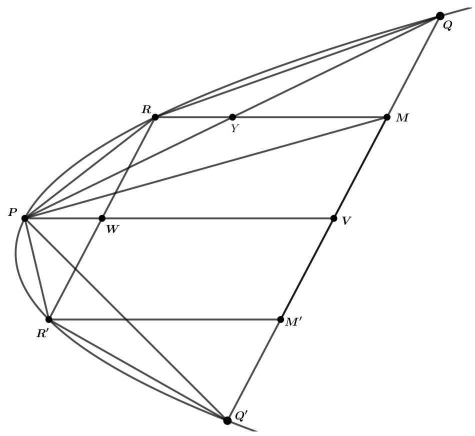


Figura 1.8: Parábola em que $PV = (4/3)RM$. Fonte: Roque e Pitombeira (2012).

Demonstração

Vê-se que a paralela a QQ' por R corta PV em W. Então, pela proposição 3, temos que

$PV : PW = (QV)^2 : (RW)^2$

Mas, por construção, $RW = MV$ e tem-se assim que

$PV : PW = (QV)^2 : (MV)^2 = (2MV)^2 : (MV)^2 = 4 : 1.$

Lembre-se que $QV = 2MV$ pois, pela proposição 1, RM (paralela ao eixo PV) corta PQ (paralela à tangente em R) no ponto médio Y. Mas o triângulo PQV é semelhante ao triângulo YQM e como RM corta PQ em seu ponto médio, deve cortar QV também em seu ponto médio. Logo, $PW = (1/4)PV$.

Assim,temos

$PV = PW + WV = (1/4)PV + RM$, e, portanto, $RM = (3/4)PV$ ou de maneira equivalente $PV = (4/3)RM$.

Proposição 5. *Sejam QQ' a base e P o vértice de um segmento parabólico PQQ'. Seja R o ponto no segmento parabólico no qual a tangente é paralela a PQ (ver figura 1.9). Então:*

$$\Delta PQQ' = 8\Delta PRQ.$$

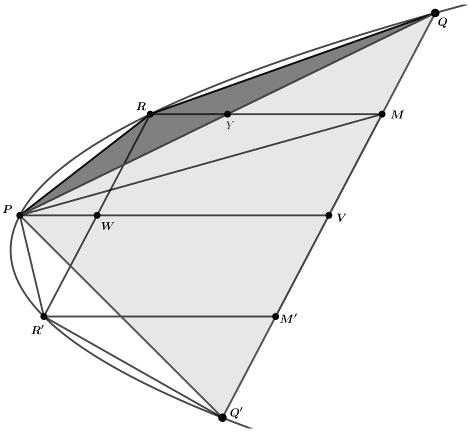


Figura 1.9: Parábola em que $\Delta PQQ' = 8\Delta PRQ$. Fonte: Roque e Pitombeira (2012).

Demonstração

Seja PV a paralela ao eixo que corta QQ' em seu ponto médio V (pela proposição 1, pois QQ' é paralela à tangente em P). A reta paralela ao eixo por R corta PQ em seu ponto médio Y (ainda pela proposição 1), logo esta mesma reta corta QV em seu ponto médio M(considerando o triângulo PQV semelhante a YQM, como na proposição 4). Em seguida, é traçado o segmento PM.

Pela Proposição 4, $PV = (4/3)RM$. Como os triângulos PQV e YQM são semelhantes e $QV = 2QM$, tem-se que $PV = 2YM$. Logo, como

$$2YM = 4\frac{(RY + YM)}{3},$$

segue-se que, $YM = 2RY$.

Mostra-se assim, que

$$\Delta PQM = 2\Delta PRQ,$$

pois

$$\Delta PQM = \Delta YQM + \Delta PYM,$$

$$\Delta PRQ = \Delta RQY + \Delta PRY,$$

e ΔYQM tem a mesma altura (até Q) que ΔYRQ e duas vezes a base ($YM = 2RY$), logo $\Delta YQM = 2\Delta YRQ$; de modo análogo, ΔPYM tem a mesma altura (até P) que ΔPRY e duas vezes a base, logo $\Delta PYM = 2\Delta PRY$.

Como $\Delta PQM = 2\Delta PRQ$, mostra-se que $\Delta PQV = 4\Delta PRQ$, pois $\Delta PQM =$

ΔPMV uma vez que têm a mesma altura (até P) e bases iguais ($QM = MV$). Logo,

$$\Delta PQV = \Delta PQM + \Delta PMV = 2\Delta PQM = 4\Delta PRQ$$

Mas, como V divide QQ' em dois, segue-se que $\Delta PQQ' = 8\Delta PRQ$.

Porém, se o segmento RW é traçado de modo a encontrar a parábola novamente em R', temos que $RW = R'W$, pois $RW = MV = VM' = R'W$, e a mesma prova mostra que $\Delta PQQ' = 8\Delta PR'Q'$.

Agora será mostrado como Arquimedes efetua a quadratura da parábola, usando o método da exaustão.

Suponha que a área do triângulo $\Delta PQQ'$ é T. Como

$$T = \Delta PQQ' = 8\Delta PRQ$$

e

$$T = \Delta PQQ' = 8\Delta PR'Q',$$

decorre

$$\Delta PRQ + \Delta PR'Q' = \frac{T}{4}.$$

(Observe que os triângulos PRQ e $PR'Q'$ são construídos sobre os lados de PQQ').

Pode-se continuar o mesmo processo e, assim, construir triângulos na diferença entre a parábola e o polígono obtido pela união dos triângulos $\Delta PQQ'$, ΔPRQ e $\Delta PR'Q'$, o que fornecerá triângulos de áreas $T/4^2$, $T/4^3$, e assim por diante. A soma das áreas de todos estes triângulos corresponde à área do segmento parabólico.

A proposição 6 permite que se dê um passo essencial para a quadratura da parábola, fezendo com que Arquimedes evitasse a soma de uma série infinita.

Proposição 6. *Dada uma sucessão finita de áreas, $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, das quais A_1 é a maior, e cada uma das outras é quatro vezes sua sucessora,ou seja, $A_i = 4 \cdot A_{i+1}$, então,*

$$A_1 + A_2 + ... + A_n + \frac{1}{3}A_n = \frac{4}{3}A_1$$

Demonstração

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + ... + A_n &= A_1 + \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{16}A_1 + ... + \frac{1}{4^{n-1}}A_1 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4^n - 1}{4^{n-1}}A_1 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + ... + A_n + \frac{1}{3}A_n &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4^n - 1}{4^{n-1}}A_1 + \frac{1}{3}A_n \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{4^n - 1}{4^{n-1}}A_1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}A_1 \\ &= \frac{1}{3}A_1 \left(\frac{4^n - 1}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}} \right) \\ &= \frac{4}{3}A_1 \end{aligned}$$

Arquimedes aplica este resultado aos triângulos obtidos sucessivamente a partir do triângulo PQQ' (ver figura 1.9) e obtém

$$T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4^2}T + ... + \frac{1}{4^{n-1}}T + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}T = \frac{4}{3}T.$$

Proposição 7. *Qualquer segmento limitado por uma parábola e uma corda QQ' é igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base que o segmento e mesma altura que ele (Veja a Figura 1.9).*

Este resultado é demonstrado por Arquimedes pelo método da exaustão, provando que a área S do segmento parabólico não pode ser nem menor nem maior que $(4/3)T$ (soma das áreas dos triângulos). Logo $S = (4/3)T$. Lembrando que este é o procedimento clássico do método da exaustão, que consiste em provar que duas grandezas A e B são iguais, mostrando que não se pode ter $A > B$ e $A < B$, do que decorre, forçosamente, que $A = B$.

Demonstração

Suponha que $S > \frac{4}{3}T$. Devem existir então n triângulos tais que a soma das suas áreas

$$T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{4^2}T + ... + \frac{1}{4^{n-1}}T = A$$

seja inferior a S e superior a $\frac{4}{3}T$ (argumento geométrico). Pela proposição 6, obtém-se

$$A = \frac{4}{3}T - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}T,$$

A seria inferior a $\frac{4}{3}T$, o que seria contraditório com a hipótese de que A é superior a $\frac{4}{3}T$, o que leva a uma contradição.

Suponhamos agora que $S < \frac{4}{3}T$ e consideremos a diferença $\frac{4}{3}T - S$. Pelo Lema de Euclides, deve haver um inteiro m tal que a área $T_m = \frac{1}{4^{m-1}}T$ seja inferior a esta diferença. Mas por outro lado,

$$T_m > \frac{1}{3}T_m = \text{resto} = \frac{1}{3 \cdot 4^{m-1}}T = \frac{4}{3}T - T\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^{m-1}}\right)$$

e

$$\frac{4}{3}T - S > T_m > \frac{4}{3}T - T\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^{m-1}}\right),$$

(pela desigualdade anterior). Portanto,

$$S < T\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^{m-1}}\right),$$

o que contradiz a evidência geométrica, uma vez que

$$T\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^{m-1}}\right)$$

é a área de um polígono inscrito no segmento parabólico.

1.4 Os Hindus

A maioria dos conhecimentos matemáticos que hoje chamamos de “indiano” foram escritos em sânscrito e se originou na região do sul da Ásia (que compreende também o Paquistão, o Nepal, Bangladesh e Sri Lanka). Não se sabe ao certo quais eram as interações da matemática indiana com as tradições antigas, porém, ao que se parece alguns de seus problemas foram inspirados devido ao contato que tiveram com a astronomia babilônica e grega.

Sabe-se que o sistema de numeração decimal posicional usado atualmente é de origem indiana, e que o mesmo foi transmitido ao Ocidente pelos povos islâmicos na Idade Média.

Segundo Roque (2012) é a partir de meados do primeiro milênio que ocorre uma intensa atividade matemática expressa sobre tudo pela elaboração de tratados astrônomicos influenciados por obras gregas, graças ao contato com o império romano.

Vários desses tratados foram escritos e o mais antigo que se tem conhecimento é de autoria de Aryabhata, que nasceu no ano 476. Todo o tratado que é tido como uma das fontes mais importantes sobre matemática e astronomia indiana foi escrito em versos, tornado-se uma tradição indiana.

Em um outro tratado datado de 628 escrito pelo astrônomo Brahmagupta, contém um capítulo dedicado a análises envolvendo o zero, os negativos e positivos, as quantidades desconhecidas, e ainda os métodos de eliminação do termo médio e de redução a uma variável. Tratava-se de técnicas para lidar com problemas envolvendo quantidades desconhecidas.

Nos concentraremos aqui nesses métodos, pois desejamos investigar quais eram as técnicas usadas em problemas que exprimiríamos, hoje, como uma equação do segundo grau. Os procedimentos utilizados por Brahmagupta foram citados, mais tarde, por Bhaskara II, matemático indiano que viveu no século XII. Vejamos como eram enunciados os problemas usando somente palavras e de modo poético.

> Verso 77: "De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmins. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?" (Roque e Pitombeira, 2012)

O que chamamos hoje de "equação" equivalia ao enunciado a seguir:

(I) "De uma quantidade retiramos ou adicionamos a sua raiz multiplicada por um coeficiente e a soma ou a diferença é igual a um número dado".

A quantidade citada é um quadrado e a raiz deste quadrado é a incógnita. Ele forma, assim, usando somente palavras, a equação $x^2 \pm bx = c$. O método de resolução consiste em reduzir o problema a uma equação linear. Isto era feito por meio do método que Bhaskara denominava de "eliminação do termo médio", equivalente ao nosso método de completar quadrados:

(II) "Seja uma igualdade contendo a quantidade desconhecida, seu quadrado, etc. Se temos os quadrados da quantidade desconhecida, etc., em um dos membros, multiplicamos os dois membros por um fator conveniente e somamos o que é necessário para que o membro das quantidades desconhecidas tenha uma raiz; igualando em seguida esta raiz à do membro das quantidades conhecidas, obtemos o valor da quantidade desconhecida."

Observe que surgia uma igualdade, expressa somente por palavras, entre ambos os membros, sem a utilização do sinal de igual. Esta igualdade, bem próxima de uma equação, estava posta, geralmente, entre um membro contendo a quantidade desconhecida e o seu quadrado e outro membro contendo as quantidades conhecidas. Este procedimento está bem próximo do que fazemos hoje ao escrevermos uma equação. A diferença está no fato de que os indianos não utilizavam a linguagem simbólica de nossa álgebra, mas somente palavras.

O método acima deve ser aplicado a um problema seguindo as especificações:

(III) "E por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar".

Veja que aqui está a condição requerida por Bhaskara de que o membro das quantidades desconhecidas tenha uma raiz. Trata-se do método que comumente chamamos hoje de completar o quadrado, mas que na época do autor era expresso extritamente por palavras. Através desse método é possível resolver uma equação que escreveriamos atualmente como $ax^2 + bx = c$, que consiste no seguinte procedimento:

1. Multiplicamos ambos os lados por $4a$, obtendo $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$.

2. Em seguida, adicionamos b^2 a ambos os lados, $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$.

3. Agora podemos reescrever essa igualdade como $(2ax+b)^2 = 4ac+b^2$ e o membro contendo as quantidades desconhecidas possui uma raiz. Toma-se, então, a raiz quadrada para obter:

$$2ax+b = \sqrt{4ac+b^2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}$$

Voltando ao exemplo das abelhas, fazendo o enxame igual a $2x^2$, a raiz da metade é x e os oito nonos do todo é $(16/9)x^2$, que aumentado do casal de abelhas e da raiz, devem ser iguais a $2x^2$, isto é:

$$x + \frac{16}{9}x^2 + 2 = 2x^2$$

Pelo procedimento descrito em (II), obtem-se uma igualdade equivalente a $2x^2 - 9x = 18$, que deve ser resolvida pelo método de eliminação do termo médio descrito em (III), que traduzindo em notação atual equivale multiplicar ambos os membros da igualdade por 8 ($4a = 4 \times 2$) e somar 81 ($b^2 = (-9)^2$), resultando na equação $16x^2 - 72x + 81 = 225$; agora como os dois membros são quadrados extrai-se as raízes e as igualamos a fim de obter a equação linear $4x - 9 = 15$, de onde se conclui que o valor da quantidade desconhecida é 6, isto é, $x = 6$. Logo, o número de abelhas, $2x^2$, é 72 (2×6^2).

De modo geral, o método consiste em completar o quadrado no primeiro membro para tornar o termo contendo a quantidade desconhecida e o seu quadrado um quadrado perfeito, diminuir o grau da equação extraindo a raiz quadrada em ambos os membros e a partir daí resolver a equação linear resultante.

Apesar de haver um método geral, expresso de modo retórico, para resolver equações, que funciona perfeitamente para resolver o que hoje chamamos de equação do segundo grau, não pode-se dizer que existia uma fórmula tal qual a conhecemos atualmente e que Bhaskara II foi o inventor da mesma, pois em sua época não havia símbolos para que pudessem representar os coeficientes genéricos a, b, c,... de uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$. (Roque, 2012)

1.5 Os Árabes

A matemática árabe, desempenhou um papel importantíssimo ao assimilar, traduzir e transmitir a matemática grega para Europa. Os árabes fizeram progressos em várias áreas da matemática que eles absorveram dos gregos, tais como, trigonometria, equações algébricas e em pesquisas sobre o quinto postulado de Euclides.

Dentre os matemáticos árabes que contribuiram para o progresso da matemática em especial as equações do segundo grau, destaca-se o nome de Al-Khwarizmi.

Pouco se sabe sobre a vida de Muhammad ben Musa Al-Khwarizmi (780-850), mas segundo um de seus biógrafos árabes, ele é o primeiro matemático muçulmano a escrever acerca da "solução de problemas usando al-jabr e al-muqabala". (Pitombeira, 2004)

É em um dos livros árabes mais importantes da Idade Média, escrito por Al-Khwarizmi, entitulado Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala, que surge pela primeira vez o termo "álgebra".

A palavra al-jabr, "algebra" em árabe, era utilizada para designar "restauração", ou seja, adicionar termos iguais a ambos os membros de uma equação, cujo objetivo é eliminar termos negativos. Já o termo al-muqabala significa a redução de termos positivos por meio da subtração de quantidades iguais de ambos os membros da equação, ou seja, procura-se um "balanceamento" da equação.

Lembre-se que não havia um simbolismo algébrico na época de Al-Khwarizmi, logo o termo equação não fazia sentido, sendo usado aqui somente a título de exemplificação.

Al-Khwarizmi empregava uma linguagem exclusivamente retórica, que repousava num vocabulário padrão cujo objetivo era designar os objetos que surgiam nos problemas. Assim, ao se estudar problemas que hoje correspondem as equações do segundo grau vê-se que ele introduziu os termos necessários para o seu entendimento, sendo esses três modos, a maneira pela qual o número aparecia no cálculo da álgebra: a raiz, o quadrado e o número simples. De acordo com sua notação, o quadrado é um conceito algébrico designado pela palavra *mal*, que significa *possessão*, ou "tesouro" e, esta palavra é empregada para designar o quadrado da quantidade desconhecida diferenciando do quadrado geométrico (murabba'a). (Roque e Pitombeira, 2012)

Para Al-Khwarizmi a raiz é o termo essencial, designado pela palavra *Jidhr*, mas poderia também ser designada pela palavra *coisa*. As duas palavras eram usadas para exprimir o que atualmente chamamos de incógnita. Trata-se da quantidade desconhecida no problema (a raiz do *mal*). Já um número dado qualquer, ou seja, a quantidade conhecida era chamada de *adad*.

Veja a enumeração dos seis problemas possíveis feita por Al-Khwarizmi e enunciados de forma retórica. Lembrando que em todos os casos os coeficientes eram sempre positivos:

1. quadrados iguais a raízes ($ax^2 = bx$)
2. quadrados iguais a número ($ax^2 = c$)
3. raízes iguais a um número ($bx = c$)
4. quadrados e raízes iguais a um número ($ax^2 + bx = c$)
5. quadrados e um número iguais a raízes ($ax^2 + c = bx$)
6. raízes e um número iguais a quadrados ($bx + c = ax^2$)

Para cada um dos seis problemas enumerados, Al-Khwarizmi possuía regras de solução, cuja as justificativas eram pautadas nos resultados dos Elementos de Euclides, ainda que os gregos não concebessem equações propriamente ditas, apenas relações entre grandezas.

Em sua obra, Al-Khwarizmi a princípio, ensina como resolver as equaçãoes

$$x^2 = 5x, \quad \frac{x^2}{3} = 4x \quad e \quad 5x^2 = 10x$$

e, posteriormente equações da forma

$$ax^2 + bx = c, \quad ax^2 + c = bx \quad e \quad bx + c = ax^2,$$

em que os coeficientes e as raízes são ambos positivos.

Al-Khwarizmi exemplifica o caso 4 ($ax^2 + bx = c$) apresentando o problema , que em nossa notação algébrica moderna seria escrito como $x^2 + 10x = 39$ e enunciando sua solução como segue:

Exemplo 4. *"um mal e dez jidhr igualam trinta e nove denares" (um quadrado e dez raízes do mesmo equivalem a 39 denares) ; ou seja, qual deve ser o quadrado que, quando aumentado de dez de suas próprias raízes, é equivalente a trinta e nove?*

Solução

A solução é: tome a metade da quantidade de *jidhr* (metade da raiz), que neste exemplo é 5; multiplique esta quantidade por si mesma (obtendo 25); some no resultado os *adad* (número dado), fazemos $(39 + 25 = 64)$; extraia a raiz quadrada do resultado (que dá 8); subtraia deste resultado a metade dos *jidhr*, encontrando a solução, ou seja, $8 - 5 = 3$.

A descrição da solução dada por Al-Khwarizmi equivale a usar a fórmula

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{b^2 + 4c} - b}{2}$$

Em seguida Al-Khwarizmi apresentava as justificativas geométricas dessa solução.

Seja $AB = x$ o lado do quadrado $ABCD$. Prolongue BA e AD afim de obter $AE = DF = 5$ e construa o quadrado $EBGL$. O polígono $EADFGB$ (GNOMON) tem área igual a $x^2 + 10x$, ou seja, 39. Soma-se a esta área a área do quadrado $HDFL$, que é igual a 25, obtendo o quadrado $EBGL$, cuja área é igual a 64. O lado deste quadrado é 8. Subtraindo disso 5, obtém-se a raiz 3 (Pitombeira, 2004).

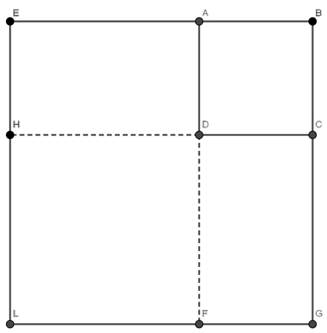


Figura 1.10: Justificativa geométrica usada por Al-Khwarizmi. Fonte: Pitombeira (2004).

Os tipos de equações discutidas por Al-Khwarizmi serão abordadas por outros matemáticos árabes exatamente do mesmo modo que ele fez ou de maneiras semelhantes, e às vezes fazendo uso dos mesmos exemplos numéricos. Nota-se pelas demonstrações geométricas apresentadas a influência de Euclides.

1.6 Europa

Os conhecimentos árabes acerca das equações do segundo grau foram inseridos na Europa no século XII através do livro de Abraão bar Hija entitulado Líber embadorum. Na mesma época Gerard de Cremona (1114-1187) e Robert de Chester (1145) traduzem o livro de álgebra de Al-Khwarizmi para o latim.

Michael Stifel (1487-1567) um matemático alemão que primeiramente foi monge Augustino e posteriormente pároco luterano reduz todas as equações do segundo grau à forma $x^2 = \pm px \pm q$. Isso se deve ao fato de que em sua época no Ocidente já se reconhecerem que se tomassem os coeficientes (p e/ou q) de uma equação do segundo grau iguais a zero ou que os mesmos fossem negativos, isso os possibilitariam obter uma única regra geral para resolver todo e qualquer tipo de equação do segundo grau que eram solucionadas separadamente, até aquele momento.

Há de se ressaltar que Stifel afirma que as equações $x^2 = px + q$ e $x^2 = -px + q$ possuem uma única raiz, e que a equação $x^2 = -px - q$ não é tratada, mostrando que para ele, os números negativos eram apenas termos a serem subtraidos de um dos membros da equação. Porém, em outros locais de suas obras ele os considerou tal qual os conhecemos hoje.

Stifel fornece uma regra geral para obter as raízes de uma equação do segundo grau mesmo que os coeficientes sejam negativos.

1. Comece com a quantidade das raízes, isto é, p, divida-o e substitua a raiz por sua metade, guardando essa metade até que toda a operação tenha sido completada, ou seja, substitua $(\pm)px$ por $(\pm)\dfrac{p}{2}$.

2. Multiplique essa metade por ela mesma.

3. Some ou subtraía, como pedido pelo sinal do membro, isto é, forme

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 \pm q.$$

4. Da soma ou da diferença, extraia a raiz quadrada, ou seja, calcule

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 \pm q}.$$

5. Adicione ou subtraia o quadrado $[(\pm)\frac{p}{2}]$ como o sinal o exige

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 \pm q} \pm \frac{p}{2}.$$

A aceitação de coeficientes negativos, isto é, números negativos como os conhecemos hoje, só veio ocorrer com o matemático belga Stevin (1548-1620), e mesmo assim, eles a chamava de soluções sonhadas, sendo úteis para achar soluções verdadeiras de outras equações.

O matemático francês François Viète (1540-1603) tinha o mesmo entendimento que Stifel sobre as equações do segundo grau e não aceitava as tais soluções "sonhadas" de Stevin.

É creditado a Viète o fato de ser o primeiro matemático a fazer uso de letras não apenas para reprentar as incógnitas, mas também as constantes. Ele reservava as vogais para indicar as incógnitas e as consoantes para indicar coeficientes, lembrando que todas as letras eram maiúsculas.

Viète em sua obra denominada Effectionum Geometricarum Canonica Recensio, trata e resolve geometricamente as equaçoes $A^2+AB = D^2$, $A^2-AB = D^2$ e $AB-A^2 = D^2$ que em linguagem atual escreve-se, $x^2 + bx = c$, $x^2 - bx = c$ e $bx - x^2 = c$ se tomar $x = A$, $b = B$ e $c = D^2$.

Abaixo estão descritos os passos executados por Viète para se chegar à formula quadrática tal qual Bhaskara II havia feito.

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, considere $x = y + z$. Substituindo o valor de x na equação dada, vem

$$a(y + z)^2 + b(y + z) + c = 0$$

$$ay^2 + (2az + b)y + az^2 + bz + c = 0$$

Aqui Viète determina quais são os valores de z para os quais a equação acima não possua o termo do primeiro grau, $(2az + b)y$:

$$2az + b = 0$$

$$z = -\frac{b}{2a}$$

Tomando o valor de z na equação

$$ay^2 + (2az + b)y + az^2 + bz + c = 0$$

tem-se

$$\begin{aligned}
ay^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c &= 0 \\
ay^2 + a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c &= 0 \\
ay^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c &= 0 \\
4a^2y^2 + b^2 - 2b^2 + 4ac &= 0 \\
4a^2y^2 - b^2 + 4ac &= 0 \\
4a^2y^2 &= b^2 - 4ac \\
y^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
y &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}
\end{aligned}$$

Daí vem,

$$x = y + z = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Capítulo 2

Aspectos Contemporâneos da Equação do Segundo Grau e Função Quadrática

Nesse capítulo serão abordados os aspectos contemporâneos da equação do segundo grau e função quadrática. Através do método de completar quadrados deduzir-se-a a fórmula geral que possibilita encontrar as raízes de uma equação do segundo grau. Também está presente o conceito de parábola juntamente com sua representação gráfica.

Esse capítulo está alicerçado em Oliveira e Fernandez (2012), Lima et al. (2006) e Gomez et al. (2017).

2.1 Equação do Segundo Grau

Como foi apresentado no capítulo 1, o conhecimento de métodos para resolver as equações do segundo grau remonta às civilizações da antiguidade, como os babilônios, hindus e árabes. Porém, a fórmula resolutiva de uma equação do segundo grau que conhecemos hoje só foi possível graças primeiramente a simbologia proposta por Viète. E mesmo com essa simbologia as equações do segundo grau e consequentemente sua fórmula geral não eram escritas tal qual a conhecemos hoje no tempo de Viète.

Definição 1. *Uma equação do segundo grau com coeficientes a, b e c é uma expressão da forma*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde, $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ e x é uma incógnita a ser determinada.

2.1.1 Fórmula Resolutiva de uma Equação do Segundo Grau

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Afim de determinar as suas raízes, aplica-se o processo de completar o quadrado da seguinte maneira:

Isola o termo independente no segundo membro da equação.

$$ax^2 + bx = -c$$

Divide ambos os membros da equação por a, obtendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Acrescentando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ em ambos os membros da equação acima, obtém-se um quadrado perfeito no primeiro membro. Assim,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Se o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ é maior que ou igual a zero, extrai-se a raiz quadrada dos dois membros, como segue

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} &= \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Assim, obtem-se as seguintes soluções:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

e

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Observe que:

- Se $\Delta > 0$, então a equação possui duas raízes reais distintas.
- Se $\Delta = 0$, tem-se $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ o que implica em $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$, logo a equação possui uma única raiz, chamada de raiz dupla.
- Se $\Delta < 0$, então a equação não possui raízes reais já qua a expressão $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ não pode ser negativa.

2.2 Função Quadrática

Diversos problemas interessantes podem ser expresso através de uma função quadrática.

Definição 2. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ recebe o nome de função quadrática quando, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes reais e $a \neq 0$.*

2.2.1 A Forma Canônica do Trinômio

Considere a função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$, podemos escrevê-la da seguinte forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Como foi visto na seção 2.1.1 vamos completar o quadrado dentro dos parênteses acima, o qual resulta em

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

ou

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Em certas situações é conveniente escrever $m = -b/2a$ e $k = (4ac - b^2)/4a$. Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a(x - m)^2 + k,$$

onde $m = -b/2a$ e $k = f(m)$.

Esta é a chamada forma canônica do trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Suponha $a > 0$. A forma canônica

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

exibe, no interior dos colchetes, uma soma de duas parcelas. A primeira, dependente de x é sempre nula ou maior que zero (≥ 0). Já a segunda parcela é uma constante. Assim, o menor valor dessa soma é atingido quando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

é igual a zero, ou seja, $x = -b/2a$. Nesse ponto, $f(x)$ assume seu valor mínimo.

Suponha agora $a < 0$. Nesse caso, o valor $f(-b/2a)$ é o maior dos números $f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Uma pergunta interessante, a qual a forma canônica nos ajuda responder é, dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, para quais valores de $x \neq x'$ tem-se $f(x) = f(x')$?

Da forma canônica, vê-se que $f(x) = f(x')$ se, e somente se,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Como está sendo suposto que $x \neq x'$, isto significa que

$$x' + \frac{b}{2a} = -\left(x + \frac{b}{2a}\right),$$

ou seja,

$$\frac{x + x'}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Portanto, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume o mesmo valor, isto é, $f(x) = f(x')$ com $x \neq x'$ se, e somente se, os pontos x e x' são equidistantes de $-b/2a$.

2.2.2 O Gráfico da Função Quadrática

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Sejam $\mathcal{L}$ uma reta e F um ponto do plano não pertencente a $\mathcal{L}$. A parábola $\mathcal{P}$ de foco F e diretriz $\mathcal{L}$ é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{P} = \{P | d(P, F) = d(P, \mathcal{L})\}$$

Terminologia

- $d(P_1, P_2)$: distância entre os pontos P_1 e P_2.
- O ponto F é o foco e a reta $\mathcal{L}$ é a diretriz da parábola.
- A reta focal l (ou eixo da parábola) é a reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz.
- O ponto V que pertence a reta focal é o vértice da parábola, em outras palavras o ponto V é o ponto da parábola mais próximo da diretriz.

  Se A é o ponto de intersecção entre a diretriz $\mathcal{L}$ e a reta focal l, então V é o ponto médio do segmento AF.
- O número $2p = d(F, \mathcal{L})$ é chamado de parâmetro da parábola. Note que $d(V, F) = d(V, \mathcal{L}) = p$.

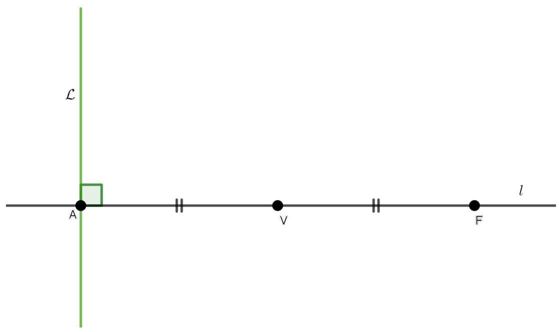


Figura 2.1: Posição do vértice em relação a F e a $\mathcal{L}$. Fonte: Gomez et al. (2017).

Toda parábola é simétrica em relação à sua reta focal.

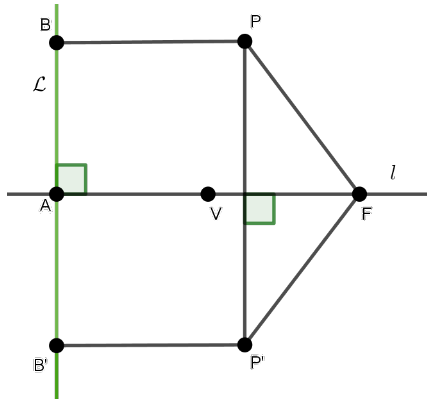


Figura 2.2: Simetria de $\mathcal{P}$ em relação à reta focal. Fonte: Gomez et al. (2017).

Considere $\mathcal{P}$ uma parábola de foco F, diretriz $\mathcal{L}$ e reta focal l.

Sejam $P \in \mathcal{P}$ e P' pontos simétricos em relação a reta focal l.

O segmento $PP' \perp l$ intersecta a reta focal l no ponto Q ponto médio do segmento PP'.

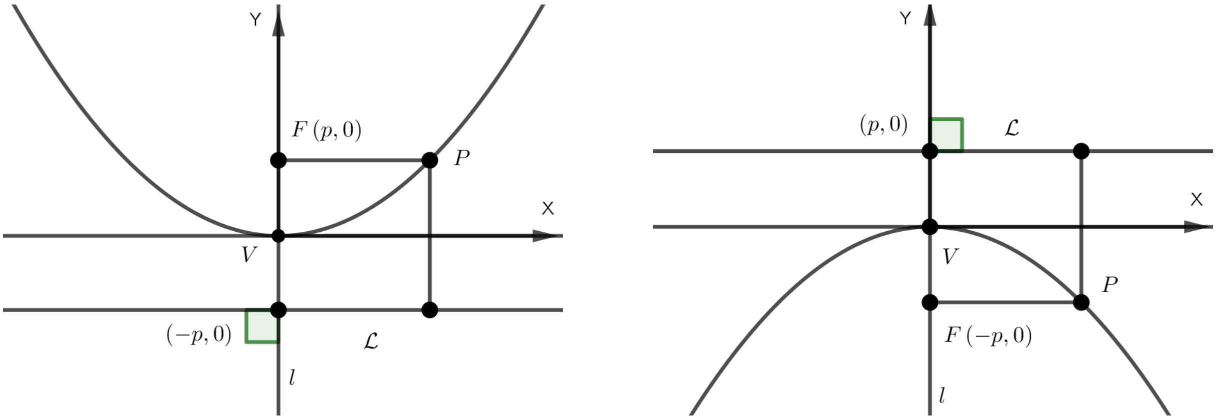
Os triângulos ΔPQF e $\Delta P'QF$ são congruentes (LAL). Logo, $d(P, F) = d(P', F)$.

Além disso, $d(P, \mathcal{L}) = d(Q, \mathcal{L}) = d(P', \mathcal{L})$, pois os quadriláteros $BPQA$ e $AQP'B'$ são retângulos.

Como $P \in \mathcal{P}$, tem-se $d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$. Assim, $d(P'F) = d(P, F) = d(P, \mathcal{L}) = d(P', \mathcal{L})$ e, portanto, $P' \in \mathcal{P}$.

É possível obter as formas canônicas da parábola em relação a um sistema de eixos coordenados OXY. Para nosso propósito, vamos considerar apenas um desses casos, caso em que o vértice da parábola coincide com a origem e a reta focal (ou eixo da parábola) é um dos eixos coordenados, em particular o eixo OY.

Devemos considerar dois casos.



(a) Parábola $\mathcal{P}$: $x^2 = 4py$.

(b) Parábola $\mathcal{P}$: $x^2 = -4py$.

Figura 2.3: Parábola com vértice na origem e reta focal o eixo OY. Fonte: Gomez et al. (2017).

- Caso I. O foco F está acima da diretriz $\mathcal{L}$. Neste caso, temos $F(0, p)$ e $\mathcal{L} : y = -p$, em que $2p = d(F, \mathcal{L})$. Logo,

$$\begin{aligned}
P(x,y) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (p-y)^2} = |y+p| \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + p^2 - 2py + y^2} = |y+p| \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + p^2 - 2py + y^2}\right)^2 = (|y+p|)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + p^2 - 2py + y^2 = y^2 + 2py + p^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 = 4py
\end{aligned}$$

Considerando $y = f(x)$, segue-se que

$$y = f(x) = \frac{1}{4p}x^2 = ax^2,$$

onde $a = \dfrac{1}{4p}$ e $a > 0$.

Tomando $p = \dfrac{1}{4a}$, tem-se uma parábola de foco $F(0, 1/4a)$ e diretriz a reta horizontal $y = -\dfrac{1}{4a}$.

- Caso II. O foco F está abaixo da diretriz $\mathcal{L}$. Neste caso, $F(0, -p)$ e $\mathcal{L} : y = p$, onde $2p = d(F, \mathcal{L})$. Logo,

$$
\begin{aligned}
P(x,y) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (-p-y)^2} = |y-p| \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + p^2 + 2py + y^2} = |y-p| \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + p^2 + 2py + y^2}\right)^2 = (|y-p|)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + p^2 + 2py + y^2 = y^2 - 2py + p^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 = -4py
\end{aligned}
$$

Considerando $y = f(x)$, segue-se que

$$y = f(x) = -\frac{1}{4p}x^2 = ax^2,$$

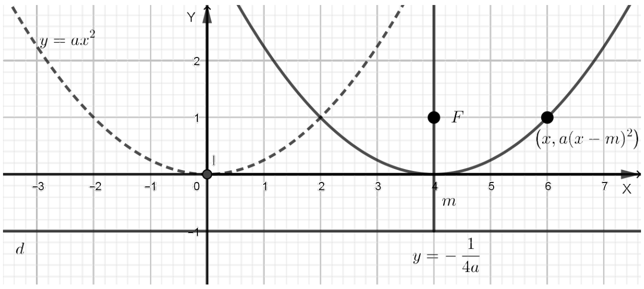
onde $a = -\dfrac{1}{4p}$ e $a < 0$.

Se tomarmos $p = -\dfrac{1}{4a}$, então tem-se uma parábola de foco $F(0, 1/4a)$ e diretriz a reta horizontal $y = -\dfrac{1}{4a}$.

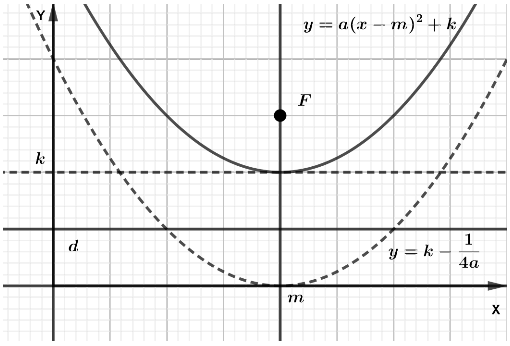
Assim, do exposto acima, se $a > 0$, então a parábola tem concavidade voltada para cima e, se $a < 0$, logo a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Para obter o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ basta tomar a função na forma canônica. Dados $a, m, k \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F(m, k + 1/4a)$ e que tem por diretriz é a reta horizontal $y = k - 1/4a$.

Observe que o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é obtido do gráfico de $g(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \mapsto (x + m, y)$, a qual leva o eixo $x = 0$ no eixo $x = m$, seguido de uma translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y + k)$, que leva o eixo OX na reta $y = k$ e a reta $y = -1/4a$ na reta $y = k - 1/4a$.



(a) Translação horizontal $(x, y) \mapsto (x + m, y)$.



(b) Translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y + k)$.

Figura 2.4: Gráfico de $f(x) = a(x - m)^2 + k$. Fonte: Gomez et al. (2017).

Sejam os pontos $F(m, k + 1/4a)$ e V pertencentes a reta focal l da parábola (que no caso em questão, é uma reta vertical) e seja a reta horizontal $y = k - 1/4a$, diretriz da parábola. Tem-se que a abscissa do vértice é $x = m$ e como o ponto V é o ponto médio do segmento AF, em que $A(m, k - 1/4a)$ é ponto de intersecção da reta focal com a diretriz, segue-se que a ordenada de V é $y = k$. Assim, da forma canônica $x = -b/2a$ e $y = (4ac - b^2)/4a$. Neste ponto, $f(x)$ atinge seu valor mínimo se $a > 0$ e seu valor máximo se $a < 0$.

Sejam $A(\alpha, 0)$ e $B(\beta, 0)$ pontos de intersecção da parábola com o eixo OX. Interpretando geometricamente, as abscissas α e β dos pontos onde o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ intersecta o eixo OX são as raízes da equação

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Além disso, o ponto médio do segmento AB é a abscissa do vértice da parábola. De acordo com a definição de raízes de uma equação (ou zeros de uma função), se o gráfico está inteiramente acima ou inteiramente abaixo do eixo OX, então a equação não possui raízes. Mas, se o gráfico tangencia o eixo OX, então a equação possui raiz dupla (ou uma única raiz).

Capítulo 3

Função Quadrática e Algumas Aplicações

Nesse capítulo faremos uma análise de problemas apresentados em livros didáticos do ensino fundamental e médio e superior (em alguns casos livros paradidáticos), em particular problemas de aplicação da equação do segundo grau e da função quadrática.

Mostraremos que em muitos desses problemas de aplicação o contexto em que estão inseridos não é levado em conta e, portanto, segundo Echeverría e Pozo (1998) não passam de pseudoproblemas e que Skovsmose (2001) os chama de pseudo-aplicações.

Mostraremos também que muitos dos exercícios trabalhados atualmente em sala de aula mantém o mesmo formato dos problemas antigos, os que foram apresentados no capítulo 1, mudando apenas a linguagem.

3.1 Problemas de Aplicação ou Pseudo-aplicação?

Segundo D'amore (2005) *apud* Espinosa (2008) há uma diferença entre exercícios, problemas e situações problemas (situações problemáticas). Na resolução de exercícios prevê que se devam utilizar regras e procedimentos já aprendidos, embora em processo de consolidação. Permitem a verificação imediata e o reforço. Já na resolução de problemas tem-se um ou mais procedimentos, uma ou mais regras que ainda não são de domínio cognitivo de quem resolve. Requer-se de um ato criativo. Numa concepção mais ampla, o problema surge quando um ser vivente tem uma meta, mas não sabe como chegar a ela. Aqui está implícita a diferença entre exercício e problema: "não sabe o caminho que o faz chegar a ela". Se fosse um exercício, o caminho (algoritmo) seria informado previamente. E por fim, tem-se uma situação problema quando se trata de uma situação de aprendizagem concebida de forma tal que os estudantes não podem resolver a questão por simples repetição ou aplicação mecânica de conhecimentos ou competências adquiridas. Ao contrário, ela exige que o aluno conjecture e/ou formule novas hipóteses.

Segundo Echeverría e Pozo (1998) um dos objetivos de se trabalhar com solução de problemas é procurar e criar situações suficientemente abertas que conduza os alunos a adquirirem uma postura de busca e apropriação de estratégias adequadas que os auxiliem na resolução de problemas tanto na sala de aula quanto na vida cotidiana.

Para Echeverría e Pozo (1998) ensinar a resolver problemas não se resume em uma tarefa de dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas também fazer com que desperte neles o hábito e a atitude de enfrentar a própria aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta. Não deve ser encarado apenas como uma questão de ensinar a resolução de problemas, mas a de se ensinar a propor problemas a si mesmo, de tal forma que o aluno seja capaz de transformar a realidade em um problema que mereça ser questionado e estudado.

Echeverría e Pozo (1998) alertam que sem compreensão da tarefa os problemas se tornam pseudoproblemas, em meros exercícios de aplicação de rotinas (algoritmos) aprendidas de forma repetitiva e automatizadas, onde o aluno não consegue entender o que está fazendo nem o porquê de está fazendo, impedindo o mesmo de transferir ou generalizar de maneira autônoma a situações novas, sejam na sala de aula ou na vida cotidiana. Tem que ficar claro para o aluno que ao se deparar com a resolução de problemas será exigido dele algo além da simples resolução de exercícios repetitivos.

De acordo com Skovsmose (2007) o ensino tradicional de matemática é dominado pelo uso do livro-texto, que podemos chamar de livros didáticos, o qual é seguido, mais ou menos, página por página, ou seja, capítulo após capítulo numa sequência quase linear.

Para Skovsmose (2007) uma aula de matemática é constituída por dois elementos. O primeiro é que o professor faz a exposição de algumas ideias teóricas, de maneira plenária, o que possibilita ao estudante interromper e levantar questões. O segundo, é que os estudantes tem que resolver exercícios, seja individualmente ou em grupo. Em geral esses exercícios são formulados nos livros textos e que muitos deles não passam de pseudo-aplicações, fazendo com que aplicações reais da matemática fiquem "escondidas", embora sejam muitas e importantes.(Skovsmose, 2001)

Agora será feita uma analise acerca de vários problemas retirados de livros do ensino fundamental até o ensino superior.

Os exemplos que se seguem são enunciados de maneira que nos lembra aos que foram propostos pelo hindus, apresentados de modo retórico e poético.

Exemplo 5. *(Silveira, 2017) Um terreno deve ser dividido em lotes iguais por certo número de herdeiros. Se houvesse três herdeiros a mais, cada lote diminuiria* $20m^2$*. Se houvesse quatro herdeiros a menos, cada lote aumentaria* $50m^2$*. Qual é a área do terreno todo, em metros quadrados?*

Ao que parece o objetivo do exemplo 5 é a manipulação algébrica e aplicação de algorítmo, pois ao se fazer uma partilha de uma herança já se tem o conhecimento dos bens (inventário) e dos herdeiros envolvidos.

Exemplo 6. *(Dante, 2005) Num vôo com capacidade para 100 pessoas, uma companhia aérea cobra R$ 200,00 por pessoa quando todos os lugares são ocupados. Se existirem lugares não ocupados, ao preço de cada passagem será acrescida a importância de R$ 4,00 por cada lugar não ocupado. Quantos devem ser os lugares não ocupados para que a companhia obtenha o faturamento máximo?*

O exemplo 6 não foge em nada do exemplo 5, pois na prática nenhuma empresa aérea negocia com seus clientes dessa forma. Em geral é dado o valor da passagem, ficando a cargo do cliente aceitar ou não.

Exemplo 7. *Barroso et al. (2006) Encontre o valor de* x *em cada caso.*

a) O quadrado de x *é igual a* 16.

b) O dobro do quadrado de x *é igual a* 8.

c) A soma do quadrado de x *com* 9 *é igual a zero.*

Exemplo 8. *Barroso et al. (2006) Responda às questões em seu caderno.*

a) Ao elevar um certo número ao quadrado e adicionar 75*, podemos obter como igualdade zero?*

b) Se do quadrado de um número subtrairmos 6*, o resto será* 30*. Qual é esse número?*

Exemplo 9. *(Barroso et al., 2006) Durante uma gincana de Matemática, os participantes tinham de encontrar os números que satisfizessem a seguinte afirmação:*

- *A soma de um número real com seu quadrado é igual a* 42*.*

  Quais são esses números?

Aqui percebe-se a semelhança entre esse problemas e àqueles os quais se ocuparam muitos povos antigos. O exemplo 9 está escrito tal qual enunciava Al-Khwarizmi, quadrados e raízes iguais a um número ($ax^2 + bx = c$).

A mátemática no processo ensino e aprendizagem deve contribuir com a criatividade, a autonomia dos alunos, propiciando caminhos que os levam a adquirir estratégias que os auxiliarão na resolução de problemas em sala de aula e na vida cotidiana (Echeverría e Pozo, 1998), tornando-os cidadãos críticos e participantes efetivos do processo (Skovsmose, 2001).

Não seria uma gincana de matemática um momento adequado para se propor atividades aos alunos que particem de seus própios interesses, cujo objetivo é contemplar o que diz D'amore (2005) *apud* Espinosa (2008), propor problemas que insiram os alunos em uma situação de aprendizagem concebida de forma tal que os estudantes não podem resolver a questão por simples repetição ou aplicação mecânica de conhecimentos ou competências adquiridas. Ao contrário, ela exige que o aluno conjecture e/ou formule novas hipóteses.

Exemplo 10. *(Andrini e Vasconcellos, 2015) A área da imagem projetada é igual a* $1/9$ *do quadrado da distância do projetor à tela. Um professor quer obter uma imagem com* $4m^2$*. A que distância da tela ele deve colocar o projetor?*

Obter uma imagem com área pré definida é o desejo de um professor de matemática?

Exemplo 11. *Carvalho (2001) O tamanho* (s) *da imagem projetada é uma função da distância* (d) *em que o projetor de filmes se encontra da tela de um cinema.*

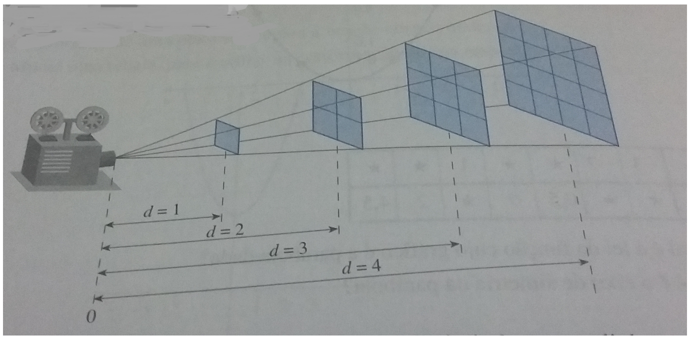


Figura 3.1: Imagem de projetor. Fonte: Carvalho (2001).

a) Após observar a figura, copie e complete a tabela, substituindo as estrelinhas.

Tabela 3.1: Tamanho da imagem em função da distância.

Distância do projetor à tela em metros(d)	1	*	3	*
Tamanho da imagem em metros quadrados (s)	1	4	*	16

b) Determine a lei da função.

c) A que distância da tela deve estar o projetor, se o tamanho da imagem é de $36m^2$*?*

d) Qual é o tamanho da imagem se o projetor está a $4,90m$ *da tela?*

- em qual cinema ocorre o deslocamento do projetor de imagens?
- de que forma se obteve o padrão indicado na figura 3.1?
- esse padrão é válido para todo projetor de imagens?

Os próximos exemplos são um tanto curiosos. Vejamos:

Exemplo 12. *(Hoffmann, 1990) Fazendeiros vendem cada fruta por $2,00 no ínicio da colheita, em* 1 *de junho; depois o preço de cada fruta decresce* 2 *centavos por dia. Num pequeno sítio, o fazendeiro colheu* 80 *frutas e a colheita cresce, em média, de* 1 *fruta por dia. Expresse a receita com a venda das frutas deste fazendeiro como função da época de colheita, construa o gráfico correspondente e calcule quando o fazendeiro deverá colher as frutas, para que o número destas seja o maior possível.*

Exemplo 13. *(Bonjorno e Giovanni, 2005) Um fruticultor, no primeiro dia da colheita de sua safra anual, vende cada fruta por R$2,00. A partir daí, o preço de cada fruta decresce R$ 0,02 por dia. Considere que esse fruticultor colheu* 80 *frutas no primeiro dia e a colheita aumenta uma fruta por dia.*

a) *Expresse o ganho do fruticultor com a venda das frutas como função do dia de colheita.*

b) *Determine o dia da colheita de maior ganho para o fruticultor.*

Observe que o problema apresentado em um livro do ensino médio (Bonjorno e Giovanni, 2005) é o mesmo apresentado em um livro de ensino superior (Hoffmann, 1990), além disso, deve-se questionar o contexto do problema, na prática um fruticultor vende seus produtos com tamanha regularidade? Fica evidende que o problema foi elaborado para se encaixar em um determinado conteúdo específico da matemática, nesse caso, função quadrática. Dessa forma, segundo Echeverría e Pozo (1998) tem-se claramente um pseudoproblema, pois um fruticultor ao fazer sua colheita utiliza-se de outros critérios, que não esses que estão descritos, por exemplo, se as frutas estão maduras.

Segundo Skovsmose (2007) estímasse que um aluno tenha resolvido em média 10000 exercícios ao término do ensino fundamental e médio, e que esse número é bem alto quando se leva em conta um aluno que ingressa em um curso superior que inclui matemática. Assim, vê-se pelos exemplos 12 e 13 que não somente são muitos os exercícios, mas que eles são repetitivos e não no sentido de se repetir exercícios semelhantes, são exatamente os mesmos.

Isso nos faz refletir, a serviço de quem ou quem são os interessados nesse modelo tradicional de educação matemática? Pois, mesmo tendo consciência da idéia de criatividade e a importância do desenvolvimento de competências matemáticas que podem ser usadas nas situações da vida cotidiana, permanecemos com o ensino tradicional? (Skovsmose, 2007)

Exemplo 14. *(Dante, 2005) Supondo que no dia* 5 *de dezembro de* 1995*, o Serviço de Meteorologia do Estado de São Paulo tenha informado que a temperatura na cidade de São Paulo atingiu o seu valor máximo às* 14 *horas, e que nesse dia a temperatura* $f(t)$ *em graus é uma função do tempo* ***t*** *medido em horas, dada por* $f(t) = -t^2 + bt - 156$*, quando* $8 < t < 20$*. Obtenha o valor de* ***b****.*

Exemplo 15. *(Dante, 2005) Durante o processo de tratamento uma peça de metal sofre uma variação de temperatura descrita pela função:*$f(t) = 2 + 4t - t^2$*,* $0 < t < 5$*. Em que instante a temperatura atinge seu valor máximo?*

Nos exemplos 14 e 15 o único objetivo é a aplicação de um algoritmo, todo o contexto serve somente para disfarçar um exercício em problema de aplicação. Aqui contraria-se tudo o que diz Echeverría e Pozo (1998), tem que ficar claro para o aluno que ao se deparar com a resolução de problemas será exigido dele algo além da simples resolução de exercícios repetitivos.

3.2 Aplicações à Física

Um objeto que descreve um movimento uniformemente variado é modelado matematicamente por uma função quadrática.

Um exemplo deste tipo de movimento é a queda dos corpos no vácuo, sujeitos apenas à ação da gravidade, onde tem-se um ponto material P deslocando sobre um eixo e cuja posição no instante t é dada pela ordenada $f(t)$. A caracterização do movimento uniforme se dá pelo fato de f ser uma função quadrática:

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c \tag{3.1}$$

Nesta expressão a constante a é denominada *aceleração*, b é a *velocidade inicial* (no instante $t = 0$) e c é a *posição inicial* do ponto material.

No caso de queda livre ou de um lançamento vertical para cima de um corpo, a aceleração a é a gravidade, normalmente indicada pela letra g e cujo valor é de $9,8m/s^2$ nas proximidades da superfície terrestre.

Outra situação em que há a ocorrência de um movimento uniformemente variado é o de lançamento de projéteis. Segundo Sampaio e Calçada (2001) a análise correta desse tipo de movimento foi feita pela primeira vez por Galileu Galilei que buscava estudar o movimento de um projétil disparado por um canhão; essa é a razão pela qual até os dias atuais o movimento é conhecido como lançamento de projéteis.

Tomando como referencial o plano cartesiano, para um objeto lançado da origem do sistema de coordenadas, tem-se a equação,

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + vt \tag{3.2}$$

para $t = 0$ e $y = 0$.

Exemplo 16. *(Dante, 2005) Uma bola é lançada ao ar. Suponha que sua altura h, em metros, t segundos após o lançamento, seja $h = -t^2 + 4t + 6$. Determine:*

a) o instante em que a bola atinge a sua altura máxima;

b) a altura máxima atingida pela bola;

c) quantos segundos depois do lançamento ela toca o solo.

Dessa forma, comparando a função dada com a equação 3.1 tem-se $c = h_0 = 6m$, $b = v_0 = 4m/s$ e $\frac{1}{2}a = -1 \Rightarrow a = -2m/s^2$, logo a função horária da velocidade é $v = 4 - 2t$.

Ao analisarmos a função horária da velocidade

$$v = 4 - 2t$$

chegamos em uma contradição, pois se a bola foi lançada ao ar, a mesma está sujeita a ação da aceleração gravitacional, cujo o módulo é aproximadamente $9,8m/s^2$, diferente do $|a| = 2m/s^2$ obtido pela inspeção da função apresentada no enunciado do problema, que está bem mais próximo do valor de g na superfície lunar, $g = 1,6m/s^2$.

O próximo exemplo está presente em Barroso et al. (2006). Note que no problema não é apresentada as unidades de medida e não é mencionado se essas são consideradas no Sistema Internacional (SI).

Exemplo 17. *(Barroso et al., 2006) Durante um lançamento de um projétil, Renato anotou algumas informações e montou o gráfico abaixo.*

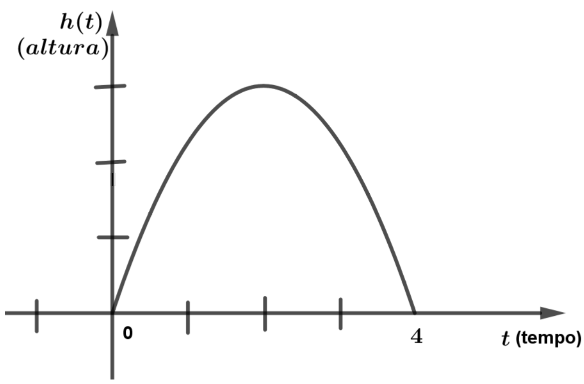


Figura 3.2: Lançamento de um projétil.

Qual das lei de formação abaixo descreve a medida da altura atingida pelo projétil em função do tempo?

a) $h(t) = -3t + 5$

b) $h(t) = -\frac{3}{4}t^2 + 3t$

c) $h(t) = -t^2 + 4$

d) $h(t) = \frac{3}{4}t^2 + 3t$

Solução:

A solução do problema segundo os autores é o item b.

Comparando a solução indicada pelos autores com a equação 3.2, segue-se que $-\frac{3}{4} = -\frac{1}{2}g \Rightarrow g = \frac{3}{2} = 1,5m/s^2$

Aqui o valor encontrado é inferior ao da aceleração da gravidade na superfície lunar.

Algumas questões podem ser levantadas acerca do propósito do problema, tais como:

- de que forma Renato obteve os dados necessários para elaboração do gráfico que modela a situação problema?
- qual ou quais as necessidades enfrentadas por Renato para que ele anotasse tais informações?
- Renato trabalha com lançamento de projéteis?
- esse é um problema real?
- qual a relevância desse problema em sala de aula?
- onde foi realizado esse lançamento e em quais condições?

Considerações finais

Mediante as críticas que o ensino de matemática a nível fundamental e médio tem recebido nos últimos tempos, da falta de contextualização e interdisciplinaridade em sala de aula, da maneira como os problemas ditos de aplicação são apresentados que segundo Echeverría e Pozo (1998) são na verdade pseudoproblemas, este trabalho foi elaborado com o propósito de ser um material de apoio que aponte novos caminhos no ensino de equação do segundo grau e função quadrática.

Observou-se que ao se deparar com alguns problemas envolvendo função quadrática aplicados à Física, ao se fazer uma análise mais aprofundada sobre as questões apresentadas pelos livros didáticos, vê-se claramente que a elaboração dos mesmos e os resultados apontados pelos autores dessas obras são incoerentes com a teoria advinda da Física.

Por mais simples que seja o problema a proposta é questionar sempre, pois fica claro neste trabalho que após essa prática é possível verificar que há inúmeros problemas, ou como chamaria Skovsmose (2001), pseudo-aplicações que na verdade não passam de exercícos disfarçados de problemas nos nossos livros didáticos, cujo único objetivo é aplicação de algorítmos, sem relação alguma com situações que contribuam na formação de cidadãos críticos, autônomos e construtores do seu saber.

De maneira alguma deve-se ignorar o que diz Echeverría e Pozo (1998) e Skovsmose (2001) que na medida do possível, os temas a serem trabalhados nos problemas devam ser apresentados pelos alunos, tornando-os assim, agentes construtores de seu conhecimento.

Dessa forma, quais exercícios seriam de fato um problema de aplicação de equação do segundo grau e função quadrática para o ensino fundamental e médio?

Referências Bibliográficas

Andrini, A. e Vasconcellos, M. J. (2015). *Praticando matemática*, volume 8º ano. Editora do Brasil, S. Paulo.

Barroso, J. M., Leonardo, F. M., Gay, M. R. G., e Silva, M. C. (2006). *Projeto Araribá*, volume 8ª série. Moderna, S. Paulo.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino–aprendizagem com modelagem matemática.* Ed. Contexto, S.Paulo.

Bonjorno, J. R. e Giovanni, J. R. (2005). *Matemática completa*, volume 1. FTD, S. Paulo.

Carvalho, M. C. C. (2001). *Padrões Numéricos e Funçẽs.* Editora Moderna, S. Paulo.

Dante, L. R. (2005). *Matemática*, volume 1. Editora Ática, S. Paulo.

Echeverría, M. P. P. e Pozo, J. I. (1998). Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. *A Solução de problemas: Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed*, páginas 13–42.

Espinosa, A. J. (2008). Ii seminário de histórias e investigações em aulas de matemática. https://pt.slideshare.net/guest97efbe/palestra-alfonso-unicamp.

Gomez, J. J. D., Frensel, K. R., e Crissaff, L. S. (2017). *Geometria Analítica.* SBM, Rio de Janeiro.

Hoffmann, L. D. (1990). *Cálculo: Um Curso Moderno E Suas Aplicações*, volume 1. LTC.

Lima, E. L., Carvalho, P. C., Wagner, E., e Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio*, volume 1. SBM, Rio de Janeiro.

Oliveira, K. e Fernandez, A. J. C. (2012). *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.* SBM, Rio de Janeiro.

Pitombeira, J. B. (2004). Revisitando uma velha conhecida. *Anais da II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. 2004, Salvador.*

Roque, T. (2012). *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Zahar.

Roque, T. e Pitombeira, J. B. (2012). *Tópicos de História da Matemática.* SBM, Rio de Janeiro.

Sampaio, J. L. e Calçada, C. S. (2001). *Universo da Física*, volume 1. Atual, S. Paulo.

Silveira, E. (2017). *Matemática, Compreensão e Prática.* Moderna, S. Paulo.

Skovsmose, O. (2001). *Educação matemática crítica: a questão da democracia.* Papirus Editora.

Skovsmose, O. (2007). *Educação crítica-incerteza, matemática, responsabilidade.* Cortez Editora, São Paulo.