Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Uso do software Geogebra no ensino e aprendizagem de funções afins e quadráticas

Teblas Flores

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Novembro 2018

Uso do software Geogebra no ensino e aprendizagem de funções afins e quadráticas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Teblas Flores e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 23 de novembro de 2018.

Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz
Prof. Dr. Djeison Benetti
Prof. Dr. Edgar Nascimento

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

F634u Flores, Teblas.
Uso do software Geogebra no ensino e aprendizagem de funções afins e quadráticas / Teblas Flores. -- 2018
xiii, 64 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Geraldo Lúcio Diniz.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2018.
Inclui bibliografia.

1. Ensino de Matemática. 2. Proposta pedagógica. 3. Atividades didáticas. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCACÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUACÃO
Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 – Boa Esperança – 78.060-900 – Cuiabá/MT
Tel: (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "Uso do software Geogebra no ensino e aprendizagem de funções afins e quadráticas"

Autor: **Teblas Flores**

defendida e aprovada em 7/11/2018.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor Geraldo Lúcio Diniz
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Djeison Benetti

Examinador Interno Doutor Djeison Benetti
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Edgar Nascimento
Instituição: Instituto Federal de Mato Grosso

Cuiabá, 7/11/2018.

À minha esposa Mariza Consolini Flores.

Aos meus pais Ari Flores e Erotildes Avalhaes Flores.

Agradecimentos

Agradeço à Deus pela vida.

A Universidade Federal de Mato Grosso, pela oportunidade.

Ao meu orientador Geraldo Lúcio Diniz, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas correções e incentivos.

À CAPES, pelo incentivo através de suas bolsas de estudo.

Aos meus professores, de uma vida inteira, que de algum modo moldaram em minha alma a vocação para lecionar Matemática.

Ao meu irmão Eldenes Avalhaes Flores e família, que nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo, sempre fizeram entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente.

Aos meus pais, pela educação, pelo amor, pelo incentivo e apoio incondicional.

Agradeço a minha esposa Mariza Consolini Flores, que me deu todo apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço.

Mais um passo, um aprendizado, uma realização... Assim a vida vai ganhando forma, luz e significado.

O autor.

Resumo

Dissertação elaborada com o intuito de auxiliar os professores de Matemática que atuam na Educação Básica, no processo de ensino e aprendizagem de funções afins e quadráticas através de novas práticas com o software de Matemática dinâmica Geogebra, sugerindo uma abordagem construtiva, através de um conjunto de reflexões e discussões de cunho didático e prático, direcionados à sala de aula, conjunto este que evolui gradualmente para a elaboração dos conceitos e propriedades formais, sem se afastar de seu caráter prático e aplicável ao cotidiano.

Palavras chave: Ensino de Matemática; proposta pedagógica; atividades didáticas.

Abstract

This text was elaborated with the intention of assisting Mathematics teachers who work in Basic Education in the teaching and learning process of linear and quadratic functions through new practices with Geogebra dynamic Mathematics software. In the text, are been suggested a constructive approach through a set of reflections and discussions of a didactic and practical nature directed to the classroom, a group that gradually evolves towards the elaboration of formal concepts and properties, without departing from its practical and everyday character.

Keywords: Mathematics teaching, pedagogic proposal, didactic activities.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

> “Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.”
>
> (Paulo Freire)

A função de professor requer um permanente processo de autocrítica. Novos pontos de vista, novas práticas, novos sentimentos e objetivos são características da rotina de todo professor atento a qualidade de seu trabalho. Esta dissertação propõe uma discussão em torno do processo de ensino e aprendizagem das funções afins e quadráticas, mediante o uso de tecnologias digitais, mais especificamente o uso do software Geogebra.

De acordo com Borba e Penteado (2016), o Geogebra é pioneiro no sentido de integrar a geometria dinâmica (GD), computação algébrica (CA) e funções, permitindo um nível de experiência inédito no estudo da Matemática. No primeiro capítulo é apresentado um breve histórico do uso das tecnologias digitais no Brasil e o Geogebra ganha destaque como um dos grandes expoentes entre esses recursos, pois permite que se aplique a Matemática de forma bem contextualizada com interações ao alcance do aluno. Ainda no primeiro capítulo, é introduzido o conteúdo teórico sobre funções afins e quadráticas, sob a ótica do professor da educação básica, que busca trazer para sala de aula uma Matemática de qualidade, construtiva, dinâmica e com profundidade, para isso o software Geogebra é um grande aliado.

No capítulo 2 é apresentada a proposta em si, que retoma a teoria elaborada no capítulo 1, mas agora interpretada com o uso do Geogebra para provocar o que Borba et al. (2015) denomina de “pensar-com-Geogebra”. Esta construção é feita através da resolução de problemas que são explorados e analisados com o uso deste recurso digital, com sugestões de roteiros didáticos e alguns questionamentos, que podem servir de inspiração para que cada professor elabore sua prática.

No capítulo 3 é feita a análise final, que complementa as reflexões e propostas do capítulo 2 e também sintetiza alguns pontos mais relevantes do processo de aprendizado de funções. São apresentados também outras ideias, de acordo com Cunha (2017), que agregam boas sugestões que podem ampliar o alcance desta dissertação.

Nas considerações finais é enfatizada a relevância do Geogebra no estudo de funções, assim como na resolução e interpretação de situações problema.

Capítulo 1

O ensino e aprendizado de funções

O sucesso do ensino e aprendizado de funções na escola pública brasileira, assim como toda a Matemática, deve-se principalmente ao fato de que seus conceitos e resultados tem relação e significado no cotidiano e, ainda, existem muitas aplicações em campos diversos, tais como na indústria, no comércio e na área tecnológica, entre outras. Seguindo esta direção e sem perder o caráter formal da construção matemática de conceitos e propriedades, se pretende ao longo deste capítulo fundamentar as bases deste trabalho, cujo assunto principal são as funções reais de uma variável real, mais especificamente as funções afins e quadráticas. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais uma das características da área de Matemática é: "A atividade matemática escolar não é 'olhar para coisas prontas e definitivas', mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade"(MEC, 1997, p. 19).

Trabalhar contextualmente com a Matemática exige, como em qualquer área, um bom planejamento e motivação. Atividades contextualizadas requerem metodologias, por vezes extensas, que devem ser trabalhadas em tempo mínimo. Entretanto, esta dificuldade é recompensada pelo ganho de qualidade na aprendizagem. Uma das áreas da Matemática que deveriam ser contextualizadas de modo natural, pois são modelos matemáticos de fenômenos reais, são as funções e suas diversas formas presentes no currículo escolar. Se pretende com este trabalho contribuir para que as funções afim e quadrática sejam de fato aplicadas na realidade e no cotidiano de quem se propõe a aprendê-las ou ensiná-las.

1.1 Introdução

O ensino de funções na escola básica brasileira passou por grandes mudanças nas últimas décadas, saindo de uma abordagem extremamente técnica para um olhar mais prático e contextualizado. Termos como *domínio da função*, *imagem* e *contradomínio* eram exaustivamente explorados sem que o aluno experimentasse uma interação adequada com seus significados. Em muitos problemas propostos, as funções eram reduzidas a uma expressão na forma de equação com duas variáveis, sem definir ou esclarecer em qual universo numérico tal função estaria sendo aplicada e, quando o fazia, não havia uma contextualização desses conjuntos numéricos. "O que se observa atualmente no ensino de Matemática escolar é a valorização excessiva de uma abordagem teórica, seja ela trabalhada de forma bem contextualizada ou não"(Granja e Mello, 2012, p. 11).

Atualmente, é díficil encontrar algum livro direcionado para o ensino básico, sem que na seção de introdução às funções não tenham, primeiramente, uma abordagem intuitiva do conceito de função, com exemplos reais e contextualizados, abordando situacões de negociações financeiras e comerciais, observações científicas de fenômenos da natureza, ou ainda, aplicações no trabalho e na indústria.

Uma nova mudança vem acontecendo fortemente, que é o uso de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem escolar. Softwares para computadores, aplicativos para smartphones, lousas digitais com ou sem tecnologia 3D, plataformas ou sites na internet que trazem interações diversas que possibilitam uma experiência, no mínimo prazerosa, vem se tornando um desafio para a prática de qualquer professor. O desafio está em agregarmos esta tecnologia àquela prática vigente de cada professor.

O equilíbrio entre aspectos teóricos e práticos continua sendo importante:

> Entendemos que a Matemática teórica pode sim motivar os alunos, desde que bem contextualizada, e que a Matemática aplicada pode não despertar o interesse dos alunos, bastando para isso que as aplicações apresentadas sejam artificiais ou muito técnicas, ou que não estejam ao alcance do universo de compreensão do aluno (Granja e Mello, 2012, p. 11).

Não se pode permitir que essas ferramentas tecnológicas tenham seu uso limitado ao entretenimento visual, com movimentos, animações e cores atraentes para simplesmente mudar a rotina. Seria um desperdício. O direcionamento didático continua sendo essencial e a transposição didática também não deve ser ignorada.

Nesta dissertação se pretende, além de fazer uso de novas tecnologias, destacar a importância de aprimorar os aspectos didáticos envolvidos em novas ferramentas metodológicas. Do ponto de vista prático e realista as funções podem ser aplicadas em situações reais. Deste modo, para que se tenha uma experiência completa de ensino e aprendizagem, é preciso compreender no cotidiano as características e padrões matemáticos necessários para um processo de interação ao alcance da compreensão do aluno. De fato:

> É fundamental para a aprendizagem que, em algum momento, se tenha a real necessidade de aprender o que se está estudando, ou esse conhecimento perderá o sentido. A necessidade dá significado ao novo conhecimento, quando está inserido no meio em que o aluno vive (Ogliari, 2008, p. 11).

1.2 Tecnologias digitais em Matemática no Brasil

Diante do acelerado avanço tecnológico que vem acontecendo, como computadores com capacidades de processamento cada vez maiores, softwares com interfaces mais acessíveis e compreensíveis, conexão da internet ultra veloz, aplicativos sendo desenvolvidos e atualizados constantemente, linguagens de programação aprimoradas, redes sociais e recursos eletrônicos entre outros, espera-se que na área de educação estas mídias sejam incorporadas. No caso específico da Matemática quais tecnologias ou recursos foram utilizados até então? Quais são as mais utilizadas atualmente?

Autores como Borba et al. (2015) dividem o uso de tecnologias digitais no Brasil em quatro fases. A primeira, que se iniciou por volta de 1980, ficou marcada pelo uso do software LOGO (1985) que foi usado com enfase construtiva relacionando a linguagem de programação com o pensamento matemático. Outro momento marcante desta fase foi o início do surgimento de laboratórios de informática, em que as primeiras capacitações de professores eram voltadas apenas para fazerem uso dos computadores e menos ênfase sobre o que ensinar (Borba et al., 2015).

Na segunda fase, com início na década de 90, houve uma popularização e maior acesso aos computadores pessoais, os professores ainda inseguros sobre o seu uso, não conseguiam ver maiores potenciais para seu uso pedagógico. Apenas com a criação e desenvolvimento de softwares, junto com o apoio de cursos de formação, é que houve uma nova expectativa didática com o uso de tecnologia da informática (TI) para novas práticas educacionais (Borba et al., 2015).

> Assim, professores podem vivenciar o risco de introduzir as tecnologias informáticas, saindo de uma zona de conforto, ou podem ver o conforto de vivenciar o risco de lidar com as TI (Tecnologia da informática) em ambientes educacionais (Borba et al., 2015, p. 15).

De acordo com Borba et al. (2015), os softwares que marcaram esta fase foram o Winplot, Fun e Graphmathica, voltados para as funções e os de geometria dinâmica como o Cabri Géomètre que oferece um aprimoramento na visualização e experimentação. A geometria dinâmica (GD) merece um destaque especial, pois possibilita um outro nível de interação voltada para a aprendizagem, em que o aluno pode experimentar, construir e visualizar a diferença entre figuras e construções geométricas. Os softwares gráficos destinados ao estudo de funções foram outra vertente que se iniciou nesta fase, com eles pode-se visualizar, manipular e compreender melhor as propriedades gráficas de uma função.

A terceira fase, que se iniciou no fim da década de 1990, tem como principal característica a evolução da comunicação e do uso da internet como fonte de conhecimento, passamos da TIs para as TICs (Tecnologias da Informação e Comunicação) e uma consequência desta evolução é a realização de cursos a distância via e-mail, chats ou fóruns de discussão direcionados a capacitação de professores mediante interações virtuais (Borba et al., 2015).

A quarta fase se inicia com o surgimento da internet de alta velocidade, que proporciona um outro nível de comunicação com um número ainda maior de recursos digitais. Entre estes recursos se destaca, na área de Matemática, o software Geogebra, que hoje passou a ser um software de *Matemática Dinâmica* e não apenas de Geometria dinâmica, além de ser gratuito e de multiplataforma. Outros detalhes a respeito destas quatro fases estão na tabela 1.1 (Borba et al., 2015, p. 28). Recentemente, está disponível também para a plataforma Android e IOS, potencializando e facilitando o acesso para estudantes e escolas sem computadores, visto que os *smartphones* estão presentes no cotidiano da maioria dos alunos. De acordo com a Fundação Getúlio Vargas o Brasil já tem mais de um smartphone ativo por habitante.[1]

[1]https://canaltech.com.br/produtos/brasil-ja-tem-mais-de-um-smartphone-ativo-por-habitante-112294

Tabela 1.1: Resumo histórico do uso de tecnologias digitais no Brasil.

	Tecnologias	Natureza ou base tecnológica das atividades	Perspectivas ou noções teóricas	Terminologias
Primeira fase (1985)	Computadores; calculadoras simples e científicas.	LOGO Programação	Construcionismo; micromundo.	Tecnologias informáticas (TI).
Segunda fase (início dos anos 1990)	Computadores (popularização); calculadoras gráficas.	Geometria dinâmica (Cabri Géomètre; Geometriks); múltiplas representações de funções (Winplot, Fun, Mathematica); CAS (Maple); jogos.	Experimentação, visualização e demonstração; zona de risco; conectividade; ciclo de aprendizagem construcionista; seres-humanos-com mídias.	TI; software educacional; tecnologia educativa.
Terceira fase (1999)	Computadores, laptops e internet.	Teleduc; e-mail; chat; forum; google.	Educação a distância online; interação e colaboração online; comunidades de aprendizagem.	Tecnologias da informação e comunicação (TIC)
Quarta fase (2004)	Computadores; laptops; tablets; telefones celulares; internet rápida	Geogebra; objetos virtuais de aprendizagem; Applets; vídeos; You Tube; WolframAlpha; Wikipédia; Facebook; ICZ; Second Life; Moodle.	Multimodalidade; telepresença; interatividade; internet em sala de aula; produção e compartilhamento online de vídeos; performance matemática digital.	Tecnologias digitais (TD); tecnologias móveis ou portáteis.

O ensino e aprendizagem de Matemática está intimamente ligado a um processo investigativo e experimental. O aluno precisa fazer Matemática. “A importância da investigação tem sido amplamente valorizada pela comunidade de educação matemática” (Borba e Penteado, 2016, p. 32).

O processo investigativo pode ser apenas internalista, voltado para temas da própria matemática, ou abordar temas mais amplos com uso de recursos computacionais ou não. Em ambos os casos há um processo de modelagem envolvido, seja uma modelagem voltada para questões da Matemática em si, ou voltada para temas mais complexos em que o processo investigativo aconteça em torno deste tema escolhido.

O relacionamento dos docentes com a informática vem amadurecendo ao longo dos anos. Desde o medo de serem substituídos pela máquina à insegurança atual de ter que rever suas práticas mediante o uso de novas tecnologias. É preciso lembrar de que a atividade docente exige uma autocrítica permanente das práticas, com ou sem o uso de novos recursos tecnológicos. Assim, é necessário que os professores se movimentem na direção de práticas inovadoras, incertas ou até imprevisíveis. "Mesmo insatisfeitos, em geral os professores se sentem assim, eles não se movimentam em direção a um território desconhecido" (Borba e Penteado, 2016, p. 44). É necessário arriscar por práticas que a princípio sejam diferentes. Um dos pontos que será tratado aqui, é o uso de TD (Tecnologias Digitais) no ensino de funções afins e quadráticas.

Antes de escolher o melhor ambiente informatizado, é necessário que se faça uma análise da natureza do conteúdo, no caso as funções, para avaliar como tal assunto ou teoria pode ser trabalhado e com qual recurso tecnológico e, ainda, qual será o conhecimento produzido. O que se deve priorizar no ensino e aprendizado de funções? Quais são os primeiros conceitos relevantes que o professor não pode esquecer? É possível traçar uma espécie de mapa conceitual, no qual se tenha os principais pontos da teoria, cujos aspectos sirvam de suporte para desenvolver novas práticas de ensino? Até que ponto e profundidade o professor de Matemática de Escola Pública consegue trabalhar estes conceitos? Como a tecnologia pode ser usada para facilitar as interações propostas pelos professores e alunos?

1.3 Funções

A construção teórica de funções permeia três partes básicas: Dois conjuntos e uma regra que define como os elementos destes dois conjuntos irão se associar. É possível encontrar, facilmente, os mais diversos contextos usados em sala de aula nesse início da teoria, é a chamada noção intuitiva, muito comum em várias obras. Estes contextos são inspirados em situações reais que ajudam o aluno a perceber a relevância do conteúdo. Acredita-se que as tecnologias interativas podem potencializar esta contextualização, pois o aluno experimentaria o "fazer com as próprias mãos" e não apenas imaginaria uma situação hipotética.

A regra de associação, que deve permitir relacionar de modo bem específico cada elemento de um conjunto, o conhecido domínio da função, ao outro conjunto, o contradomínio, muitas vezes envolve algum processo aritmético traduzido por uma expressão do tipo $y = 2x + 1$, com x representando os elementos do domínio e y os do contradomínio, formando o subconjunto imagem. Neste momento podem surgir os primeiros erros de interpretação ou de construção conceitual por parte dos alunos, erros estes que talvez sejam provocados por uma má contextualização. “Para que o aluno tenha uma compreensão significativa do conceito de função, é necessário abordar tanto sua definição intuitiva, de forma contextualizada e evidenciando seu aspecto variacional, como sua definição formal” (Brito e Almeida, 2005, *apud* Magarinus (2013)).

As expressões que retratam a regra de associação da função podem ser melhor entendidas, por exemplo, com o uso de softwares como o Geogebra, que permitem a manipulação de pontos no plano cartesiano com observação da variação de suas coordenadas de modo imediato, ou ainda, alterando a expressão algébrica e observando o que ocorre com sua representação gráfica, o que ajuda a compreender o significado da expressão dada. A possibilidade de lidar com as representações algébricas e gráficas simultaneamente é uma das principais vantagens, peculiaridades e inovações deste software, sem citar o aspecto geométrico que também é inovador. “Diante de tal peculiaridade, se começa a justificar o caráter inovador do software Geogebra, pois trata-se de uma tecnologia pioneira em relação à integração GD-CA[2]-funções.” (Borba et al., 2015, p. 34).

O par de elementos formado pela regra de associação será utilizado durante todo o processo de construção teórica das funções. Sendo A o conjunto domínio da função e B o contradomínio, ou seja, considerar que $x \in A$ e $y \in B$. Esse par de valores, x e y, pode assumir a seguinte notação, x e $f(x)$, respectivamente, ou ainda $x \to f(x)$ indicando que x é transformado em $f(x)$ pela função denominada f. Os valores de $f(x)$, formam o conjunto *imagem*, que é um subconjunto do contradomínio B.

A regra que orienta como transformar x em $f(x)$ deve seguir apenas duas condições:

(i) Não deve haver exceções: afim de que f tenha o conjunto A como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$ para todo $x \in A$;

(ii) Não deve haver ambiguidades: a cada $x \in A$, a regra deve fazer corresponder um único $f(x)$ em B[3].

Se pode perceber que é necessária uma boa noção de conjuntos neste início da construção teórica, tudo se resume a uma associação entre dois conjuntos. O *gráfico* da função, do ponto de vista didático, facilita a visualização desta associação, ou seja, da função em si e seus conjuntos *domínio, contradomínio* e *imagem*.

[2]GD: Geometria dinâmica e CA: computação algébrica.

[3]As definições e os conceitos matemáticos aqui utilizados seguem conforme Lima (2012) e Lima (2013).

Duas funções são iguais quando aquilo que as define são iguais, ou seja, quando possuem o mesmo domínio, contradomínio e a mesma regra de associação. Dentre as várias operações existentes entre conjuntos, a que permite representar a função mediante um gráfico é o *produto cartesiano*. O produto cartesiano entre dois conjuntos A e B é definido como o conjunto $A \times B$ formado por todos os pares ordenados (a, b) em que $a \in A$ e $b \in B$. Portanto,

$$A \times B = \{(a, b); a \in A \text{ e } b \in B\}$$

O *gráfico* de uma função $f : A \to B$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, onde $x \in A$ é arbitrário. Ou seja,

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B; \, y = f(x)\}.$$

Pela definição de igualdade de funções, se pode afirmar que duas funções são iguais se, e somente se, posssuem o mesmo gráfico. Para que um gráfico esteja definido por uma função, ou seja, para que um subconjunto $G \subset A \times B$ seja a representação gráfica de uma função $f : A \to B$, de acordo com as condições (i) e (ii) acima é necessário e suficiente que todo elemento do domínio seja representado por um único ponto de coordenadas $(x, y) \in G$.

(a) É gráfico de função

(b) Não é gráfico de função

Figura 1.1: Exemplos de gráficos.

A passagem da linguagem de conjuntos para as representações gráficas é um momento delicado para a construção teórica vivenciada pelos alunos. Seja qual for o recurso didático utilizado, é preciso que os alunos considerem os fundamentos teóricos expostos até aqui ou que, pelo menos, estes fundamentos sejam o pano de fundo da prática ou metodologia escolhida pelo professor. Especificamente, quando os recursos utilizados são as ferramentas tecnológicas, nem sempre estes fundamentos teóricos estão presentes de forma clara para quem os utiliza, por vezes, nem mesmo o professor compreende como a teoria está presente naquele recurso, prejudicando toda a prática de ensino e aprendizagem proposta, ou seja, "o professor deve ter clareza de seus objetivos, pleno conhecimento dos conteúdos que serão explorados, elaborar seu plano pedagógico, conhecer o programa que será utilizado, identificando suas potencialidades e limitações" (Magarinus, 2013, p. 31).

Pretende-se sugerir alguns parâmetros, diretrizes ou caminhos que auxiliem, em linhas gerais, como os aspectos teóricos fundamentais das funções podem ser transpostos didaticamente e adaptados para os recursos digitais atuais.

Existem várias formas, em que as funções podem fazer a associação de seus conjuntos domínio e contradomínio, entre estas formas são destacadas três maneiras básicas importantes para a compreensão de como a *regra de associação* está atuando sobre os elementos destes conjuntos. São elas: *função injetiva, função sobrejetiva* e *função bijetiva.*

Define-se como *função injetiva* toda função de A em B que para quaisquer x e y em A, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. De outro modo, se pode dizer que, quando se tem $x \neq y$, em A, implica que as imagens de x e y também são diferentes. Chama-se *função sobrejetiva* toda função $f : A \to B$, tal que, para todo $y \in B$ exista pelo menos um $x \in A$ com $f(x) = y$. Uma bijeção ou correspondência biunívoca, ou ainda, uma *função bijetiva* ocorre quando se tem, simultaneamente, uma função injetiva e sobrejetiva.

As funções podem ser usadas para trabalharem mutuamente, através da composição de funções, basta que o domínio de uma função seja o contradomínio da outra. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções tais que o domínio de g é igual ao contradomínio de f. Neste caso se define a função composta $g \circ f : A \to C$, que consiste em aplicar primeiro f e depois g. Deste modo, a notação $(g \circ f)$ deve ser compreendida como $g(f(x))$, ou seja a função g transforma a imagem de x em $g(f(x))$. De modo mais formal, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$.

1.4 Função afim

Normalmente, o primeiro modelo de função apresentado aos alunos é o de função afim, que pode ser contextualizado ou aplicado em diversas situações. Denomina-se função afim f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ quando existem números reais a e b de modo que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como os coeficientes a e b são números reais, também são funções afim os casos em que $f(x) = x$ (*função identidade*), as *funções lineares* com $f(x) = ax$ e, ainda, as *funções constantes* $f(x) = b$, todas com domínio e contradomínio reais.

A determinação do coeficiente b pode ser feita quando se observa o valor que a função f assume para $x = 0$, ou seja, $f(0) = a \cdot 0 + b = b$, sob este ponto de vista b é o chamado *valor inicial da função f*. O coeficiente a pode ser obtido considerando dois valores distintos para o domínio, por exemplo x_1 e x_2, desse modo se tem:

$$f(x_1) = ax_1 + b \text{ e } f(x_2) = ax_2 + b,$$

subtraindo as equações, se obtém

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1)$$

assim,

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ com } x_1 \neq x_2.$$

Ao considerar $x_2 > x_1$ o valor de $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ mostra a *taxa de crescimento da função* neste intervalo de x_1 até x_2.

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, é denominada:

– *crescente* quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

– *decrescente* quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

– *monótona não-decrescente* quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

– *monótona não-crescente* quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Em qualquer dos quatro casos f é dita *monótona*. Nos dois primeiros (f crescente ou decrescente) se diz que f é *estritamente monótona*. Neste dois casos, f é uma função injetiva.

O gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ é uma reta. Para verificar isto, basta escolher três pontos quaisquer, sejam eles:

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b)$$
$$P_2 = (x_2, ax_2 + b)$$
$$P_3 = (x_3, ax_3 + b)$$

e verificar que, a maior dentre as distâncias $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ é igual a soma das outras duas menores, ou seja, asssumindo sem perda de generalidade, que $x_1 < x_2 < x_3$ e usando a fórmula da distância entre dois pontos, é necessário e suficiente mostrar, conforme figura 1.2, que:

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) \Leftrightarrow$$
$$(x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} \Leftrightarrow$$
$$(x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} \Leftrightarrow$$
$$(x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} = x_2\sqrt{1 + a^2} - x_1\sqrt{1 + a^2} + x_3\sqrt{1 + a^2} - x_2\sqrt{1 + a^2} \Leftrightarrow$$
$$(x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} = -x_1\sqrt{1 + a^2} + x_3\sqrt{1 + a^2} \Leftrightarrow$$
$$(x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

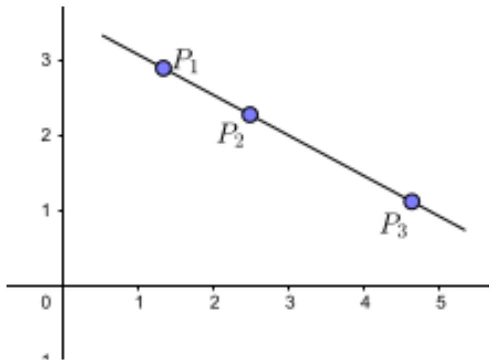


Figura 1.2: Colinearidade

Sendo o gráfico uma reta, os pontos de interseção com os eixos x e y são importantes para a compreensão e análise da função. O ponto de interseção com o eixo y tem coordenadas $(0, b)$, pois para $x = 0$ se tem $f(0) = b$. O ponto de interseção com o eixo x tem coordenadas $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, se $f(x) = ax + b$, então para $f(x) = 0$ se tem $x = -\frac{b}{a}$.

Do ponto de vista geométrico o coeficiente a mostra a inclinação da reta em relação ao eixo horizontal ou eixo das abscissas, ou seja, quanto maior o valor de a mais a reta se afasta da posição horizontal.

Da geometria plana se sabe que toda reta fica determinada ao conhecer dois de seus pontos, no caso das funções afim como o gráfico é uma reta, para determiná-lo basta conhecer dois de seus pontos. Desse modo, ao determinar os valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$ a função f fica unicamente determinada. Sendo $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$, então para determinar os coeficiente a e b, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} ax_1 + b & = & y_1 \\ ax_2 + b & = & y_2 \end{cases}$$

cujas soluções são $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e $b = \dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$.

1.4.1 Caracterização da função afim

É importante, do ponto de vista didático, que o aluno e o professor sejam capazes de perceber se determinado contexto ou dados observados podem ser modelados por uma função afim. Por vezes, as informações são claras e fácil de se notar que o modelo de função afim é o ideal para aquela situação. Para tanto faz-se o uso do seguinte teorema:

Teorema 1 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.*

Demonstração: 1 *Supondo que f seja crescente, então $\varphi(h)$ também é crescente. Note que $\varphi(0) = f(x+0) - f(x) = 0$. Seja $k \in \mathbb{R}$, então:*

> *$\varphi(h+k) = f(x+h+k) - f(x) = f((x+k)+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x) = \varphi(h) + \varphi(k)$. Logo, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade[4], fazendo $a = \varphi(1)$, tem $\varphi(h) = a \cdot h$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que $f(x+h) - f(x) = ah$. Chamando $f(0)$ de b, resulta $f(h) = ah + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

1.5 Função quadrática

Este tipo de função tem aplicações bem diferentes das aplicações das funções afins. No ensino médio o professor de Matemática tem a oportunidade de usar o estudo de corpos em queda, estudado na disciplina de Física, para contextualizar a função quadrática. O desafio maior do professor não está apenas na contextualização deste tipo de função, mas

[4]Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $f(k, x) = kf(x)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para quaisquer x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$.

também em seus aspectos teóricos particulares, tais como os zeros da função, seus pontos de máximo e mínimo e aspectos de sua representação gráfica.

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é considerada uma *função quadrática* quando f transforma todo x real em $ax^2 + bx + c$, ou seja, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com coeficientes a, b e c reais e $a \neq 0$. Os valores dos coeficientes a, b e c podem ser determinados ao conhecer, pelo menos, três valores que a função quadrática f assuma. Assim, bastaria resolver o sistema:

$$\begin{cases} f(x_1) &= ax_1^2 + bx_1 + c \\ f(x_2) &= ax_2^2 + bx_2 + c \\ f(x_3) &= ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}$$

cujas incógnitas são a, b e c.

1.5.1 A forma canônica do trinômio

Mediante uma manipulação algébrica se pode escrever o trinômio $ax^2 + bx + c$ de outro modo, ou seja,

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right] =$$
$$a\left[x^2 + 2\frac{bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Deste modo se tem:

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

como a *forma canônica* de expressar o trinômio. Para o professor abordar o trinômio neste formato, será necessário que os alunos tenham uma boa noção da técnica de completar quadrados, que foi utilizada ao acrescentar $+\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a}$. Além disso, é importante justificar sempre a necessidade e a utilidade da forma canônica. A principal delas é o fato de que se pode, facilmente, encontrar a fórmula que nos fornece as raízes da equação $ax^2+bx+c = 0$. De fato:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \iff$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac - b^2}{4a^2} \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \iff$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \iff x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \iff$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \Longleftrightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{1.1}$$

cuja equação (1.1) é a fórmula resolutiva de equações quadráticas

A expressão $b^2 - 4ac$ mostra as possibilidades de raízes que a equação possui. Seja $\Delta = b^2 - 4ac$, se tem as seguintes situações:

(i) Caso $\Delta > 0$, então há duas raízes distintas $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

(ii) Caso $\Delta < 0$, não há raiz real;

(iii) Caso $\Delta = 0$, as raízes são iguais ou uma *raiz dupla* $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$, se pode notar que $\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$ não depende de x, mas apenas dos coeficientes, logo seu valor é constante.

Nos parênteses se tem $x + \dfrac{b}{2a}$, cujo menor valor ocorre quando $x = -\dfrac{b}{2a}$. Deste modo, $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = \dfrac{4ac-b^2}{4a} = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Caso $a > 0$ a função f assume seu menor valor para $x = -\dfrac{b}{2a}$, já no caso de $a < 0$, f atinge seu valor máximo qualquer que seja x real.

Dentro do que foi exposto está toda a teoria envolvida dos pontos de máximo, mínimo e raízes da função que, normalmente, é estudado junto com sua representação gráfica, que será vista mais adiante. Mas antes, uma última observação sobre a forma canônica, ela também possibilita saber para quais valores diferentes para x se tem imagens iguais. Sejam $x' \neq x$ para quais valores de x' e x se tem $f(x') = f(x)$?

Olhando para a forma canônica, se sabe que $f(x) = f(x')$ se, e somente se, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \left(x' + \dfrac{b}{2a}\right)^2$. Como por hipótese $x \neq x'$, isto significa que $x + \dfrac{b}{2a} = -\left(x' + \dfrac{b}{2a}\right)$, isto é, $\dfrac{x+x'}{2} = -\dfrac{b}{2a}$.

Esta igualdade permite concluir que a média aritmética entre x e x' é $-\dfrac{b}{2a}$, portanto, x e x' estão igualmente distantes de $-\dfrac{b}{2a}$, que é o eixo de simetria da função quadrática.

1.5.2 A representação gráfica da função quadrática

É importante que o estudante experimente construir o gráfico da função quadrática e perceba que não se trata de uma reta. Essa nova curva se denomina *parábola*. A parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo F, denominado foco da parábola, e de uma reta, denominada diretriz d da parábola.

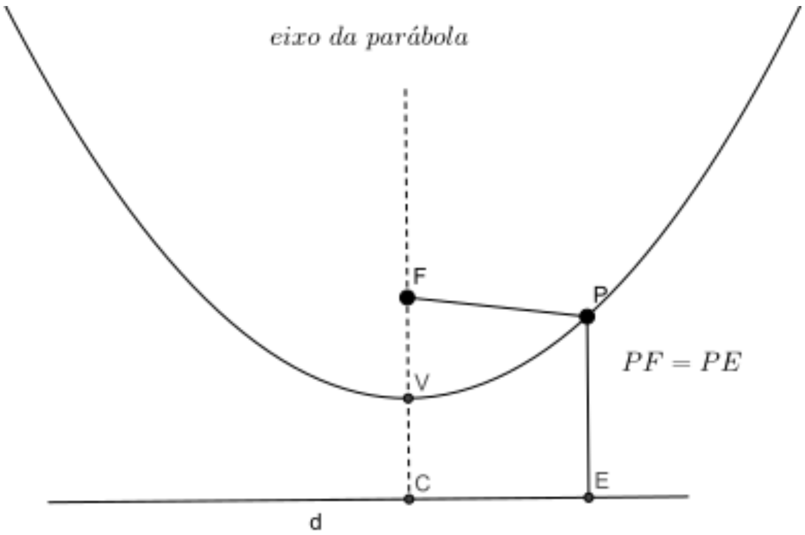


Figura 1.3: Parábola com eixo vertical.

Na figura 1.3 o eixo da parábola é a reta perpendicular a diretriz d que intersecta o vértice V. O vértice é o ponto médio entre o foco F e o ponto C de interseção do eixo da parábola com a diretriz. Os pontos da parábola formam o subconjunto $G \subset \mathbb{R}^2$ com coordenadas $(x, ax^2 + bx + c)$. Ao analisar o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$, se verifica que o seu foco tem coordenadas $\left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ e a diretriz é a reta horizontal $y = -\dfrac{1}{4a}$, caso a parábola tenha eixo vertical. A distância de um ponto $P = (x, ax^2)$ ao foco $F = \left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ é:

$$d(P, F) = \sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2}.$$

A distância do mesmo ponto $P = (x, ax^2)$ à reta $y = -\dfrac{1}{4a}$, pode ser expressa da seguinte forma: $d(P, d) = -\left(ax^2 + \dfrac{1}{4a}\right)$, para tal, basta usar a fórmula $d(P, s) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ que determina a distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta $s : ax + by + c = 0$. Elevando ambas as distâncias ao quadrado se tem:

$$d(P,F)^2 = \left(\sqrt{x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2}\right)^2 = x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2, \text{ e}$$
$$d(P,d)^2 = \left[-\left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)\right]^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2$$

note que vale a seguinte igualdade:

$$x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2 \iff$$
$$x^2 + a^2x^4 - 2ax^2\left(\frac{1}{4a}\right) + \frac{1}{16a^2} = a^2x^4 + 2ax^2\left(\frac{1}{4a}\right) + \frac{1}{16a^2}$$

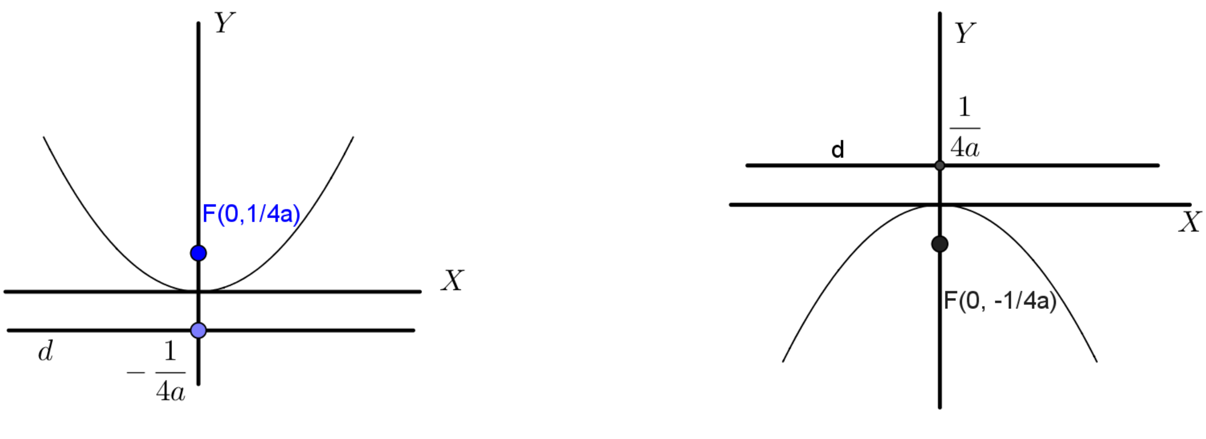
excluindo os termos iguais e somando $2ax^2\left(\frac{1}{4a}\right)$ a ambos os membros da equação, se obtém

$$x^2 = \frac{4ax^2}{4a} \iff x^2 = x^2.$$

Deste modo, qualquer ponto P do gráfico da função $f(x) = ax^2$ está na parábola em análise.

De modo recíproco, ao considerar um ponto $P = (x, y)$ qualquer da parábola e um ponto $P' = (x, ax^2)$ da função f, notando que ambos têm a mesma abscissa x e, neste tipo de curva, não existem pontos distintos com a mesma abscissa, logo $P = P'$. Assim, todo ponto da parábola também pertence ao gráfico de f.

Quando $a > 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ tem concavidade voltada para cima, e caso a seja negativo a concavidade estará voltada para baixo, conforme figura 1.4.



(a) $a > 0$ (b) $a < 0$

Figura 1.4: Concavidade da parábola

Uma análise semelhante pode ser feita com a função $f(x) = a(x-m)^2$, que também se trata de uma parábola com foco $F = \left(m, \dfrac{1}{4a}\right)$ e diretriz $y = \left(-\dfrac{1}{4a}\right)$. Para confirmar isto basta notar que o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ resulta do gráfico de $g(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \longmapsto (x+m, y)$, a qual leva o eixo $x = 0$ no eixo $x = m$.

Diante do exposto é possível concluir que uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = a(x-m)^2 + k$, com $m = \dfrac{b}{2a}$ e $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, é uma parábola com foco $F = \left(m, k + \dfrac{1}{4a}\right)$ e diretriz $y = k - \dfrac{1}{4a}$. Note que o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2 + k$ pode ser obtido com a translação vertical de $(x, y) \mapsto (x, y+k)$ do gráfico $y = a(x-m)^2$, que translada o eixo $y = 0$ para a reta $y = k$, e também leva a reta $y = -\dfrac{1}{4a}$ para a reta $y = k - \dfrac{1}{4a}$.

Como toda função quadrática do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita na forma canônica $f(x) = a\left(x - \dfrac{b}{2a}\right)^2 + k$. Assim, o gráfico de toda função quadrática é uma parábola.

1.6 Objetivos

– Mostrar como é possível transpor didaticamente a teoria das funções afins e quadráticas, usando uma nova ferramenta digital, sem perder seus principais aspectos formais;

– Propor uma abordagem diferente para a teoria sobre funções;

– Apresentar exemplos de situações e interações que possam ser agregadas, por professores da Educação Básica, a qualquer prática de ensino;

– Detectar as transformações do conhecimento e aprendizado de funções matemáticas envolvidas com o uso do Geogebra.

1.7 Metodologia

Não se pretende elaborar atividades específicas com roteiros e sequências didáticas estabelecidas para serem aplicadas em sala de aula. A proposta é fazer uma análise inicial do uso do software Geogebra em sala de aula no estudo de funções afins e quadráticas, buscando esclarecer e discutir aspectos didáticos e que serão considerados relevantes para a construção do aprendizado escolar deste tema.

Será feita uma construção teórica a respeito de funções dentro do ambiente virtual do Geogebra, buscando novos pontos de vista sobre temas importantes como a caracterização de funções afins, a forma canônica da função quadrática e as carcterísticas da parábola.

Capítulo 2

Uso do software Geogebra no estudo de funções afins e quadráticas

O ensino de funções afins e quadráticas permeia por tópicos bem específicos e fundamentais da teoria. Neste capítulo, serão ressaltados estes temas fundamentais, principalmente, os temas considerados difíceis de trabalhar no ensino médio ou fundamental, e propor algumas formas de se usar o Geogebra para facilitar ou potencializar a prática do professor em sala de aula.

2.1 Apresentação do software Geogebra

O software Geogebra[1] é de distribuição livre para usuários não comerciais e foi criado pelo matemático austríaco Markus Hohenwarter em 2001 para ser utilizado em sala de aula. Hoje, o projeto conta com vários colaboradores. A página oficial do projeto Geogebra na internet é *www.geogebra.org*, onde se pode baixar suas versões para IOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux. A instalação é simples, basta baixar a versão desejada, abrir o arquivo e seguir as orientações nas janelas de instalação.

A interface é simples de se usar e, ainda assim, conta com recursos eficientes.

[1]Aglutinação das palavras Geometria e Álgebra.

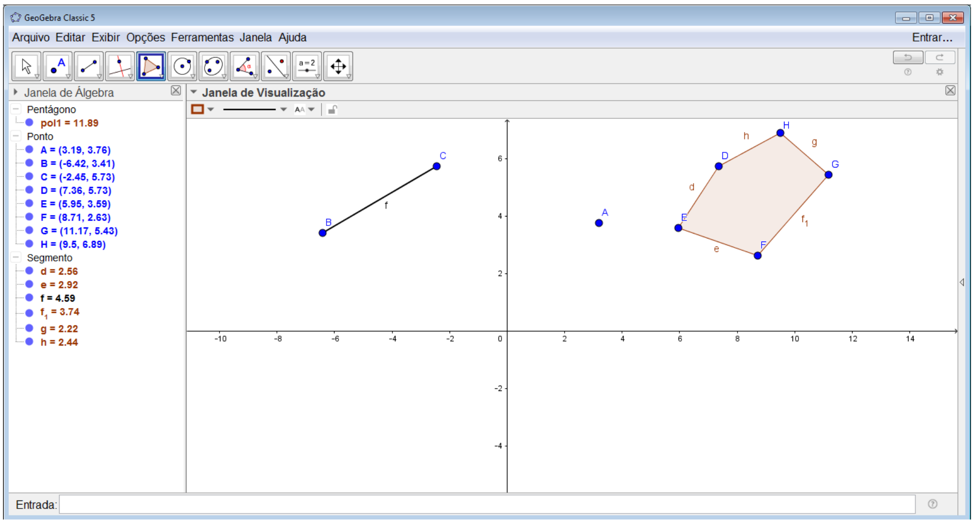


Figura 2.1: Interface inicial do Geogebra.

A interface padrão, apresentada na figura 2.1, exibe uma barra de menus, uma de ferramentas, campo entrada, janela de álgebra e de visualização. Ao se posicionar o cursor sobre qualquer ícone da barra de ferramentas uma descrição da função selecionada é apresentada automaticamente, esta função pode ser alterada ao se clicar no mesmo item, pois uma lista de funções diferentes será exibida.

Para construir um ponto, basta clicar na ferramenta *ponto*, selecionar a função *ponto* e clicar na posição desejada da janela de visualização. Também se pode utilizar o campo *entrada*, ao se digitar $A(2,3)$ neste campo será exibido um ponto A de abscissa 2 e ordenada 3. Caso se digite, no mesmo campo, $f(x) = ax + b$ será perguntado ao usuário se deseja criar os controles deslizantes a e b, em caso afirmativo, será exibido o gráfico de uma função afim e os respectivos controles deslizantes, como pode ser visto na figura 2.2. Percebe-se a possibilidade de inserir coordenadas ou equações diretamente no campo entrada, deste modo se pode vincular variáveis a números, associando uma expressão algébrica com uma representação gráfica.

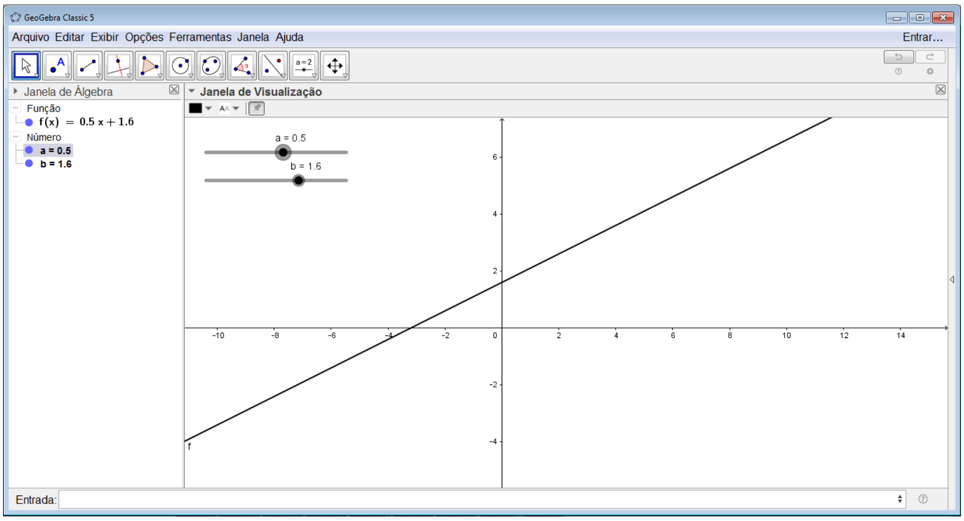


Figura 2.2: Gráfico de uma função afim.

De modo semelhante se pode construir retas, polígonos, ângulos, cônicas e outros objetos de modo geométrico ou analítico.

Como exemplo, segue abaixo, uma descrição do modelo criado para o *Problema 1* da página 25:

- Ao abrir o Geogebra, clique no menu *Exibir* e habilite a janela *Planilha*.

- Nas células $A1$ e $A2$ da planilha escreva, respectivamente, *Tempo (t)* e *Distância (d)*.

- Insira os números de 0 a 8 na coluna A da linha 2 até a linha 10.

- Na célula $B2$ digite $= A2{*}600$, para que a distância seja calculada automaticamente em função do valor inserido na célula $A2$.

- Selecione a célula $B2$ e clique no canto inferior direito, arraste-o até a célula $B10$ para que o comando $= A2 * 600$ seja expandido para todas as células da coluna B.

- Clique na ferramenta *Controle Deslizante* e selecione a função *Controle Deslizante*, em seguida, clique na janela de visualização para posicionar o controle deslizante t, será exibida a janela de configuração do controle deslizante. No campo *Nome* digite t, no campo intervalo no espaço para o valor mínimo de t digite -5 e 5 para o valor máximo. No campo *Incremento* digite 0.1, finalize a configuração clicando em *OK*.

- Selecione todas as células das colunas A e B com valores inseridos, clique na ferramenta *Lista* e selecione a função *Lista de Pontos* para que os pontos conrrespondentes aos valores da planilha sejam criados automaticamente.

- Para alterar a escala do eixo vertical clique na ferramenta *Mover Janela de Visualização*, selecione a função *Mover Janela de Visualização*, posicione o cursor sobre o eixo vertical, clique sobre ele e arraste-o verticalmente ajustando a escala para que todos os pontos construídos sejam visualizados.

- Clique na ferramenta *Controle Deslizante* e selecione a função *Texto*, clique próximo ao eixo das ordenadas, para posicionar o texto *distância d*, se abrirá uma janela de configuração do texto a ser inserido, nesta janela, no espaço *Editar* digite *distância d*, selecione a formatação *Fórmula LaTex* e finalize em *OK*.

- Repita o procedimento anterior para inserir o texto *tempo t* no eixo das abscissas.

- Para configurar o ponto dinâmico basta digitar $(t, 600t)$ no campo *Entrada* e teclar *Enter*.

- Selecione a ferramenta *Reta Perpendicular*, clique sobre o ponto dinâmico e sobre o eixo horizontal, será exibido uma reta perpendicular ao eixo das ordenadas que intersecta o ponto dinâmico. Note que na janela de Álgebra será exibido a expressão algébrica que corresponde a esta reta construída.

- Selecione a ferramenta *Ponto* e clique na interseção da reta perpendicular, criada anteriormente, com o eixo das ordenadas. Na *Janela de Álgebra* desabilite a expressão que corresponde a reta perpendicular, para que a mesma não seja exibida.

- Selecione a ferramenta *Reta* e clique sobre a função *Segmento*, clique no ponto dinâmico e no ponto correspondente a sua ordenada. Mantenha este segmento selecionado e configure seu estilo no campo *Estilo de Linhas*, logo abaixo do título da janela de visualização. Repita este procedimento para criar o ponto correspondente à imagem do ponto dinâmico sobre o eixo das abscissas.

- Clique sobre o ponto das ordenadas do ponto dinâmico com o botão direito e selecione o comando *Propriedades*. Será exibida uma janela de preferências, na guia *Básico* habilite a função *Exibir Rótulo* para exibir os valores das coordenadas deste ponto. Repita esta instrução para o ponto que corresponde a abscissa do ponto dinâmico.

Executadas estas instruções deve-se obter a construção correspondente a figura 2.3.

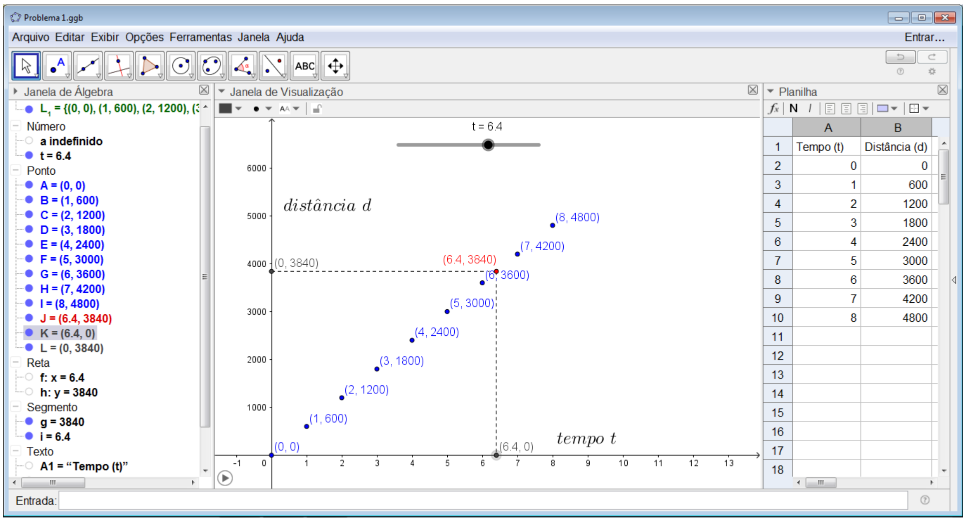


Figura 2.3: Construção do Problema 1.

2.2 O ensino de funções com o software Geogebra

O uso do Geogebra será o principal recurso digital proposto neste trabalho. As atividades, abordagens e práticas aqui sugeridas partem do pressuposto que os alunos já o manusearam suficientemente para terem uma noção básica deste software, ou seja, é sempre necessário estar familiarizado com os recursos elementares do Geogebra.

Conforme apresentado no capítulo anterior, as funções afins e quadráticas são modelos específicos dentre vários que existem. É comum que o professor inicie este tema, primeiramente, abordando suas características e propriedades gerais, utilizando algum contexto preliminar. No decorrer deste capítulo serão abordados alguns destes pontos conceituais considerados importantes para a construção do conhecimento a respeito de funções.

2.2.1 O que uma função faz?

Sempre que o professor introduz o tema função para alunos do último ano do ensino fundamental ou no primeiro ano do ensino médio, é comum propor uma contextualização ou um exemplo que aproxime este assunto da realidade. Nesta tentativa, normalmente, o principal recurso utilizado é a oratória ou o discursso proferido pelo professor, por maior que seja a desenvoltura, a articulação ou o talento deste profissional em atrair a atenção dos alunos, esta forma de iniciar o tema tem seus limites, pois o professor está conduzindo os alunos por uma viagem abstrata em que eles precisam imaginar, em detalhes, tudo que se verbalizou em sua contextualização. Veja este exemplo:

Problema 1: Uma pista de ciclismo tem marcações a cada 600 m. Um ciclista treina para uma prova de velocidade constante. Enquanto isso, seu técnico anota, de minuto em minuto, a distância já percorrida pelo ciclista. O resultado pode ser observado na tabela 2.1[2]:

Tabela 2.1: Relação entre distância e tempo

Instante (min)	Distância (m)
0	0
1	600
2	1200
3	1800
4	2400
5	3000
$\vdots$	$\vdots$

O principal objetivo deste exemplo é ajudar o aluno a perceber que existe uma relação entre *tempo* e *espaço* e, ainda, notar que esta relação segue uma regra em que a $distância = 600 \times tempo$. De fato, este procedimento pode sim contribuir para um primeiro contato produtivo do aluno com o assunto. Neste trabalho, a proposta não é substituir esta prática, e sim, usar o Geogebra como mais um recurso didático.

Analisando o mesmo problema, mas agora fazendo uso de um conceito relativamente novo que é o *pensar com o Geogebra*. Por acreditar ser mais adequado trazer, como primeira atividade uma construção feita previamente, que irá permitir exercitar a interpretação e a vizualização do contexto no ambiente do Geogebra. Como por exemplo, uma animação[3], que corresponde a figura 2.4 a seguir.

[2]Enconte em (Iezzi et al., 2013, p. 36)

[3]Para vizualizar a animação consulte *https://ggbm.at/huUjUP63*.

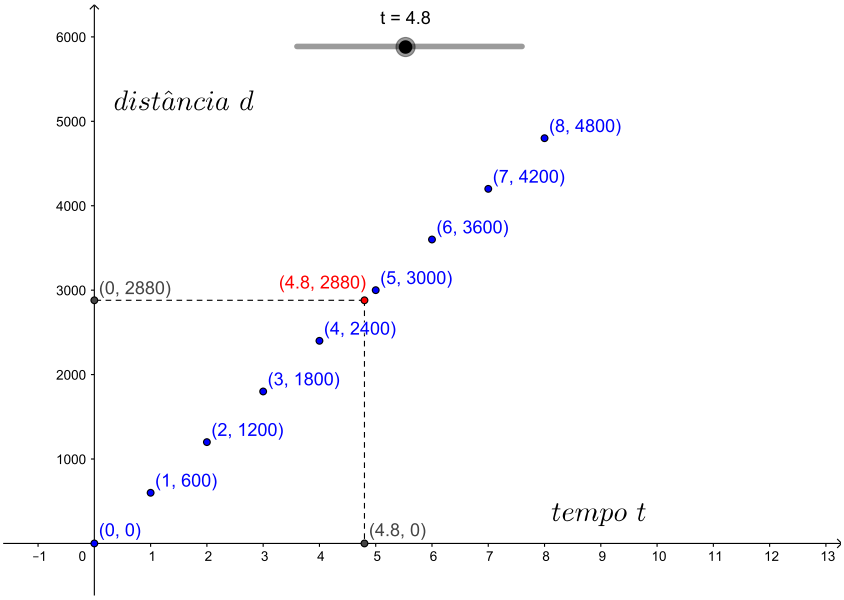


Figura 2.4: A noção intuitiva de função.

Nesta construção estão as principais informações sobre o *Problema 1.* Se pode levantar algumas questões para estimular a interpretação da construção e o amadurecimento do *pensar com o Geogebra* que, simplificando, significa adaptar o exemplo da realidade para o ambiente virtual deste *software* facilitando a compreensão de novos conceitos, veja algumas questões:

a) Quais grandezas estão mais evidentes neste problema?

   Espera-se que o aluno perceba a relação entre tempo e deslocamento seja pela apresentação feita pelo professor ou mesmo pelo gráfico, representadas nos eixos cartesianos.

b) É possível afirmar que este exemplo retrata uma função?

   Retratar uma função significa que para todas as marcações de tempo existem distâncias únicas percorridas pelo atleta, ao arrastar o controle deslizante t o próprio aluno pode perceber que a cada minuto existe uma única distância.

c) A distância depende do tempo do ciclista ou é o tempo que depende da distância?

   Observando a tabela espera-se que o aluno note que os valores de tempo são independentes e que as distâncias são o produto entre 600 e *tempo*.

d) O que as coordenadas dos pontos representam no contexto do problema 1?
Além de representar a relação entre tempo e distância, esta questão contribui diretamente para a compreensão da modelagem através deste software, ou seja, ajuda a visualização da ideia de relação entre grandezas em três linguagens ou ambientes: no contexto real, em tabelas e em gráficos.

e) Comente o significado do ponto em movimento e de suas coordenadas.
Além de notar a relação entre $(tempo, distância)$ o mais interessante é pensar como programar o Geogebra para exibir os valores de suas coordenadas.

Vale a pena notar que o Geogebra permite a exportação no formato de animação, que possibilita, por exemplo, compartilhamentos em redes sociais ou em grupos de mensagens, disponibilizando ao professor várias opções didáticas, que poderia enviar a animação aos alunos com antecedência, como uma atividade para ser feita em casa e, na aula em si, os esforços se concentrariam na discussão e interpretação da animação.

Voltando ao assunto principal desta seção, que destaca a importância de compreender o que uma função faz, se pode abordar o Geogebra como um recurso construtivo no qual os próprios alunos modelariam o problema 1, para isso é necessário uma noção básica dos recursos e ferramentas deste *software*. A construção poderia ter como roteiro os seguintes procedimentos:

1. Identificar as grandezas envolvidas no exemplo e interpretar os dados na tabela, que possam ser inseridos como planilha ou diretamente como coordenadas cartesianas.

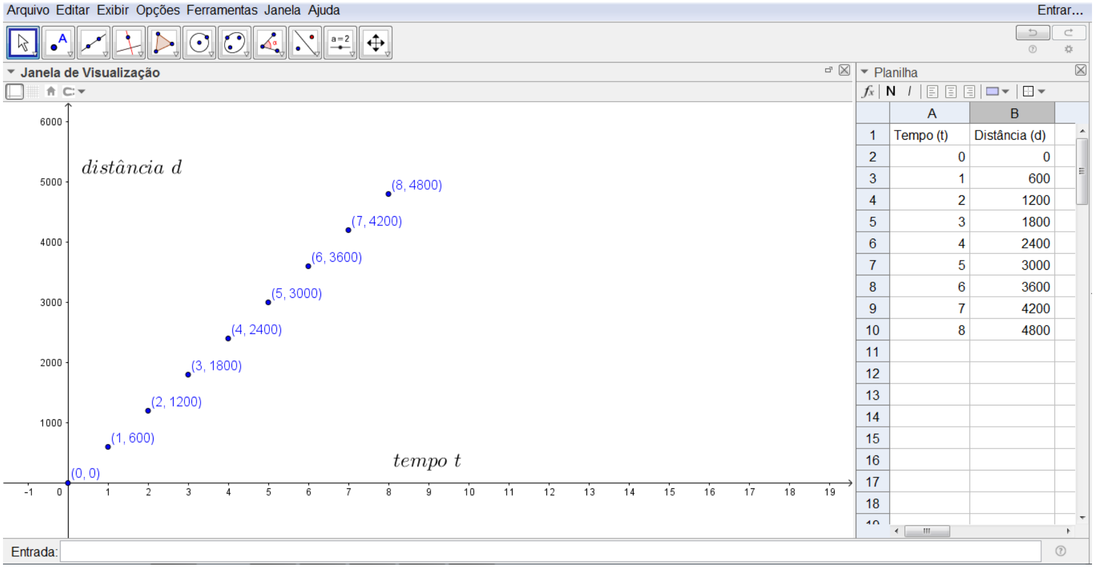


Figura 2.5: Etapa 1 da construção do problema.

Para inserir os pontos mediante suas coordenadas, conforme figura 2.5, os alunos precisam decidir quais grandezas correspondem ao eixo das abscissas e das ordenadas, ou seja, compreender quem depende de quem. Para esclarecer a relação de dependência é preciso relembrar o que uma função faz: Ela relaciona os elementos de um conjunto com outro, ela transforma os elementos de um conjunto em elementos de um outro conjunto. Sendo assim, existe uma ordem, ou seja, um *domínio* no qual tudo começa e o *contradomínio* em que a função finaliza seu processo de transformar, levar ou associar. A partir do momento em que o cronômetro foi acionado e o ciclista imprime uma velocidade constante, fica fácil perceber que o tempo é a variável independente que pertence ao *domínio* e a distância ao *contradomínio*, pois o treinador aguarda a passagem do tempo para anotar a distância percorrida e não o contrário.

Na planilha o aluno insere os tempos na coluna tempo e na coluna distância ele pode inserir o comando $= A3 \cdot 600$ e expandí-lo para todos os tempos inseridos, indicando que o valor da distância é o resultado do produto entre *tempo t* e 600. Usando o recurso *Lista de Pontos* são criados os pontos automaticamente, basta selecionar todos os pares de tempo e distância e clicar em *Lista de Pontos*, deste modo, alterando o valor da planilha altera-se, simultaneamente, a localização do ponto no plano cartesiano.

2. Verificar se esta relação está de acordo com a definição de função.

Se deve criar o controle deslizante t no menu controle deslizante. Nomeie como controle t com valor mínimo de zero e máximo de 10. Para vizualisar se todo valor de tempo no intervalo de 10 minutos corresponde a uma única distância percorrida de 0 a 6000 m, basta arrastar o controle deslizante t para perceber que cada tempo gasto corresponde a uma única distância percorrida, deste modo se tem um exemplo de função, cuja regra é aumentar o valor do tempo em 600 vezes, ou seja, $d = 600t$.

2.2.2 Compreender a estrutura básica da função: domínio, contradomínio e regra de associação

Ao iniciar a animação e observar o ponto em movimento e suas coordenadas, o estudante tem a oportunidade de perceber que existem vários outros tempos e distâncias que não foram coletados pelo treinador. A quantidade de tempos e distâncias não registrados na tabela ou na forma de pares ordenados, o que ajuda a notar que existem infinitos valores para o domínio e para o conjunto imagem. Para facilitar essa conclusão por parte do aluno, basta habilitar o rastro do ponto em movimento e de seus respectivos pontos sobre o eixo horizontal e vertical, fazendo assim, será possível intuir que existe uma infinidade de outros pontos no plano cartesiano.

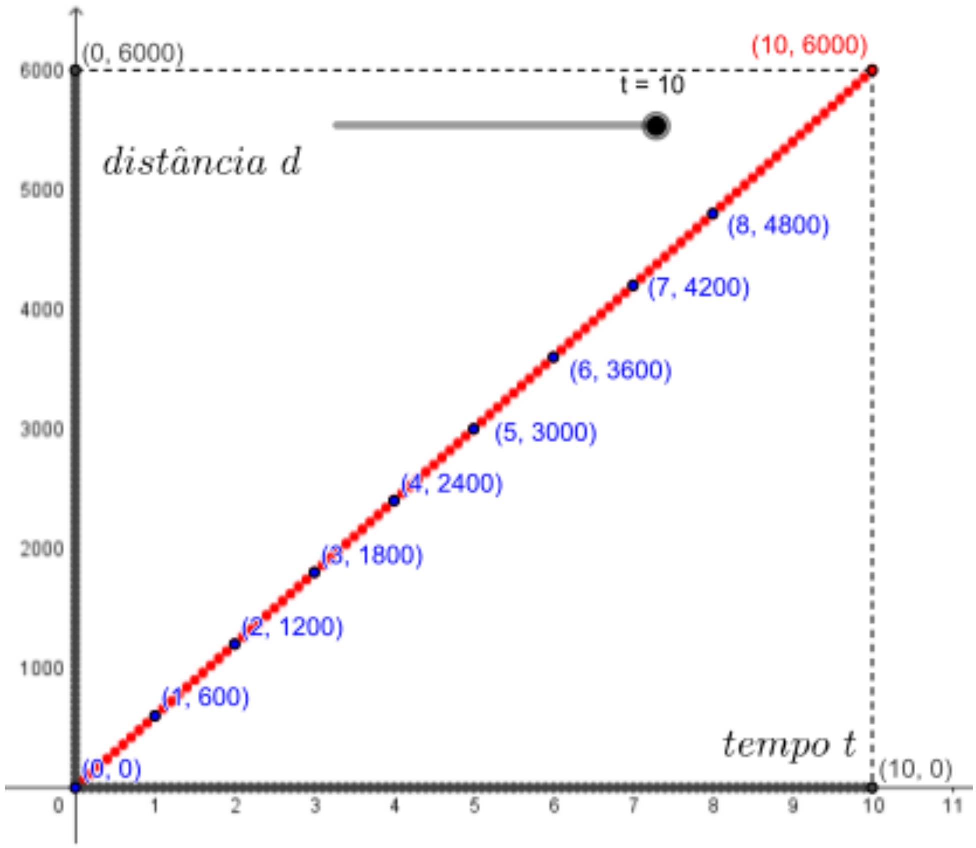


Figura 2.6: Vizualização intuitiva do domínio e imagem de uma função

Na figura 2.6 foi considerado um intervalo de 10 minutos para o domínio e o conjunto imagem formado pelos valores percorridos pelo ciclista de 0 a 6000m, ambos em destaque devido ao rastro deixado pela animação. Neste exemplo, assumiu-se que o contradomínio e a imagem têm os mesmos elementos.

O mais delicado e importante item na construção teórica de funções está no entendimento de seu padrão. Ao construir o modelo virtual, o aluno pode perceber este padrão, por exemplo, ao manusear e preencher a planilha usando o comando $= A3 * 600$ ou na programação das coordenadas do ponto móvel, que deve ser $(t, 600t)$, para isto é necessário uma maturidade algébrica do estudante, pois a primeria coordenada é independente e representa um certo intervalo de tempo, não há um valor fixo para t. A segunda coordenada, dependente de t, é a chave para o entendimento da regra de associação, pois se não digitar $600t$ a animação não trabalhará corretamente, mostrando se o aluno está construindo corretamente (ou não) o seu modelo virtual, dando a ele mais autonomia em seu aprendizado.

2.3 Função afim

O modelo de função afim é um dos mais próximos da realidade do estudante, será feita a modelagem com base no clássico problema do táxi.

Problema 2: Considere uma corrida de 10 km de distância. O valor cobrado pelo taxista é composto por uma parte fixa de R$ 6,00 e uma taxa de R$ 3,50 por quilômetro rodado. Será desconsiderado o tempo em que o táxi possa ficar parado por eventuais congestionamentos.

Em uma corrida de 10 km o custo é de $10 \cdot 3,50 + 6 = 41,00$, este procedimento pode ser repetido para outras distâncias, a tabela 2.2 a seguir apresenta alguns destes valores.

Tabela 2.2: Relação entre distância e custo

Distância (km)	Custo (R$)
0	6
1	9.5
2	13
3	16.5
4	20
5	23.5
6	27
$\vdots$	$\vdots$

Este exemplo será abordado de modo mais construtivo e usará o Geogebra como uma laboratório virtual. Após a interpretação do contexto é melhor começar com a construção da planilha e dos pontos no plano cartesiano. Como a distância d é a variável independente se pode construir também o controle deslizante d oscilando de 0 até 10.

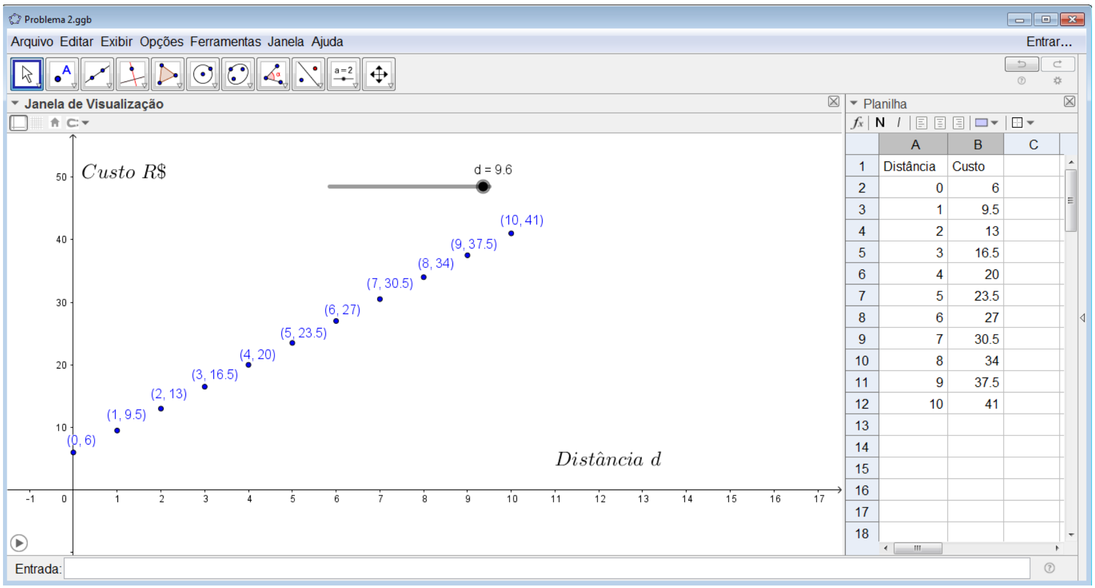


Figura 2.7: Inserindo dados iniciais para o problema.

Espera-se que, ao calcular os primeiros valores do custo, o aluno compreenda a regra de associação, para que da forma mais natural possível o comando $= célula * 3,5 + 6$ possa ser assimilado. Na planilha da figura 2.7 os dados da coluna *Custo* podem ser inseridos com o uso de fórmulas comuns em planilhas, neste caso ao digitar na célula $B2$ o comando $= A2 * 3.5 + 6$ a planilha definirá o valor de $B2$ como 6. No canto inferior direito da célula $B2$, ao arrastar para as outras células este mesmo comando, se ganha praticidade e tempo.

Neste ponto, espera-se que o estudante tenha identificado a estrutura básica da função. O conjunto domínio, formado pelas distâncias percorridas, o contradomínio, formado pelo números reais positivos e a regra de associação que pode ser expressa como $c = 3,5d + 6$. Como o domínio possui, teoricamente, infinitos valores positivos, é interessante levantar a seguinte questão: Como observar a função atuando sobre todo o domínio? É possível observar a função trabalhando para outros valores do domínio e não apenas para aqueles tabulados. O controle deslizante d representa justamente os valores do domínio. Assim, é possível usá-lo para um ponto do plano cartesiano. Programar este ponto pode levar o aluno a entender melhor a construção gráfica e algébrica da função afim, pensando simplesmente em como seriam as coordenadas deste ponto dinâmico.

Aqui está uma das características mais atraentes do Geogebra, pois é possível programar este ponto de forma intuitiva, basta digitar aquilo que se deseja que o programa faça com o ponto no plano cartesiano, ou seja, como ele deverá ser exibido. Digitando apenas $(d, 3.5 * d + 6)$ no campo entrada. A primeira coordenada d é a distância da corrida do táxi e a segunda coordenada é a transformação que a função fará sobre o valor de d como em qualquer outro ponto que se desejar inserir no plano cartesiano. Para os professores talvez esta construção seja bem trivial, mas para o aluno não. Compreender que cada ponto representado no gráfico, é consequência da função atuando sobre o domínio e contradomínio, é um dos desafios enfrentados pelo professor em sala de aula, desafio este que se torna bem menos árduo com este ambiente virtual proposto pelo Geogebra.

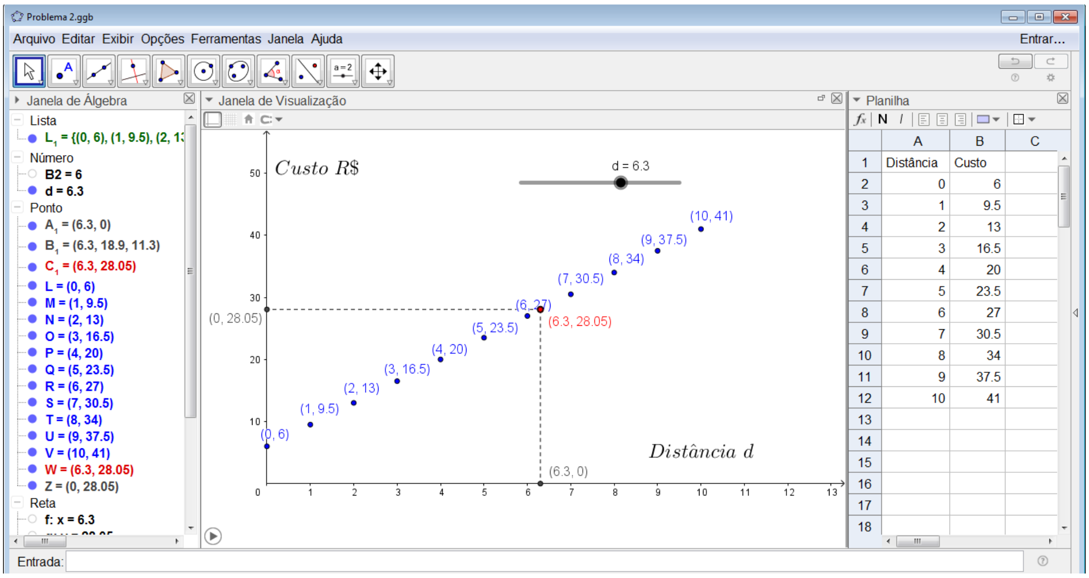


Figura 2.8: Expandindo a regra da função.

Na figura 2.8 o ponto com linhas tracejadas foi programado conforme explicado anteriormente, daí se inicia a animação[4] que mostra, de modo dinâmico, a relação entre distância e custo convergindo as três linguagens usadas no Geogebra: a tabela, o gráfico e a construção algébrica usada pelo programa.

Uma das características mais marcantes da função afim é a sua representação algébrica, que é bem definida, pois toda função afim tem a forma de $f(x) = ax + b$ com a e b reais, com domínio e contradominio também reais. Agora, será feita uma discussão sobre os coeficientes a e b sob o ponto de vista do *software*.

[4]Para ver esta animação consulte *https://ggbm.at/U5gkq9Nx*

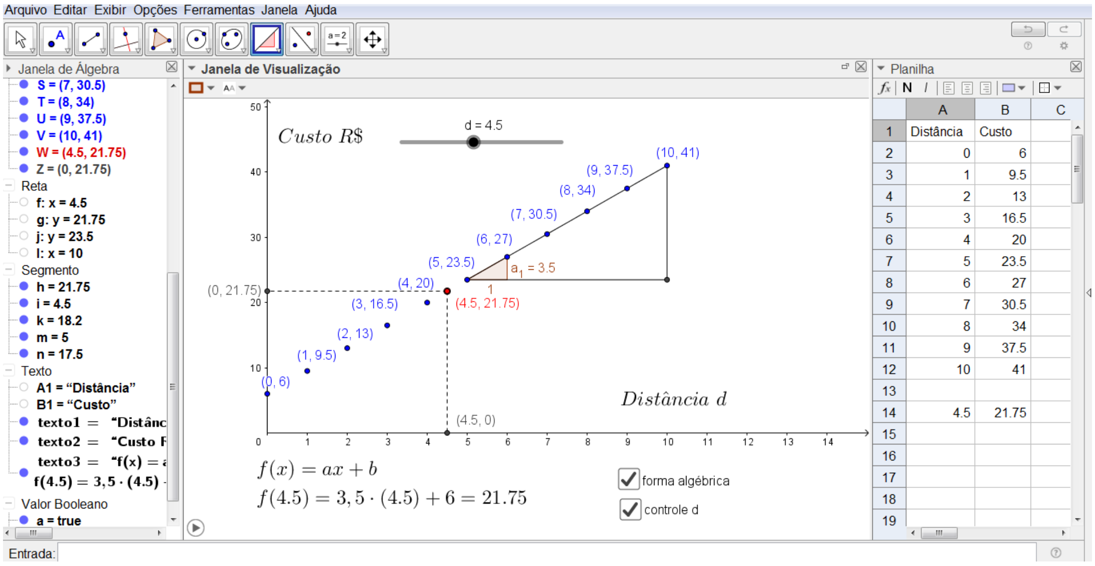


Figura 2.9: Analisando a expressão algébrica da função afim

Como interpretar o coeficiente b na animação? Primeiramente, analisando a expressão algébrica $f(x) = ax+b$ da função afim, em que se observa claramente o coeficente b, mas o que ele significa na animação? Ao arrastar o controle deslizante d para a posição $d = 0$ se percebe que a expressão será $f(0) = 3,5 \cdot 0 + 6 = 6 \Longrightarrow f(0) = 6$, ou seja, a função terá valor b quando $x = 0$. Note que para este caso o coeficiente a não interfere no resultado 6, pois o coeficiente a foi anulado, assim 6 equivale ao valor de b, logo o ponto da animação mostrará o que o coeficiente b representa, ou seja, o ponto no qual a reta intersecta o eixo das ordenadas. Ao abordar o gráfico da função afim serão apresentados outros pontos de vista sobre o coeficiente b.

Da mesma forma, é possível observar de modo bem simples o valor do coeficiente a, que representa o valor da tangente do ângulo em destaque na figura 2.9, usando a ferramenta *inclinação* e clicando no segmento que se deseja saber a inclinação se pode visualizar o valor que confirmará o coeficiente a da expressão algébrica. Claro que o professor não pode deixar de abordar o coeficiente a também sob ponto de vista algébrico como exposto no capitulo 1, pois o conceito de tangente é muito importante neste momento.

2.3.1 O gráfico da função afim

Uma abordagem pouco executada em sala de aula é a prova de que o gráfico da função afim é uma reta. No capítulo 1 foi descrita uma prova algébrica que se baseia nas três distâncias de três pontos de uma função afim. Aqui, começe por considerar uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = ax + b$ sendo a e b reais. As coordenadas de um ponto qualquer P seriam $P = (x, ax + b)$, para visualizar e manipular uma construção no Geogebra, que pelo menos seja um elo entre a prática e a álgebra, são necessários três pontos quaisquer, sejam eles $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ com controles deslizantes a, b, x_1, x_2 e x_3.

Ao configurar um ponto genérico com as características de uma função afim o *software* permite que se manipule estes pontos dentro de um intervalo limitado de alguns números racionais para que se perceba que o alinhamento é sempre mantido. Claro que é apenas uma visualização, não vale como prova, porém é um bom auxílio para que a prova algébrica ganhe mais significado e um peso realista.

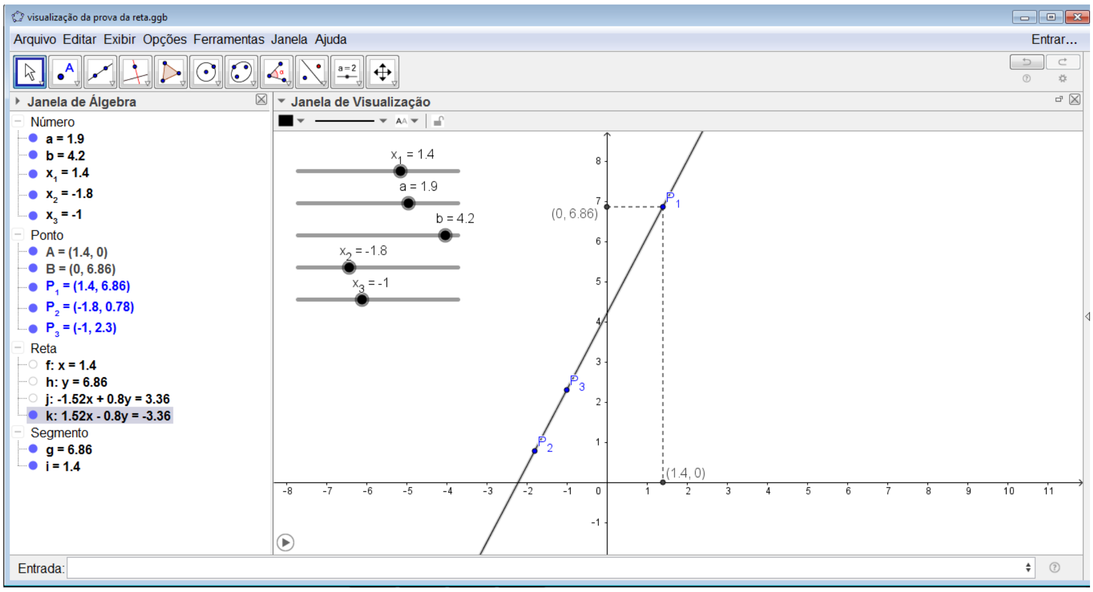


Figura 2.10: Visualização de 3 pontos quaisquer de uma reta.

O ponto chave desta construção está na configuração dos pontos P_1, P_2 e P_3, ou seja, perceber que $(x, f(x))$ corresponde a todos os pontos do gráfico de todas as funções afins.

As definições de função afim crescente, decrescente e constante também podem ser manipuladas e observadas de modo bem simples e prático, observe a figura 2.11 a seguir:

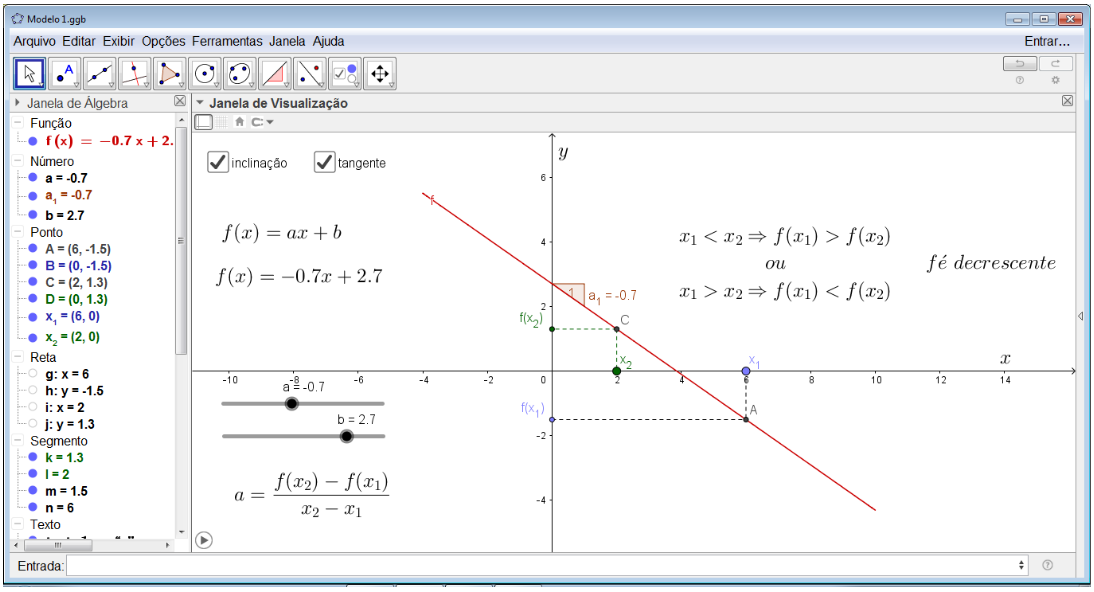


Figura 2.11: Características do gráfico da função afim.

Na figura 2.11[5] a função f está com seu domínio limitado ao intervalo $[-4, 10]$ e contradomínio formado pelos reais. Há dois controles deslizantes, a e b para alterar a função à vontade. No canto superior esquerdo encontram-se outros dois botões que exibem ou ocultam a inclinação e ainda se tem a exibição do cálculo da inclinação $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Logo abaixo, é exibida a forma algébrica que se altera de acordo com os controles deslizantes e, do lado direito, pode ser observado as definições formais de função crescente e decrescente. Foram inseridos dois pontos quaisquer A e C, respectivamente, com coordenadas $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ na reta da função para ajudar a interpretar as definições de função crescente ou decrescente.

Ao arrastar os controles deslizantes, a definição de crescente e decrescente exibida se altera de acordo com o valor escolhido no controle deslizante a, se $a > 0$ se tem uma função crescente e se $a < 0$ a função é descrescente e o aluno ainda pode tentar compreender a ligação do valor negativo do coeficiente a com a declividade da reta, aliás esta é uma boa questão para esta construção, ou seja, entender como o sinal de a é construído ou calculado e como as coordenadas de A e C interferem neste cálculo, para tanto basta observar os valores das coordenadas de A e C e o que elas provocam na razão $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Na figura 2.11 o numerador será positivo mas o denominador é negativo, pois $x_2 < x_1$, logo o coeficiente a será negativo.

Observe que nesta última construção se pode compreender melhor o significado

[5]Consulte *https://ggbm.at/PQFBWKtw* para manipular a construção.

do coeficiente b ao arrastar seu controle deslizante, ou seja, é nítido que o coeficiente b é o ponto de interseção com o eixo das ordenadas. Uma outra observação relevante com relação ao coeficiente a que pode ser notada é o fato que o triângulo usado para indicar o coeficiente angular possui duas medidas em seus catetos. Numa delas é a unidade e no outro se tem o valor do coeficiente a, em que se mostra cada unidade do dominio corresponde ao coeficiente a na imagem. Por exemplo, caso o coeficiente a seja 2, isto significa que sempre que o domínio varia 1 unidade a imagem varia em 2 unidades.

2.3.2 Caracterização da função afim

Caracterizar uma função significa compreender certas características que se enquadram perfeitamente naquele modelo observado. No caso da função afim não é coerente usar apenas a expressão algébrica para convencer os alunos de que se está lidando com este tipo de função, pois não se deve esquecer que as funções são modelos matemáticos que retratam a realidade e o cotidiano não se revela por expressões algébricas e sim por padrões e proporcionalidades. É importante saber qual é a característica principal da função afim.

De acordo com o teorema exposto no capítulo 1, seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x + h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, entãof é uma função afim.

No Geogebra se pode facilitar a interpretação deste teorema, ao manipular os valores de h acrescidos ao valor de x, e a diferença entre as imagens $f(x)$ e $f(x + h)$ denominada $\varphi(h)$ para compreender que $\varphi(h)$ não depende de x.

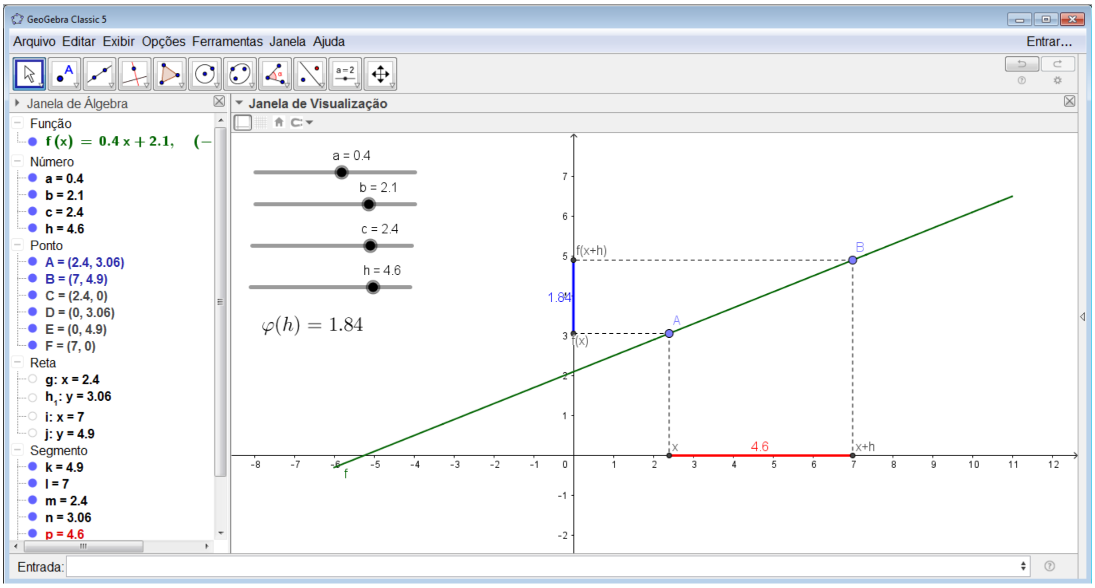


Figura 2.12: Característica principal da função afim.

Observe que na figura 2.12[6] se tem dois pontos no domínio, x e $x+h$, com suas respectivas imagens $f(x)$ e $f(x+h)$. Os controles deslizantes a e b permitem que se altere a função afim. O controle c altera o valor da abscissa x, obviamente, o controle deslizante h permite a variação da distância entre x e $x+h$, o importante é notar que mantendo h constante e alterando o valor de x com o controle deslizante c o valor de $\varphi(h)$ não se altera, ou seja, $\varphi(h)$ não depende de x, mas sim de h.

Esta construção pode ser usada para facilitar a interpretação do teorema da caracterização da função afim, abordado no capítulo anterior. Pois, permite perceber que acréscimos iguais ao domínio provoca acréscimos iguais no contradomínio. No contexto do problema 2, sobre o táxi, se pode dizer que, em uma corrida de dez quilômetros não importa o local de origem e o destino do usuário, e sim a distância de dez quilômetros percorrida, ou seja, o custo não depende da origem nem do local onde o trajeto termina, depende apenas da distância entre eles, isto significa que o modelo matemático para este contexto é de uma função afim.

Talvez, o professor julgue inadequado abordar o teorema da caracterização da função afim para uma determinada turma de alunos, no entanto, pode ser possível apresentar esta construção para que os alunos tenham algum contato mínimo com o rigor existente em toda teoria matemática. Ao abordar esta contrução, pode ser possível perguntar aos alunos se determinado contexto ou fenômeno observado condiz com o modelo

[6] Para manipular a contrução visite: *https://ggbm.at/gPUc9fjE*

de uma função afim. Por exemplo, no problema 1, no qual o ciclista tem seus tempos registrados a cada minuto, se podería perguntar: A distância percorrida depende da localização inicial e final do ciclista? Lembrando que a velocidade é constante. A resposta é não. Depende apenas do intervalo entre a marcação inicial e final, ou seja, depende apenas do acréscimo e não da posição. Logo, este problema pode ser modelado por uma função afim.

Todas estas reflexões só são possíveis graças aos recursos dinâmicos do Geogebra, que podem ser explorados de várias formas. Aqui se tenta mostrar que, seja qual for o modo de utilizar este programa, é necessário que seu uso seja relevante para o aprendizado matemático.

2.4 Função quadrática

Nesta abordagem, se pretende trazer este assunto para um nível mais concreto e prático. Os livros escolares quase sempre introduzem as funções quadráticas apresentando algumas situações reais que recaiam neste tema. Aqui serão exploradas situações práticas no ambiente virtual do Geogebra sempre agregando significados e recursos que possam potencializar a prática educativa na escola, com foco especial para os temas considerados difíceis como, por exemplo, a forma canônica e seus desdobramentos e a construção da parábola.

2.4.1 Situações em que se observa a função quadrática

Os polígonos convexos são um bom exemplo para se começar, ver figura 2.13 . Suas diagonais d tem uma estreita relação com o número de lados n.

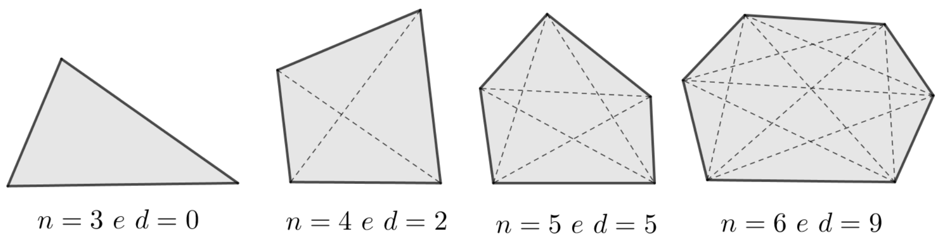


Figura 2.13: Relação entre os lados e as diagonais dos polígonos convexos

Um polígono com n lados tem n vértices e de cada vértice partem $(n-3)$ diagonais, logo o produto $n \cdot (n-3)$ revela o número de diagonais mas, por exemplo, a diagonal AB é a mesma que BA, assim, se deve dividir por dois para corrigir esta contagem dobrada. Então o número de diagonais $d = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2} = \dfrac{n^2}{2} - \dfrac{3n}{2}$.

Nos fenômenos físicos como o movimento uniformemente variado, ou seja, corpos com aceleração constante que provocam uma variação uniforme na velocidade, como por exemplo, um objeto em queda livre, considerando como *livre* uma queda com influência apenas da gravidade. Nesta situação, a gravidade tem a função de acelerar a queda de modo constante, então a cada segundo de queda a velocidade está maior e o móvel percorre distâncias cada vez maiores, a relação entre a distância percorrida e o tempo é retratada por uma função quadrática. Nos livros de Física do ensino médio, a equação $S = S_0 + V_0 t + \dfrac{gt^2}{2}$ relaciona a posição final S com o tempo t.

No caso de um objeto abandonado em queda livre a velocidade inicial $V_0 = 0$ e a posição inicial S_0 também pode ser considerada zero, então nestas condições a equação se reduz a $S = \dfrac{gt^2}{2}$. Nesta equação g e S representam, respectivamente, a aceleração da gravidade e o deslocamento. No estudo de análise combinatória se tem o exemplo do número de partidas para uma certa quantidade de times. Por exemplo, no caso de 3 times A, B e C o número de partidas é 3, pois se tem AxB, AxC e BxC, estes são os jogos de ida, como se deve contar também os jogos de volta, ou seja, cada equipe joga duas vezes com todas a equipes, o total é o dobro com 6 partidas. Da análise combinatória se sabe que a combinação de n times dois a dois é $C_n^2 = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n^2 - n}{2}$, lembrando que se deve dobrar, assim o número de partidas é $2 \cdot \dfrac{n^2 - n}{2} = n^2 - n$, que pode ser usado para formar uma regra de associação do tipo $f(n) = n^2 - n$, em que n representa o número de times e $f(n)$ o total de partidas, de ida e volta, de um campeonato.

Com estes exemplos, nota-se que para contextualizar a função quadrática é preciso interpretar situações menos comuns do que nas funções afins. É possível enriquecer este processo de interpretação com o uso do ambiente virtual do Geogebra.

2.4.2 Definição e observações iniciais

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* quando são dados números reais a, b, c com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pela definição se percebe que existe uma estreita relação entre o trinômio do segundo grau e a função quadrática. Historicamente, se sabe que o estudo das funções quadráticas iniciou-se com problemas envolvendo equações do segundo grau. O professor pode, através da resolução de problemas, apresentar ou propiciar interações que facilitem a construção e compreensão de aspectos teóricos de funções quadráticas.

O clássico problema de determinar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p é um bom exemplo para se começar. Seja x um destes números, logo $(s - x)$ é o outro número. Deste modo $p = x(s - x) \Rightarrow p = -x^2 + sx \Rightarrow x^2 - sx + p = 0$. Pela definição de função quadrática, o trinômio $x^2 - sx + p$ pode ser usado para compor uma função, na qual, $f(x) = x^2 - sx + p$ com coeficientes $a = 1, b = -s$ e $c = p$. Determinar x e, consequentemente, $(s - x)$ é encontrar os valores de x que fazem $f(x) = 0$. Pode-se considerar muito conveniente que o primeiro objetivo didático do professor seja provocar nos alunos essa conexão, entre trinômios e funções quadráticas.

Para compreender a função não se pode desassociá-la do trinômio. Assim, para encontrar os números x e $(s - x)$ é necessário encontrar as raízes da função $f(x) = x^2 - sx + p$.

Problema 3: O software Geogebra permite uma visualização muito útil para o problema de encontrar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p. Usando a função $f(x) = x^2 - sx + p$ e criando os controles deslizantes s e p se propicia aos alunos uma vizualização[7] e interação difícil de se ver sem essa tecnologia.

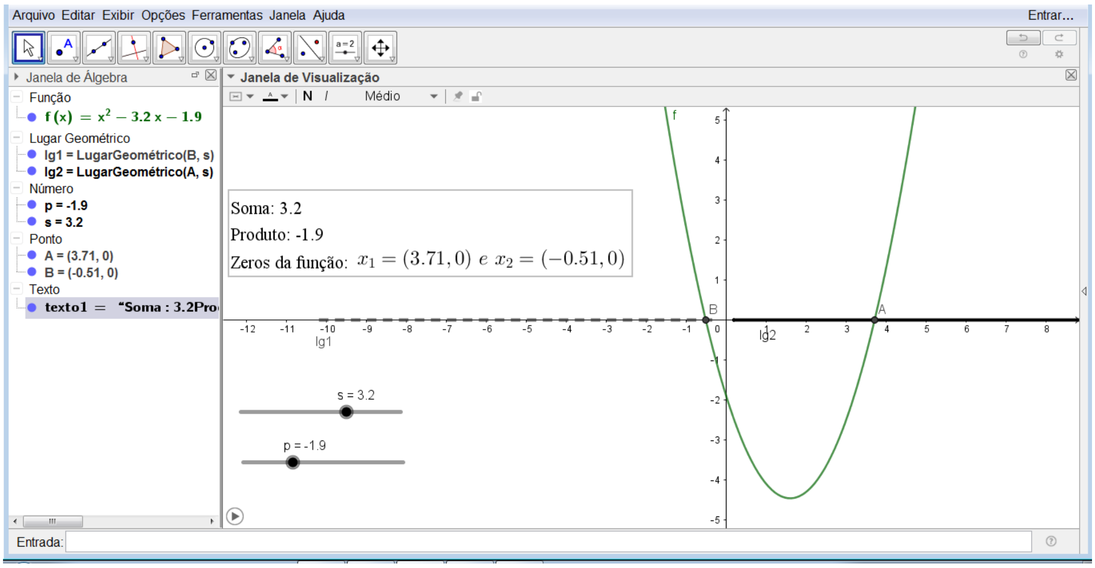


Figura 2.14: Relacionando os zeros da função quadrática com a soma e o produto de dois números.

[7]Para vizualizar e manipular a construção consulte *https://ggbm.at/WujHDZY5*

A figura 2.14 mostra o gráfico da função, que logo mais será discutido em profundidade, os pontos de interseção da parábola com o eixo das abscissas, os valores da soma e produto, os zeros da função, os controles deslizantes s e p que representam a soma e produto, respectivamente, e ainda, os lugares geométricos (lg) sobre o eixo x. Nas funções afins foram trabalhados os conceitos básicos de interpretação de gráficos, então não há maiores problemas ou dificuldades para os alunos lidarem com a parábola. Ao iniciar a animação dos controles deslizantes, é possível visualizar os zeros da função instantaneamente.

Esta construção caminha paralelamente com os aspectos algébricos do problema e permite que os alunos manipulem suas características, possibilitando vários questionamentos, tais como:

(i) Quais são as diferenças ao se comparar com a função afim? Espera-se que os alunos percebam que a principal diferança é a forma do gráfico e a expresão algébrica que o representa.

(ii) Quais movimentos são feitos pelo gráfico ao deslizar, separadamente, cada controle deslizante?
Fixando p e movendo s o gráfico faz um movimento "curvo" e ao mover p, com s fixo, o gráfico sobe e desce verticalmente, pois alterar p provoca acréscimos ou descontos em $f(x)$, basta observar a expressão algébrica para f na janela de álgebra.

(iii) Qual a relação dos pontos A e B com as linhas contínua e tracejada sobre o eixo x?
As linhas representam todos os lugares possíveis para A e B, ou seja, representam os lugares geométricos para os zeros da função.

(iv) Como ver os valores dos números que foram usados na soma e produto? Por quê?
A intenção desta questão é perceber se o aluno compreendeu que as abscissas de A e B são os números procurados, basta somá-los e multiplicá-los e verificar que correspondem aos valores de s e p.

(v) Para toda soma e todo produto existem dois números reais que as satisfazem?
Não. Acionando os controles deslizantes se percebe que nem sempre existem os zeros da função quadrática.

Do mesmo modo que nos problemas anteriores, o professor pode expor para suas turmas a construção já pronta e estimular sua interpretação, como também é possível que os própios estudantes construam esta animação. Como sugestão, é feito o seguinte roteiro:

Etapa 1: Inserir a expressão $f(x) = x^2 - sx + p$ no campo entrada. O programa perguntará se deseja criar os controles deslizantes s e p. Clique em Criar Controle deslizante, será exibida uma janela conforme a figura 2.15.

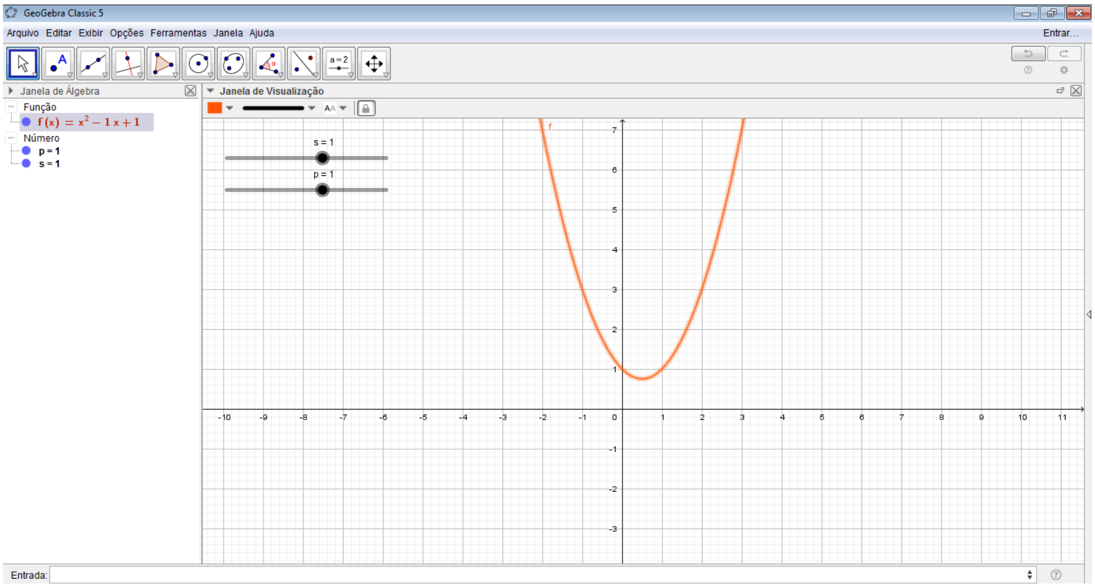


Figura 2.15: Iniciando a construção.

Após esta construção inicial já se pode abordar as questões (i) e (ii) para estimular interações de aprendizado. No item (ii), como ter certeza de que o movimento é vertical? Como verificar esse movimento geometricamente?

Basta construir uma perpendicular ao eixo das abscissas que intersecte a parábola. Neste ponto de interseção insira um ponto usando a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* e habilite o rótulo para indicar os valores dos pontos, ou seja, suas coordenadas com abscissa fixa, conforme figura 2.16.

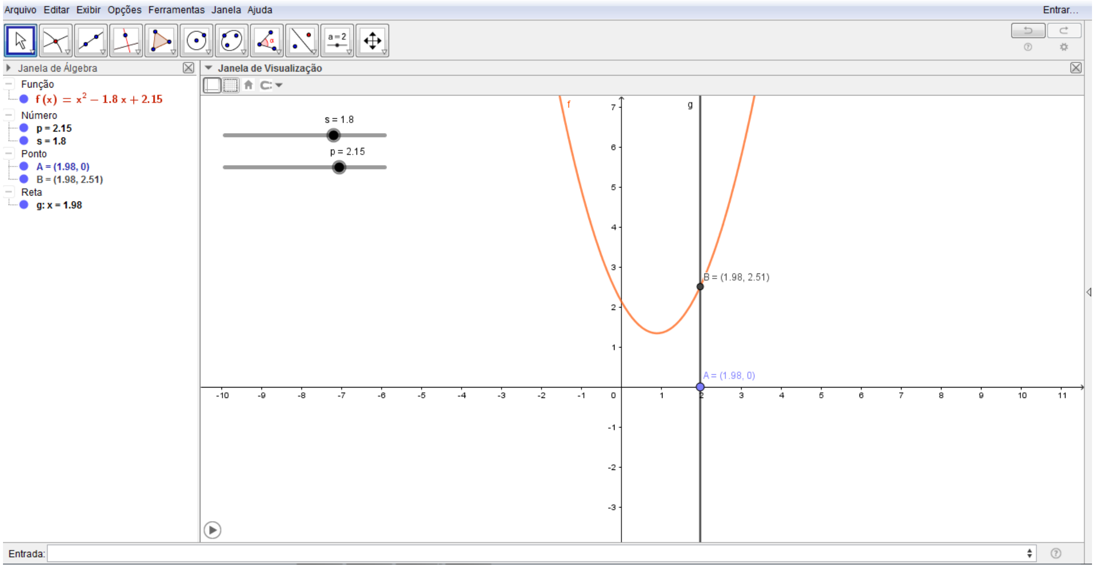


Figura 2.16: Verificação do movimento vertical

Etapa 2: Encontrar os pontos que fazem $f(x) = 0$. Já deve ser de conhecimento do estudante que a interceção do gráfico com o eixo das abscissas corresponde aos zeros da função. Para construir esses pontos basta utilizar a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* e, em seguida, clicar nas interseções. Sobre o item (iii) se pode perguntar se existe alguma relação entre os valores de s e p e os zeros da função. Com a ferramenta *Lugar Geométrico* se pode destacar as posições dos zeros da função de acordo com as oscilações de s e p.

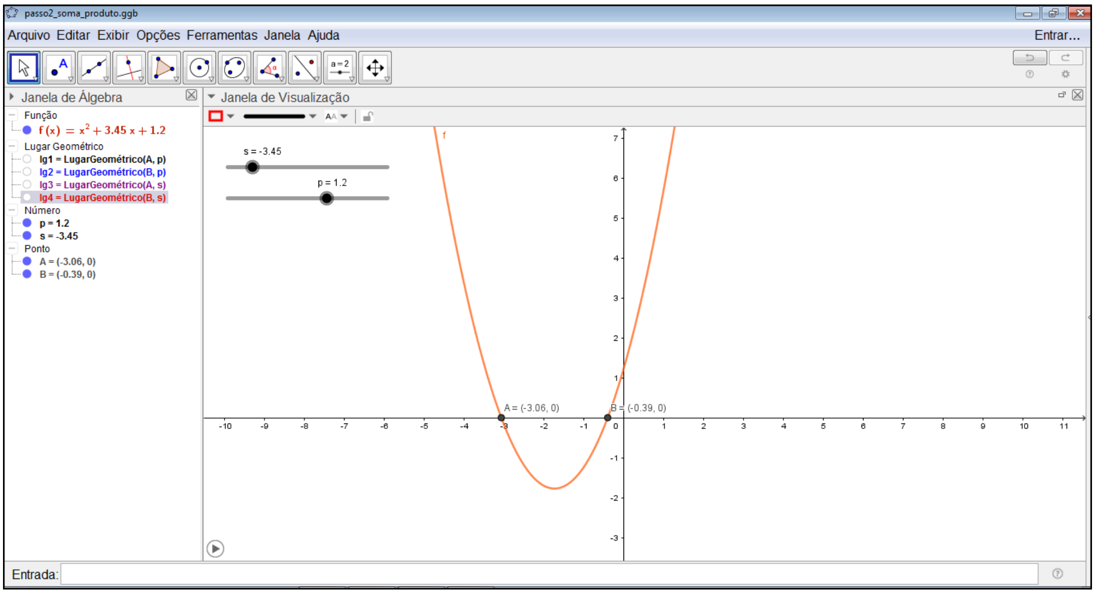


Figura 2.17: Relacionando os zeros da função com os valores de s e p.

Na figura 2.17 observe a janela de álgebra na qual estão quatro lugares geométricos, com a sigla (lg), cada um deles representa um lugar geométrico criado, associando os zeros A e B com os valores de s e p. À esquerda dos lugares geométricos estão os botões para ativar e, assim, visualizar cada um deles. Por exemplo, ao habilitar $lg1$, ver figura 2.18, e manter fixo o valor de s, ao alterar o valor de p é possível perceber em destaque os possíveis lugares para o ponto A. O mesmo pode ser feito para o ponto B e, ainda, associado com o valor de p ou de s.

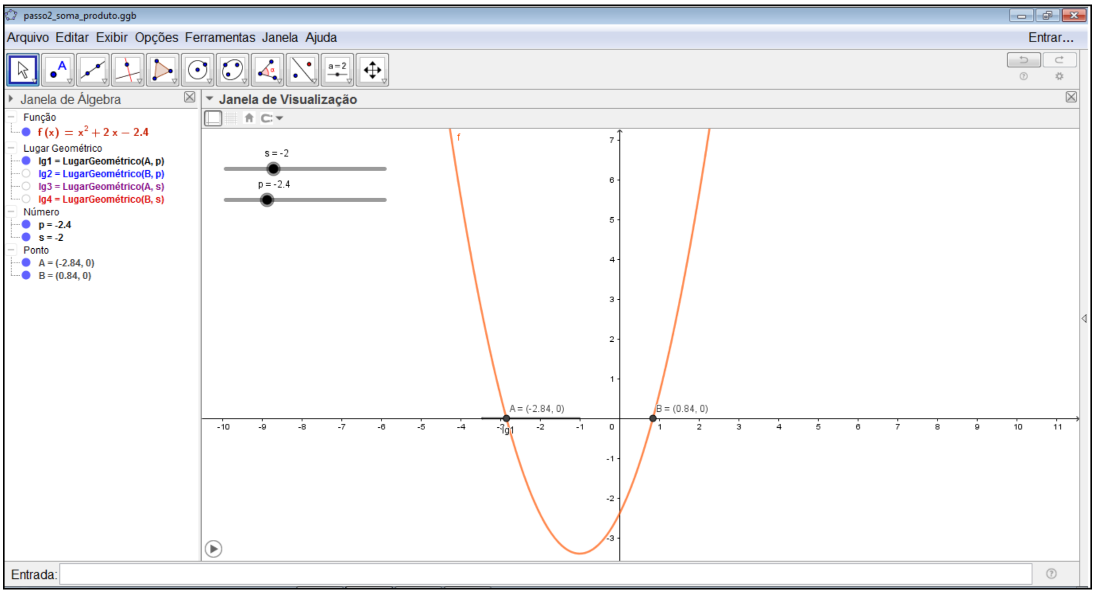


Figura 2.18: Lugar geométrico dos zeros da função de acordo com s e p.

Estas manipulações permitem fazer algumas reflexões, tais como: Fixando o valor da soma s, para quais produtos p não existiriam respostas reais? Caso se fixe o valor de p, para quais valores de s haveriam dois números reais que resolveriam o problema?

Perceba que a intenção é mostrar que este software amplia o horizonte de discussões e possibilidades. Cada professor ao tentar interpretar situações problemas diversas com este programa perceberá o surgimento de uma vasta gama de novos questionamentos, que se bem utilizados, possibilitam um estudo matemático mais aprofundado e de maior qualidade.

Interações como estas, abordadas nesta seção, tem como um de seus objetivos, provocar a aproximação da álgebra com a representação gráfica, de um modo que seria mais difícil sem este recurso tecnológico.

2.4.3 A forma canônica e seus desdobramentos

No capítulo 1 foi apresentado, algebricamente, a construção da função quadrática em sua forma canônica, ou seja, $f(x) = a(x+m)^2 + k$, com $m = \dfrac{b}{2a}$ e $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Usando a forma canônica para estabelecer o valor máximo ou o valor mínimo da função, é possível perceber que se $x = \dfrac{-b}{2a}$, então $f(x) = k$, pois a expressão $(x+m)^2$ atinge o seu valor mínimo para $x = -m$, ou seja, zero. É muito importante para a resolução de problemas identificar se a função tem valor mínimo ou máximo.

Problema 4: Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais. Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

Seja x a largura e y o comprimento da área. Assim, $80 = 2x + y \Rightarrow$
$y = 80 - 2x$. Um dos lados tem o rio como cerca. A área A pode ser expressa como $A = xy$. Substituindo y por $80 - 2x$ se tem $A = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x$, que é uma função quadrática com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f(x) = -2x^2 + 80x$. Para escrever a função na forma canônica é preciso completar o trinômio quadrado perfeito, seguindo as equivalências:

$$f(x) = -2x^2 + 80x \Leftrightarrow f(x) = -2(x^2 - 40x) \Leftrightarrow$$
$$f(x) = -2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 20 + 20^2 - 20^2) \Leftrightarrow$$
$$f(x) = -2(x-20)^2 - 800$$

Na função $f(x) = -2(x-20)^2 + 800$ se tem que $m = -20$ e $k = 800$. Interpretar essa nova forma de escrever uma função quadrática, sem dúvida, é um dos principais objetivos para este assunto. Em sala de aula, o uso do Geogebra pode contribuir para essa interpretação, que deve ser feita sempre junto com a expressão algébrica. Observe que a função f relaciona a medida x com a área $f(x)$, a outra medida y também está em função do comprimento x, pois $y = 80 - 2x$

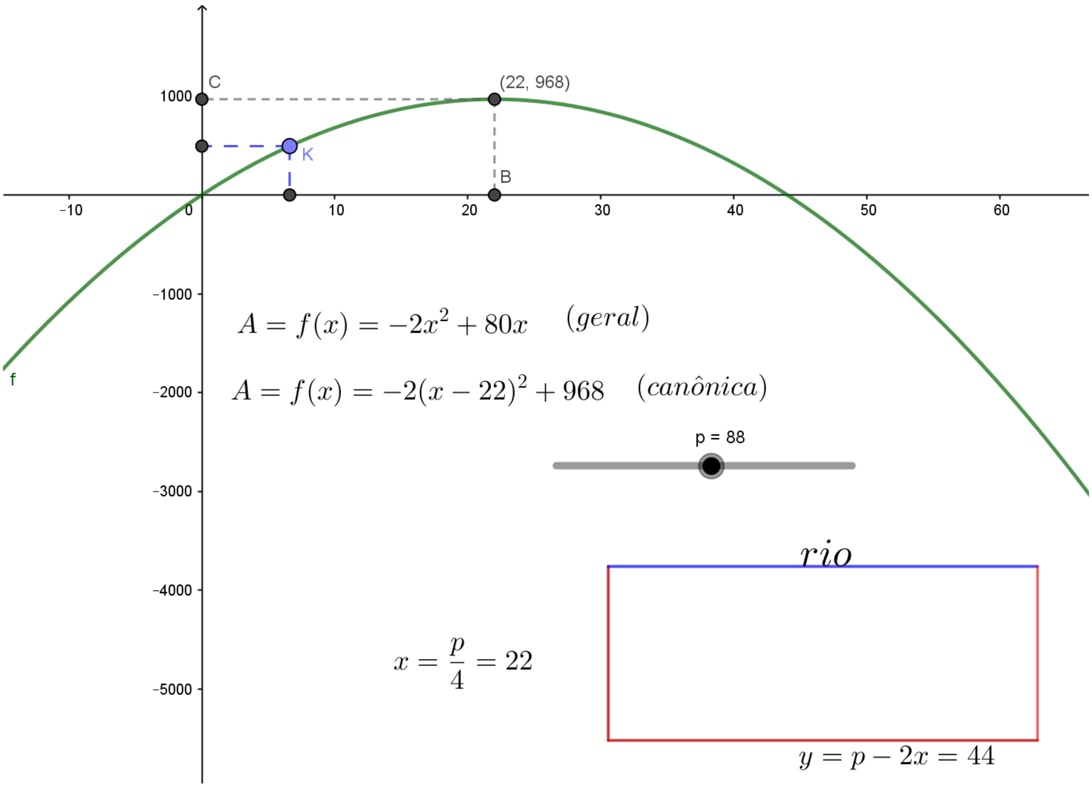


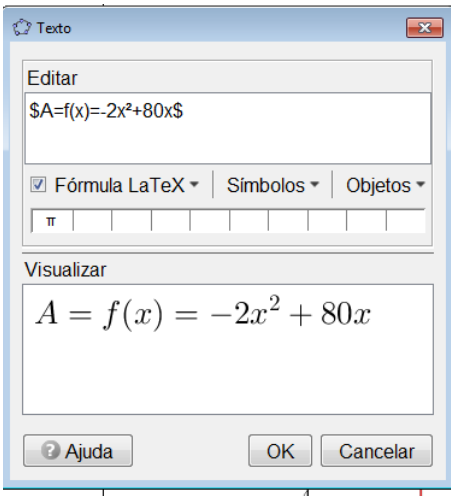
Figura 2.19: Compreendendo a forma canônica do problema 4.

Na figura 2.19 foi destacada a função em sua forma geral e na forma canônica. O gráfico tem algumas informações como as coordenadas do vértice, um ponto qualquer K e também se pode observar os zeros da função. Quando o aluno comparar a forma geral e a canônica com o gráfico, ele perceberá que a forma canônica é mais fácil de ser associada ao gráfico, principalmente, por que facilita entender se a função tem um valor máximo ou um valor mínimo e, ainda, que valor é esse.

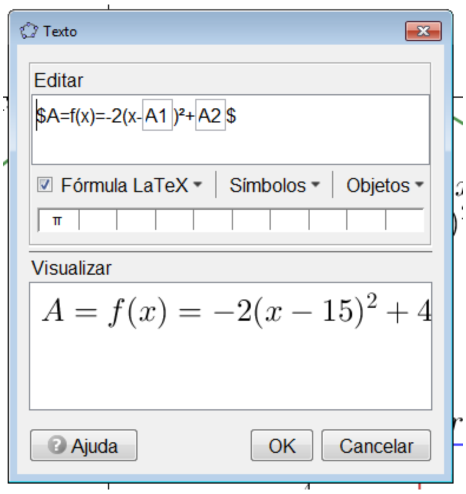
Outros aspectos importantes são: primeiro, ao avaliar a expressão canônica $f(x) = -2(x-20)^2 + 800$, para a primeira parcela se tem $-2(x-20)^2 \leq 0$, pois $(x-20)^2$ sempre é nulo ou positivo; segundo, é simples notar que para $x = 20$ a função atinge um valor importante, tanto pelo gráfico quanto pela expressão canônica, ou seja, para qualquer $x \neq 20$ a parcela $-2(x-20)^2$ será negativa, logo é impossível acrescentar algum valor em 800, assim para $x = 20$ a função atinge seu valor máximo; terceiro, movimentando o ponto K no gráfico, é possível perceber que o valor da função f é sempre igual ou menor do que 800.

O software permite que se explore ainda mais o problema 4, pois este foi construído todo em função do perímetro de 80 m. Se poderia interpretar a mesma situação para uma gama maior de possibilidades para o perímetro. Seja p o perímetro da área em questão, com os mesmos x e y para as dimensões do terreno, deste modo $y = p-2x$ e a área $A = -2x^2 + xp$, ou seja, $f(x) = -2x^2 + xp$ em sua forma geral e $f(x) = -2(x - \frac{p}{4})^2 + \frac{p^2}{8}$ em sua forma canônica.

Para construir o problema 4 no Geogebra pode-se começar com a ferramenta Texto, para inserir a forma geral e canônica. No caso da forma geral, basta digitar $A = f(x) = -2x^2+80x$ para a forma canônica é preciso digitar $f(x) = -2\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + \frac{p^2}{8}$, mas se deseja que nos lugares das frações $\frac{p}{4}$ e $\frac{p^2}{8}$ apareçam seus valores numéricos, ou seja, usando a planilha para se calcular estes valores. Na célula $A1$ digita-se $= p/4$ e na célula $A2$ digita-se $= p^2/8$, agora, basta substituir as frações pelo endereço das respectivas células preparadas previamente. Enfim, se pode escrever com a ferramenta Texto a sentença $f(x) = -2(x - A1)^2 + A2$ usando a guia *objetos* para selecionar os objetos $A1$ e $A2$, ver figuras 2.20 (a) e 2.20 (b) abaixo.



(a) Função na forma geral



(b) Função na forma canônica

Figura 2.20: Usando a ferramenta texto no Geogebra.

O próximo passo é inserir o controle deslizante p oscilando de 20 a 150 com incremento 1, conforme figura 2.21, a seguir.

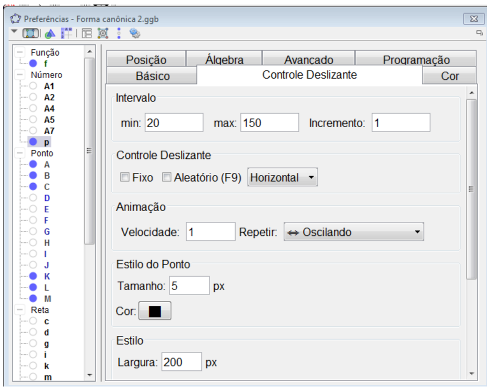


Figura 2.21: Controle deslizante para o perímetro p.

Mantendo a proposta, sempre que possível, de associar a Matemática com situações reais, para buscar um maior significado prático para o assunto, se pode construir um retângulo com as medidas procuradas pelo problema 4. Uma das medidas é x, mas não qualquer x e sim o x que faça a área ou a função atingir seu maior valor, ou seja, é a abscissa do vértice da função. A outra medida procurada é $y = p - 2x$. A elaboração do retângulo exige o uso das ferramentas *Reta Perpendicular*, *Segmento com Comprimento Fixo*, *Texto* e da janela planilha para associar o texto com células da planilha e às fórmulas $= p/4$ para x e $= p/2$ para y, respectivamente, nas células $A1$ e $A7$, com os textos $x = \dfrac{p}{4} = A1$ na largura e $y = p - 2x = A7$ no comprimento.

É importante notar que para conseguir construir o modelo[8] no Geogebra, com tantos detalhes, é necessário uma plena compreensão do modelo matemático por trás do problema. O professor não pode esquecer que todo este ambiente virtual tem como objetivo melhorar e potencializar a interpretação e compreensão do estudante sobre a Matemática, mais especificamente, sobre a função quadrática e suas propriedades.

2.4.4 O gráfico da função quadrática

O gráfico de qualquer função mostra diversas informações e características sobre a mesma. No ensino médio e fundamental da Educação Básica é importante que o estudante seja capaz de interpretar, analisar, interagir e complementar seu aprendizado mediante interações com o plano cartesiano e as representações gráficas de funções. Pois de acordo com o Ministério da Educação é necessário "Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem

[8]Para conhecer melhor o modelo elaborado visite https://ggbm.at/ASXQhMuD

discursiva em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa, assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações" (MEC, 2018, p. 114). Muitas vezes, para interpretar certa função, é necessário que se visualize mentalmente o maior número possível de informações e características desta função. No caso das funções quadráticas, cujo gráfico é uma parábola, esta interpretação se torna muito interessante, pois este tipo de curva é repleto de características e particularidades que enriquecem estudos e análises.

Construir a parábola, sem dúvida, é a melhor maneira de compreender sua definição e estrutura. Defini-se a parábola do seguinte modo: Dados um ponto F e uma reta d que não o contém, a *parábola* de foco F e diretriz d é o conjunto de pontos do plano que distam igualmente de F e de d.

Problema 5: Como contruir ponto-a-ponto uma parábola no ambiente virtual do Geogebra? Para inciar a discussão é necessário que se compreenda a definição de parábola, pois considerar um ponto F e uma reta d, que não contenha F, significa que a partir dessas informações, é preciso encontrar os pontos equidistantes de F e d.

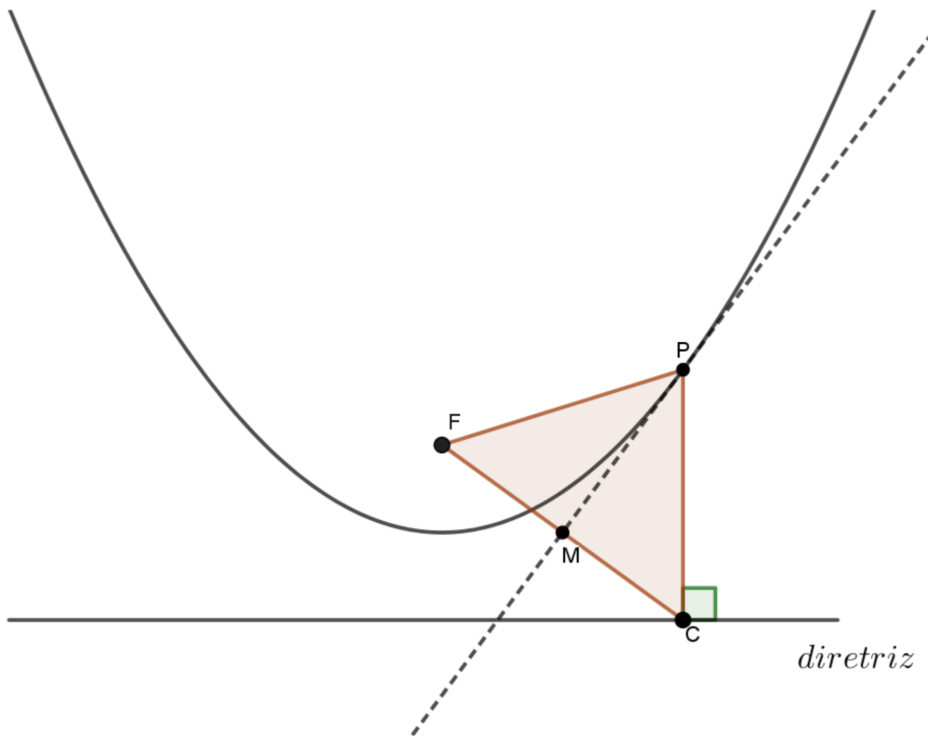


Figura 2.22: Definição da parábola.

Na figura 2.22 se pode ver o problema resolvido, note que o triângulo FPC deve ser isósceles com $PC \equiv PF$ e PC perpendicular a diretriz, pois a distância entre um ponto e uma reta corresponde a distância entre este ponto e sua projeção ortogonal sobre a reta, formando uma reta perpendicular. Primeiramente, é necessário considerar FC a base do triângulo, com C sendo um ponto qualquer da diretriz, encontrar seu ponto médio M e por ele construir uma perpendicular à FC. No ponto C deve-se construir uma segunda perpendicular à diretriz que intersectará a primeira perpendicular em P. Deste modo se tem os três vértices do triângulo FPC.

O ponto P está cumprindo as condições exigidas pela definição de parábola. Para construir algo mais do que apenas um único ponto, é preciso ativar a ferramenta *Habilitar Rastro* sobre o ponto P. Agora, ao deslocar ou animar o ponto C a parábola ficará visível de um modo dinâmico e construtivo, como pode ser visto na figura 2.23.

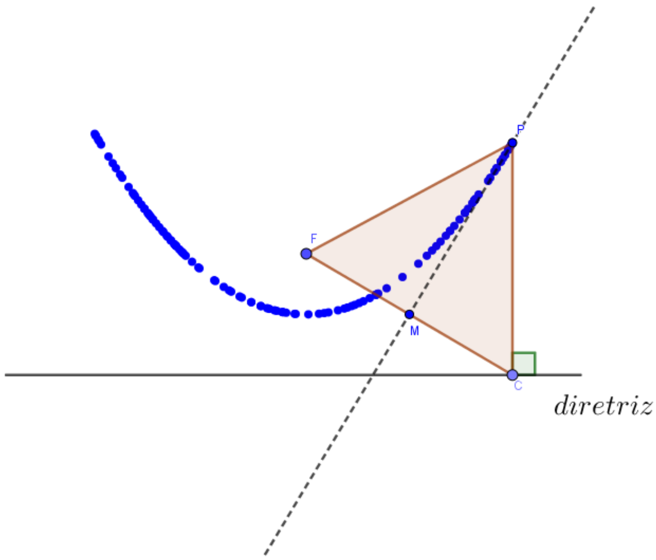


Figura 2.23: Construção da parábola com o Geogebra.

Do ponto de vista do plano cartesiano a parábola é o subconjunto $G \subset \mathbb{R}^2$ formado pelos pontos $(x, ax^2 + bx + c)$. Para mostrar que G é uma parábola é preciso mostrar, inicialmente, que o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ com a diretriz sendo a reta horizontal $y = -\dfrac{1}{4a}$, para isto basta verificar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tem $x^2 + \left(ax^2 - \dfrac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \dfrac{1}{4a}\right)^2$, tal demonstração foi detalhada no capítulo 1. Aqui o objetivo é auxiliar o professor a apresentar estas ideias para seus alunos, para isto se propõe a seguinte visualização com o Geogebra.

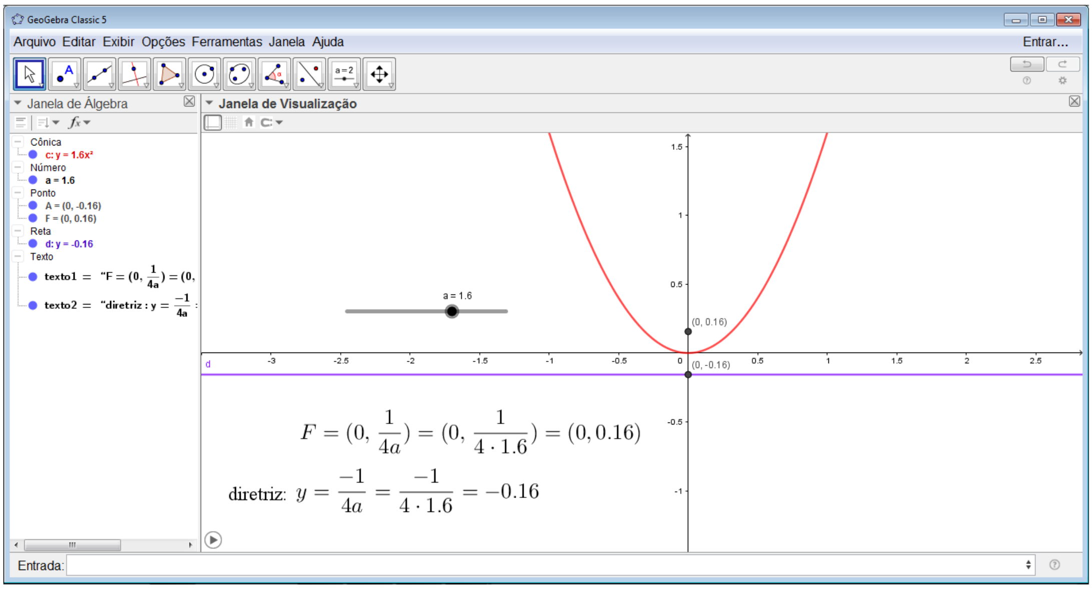


Figura 2.24: Parábola $f(x) = ax^2$.

Na figura 2.24 foi destacado o foco, a diretriz, o coeficiente a e seus respectivos valores e representações gráficas, para que o estudante possa visualizar o fato de que o foco $F = \left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ e a diretriz dada pela horizontal $y = -\dfrac{1}{4a}$, fazem parte da parábola que corresponde ao gráfico de $f(x) = ax^2$ com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de uma forma dinâmica, podendo animar o coeficiente a e ver, simultaneamente, as implicações na parábola, no foco, na diretriz e na própria função f. É claro que esta construção não serve como prova, mas tem uma excelente função pedagógica, pois permite dar forma para aquilo que se quer provar.

Agora, se deve verificar que o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2$ corresponde a uma parábola de foco $F = (m, \dfrac{1}{4a})$ e diretriz $y = -\dfrac{1}{4a}$.

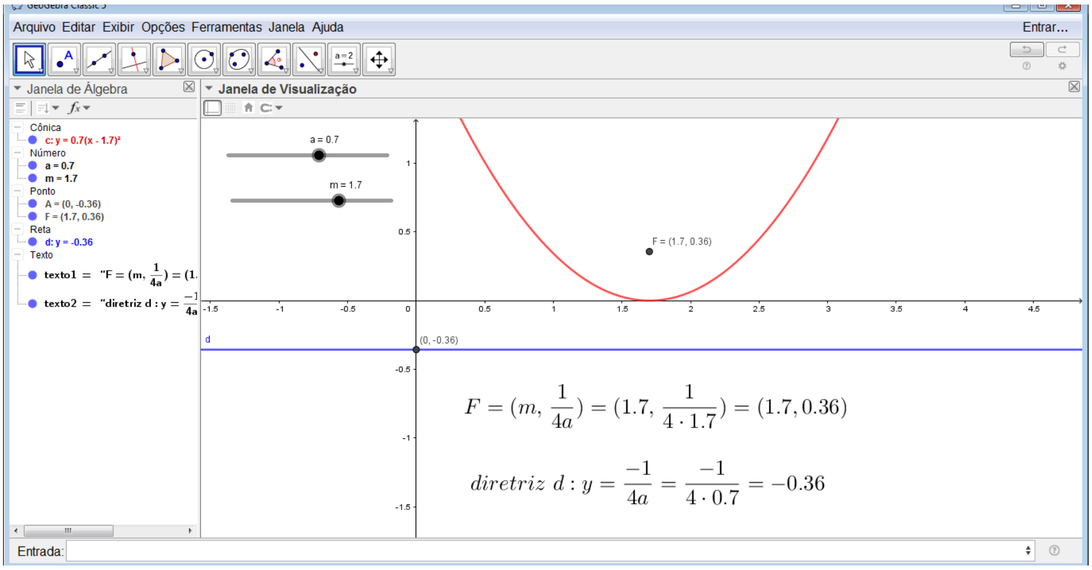


Figura 2.25: Parábola $f(x) = a(x - m)^2$.

Nesta construção, ver figura 2.25, há dois controles deslizantes a e m e, ainda, o foco F, a diretriz d e a parábola. Nota-se ainda que este gráfico resulta do gráfico anterior pela translação horizontal $(x, y) \longmapsto (x+m, y)$ para verificar esta translação basta mover o controle deslizante m. Para a figura 2.25, na janela de álgebra se tem a definição algébrica da cônica $c : y = 0.7(x - 1.7)^2$ que corresponde à função $f(x) = a(x - m)^2$.

Para finalizar este conjunto de construções, será analisado o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2 + k$, com $a, m, k \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$, cujo foco $F = \left(m, k + \dfrac{1}{4a}\right)$ e diretriz $y = k - \dfrac{1}{4a}$.

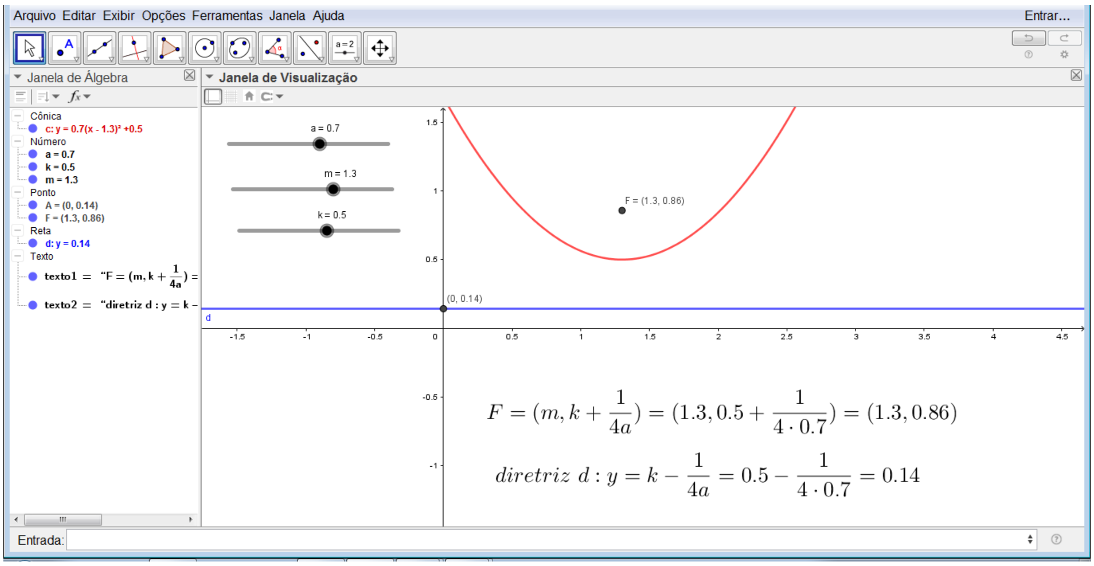


Figura 2.26: Parábola $f(x) = a(x - m)^2 + k$.

A construção correspondente a figura 2.26 retrata uma parábola que corresponde ao gráfico anterior transladado verticalmente, ou seja, $(x, y) \longmapsto (x, y+k)$, veja novamente que a cônica $c : y = 0,7(x-1,3)^2 + 0,5$ coincide com o modelo $f(x) = a(x-m)^2 + k$ que é a forma canônica de toda função quadrática.

Este conjunto de construções contribui, significativamente, para auxiliar e facilitar o entendimento da prova de que o gráfico de qualquer função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola com diretriz $y = \dfrac{4ac - b^2 - 1}{4a}$ e foco F com coordenadas $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$.

Explorando um pouco mais a última construção[9], ao deslizar o controle deslizante a nota-se, naturalmente, que se $a < 0$ a parábola tem sua concavidade voltada para baixo ou para cima quando $a > 0$, o que complementa a discussão iniciada na seção anterior, referente a forma canônica da função quadrática. O vértice, ponto mais próximo da diretriz, tem a mesma abscissa do foco, para visualizar este ponto basta construir a vertical $x = m$ no campo entrada, esta vertical intersecta F e mostra o vértice $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, 0\right)$.

Todas essas contruções a respeito do gráfico da função contribuem para o amadurecimento da capacidade de examinar este gráfico e extrair o máximo informações. Alguns questionamentos podem ajudar, tais como:

a) Quais são os valores das raízes da função?

Os valores são as abscissas dos pontos de interseção da parábola com o eixo x.

b) Quantas raízes tem essa função?

O número de raízes depende do número de interseções da parábola com o eixo das abscissas.

c) Qual o sinal da função se x estiver entre as raízes? E se estiver à esquerda ou à direita delas?

Se x estiver entre as raízes, o sinal é oposto ao sinal do coeficiente a, caso contrário, o sinal da função concorda com o sinal de a.

[9] Para vizualisar acesse https://ggbm.at/x4dc6PC9

Capítulo 3

Algumas reflexões

Ao trabalhar com o Geogebra é importante notar que, para qualquer construção, seja gráfica ou geométrica, a Matemática sempre é o ponto de partida. Mesmo que o professor apresente uma construção a ser interpretada e analisada pelos alunos, é necessário que os alunos façam uso dos conceitos matemáticos, caso contrário se tem uma interpretação rasa e superficial. No caso dos alunos construirem suas funções, também será exigido, primeiramente, certo domínio da Matemática para depois traduzir para linguagem do software. Neste capítulo, se pretende analisar e concluir o que foi exposto e discutido sobre funções afim e quadrática neste ambiente virtual.

3.1 Funções e o Geogebra

Quando o professor planeja suas aulas sobre funções é importante que ele tenha definido quais são os aspectos mais relevantes sobre este assunto de tal forma que sirvam como um guia ao longo das aulas.

Funções são modelos matemáticos de fenômenos e observações reais presentes no cotidiano. Tudo parte da observação. As situações problemas abordadas no capítulo anterior são uma amostra do que se pode observar. Considerando a realidade escolar atual, se sabe que os livros são o recurso mais usado como fonte de observação. Existem trabalhos e sugestões que tentam aprimorar essa experiência observativa, propondo maneiras de extrair os dados do ambiente de forma mais concreta. Seja qual for o modo de coletar essas informações é preciso que os estudantes as observem e as relacionem. Assim, se tem como primeiro ponto importante neste estudo a *capacidade de relacionar grandezas*.

Depois de observar os dados e o comportamento das grandezas é necessário interpretar estas informações através de tabelas, planilhas, gráficos e de modo algébrico. O Geogebra é capaz de oferecer, em um único ambiente, todas estas formas. As diversas maneiras de organizar os dados produzem vários pontos de vista, construindo uma ponte para o próximo aspecto relevante sobre funções, que é a *regra* ou *conjunto de regras* de associação entre as grandezas.

Nos livros escolares, os problemas iniciais sempre fazem uso de tabelas, depois estes dados tendem a migrar para o plano cartesiano e sua expressão algébrica. Com o Geogebra o trio tabela, plano cartesiano e expressão algébrica se comunica e se altera constantemente, alterando-se a tabela o ponto cartesiano também é modificado e vice-versa. Este ambiente multi- interpretativo contribui para que o padrão ou a regra de associação sejam construídos através de uma observação mais rica.

Estabelecido estes dois pilares, é importante que os estudantes explorem seus desdobramentos, ou seja, que pratiquem em diversos contextos a habilidade de observar, organizar os dados e interpretá-los neste ambiente virtual. Um bom exemplo da exploração destes desdobramentos é apresentado na figura 3.1, abaixo.

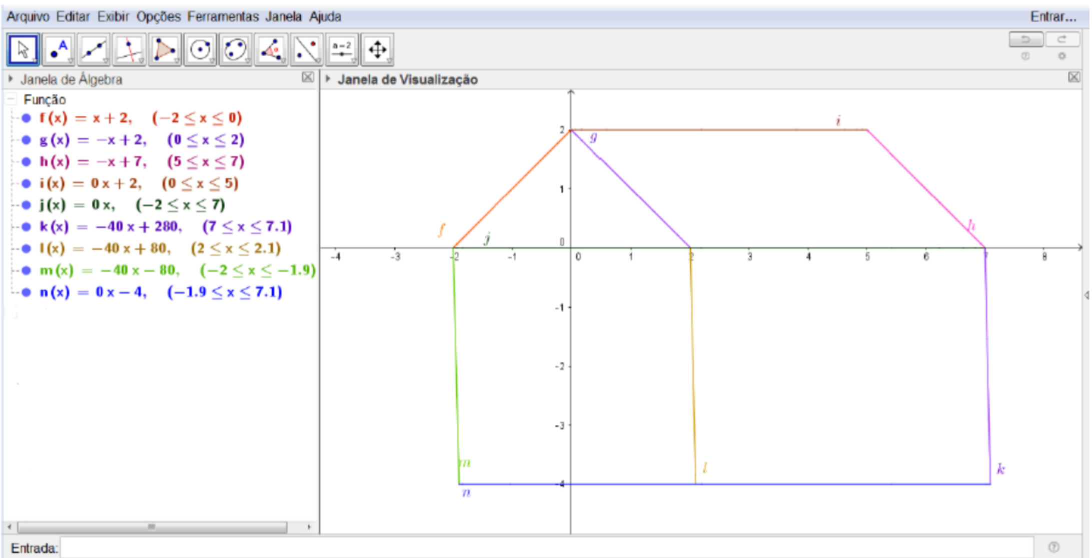


Figura 3.1: Explorando a regra de associação com o Geogebra.

Na figura 3.1 encontra-se uma atividade proposta na dissertação de mestrado de (Cunha, 2017, p.90), na qual a autora explora, quase de modo recreativo, certas características da regra de associação como inclinação da reta e restrição do domínio da função.

A mesma atividade pode ser elaborada para as funções quadráticas, como a mesma autora explora de modo criativo na figura 3.2 a seguir.

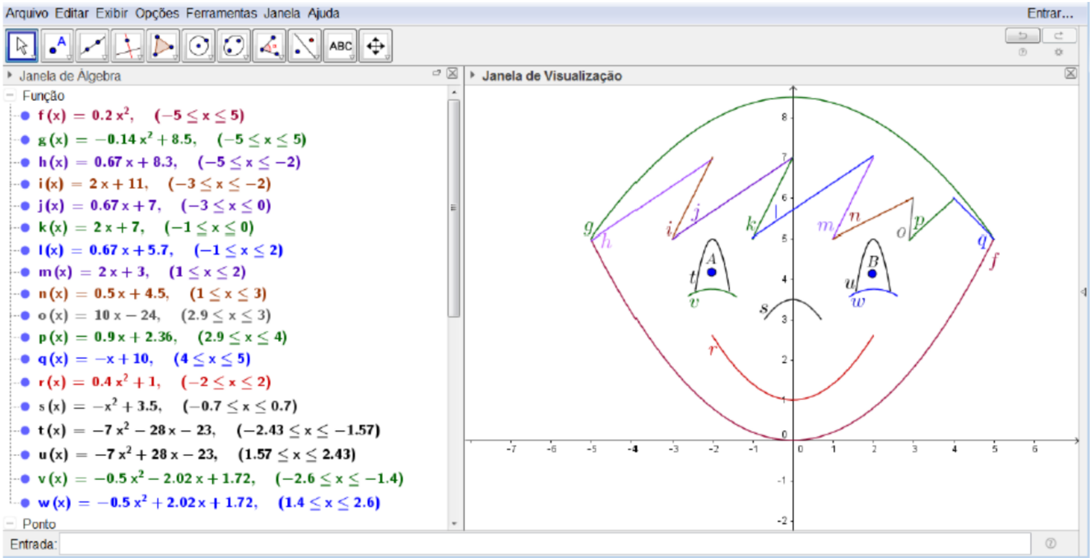


Figura 3.2: Explorando a função quadrática.

O rosto contruído na figura 3.2 (Cunha, 2017, p.95) com o uso de gráficos de funções explora muito bem vários aspectos e características importantes. É significativo ressaltar que a conexão com a realidade complementa de forma consistente este tipo de trabalho. O professor deve sempre trazer para o contexto real aquilo que o aluno estuda, manipula, contrói ou interpreta.

Vale destacar um terceiro ponto importante para nortear o trabalho em sala de aula com este *software*: o estudante precisa *compreender a estrutura básica* de toda função. O fato do *software* permitir animações contribui para uma experimentação sem igual, do mesmo modo apresentado no *Problema 1* do capítulo anterior, que finaliza com a animação, proporcionando a conexão entre domínio, contradomínio e regra de associação. O movimento, através da animação, mostra que uma função é como um "organismo", pois ela trabalha associando, transformando ou levando elementos de um conjunto ao outro.

Observar uma função animada pelo Geogebra, é como observar um organismo vivo, ou seja, funcionando. As funções estáticas no caderno ou nos livros são apenas fotografias ou uma amostra da realidade, oferencendo uma experiência menos completa.

3.2 Aprender construindo

Ao abordar a caracterização da função afim no capítulo anterior, foi apresentada uma forma de se compreender a principal característica desta função. Na figura 2.12 o ponto x e $x+h$, no eixo das abscissas, precisam ser programados para que o usuário possa alterar suas abscissas, logo as coordenadas de x são $(c, 0)$, e as de $x+h$ são $(c+h, 0)$. Note que este exercício de programar, obriga o aluno a entender o comportamento de quaisquer dois pontos sobre o eixo das abscissas e não apenas um ponto específico. Ao retomar esta situação, se está destacando o poder da construção no Geogebra sobre o aprendizado escolar.

Outro exemplo sobre o uso das construções é a abordagem feita no *Problema 3*, que se resume a encontrar dois números conhecendo sua soma e seu produto. O aspecto construtivo do Geogebra permitiu expandir esta situação para várias somas e produtos. Como o aluno experimentaria essa interação sem essa tecnologia? Ao construir estes lugares geométricos de modo que se possa manipulá-los e enriquecer, significativamente, o processo de aprendizado vivido pelos estudantes.

A construção[1] abordada no problema 3 se refere a um tema considerado difícil de se trabalhar: a forma canônica da função quadrática. O *software* permite que se observe as variações nas expressões canônica e geral e ainda, oscilar o valor do perímetro para observar suas implicações nas expressões algébricas. Este fator dinâmico do Geogebra tem muito potencial para facilitar a compreensão ou visualização de conceitos e propriedades da Matemática que, sem essa tecnologia, seria mais difícil.

3.3 A Matemática e o Geogebra

A linguagem usada pelo Geogebra é a Matemática. A qualidade do uso que se faz deste software esta diretamente ligada ao conhecimento matemático de seu usuário. Mas, não é um software para se aprender Matemática? Sim, ou melhor, também. Ele permite que o estudante explore sua Matemática, ou que a use para aprender novos conhecimentos. Por exemplo, para programar um ponto no plano cartesiano é necessário conhecimento sobre as coordenadas cartesianas. Ao digitar $(2, 4)$ se tem um ponto fixo; ao digitar $(c, 4)$ se tem um ponto móvel que está em função do valor de c e ao digitar $(c, ac + b)$

[1] Para manipular a construção consulte: *https://ggbm.at/CFwFDWeB*

está escrevendo um ponto em função de c, a e b que percorra todos os pontos de alguma função afim. Veja como evolui o conhecimento, melhorando a programação, que por sua vez amplia o horizonte de aprendizado.

A expressão "pensar-com-Geogebra" (Borba et al., 2015, p.48) que está relacionado com tudo que o software exige de seu usuário, por exemplo, a intensidade com que acontecem as interações, construções, testes de conjecturas, visualização de animações, influenciam no modo de pensar e agir dos estudantes que interagem com este ambiente, restruturando seu pensamento matemático.

Vale destacar ainda, que os erros cometidos pelos estudantes no uso do Geogebra, mostram possíveis falhas na formação matemática dos alunos. Ao programar um ponto no plano cartesiano, é necessário conhecimento sobre as coordenadas cartesianas; ao construir o gráfico de uma função é necessário noções sobre sua representação algébrica; para programar uma planilha que execute o mesmo cálculo para vários valores, como feito para figura 2.9, é necessário estar familiarizado com os padrões e leis das funções matemáticas. O interessante é que o prórprio aluno perceberá o erro, pois o *software* não apresentará o resultado desejado, provocando um amadurecimento na formação matemática do aluno.

3.4 O futuro do Geogebra

Sempre que se trabalha com algum recurso tecnológico é normal que, com o tempo, talvez esta tecnologia se torne obsoleta, pois novas ideias surgem a todo momento. No caso do Geogebra este risco é menor, o fato de ser um programa de código fonte aberto permite uma constante evolução promovida pelos seus colaboradores ao redor do mundo e, claro, por seus usuários.

A versão do Geogebra para smartphone promete expandir significativamente o acesso a essa tecnologia. Esta versão ainda não se mostra tão funcional quanto a versão para computadores pessoais, pois seus recursos foram simplificados e adequados as limitações dos smartphones. Para os smartphones o Geogebra foi dividido em outros aplicativos, por exemplo: A *Calculadora Gráfica Geogebra* para o estudo de funções, o *Geogebra Geometria* para geometria plana e a *Calculadora Gráfica Geogebra 3D* para o estudo em três dimensões, entre outros, todos desenvolvidos em várias plataformas, incluindo Android e IOS.

Considerações finais

.

No início do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, é esclarecido aos mestrandos que seus trabalhos de conclusão, as dissertações, devem de alguma forma impactar a Matemática da Educação Básica. Se percebe que a qualidade da Matemática estudada, pesquisada e construída durante o curso é bem superior àquela praticada nas escolas. Cabe aos mestrandos, levar até seus alunos, toda esta qualidade praticada neste curso. O PROFMAT cumpre muito bem o propósito de qualificar e aprimorar a Matemática experimentada pelos professores, que por sua vez precisam, de alguma forma, fazer com que essa qualidade chegue até as escolas. O uso de tecnologia é um caminho natural para ajudar nesta tarefa.

Nesta dissertação foi escolhido o *software* de Matemática Dinâmica Geogebra, para auxiliar na construção da transposição didática. Não faz parte dos objetivos deste trabalho elaborar um roteiro rígido sobre como utilizar este recurso, ao invés disso, as ideias aqui discutidas se revelam apenas como parâmetros ou diretrizes que tentam direcionar o desenvolvimento de práticas já existentes, ou para aqueles que pretendem agregar um novo recurso à sua prática de ensino e aprendizagem.

Todo professor quando inicia sua aula planeja alguns objetivos que prentede alcançar, ao usar o Geogebra os objetivos estabelicidos são basicamente os mesmos. A diferença está no modo como a aula se desenvolve e no caminho percorrido pelos alunos. No estudo de funções afins e quadráticas se percebe que certos temas são menos comuns ao cotidiano escolar, como por exemplo, a caracterização da função afim e a prova de que seu gráfico é uma reta. Nas funções quadráticas os temas menos comuns, ou seja, menos abordados no ensino deste tipo de função, são: a construção da parábola, a prova de que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola, a forma canônica e suas consequências.

Um dos pontos fortes do Geogebra no estudo de funções é o seu caráter dinâmico, ou seja, o movimento. Com este fator dinâmico se tem uma ferramenta muito eficiente para visualizações ou construções de funções e suas propriedades. Compreender a relação de dependência entre duas grandezas de modo dinâmico é um excelente caminho para que o aluno perceba que o importante é o que uma função faz.

É importante ressaltar também o uso do Geogebra para aproximar o estudante das provas e demonstrações matemáticas que, muitas vezes, não são abordadas por serem difíceis de se transpor didaticamente. Dificuldades estas que podem ser, ao menos, amenizadas com este recurso virtual, como foi mostrado na construção da parábola e na prova de que o gráfico de uma função afim é uma reta.

Não se pode deixar de aprofundar a Matemática nas atividades da sala de aula, por falta de uma prática adequada. Como pode ser observado de um fato ocorrido durante um curso oferecido pela Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso no ano de 2017, no qual um dos orientadores insinuou que a fórmula resolutiva de equações do segundo grau seria de algum modo inadequada ou com aplicações distantes de nossa realidade. Claro que se contestou, justificando o porque de se ensina-la. Este acontecimento deixou claro que alguns educadores, talvez achem que certos aspectos da Matemática sejam, de algum modo, inadequados ao ambiente escolar, por estarem distantes da realidade, mas que na verdade é a prática inadequada que torna determinado assunto irrelevante para a educação. Este trabalho tentou mostrar que, com recursos e iniciativas de novas práticas, é possível aprofundar a Matemática estudada nas escolas sem perder qualidade e eficiência abordando todos os temas e conceitos, sejam eles muito abstratos ou não. Tudo depende do modo que for abordado.

Tem-se como perspectiva de futuro alcançar tanto o estudante da Educação Básica, quanto o professor. Esta análise feita com as funções afins e quadráticas, pode ser feita e extendida a outros temas da Matemática.

Por fim, o Geogebra se revela capaz de auxiliar tanto no trato das funções e números reais, quanto nos aspectos geométricos. É perfeitamente possível se estender esta proposta para outros temas, direcionados ao ensino e aprendizagem dos alunos, como também, com o intuito de capacitar os professores quanto ao uso desta tecnologia, através de cursos de capacitação. Estas iniciativas poderiam, por exemplo, impactar nos resultados das avaliações da Educação Básica, como a Prova Brasil, interferindo, positiva e diretamente na avaliação do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica - IDEB.

Referências Bibliográficas

Borba, M. C. e Penteado, M. G. (2016). *Informática e Educação Matemática*. Autêntica Editora, Belo Horizonte-MG.

Borba, M. C., Silva, R. S. R., e Gadanidis, G. (2015). *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. Autêntica Editora, Belo Horizonte-MG.

Brito, D. S. e Almeida, L. M. W. (2005). O conceito de função em situações de modelagem Matemática. *Zetetiké*, 13(23):63–85.

Cunha, J. F. V. (2017). Funções: propostas para o ensino na educação básica através do software geogebra e da resolução de problemas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba-MG.

Granja, C. E. S. C. e Mello, J. L. P. (2012). *Atividades experimentais de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental*. SM, São Paulo-SP.

Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R., e Almeida, N. (2013). *Matemática: ciência e aplicações, volume 1: ensino médio*. Saraiva, São Paulo-SP.

Lima, E. L. (2012). Curso de análise. In *Projeto Euclides*, volume 1, página 431p. IMPA, Rio de Janeiro-RJ.

Lima, E. L. (2013). *Números e Funções Reais*. SBM, Rio de Janeiro-RJ.

Magarinus, R. (2013). Uma propósta para o ensino de funções através da utilizção de objetos de aprendizagem. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria-RS.

MEC (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. MEC, Brasília-DF.

MEC (2018). *PCN + Ensino Médio Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. MEC.

Ogliari, L. N. (2008). A matemática no cotidiano e na sociedade: Perspectivas do aluno do ensino médio. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre-RS.