UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

FRANCISCO RAIMUNDO COUTINHO JÚNIOR

VOLUMES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: UMA PROPOSTA DE ENSINO COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

JUAZEIRO-BA
2018

FRANCISCO RAIMUNDO COUTINHO JÚNIOR

VOLUMES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: UMA PROPOSTA DE ENSINO COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada a Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF, Campus Juazeiro-BA, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edson Leite Araújo

JUAZEIRO - BA

2018

	Coutinho Júnior, Francisco Raimundo
C871v	Volumes de sólidos geométricos: uma proposta de ensino com o auxílio do software geogebra / Francisco Raimundo Coutinho Júnior. – – Juazeiro, 2018.
	xiv, 130 f.: il.; 29 cm.
	Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro-BA, 2018.
	Orientador: Prof. Dr. Edson Leite Araújo.
	Referências.
	1. Matemática – estudo e ensino. 2. Geometria espacial. I. Título. II. Araújo, Edson L. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.
	CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF
Bibliotecário: Márcio Pataro

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FOLHA DE APROVAÇÃO

Francisco Raimundo Coutinho Júnior

VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: UMA PROPOSTA DE ENSINO COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, pela Universidade Federal do Vale do São Francisco.

Aprovada em: 23 de novembro de 2018.

Banca Examinadora

Edson Leite Araújo

Prof. Dr. Edson Leite Araújo, PROFMAT/UNIVASF

Lino Marcos da Silva

Prof. Dr. Lino Marcos da Silva, PROFMAT/UNIVASF

Prof. Dr. Francisco Bruno Souza Oliveira, DCET/UESC

Dedico este trabalho aos meus familiares e a todos que acreditam no poder da educação.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por seu infinito amor.

À minha família, pelo incentivo.

Aos amigos, pelo companheirismo.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Edson Leite Araújo, pelos ensinamentos, atenção e suporte dados durante a realização deste trabalho.

Aos professores e colegas de curso, pelos conhecimentos compartilhados.

Ao coordenador local do Profmat, Prof. Dr. Lino Marcos da Silva, pelo seu compromisso e dedicação ao programa.

Ao Ministério da Educação, pelo apoio financeiro[1].

Enfim, a todos que contribuíram para realização e finalização deste trabalho.

[1] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Não há nada mais inútil do que fazer as coisas sempre do mesmo jeito, esperando resultado diferente."

(Albert Einstein)

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo de caráter investigativo sobre a utilização do software *Geogebra* no ensino de volumes de sólidos geométricos no Ensino Médio. Pesquisas, além dos documentos oficiais, apontam para a necessidade de atualização das metodologias e para a utilização de *softwares* educativos no ensino do conteúdo proposto. O trabalho foi realizado através de uma pesquisa de campo em duas turmas da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública estadual do Piauí. Numa das turmas, foi aplicada uma sequência didática com a utilização de *applets* desenvolvidos no *Geogebra*. Simultaneamente, na outra turma, o mesmo conteúdo foi ministrado da forma tradicional, tendo como base apenas o livro didático. Trata-se de uma pesquisa com abordagem essencialmente qualitativa em que foram utilizados questionários, observações e depoimentos como instrumentos de coleta de dados. O ensino de volumes de sólidos geométricos utilizando o *Geogebra* na perspectiva adotada nesta pesquisa apresentou vantagens em relação ao ensino tradicional. Além de despertar a atenção e motivação dos alunos, tornando as aulas mais dinâmicas, atraentes e interativas, o *Geogebra* contribuiu significativamente para construção ativa do conhecimento, estimulando o raciocínio lógico matemático e o espírito investigativo. A sequência didática utilizada está disponibilizada como produto educacional resultante deste trabalho para ser utilizada por professores, inclusive aqueles que não possuem conhecimentos avançados de informática.

Palavras-chave: Volumes. Sólidos Geométricos. Geogebra. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This work presents an investigative study about the use of Geogebra software in the teaching of geometric solid volumes in High School. Research, in addition to official documents, point to the need to update the methodologies and the use of educational software in teaching the proposed content. The work was carried out through a field research in two classes of the third grade of the High School of a state public school in Piauí. In one class, a didactic sequence was applied with the use of applets developed in Geogebra. Simultaneously, in another class, the same content was taught in the traditional way, based on only the textbook. It is essentially a survey of qualitative approach in which questionnaires were used, observations and interviews as data collection instruments. The teaching geometric solids volumes using Geogebra the perspective adopted in this research has advantages over traditional education. In addition to raising students' attention and motivation, making classes more dynamic, engaging and interactive, Geogebra has contributed significantly to the active construction of knowledge, stimulating logical reasoning and mathematical research. The didactic sequence used is available as an educational product resulting from this work to be used by teachers, even those who do not have advanced computer skills.

Keywords: Volumes. Geometric solids. Geogebra. Mathematics Teaching.

LISTAS DE FIGURAS

LISTAS DE GRÁFICOS

LISTAS DE ACRÔNIMOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

O desempenho dos estudantes brasileiros na Prova Brasil [2] e o no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes[3] (Pisa) mostra que o país vive uma crise em relação à qualidade da educação pública, especialmente no Ensino Médio (CASTRO, 2014).

Tendo como parâmetro o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) do Brasil no ano de 2017, observa-se que dos três níveis que compõem a Educação Básica, o Ensino Médio é o que tem apresentado os piores resultados, com baixos níveis de aprendizagem e elevadas taxas de evasão. Em 2017, o Ideb do Ensino Médio foi de 3,8, numa escala que varia de 0 a 10, ficando abaixo da meta estipulada que era 4,7. Já nas séries finais do Ensino Fundamental, o Ideb registrado no mesmo ano foi 4,7 (BRASIL, 2018).

Os resultados do Ensino Médio são preocupantes. Essa preocupação se intensifica quando direciona-se o olhar para o desempenho dos alunos em Matemática (CASTRO, 2014). O resultado do Ideb do ano de 2017 mostrou que o desempenho do Ensino Médio em Matemática é o pior desde 2005, apenas 4,5% dos alunos atingiu o aprendizado considerado adequado na disciplina (BRASIL, 2018).

Os dados mencionados evidenciam a necessidade de mudanças urgentes no ensino de Matemática no Brasil. Uma das maneiras de mudar essa realidade é modificar a forma como o ensino de Matemática é concebido no Brasil, que é um ensino formal, centrado na aprendizagem de técnicas e na memorização de regras, cujo significado não é destacado para os estudantes (UNESCO, 2016).

Cientes da necessidade de superar as dificuldades enfrentadas na aprendizagem de Matemática e melhorar a qualidade do ensino desta disciplina, acredita-se que a utilização de tecnologias digitais como os *softwares* educativos surge como um potencial aliado de professores e alunos (OLIVEIRA; LUZ, 2017).

---

[2] http://ideb.inep.gov.br/resultado/resultado/resultadoBrasil.seam?cid=2798998.

[3] https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Brazil-PRT.pdf.

Um dos caminhos apontados para o avanço no uso das tecnologias em educação é a apresentação de propostas que ajudem a rotina de trabalho do professor (TODOS PELA EDUCAÇÃO, 2018). Tendo a finalidade de contribuir nesse processo, este trabalho foi realizado a partir da implementação de uma sequência didática para o ensino de volume de sólidos geométricos com a utilização do Programa de Geometria Dinâmica (PGD) *Geogebra*.

1.2 O PROBLEMA

Em minha trajetória acadêmica e profissional, atuando há mais de 18 anos como professor da Educação Básica, pude constatar a dificuldade na representação de objetos tridimensionais em ambientes bidimensionais como quadro ou caderno. Tal dificuldade interfere na compreensão dos conceitos e propriedades relativos aos sólidos geométricos, no entendimento das deduções de fórmulas para cálculo do volume desses sólidos e na aplicação deste conteúdo para a resolução de problemas relacionados.

Analisando os arquivos de uma escola pública estadual piauiense, observou-se, a partir dos resultados obtidos em uma avaliação diagnóstica feita do início do 2º semestre de 2017 pela Secretaria Estadual de Educação e Cultura do Piauí (SEDUC-PI), que apenas 20% de seus alunos do Ensino Médio acertou os itens referentes a habilidade de *resolver problemas envolvendo a área total e/ou volume de um sólido geométrico*[4] *(prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera)*. O mesmo problema foi detectado na análise do desempenho no Sistema de Avaliação Educacional do Piauí (SAEPI), uma avaliação em larga escala realizada no final do ano letivo de 2017, o qual caracterizou como crítico o estudo de volumes de sólidos geométricos[5].

O uso de *softwares* educativos pode contribuir para a solução dos problemas de aprendizagem relativos ao ensino desse conteúdo (SOUZA JÚNIOR, 2014). Por isso, e com a intenção de buscar alternativas adequadas para a minimização ou superação desses problemas de aprendizagem, escolheu-se o estudo de volume de sólidos geométricos como conteúdo.

---

[4] https://corretor.mobieduca.me

[5] Dados fornecidos pela gestão da escola.

Dentre os inúmeros softwares educativos disponíveis para o ensino de Matemática (*Calques 3D*, o *Geogebra, o Cabri 3D, o Wingeom*, ...), optou-se pelo *Geogebra*, por ser um *software* livre e pelas várias possibilidades que o seu ambiente 3D oferece para serem exploradas: representação e visualização objetos geométricos em diferentes perspectivas, interação dinâmica entre geometria e álgebra num mesmo ambiente, entre outras.

Assim, esta pesquisa apresenta a seguinte questão norteadora:
Que contribuições o software Geogebra pode trazer ao ensino e aprendizagem de volumes de sólidos geométricos, especialmente à dedução das fórmulas utilizadas no Ensino Médio?

1.3 OBJETIVOS

Partindo da hipótese de que a utilização do *Geogebra* como recurso didático melhora o ensino e a aprendizagem de volumes de sólidos geométricos a partir das diferentes visualizações e representações que esse *software* proporciona, este trabalho tem por objetivo geral:

- ✓ Investigar as possíveis contribuições do uso do *software Geogebra* no ensino de volume de sólidos geométricos no Ensino Médio, especialmente na dedução das fórmulas para o cálculo de volumes.

Como objetivos específicos, pretende-se:

- ✓ Discutir sobre natureza e os desafios no ensino de Geometria Espacial com ênfase no uso de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem de volume de sólidos geométricos no Ensino Médio;

- ✓ Realizar um experimento científico comparativo entre duas turmas da 3ª série do Ensino Médio, com e sem o uso s*oftware Geogebra;*

- ✓ Analisar as potencialidades do uso do *Geogebra* no ensino e na aprendizagem do conteúdo proposto por meio da análise do desempenho das turmas pesquisadas.

✓ Disponibilizar aos professores de Matemática do Ensino Médio uma sequência didática para o ensino de volume de sólidos geométricos com o uso do *Geogebra*.

1.4 VISÃO GERAL DO TRABALHO

Para atingir a finalidade que se propõe, este trabalho está organizado em seis capítulos, incluindo este.

No Capítulo 2, discute-se o ensino de volume de sólidos geométricos no Ensino Médio com base na legislação educacional vigente e em autores e pesquisadores do tema, com ênfase nos principais problemas enfrentados no processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo e a utilização de tecnologias para superação destes problemas.

O Capítulo 3, é dedicado a apresentação das principais características e funcionalidades do *Geogebra* e da sua plataforma oficial. São apresentadas ainda as principais ferramentas da versão 5.0, com destaque para a janela de visualização 3D.

No Capítulo 4, são tratados os aspectos metodológicos deste estudo. Descreve-se os métodos aplicados, a caracterização do campo de pesquisa e os sujeitos envolvidos, a sequência didática utilizada e a forma como foi implementada.

Uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados obtidos por meio de instrumentos de coleta de dados, observações feitas durante a pesquisa e depoimentos dos alunos envolvidos é feita no capítulo 5.

Uma outra análise, agora sobre o desenvolvimento da pesquisa, suas contribuições para a comunidade acadêmica, professores e alunos do Ensino Médio e projeções para trabalhos futuros, são apresentados no sexto e último capítulo.

2 O ESTUDO DE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Neste capítulo, discute-se o ensino de volume de sólidos geométricos no Ensino Médio. Está dividido em duas seções: na primeira, faz-se considerações sobre os principais problemas enfrentados no processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo e as metodologias utilizadas; na segunda, enfatiza-se a utilização de tecnologias como meio para superação destes problemas.

2.1 O ENSINO

A história da Matemática relata que o estudo da Geometria Espacial ocorre desde as civilizações antigas. Os babilônios e os egípcios antigos já conseguiam calcular áreas e volumes com a utilização de algumas propriedades geométricas de figuras planas e de sólidos geométricos, embora de forma puramente experimental (CARVALHO; ROQUE, 2012).

Tempos depois, por volta de 600 a.C., filósofos e matemáticos gregos passaram a sistematizar os conhecimentos geométricos da época, com destaque principalmente para Euclides de Alexandria que deu ordem lógica a estes conhecimentos, estudando em profundidade as propriedades das figuras geométricas, áreas e volumes, fazendo com que a Geometria evoluísse significativamente como um importante ramo da Matemática (PEREIRA, 2007).

Comumente, o ensino da Geometria Espacial é

> praticado tipicamente usando-se o livro didático e a lousa como únicas ferramentas. Dessa maneira, o aluno de Matemática se vê com a árdua tarefa de estudar objetos tridimensionais a partir de representações bidimensionais que lhe são apresentadas, de forma estática, em uma página de livro ou no quadro-negro (BORTOLOSSI; DOURADO, 2013, p. 1).

A dificuldade de representação de objetos tridimensionais em ambientes bidimensionais, são percebidas tanto em minha prática docente como nos relatos de outros professores, indicando uma possível obstrução no processo de compreensão dos conceitos e propriedades dos sólidos geométricos necessários à dedução das fórmulas para o cálculo de seus volumes.

Outra dificuldade detectada é que, em geral, os professores não sabem como definir o conceito de volume, de modo que esse conceito sirva para caracterizar o volume de qualquer sólido obtido pela combinação de sólidos elementares. Saber definir de maneira universal o conceito de volume é valioso porque dá ao professor um conhecimento elaborado, que não precisa ensinar aos seus alunos, mas precisa saber para ter mais segurança em seu trabalho didático (DIAS et al., 2013).

Para introduzir o conceito de volume, o professor deve, antes de qualquer tentativa formal, apresentar uma ideia intuitiva e fornecer diversos exemplos para que os alunos possam compreender o que será abordado. O conceito deve ser introduzido informando que o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada. Com essa ideia, diversas comparações provocativas podem ser feitas, como por exemplo: quem tem maior volume, uma caixa de sapato ou uma jarra de flores? No entanto, por diversos motivos como as dimensões dos objetos, que podem ser muito pequenas ou grandes, nem sempre é possível fazer estas comparações. Com isso, surge a necessidade de obter métodos para o cálculo de volumes desses objetos. (LIMA et al., 2010).

Para medir a grandeza chamada volume, deve-se compará-la com uma unidade padrão. Tradicionalmente, a unidade de volume é o cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, denominado de cubo unitário. Dessa forma, o professor deve deixar claro que o volume de um solido S deve ser o número que exprime quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário. A partir disso, é necessário apresentar a dedução das fórmulas para o cálculo de volume dos demais sólidos (LIMA et al., 2010).

Todavia, lamentavelmente, a grande maioria dos estudantes brasileiros concluem o Ensino Médio sem jamais ter visto uma demonstração. “As demonstrações devem ser apresentadas por serem parte essencial da natureza da Matemática e por seu valor educativo. A nível escolar, demonstrar é uma forma de convencer com base na razão, em vez da autoridade” (LIMA, 2007, p. 158).

A dedução das fórmulas para o cálculo de volumes é importante para o desenvolvimento de competências relacionadas ao raciocínio espacial. Ao deduzir tais fórmulas, o professor deve conduzir os alunos a perceberem a articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos, de forma que estes alcancem uma maior significação na aprendizagem (PRIMO, 2013).

Em suma, o professor deve evitar a simples apresentação das fórmulas e conduzir os alunos a compreenderem os processos que levam ao estabelecimento destas (BRASIL, 2006). Para isso, deve lançar mão de variados métodos e recursos didáticos, sendo a utilização das tecnologias uma importante ferramenta didática que permite auxiliar o trabalho docente facilitando a aprendizagem. Na próxima seção, aprofundar-se-á sobre o uso de tecnologias no ensino de Matemática.

2.2 AS TECNOLOGIAS

Historicamente, os avanços tecnológicos contribuíram para modificar o modo de vida do homem e as suas relações sociais. Nas últimas décadas, as tecnologias passaram a receber maior destaque na educação, não somente pela demanda social, altamente tecnológica, mas também por causa das potencialidades didáticas que elas podem oferecer (SOUZA JÚNIOR, 2014).

Atualmente, já não há mais dúvidas sobre a necessidade do uso dessas tecnologias em sala de aula (DANTE, 2016). Os recursos tecnológicos oferecem uma grande contribuição para a aprendizagem. Em certas situações, a utilização desses recursos pode facilitar o trabalho docente, dinamizando as salas ou até mesmo oportunizando a exploração de algo que seria inviável sem sua presença (SOUZA; PATARO, 2012).

Observando os livros ou assistindo uma aula clássica percebe-se que historicamente os sistemas de representação do conhecimento matemático tem caráter estático, dificultando a construção de conceitos e teoremas. Neste aspecto, a utilização de tecnologias oferece instâncias físicas em que a representação passa a ter caráter dinâmico, permitindo ao aluno participar ativamente da ação educativa, tendo reflexos positivos nos processos cognitivos, particularmente em relação às concretizações mentais (GRAVINA; SANTAROSA, 1999).

O uso de tecnologias no ensino de Matemática proporciona novas formas de ensinar e de aprender.

> Essas novas formas vêm provocando uma revolução nas práticas tradicionais de ensino que avançam em direção a uma prática pedagógica interdisciplinar voltada para a aprendizagem do aluno-sujeito. Também estabelecem uma nova relação professor-aluno marcada por uma maior interação e cooperação. (ROCHA et al., 2015, p. 22).

No âmbito legal, as orientações também vão ao encontro da utilização de tecnologias no ensino de modo geral e no ensino de Matemática em particular. O Programa Ensino Médio Inovador (ProEMI), estabelece em seu Documento

Orientador (BRASIL, 2013b, p. 11), o “fomento às atividades que envolvam comunicação e uso de mídias e cultura digital, em todas as áreas do conhecimento” como uma das condições necessárias para a reestruturação curricular.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) (BRASIL, 1999) estabelecem como uma das competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática, a utilização adequada dos recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação. As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) (BRASIL, 2013a) por sua vez, enfatizam que as tecnologias devem ser incorporadas e processadas pela escola para evitar a exclusão digital.

O documento preliminar da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2015) sugere que o trabalho com a Matemática no Ensino Médio pode ser enriquecido com o uso de recursos tecnológicos como instrumentos auxiliares para a aprendizagem. O mesmo documento apresenta como um dos objetivos gerais da Matemática para o Ensino Médio: “recorrer às tecnologias digitais para descrever e representar matematicamente situações e fenômenos da realidade, em especial aqueles relacionados ao mundo do trabalho”.

O Plano Nacional de Educação para o decênio 2014-2024 define como uma de suas estratégias:

> incentivar o desenvolvimento, selecionar, certificar e divulgar tecnologias educacionais para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio e incentivar práticas pedagógicas inovadoras que assegurem a melhoria do fluxo escolar e a aprendizagem, assegurada a diversidade de métodos e propostas pedagógicas, com preferência para softwares livres e recursos educacionais abertos. (BRASIL, 2014, s.p).

Apesar de todo o respaldo teórico, detectei ao longo da minha experiência profissional, certa resistência de alguns professores em relação ao uso de tecnologias no ensino. No entanto, o uso de tecnologias em ambientes escolares vem aumentando, embora não seja com a amplitude e abordagem adequada (TODOS PELA EDUCAÇÃO, 2018).

Muitos professores ainda não se conscientizaram sobre os impactos do uso de tecnologia na educação. Apenas 34% dos docentes acreditam que o principal impacto positivo do uso de tecnologias digitais na educação é a motivação dos estudantes e somente 11% veem a melhora no desempenho escolar como dimensão mais relevante (TODOS PELA EDUCAÇÃO, 2018).

O uso de recursos tecnológicos como elemento mediador do ensino de Matemática é incipiente na nossa cultura escolar. No entanto, é crescente o número de propostas que faz uso de tecnologias no ensino dos mais variados conteúdos matemáticos, especialmente dos Programas de Geometria Dinâmica (PGDs), *softwares* educativos destinados ao ensino e aprendizagem de Geometria de maneira não estática, diferentemente dos livros ou do quadro-negro (VAZ, 2012).

A palavra dinâmica aqui empregada "refere-se às ideias de movimento e às mudanças que permitem que os alunos visualizem as construções realizadas, facilitando a compreensão do comportamento geométrico dos elementos envolvidos nesse processo". (SCHATTSCHNEIDER; KING, 1997, p. 58 *apud* ARAUJO, 2017, p. 63).

Para o ensino de Geometria Espacial, os PGDs apresentam-se como um caminho para dinamizar as aulas e favorecer uma aprendizagem significativa. O estudo dos objetos geométricos nos PGDs estimula o raciocínio e favorece a descoberta de novas relações e conceitos geométricos (SOUZA JÚNIOR et al., 2014).

Atualmente existem diversos PGDs gratuitos que podem ser utilizados no ensino de Geometria Espacial, dentre os quais destacam-se o *Calques 3D*, o *Geogebra* e o *Wingeom* (ROCHA et al., 2015). Também existem PGDs pagos, como o *Cabri 3D*, mas que é disponibilizado em uma versão teste para trinta dias com todas as funcionalidades habilitadas.

É possível encontrar na literatura inúmeras pesquisas e propostas didáticas para o ensino de Geometria Espacial com o uso dos PGDs. Por exemplo, (BISCARO et al., 2014) apresentam uma proposta pedagógica utilizando alguns recursos do software *Wingeom* para auxiliar no ensino da Geometria Espacial, no Ensino Médio (MARIN; LEIVAS, 2013), investigam as contribuições do *software Cabri 3D* na visualização de seções obtidas no cubo através de planos. Constataram que o uso do *Cabri 3D* favoreceu ao desenvolvimento de habilidades visuais, bem como de argumentações relativas às construções geométricas realizadas

Com o uso do *Calques 3D,* observou-se progressos efetivos na visualização espacial (RITTER, 2011).

Ainda usando o *Calques 3D*, (ALVES et al., 2005) apresentam uma sequência didática para justificar as fórmulas de volume dos principais sólidos geométricos a partir do *Princípio de Cavalieri*.

Entre os PGDs, o *Geogebra* é aquele que vem ganhando mais popularidade, não só por ser livre e gratuito, mas, principalmente, pela praticidade na sua utilização e pelos variados recursos disponíveis. No XII Encontro Nacional de Educação Matemática (XII ENEM) realizado no ano de 2016, mais de 150 dos trabalhos publicados mencionam o *GeoGebra* (BORTOLOSSI, 2016).

O *Geogebra* é objeto de estudo de diversos pesquisadores e tem sido tema de diversas investigações didáticas (GRAVINA, 2015; BORTOLOSSI, 2012, 2016; VAZ, 2012, 2015; NÓBRIGA, 2015). Foi também tema dos trabalhos de conclusão de curso de 10% dos egressos do Profmat, durante o período de 2013 a 2016 (OLIVEIRA; LUZ, 2017).

No capítulo a seguir serão apresentadas as principais características e funcionalidades no *Geogebra* e da sua plataforma oficial.

3 O SOFTWARE GEOGEBRA

3.1 CARACTERÍSTICAS E FUNCIONALIDADES BÁSICAS

O *Geogebra* é um PGD desenvolvido para o ensino e aprendizagem da Matemática nos vários níveis de ensino (HOHENWARTER, 2002).

Originalmente, o *Geogebra* foi desenvolvido apenas para computadores convencionais, porém, atualmente pode ser executado em dispositivos móveis como tablets, smartphones Android, iPads e iPhones. O *Geogebra* é gratuito. Além disso, por ser também um *software* livre, seus usuários podem executá-lo, copiá-lo, distribuí-lo, estudá-lo, mudá-lo e melhorá-lo, estando em constante desenvolvimento com lançamentos de novas atualizações e aplicativos.

Em sua plataforma oficial[6] são apresentadas as seguintes características:

- ✓ Geometria, Álgebra e a Planilha de Cálculo estão interconectadas e totalmente dinâmicas;
- ✓ Interface fácil de se usar e com muitos recursos poderosos;
- ✓ Ferramentas de desenvolvimento para a criação de materiais didáticos como páginas web interativas;
- ✓ Disponível em vários idiomas, inclusive o português;
- ✓ *Software* de Código Aberto disponível gratuitamente para usuários não comerciais;

É um *software* versátil e proporciona um aprendizado significativo de suas principais ferramentas, possibilitando ao usuário ser autodidata. Seu dinamismo permite a percepção das relações entre os objetos matemáticos, a realização de conjecturas e até mesmo formalização de resultados, tornando possível o processo de ensino e aprendizagem fundamentado na construção do conhecimento e não somente na transmissão de informação (VAZ, 2012).

Com o *Geogebra* pode-se realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos; importar e exportar imagens para editores de textos como o *Word* e *LibreOffice/BROffice* e, a partir da versão 5.0, foi adicionado ao programa recursos da geometria em três dimensões. Além disso,

---

[6] https://www.geogebra.org/about

deriva e integra funções, oferece comandos diversos, como por exemplo para encontrar raízes e pontos extremos de uma função, dentre outras funcionalidades. (VAZ, 2012).

O *Geogebra* está disponível em várias versões e também pode ser usado sem a necessidade de instalá-lo, de forma online, ou por meio de dispositivos de armazenamento como *pendrive* ou HD externo, já que possui uma versão portátil. Para conhecer melhor suas funcionalidades recomenda-se a leitura do Manual disponível em sua plataforma oficial, e também (FRISKE et al., 2016; SIQUEIRA et al., 2017; TROCADO; SANTOS, 2013 e ARAÚJO; NÓBRIGA, 2010).

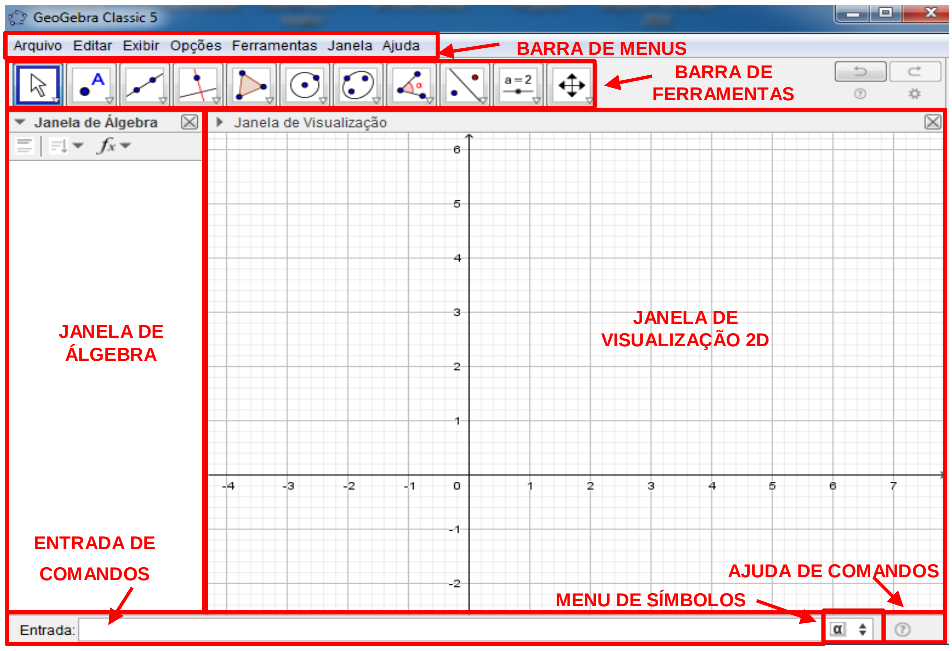
Na próxima seção será apresenta a interface gráfica da versão 5.0, com ênfase na janela 3D e nos principais recursos oferecidos para o ensino de Geometria Espacial.

3.2 A INTERFACE GRÁFICA DA VERSÃO 5.0

Essa seção é fundamentada em (ARAÚJO; NÓBRIGA, 2010; SIQUEIRA et al., 2017 e FRISKE et al., 2016).

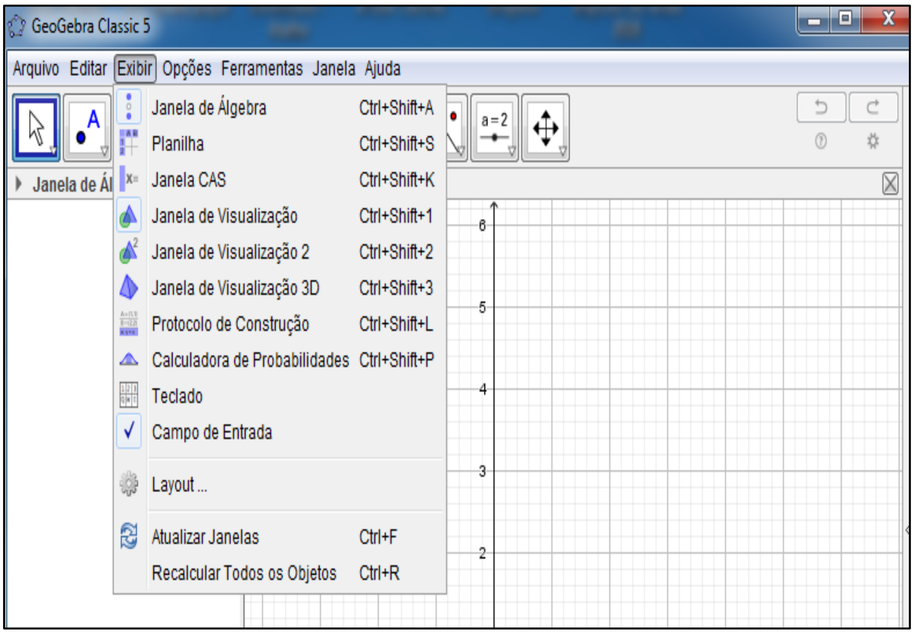
Ao ser iniciado, o *Geogebra* apresenta, por padrão, a *Barra de Menus*, a *Barra de Ferramentas*, a *Janela de Álgebra*, a *Janela de Visualização 2D* e a *Caixa de Entrada de Comandos*, Menu de Símbolos e a *Ajuda de comandos* (Figura 3.1).

Figura 3.1 - Interface inicial do Geogebra versão 5.0



Em cada opção da *Barra de Menus* tem-se outras opções para configurar o *Geogebra*. Para acessá-las deve-se clicar sobre os botões correspondentes: *Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela* e *Ajuda*. Na Figura 3.2 tem-se as opções do *menu Exibir*.

Figura 3.2 - Opções do *menu Exibir.*

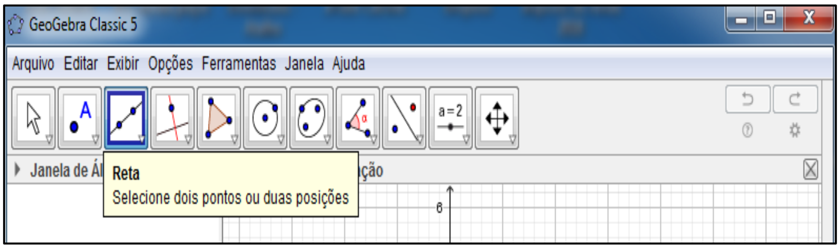


É possível configurar a interface do *software* conforme as atividades que se propõe a realizar. Utilizando o *menu Exibir* pode-se, por exemplo, alterar o *layout*, exibir/esconder elementos e selecionar as demais janelas:

> ✓ **Janela de Álgebra:** Uma janela para exibição e manipulação de dados de forma algébrica.
> ✓ **Planilha:** Uma planilha para construção e organização de dados.
> ✓ **Janela CAS**: Uma janela para Álgebra Computacional.
> ✓ **Janela de Visualização:** Uma janela para construção de objetos com até duas dimensões.
> ✓ **Janela de Visualização 2**: Uma segunda Janela para construção de objetos com até duas dimensões.
> ✓ **Janela de Visualização 3D:** Uma janela para construção de objetos com até três dimensões.
> ✓ **Protocolo de Construção:** Uma janela que informa dados sobre as construções feitas no programa.
> ✓ **Calculadora de Probabilidades:** Uma calculadora para análises de estatísticas e funções de probabilidade.
> ✓ **Teclado:** Serve para fazer entrada de dados no programa a partir do uso do mouse. (SIQUEIRA et al., 2017, p. 6).

A *Barra de Ferramentas* é utilizada para inserir elementos sem a utilização da caixa de entrada. Nela estão as ferramentas que auxiliam na construção dos objetos matemáticos. Ao passar o cursor do *mouse* sobre os ícones é mostrado o nome da ferramenta com a descrição de uso (Figura 3.3).

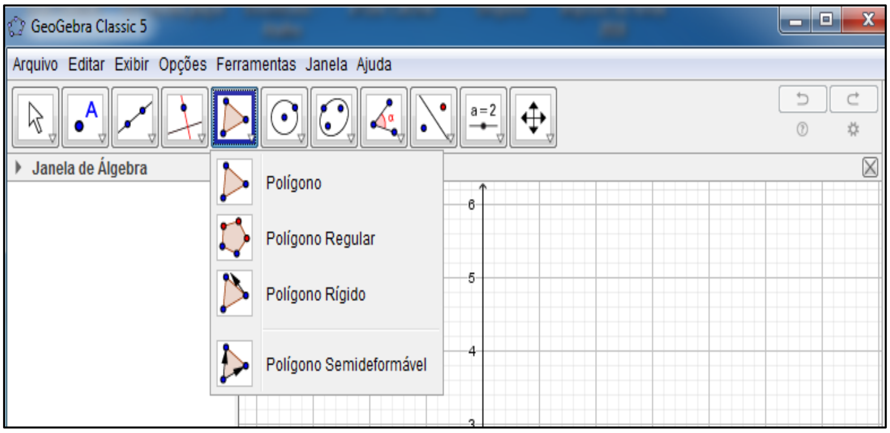
Figura 3.3 - Descrição da ferramenta *Reta.*



A borda azul da ferramenta *Reta* (Figura 3.3) indica ela está selecionada para uso. Isso facilita o uso do programa, pois exibe sempre a ferramenta que está sendo utilizada.

As ferramentas da *Janela de Visualização 2D* do *Geogebra Clássico 5.0* são divididas em 12 grupos. As ferramentas de cada grupo são acessadas clicando no ícone de expansão (pequeno triângulo localizado no canto inferior direito de cada botão). A Figura 3.4 apresenta a expansão da ferramenta *Polígono*.

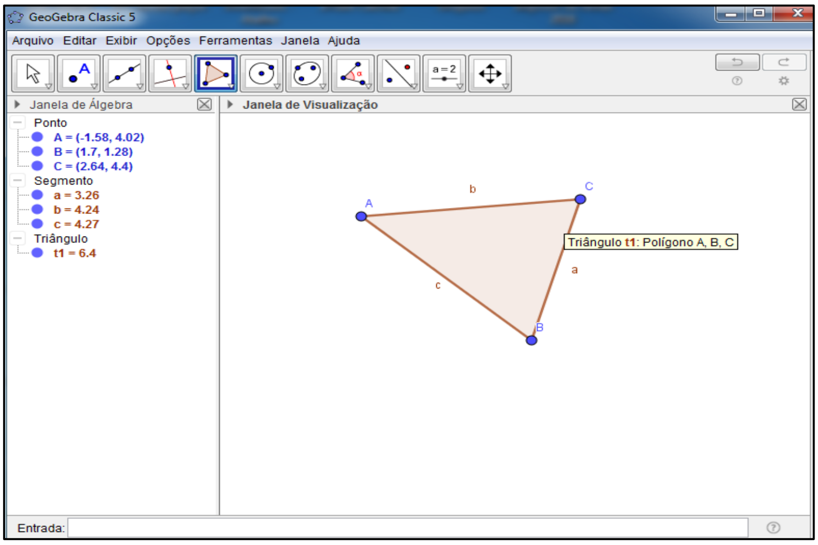
Figura 3.4 - Expansão da ferramenta *Polígono.*



Os grupos de ferramentas variam de acordo com cada janela selecionada, as ferramentas da *Janela CAS*, por exemplo, são totalmente diferentes das ferramentas da *Janela de Visualização 2D*.

A *Janela de Visualização 2D* mostra a representação gráfica de pontos, vetores, segmentos, retas, polígonos, funções e cônicas no plano, que podem ser introduzidos na janela diretamente na zona gráfica utilizando as ferramentas ou por meio da caixa de entrada de comandos. Todas as construções feitas nesta janela têm o respectivo registro na *Janela de Álgebra* (Figura 3.5).

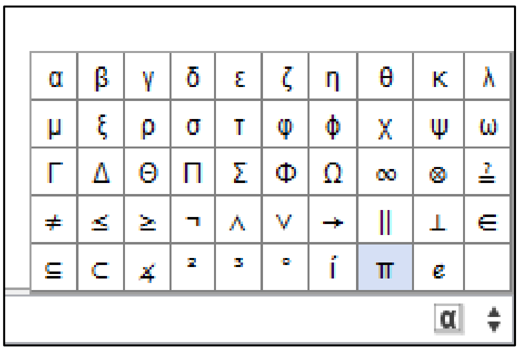
Figura 3.5 - Triângulo disposto na Janela de Visualização 2D com sua respectiva descrição.



A *Caixa de Entrada de Comandos* ou campo de entrada de texto, é usada para inserir comandos, coordenadas, equações e funções por meio do teclado. Normalmente está localizada na parte inferior da interface inicial do *Geogebra.*

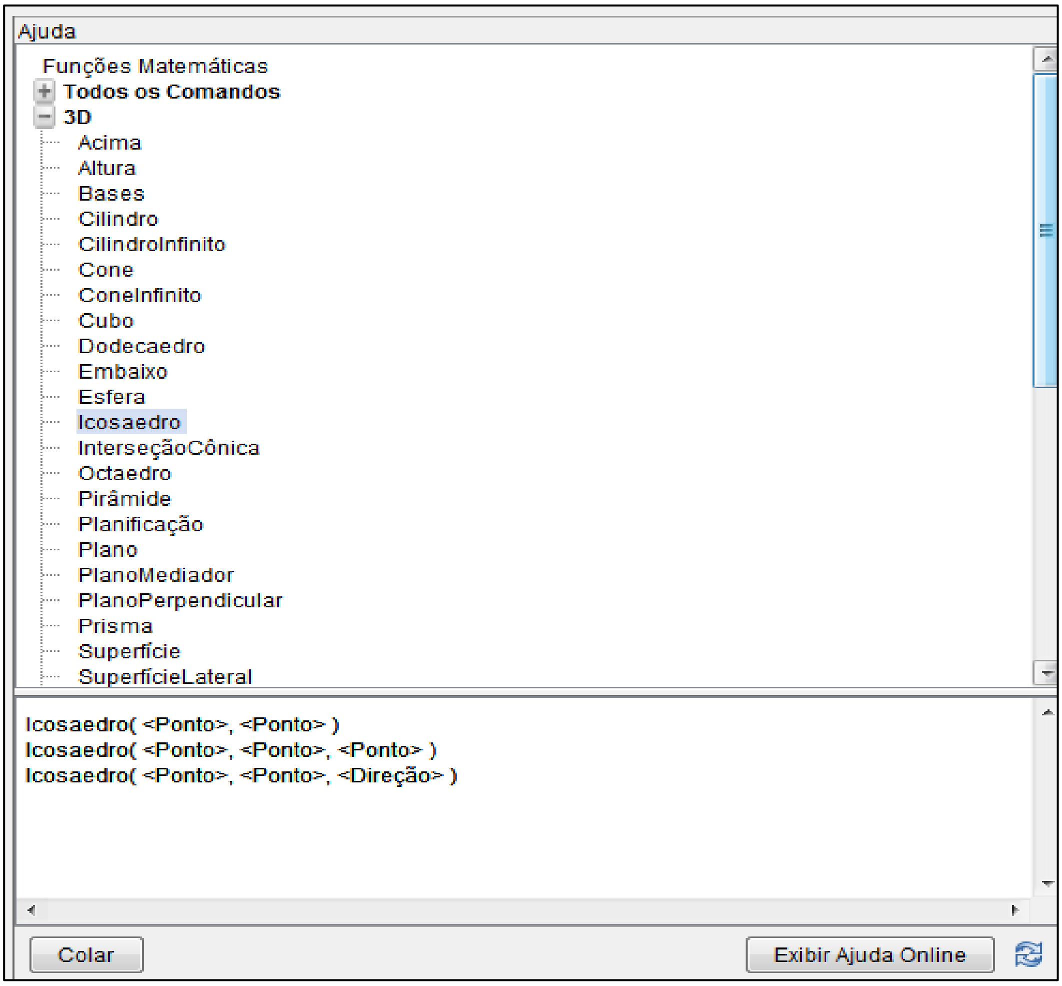
No *Menu de Símbolos*, que está localizado no canto direito da caixa de entrada de texto (Figura 3.1), estão alguns símbolos matemáticos mais frequentemente utilizados para nomear um objeto ou inserir um comando. Para utilizá-los deve-se clicar no ícone correspondente (Figura 3.6).

Figura 3.6 - Símbolos matemáticos



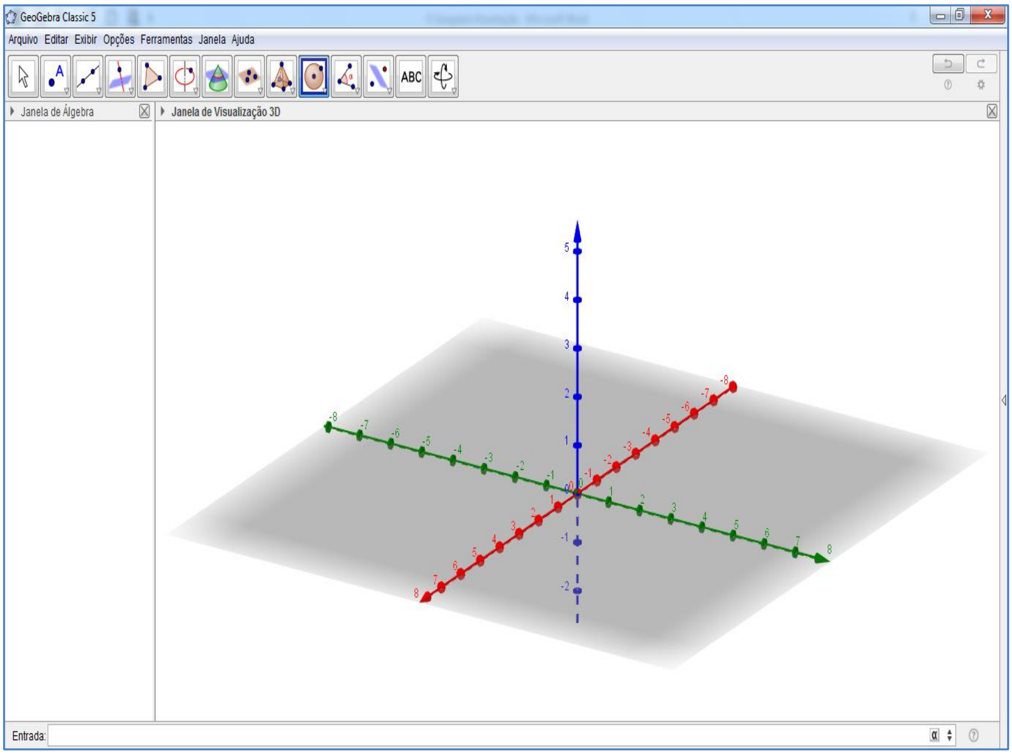
Para facilitar a inserção de comandos, pode-se utilizar a *Ajuda de Comandos*, localizada no canto inferior direito da interface inicial (Figura 3.1). Clicando no ícone de ajuda de comandos (ponto de interrogação), abre-se uma janela com as seguintes opções: *Funções Matemáticas, Todos os Comandos, 3D, Álgebra, Cônicas, Diagramas, Estatística, Funções e Cálculo, Geogebra, Geometria, Listas, Lógica, Matemática Discreta, Matemática Financeira, Otimização, Planilha, Probabilidade, Programação, Texto, Transformações, e Vetores e Matrizes*. Ao selecionar uma dessas opções, é exibida uma caixa de texto com uma pequena descrição de sua funcionalidade e a estrutura do comando. A Figura 3.7 mostra os passos necessários para a construção de um icosaedro: clicar no ícone da *Ajuda de Comando*, em seguida, na opção *3D,* selecionar a opção *icosaedro* e escolher uma das estruturas mostradas.

Figura 3.7 - Comandos para construção do icosaedro.



A *Janela de Visualização 3D* ou simplesmente *Janela 3D* (Figura 3.8) permite uma exibição tridimensional com ferramentas adicionais para esta função, porém mantendo os mesmos recursos de manipulação da *Janela de Visualização 2D*.

Figura 3.8 - Interface inicial da Janela de Visualização 3D.

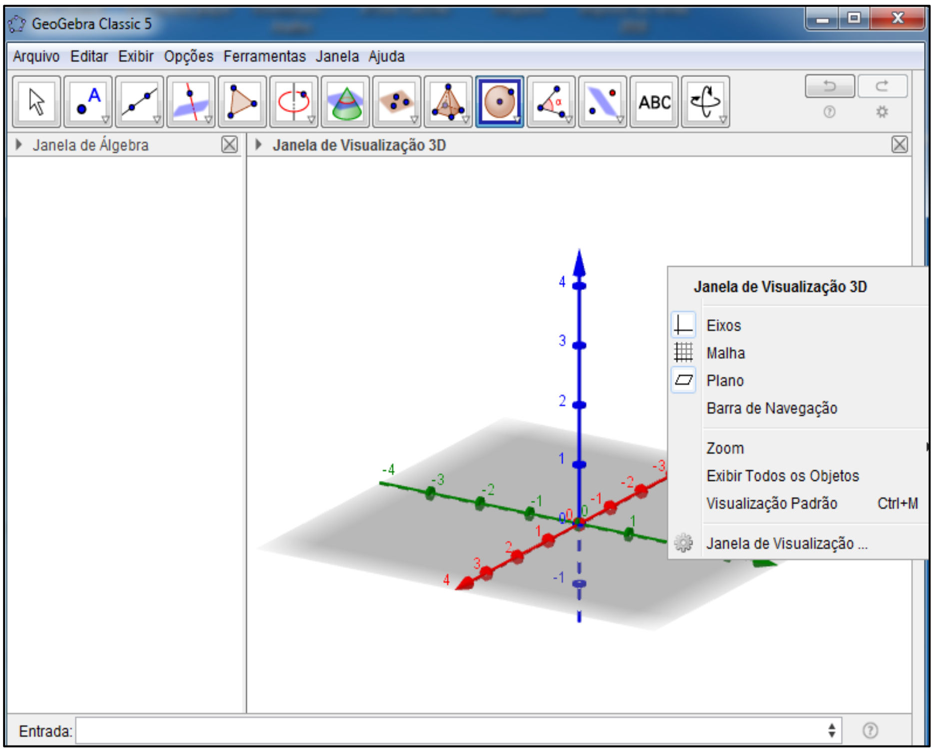


Observe (Figura 3.8) que a *Janela de Visualização 2D* está oculta, no entanto, é possível exibir as duas janelas de visualização (2D e 3D) e *Janela de Álgebra* simultaneamente.

A *Janela 3D* mostra a representação gráfica de pontos, vetores, segmentos, retas, planos, polígonos, funções, cônicas, sólidos geométricos e quádricas no espaço. Como na *Janela 2D*, estes objetos podem ser introduzidos diretamente por meio da *Caixa de Entrada de Comandos.*

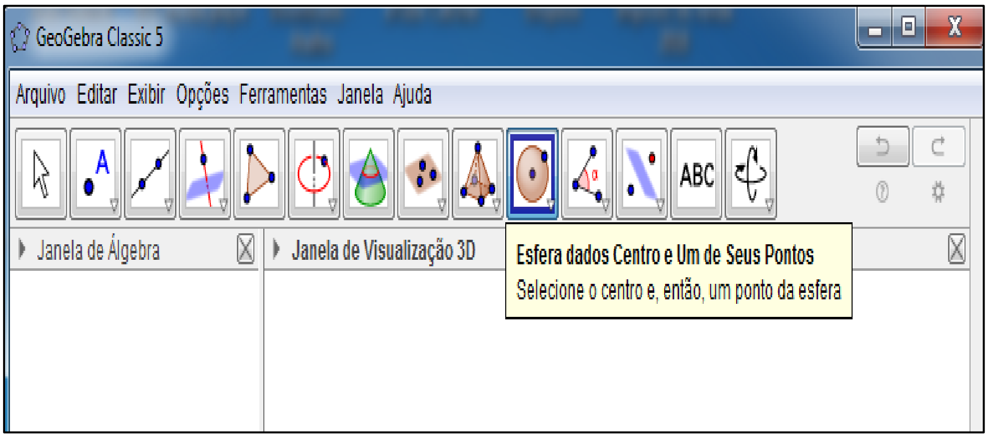
Clicando com o botão direito do mouse sobre qualquer ponto da *Janela 3D*, pode-se personalizá-la, escondendo ou exibindo os eixos coordenados, a malha e o plano, alterar o estilo da linha, as unidades, a cor dos eixos coordenados, das linhas da malha e do plano, alterar a distância entre as linhas, etc. (Figura 3.9).

Figura 3.9 - Configurando a Janela de Visualização 3D.



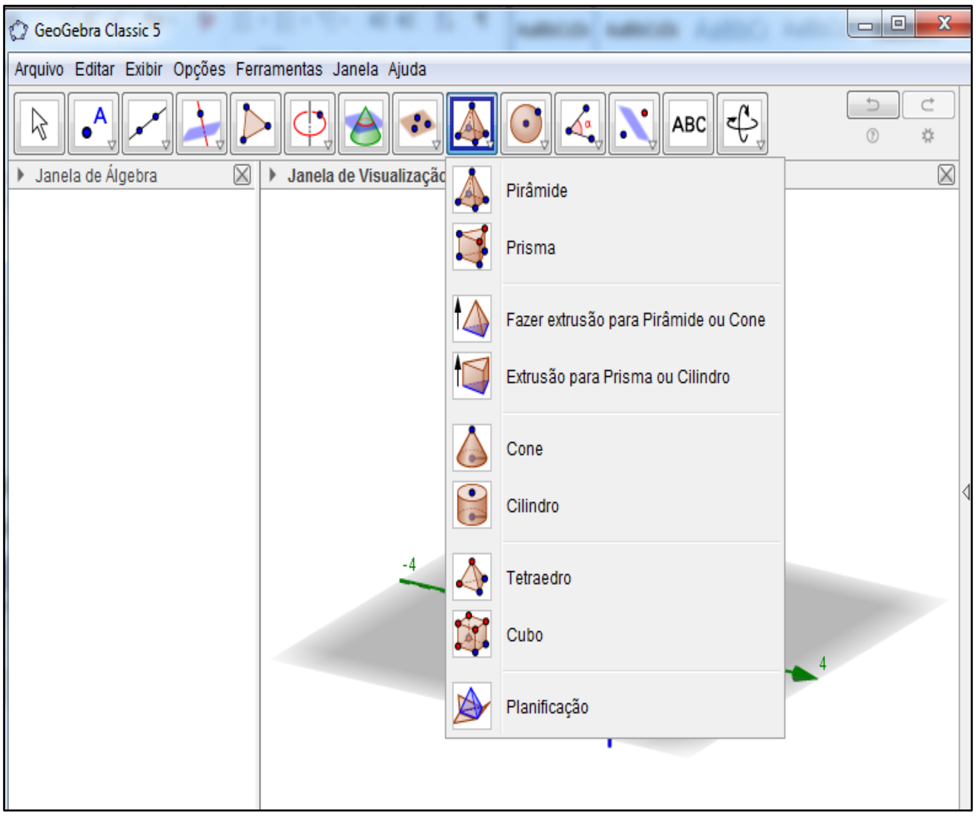
As ferramentas da *Janela 3D* do *Geogebra versão 5.0* são divididas em 14 grupos. De modo semelhante à *Janela 2D*, ao passar o cursor do *mouse* sobre os ícones são exibidos o nome da ferramenta com a descrição de uso (Figura 3.10).

Figura 3.10 - Descrição da ferramenta *Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos.*



As ferramentas de cada grupo são acessadas por meio do ícone de expansão (Figura 3.11).

Figura 3.11 - Expansão da ferramenta *Pirâmide.*



Para serem utilizadas, as ferramentas devem ser selecionadas por meio de um clique no ícone correspondente. A seguir, apresentar-se-á a expansão de cada grupo de ferramentas da *Janela 3D*, contados da esquerda para a direita, descrevendo as principais ferramentas, suas funcionalidades e os passos necessários para utilizá-las, tendo como referência Siqueira et al. (2017).

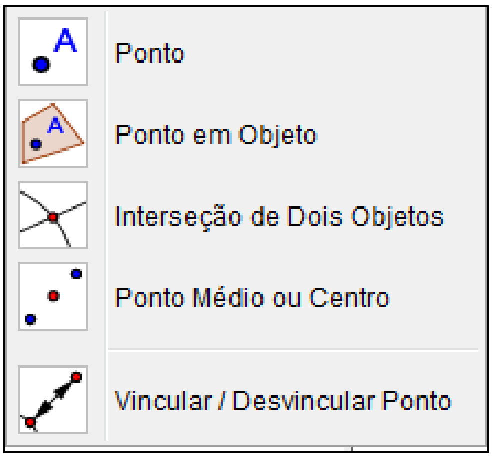
Primeiro grupo: Ferramenta *Mover*

Figura 3.12 - Expansão da ferramenta *Mover.*

- ✓ **Mover:** Permite mover um objeto ao longo da janela de visualização. Selecione o objeto e arrasta-lo até a posição desejada.

Segundo grupo: Ferramenta *Ponto*

Figura 3.13 - Expansão da ferramenta *Ponto.*



- ✓ **Ponto:** Permite criar um ponto na janela de visualização. Clique na posição desejada na janela de visualização.
- ✓ **Ponto em Objeto:** permite que o ponto se vincule ao objeto que está na posição onde será inserido. Clique no objeto desejado.
- ✓ **Interseção de Dois Objetos:** cria um ponto fixo que pertence aos dois objetos ao mesmo tempo. Clique sobre os dois objetos em sequência.
- ✓ **Ponto Médio ou Centro:** mostra o ponto médio de um segmento, de dois pontos ou centro de um círculo ou uma cônica. Selecione os objetos e clique sobre os dois objetos em sequência.

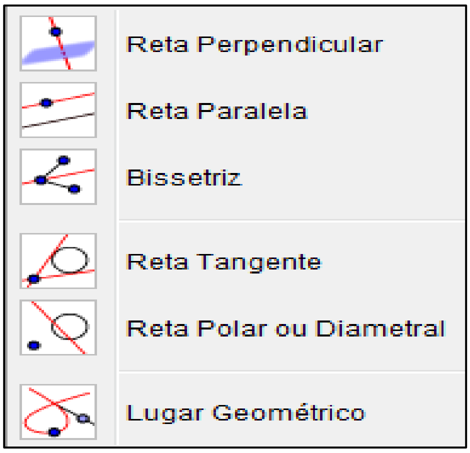
Terceiro grupo: Ferramenta *Reta*

Figura 3.14 - Expansão da ferramenta *Reta.*

- ✓ **Reta:** cria uma reta a partir de dois pontos dados. Clique sobre os dois pontos.
- ✓ **Segmento:** cria um segmento com extremidades em dois pontos dados. Selecione os dois pontos que determinarão o segmento.
- ✓ **Semirreta:** cria uma semirreta a partir de dois pontos já estabelecidos ou não. Clique no primeiro que indicará a origem da semirreta, e no segundo que funcionará como final do vetor direção da mesma.

Quarto grupo: Ferramenta *Reta Perpendicular*

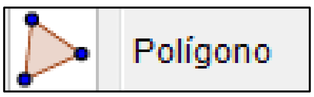
Figura 3.15 - Expansão da ferramenta *Reta Perpendicular.*



- ✓ **Reta Perpendicular:** constrói uma reta perpendicular. Selecione uma reta ou um plano, e o ponto por onde a reta perpendicular passará.
- ✓ **Reta Paralela:** constrói uma reta paralela a partir de uma reta/segmento dada. Selecione a reta/segmento e o ponto por onde a reta paralela passará.
- ✓ **Bissetriz:** constrói uma bissetriz. Selecione três pontos, ou duas retas.
- ✓ **Reta Tangente:** cria uma reta tangente a um círculo, uma cônica ou uma função. Selecione o ponto de tangência e, em seguida, o objeto a quem a reta será tangente.

Quinto grupo: Ferramenta *Polígono*

Figura 3.16 - Expansão da ferramenta *Polígono.*



- **Polígono:** constrói polígonos a partir de pontos dados. Clique sobre os pontos dados partindo de um desses pontos e finalize clicando novamente no ponto inicial.

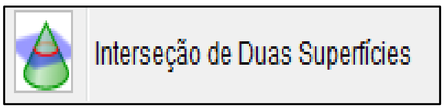
Sexto grupo: Ferramenta *Círculo*

Figura 3.17 - Expansão da ferramenta *Círculo.*

- **Círculo dados Eixo e Um de seus Pontos:** cria um círculo a partir da seleção de seu eixo de direção (perpendicular ao plano onde o círculo estará contido) e um de seus pontos.
- **Círculo (Centro - Raio + Direção):** cria um círculo a partir da seleção de seu centro, sua direção e um de seus pontos.
- **Círculo definido por Três Pontos:** cria um círculo a partir de três pontos dados. Selecione os três pontos.

Sétimo grupo: *Interseção de Duas Superfícies*

Figura 3.18 - Expansão da ferramenta *Interseção de duas superfícies.*



- ✓ **Interseção de Duas Superfícies:** gera a curva de interseção entre duas superfícies, para isso basta selecioná-las.

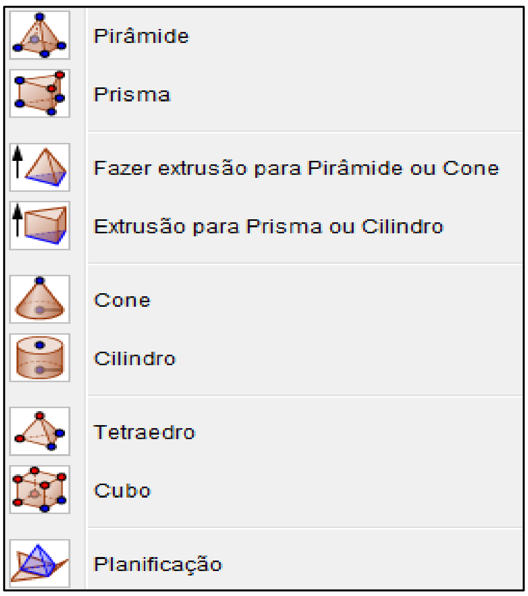
Oitavo grupo: *Plano por Três Pontos*

Figura 3.19 - Expansão da ferramenta *Plano por três pontos.*

- ✓ **Plano por três pontos:** cria um plano a partir de 3 pontos não colineares. Selecione os três pontos.
- ✓ **Plano Perpendicular:** cria um plano a partir de uma reta perpendicular a ele e um ponto contido nesse plano. Selecione um ponto contido em plano e uma reta fora dele.
- ✓ **Plano Paralelo:** cria um plano paralelo a outro. Selecione um plano e o ponto fora dele.

Nono grupo: Ferramenta *Pirâmide*

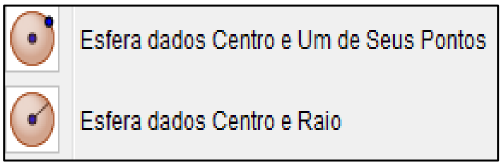
Figura 3.20 - Expansão da ferramenta *Pirâmide.*



- ✓ **Pirâmide:** cria uma pirâmide. Selecione ou crie um polígono para a base da pirâmide e, então, selecione ou crie um vértice oposto à base.
- ✓ **Prisma:** cria um prisma. Selecione ou crie um polígono para a base do prisma e, então, selecione ou crie um ponto da base oposto.
- ✓ **Fazer extrusão para Pirâmide ou Cone:** cria cones ou pirâmides retas a partir de polígonos/círculos já determinados. Arraste o polígono/círculo, ou selecione o polígono/círculo e entre com a altura da pirâmide/cone.
- ✓ **Cone:** cria um cone. Selecione dois pontos e especifique o raio.
- ✓ **Cilindro:** cria um cilindro. Selecione dois pontos e especifique o raio.
- ✓ **Tetraedro Regular:** cria um tetraedro regular. Clique em dois pontos distintos de um plano.
- ✓ **Cubo:** cria um cubo. Clique em dois pontos distintos de um plano.
- ✓ **Planificação:** faz planificação do poliedro selecionado.

Décimo grupo: Ferramenta *Esfera*

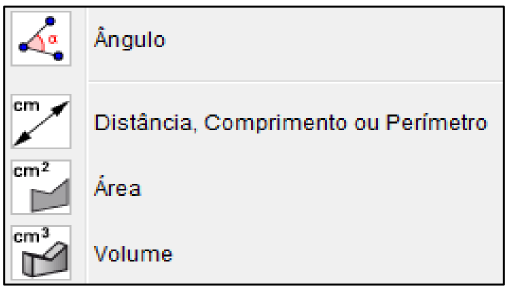
Figura 3.21 - Expansão da ferramenta *Esfera.*



- ✓ **Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos:** cria uma esfera. Escolha o centro e outro ponto distinto qualquer.
- ✓ **Esfera dados Centro e Raio:** cria uma esfera. Escolha o centro e entre com a medida do raio.

Décimo primeiro grupo: Ferramenta *Ângulo*

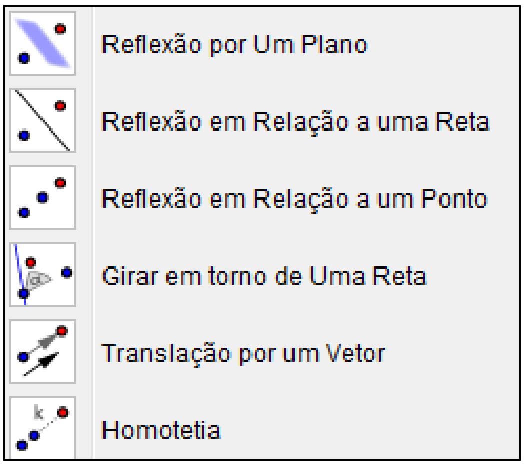
Figura 3.22 - Expansão da ferramenta Â*ngulo.*



- ✓ **Ângulo:** determina o ângulo entre dois segmentos. Selecione três pontos distintos ou duas retas/segmentos.
- ✓ **Distância, Comprimento ou Perímetro:** exibe uma caixa de texto com informação sobre um ou mais objetos. Selecione os objetos desejados.
- ✓ **Área:** exibe uma caixa de texto com informação sobre a área de um objeto. Selecione o objeto.
- ✓ **Volume:** exibe uma caixa de texto com informação sobre o volume de um objeto. Selecione o objeto.

Décimo segundo grupo: Ferramenta *Reflexão Por Um Plano*

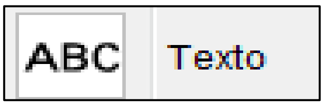
Figura 3.23 - Expansão da ferramenta *Reflexão Por Um Plano.*



- ✓ **Reflexão por Um Plano:** cria o reflexo de um objeto a partir de um plano. Selecione o objeto e o plano.

Décimo terceiro grupo: Ferramenta *Texto*

Figura 3.24 - Expansão da ferramenta *Texto.*



- ✓ **Texto:** permite a criação de um texto para ser exibido na Janela de Visualização 3D. Selecione a posição onde o texto será exibido.

Décimo quarto grupo: Ferramenta *Virar Janela de Visualização 3D*

Figura 3.25 - Expansão da ferramenta *Girar Janela de Visualização 3D.*

- ✓ **Girar Janela de Visualização 3D:** gira a janela de visualização. Clique sobre um ponto qualquer da janela, segure e arraste o cursor do *mouse.*
- ✓ **Mover Janela de Visualização:** movimenta o conteúdo exibido na Janela de Visualização. Clique sobre um ponto qualquer da janela, segure e arraste o cursor do *mouse.*
- ✓ **Ampliar:** amplia a Janela de Visualização com foco no local selecionado. Selecione o local.
- ✓ **Exibir/Esconder Objeto:** exibe e oculta um ou mais objetos temporariamente. Selecione o objeto.
- ✓ **Copiar Estilo Visual:** permite que o estilo de um determinado objeto seja copiado para outros objetos. Selecione o objeto cujo estilo será copiado, e, em seguida, aqueles que receberão a nova configuração.
- ✓ **Apagar:** apaga objetos. Selecione o objeto desejado.

Percebe-se que as ferramentas do *Geogebra* podem ser facilmente acessadas e apresentam descrições de como utilizá-las, dando condições para que o usuário compreenda o passo a passo das construções e como torná-las dinâmicas (VAZ, 2012).

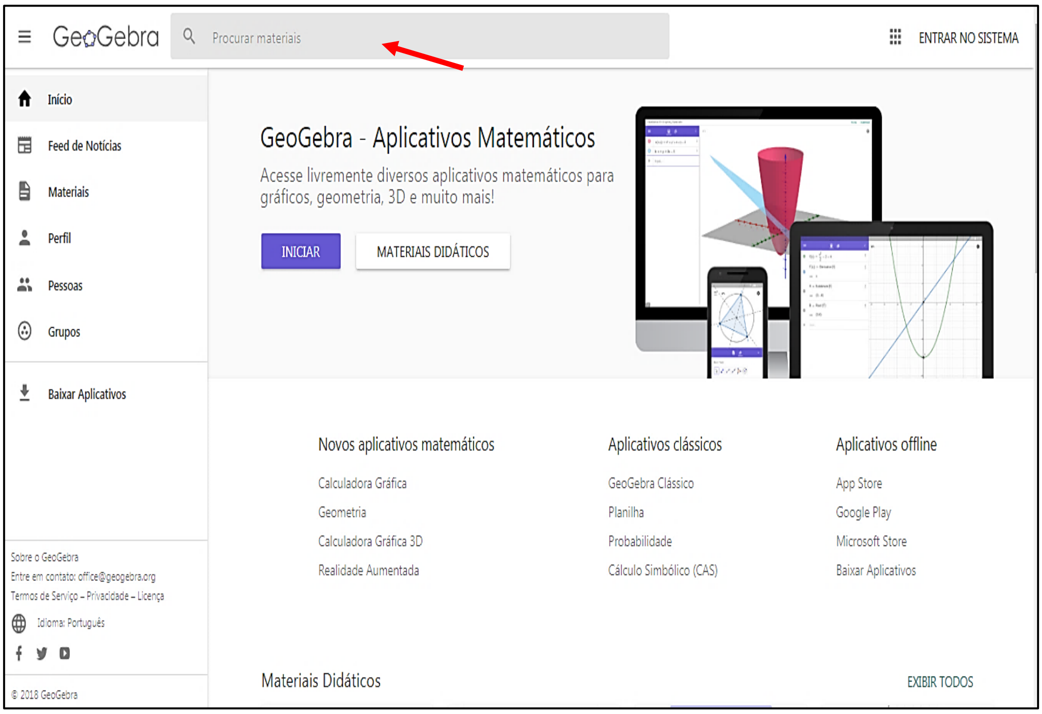
Os usuários que estão em um nível avançado e/ou intermediário em relação a utilização do *Geogebra* podem criar animações para auxiliar no ensinar dos variados conteúdos matemáticos. Já os usuários iniciantes, podem baixar e usar os diversos materiais produzidos por meio desse *software* como animações, construções, vídeos, *applets*[7], livros digitais feitos neste software (*GeogebraBooks*), que estão disponíveis na plataforma oficial, a qual será apresentada na seção seguinte.

3.3 A PLATAFORMA OFICIAL

Essa seção é fundamentada em (NÓBRIGA, 2017b) e apresenta algumas das potencialidades da plataforma oficial do *Geogebra*[8], especialmente em relação aos materiais disponíveis gratuitamente para *download*.

Nos últimos anos o *Geogebra* deixou de ser apenas um *software* educativo de matemática e vem se tornando uma poderosa plataforma educativa que pode ser usada em diferentes áreas com objetivos que não se limitam apenas aos educacionais (NÓBRIGA, 2017b).

Figura 3.26 – Interface inicial da plataforma Geogebra em 04 de agosto 2018.



---

[7] Pequenos softwares que executam atividades específicas no âmbito de outro programa maior.

[8] https://www.geogebra.org/home

Na interface inicial (Figura 3.26), tem-se acesso a versão online do *Geogebra* clicando no ícone *Iniciar*. Também é possível acessar os aplicativos e versões online e offline, por meio dos links correspondentes nas listas *Novos aplicativos matemáticos*, *Aplicativos clássicos* e *Aplicativos offline* e realizar *download* das versões instaláveis em dispositivos móveis e computadores, além dos materiais didáticos disponíveis, por meio dos links *Baixar Aplicativos* localizados na parte lateral esquerda e na lista *Aplicativos offline* e do ícone *Materiais Didáticos.*

Atualmente a plataforma possui mais de um milhão de materiais desenvolvidos no *Geogebra* por usuários de diversas partes do mundo, abordando diversos conteúdos matemáticos nos diferentes níveis de ensino, tais como: vídeos, *GeogebraBooks* e *applets*.

Para pesquisar os materiais deve-se digitar a palavra chave no local indicado pela seta vermelha (Figura 3.26) e, em seguida, acionar a tecla *Enter*. Escolhido o material desejado, pode-se usá-lo diretamente no navegador, ou ainda, baixá-lo, estudá-lo e modificá-lo com a devida atribuição ao autor. Pode-se também compartilhar os materiais modificados ou criados, no entanto, faz-se necessária a criação de uma conta na plataforma.

A conta pode ser criada por meio do link *Entrar no Sistema* (localizado na parte superior direita da página inicial). Ao selecionar o link *Entrar no Sistema* será exibida uma janela (Figura 3.27), acionando *Criar uma Conta* será exibida uma janela para realização do cadastro na plataforma (Figura 3.28).

Figura 3.27 - Criação de conta na plataforma *Geogebra.*

Figura 3.28 - Cadastro na plataforma *Geogebra.*

Após inserir os dados solicitados no cadastro, é necessário clicar em *Criar uma* Conta, em seguida, completar o formulário *(Figura 3.29)* e escolher a opção *Gravar,* com isso a criação da conta será concluída. O nome cadastrado será mostrado no canto superior direito da janela (Figura 3.30).

Figura 3.29 - Preenchendo o perfil do usuário da plataforma *Geogebra.*

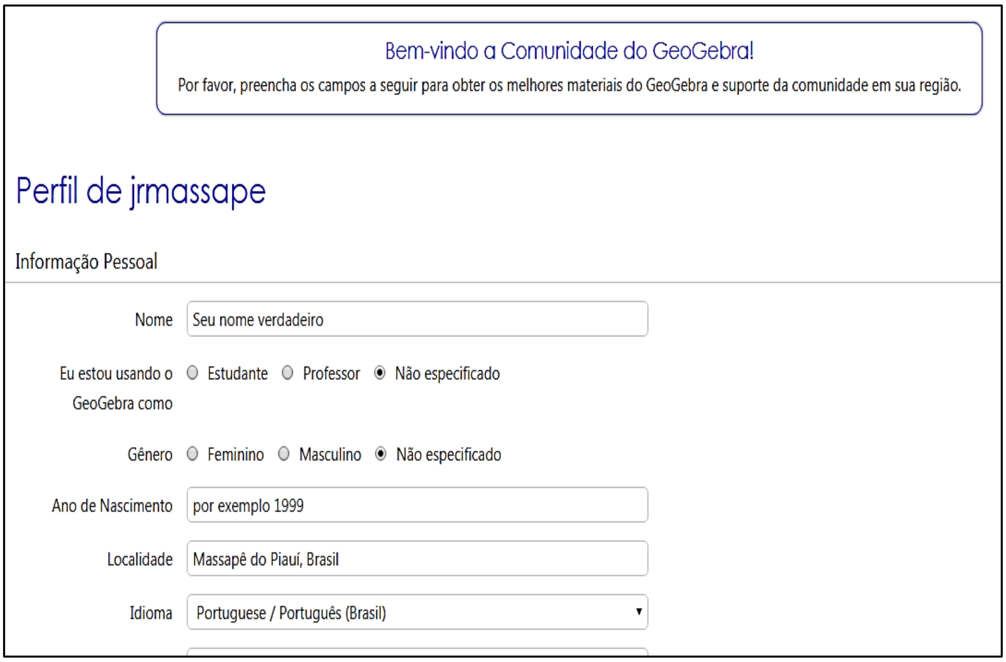
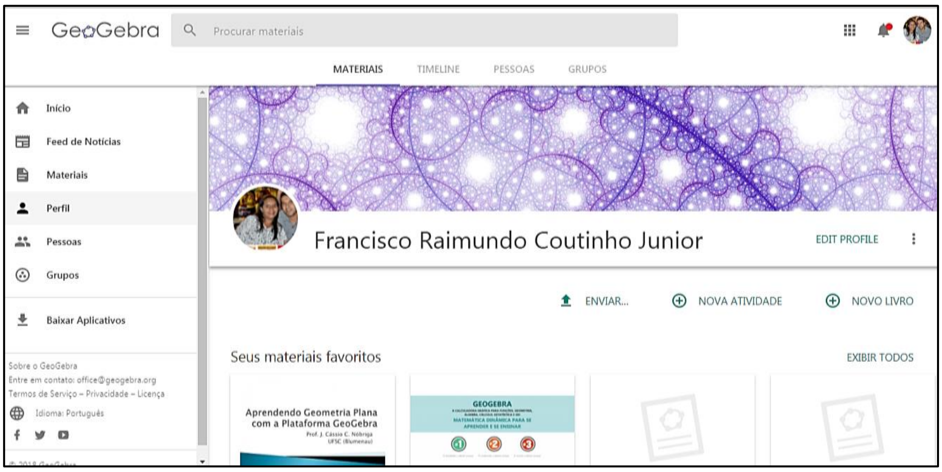


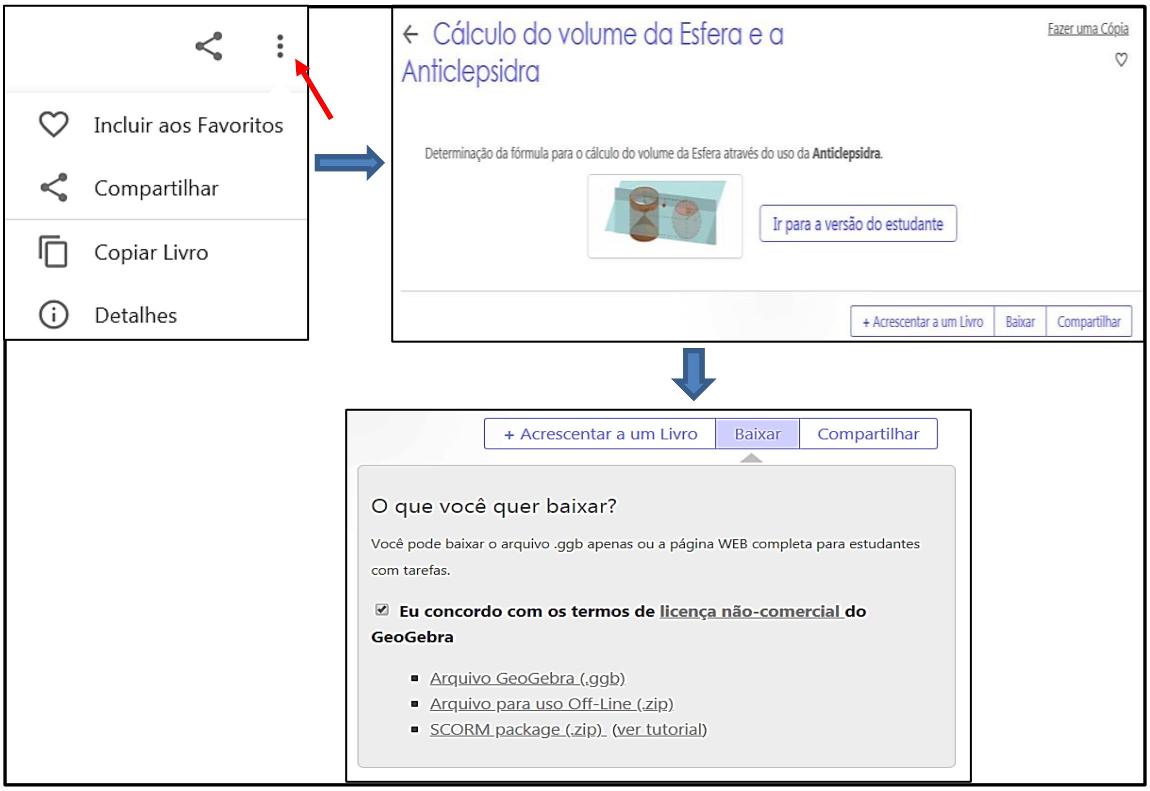
Figura 3.30 - Conclusão da criação da conta na plataforma *Geogebra.*



A conta também pode ser criada vinculada a uma outra conta (Google, Office 365, Facebook, Microsoft ou Twiter), clicando no ícone correspondente (Figura 3.28) e seguindo os passos solicitados.

Para fazer *download* dos materiais disponíveis na plataforma, é preciso abrir o material desejado, clicar em ⋮ (indicado pela seta vermelha), escolher a opção *Detalhes*, clicar em *Baixar*, marcar a opção *Eu concordo com os termos de licença não-comercial do GeoGebra* e escolher a opção desejada (Figura 3.31).

Figura 3.31 - Fazendo download na plataforma oficial do *Geogebra.*



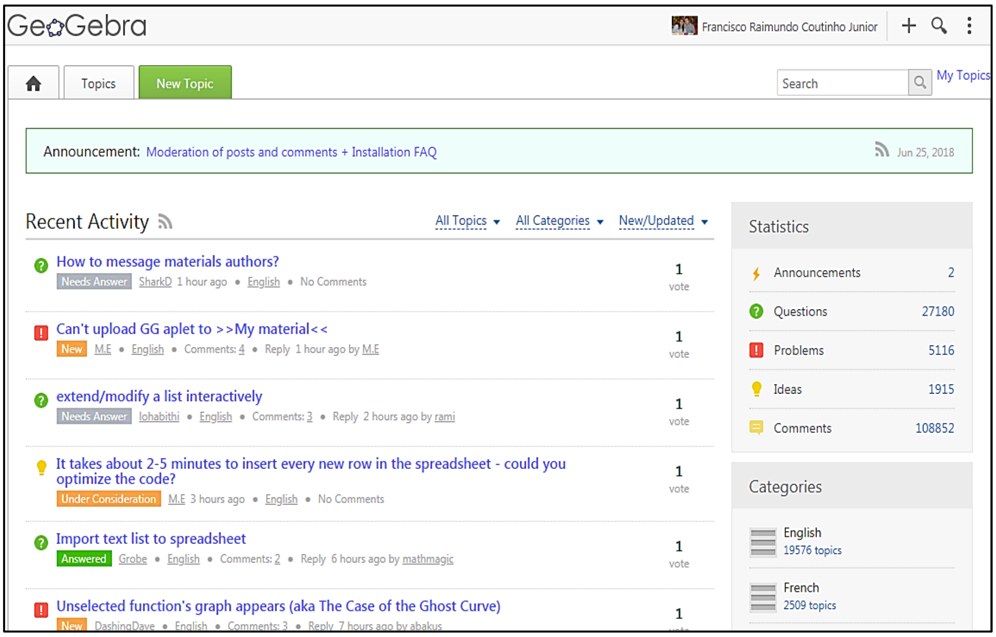
Uma importante ferramenta disponível na plataforma é o *Fórum*. Trata-se de um ambiente virtual onde os usuários podem colocar e esclarecer dúvidas, trocar experiências, sugerir melhorias, etc. O suporte ao *Fórum* é dado pelos próprios programadores e pela enorme comunidade do *Geogebra*.

O *Fórum* pode ser acessado por meio do link *Ajuda*, que fica localizado na parte inferior da interface inicial da plataforma (Figura 3.32).

Figura 3.32 – Acesso ao *Fórum do Geogebra.*

A interface inicial *Fórum* é mostrada na Figura 3.33.

Figura 3.33 - *Fórum do Geogebra* em 04 de agosto 2018.



Apesar do riquíssimo acervo de materiais disponíveis nessa plataforma, esta ainda é pouco conhecida por grande parte dos professores de Matemática. Entende-se que esses materiais, utilizados dentro de uma proposta de ensino com atividades planejadas, podem favorecer a construção do conhecimento e possibilitar uma aprendizagem matemática mais significativa (NÓBRIGA, 2017b). Por isso, selecionou-se alguns *applets* disponíveis nesta plataforma para auxiliar o ensino de volumes de sólidos geométricos no Ensino Médio.

No próximo capítulo, serão apresentados os aspectos metodológicos utilizados nesta pesquisa.

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Em uma investigação, não se utiliza, em geral, apenas um método ou uma técnica, mas todos os que forem necessários ou apropriados para determinado caso. Na maior parte das vezes, é usada combinação de dois ou mais métodos (LAKATOS; MARCONI, 2003). Nesta pesquisa não foi diferente, para realizá-la, usou-se diferentes métodos e técnicas de pesquisas, detalhados a seguir juntamente com suas classificações.

Quanto a sua natureza, esta é uma pesquisa aplicada com finalidade prática. Para atingir os objetivos pretendidos, resolveu-se elaborar e aplicar uma sequência didática (APÊNDICE C), de forma que o autor/pesquisador possa atuar como condutor do aluno na compreensão do processo de dedução das fórmulas de volume dos sólidos geométricos comumente estudados no Ensino Médio (cubo, paralelepípedo, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera). Entende-se que quando o aluno consegue compreender o processo de dedução das fórmulas, a possibilidade de utilizá-las adequadamente na resolução de problemas é ampliada significativamente (LIMA, 2007).

Em relação aos procedimentos, trata-se de uma investigação feita por meio de pesquisa de campo. Esse tipo de pesquisa é utilizado "com o objetivo de conseguir informações e/ou conhecimentos acerca de um problema, para o qual se procura uma resposta, ou de uma hipótese, que se queira comprovar, ou, ainda, descobrir novos fenômenos ou as relações" (LAKATOS e MARCONI, 2003, p. 186).

Se a pesquisa de campo envolver um experimento, que é o caso desta pesquisa, depois da pesquisa bibliográfica deve-se:

> a) selecionar e enunciar um problema, levando em consideração a metodologia apropriada; b) apresentar os objetivos da pesquisa, sem perder de vista as metas práticas; c) estabelecer a amostra correlacionada com a área de pesquisa e o universo de seus componentes; d) estabelecer os grupos experimentais e de controle; e) introduzir os estímulos; f) controlar e medir os efeitos. (LAKATOS; MARCONI, 2003, p. 186).

Após realizar uma pesquisa bibliográfica, decidiu-se utilizar alguns dos vários *applets* disponíveis na plataforma oficial do *Geogebra*, por entender que estes facilitariam a compreensão do conteúdo estudado.

Elaborada a sequência didática, o passo seguinte foi a definição do local onde a pesquisa seria realizada. Deveria ser uma escola com espaço e computadores disponíveis em quantidade suficiente para as atividades. Preferencialmente, uma escola cujos alunos apresentassem dificuldades na aprendizagem do conteúdo proposto.

Definida a escola, foram escolhidas duas turmas de 3ª série do Ensino Médio. Uma para aplicação da sequência didática proposta, e outra na qual o conteúdo seria ministrado da forma tradicional. O perfil da escola e dos alunos pesquisados é detalhado na próxima seção.

Antes de iniciar a aplicação da sequência didática, em ambas as turmas, os alunos responderam sete *Atividades Diagnósticas* (APÊNDICE A) que objetivaram verificar o conhecimento prévio dos alunos sobre sólidos geométricos, sua classificação, o cálculo de volumes e também sobre conteúdos matemáticos necessários para dedução das fórmulas, a saber: *Teorema de Tales,* semelhança de triângulos, *Teorema de Pitágoras* e áreas de figuras planas.

A partir da análise das *Atividades Diagnósticas*, aplicou-se as *Atividades de Nivelamento* (APÊNDICE B) com a finalidade de aprimorar conceitos e propriedades dos conteúdos de aprendizagem insatisfatória, proporcionando a obtenção dos conhecimentos necessários para compreensão da dedução das fórmulas para o cálculo de volume de sólidos geométricos. Foram considerados conteúdos de aprendizagem insatisfatória aqueles em que a turma apresentou índice de erro/resposta em branco superior a 30%.

Ao final da aplicação da sequência didática foi aplicado um *Questionário Comparativo* (APÊNDICE D) nas duas turmas, composto por questões sobre o conteúdo estudado retiradas de vestibulares diversos e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), a fim de estabelecer uma comparação dos desempenhos de ambas e verificar as contribuições da aplicação da sequência didática em relação a metodologia tradicional.

Para averiguar as hipóteses inicialmente definidas, foram feitas reflexões com base em observações sistemáticas e diálogos durante a realização da pesquisa e nos registros das impressões dos alunos sobre as atividades desenvolvidas, obtidos por meio da aplicação do questionário denominado *Questionário Avaliativo* (APÊNDICE E).

Utilizou-se o raciocínio hipotético-dedutivo para a análise dos dados e descrição dos resultados. No método hipotético-dedutivo,

> [...] o cientista, através de uma combinação de observação cuidadosa, hábeis antecipações e intuição científica, alcança um conjunto de postulados que governam os fenômenos pelos quais está interessado, daí deduz ele as consequências por meio de experimentação e, dessa maneira, refuta os postulados, substituindo-os, quando necessário, por outros, e assim prossegue. (KAPLAN,1972, p. 12 *apud* GIL, 2008, p. 12).

Em pesquisas de campo, os procedimentos analíticos são principalmente de natureza qualitativa (GIL, 2008). Assim, com o intuito de obter coesão com os procedimentos utilizados, embora tenha sido feita uma análise quantitativa simples dos desempenhos das duas turmas no *Questionário Comparativo*, a abordagem adotada nesta pesquisa foi essencialmente qualitativa.

Além disso, optou-se pela abordagem qualitativa porque este tipo de investigação esclarece o dinamismo interno das situações, frequentemente invisível para observadores externos (GODOY, 1995, p. 63).

4.1 CARACTERIZAÇÃO DO CAMPO DE PESQUISA E DOS SUJEITOS ENVOLVIDOS

A pesquisa foi realizada em duas turmas de 3ª série (Turma A e Turma B) do Ensino Médio de uma escola pública estadual com 202 alunos matriculados neste ano de 2018 e que está localizada na zona urbana de um município do semiárido piauiense. A escola possui uma sala de informática com 17 computadores, dos quais apenas 10 estavam funcionando no período em que a pesquisa foi realizada.

A Turma A é composta por 12 alunos e a Turma B é composta por 23 alunos. Na primeira turma, foi aplicada a sequência didática proposta nesse trabalho e, na segunda turma, o mesmo conteúdo foi ministrado da forma como normalmente é ensinada na escola, ou seja, tomando como base o livro didático e sem a utilização de tecnologias educacionais. Não havendo portanto, diferenças significativas, a turma A foi escolhida para a aplicação da sequência didática apenas por questões logísticas para este aplicador.

De acordo com os arquivos desta escola, o Ideb registrado em 2017 foi de 3,4 e o índice SAEPI registrado em 2017 no Ensino Médio em Matemática foi de 249,8 na 1ª série, 239,3 na 2ª série e 247,2 na 3ª série, em uma escala que varia de 0 a 500. Tais desempenhos são considerados como abaixo do básico pelo Ministério da

Educação (MEC) e pelo SAEPI, ou seja, indicam que os alunos não atingiram os conhecimentos básicos esperados para as séries avaliadas.

Dentre os conhecimentos esperados e não atingidos pelos alunos no SAEPI está a habilidade de *resolver problemas envolvendo a área total e/ou volume de um sólido geométrico (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera)*. Ainda segundo os arquivos escolares, uma avaliação diagnóstica feita do início do 2º semestre de 2017 pela Secretaria Estadual de Educação do Piauí, mostrou que apenas 20% dos alunos da escola acertou os itens referentes a mesma habilidade.

Os alunos de ambas as turmas possuem perfis semelhantes: a faixa etária varia de 16 a 29 anos; 70% dos alunos da Turma A e 73% da Turma B são filhos de trabalhadores rurais; a maioria (90% da Turma A e 91% da Turma B) concluiu o Ensino Fundamental na rede municipal de ensino do município onde a pesquisa foi realizada, o que indica que chegaram ao Ensino Médio com baixo desempenho em Matemática, tendo em vista que o Ideb do município, em 2015, nos anos finais do Ensino Fundamental foi de 3,0.

Além disso, como quase a totalidade dos alunos pesquisados concluiu a 2ª série do Ensino Médio na própria escola em 2017, o resultado do SAEPI para esta série neste mesmo ano evidencia o baixo desempenho desses alunos em Matemática.

Como pode-se perceber, é necessário melhorar a aprendizagem dos alunos da escola em Matemática, especialmente em relação ao volume de sólidos geométricos e, consequentemente, o desempenho destes nas avaliações externas. Dessa forma, considerou-se que essa escola seria um local ideal para aplicação da sequência didática proposta nesta pesquisa e que será apresentada da próxima seção.

4.2 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

Nesta seção serão descritos os procedimentos metodológicos utilizados durante o desenvolvimento das atividades. A aplicação das atividades ocorreu durante o período de abril a junho de 2018. O tempo de duração de cada aula foi de 50 minutos.

4.2.1 Diagnóstico

As *Atividades Diagnósticas* foram aplicadas nas duas turmas pesquisadas. O tempo de aplicação foi de duas aulas. Para que o diagnóstico pudesse retratar com precisão a realidade das turmas, durante a aplicação destas atividades não foi permitido que os alunos consultassem materiais como livros e celulares e também não houve interferência por parte do pesquisador no sentido de orientar e/ou ajudar os alunos na resolução.

4.2.2 Nivelamento

A partir da análise das *Atividades Diagnósticas*, constatou-se que os alunos de ambas as turmas apresentavam deficit de aprendizagem significativos em relação aos conceitos e propriedades da Geometria Plana e Espacial analisados. Com o intuito de aprimorar os conhecimentos, foi elaborada e apresentada uma síntese – sem um aprofundamento teórico mais rebuscado – para retomada, por meio aulas expositivas dialogadas, dos seguintes conteúdos: *Teorema de Tales*, semelhança de triângulos, *Teorema de Pitágoras* e áreas de figuras planas. Essa retomada ocorreu durante três aulas.

Em seguida, iniciou-se, na Turma B, o ensino de volume de sólidos geométricos da forma tradicional, tendo como principal recurso didático o livro adotado pela escola, e na Turma A, iniciou-se a aplicação das *Atividades de Nivelamento* (APÊNDICE B), que foram realizadas em 06 aulas.

A primeira atividade de nivelamento tem o objetivo de aprimorar a percepção das diferenças entre poliedros e não poliedros e classificá-los de acordo com suas características. Para iniciar esta atividade, colocou-se alguns objetos do cotidiano dos alunos com formatos diferentes sobre uma mesa e selecionou-se aleatoriamente quatro alunos da turma para separarem os objetos em dois grupos: os poliedros e os não poliedros. Concluída a separação, pediu-se que os alunos justificassem suas escolhas. Apesar de não ter ocorrido erros na separação, aproveitou-se a oportunidade para reforçar os conceitos de poliedros e não poliedros.

Ainda como os objetos sobre a mesa, selecionou-se outros quatro alunos da turma para dividirem os objetos conforme sua semelhança com paralelepípedos, cubos, cilindros, cones, pirâmides e esferas. Nesta separação houve alguns pequenos equívocos que foram sanados observando as definições destes sólidos. Para finalizar a atividade, enfatizou-se que o cilindro, o cone e a esfera são gerados pelo giro de uma curva ou de um segmento de reta, chamada geratriz, em torno de um eixo de rotação.

Por meio da realização da segunda e terceira atividades, os alunos construíram, com base na investigação, a ideia intuitiva de volume de um sólido geométrico. A partir da realização da quarta e quinta atividades, apresentou-se as definições de cilindro e cones generalizados, respectivamente, conceitos até então novos para os alunos. Com base nos questionamentos e depoimentos feitos durante estas atividades, percebeu-se que as definições foram compreendidas. Essa constatação foi também verificada por meio das respostas apresentadas oralmente pelos alunos, quando solicitados para classificar alguns sólidos geométricos de acordo com as definições de cilindro e cone generalizados.

A ideia de volume adquirida na segunda e terceira atividades foi fundamental para que os alunos atingissem o objetivo da sexta atividade que é construir o conceito formal de volume a partir da apresentação de pressupostos (APÊNDICE B) sobre sólidos geométricos. A confirmação da assimilação deste conceito foi feita com base na participação ativa e nas respostas dadas pelos alunos aos questionamentos feitos durante a sexta atividade, bem como nas discussões dos pressupostos feitas na sétima e última atividade de nivelamento, cujo objetivo é discutir os pressupostos que definem o conceito de volume com base na análise de objetos encontrados em nosso cotidiano.

4.2.3 Ambientação com o *Geogebra*

Nenhum aluno conhecia o *Geogebra*, por isso foi necessário um momento de apresentação e ambientação com este *software.* Durante duas aulas com 50 minutos, apresentou-se, por meio de um projetor de imagens e dos computadores da sala de informática da escola, as principais ferramentas do *Geogebra Clássico 5.0*, dando ênfase para *Janela de Visualização 3D*.

Por não haver computadores suficientes para que cada aluno ficasse em um computador, formou-se três duplas (cada uma composta por um aluno que tinha dificuldade e outro que possuía mais facilidade com a informática) para ficar em um único computador. Dessa forma, à medida em que apresentava-se cada ferramenta por meio do projetor, os alunos as identificavam na janela do *Geogebra* com suas respectivas funções. Além de conhecerem as principais ferramentas, os estudantes foram orientados a realizarem construções dos sólidos geométricos estudados e planificações de alguns deles. Feito isso, deu-se início as atividades da sequência didática.

4.2.4 A sequência didática

A sequência didática utilizada nesta pesquisa é composta por atividades com foco investigativo e foi elaborada para ensinar o conteúdo de volumes de sólidos geométricos no Ensino Médio com ênfase na dedução das fórmulas utilizadas e verificar as contribuições do uso do *software Geogebra* para a compreensão do conteúdo e, consequentemente, para o desempenho em questões que envolvam esse conteúdo.

Para alcançar esta finalidade, as atividades que a compõe foram organizadas para que o professor/pesquisador e os alunos/pesquisados possam interagir e trabalhar conjuntamente, de forma que estes possam participar ativamente da construção do conhecimento tendo o auxílio de *applets* desenvolvidos no *Geogebra*.

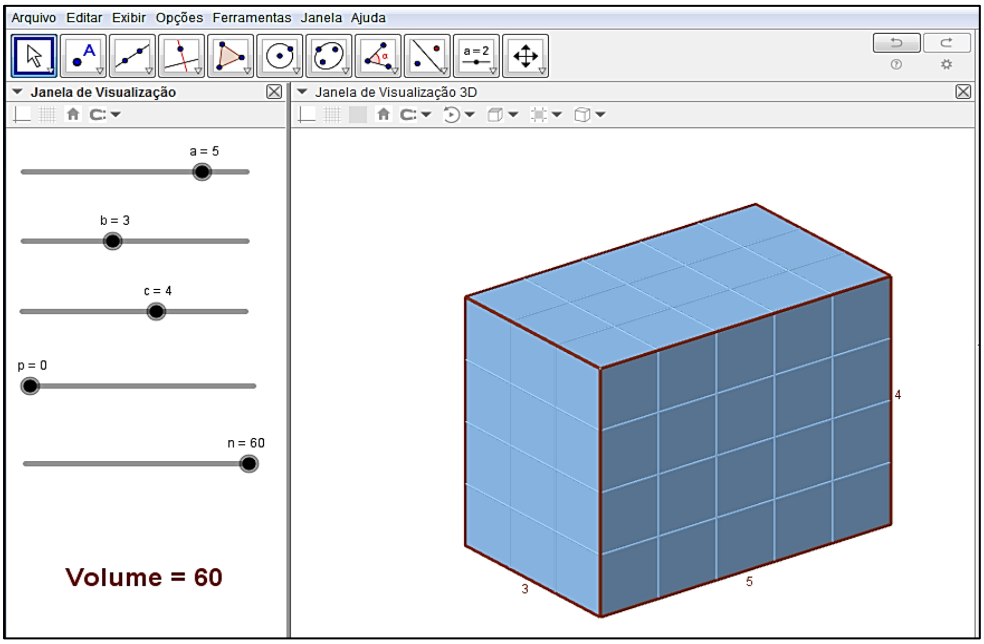
Para isso, desenvolveu-se atividades onde o professor/pesquisador não precisasse voltar sua atenção aos aspectos operacionais do *software* e sim auxiliar os alunos na formulação de conjecturas, conclusões e justificativas a partir das manipulações dos sólidos geométricos contidos nos *applets* usados em cada atividade.

Assim, para implementação desta sequência didática não é necessário que professores e alunos possuam conhecimentos avançados de informática, pois, suas atividades foram pensadas neste sentido. Os *applets* utilizados possibilitam diferentes visualizações, fazer alterações em suas dimensões, verificar invariâncias, formular e testar conjecturas, dentre outras.

A aplicação da sequência didática ocorreu durante 06 aulas.

A primeira atividade tem por objetivo deduzir a fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo. Para auxiliar nesta tarefa utilizou-se o *applet* (MANETTA, 2017) que permite preencher um paralelepípedo com cubos unitários (Figura 4.1).

Figura 4.1 – Interface do *applet* com um paralelepípedo de dimensões 5, 3 e 4 completamente preenchido com 60 cubos unitários.



Neste *applet* é possível alterar as dimensões do paralelepípedo por meio dos controles deslizantes a, b e c, bem como preenchê-lo com cubos unitários por meio do controle deslizante n e verificar imediatamente o seu volume. Também é possível fazer a planificação do paralelepípedo. Essas características foram fundamentais para os alunos conjecturarem que o volume do paralelepípedo é dado pelo produto de suas dimensões.

Ao pedir aos alunos que alterassem as dimensões do paralelepípedo por diversas vezes e preenchessem o paralelepípedo com cubos unitários, não demorou muito para perceberem que em todos os casos testados o volume era dado pelo produto de suas dimensões. Seguindo o processo de investigação, foi solicitado também que alterassem repetidas vezes apenas uma das dimensões e observassem o que ocorria com o valor do volume. Depois de algumas observações, os alunos perceberam que o volume era proporcional a cada uma de suas dimensões.

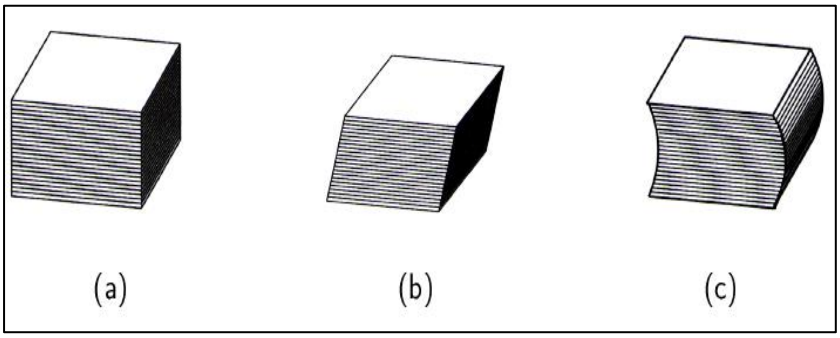
O passo seguinte foi explicar aos alunos que, apesar de todas as evidências, não era possível ainda garantir que o volume de um paralelepípedo era dado pelo produto de suas dimensões e para isso, é necessário e formalização através de argumentos matemáticos. Então, fez-se a demonstração para números naturais apresentada em (LIMA et al., 2006) e concluiu-se que $V(a,b,c) = abc,$ sendo a, b, c números naturais e $V(a,b,c)$ o volume do paralelepípedo.

Indagou-se, em seguida que, se a, b ou c fossem números reais ainda teríamos $V(a,b,c) = abc$. Os alunos responderam prontamente que sim e, novamente, enfatizou-se que é necessário provar matematicamente, mas que essa formalização extrapolava o escopo do Ensino Médio. Assim, apresentou-se, sem demonstração, o *Teorema Fundamental da Proporcionalidade* (LIMA, et al. 2013) para garantir que $V(a, b, c) = abc$, quaisquer que sejam a, b e c reais.

Para finalizar a primeira *atividade*, enfatizou-se que o volume de um paralelepípedo também pode ser visto como o produto da área do retângulo que forma a sua base pela altura. Como o cubo é um caso particular de paralelepípedo com as três dimensões iguais, seu volume é dado por $V(a, a, a) = a^3$, onde a é aresta do cubo.

A segunda atividade apresenta o *Princípio de Cavalieri*. Antes de enunciá-lo, colocou-se três resmas dispostas sobre uma mesa, empilhando-as de maneiras diferentes (Figura 4.2) e foi questionado se os volumes de cada disposição seriam iguais ou diferentes.

Figura 4.2 - Pilhas de Papel.

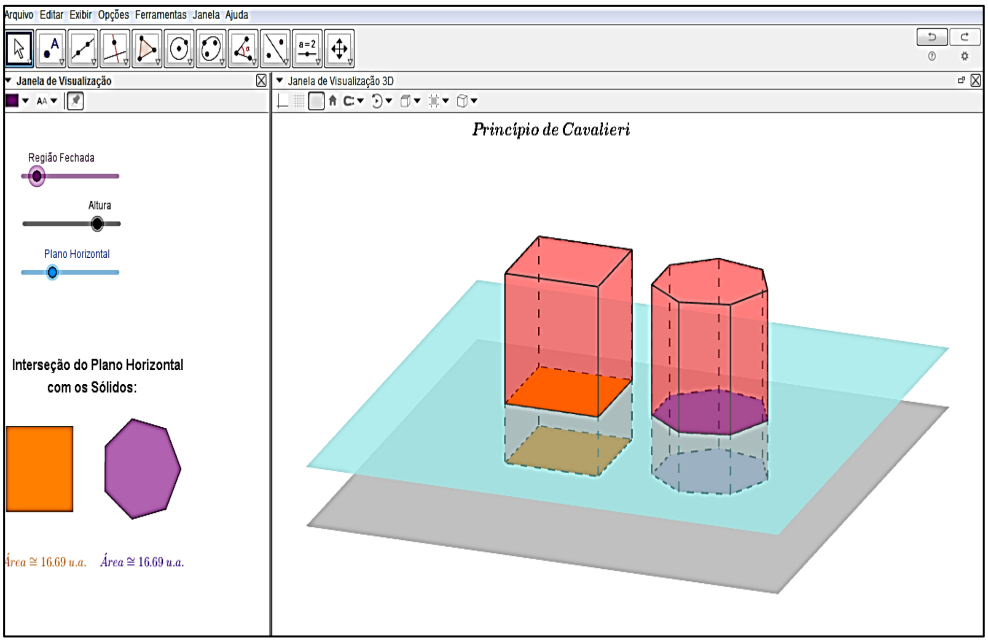


Fonte: Lima et al. (2006).

Embora a maioria dos alunos tenha informado que os volumes eram iguais, inicialmente não houve consenso em relação a isso. Porém, não foi difícil conduzi-los a concluírem, intuitivamente, que os volumes das pilhas de papéis eram iguais já que eram formadas pela mesma quantidade de papéis com o mesmo formato e dimensões. Porém, destacou-se que ainda faltavam argumentos matemáticos para explicar esse fato, mas que existe um importante resultado matemático, conhecido como *Princípio de Cavalieri*, que possibilita validar a intuição de que os volumes são iguais.

Antes de enunciar o *Princípio de Cavalieri*, pediu-se para os alunos abrirem o *applet* (AWILA, 2017) que ilustra o referido princípio (Figura 4.3). Para tornar possível a visualização dos sólidos em diferentes perspectivas, solicitou-se que clicassem, segurassem e arrastassem o botão direito do mouse em qualquer ponto do *applet*. Também alteraram a altura e a quantidade de lados do prisma construído ao lado do paralelepípedo e movimentaram o plano que secciona os sólidos por meio dos controles deslizantes situados na parte esquerda do *applet*.

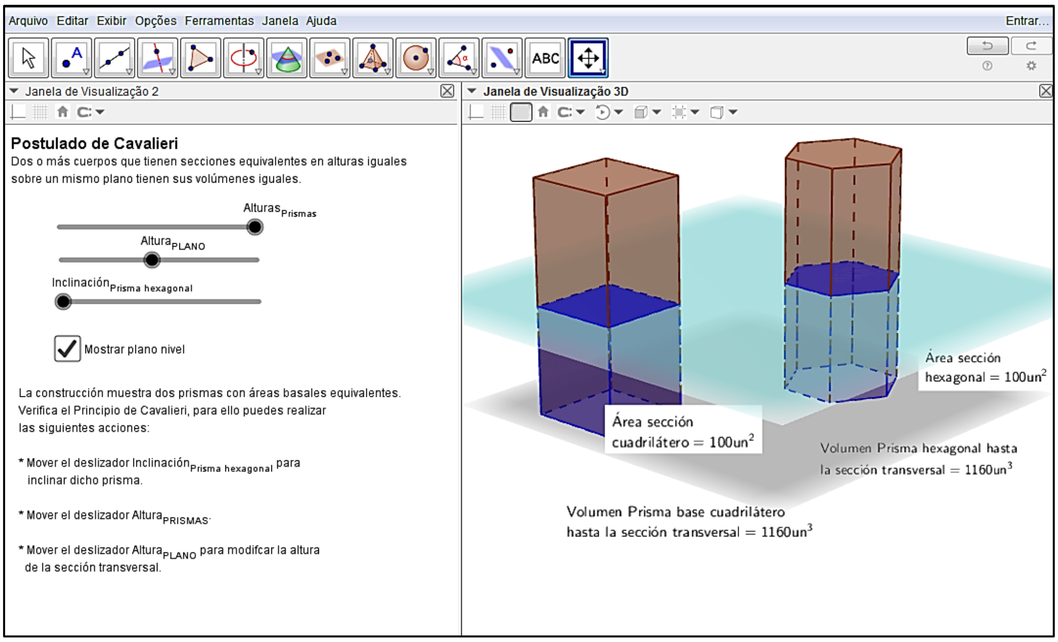
Figura 4.3 – Interface do applet utilizado na segunda atividade da sequência didática.



Encerrando a segunda atividade, apresentou-se o *Princípio de Cavalieri* (DIAS, et al., 2013) e explicou-se a possibilidade de ser demonstrado, mas seria apresentado como pressuposto, uma vez que sua demonstração requer ferramentas matemáticas avançadas para o Ensino Médio.

Por meio da terceira atividade deduziu-se a fórmula para o cálculo do volume do prisma e do cilindro generalizado. Foi iniciada solicitando aos alunos que abrissem o *applet* (BARRERA, 2017), que consiste em uma animação que contém um prisma hexagonal com base contida num plano horizontal, construído ao lado de um paralelepípedo, cuja base possui área igual a base do prisma e também está contida no mesmo plano horizontal (Figura 4.4). Tanto o prisma quanto o paralelepípedo são cortados por outro plano horizontal que produz seções de mesma área, no prisma e no paralelepípedo, respectivamente. O *applet* possibilita alterar a inclinação e a altura dos sólidos e do plano que os cortam e calcula instantaneamente o volume de cada um dos sólidos entre os planos.

Figura 4.4 – Interface do applet utilizado na terceira atividade da sequência didática.



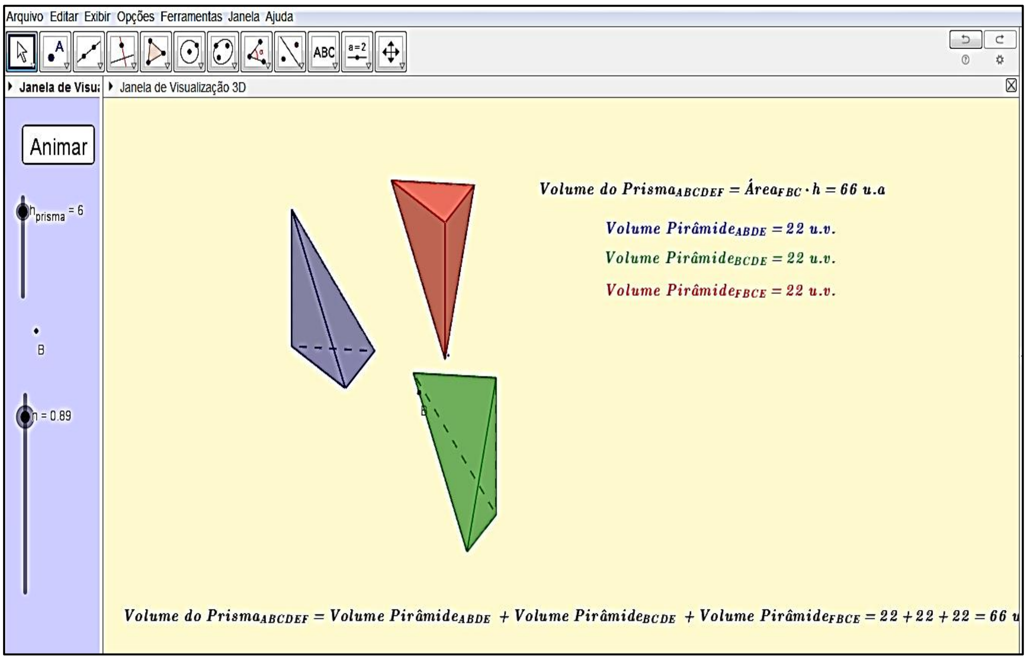
Os discentes alteraram por diversas vezes a inclinação e a altura dos sólidos e do plano que os cortam por meio dos controles deslizantes situados na parte esquerda do *applet* e observaram que os volumes dos dois sólidos permaneciam sempre iguais. Em seguida, foram conduzidos a utilizarem o *Princípio de Cavalieri* para conjeturarem que o volume do prisma é igual ao produto da área de sua base pela altura, já que o volume do paralelepípedo também é calculado deste modo.

Todavia, ressaltou-se que por ser apenas uma suspeita, havia a necessidade de ser formalizada matematicamente para ser válida. Então, a partir dos conhecimentos adquiridos através do *applet*, apresentou-se a dedução contida em Dias et al. (2013) e concluiu-se que os volumes de um prisma e um cilindro generalizado quaisquer são dados pelo produto da área da base pela altura.

A quarta atividade tem a finalidade de deduzir a fórmula para o cálculo do volume da pirâmide e do cone. Foi a atividade com o maior tempo de duração pois, antes de fazer a dedução pretendida, foi necessário apresentar os *Teoremas 1, 2, 3* e *4* (APÊNDICE C).

Antes da apresentação do *Teorema 4*, utilizou-se o *applet* (RAMOS, 2016). Trata-se de uma construção em que é possível decompor um prisma triangular em três pirâmides de mesmo volume, movimentando o controle deslizante *n*, e ainda calcula seus volumes (Figura 4.5). A construção também possibilita modificar a altura da pirâmide movimentando o controle deslizante h_{prisma}.

Figura 4.5 – Applet da quarta atividade da sequência didática: decomposição do prisma em três pirâmides de mesmo volume.



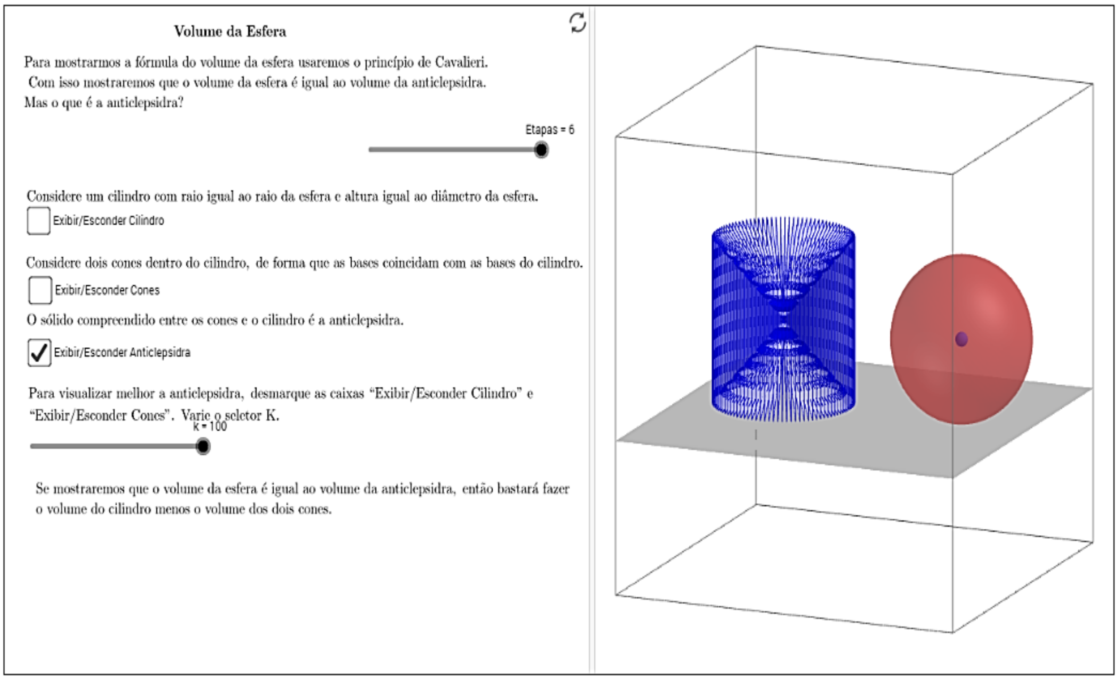
Este *applet* foi fundamental para os estudantes compreenderem que um prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides de volumes iguais e que o mesmo acontece a um prisma qualquer, já que este pode ser decomposto em prismas triangulares.

A partir dos *Teoremas 1, 2, 3* e *4* (APÊNDICE C), foi possível deduzir que os volumes de uma pirâmide e um cone são dados pela terça parte do produto da área de base pela medida da altura.

A quinta e última atividade da sequência didática, apresenta a dedução da fórmula para o cálculo do volume da esfera por meio do conjunto formado por cinco *applets* (NÓBRIGA, 2017a). No primeiro *applet* (Figura 4.6), é possível acompanhar os passos da construção de uma *anticlepsidra*[9] ao lado de uma esfera, ambas apoiadas sobre um mesmo plano horizontal.

[9] É um sólido obtido a partir de um cilindro equilátero de raio R, retirando-se deste, dois cones de raio R que têm os vértices no ponto médio do segmento que liga os centros das bases do cilindro.

Figura 4.6 – Interface do primeiro applet da quinta atividade da sequência didática: construção da anticlepsidra.



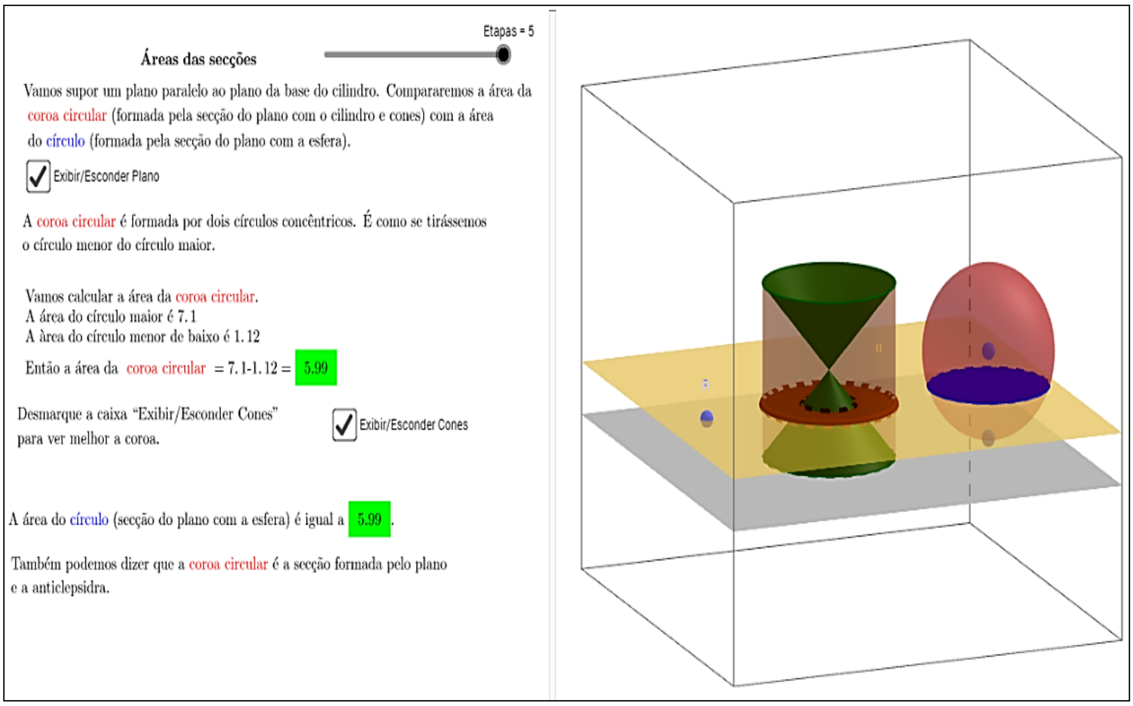
.

Com o controle deslizante "*Etapas*" na posição *0*, solicitou-se que movessem gradativamente o controle deslizante da posição *0* até a posição *6* e acompanhassem a construção da *anticlepsidra*. Com o controle deslizante na posição *6*, pediu-se para esconder o cilindro e os cones clicando, respectivamente, nos botões *Exibir/Esconder Cilindro* e *Exibir/Esconder Cones* e clicando com o botão direito do *mouse* na *Janela 3D*, segurassem e arrastassem o cursor do *mouse* para visualizarem a *anticlepsidra* de diferentes ângulos.

O segundo *applet* (Figura 4.7) também contém uma *anticlepsidra* construída ao lado de uma esfera (sua altura é o dobro do raio da esfera) ambas apoiadas em um plano horizontal e cortadas por outro plano horizontal e paralelo ao plano de apoio.

Por meio deste segundo *applet*, pode-se calcular e comparar as áreas das seções determinadas pelo plano horizontal e a anticlepsidra e pelo plano horizontal e a esfera, sendo a primeira seção uma coroa circular e a segunda, um círculo. Dessa forma foi possível demonstrar que as áreas das seções são sempre iguais independentemente da altura em que o plano intercepta os sólidos.

Figura 4.7 - Interface do segundo applet da quinta atividade da sequência didática: áreas das seções.

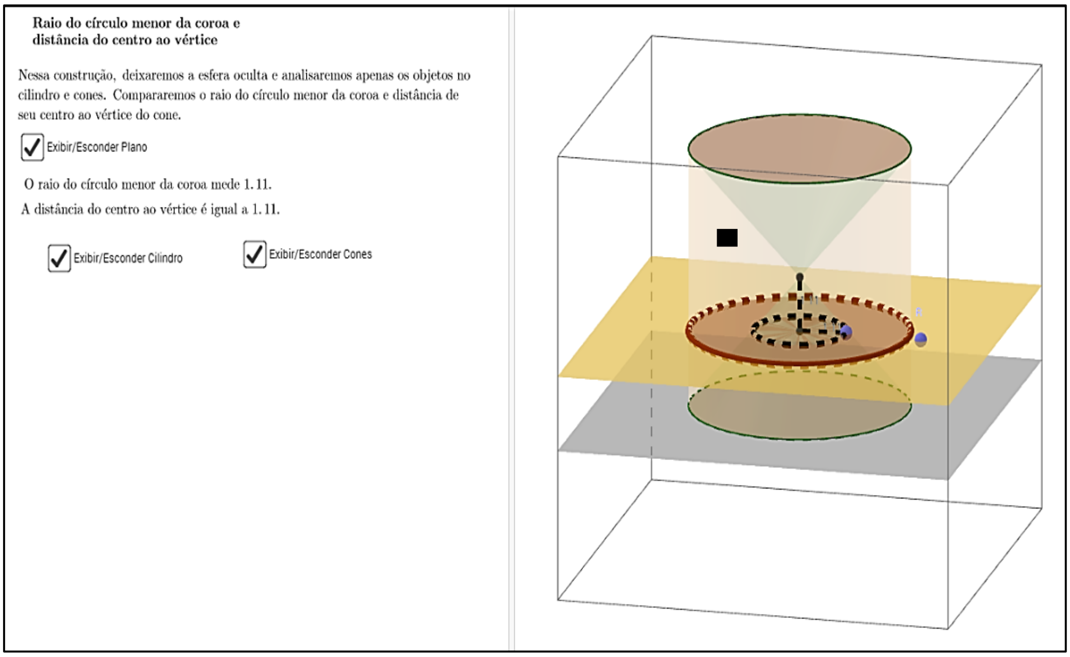


Para movimentar o plano que corta os sólidos, os alunos clicaram sobre o ponto R e o arrastaram para cima e para baixo, observando o que acontecia com a área das seções. Depois de algumas movimentações perceberam que as áreas eram sempre iguais. Em seguida, perguntou-se aos alunos o que o *Princípio de Cavalieri* sugere sobre o volume dos dois sólidos. Após alguns instantes de silêncio, dois estudantes responderam que, de acordo com esse princípio, os volumes dos dois sólidos seriam iguais e os demais alunos concordaram com a resposta. No entanto, novamente, explicou-se que se tratava apenas de uma conjectura que deveria ser demonstrada e que isso seria feito após a apresentação do terceiro *applet* desta atividade.

Com a finalidade de fazer com que os alunos percebessem a relação existente entre o comprimento do raio do círculo menor da coroa circular determinada pela interseção do plano com a *anticlepsidra* e a distância do centro da coroa ao vértice do cone, usou-se o terceiro *applet* (Figura 4.8). Nele, tem-se uma *anticlepsidra* cortada por outro plano horizontal e paralelo ao plano de sua base, determinando uma coroa circular.

Por meio deste *applet* é possível calcular e comparar o comprimento do raio do círculo menor da coroa e a distância de seu centro ao vértice do cone, movimentando o plano horizontal paralelo ao plano de apoio e clicando com o botão esquerdo do mouse sobre o ponto *R*, arrastando-o para cima ou para baixo.

Figura 4.8 - Interface do terceiro applet da quinta atividade da sequência didática: comparação entre o raio do círculo menor da coroa e a distância do centro ao vértice do cone.

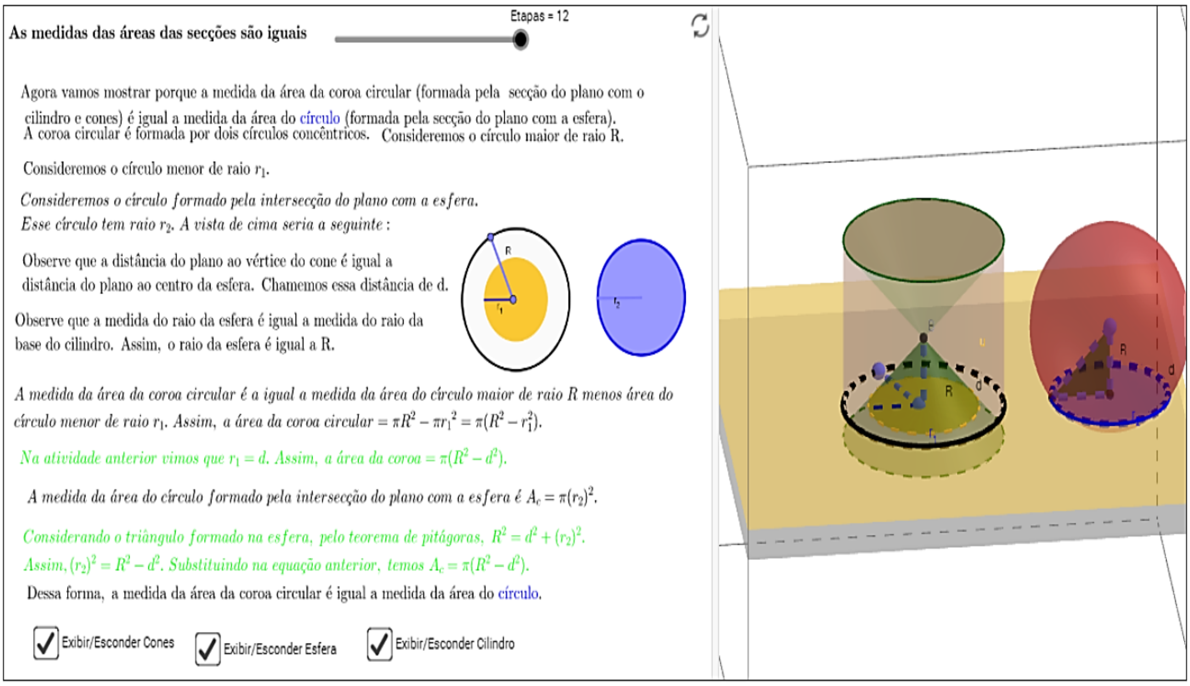


Através desta animação os alunos observaram e conjecturaram que o comprimento do raio do círculo menor da coroa e a distância de seu centro ao vértice do cone são sempre iguais. O interessante foi que, antes que se enunciasse, perceberam a necessidade de se formalizar e provar matematicamente a conjectura, o que deixou claro que os mesmos já estavam compreendendo como ocorre o processo de dedução de fórmulas matemáticas.

Para demonstrar que o comprimento do raio do círculo menor da coroa e a distância de seu centro ao vértice do cone é sempre igual, apresentou-se a demonstração contida em Dias et al. (2013). Por ser uma demonstração simples que utiliza basicamente semelhança de triângulos (conteúdo revisado nas atividades de nivelamento), os alunos não tiveram dificuldade para compreendê-la.

A conjectura concebida com base no terceiro *applet* foi demonstrada com o auxílio do quarto *applet* (Figura 4.9).

Figura 4.9 - Interface do quarto applet da quinta atividade da sequência didática: demonstração que as áreas das seções são iguais.



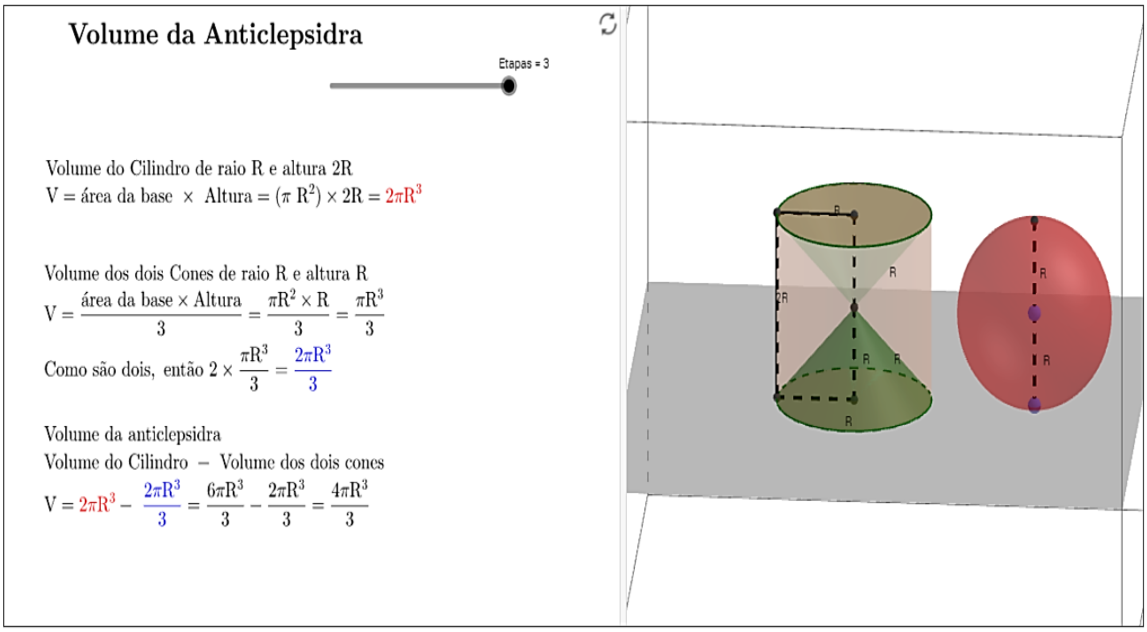
Este *applet* apresenta a demonstração em etapas. Ocorre por meio do controle deslizante *“Etapas”* que varia da posição *0* até a posição *12.* Após cada etapa foram feitas intervenções com o intuito de possibilitar que os alunos compreendessem os caminhos que levaram a conclusão da demonstração. Os elementos descritos em cada etapa são indicados imediatamente na *anticlepsidra* e na esfera que estão localizadas na parte direita do *applet*, isso facilitou muito o entendimento da demonstração.

Ao final da demonstração, mais uma vez perguntou-se o que o *Princípio de Cavalieri* permitia afirmar sobre os volumes da *anticlepsidra* e da esfera, prontamente eles responderam que este garantia a igualdade entre os volumes. Com isto, para concluir a dedução, faltava apenas encontrar o volume da *anticlepsidra,* que é dado pela diferença entre o volume do cilindro e o volume dos dois cones. Quatro dos doze alunos da turma conseguiram concluir que o volume V de uma esfera de raio R é calculado por meio da fórmula

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad (4.1)$$

Para aqueles que não conseguiram concluir a dedução, apresentou-se o quinto e último *applet* (Figura 4.10), contendo as etapas de finalização da dedução. Sem maiores dificuldades estes alunos conseguiram compreender a parte restante da dedução, isso foi percebido pelos depoimentos dos estudantes.

Figura 4.10 - Interface do quinto applet da quinta atividade da sequência didática: concluindo a dedução do volume da esfera.



Todos os *applets* utilizados nesta pesquisa também podem ser acessados em https://bit.ly/2PnsmWM.

Conforme mencionado na introdução deste capítulo, ao final da sequência didática foram aplicados o *Questionário Comparativo*, que ocorreu em duas aulas, e o *Questionário Avaliativo*, durante uma aula.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

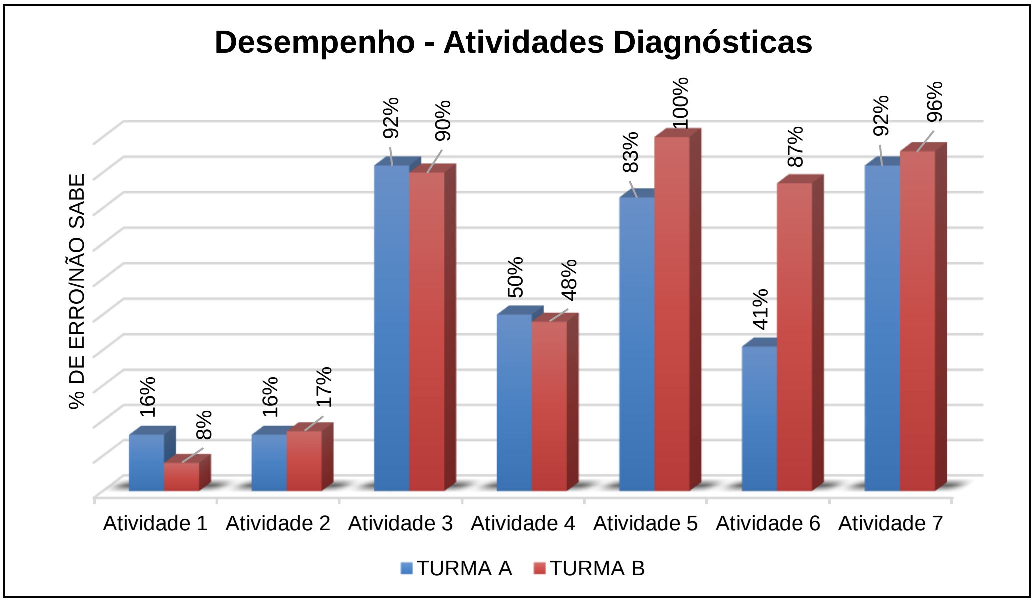
Neste capítulo, são apresentados os resultados desta pesquisa. Na primeira seção, são feitas análises sobre as atividades que antecederam a sequência didática; na seção seguinte, são descritos os principais resultados obtidos por meio da realização da sequência didática. Na terceira e última seção, faz-se a análise dos desempenhos das turmas no *Questionário Comparativo.* As respostas aqui descritas são literais, não havendo, portanto, inferência do autor da pesquisa às regras gramaticais, nem tampouco à conceituação matemática.

5.1 PREPARAÇÃO

5.1.1 Atividades Diagnósticas

A análise do desempenho das turmas nas A*tividades Diagnósticas* foi fundamental não apenas para diagnosticar o conhecimento dos alunos, mas também para situar e redirecionar as etapas seguintes da pesquisa. Detectou-se que as turmas apresentavam níveis de conhecimento similares em relação dos conteúdos avaliados. Apenas a *Atividade 6* apresentou uma diferença considerável de desempenho. (Gráfico 1).

Gráfico 1 – Desempenho das turmas nas Atividades Diagnósticas.



Os índices de erros e atividades não respondidas foram muito elevados em ambas as turmas (Gráfico 1). Os principais deficit de aprendizagem detectados foram:

1. Falta de argumentações apropriadas para justificar as diferenças entre figuras planas e sólidos geométricos, poliedros e não poliedros, a partir de suas propriedades;
2. Incapacidade de aplicar o *Teorema de Tales* em triângulos;
3. Dificuldades para identificar e justificar a *Semelhança de Triângulos* e, consequentemente, a razão de semelhança de figuras semelhantes;
4. Desconhecimento do *Teorema de Pitágoras* e/ou dificuldades para utilizá-lo para descobrir o lado desconhecido de um triângulo retângulo;
5. Dificuldades para calcular a área de figuras planas, principalmente do círculo.
6. Desconhecimento das fórmulas para cálculo de volume de sólidos geométricos, principalmente do cilindro, do cone e da esfera.

5.1.2 Atividades de Nivelamento

A revisão dos conteúdos identificados como de aprendizagem insatisfatória, foi fundamental para conhecer com mais profundidade o nível de conhecimento das turmas sobre o conteúdo estudado. Pôde-se perceber que realmente apresentavam graves lacunas conceituais, mas a situação não era tão crítica quanto imaginou-se a partir da análise das *Atividades Diagnósticas*.

À medida em que os conteúdos eram revisados e as atividades coletivamente resolvidas, ouvia-se depoimentos como *“Agora estou lembrando que já estudei esse conteúdo professor”*, *“A questão era tão fácil, só que não lembrava mais como fazia”*, principalmente em relação ao *Teorema de Pitágoras*, *Teorema de Tales* e áreas de figuras planas. Em contrapartida, identificou-se que vários erros cometidos nas *Atividades Diagnósticas* estavam relacionados às dificuldades em efetuar multiplicações e divisões entre números decimais.

As *Atividades de Nivelamento* permitiram aos alunos o aprimoramento e/ou construção dos conhecimentos utilizados nas deduções das fórmulas para o cálculo de volume dos sólidos geométricos e, embora não tenham preenchido todas as lacunas de aprendizagem dos alunos, possibilitaram o embasamento necessário para realização das atividades da sequência didática.

5.1.3 Atividades de ambientação com o *Geogebra*

Por meio das atividades de ambientação com o *Geogebra* foi possível perceber que o uso deste *software* atrai a atenção, desperta o interesse e curiosidade dos alunos e os motiva a participarem da aula. Fato este ratificado posteriormente durante o desenvolvimento da sequência didática.

Conforme mencionado na seção 4.2.3, nenhum dos alunos pesquisados conhecia o *Geogebra*. Apesar disso, observou-se que mesmo aqueles que possuíam pouca habilidade no uso do computador, não tiveram grandes dificuldades em utilizá-lo e realizar as atividades de ambientação, o que confirma que o *Geogebra* possibilita ao usuário ser autodidata (VAZ, 2012). As respostas à *Questão 8* (APÊNDICE E), que buscou identificar as dificuldades encontradas na utilização do *Geogebra*, são conclusivas em relação a facilidade do uso deste *software*, já que nenhum aluno afirmou ter tido dificuldades.

Notou-se que as representações e visualizações dos sólidos, assim como as planificações feitas no *Geogebra,* contribuíram para melhorar a percepção das características e dos elementos (quantidade de vértices, arestas, faces e diagonais) que compõem os sólidos geométricos. Esta compreensão é muito prejudicada quando são usadas apenas as imagens contidas nos livros didáticos.

5.2 ANÁLISE DA APLICAÇÃO SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Reitera-se que os objetivos da sequência didática são ensinar o conteúdo de volumes de sólidos geométricos no Ensino Médio com ênfase na dedução das fórmulas utilizadas e verificar as contribuições do uso do *software Geogebra* neste processo.

Durante o desenvolvimento da sequência didática, percebeu-se a evolução dos alunos, principalmente em relação a compreensão do processo de construção do saber matemático. As manipulações e experimentações feitas por meio dos *applets*, como as alterações das dimensões dos sólidos e observações instantâneas dos efeitos provocados no volume destes, foram essenciais para o estabelecimento de relações matemáticas entre os elementos que compõem os sólidos e para o desenvolvimento de conjecturas, formalizações e, em alguns casos, generalizações dos resultados obtidos.

Um obstáculo encontrado foi que os estudantes não estavam acostumados com as deduções de fórmulas matemáticas. Segundo eles, em sala de aula, normalmente são apresentadas apenas as fórmulas, seguidas de algumas utilidades e aplicações e solicitado para que as utilizem na resolução dos problemas contidos no livro didático. Isso ajuda a ratificar que muitos estudantes brasileiros concluem o Ensino Médio sem jamais ter visto uma demonstração (LIMA, 2007).

O desenvolvimento de habilidades relativas à visualização de objetos tridimensionais é um fator determinante para o estudo da geometria espacial (RITTER, 2011). A esse respeito, os benefícios da utilização da *Geogebra* foram evidentes. As múltiplas visualizações de objetos geométricos proporcionadas por este *software* foram fundamentais para que conseguissem compreender a dedução das fórmulas usadas para o cálculo de volumes.

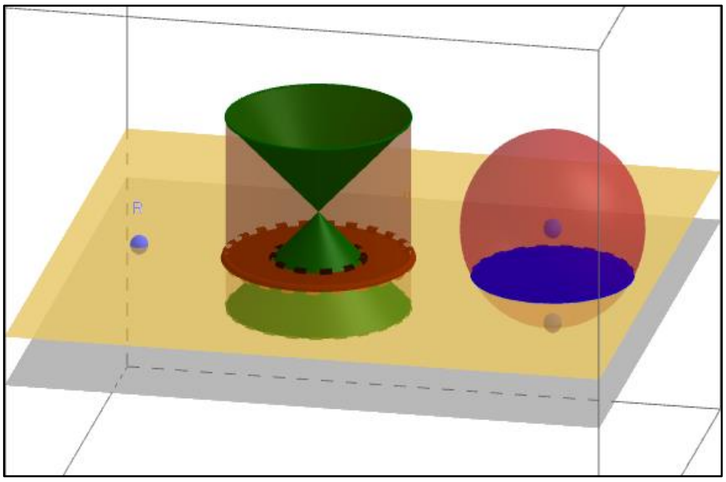
A movimentação do plano que secciona os sólidos nos *applets* utilizados nas *atividades 2* e *3* contribuiu decisivamente para a compreensão do *Princípio de Cavalieri* e a aplicação deste na dedução do volume dos cilindros generalizados.

A visualização da decomposição do prisma em três pirâmides de mesmo volume, feita de forma animada e dinâmica através do *applet* utilizado, facilitou a compreensão de que o volume da pirâmide é a terça parte do volume do prisma. Embora os livros didáticos contenham construções bidimensionais, seu caráter estático não deixa claro essa decomposição.

A dedução do volume da esfera por meio do *Princípio de Cavalieri* foi, sem dúvida, a mais favorecida pelo uso do *Geogebra.* A construção dos sólidos necessários para auxiliar nesta dedução, além das seções que o plano paralelo ao plano de apoio da anticlepsidra e da esfera determina nestes sólidos, é muito difícil de ser feita na lousa ou no caderno. A compreensão de que estas seções possuem áreas iguais é extremamente importante para realizar esta dedução e o *Geogebra* se mostrou eficaz nesse aspecto.

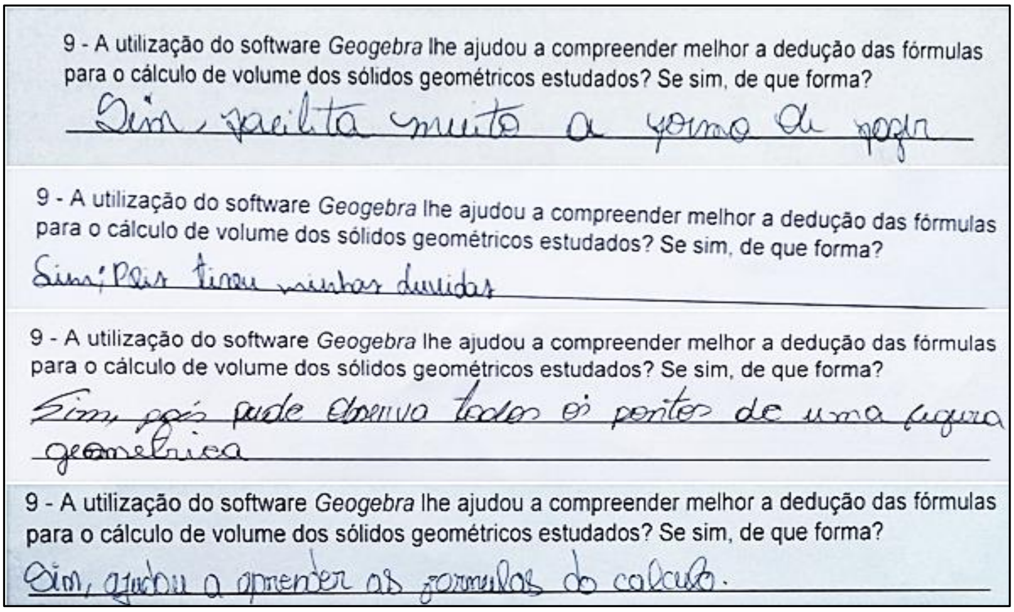
Ao acompanhar os passos da construção da anticlepsidra, os alunos identificaram claramente os elementos e as características deste sólido e as seções que um plano paralelo ao plano de sua base determinam tanto na anticlepsidra (coroa circular) como na esfera (círculo) (Figura 5.1) e, através da investigação, não apresentaram dificuldades para entender que as áreas das seções são sempre iguais, independentemente na altura do plano.

Figura 5.1 – Seções determinadas pelo plano paralelo ao plano da base da anticlepsidra e da esfera.



Todos os alunos que utilizaram a *Geogebra* informaram, por meio da *Questão 9* (APÊNDICE E), que seu uso ajudou a compreender melhor a dedução das fórmulas para o cálculo de volume. A Figura 5.2 apresenta alguns depoimentos.

Figura 5.2 – Algumas impressões dos alunos sobre a utilização do Geogebra.



9 - A utilização do software *Geogebra* lhe ajudou a compreender melhor a dedução das fórmulas para o cálculo de volume dos sólidos geométricos estudados? Se sim, de que forma?

Sim, facilita muito a forma de fazer

9 - A utilização do software *Geogebra* lhe ajudou a compreender melhor a dedução das fórmulas para o cálculo de volume dos sólidos geométricos estudados? Se sim, de que forma?

Sim; Pois tinha muitas duvidas

9 - A utilização do software *Geogebra* lhe ajudou a compreender melhor a dedução das fórmulas para o cálculo de volume dos sólidos geométricos estudados? Se sim, de que forma?

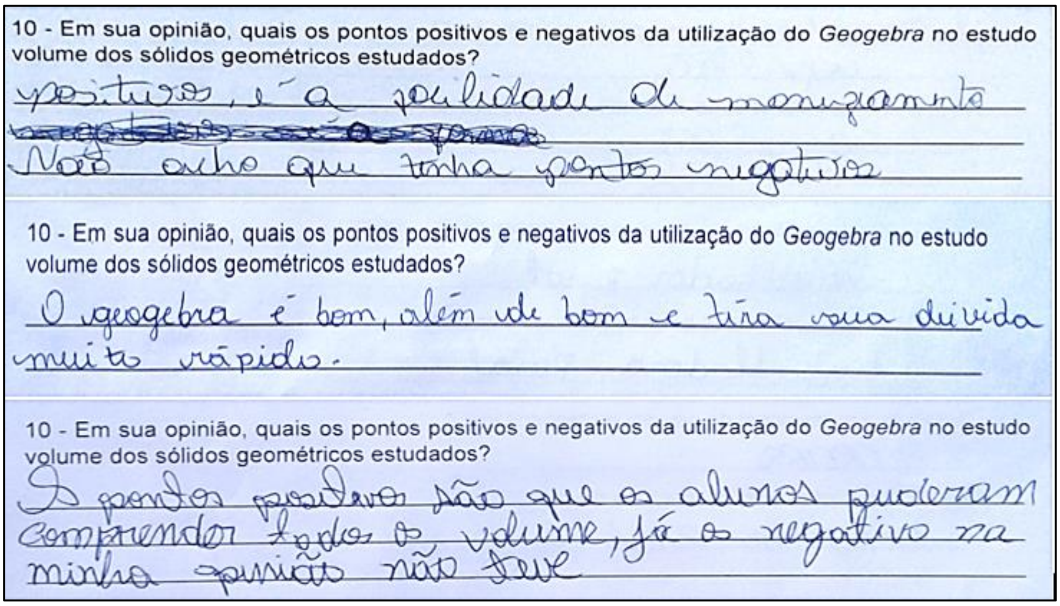
Sim, pois pude observa todos os pontos de uma figura geometrica

9 - A utilização do software *Geogebra* lhe ajudou a compreender melhor a dedução das fórmulas para o cálculo de volume dos sólidos geométricos estudados? Se sim, de que forma?

Sim, ajudou a aprender as formulas do calculo.

Dentre os pontos positivos da utilização do *Geogebra* apontados estão a facilidade de manuseio, compreensão do conteúdo e agilidade para testar resultados (Figura 5.3).

Figura 5.3 – Alguns pontos positivos da utilização do Geogebra.


10 - Em sua opinião, quais os pontos positivos e negativos da utilização do *Geogebra* no estudo volume dos sólidos geométricos estudados?

positivos, é a facilidade de manuzeamento

Não acho que tenha pontos negativos

10 - Em sua opinião, quais os pontos positivos e negativos da utilização do *Geogebra* no estudo volume dos sólidos geométricos estudados?

O geogebra é bom, além de bom e tira sua duvida muito rápido.

10 - Em sua opinião, quais os pontos positivos e negativos da utilização do *Geogebra* no estudo volume dos sólidos geométricos estudados?

Os pontos positivos são que os alunos puderam compreender todos os volume, já os negativo na minha opinião não teve

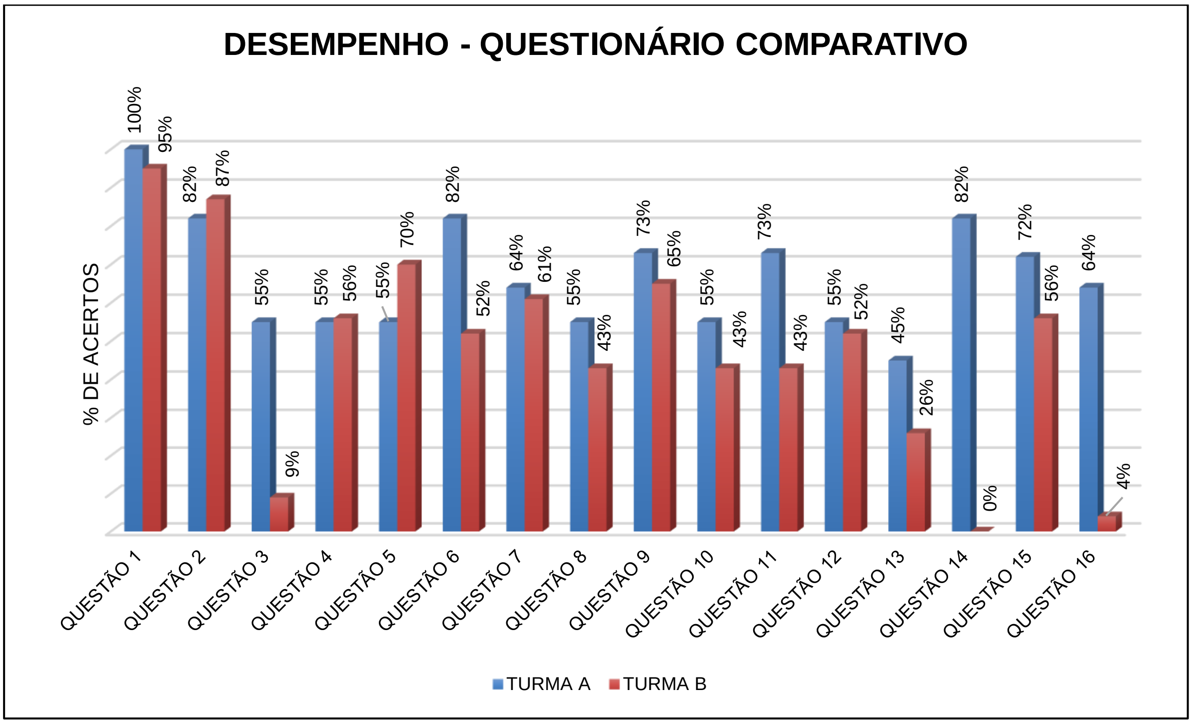
Fica claro, portanto, que processo de representação, visualização e mentalização dos sólidos, importante para o estudo de volumes, foi facilitado pelo uso do *Geogebra.*

5.3 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO COMPARATIVO

A aplicação do *Questionário Comparativo* (APÊNDICE D), composto por 16 questões relativas ao tema deste trabalho, extraídas do ENEM, de avaliações em larga escala e de alguns vestibulares de universidades brasileiras, ocorreu logo após a implementação da sequência didática e teve como objetivo estabelecer uma comparação do desempenho entre as turmas pesquisadas após a aplicação da sequência didática proposta. Um dos 12 alunos da Turma A foi transferido para outra escola antes da aplicação deste questionário, portanto, a referida turma ficou com 11 alunos.

A análise do desempenho através deste questionário mostrou que os alunos que utilizaram os *applets* desenvolvidos no *Geogebra* (Turma A) apresentaram rendimento superior aos alunos que não utilizaram este *software* (Turma B). Em 13 das 16 questões, o desempenho da Turma A foi melhor que o da Turma B (Gráfico 2).

Gráfico 2 – Desempenho das turmas no Questionário Comparativo.



Nas questões em que havia a necessidade de uma representação do sólido, seja mental ou no papel, ou mesmo um conhecimento do processo de dedução das fórmulas (*Questões 3, 14* e *16*, por exemplo), os alunos da Turma A se sobressaíram e a diferença entre os desempenhos das turmas foi mais acentuada (Gráfico 2). Atribui-se este fato à utilização do *Geogebra* que melhorou a capacidade de representação e mentalização dos sólidos geométricos.

As três questões em que a Turma B obteve desempenho melhor que a Turma A (*Questões 2, 4* e *5*) estão entre as questões com menor grau de dificuldade, pois são questões sobre o volume de paralelepípedos e cubos com dimensões formadas por números naturais e ainda possuem as representações desses sólidos.

Na busca de respostas que justificassem essa diferença de desempenho, verificou-se que os dois alunos da Turma A (18% da turma) que erraram a *Questão 2* cometeram o mesmo erro: calcularam corretamente a área da base do paralelepípedo, mas somaram-na com a altura ao invés de multiplicá-la. Acredita-se que esse pequeno descuido cometido no momento da resolução, determinante para a diferença de desempenho entre as turmas, não tem relação com a utilização ou não do *Geogebra*. Já nas *Questões 4* e *5*, nas quais era necessário calcular o volume de um sólido vazado. Cinco alunos da Turma A (45% da turma) não responderam corretamente estas questões. Verificou-se que estes alunos apenas calcularam o volume do sólido como um todo, mas não subtraíram o volume do sólido que representa a região vazada, indicando que faltou ao pesquisador explorar melhor os recursos disponíveis no *Geogebra* para desenvolver a habilidade de calcular o volume de sólidos que possuem partes ocas.

Nenhum aluno da Turma B acertou a *Questão 14* (Gráfico 2), indicando que embora tenham utilizado corretamente a fórmula do volume do cone nas *Questões 11, 12* e *13*, apenas decoraram tal fórmula e não compreenderam o processo de dedução da mesma. Na Turma A, apenas 2 alunos erraram esta questão, apontando que a utilização do *Geogebra* facilitou a compreensão de que o volume do cone é a terça parte do volume do cilindro.

Em suma, os resultados obtidos por intermédio desse questionário e as observações feitas durante a realização das atividades da sequência didática serviram para evidenciar que a utilização do *Geogebra* como recurso didático melhora o ensino e a aprendizagem de volumes de sólidos geométricos, tendo como principais contribuições: a melhoria da capacidade de representação, visualização e mentalização dos sólidos geométricos, a motivação, o dinamismo e a interação entre professor e alunos, o estímulo ao raciocínio lógico, o espírito investigativo e a formulação de conjecturas, conclusões e justificativas.

6 CONCLUSÕES

Esta pesquisa possibilitou identificar contribuições que o uso do *software Geogebra* proporciona ao ensino e aprendizagem de volumes de sólidos geométricos no Ensino Médio e a diminuição das dificuldades presentes no ensino desse conteúdo, especialmente na compreensão das deduções e correta aplicação das fórmulas utilizadas.

A literatura relacionada, bem como os documentos legais, enfatizam a necessidade de atualização e adequação dos recursos didáticos e metodologias de ensino à realidade do aluno, e apontam a utilização de *softwares* educativos com uma alternativa que tem trazido resultados satisfatórios.

Ensinar volumes de sólidos geométricos por meio do *Geogebra* na perspectiva adotada trouxe vantagens em relação ao ensino tradicional. Mais do que atrair a atenção e motivação dos alunos, tornando as aulas dinâmicas, atraentes e interativas, o *Geogebra* contribuiu significativamente para construção ativa do conhecimento, estimulando o raciocínio lógico matemático e o espírito investigativo.

Durante a realização desta pesquisa houve nítida a evolução dos alunos no sentido de compreender o caráter hipotético-dedutivo da construção do saber matemático. A cada atividade realizada verificou-se que a utilização do *Geogebra* estimulou a participação dos estudantes que, demonstraram-se mais autônomos e independentes no desenvolvimento de conjecturas e formalização de resultados.

Os resultados obtidos mostram a eficiência do *Geogebra* para o ensino e aprendizagem do conteúdo proposto, mesmo para alunos que apresentam graves deficit de aprendizagens. Considera-se este, um resultado importante, dado que em outras investigações dessa natureza, tais como Silva (2013) e Marin e Leivas (2013), geralmente selecionam-se escolas de referência ou mesmo determinados alunos com características específicas.

Enfatiza-se que o desenvolvimento da sequência didática utilizada, na qual o professor não precisa voltar sua atenção aos aspectos operacionais do *software*, mas, primordialmente, em auxiliar os alunos na formulação de conjecturas, conclusões e justificativas, favoreceu o aproveitamento das potencialidades que o *software* oferece ao ensino do conteúdo estudado. Esse foi um diferencial desta pesquisa.

Espera-se que a sequência didática desenvolvida, disponível como produto educacional resultante deste estudo, possa ser utilizada por professores do Ensino Médio e venha inspirar o desenvolvimento de outras propostas que busquem a melhoraria do ensino de Matemática por meio da utilização de recursos tecnológicos.

Acredita-se que a proposta utilizada nesta pesquisa pode trazer bons resultados se for aplicada para um número maior de alunos, assim como em contextos diferentes daquele em que esta ocorreu, desde que sejam feitas adaptações de acordo com a realidade encontrada.

Entre os trabalhos futuros, pretende-se realizar outras pesquisas com a utilização de *Geogebra* no ensino de outros sólidos geométricos como elipsóides, toros, parabolóides, hiperbolóides, e outros conteúdos matemáticos, como sistemas de equações lineares, simetrias, trigonometria, matrizes e determinantes, dentre outros. Também pretende-se realizar um curso para aprofundamento das potencialidades do *Geogebra*, para que nas investigações posteriores seja possível desenvolver os *applets* a serem utilizados.

REFERÊNCIAS

ALVES, George de Souza. *et al.* Um estudo sobre o desenvolvimento do raciocínio espacial no ensino médio através da utilização do software Calques 3D. XXV CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE COMPUTAÇÃO**,** 25, 2005, São Leopoldo. **Anais eletrônicos**. São Leopoldo: UNISINOS, 2005. p. 2815-2823. Disponível em: <https://bit.ly/2JrOp9d>. Acesso em 22 jun. 2017.

ARAÚJO, Josias Júlio de. **O software GeoGebra numa proposta de formação continuada de professores de matemática do ensino fundamental.** 2017. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2017. Disponível em: <https://bit.ly/2Q8Tndt>. Acesso em 01 fev. 2018.

ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra.** Editora Exato, 2010.

AWILA, Hakel. **Princípio de Cavalieri A**. 2017. Disponível em: <https://bit.ly/2AB2iPw>. Acesso em: 29 mar. 2018.

BARRERA, Israel Andres. **Verificando el Principio de Cavalieri**. 2017. Disponível em: <https://bit.ly/2yHzaoG>. Acesso em: 15 jan. 2018.

BISCARO, Adriana de Fátima Vilela. *et al.* Exploração do software Wingeom no ensino da Geometria Espacial para o cálculo de volumes por aproximação: uma proposta pedagógica. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2014, Campo Mourão. **Anais eletrônicos**. Campo Mourão: UNESPAR, 2014. Disponível em: <https://bit.ly/2JpQr9Q>. Acesso em: 20 jun. 2017.

BORTOLOSSI, Humberto José. Criando conteúdos educacionais digitais interativos em matemática e estatística com o uso integrado de tecnologias: GeoGebra, JavaView, HTML, CSS, MathML e JavaScript. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**. São Paulo, v. 1, n. 1, 2012. Disponível em: <https://bit.ly/2OgnIoL>. Acesso em 22 de set. 2017.

______. O Uso do *software* gratuito Geogebra no ensino e na aprendizagem de Estatística e Probabilidade. **Vidya**, Santa Maria, v. 36, n. 2, jul./dez., 2016, p. 429-440. Disponível em: <https://bit.ly/2Q7gNA9>. Acesso em: 20 set. 2017.

BORTOLOSSI, Humberto José. DOURADO, Márcio da Silva. **Geometria Espacial e Projeções em perspectiva com o uso do Computador:** Uma proposta interdisciplinar para o nono ano do Ensino Fundamental. 2013. Disponível em: <https://bit.ly/2EUdNWK>. Acesso em: 25 nov. 2017.

BRASIL. Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014. **Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências.** Brasília. Disponível em: <https://bit.ly/1LbcL4B>. Acesso em: 04 nov. 2017.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica.** Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013a.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Documento Preliminar da Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, SEB, 2015.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**; volume 2. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, SEB, 2006.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. Brasília: MEC/Semtec, 1999.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Programa Ensino Médio Inovador:** Documento Orientador. Brasília: MEC, SEB, 2013b.

______. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Resultado do Índice de Desenvolvimento da Educação – IDEB 2017.** 2018. Disponível em: <https://bit.ly/2qlggPU>. Acesso em: 01 set. 2018.

CASTRO, Maria Helena Guimarães de. **Desafios do Ensino Médio.** 2014. Disponível em: <https://bit.ly/2ADh0FV>. Acesso em: 04 nov. 2017.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; ROQUE, Tatiana. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto & Aplicações. Vol 3. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DIAS, Cláudio Carlos. et al. **Geometria Espacial.** Módulo II/. Cuiabá, MT: Central de Texto, 2013. 174 p. - (Matem@tica na Pr@tica. Curso de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio).

FRISKE, Andréia Luisa. et al. **Minicurso de GeoGebra**. 2016. Disponível em: <https://bit.ly/2zgI4Je>. Acesso em: 15 de jan. 2018.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008. 200 p.

GODOY, Arilda Schmidt. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **RAE - Revista de Administração de Empresas.** São Paulo, v. 35, São Paulo, v. 35, n. 2, mar/abr 1995, p. 57-63. Disponível em: <https://bit.ly/1YbtSoc>. Acesso em 20 set. 2017.

GRAVINA, Maria Alice. O potencial semiótico do Geogebra na aprendizagem da Geometria: uma experiência ilustrativa. **Vidya**, Santa Maria, v. 35, n. 2, jul./dez., 2015, p. 237-253. Disponível em: <https://bit.ly/2P0NqmC>. Acesso em 20 set. 2017.

GRAVINA, Maria Alice. SANTAROSA, Lucina Maria. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados**. Informática na educação:** teoria & prática. Porto Alegre, v. 3, n. 1, maio, 1999, p. 73-88. Disponível em: <https://bit.ly/2JstSRQ>. Acesso em: 20 set. 2017.

HOHENWARTER, Markus. GeoGebra: Ein Softwares y stem fürdy namische Geometrie und Algebra der Ebene. Paris-Lodron - Universität Salzburg, Austria, 2002. Disponível em: <https://bit.ly/2KKgEAQ>. Acesso em 20 set, 2017.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de Metodologia Científica.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003. 311 p.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 250 p. (Coleção do Professor de Matemática; 16).

______. **Números e Funções Reais.** Rio de Janeiro: SBM, 2013. 297 p. (Coleção PROFMAT,07).

LIMA, Elon Lages. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** Vol 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SMB, 2006. 372 p. (Coleção do Professor de Matemática; 14).

______. **Temas e Problemas.** Rio de Janeiro: SMB, 2010. 225 p. (Coleção do Professor de Matemática; 17).

MANETTA, Marco A. **Volume do Paralelepípedo III**. 2017. Disponível em: <https://bit.ly/2Q821cc>. Acesso em: 29 mar. 2018.

MARIN, Guilherme Baggio; LEIVAS, José Carlos Pinto. O uso do Cabri 3D para desenvolver habilidade de visualização. **Boletim Gepem,** Seropédica, n. 63, jan/jul, 2013, p.105-121. Disponível em: <https://bit.ly/2zdtYs1>. Acesso em: 22 set 2017.

NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. **Dedução da fórmula do volume da esfera**. 2017a. Disponível em: <https://bit.ly/2yCPEyj>. Acesso em: 15 jan. 2018.

______. **GGBOOK:** uma plataforma que integra o software de geometria dinâmica Geogebra com editor de texto e equações a fim de permitir a construção de narrativas matemáticas dinâmicas. 2015. 246 f., il. Tese (Doutorado em Educação), Universidade de Brasília, Brasília, 2015. Disponível em: <https://bit.ly/2DdJKHR>. Acesso em: 22 de set.2017.

______. **Manual da Plataforma GeoGebra.** 2017b. Disponível em: <https://bit.ly/2SyAItb>. Acesso em 14 de jan. 2018.

OLIVEIRA, Flavia Carneiro da Cunha; LUZ, Cristina P. de M. Spineti. **Profmat:** uma reflexão e alguns resultados. Rio de Janeiro: SBM, 2017. Disponível em: <https://bit.ly/2Q5JI7v> Acesso em 01 fev. 2018.

PEREIRA, João Marcos. **O uso da informática no ensino de geometria:** unicamente dinâmica didática ou vantagem cognitiva?. 2007. 100 f. Dissertação

(Mestrado em Educação) - Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2007. Disponível: em <https://bit.ly/2RqJWXk>. Acesso em: 19 set. 2017.

PRIMO, Márcio Eduardo. **O princípio de Cavalieri para cálculo de volumes no ensino médio:** algumas possibilidades, 2013, 79 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013. Disponível em: <https://bit.ly/2CPoxD4>. Acesso em: 19 set. 2017.

RAMOS, Augusto Cesar Machado. **Prisma Triangular**. 2016. Disponível em: <https://bit.ly/2OZoXxW>. Acesso em: 15 jan. 2018.

RITTER, Andréa Maria. **A visualização no ensino de Geometria Espacial:** possibilidades com o software Calques 3D, 2011, 142 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <https://bit.ly/2AAV7qO>. Acesso em: 18 set. 2017.

ROCHA, Lúcia Andréia de Souza. et al. A utilização de softwares no ensino de funções quadráticas. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 19 – 35. Disponível em: <https://bit.ly/2OeeyJD>. Acesso em: 18 set. 2017.

SILVA, Evandro Alves da. **O ensino de funções trigonométricas com auxílio do GeoGebra.** 2013. 75f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, 2013.

SIQUEIRA, Ruan de Freitas. et al. **Tutorial para GeoGebra**. 2017. Disponível em: <https://bit.ly/2P1DBoe> Acesso em: 15 de jan. 2018.

SOUZA, Joamir Roberto de. PATARO, Patricia Rosana Moreno. **Vontade de Saber Matemática**. 2 ed. São Paulo: FTD, 2012.

SOUZA JÚNIOR, José Carlos de. et al. Geogebra 3D: uma ferramenta para estudo de volumes no Ensino Médio. **Revista da Universidade Vale do Rio Verde**, Três Corações, v. 12, n. 1, p. 755-764, jan./jul. 2014. Disponível em: <https://bit.ly/2NMfvZc>. Acesso em: 20 nov. 2017.

TODOS PELA EDUCAÇÃO. **Tecnologia e Educação:** O que pensam os professores brasileiros sobre a tecnologia digital em sala de aula?. 2018. Disponível em: <https://bit.ly/2ETIGdT>. Acesso em 20 jun. 2018.

TROCADO, Alexandre Emanuel Batista; SANTOS, José Manoel dos. **Curso 1 - Geogebra 3D**. 2013. Disponível em: <https://bit.ly/2P3Axr5>. Acesso em: 15 jan. 2017.

UNESCO. **Os desafios do ensino de Matemática na Educação Básica**. São Carlos: EdUFSCar, 2016. Disponível em: <https://bit.ly/2zgNd40>. Acesso em: 27 set. 2017.

VAZ, Duelci Aparecido de Freitas. Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando: articulando investigação Matemática com o Geogebra. **Educativa**, Goiânia, v. 15, n. 1, p. 39-51, jan./jun. 2012. Disponível em: <https://bit.ly/2qi3npA>. Acesso em: 20 set. 2017.

VAZ, Duelci Aparecido de Freitas. et al. Investigação Matemática com o Geogebra em uma propriedade dos polígonos. **Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 3, n. 1, 2015. Disponível em: <https://bit.ly/2Rsgr7z>. Acesso em: 20 set. 2017.

APÊNDICE A – ATIVIDADES DIAGNÓSTICAS

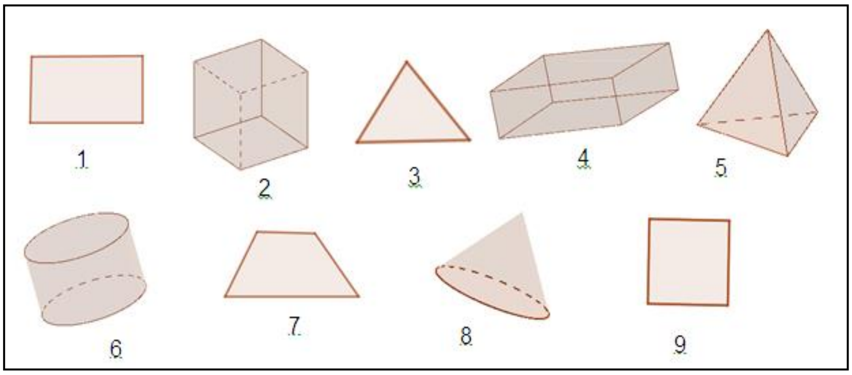
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF
Mestrando: Francisco Raimundo Coutinho Júnior
Orientador: Profº. Dr. Edson Leite Araújo

ATIVIDADE 1

Objetivo: Identificar se o aluno é capaz de distinguir figuras planas dos sólidos geométricos.

Na Figura 1.D, encontram-se alguns objetos geométricos.

Figura 1.D - Objetos geométricos



Com base nos objetos da Figura 1.D, responda:

a) Quais representam figuras planas? Como você chegou a essa conclusão?

Espera-se que os alunos respondam que os objetos 1, 3, 7 e 9 representam figuras planas e que tais objetos têm apenas duas dimensões (comprimento e largura), ou seja, são objetos bidimensionais.

b) Quais representam sólidos geométricos? Como você chegou a essa conclusão?

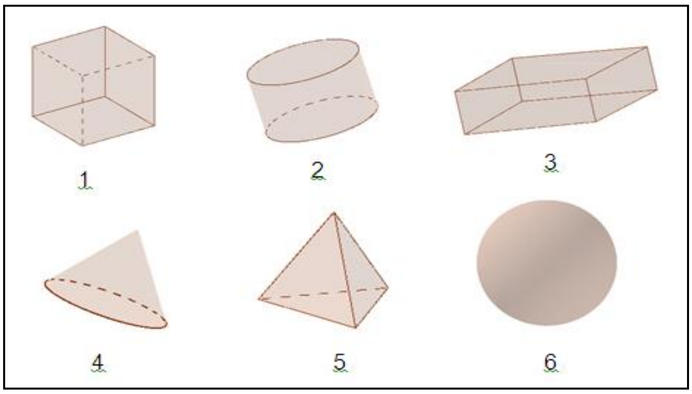
Espera-se que os alunos respondam que os objetos 2, 4, 5, 6 e 8 representam sólidos geométricos e que possuem três dimensões (comprimento, largura e altura), ou seja, são objetos tridimensionais, também denominados figuras espaciais.

ATIVIDADE 2

Objetivo: Verificar se o aluno é capaz de conceituar e diferenciar poliedros e não poliedros.

Na Figura 2.D encontram-se alguns sólidos geométricos.

Figura 2.D - Sólidos geométricos



Com base nos sólidos geométricos da Figura 2.D, responda:

a) Qual o nome de cada um dos sólidos geométricos?

Espera-se que os alunos respondam que os sólidos 1 e 3 são prismas que recebem os nomes de cubo e paralelepípedo, respectivamente. O sólido 2 é um cilindro; o 4 é um cone; o 5, uma pirâmide e o 6 é uma esfera.

b) Quais são poliedros? Como você chegou a essa conclusão?

Espera-se que os alunos respondam que os sólidos 1, 3 e 5 são poliedros, pois possuem todas as suas faces planas e poligonais. Espera-se ainda que os alunos enfatizem que os poliedros possuem faces laterais, vértices e arestas.

c) Quais não são poliedros? Como você chegou a essa conclusão?

Espera-se que os alunos respondam que os sólidos 2, 4 e 6 não são poliedros, pois suas faces não são todas poligonais, ou seja, possuem faces formadas por superfícies curvas. Em relação aos sólidos destacados, espera-se que os alunos observem também que não possuem faces laterais e que podem rolar quando colocados em um plano inclinado.

d) Cite objetos do seu cotidiano que possuem a forma desses sólidos.

Espera-se que o aluno consiga citar objetos como embalagens diversas, caixas de papelão, bolas, chapéu de aniversário, lápis, palito de picolé, cubos, canudos de formatura, pilhas, etc.

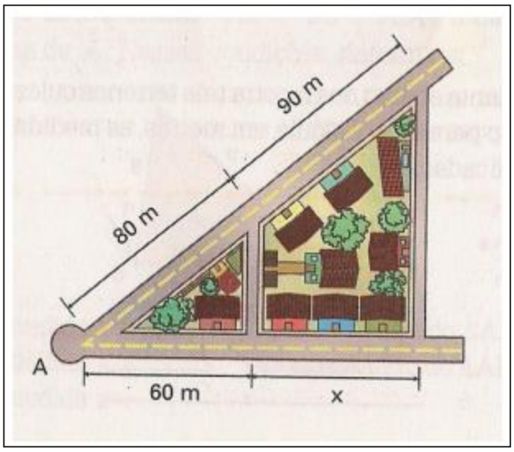
NOTA: Como atividade complementar, o professor deve solicitar que os alunos tragam, na aula seguinte, alguns dos objetos citados no item d).

ATIVIDADE 3

Objetivo: Verificar se o aluno compreende o *Teorema de Tales* e sabe aplicá-lo para resolver situações-problemas.

(Blog do Enem) A Figura 3.D nos mostra duas avenidas que partem de um mesmo ponto A e cortam duas ruas paralelas. Na primeira avenida, os quarteirões determinados pelas ruas paralelas têm 80m e 90m de comprimento, respectivamente. Na segunda avenida, um dos quarteirões mede 60m. Qual o comprimento do outro quarteirão? Dica: utilize o *Teorema de Tales*.

Figura 3.D - Representação das avenidas



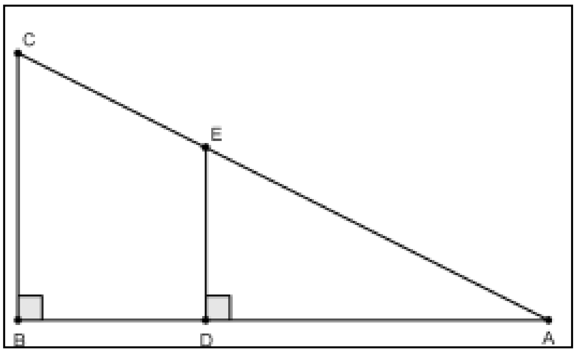
Espera-se que os alunos utilizem corretamente o Teorema de Tales e concluam que o comprimento do quarteirão é 67,5m.

ATIVIDADE 4

Objetivo: Verificar se o aluno reconhece triângulos semelhantes, a razão de semelhança entre eles e os casos de semelhança de triângulos.

1ª Parte: **(Portal da Matemática)** Observe a Figura 4.D e responda:

Figura 4.D - Triângulos.



a) os triângulos ABC e ADE são semelhantes?

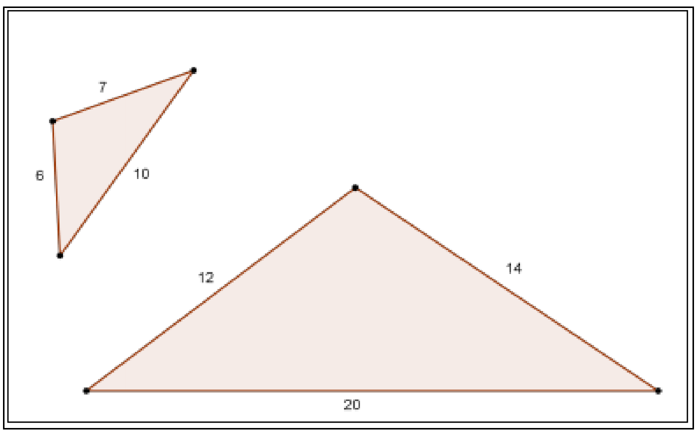
Espera-se que os alunos respondam que os triângulos são semelhantes

b) Caso sejam semelhantes, qual é o caso de semelhança envolvido?

Espera-se que os alunos respondam que os triângulos são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo), ou seja, por possuírem dois ângulos correspondentes congruentes.

2ª Parte: **(Portal da Matemática)** Qual a razão de semelhança dos triângulos da Figura 5.D.

Figura 5.D - Triângulos Semelhantes



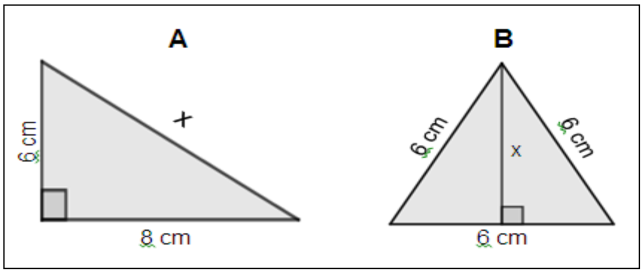
Espera-se que os alunos respondam que a razão de semelhança entre o triângulo maior e o triângulo menor é 2. Já a razão de semelhança entre o triângulo menor e o maior é $\frac{1}{2}$.

ATIVIDADE 5

Objetivo: Identificar se o aluno compreende o *Teorema de Pitágoras* e sabe aplicá-lo para resolver situações-problemas.

Utilize o *Teorema de Pitágoras* para descobrir o valor de X em cada um dos triângulos da Figura 6.D.

Figura 6.D - Triângulos retângulos



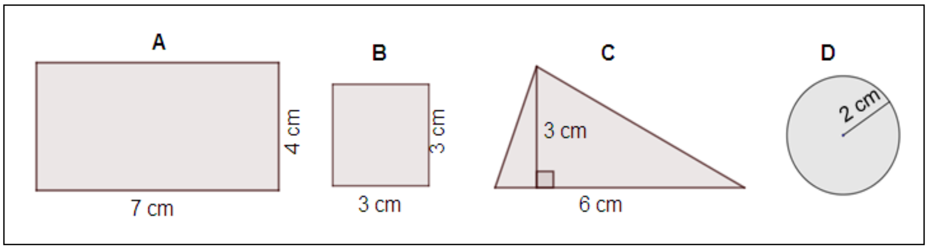
Espera-se que os alunos utilizem corretamente o Teorema de Pitágoras e concluam que o valor de X no triângulo A é 10 cm e no triângulo B é $\sqrt{27}\ cm$ ou $3\sqrt{3}\ cm$

ATIVIDADE 6

Objetivo: Verificar se o aluno é capaz de calcular áreas de retângulos, quadrados, triângulos e círculos.

Determine a área das figuras planas da Figura 7.D (considere π =3,14).

Figura 7.D - Figuras planas



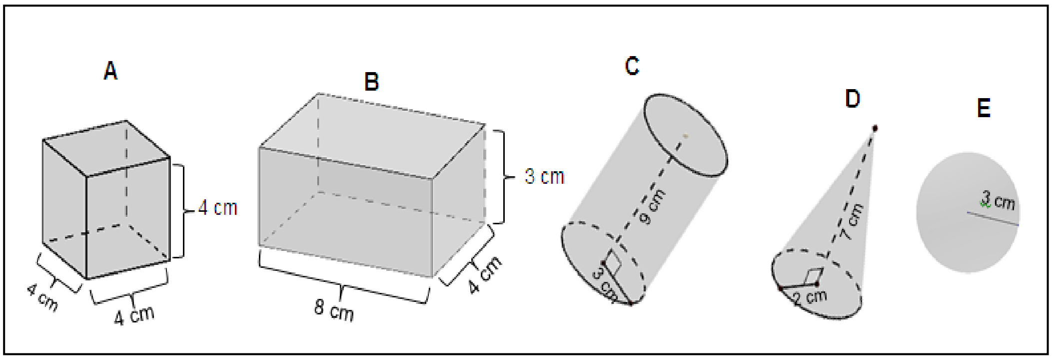
Espera-se que os alunos utilizem corretamente as fórmulas e concluam que o valor da área das figuras A, B, C e D é, respectivamente, 28 cm², 9 cm², 9 cm² e 12,56 cm².

ATIVIDADE 7

Objetivo: Identificar se o aluno conhece e sabe aplicar as fórmulas de cálculo de volume dos seguintes sólidos geométricos: prismas (cubo e paralelepípedo), pirâmides, cones e esferas.

Calcule o volume dos sólidos geométricos da Figura 8.D (considere π = 3,14).

Figura 8.D - Sólidos geométricos



Espera-se que os alunos utilizem corretamente as fórmulas e concluam que o volume dos sólidos A, B, C, D e E são, respectivamente, 64 cm³, 96 cm³, 254,34 cm³, 29,31cm³ e 113,04 cm³.

APÊNDICE B – ATIVIDADES DE NIVELAMENTO

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF
Mestrando: Francisco Raimundo Coutinho Júnior
Orientador: Profº. Dr. Edson Leite Araújo

ATIVIDADE 1

Objetivo: Aprimorar a percepção das diferenças entre poliedros e não poliedros e classificá-los de acordo com suas características.

Coloque, sobre uma mesa, objetos no cotidiano dos alunos que assemelham-se com os sólidos geométricos estudados, selecione aleatoriamente alguns estudantes e peça para separarem os objetos em dois grupos: os poliedros e os não poliedros. Após a separação dos objetos, ainda de forma aleatória, peça para outros estudantes dividirem os objetos conforme sua semelhança com os sólidos geométricos da seguinte maneira: separar os objetos que se assemelham aos prismas, ao cone, a pirâmide, etc.

NOTA 1: Quando os primeiros alunos selecionados concluírem a separação em poliedros e não poliedros, peça que justifiquem suas escolhas e pergunte a turma se concordam ou não com a separação feita. Caso haja impasses, induza-os a resolvê-los com base em argumentações conceituais. O mesmo deve ocorrer no caso da segunda separação dos objetos.

NOTA 2: Aproveite esta atividade para retomar as características das figuras planas e espaciais.

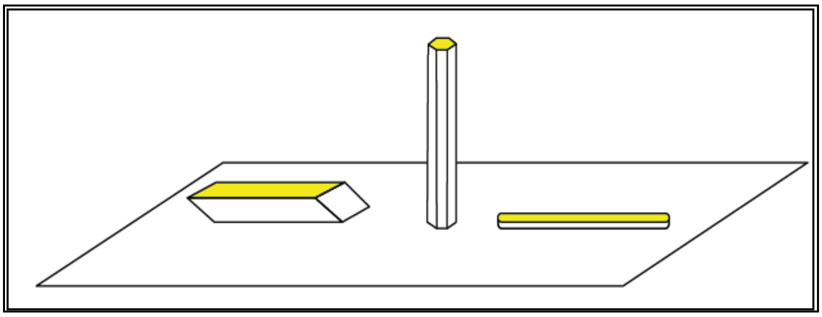
NOTA 3: Ao final da atividade, apresente uma definição formal de poliedro. Sugere-se as definições contidas em Dias et al. (2013) e Lima et al. (2006).

ATIVIDADE 2 (Dias et al. (2013)).

Objetivo: Introduzir a ideia de volume.

Exponha sobre uma mesa um conjunto de objetos formado por um lápis sextavado sem pontas, uma borracha de duas cores em forma de prisma oblíquo, um palito de picolé (Figura 1.N) e questione o que esses objetos têm em comum com um cilindro.

Figura N.1 - Representação dos objetos em repouso sobre a mesa.

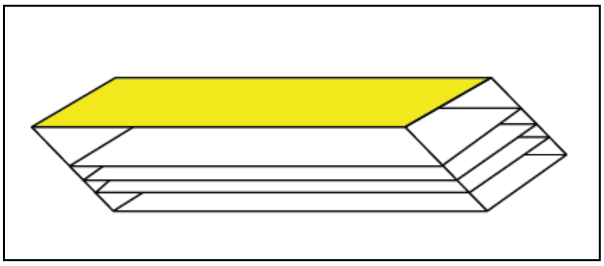


Fonte: Dias et al. (2013).

Observação: O professor deve providenciar o material necessário para a condução desta atividade antecipadamente.

NOTA 1: Solicite aos alunos que se concentrem somente em suas formas e escolha um desses objetos, a borracha, e peça que suponham que a face em contato com a mesa seja um retângulo. Em seguida, conduza-os a perceberem que, para obter a forma da borracha, basta considerar uma infinidade de retângulos, todos paralelos e iguais ao retângulo da base, todos com seus quatro vértices apoiados em quatro segmentos que são as arestas laterais da borracha, formando a ideia de que a infinidade de retângulos, paralelos entre si, "preenchem" um sólido com o formato na borracha (Figura 2.N).

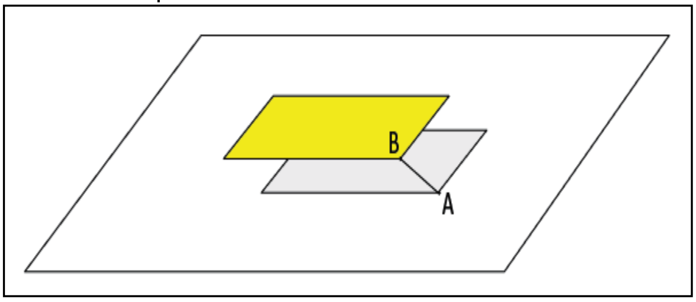
Figura 2.N - Representação dos retângulos formando a borracha.



Fonte: Dias et al. (2013).

NOTA 2: Enfatize que outra maneira de obter-se a forma da borracha é, de início, representar uma das arestas laterais da borracha por um segmento AB (Figura 3.N). O sólido definido pela borracha pode ser pensado como a reunião da infinidade de segmentos de retas, todos paralelos ao segmento AB, e todos com uma extremidade na base da borracha e outra extremidade no topo.

Figura 3.N - Representação da região do espaço ocupada pela borracha pensada como o conjunto dos segmentos paralelos ao segmento AB, todos apoiados na base (um retângulo), preenchendo-a totalmente



. Fonte: Dias et al. (2013).

ATIVIDADE 3 (EXTRACLASSE)

Objetivo: Verificar os conhecimentos adquiridos na atividade anterior acerca da ideia de volume de sólidos geométricos.

Seguindo os mesmos princípios que utilizamos para chegar à forma geométrica da borracha, você poderia sugerir duas maneiras pelas quais poderíamos obter:

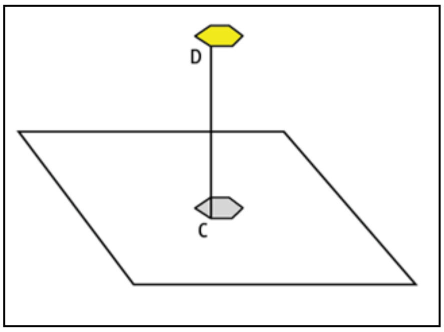
a) a forma geométrica do lápis sextavado.

b) a forma geométrica do palito de picolé.

Espera-se que os alunos percebam que um procedimento semelhante ao utilizado com a borracha pode ser empregado para obter a forma geométrica do lápis sextavado sem ponta. As únicas diferenças são as seguintes: em vez de começar com um retângulo no plano de apoio, inicia-se com um hexágono regular. Daí, para preenchermos o espaço ocupado pelo lápis, basta considerar uma infinidade de hexágonos paralelos entre si, iguais ao hexágono da base do lápis, com seus seis vértices apoiados em seis segmentos que são as arestas laterais do lápis.

Outra maneira de preencher um sólido com o formato do lápis seria considerar segmentos paralelos entre si, com uma de suas extremidades no hexágono da base (hexágono em contato com o plano de apoio), todos tomados "para cima" a partir do plano da base, com comprimento e inclinação iguais ao do segmento CD (Figura 4.N).

Figura 4.N: Representação do lápis sextavado tendo como base um hexágono regular.



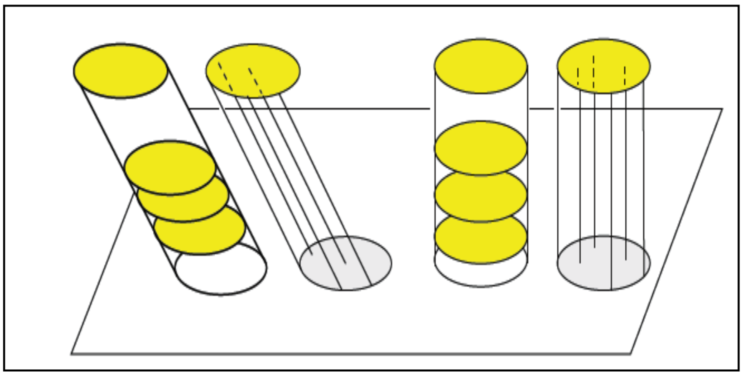
Fonte: Dias et al. (2013).

De maneira análoga, obtém-se a forma do palito de picolé.

NOTA: Para finalizar a atividade, retome o questionamento da segunda atividade de nivelamento: o que uma borracha, um lápis e um palito de picolé têm em comum com um cilindro?

Espera-se que os alunos percebam que os mesmos procedimentos feitos na segunda atividade de nivelamento, podem ser empregados para obter a forma de um cilindro, para isso, basta tomar um círculo como figura da base e proceder de forma inteiramente análoga (Figura 5.N).

Figura 5.N: - Esquema que representa cilindros em formação, como reuniões de círculos paralelos à base, ou como reuniões de segmentos apoiados sobre uma base circular plana.



Fonte: Dias et al. (2013).

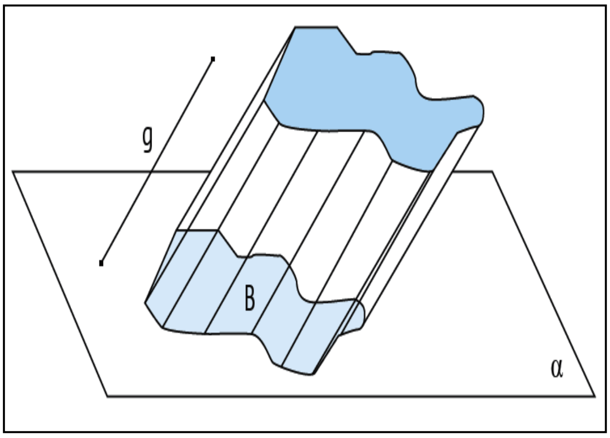
ATIVIDADE 4

Objetivo: Apresentar a definição formal de cilindros generalizados e sua classificação em oblíquos ou retos, e cilindro ou prisma.

Apresente, de forma escrita, a definição de cilindros generalizados (DIAS et al., 2013):

Considere B uma região plana qualquer. Chame de α o plano que a contém. O plano α divide o espaço euclidiano em duas regiões que o contem, uma fica acima do plano α e outro fica abaixo do plano α (Figura 6.N).

Figura 6.N- Cilindro generalizado, de base *B* e geratriz *g*, sobre um plano α.



Fonte: Dias et al. (2013).

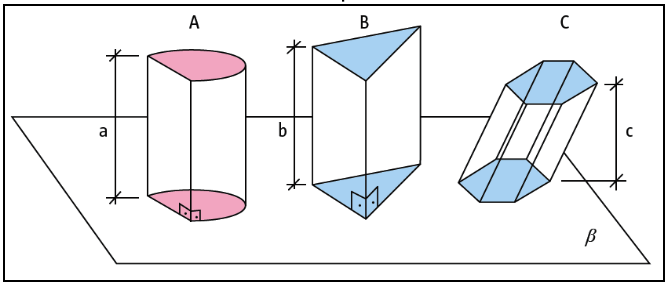
Seja g um segmento de reta que não esteja contido no plano α nem seja paralelo a ele. O cilindro generalizado, de base B e geratriz g, é a figura espacial C, ou, melhor dizendo, é o sólido C, formado pela reunião de todos os segmentos paralelos e congruentes a g (isto é, paralelos e com a mesma medida de g), com uma de suas extremidades contida na base B, de tal forma que todos os segmentos paralelos estão contidos em uma mesma região definida pelo plano α, ou seja, todos de um mesmo lado de α. Assim sendo, o cilindro generalizado estará contido em uma das regiões determinadas pelo plano de sua base.

Em relação a classificação, explique aos alunos que os cilindros generalizados, podem ser classificados de duas maneiras (reto e oblíquo) quando se considera a posição de sua geratriz.

Exponha a Figura 7.N e enfatize que se sua geratriz é ortogonal à base B, ou seja, se ela forma um ângulo de 90° com o plano β (e isso quer dizer que forma um ângulo de 90° com duas retas concorrentes contidas no plano β), diz-se que o cilindro generalizado é *reto*. Se o cilindro generalizado não é reto, ele é chamado de cilindro generalizado *oblíquo*.

Ainda em relação a classificação, explique que um cilindro generalizado de base circular é chamado simplesmente de **cilindro**. Já um cilindro generalizado que tem como base uma região poligonal é chamado de **prisma.** O prisma que possui base triangular é chamado de prisma *triangular*; se sua base é um quadrilátero, tem-se um prisma *quadrangular*, e assim por diante.

Figura 7.N - Cilindros generalizados, (A e B) são retos e o terceiro (cilindro C) é inclinado ou oblíquo.



Fonte: Dias et al. (2013).

Espera-se que os alunos compreendam o conceito e a classificação de cilindro generalizado.

NOTA 1: Apresente, da maneira que julgar conveniente, as seguintes características dos prismas (DIAS et al., 2013):

1. Todo prisma é um poliedro (sólido).
2. Todo prisma possui vários polígonos formando seu contorno; o contorno do prisma é uma superfície poliédrica.
3. Dois desses polígonos são paralelos e congruentes, sendo um deles a base do prisma. O outro polígono, congruente e paralelo à base, também é uma base do prisma. Na Figura 7.N, as bases dos prismas (cilindros generalizados B e C) são destacadas em azul.
4. Os polígonos restantes que formam o contorno de um prisma são sempre paralelogramos, e formam as faces laterais do prisma. Quando o prisma é reto, todas as suas faces laterais são retangulares.

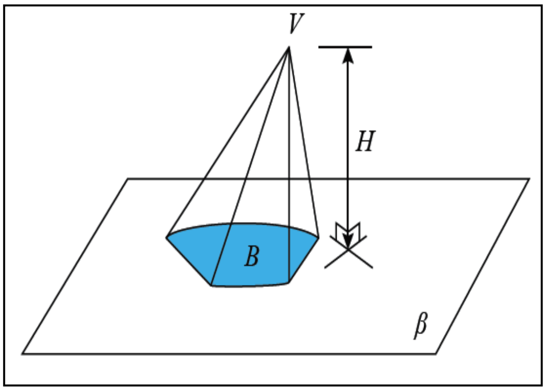
ATIVIDADE 5

Objetivo: Apresentar a definição de cone generalizado e sua classificação de acordo com o formato de sua base.

Apresente, de forma escrita, a definição de cone generalizado (DIAS et al., 2013):

Considere uma região plana B contida em um plano β e um ponto V situado fora do plano (Figura 8.N). O cone generalizado com base B e vértice V é o sólido obtido pela reunião de todos os segmentos de reta que unem V aos pontos de B, ou seja, todos os segmentos que vão do vértice V à base B.

Figura 8.N - Cone generalizado.



Fonte: Dias et al. (2013).

A distância do vértice do cone generalizado ao plano β, que contém sua base, é chamada *altura* do cone generalizado, identificado por H na Figura N.8. Essa distância é o comprimento de um segmento perpendicular ao plano β, com uma das extremidades no vértice V e outra no plano β.

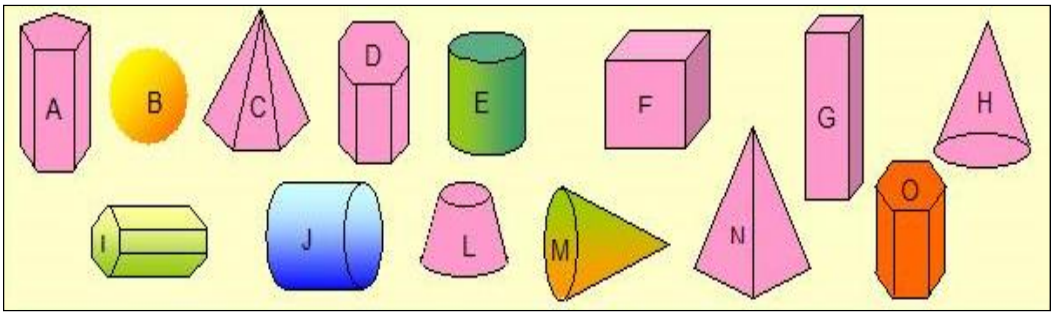
Explique que a classificação dos cones generalizados se dá de acordo com o formato de sua base: um cone generalizado no qual a base B é um círculo, é definido como **cone** ou cone circular. Esse cone é chamado de cone circular *reto* quando a reta que passa pelo seu vértice e pelo centro da base é perpendicular ao plano da base; Já um cone generalizado cuja base é uma região poligonal, é chamado de **pirâmide**.

Enfatize que pirâmides triangulares, quadrangulares, pentagonais e hexagonais são aquelas cujas bases são triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos, respectivamente.

NOTA 1: Destaque que numa pirâmide triangular, também chamada de *tetraedro*, pode-se fixar quatro bases e, consequentemente, as alturas relativas a essas bases variam. Em qualquer outra pirâmide, cuja base não seja um triângulo, temos somente uma escolha para base.

Finalize a atividade, pedindo que os estudantes identifiquem e classifiquem oralmente os sólidos da Figura 9.N, em cilindro, prisma, cone, pirâmide ou esfera.

Figura 9.N - Sólidos geométricos diversos.



Fonte: www.ajudaalunos.com. Acesso em 20 dez. 2018.

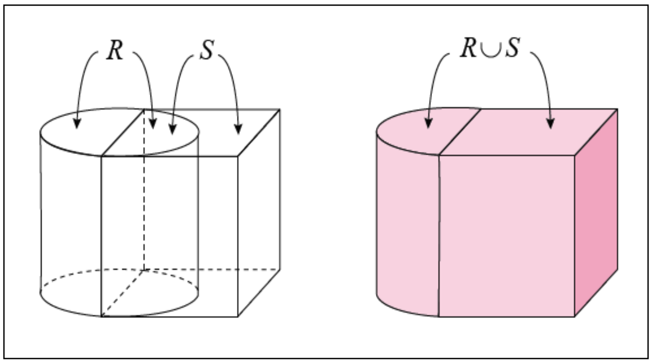
ATIVIDADE 6

Objetivo: Construir o conceito de volume a partir da apresentação de pressupostos ou postulados sobre volumes dos sólidos geométricos estudados.

1ª parte: Antes de apresentar os pressupostos iniciais que definem o conceito de volume, apresente os conceitos de reunião e interseção de sólidos (DIAS et al., 2013).

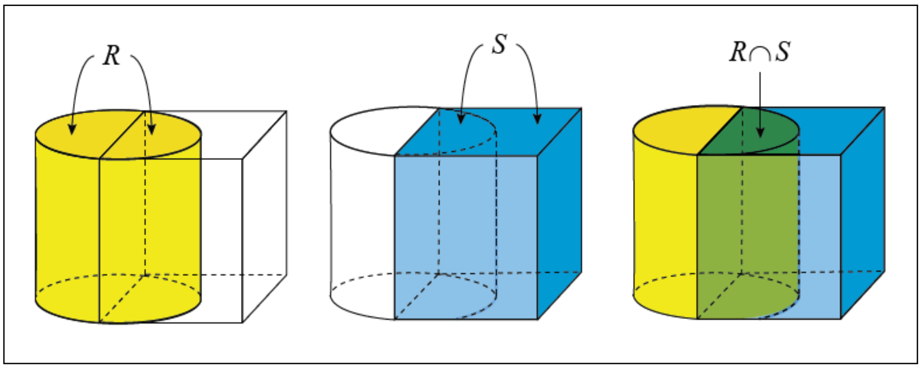
Se R e S são dois sólidos, representa-se por $R \cup S$ a reunião dos sólidos R e S, e diz-se que $R \cup S$ também é um sólido, mesmo quando R e S não tiverem pontos em comum. Se R e S tiverem pontos em comum, representamos por $R \cap S$ a interseção de R e S, ou seja, o conjunto de todos os pontos comuns a ambos, R e S. Se R e S não tiverem pontos em comum, dizemos que a interseção de R e S é o conjunto vazio, e escrevemos $R \cap S = \emptyset$. Exponha as Figuras 10.N e 11.N para ilustrar esses conceitos.

Figura N.10 - Reunião dos sólidos R e S.



Fonte: Dias et al. (2013).

Figura 11.N - Interseção dos sólidos R e S.



Fonte: Dias et al. (2013).

NOTA 1: Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado (LIMA et al., 2006). Explique que, sendo S um sólido qualquer, essa "quantidade de espaço" é expressa por um número real $V(S) \geq 0$ e é resultado de uma comparação com uma unidade, o cubo de aresta 1.

2ª parte: Apresente uma definição de pressuposto ou postulado e apresente os seguintes pressupostos do volume (DIAS et al., 2013):

Pressuposto 1: Se dois sólidos R e S são tais que R é (geometricamente) uma cópia de S (e então, simultaneamente, S é uma cópia de R), então, $V(R) = V(S)$. Em outras palavras, se um sólido é uma reprodução de outro, ambos têm o mesmo volume.

Pressuposto 2: Se S é um polígono, ou se S é uma figura plana ou está contida em um plano, então, $V(S) = 0$, ou seja, tem volume nulo, não apenas os polígonos, mas toda figura plana. Para comodidade no estudo de volumes, assume-se, portanto, que figuras planas, muito embora não sejam habitualmente consideradas como sólidos, são "sólidos de volume zero". Por propósitos matemáticos, diz-se que o conjunto vazio, embora não seja propriamente um sólido ou uma figura geométrica, tem volume igual a zero.

Pressuposto 3: Se dois sólidos R e S são tais que $R \subset S$ (R está contido em S), então, o volume do sólido R é menor que ou igual ao volume do sólido S, ou seja, $V(R) \leq V(S)$. Isso quer dizer que um sólido nunca tem volume maior do que um sólido que o contenha.

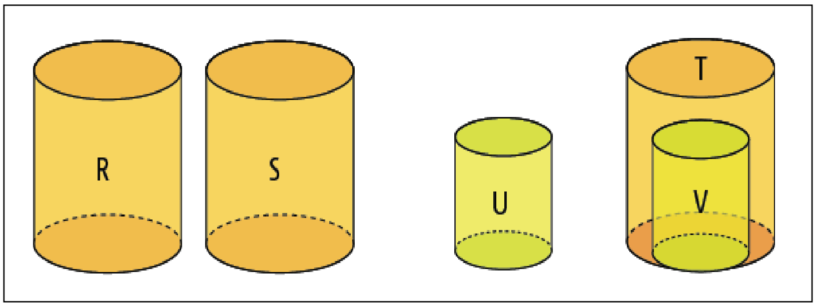
Pressuposto 4: Se os sólidos R e S são tais que a parte comum a ambos (interseção de ambos) tem volume zero, ou seja, se $V(R \cap S) = 0$, então, o sólido tomado como a reunião dos sólidos R e S tem volume igual à soma dos volumes dos sólidos R e S, ou seja: $V(R \cup S) = V(R) + V(S)$.

Pressuposto 5: Se S é um cubo em que cada aresta mede uma unidade de comprimento, então, o volume desse cubo é igual a uma unidade de volume, $V(S) = 1$.

NOTA 2: Explique que o pressuposto 5 estabelece uma unidade de volume, que é o cubo cuja aresta tenha uma unidade de comprimento e que, para cada unidade de comprimento, tem-se uma unidade correspondente de volume. Se, por exemplo, a unidade de comprimento for o centímetro (cm), então, a unidade correspondente de volume de um sólido será chamada de centímetro cúbico (cm^3).

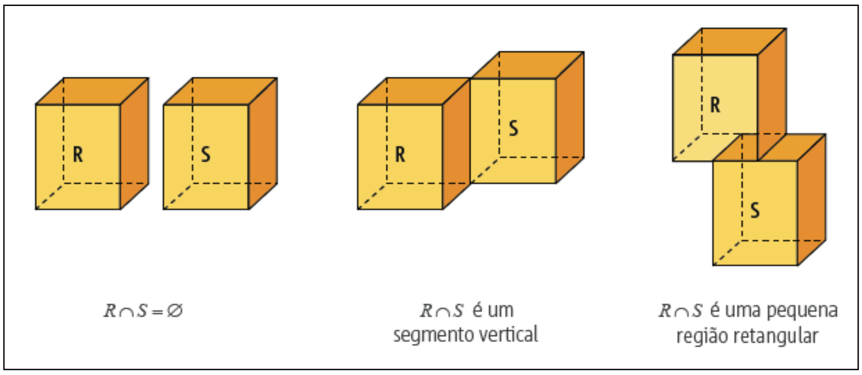
Observação: Os pressupostos 3 e 4 devem ser ilustrados pelas Figuras 12.N e 13.N, respectivamente:

Figura N.12 - Ilustração do pressuposto 3.



Fonte: Dias et al. (2013).

Figura 13.N - Ilustração do pressuposto 4.



Fonte: Dias et al. (2013).

NOTA 3: Explique que os cilindros R, S e T são três cópias geométricas de um mesmo cilindro e, assim, pelo pressuposto 1, têm o mesmo volume. Os cilindros U e V são também cópias um do outro e, portanto, também têm o mesmo volume. O cilindro V tem volume menor que o do cilindro T, pelo pressuposto 3, pois V está contido em $(V \subset T)$. Assim, o cilindro U também tem volume menor que o volume de T.

NOTA 4: Relate que se os sólidos R e S não têm nenhuma parte em comum, como na situação à esquerda; ou se a parte compartilhada por ambos (interseção) é um segmento, como na situação ao centro; ou uma figura plana, como à direita, então, $V(R \cap S) = 0$ (Figura 13.N). Assim, pelo pressuposto 4, o volume do sólido reunião de R e S, $R \cup S$, é a soma dos volumes de R e de S, ou seja, $V(R \cup S) = V(R) + V(S)$.

Informe que o resultado vale também para n sólidos, ou seja, se tivermos n sólidos, $S_1, S_2 \ldots S_n$, com $n \geq 2$, de modo que $V(S_i \cap S_j) = 0$ sempre que $i \neq j$ (i e j tomados no conjunto de índices $\{1,2,\ldots,n\}$), isto é, de modo que os n sólidos tenham, tomados dois a dois, interseção de volume zero, então: $V(S_1 \cup S_2 \cup .... \cup S_n) = V(S_1) + V(S_2) + ... + V(S_n)$.

NOTA 5: Finalize a atividade com os seguintes questionamentos:

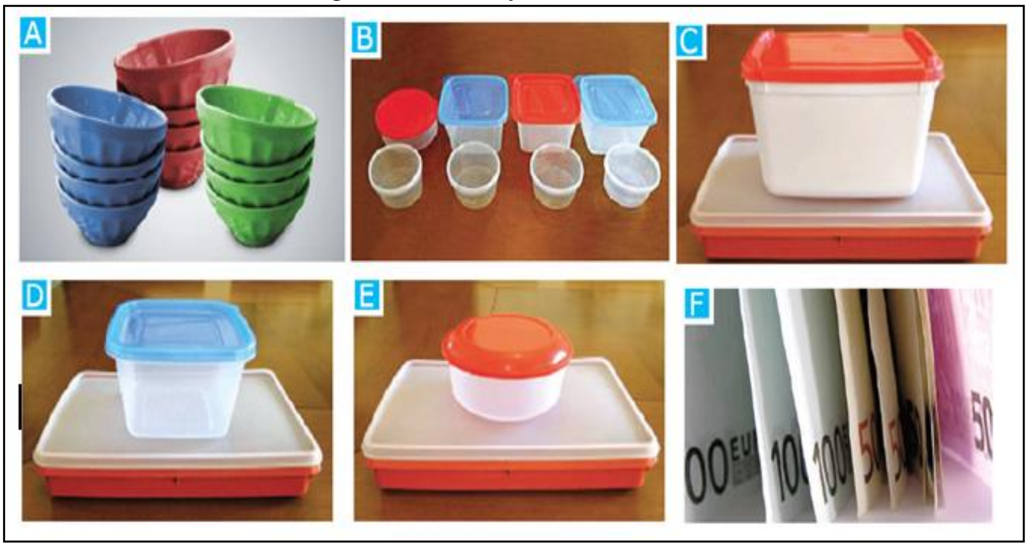
1) Se considerarmos um segmento de reta como sendo um sólido, podemos dizer que seu volume é zero? (Utilize o pressuposto 2).
Espera-se que os alunos respondam que sim, pois todo segmento de reta está contido em algum plano e, pelo pressuposto 2, seu volume é zero.
2) Qual o volume de uma reunião finita de pontos?
Espera-se que os alunos respondam que é zero, pois cada ponto está contido em algum plano e, portanto, seu volume é zero. Além disso, pela generalização do pressuposto 4, a soma dos volumes desses pontos é zero.

<u>ATIVIDADE 7</u> (Dias et al. (2013) - adaptada)

Objetivo: Discutir os pressupostos que definem o conceito de volume apresentados na atividade anterior, com base na análise de objetos encontrados no nosso cotidiano.

Leve alguns objetos encontrados no nosso cotidiano como vasilhas plásticas de diferentes formas e tamanhos (mas algumas com formas e tamanhos iguais) e folhas de papel. Faça uma separação semelhante a apresentada na Figura 14.N.

Figura 14.N - Objetos do cotidiano.



Fonte: Dias et al. (2013).

NOTA 1: Coloque algumas folhas de papel umas sobre as outras para ilustrar o fato de que, embora as folhas possam ser representações de superfícies planas, elas não têm volume nulo, pois quando se junta várias delas, forma-se um montante de folhas com volume considerável. Isso ilustra o fato de que sólidos de volume zero só existem no âmbito da Geometria Espacial, como elaboração do intelecto humano, mas não existem no mundo real.

NOTA 2: Após a separação dos objetos, discuta com os alunos que tigelas que são réplicas uma da outra têm a mesma capacidade, e isso ilustra o pressuposto 1. Deixe claro para os estudantes que, mesmo que sejamos capazes, com base em nossa vivência, de intuir que determinadas vasilhas têm capacidade maior que outras, os pressupostos 1, 2, 3 e 4 não nos possibilita validar nossa intuição.

APÊNDICE C – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF
Mestrando: Francisco Raimundo Coutinho Júnior
Orientador: Profº. Dr. Edson Leite Araújo

ÁREA DO CONHECIMENTO: Matemática

UNIDADE DE CONHECIMENTO: Geometria

COMPONENTE CURRICULAR: Matemática

SÉRIE: 3ª série do Ensino Médio

TEMPO ESTIMADO: 05 aulas com 50 minutos cada.

CONTEÚDO: Volumes de sólidos geométricos (prismas, cilindros generalizados, cones generalizados e esfera)

RECURSOS DIDÁTICOS: Computadores com o *software Geogebra* instalado, projetor de imagens, resmas de papel, lápis, lousa, pinceis,...

Esta sequência didática é constituída por atividades com foco investigativo, direcionadas à compreensão do processo de dedução das fórmulas de volumes dos sólidos geométricos em estudo. Essas atividades são baseadas pela ação de experimentar, conjecturar, formalizar e generalizar o saber matemático (VAZ, 2012).

Em cada atividade são utilizados *applets* desenvolvidos no *software Geogebra*, que contêm animações que possibilitam diferentes visualizações, fazer alterações em suas dimensões, verificar invariâncias, formular e testar conjecturas, entre outras. Os *applets* utilizados estão disponíveis na plataforma oficial deste software, www.geogebra.org, podem ser usados online, mas também podem ser baixados livremente para fins pedagógicos. Recomenda-se que esses *applets* sejam salvos antecipadamente nos computadores que serão utilizados.

As atividades foram organizadas para que o professor e os alunos possam interagir e trabalhar conjuntamente, de forma que estes possam participar ativamente da construção do conhecimento. Ressalta-se que para a aplicação desta sequência didática, não é necessário que professores e alunos possuam conhecimentos avançados de informática, pois, suas atividades foram pensadas neste sentido.

Durante a realização das atividades, o professor não deve voltar sua atenção aos aspectos operacionais do *software* e sim auxiliar os alunos na formulação de conjecturas, conclusões e justificativas a partir das manipulações dos sólidos geométricos contidos nos *applets* usados em cada atividade.

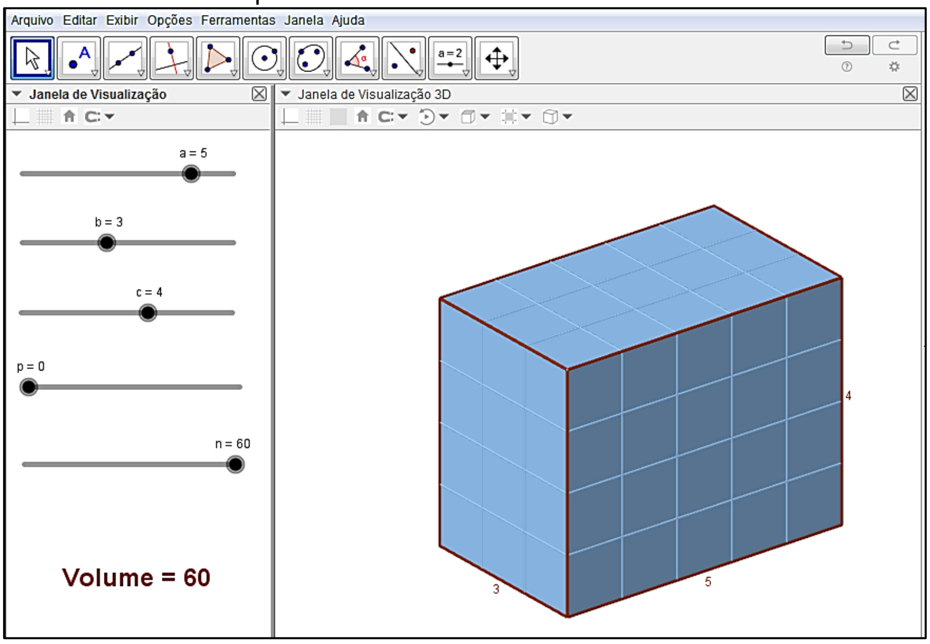
Antes de iniciar as atividades desta sequência, sugere-se que seja feito um diagnóstico sobre o conhecimento dos alunos em conteúdos de Geometria Plana e Espacial necessários à compreensão das deduções das fórmulas de volumes e, caso necessário, realize uma retomada dos conteúdos diagnosticados como de aprendizagem insatisfatória, bem como, desenvolva atividades para apresentar e ambientar os estudantes com o *Geogebra.* Recomenda-se a utilização das atividades dos Apêndices A e B deste trabalho.

ATIVIDADE 1

Objetivo: Deduzir a fórmula para calcular o volume de um paralelepípedo.

Nesta atividade é utilizado o a*pplet* (MANETTA, 2017) disponível em https://www.geogebra.org/m/SUrthKjy (Figura 1.S). Nele é possível alterar as dimensões do paralelepípedo por meio dos controles deslizantes a, b e c, bem como preenchê-lo com cubos unitários por meio do controle deslizante n e verificar imediatamente o seu volume. Também é possível fazer a planificação do sólido.

Figura 1.S – Interface do *applet* com um paralelepípedo de dimensões 5, 3 e 4 completamente preenchido com 60 cubos unitários.



Peça aos estudantes para alterarem as dimensões do paralelepípedo por diversas vezes, preenchendo-o totalmente com cubos unitários até perceberem a relação entre as dimensões e o seu volume. Em seguida, deve-se conduzi-los a perceberem que o volume é proporcional a cada uma de suas dimensões. Ou seja, se multiplicarmos a largura a, por exemplo, por um número natural n, seu volume $V(a, b, c)$ também ficará multiplicado por n, ou seja, $V(na, b, c) = nV(a, b, c)$.

Percebidas essas relações, espera-se que os alunos conjecturem que o volume de um paralelepípedo é dado pelo produto de suas dimensões. No entanto, o professor deve enfatizar que isso não é conclusivo e que é necessária uma demonstração matemática. Sugere-se a apresentação da seguinte demonstração (LIMA et al., 2016):

Sendo a, b e c são dimensões de um paralelepípedo, temos:

$$\begin{aligned} V(a,b,c) &= V(a.1,b,c) \\ &= V(1,b,c) = aV(1,b.1,c) \\ &= abV(1,1,c) = abV(1,1,c.1) = abcV(1,1,1) \\ &= abc.1 = abc \ \blacksquare \end{aligned}$$

Faça o seguinte questionamento: Será que se a, b ou c são números reais ainda teremos $V(a,b,c) = abc$?

Provavelmente os alunos dirão que sim. Mas, novamente, é necessária uma formalização matemática.

Observação: A demonstração completa desse resultado extrapola o escopo do Ensino Médio. Dessa forma, o professor deve apresentar uma demonstração, que mesmo incompleta, forneça argumentos corretos. (DIAS et al., 2013).

Apresente, sem demonstração, o *Teorema Fundamental da Proporcionalidade* (LIMA et al., 2013) que vai garantir que $V(a, b, c) = abc$, quaisquer que sejam a, b e c reais.

Teorema Fundamental da Proporcionalidade: Sejam x e y grandezas positivas. Se x e y estão relacionadas por uma função crescente f tal que para todo natural n, $f(n.x) = n.f(x)$, então, para todo real r, tem-se que $f(r.x) = r.f(x)$.

NOTA 2: Explique que, como o cubo é um caso particular de paralelepípedo com todas as arestas iguais, seu volume é dado por $V(a, a, a) = a^3$, onde a é aresta do cubo.

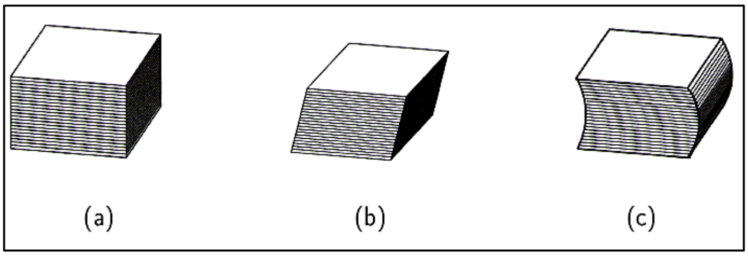
ATIVIDADE 2

Objetivo: Apresentar o *Princípio de Cavalieri*.

Nesta atividade é utilizado o a*pplet* (AWILA, 2017) disponível em https://www.geogebra.org/m/e76QKWsd, que ilustra este princípio.

Antes de enunciar o *Princípio de Cavalieri*, coloque três resmas dispostas sobre uma mesa e empilhe-as de maneiras diferentes (Figura 2.S). (As disposições (a) e (b), assemelham-se a um paralelepípedo, sendo respectivamente um reto e outro oblíquo, e a (c) a sólido com formato diferente). Questione os alunos se os volumes de cada disposição são iguais ou diferentes.

Figura 2.S - Pilhas de Papel.



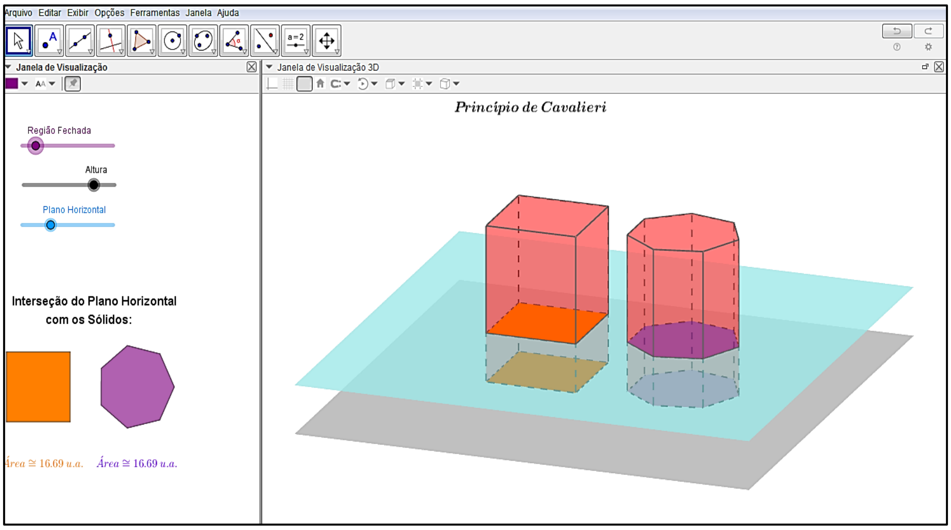
Fonte: Lima et al. (2006).

NOTA 1: Discuta com os alunos que, embora saiba-se que os três sólidos formados pelas resmas têm volumes iguais, ainda falta argumentos para explicar esse fato que intuitivamente percebe-se. Porém, informe que existe um resultado matemático, conhecido como *Princípio de Cavalieri*, que possibilita validar nossa intuição que os volumes são iguais.

Solicite que os discentes cliquem, segurem e arrastem o botão direito do mouse em qualquer ponto do *applet* para visualizarem a construção de diferentes perspectivas.

Solicite também que alterem a altura e a quantidade de lados do prisma construído ao lado do paralelepípedo e movimentem o plano que secciona os sólidos por meio dos controles deslizantes situados na parte esquerda do *applet.*

Figura 3.S – Interface do applet utilizado na Atividade 2.



Apresente o enunciado seguinte do *Princípio de Cavalieri* (DIAS et al., 2013):

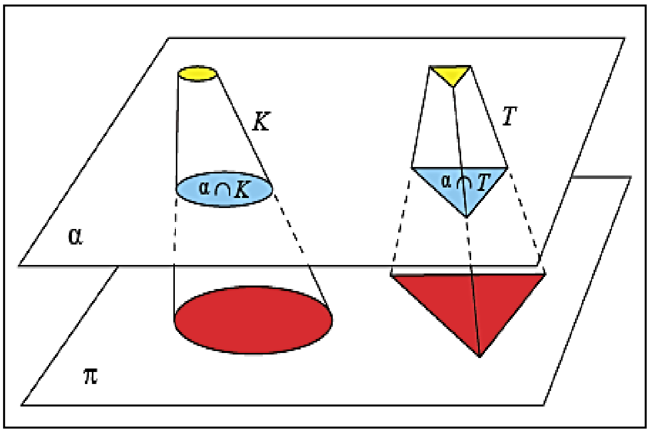
Suponha que são dados dois sólidos K e T, posicionados no espaço, de tal modo que existe um plano π, satisfazendo a seguinte propriedade:

Para qualquer plano α paralelo a π, as regiões planas $\alpha \cap K$ e $\alpha \cap T$, ou seja, os cortes de K e T, quando encontram o plano α – regiões comuns ao plano α e aos sólidos K e T – possuem áreas iguais (Figura 4.S).

Então, os sólidos K e T possuem volumes iguais.

Em outras palavras, o Princípio de Cavalieri nos diz que, se em cada nível, desde a superfície π sobre a qual repousam os dois sólidos até os topos dos mesmos, podermos traçar um plano paralelo a π, que corta os dois sólidos em seções planas de áreas iguais, pode-se concluir, assim, que os dois sólidos possuem a mesma capacidade de armazenamento, ou seja, os sólidos K e T têm o mesmo volume –
$V(K) = V(T)$.

Figura 4.S - Princípio de Cavalieri.



Fonte: Dias et al. (2013).

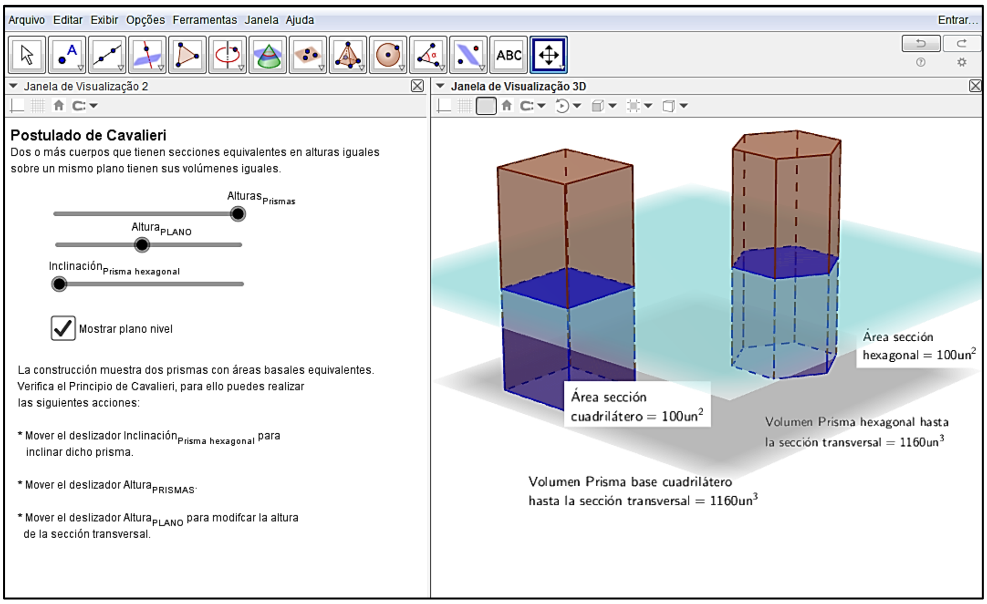
Observação: Obviamente o exemplo das resmas e as animações dos *applets* não constituem demonstrações do *Princípio de Cavalieri*, mas dão uma forte indicação de que ele é verdadeiro (LIMA et al., 2013). Dentro da proposta utilizada nesta sequência didática, pode-se aceitá-lo como o sexto pressuposto sobre volumes de sólidos geométricos.

ATIVIDADE 3

Objetivo: Deduzir a fórmula para volume do prisma e do cilindro generalizado.

Nesta atividade é utilizado o a*pplet* (BARRERA, 2017) disponível em https://www.geogebra.org/m/zJWD9b65, que consiste em uma animação que contém um prisma hexagonal com base contida num plano horizontal, construído ao lado de um paralelepípedo, cuja base possui área igual a base do prisma e também está contida no mesmo plano horizontal (Figura 5.S). Tanto o prisma quanto o paralelepípedo são cortados por outro plano horizontal que produz seções de mesma área, no prisma e no paralelepípedo, respectivamente. O *applet* possibilita alterar a inclinação e a altura dos sólidos e do plano que os cortam e calcula instantaneamente o volume de cada um dos sólidos entre os planos.

Figura 5.S – Interface do applet utilizado na Atividade 3.



Os discentes devem alterar a altura dos sólidos e do plano que os cortam e observar o que acontece com o valor de seus volumes.

NOTA 1: Como os estudantes perceberão que os volumes dos dois sólidos permanecem iguais e já sabendo que a área do paralelepípedo é igual ao produto da área da base pela altura, possivelmente conjecturarão que o mesmo ocorre para o prisma hexagonal. Caso não façam essa conjectura, conduza-os a fazerem. Todavia, o professor deve enfatizar que trata-se apenas de uma conjectura que para ser válida faz-se necessária uma demonstração matemática.

Antes de fazer a demonstração, informe que em todo prisma, uma seção paralela à base possui a mesma área desta.

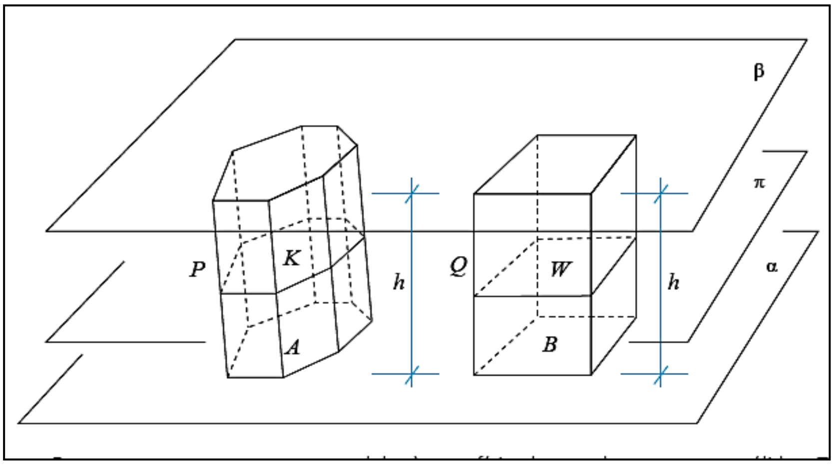
Apresente a seguinte demonstração (DIAS et al., 2013):

Considere um prisma P, cuja base é um polígono A de área S e altura h, e também um paralelepípedo Q, cuja base é um polígono B de área S e altura h. Seja α um plano que contém as bases e π um plano horizontal paralelo a α e que secciona os dois sólidos determinando no prisma P um polígono K, e no paralelepípedo Q um polígono W (Figura 28). Como área de $K = S$ e área de $W = S$, para qualquer plano horizontal π temos que área de $K = área\ de\ W$.

Logo, pelo Princípio de Cavalieri, conclui-se $V(P) = V(Q)$. Mas, como $V(Q) = (\text{área da base}) \times \text{altura}$, segue que o $V(W) = (\text{área da base}) \times h$

Portanto, o volume de um prisma qualquer é dado pelo produto da área da base pela altura. ■

Figura 6.S - Esquema com cortes paralelos à superfície plana onde repousam os sólidos P e Q.



Fonte: Dias et al. (2013).

Observação: Explique que se no lugar do prisma P, houvesse um cilindro generalizado C qualquer, cuja base possua área igual à área de A e altura igual a altura h de P, procedendo de forma análoga, chegar-se-ia a conclusão que o volume $V(C)$ deste cilindro é dado por:

$$V(C) = (\acute{a}rea\ de\ A)\ X\ h$$

Portanto, se P é um prisma ou um cilindro generalizado, cuja base é uma figura plana *A*, e cuja altura é igual a h, então, seu volume $V(P)$ é dado por:

$$V(P) = (\acute{a}rea\ de\ A)\ X\ h$$

Enfatize que, sendo C um cilindro qualquer, temos que $V(C) = \pi r^2 . h$, onde r é o raio e h a altura do cilindro.

ATIVIDADE 4

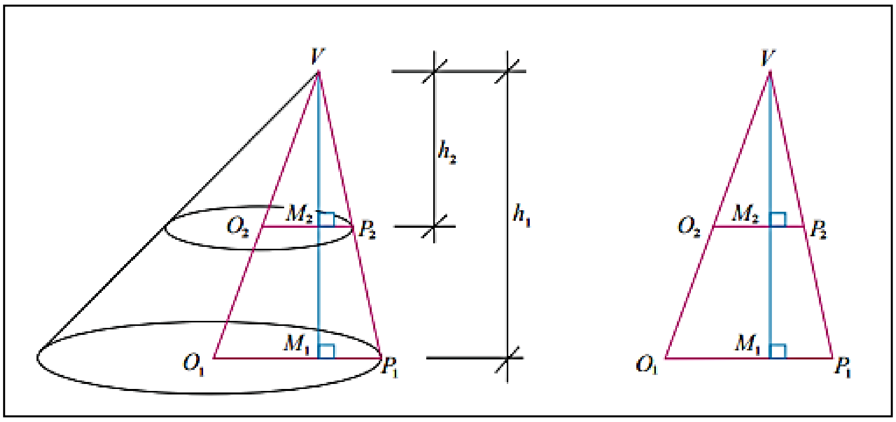
Objetivo: Deduzir a fórmula de cálculo do volume da pirâmide e do cone.

Inicialmente, é necessário apresentar alguns resultados preliminares (DIAS et al., 2013):

Teorema 1 *− Considere um cone circular K_1 com vértice V, base B_1 e altura h_1. Corte o cone K_1 por um plano π paralelo ao plano que contém a base B_1 do cone. Esse corte dá origem a um outro cone circular K_2 com vértice V, de altura h_2 e base B_2, sendo $B_2 = \pi \cap K_1$ (Figura 7.S). Nessas condições, vale a seguinte relação:*

$$\frac{área\ (B_1)}{área\ (B_2)} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

Figura 7.S - Cones circulares K_1 de base B_1, e K_2 de base B_2, e triângulos ΔO_1P_1V e ΔO_2P_2V.



Fone: Dias et al. (2013).

<u>Demonstração</u>: *Suponha que a base B_1 do cone circular K_1 seja um disco de centro O_1 e raio R_1, e que a base B_2 do cone circular K_2 é um disco de centro O_2 e raio R_2. Assim como indicado na Figura 29, um plano passando por V e O_1, e perpendicular à base B_1, determina triângulos ΔO_1P_1V e ΔO_2P_2V no interior do cone, como indicado. Os triângulos ΔO_1P_1V e ΔO_2P_2V são semelhantes, pelas seguintes razões:*

- ✓ *O vértice V do triângulo ΔO_1P_1V é o mesmo vértice V do triângulo ΔO_2P_2V, e os ângulos O_1VP_1 e O_2VP_2 são, portanto, ângulos congruentes;*

- ✓ As retas O_1P_1 e O_2P_2 são paralelas e cortadas pela transversal O_1O_2, assim, os ângulos $V\hat{O}_1P_1$ do triângulo ΔO_1P_1V e $V\hat{O}_2P_2$ do triângulo ΔO_2P_2V são ângulos correspondentes de um par de retas paralelas, cortadas por uma transversal, e são, portanto, congruentes;
- ✓ Segue, então, do critério "ângulo-ângulo" (critério AA) de semelhança de triângulos que os triângulos ΔO_1P_1V e ΔO_2P_2V são semelhantes, do que deduzimos que

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\overline{VP_1}}{\overline{VP_2}}$$

Sendo VM_1 e VM_2 as alturas, a partir do vértice V dos triângulos ΔO_1P_1V e ΔO_2P_2V, também são semelhantes, por razões análogas, os triângulos ΔP_1M_1V e ΔP_2M_2V, do que se concluí que

$$\frac{\overline{VP_1}}{\overline{VP_2}} = \frac{\overline{VM_1}}{\overline{VM_2}} = \frac{h_1}{h_2}$$

Portanto, a razão entre os raios das bases dos cones é igual à razão entre as alturas dos cones circulares:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

As áreas das bases dos cones K_1 e K_2 são dadas

$$\acute{a}rea\ (B_1) = \pi.R_1^2\ \ e\ \ \acute{a}rea\ (B_2) = \pi.R_2^2\ ,$$

e a razão entre as áreas das bases dos cones circulares pode ser formulada levando-se em consideração a expressão acima e tem-se com isto, o que deseja-se demonstrar:

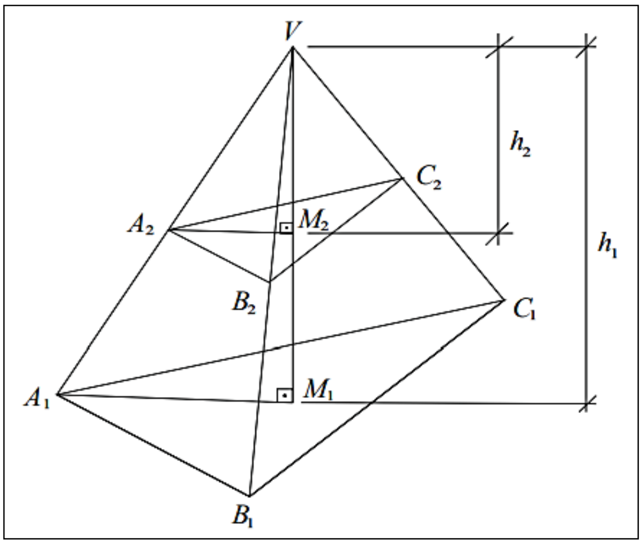
$$\frac{\acute{a}rea\ (B_1)}{\acute{a}rea\ (B_2)} = \frac{\pi.R_1^2}{\pi.R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{h_1^2}{h_2^2}\ \ \blacksquare$$

Teorema 2 − *Suponhamos que, como no Teorema 1, temos uma pirâmide triangular K_1, com vértice V, base triangular T_1 e altura h_1, em lugar de um cone circular, e que cortamos tal pirâmide por um plano π, paralelo à base T_1 da pirâmide, formando outra pirâmide K_2, com vértice V, base triangular $T_2 = \pi \cap K_1$ e altura h_2. Nessas condições, a razão entre as áreas das bases das pirâmides triangulares é também dada pela razão entre os quadrados das alturas, ou seja:*

$$\frac{área\ (T_1)}{área\ (T_2)} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

Demonstração: Considere o triângulo $\Delta A_1B_1C_1$, base T_1 da pirâmide K_1, e seja $\Delta A_2B_2C_2$ a base T_2 da pirâmide K_2 (Figura 8.S). Suponha que os pontos V, A_2 e A_1 se alinhem sobre uma aresta da pirâmide, e que o mesmo se dê com os pontos V, B_2 e B_1, e também com os pontos V, C_2 e C_1. A partir do vértice V, baixe alturas VM_2 e VM_1 das pirâmides K_2 e K_1, respectivamente.

Figura 8.S - Pirâmides K_1 e K_2, de bases triangulares $\Delta A_1B_1C_1$ e $\Delta A_2B_2C_2$, e respectivas alturas h_1 e h_2.



Fonte: Dias et al. (2013).

Nas condições estabelecidas, tem-se que:

1. ΔVA_2B_2 é semelhante ao triângulo ΔVA_1B_1;

2. ΔVB_2C_2 é semelhante ao triângulo ΔVB_1C_1;

3. ΔVA_2C_2 é semelhante ao triângulo ΔVA_1C_1 e

4. ΔVM_2A_2 é semelhante ao triângulo ΔVM_1A_1.

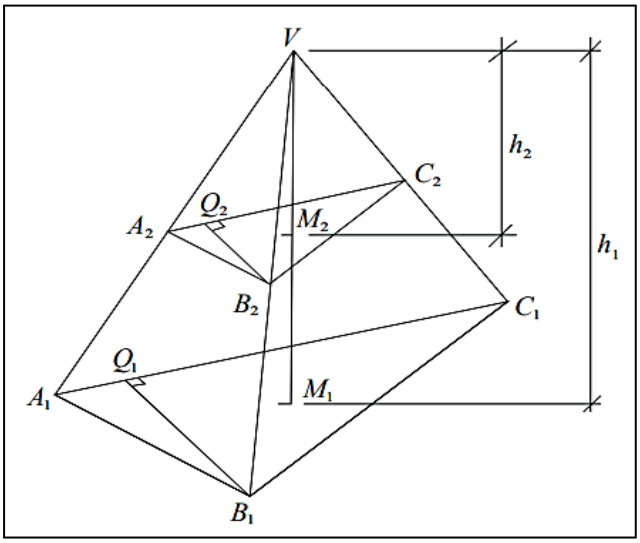
$De\ 1, segue\ que\ \frac{\overline{VA_1}}{\overline{VA_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{VB_1}}{\overline{VB_2}}. De\ 2, segue\ que\ \frac{\overline{VB_1}}{\overline{VB_2}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{VC_1}}{\overline{VC_2}}$

$De\ 3, segue\ que\ \frac{\overline{VC_1}}{\overline{VC_2}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_2C_2}} = \frac{\overline{VA_1}}{\overline{VA_2}}. De\ 4, segue\ que\ \frac{h_1}{h_2} = \frac{\overline{VA_1}}{\overline{VA_2}}$

$Segue, portanto, que\ \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_2C_2}}, ou\ seja, \Delta A_1B_1C_1\ \approx\ \Delta A_2B_2C_2.$

Denote por Q_2 o pé do segmento perpendicular à reta A_2C_2, traçada a partir do vértice B_2, ou seja, o segmento B_2Q_2 é a altura do $\Delta A_2B_2C_2$ com respeito ao lado A_2C_2. Analogamente, denote por B_1Q_1 a altura do $\Delta A_1B_1C_1$ com respeito ao lado A_1C_1 (Figura 9.S).

Figura 9.S - O segmento B_2Q_2 é altura do triângulo $\Delta A_2B_2C_2$ (relativa ao lado A_2C_2) e o segmento B_1Q_1 é altura do triângulo $\Delta A_1B_1C_1$



Fonte: Dias et al. (2013).

Tem-se, então, que os triângulos $\Delta B_1Q_1C_1$ e $\Delta B_2Q_2C_2$ são semelhantes, pelo caso "ângulo-ângulo", pois os ângulos $B_1\widehat{C_1}Q_1\ e\ B_2\widehat{C_2}Q_2$ são congruentes e os ângulos $C_1\widehat{Q_1}B_1\ e\ C_2\widehat{Q_2}B_2$ são retos.

$$\frac{\overline{B_1Q_1}}{\overline{B_2Q_2}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{h_1}{h_2}$$

Como as áreas das bases das pirâmides K_1 e K_2 são, respectivamente:

$$área\ (T_1) = \frac{\overline{A_1C_1}.\overline{B_1Q_1}}{2} \quad e\ \ área\ (T_2) = \frac{\overline{A_2C_2}.\overline{B_2Q_2}}{2}$$

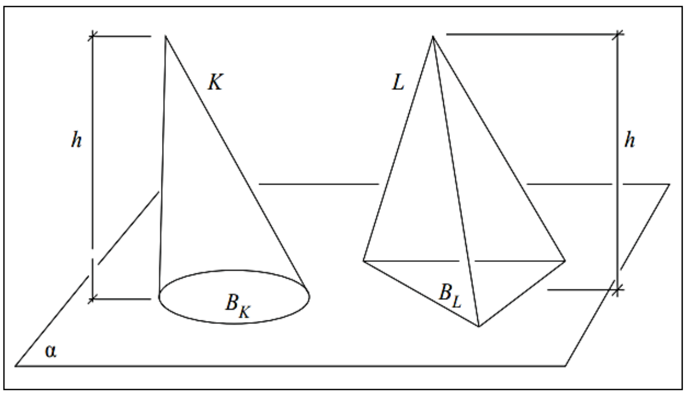
Tem-se que a relação entre elas é equivalente à razão entre os quadrados das alturas das pirâmides:

$$\frac{área\ (T_1)}{área\ (T_2)} = \frac{\overline{A_1C_1}.\overline{B_1Q_1}}{\overline{A_2C_2}.\overline{B_2Q_2}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_2C_2}}.\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{h_1}{h_2}.\frac{h_1}{h_2} = \frac{h_1^2}{h_2^2} \ \ \blacksquare$$

NOTA 1: Destaque que a relação acima é válida para qualquer pirâmide (quadrangular, pentagonal, hexagonal etc.). Isso pode ser verificado dividindo-se a base da pirâmide em triângulos e analisando os triângulos semelhantes.

Teorema 3 **−** *Considere um cone K e uma pirâmide L, tais que suas bases B_K e B_L possuam áreas iguais, e suponha, também, que suas alturas h_k e h_L, relativas às bases B_K e B_L, tenham a mesma medida h (Figura 10.S). Então, K e L possuem o mesmo volume. O mesmo vale para as duas pirâmides que tenham bases de mesma área e alturas de mesma medida.*

Figura 10.S - O cone *K* e a pirâmide *L* possuem bases com áreas iguais e alturas de mesmo comprimento.



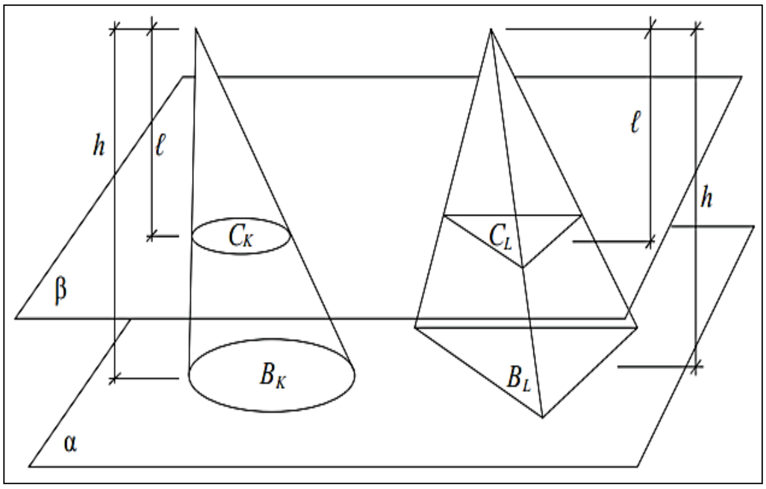
Fonte: Dias et al. (2013).

<u>Demonstração</u>: *Fixe um plano α e repouse o cone K e a pirâmide L, por suas bases, sobre esse plano. Seja β um plano paralelo ao plano α, situado entre as bases e os*

vértices de K e L. Tal plano determina, mediante cortes em K e L, um cone e uma pirâmide com bases C_K e C_L, respectivamente, e altura ℓ (Figura 11.S). Segue, do Teorema 1, que a razão entre as áreas das bases do cone maior e do cone menor, bem como a razão entre as bases das pirâmides maior e menor, é igual à razão entre os quadrados de suas alturas:

$$\frac{área\ (B_K)}{área\ (C_K)} = \frac{h^2}{l^2} = \frac{área\ (B_L)}{área\ (C_L)}$$

Figura 11.S - O corte pelo plano β, paralelo a α, determina um cone e uma pirâmide de bases C_K e C_L, e alturas iguais a ℓ.



Fonte: Dias et al. (2013).

Por hipótese, $área\ (B_K) = área\ (B_L)$, *do que, pela igualdade anterior, conclui-se que* $área\ (C_K) = área\ (C_L)$. *Em outras "palavras":*

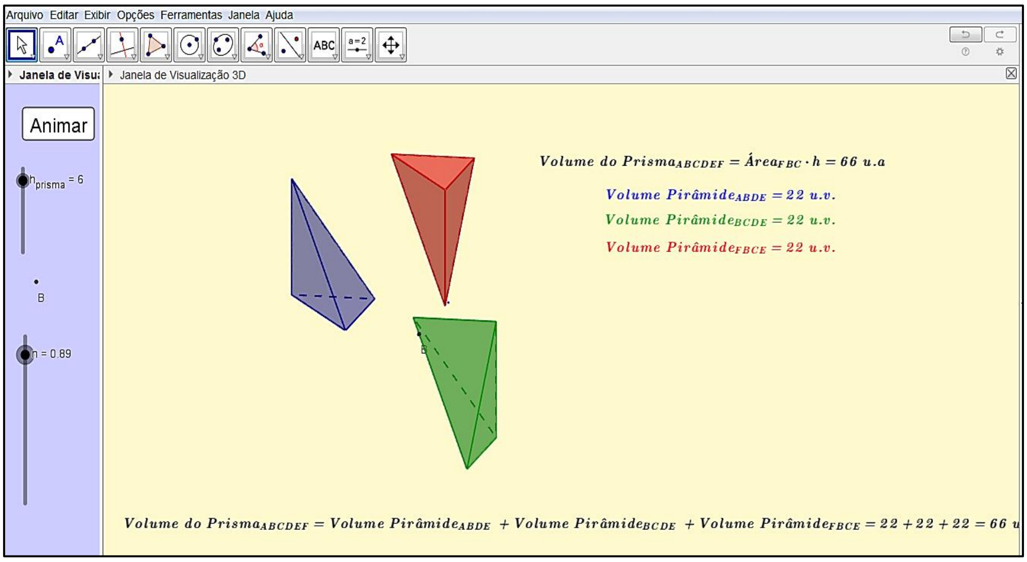
$$área\ (\beta\ \cap K) = área\ (C_K) = \ área\ (C_L) = \ área\ (\beta\ \cap K)$$

Como β é um plano arbitrário, tomado paralelamente a α, segue do Princípio de Cavalieri que o volume do cone K é igual ao volume da pirâmide L. ■

NOTA 2: Informe que, como consequência, tem-se que duas pirâmides com alturas de mesma medida h e bases de mesma área B, possuem o mesmo volume, pois ambas terão volumes iguais a de um cone de altura *h* e base circular de área B.

Antes de apresentar o próximo resultado (*Teorema 4*), peça aos alunos para abrirem o *applet* (RAMOS, 2016) disponível em https://www.geogebra.org/m/UGmmR6Ak. Trata-se de uma construção em que é possível decompor um prisma triangular, movimentando o controle deslizante *n*, em três pirâmides de volumes iguais e ainda calcula seus volumes. A construção também possibilita modificar a altura da pirâmide movimentando o controle deslizante h_{prisma} (Figura 12.S).

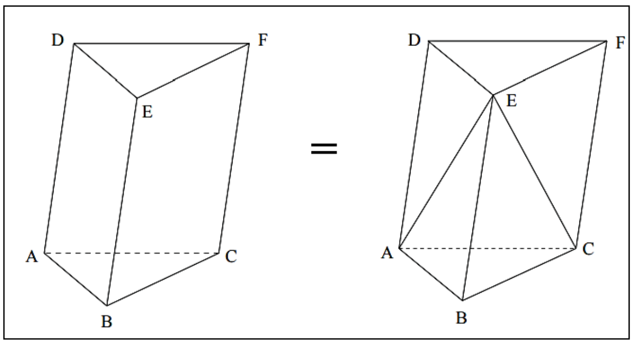
Figura 12.S – Applet da Atividade 4: decomposição do prisma em três pirâmides de mesmo volume.



Teorema 4 ***−*** *Todo prisma triangular P pode ser decomposto como reunião de três tetraedros ou pirâmides de bases triangulares, Q, S e T, de volumes iguais.*

<u>Demonstração “ilustrada”</u>: Considere um prisma triangular P (Figura 13.S). As bases ΔABC e ΔDEF repousam sobre planos paralelos, sendo AD, BE e CF as arestas laterais do prisma.

Figura 13.S - O prisma de base Δ*ABC* e topo Δ*DEF* contém uma pirâmide de base Δ*ABC* e vértice *E*.



Fonte: Dias et al. (2013).

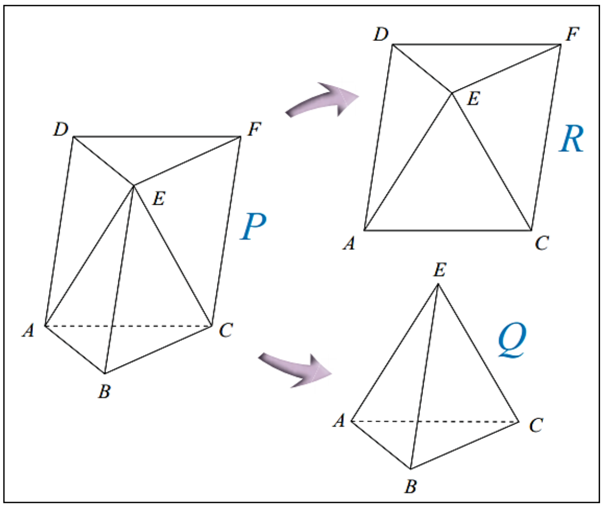
Podemos subdividir o prisma em duas pirâmides, sendo uma delas a pirâmide Q, de base triangular ΔABC, e vértice E; e a outra a pirâmide R, de base quadrilateral $ACFD$ e vértice E, indicado na Figura 13.S e ilustrado, novamente, na Figura 14.S.

A distância do vértice E ao plano ABC é igual a distância entre os planos paralelos DEF e ABC, e, portanto, a altura da pirâmide triangular, relativamente à base ΔABC, coincide com a altura do prisma, tomado inicialmente.

Por sua vez, a pirâmide quadrilateral R pode ser subdividida em duas pirâmides S e T, de bases triangulares, através de um secionamento pelo plano, passando pelos vértices A, E e F (Figura 15.S).

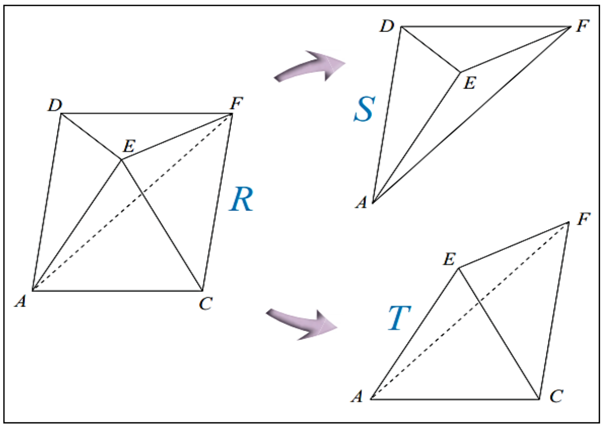
A pirâmide R, de base quadrilateral $ACFD$ e vértice E, subdivide-se em duas pirâmides triangulares S e T, ambas tendo E como vértice, sendo a primeira de base triangular ΔAFD e a segunda de base triangular ΔACF.

Figura 14.S - O prisma P é subdividido em duas pirâmides.



Fonte: Dias et al. (2013).

Figura 15.S - Subdivisão da pirâmide R em duas pirâmides triangulares S e T, ambas de vértice E.



Fonte: Dias et al. (2013).

As pirâmides Q e S são pirâmides triangulares de bases ΔABC e ΔDEF, respectivamente. Os triângulos ΔABC e ΔDEF são congruentes. Além disso, as pirâmides Q e S têm a mesma altura, que coincide com a altura do prisma tomado inicialmente. Logo, pelo Teorema 3, as pirâmides Q e S têm volumes iguais, isto é, $V(Q) = V(S)$.

Já as pirâmides S e T, agora vistas como pirâmides de bases ΔAFD e ΔACF, ambas de vértice E, têm a mesma altura, que é a distância do vértice E ao plano $ACFD$. Além disso, os triângulos ΔAFD e ΔACF são congruentes, pois o segmento AF é uma diagonal do paralelogramo $ACFD$. Portanto, ΔAFD e ΔACF têm áreas de mesma medida. Pelo Teorema 3, as pirâmides S e T têm o mesmo volume, ou seja, $V(S) = V(T)$.

Dessa forma, $V(Q) = V(S) = V(T)$ e, assim, o prisma tomado inicialmente foi subdividido em três pirâmides triangulares, de volumes iguais, tendo Q (e também S) bases e alturas iguais à base e altura do prisma.

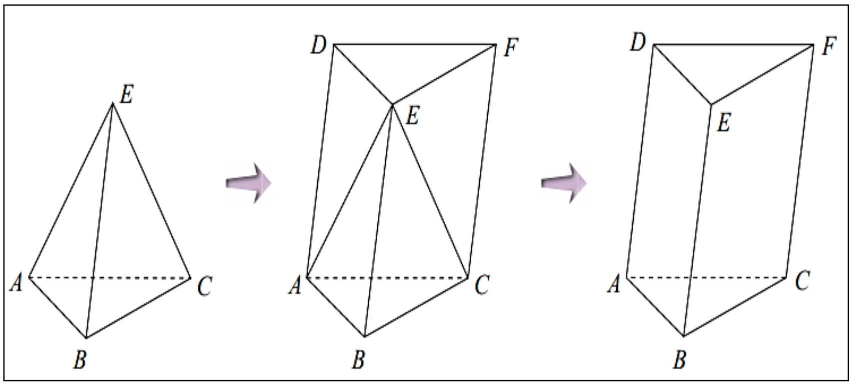
Como cada duas das três pirâmides têm em comum apenas uma face triangular, ou uma aresta, a parte comum de quaisquer duas delas terá volume zero. Portanto, conclui-se que o prisma triangular P pode ser decomposto como reunião de três tetraedros ou pirâmides de bases triangulares, Q, S e T, de volumes iguais.

Apresente a demonstração do seguinte teorema:

Teorema 5 *− O volume de uma pirâmide triangular Q é dado por $V(Q) = \frac{\text{área }(S).h}{3}$ onde $\text{área }(S)$ é a área de sua base e h a medida da altura.*

<u>Demonstração:</u> *Suponha que Q seja uma pirâmide triangular, com base ΔABC, vértice E, e altura de medida h. Em um caminho reverso em relação aos argumentos usados na demonstração do Teorema 4, tomando a aresta BE como geratriz, podemos construir um prisma triangular P, de base ΔABC e arestas laterais AD, BE e CF, tendo também altura h (Figura 16.S).*

Figura 16.S - A pirâmide triangular Q é inserida em um prisma P de mesma base e mesma altura.



Fonte: Dias et al. (2013).

Pelo Teorema 4, o prisma se decompõe em três pirâmides Q, S *e* T, *sendo* $V(Q) = V(S) = V(T)$, *e cada duas das três pirâmides, tendo em comum apenas uma face triangular, ou uma aresta, ou seja, uma parte comum de volume zero. Logo,*

$$V(P) = V(Q \cup S \cup T) = V(Q) + V(S) + V(T) = 3.V(Q)$$

Como já sabe-se que o volume do prisma P *é dado por* $V(P) = área\ (S).h$

Onde $área\ (S)$ *é a área de sua base (que coincide com a base da pirâmide* Q*) e* h *a sua altura, conclui-se que o volume da pirâmide* Q *é dado por:*

$$V(Q) = \frac{área\ (S).h}{3} \blacksquare$$

NOTA 3: Informe que a fórmula é válida para qualquer pirâmide J de altura h, já que se pode dividir o polígono de sua base em triângulos justapostos por meio de diagonais. Assim, a pirâmide fica dividida em pirâmides triangulares de mesma altura. Se a base for dividida em n triângulos de áreas $A_1, A_2,..., A_n$, então a área da base é dada por

$$área\ (S) = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

Como o volume da pirâmide J é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, tem-se que

$$V(J) = \frac{1}{3}.A_1.h + \frac{1}{3}.A_2.h + \cdots + \frac{1}{3}.A_n.h$$

$$V(J) = \frac{1}{3}.(A_1 + A_2 + \cdots + A_n).h$$

$$V(J) = \frac{área\ (S).h}{3}$$

NOTA 4: Leve os alunos a verificarem que, juntando os resultados dos Teoremas 3 e 5, pode-se concluir que o volume $V(K)$ de um cone K, cuja base é uma região plana S e altura h, é dado por

$$V(K) = \frac{área\ (S).h}{3}$$

Portanto, tanto o volume de uma pirâmide quanto o volume de um cone são dados pelo produto da área da base pela sua altura.

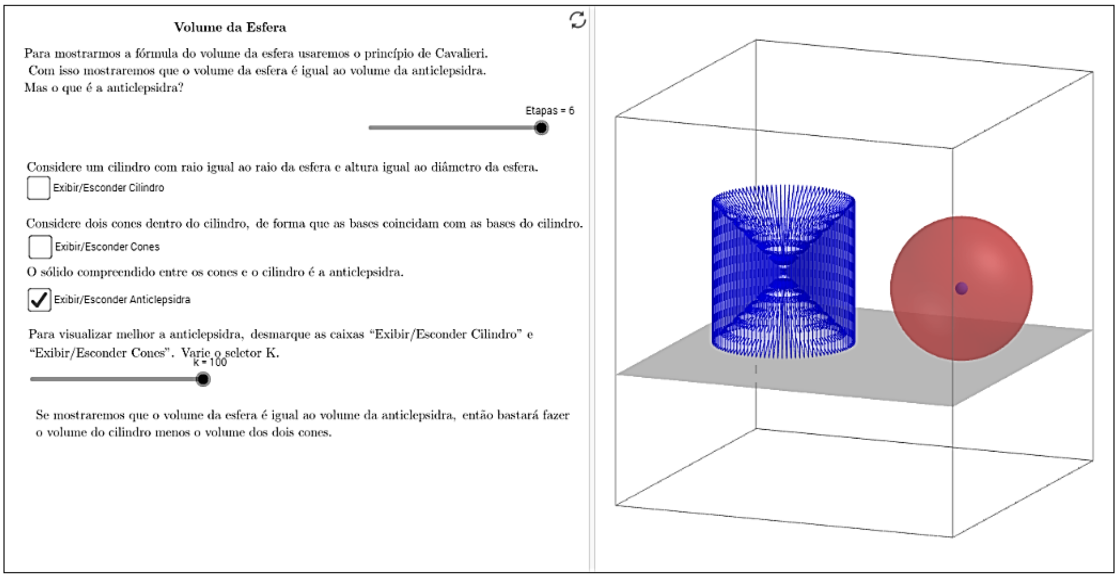
ATIVIDADE 5

Objetivo: Deduzir a fórmula para volume da esfera.

Esta dedução é feita com o auxílio do conjunto de cinco *applets* (NÓBRIGA, 2017a) disponíveis em https://www.geogebra.org/m/bpkQGYHG.

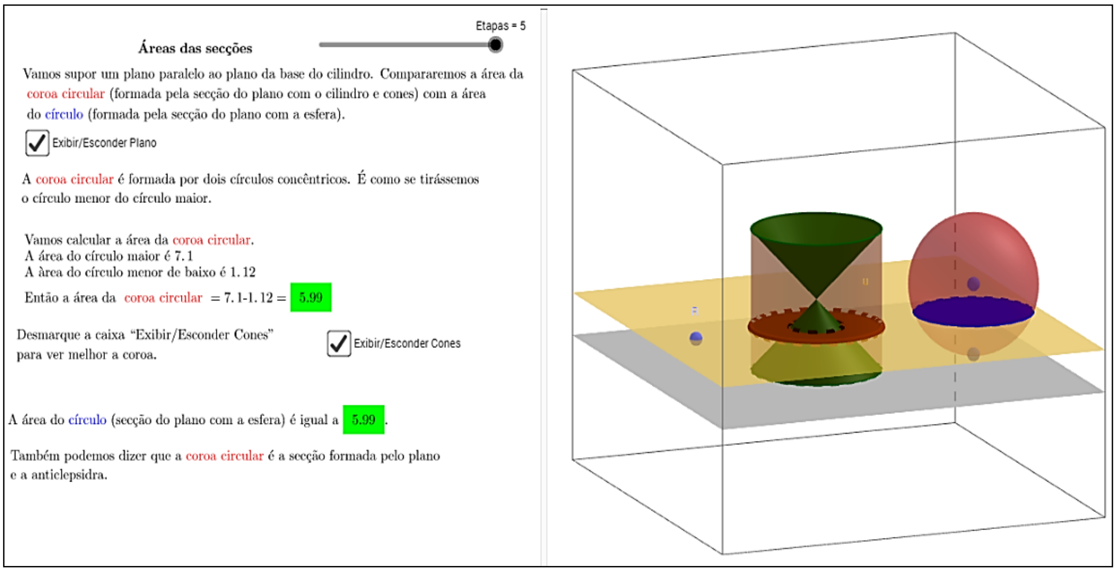
No primeiro *applet* é possível acompanhar os passos da construção de uma *anticlepsidra.* A *anticlepsidra* é construída ao lado de uma esfera, ambos os sólidos apoiados sobre um mesmo plano horizontal (Figura 17.S).
Com o controle deslizante *"Etapas"* na posição *0*, solicite que todos movimentem gradativamente o controle deslizante da posição *0* até a posição *6* e acompanhem a construção da *anticlepsidra*. É possível esconder o cilindro e os cones clicando nos botões *Exibir/Esconder Cilindro* e *Exibir/Esconder Cones*.
Solicite aos estudantes para clicarem com o botão direito do mouse, segurarem e arrastarem a janela 3D para visualizarem a *anticlepsidra* de diferentes ângulos.

Figura 17.S - Interface do primeiro applet da Atividade 5: construção da Anticlepsidra.



No segundo applet, tem-se uma animação com uma *anticlepsidra* ao lado de uma esfera, ambas apoiadas em um plano horizontal e cortadas por outro plano horizontal e paralelo ao plano de apoio. A altura da *anticlepsidra* é o dobro do raio da esfera. (Figura 18.S).

Figura 18.S - Interface do segundo applet da Atividade 5: áreas das seções.



Solicite que movimentem o controle deslizante *“Etapas”* da posição *0* até a posição *5*. A construção calcula e permite comparar as áreas das secções determinadas pelo plano horizontal e a *anticlepsidra* e pelo plano horizontal e a esfera, sendo a primeira seção uma coroa circular e a segunda, um círculo.

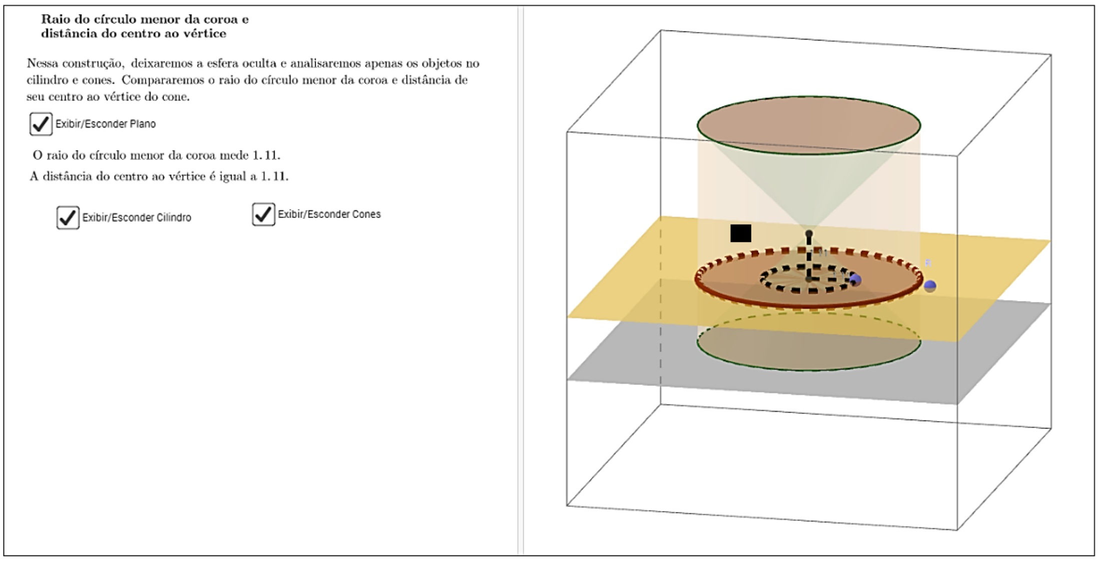
Os alunos devem movimentar o plano horizontal clicando com o botão esquerdo do mouse no ponto R e arrastando-o para cima ou para baixo até perceberem que as áreas das seções são iguais. Em seguida, o professor deve perguntar o que o *Princípio de Cavalieri* sugere sobre o volume dos dois sólidos?

Espere-se que os alunos respondam que o Princípio de Cavalieri sugere que os volumes dos dois sólidos são iguais.

NOTA 1: Novamente, explique que trata-se apenas de uma conjectura e que para comprová-la é necessário demonstrá-la matematicamente.

No terceiro *applet*, tem-se uma construção com uma *anticlepsidra* cortada por outro plano horizontal e paralelo ao plano de sua base, determinando uma coroa circular. A construção calcula e permite comparar o comprimento do raio do círculo menor da coroa e a distância de seu centro ao vértice do cone por meio da movimentação do plano horizontal paralelo ao plano de apoio clicando com o botão esquerdo do mouse no ponto R e arrastando-o para cima ou para baixo (Figura 19.S).

Figura 19.S - Interface do terceiro applet da Atividade 5: comparação entre o raio do círculo menor da coroa e a distância do centro ao vértice do cone.



Peça para os estudantes movimentarem o plano horizontal e pergunte o que observaram em relação ao comprimento do raio do círculo menor da coroa e a distância de seu centro ao vértice do cone.

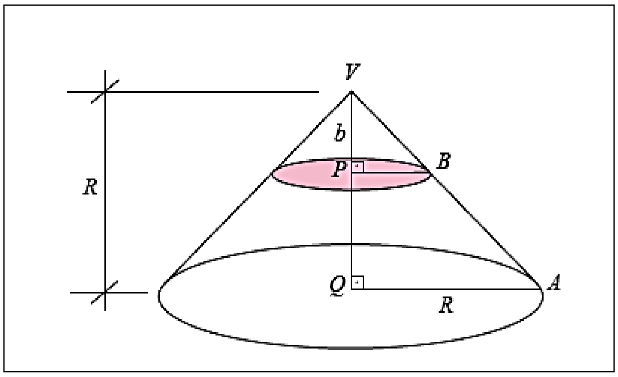
Obviamente, os alunos respondam que são iguais.

NOTA 2: Mais uma vez, enfatize que ainda não se pode concluir que isso é válido sempre, ou seja, é necessário provar matematicamente para o caso geral.

Apresente a seguinte demonstração (DIAS et al., 2013) para mostrar que o comprimento do raio do círculo menor da coroa e a distância de seu centro ao vértice do cone é sempre igual.

<u>Demonstração:</u> *Seja V o vértice do cone, P o centro do círculo determinado pela seção do plano horizontal e o cone; $VP = b$ a distância de V ao ponto P; B um ponto de interseção do círculo com o cone; Q o centro do círculo da base do cone e A um ponto de interseção do círculo da base com o cone, conforme Figura 20.S.*

Figura 20.S - Círculo formado pela interseção do cone com o plano horizontal.



Fonte: Dias et al. (2013).

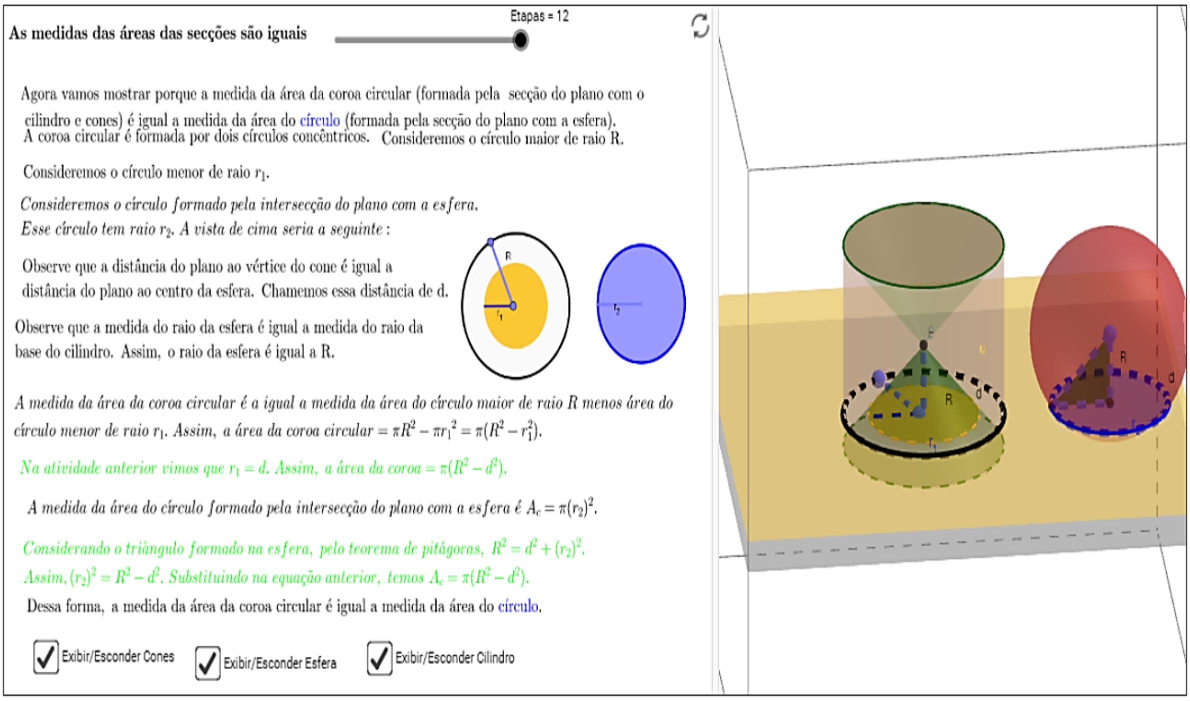
Observe que o triângulo VPB é semelhante ao triângulo VQA pelo caso AA. Tem-se que o segmento VP tem medida igual a b, e os segmentos VQ e QA têm, por construção, medidas iguais a R. Logo,

$$\frac{\overline{VP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{VQ}}{\overline{QA}} \text{ , ou seja, } \frac{b}{\overline{PB}} = \frac{R}{R} \text{ .Portanto, } \overline{PB} = b. \blacksquare$$

Agora, o professor deve mostrar matematicamente que a conjectura feita, a partir do terceiro *applet* é verdadeira.

Solicite aos alunos que abram o quarto *applet*. Trata-se em uma construção que contem a demonstração que as áreas das secções realmente são iguais (Figura 21.S). Movimentando o controle deslizante *"Etapas"* da posição *0* até a posição *12* e possível acompanhar a demonstração.

Figura 21.S - Interface do quarto applet da Atividade 5: demonstração que as áreas das seções são iguais.



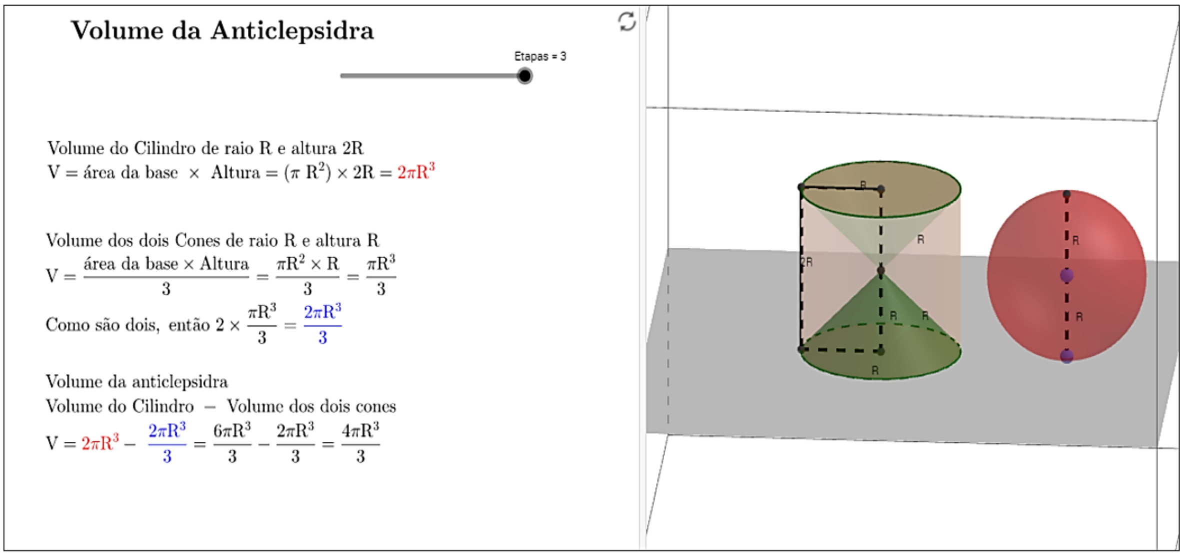
NOTA 3: Certifique-se que os alunos entenderam a demonstração e concluíram que, como as áreas das seções são iguais, o *Princípio de Cavalieri* garante que os volumes dos sólidos são iguais.

Para concluir a dedução, falta apenas encontrar o volume da anticlepsidra, que é dado pela diferença entre o volume do cilindro e o volume dos dois cones. Os alunos devem concluir a dedução.

Espera-se que os alunos consigam observar que para encontrar o volume da esfera, basta calcular o volume da anticlepsidra (dado pela diferença entre o volume do cilindro e o volume dos dois cones) e concluam que o volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Para os alunos que não conseguirem concluir a dedução, apresente o quinto e último *applet*, que mostra esta conclusão (Figura 22.S).

Figura 22.S - Interface do quinto applet da Atividade 5: concluindo a dedução do volume da esfera.



Finalizada essa atividade, encerra-se a sequência didática.

Todos os *applets* utilizados também podem ser acessados em https://bit.ly/2PnsmWM.

AVALIAÇÃO: Deve ser feita durante o desenvolvimento da sequência, observando a participação e o empenho dos estudantes.

Após a realização das atividades da sequência, sugere-se a aplicação do questionário disponível no Apêndice D deste trabalho, com a finalidade de avaliar os conhecimentos adquiridos.

APÊNDICE D - QUESTIONÁRIO COMPARATIVO

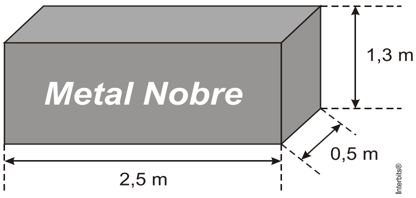
UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF
Mestrando: Francisco Raimundo Coutinho Júnior
Orientador: Profº. Dr. Edson Leite Araújo

PROFMAT

QUESTÃO 1

(Enem 2010) A siderúrgica "Metal Nobre" produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.



O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza

(A) massa.

(B) volume.

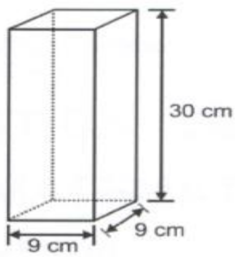
(C) superfície.

(D) capacidade.

(E) comprimento.

QUESTÃO 2

(PROEB). Veja o bloco retangular abaixo.



Qual é o volume desse bloco em cm^3?

(A) 48

(B) 111

(C) 810

(D) 2430

(E) 2511

QUESTÃO 3

(SAEPI – adaptada) Um cubo C possui aresta medindo o triplo de um cubo T. Pode-se afirmar que o volume do cubo C é

(A) três vezes maior que o cubo T.

(B) seis vezes maior que o cubo T.

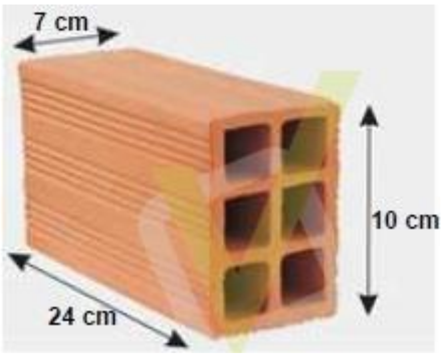
(C) nove vezes maior que o cubo T.

(D) doze vezes maior que o cubo T.

(E) vinte e sete vezes maior que o cubo T.

QUESTÃO 4

(Unisal 2016) O tijolo é um produto cerâmico, avermelhado, geralmente em forma de paralelepípedo e amplamente usado na construção civil, artesanal ou industrial. É um dos principais materiais de construção. O tijolo tradicional é fabricado com argila e de cor avermelhada devido ao cozimento e pode ser maciço ou furado.



Disponível em: <http://www.ceramicafelisbino.com.br/midias/produto=22f2464106f84d46ea82ffa51c1497c3.jpg>. Acesso em: 07 nov. 2015 (adaptado).

Se os furos do tijolo da figura são quadrangulares de lado 2cm, o volume ocupado pela argila, em cm^3, é igual a

(A) 576

(B) 1104

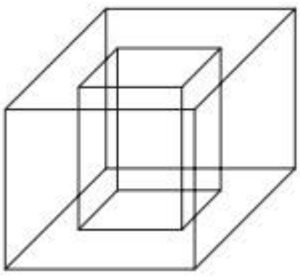
(C) 1344

(D) 1584

(E) 1680

QUESTÃO 5

(ENEM 2010) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.



O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de

(A) 1728 cm³

(B) 1216 cm³

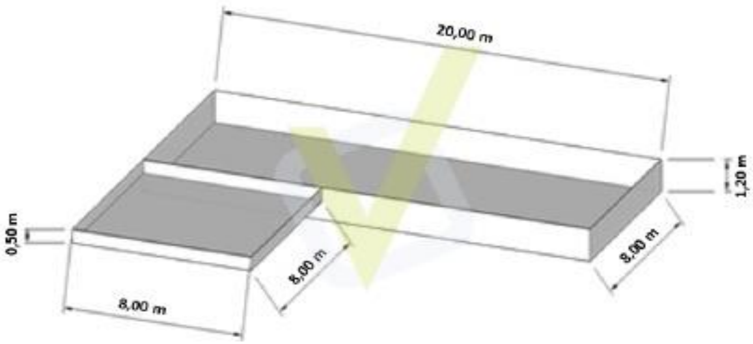
(C) 512 cm³

(D) 64 cm³

(E) 12 cm³

QUESTÃO 6

(Unisal 2016). A figura apresenta o conjunto de piscinas, adulto e infantil, de um condomínio.



Qual, em m^3, é a capacidade total das duas piscinas?

(A) 112,0

(B) 147,2

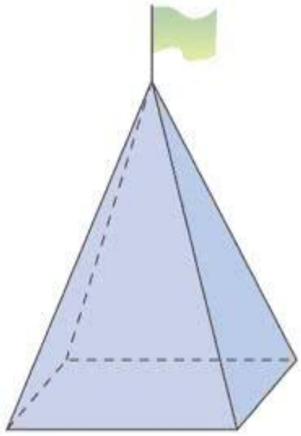
(C) 182,8

(D) 192,0

(E) 224,0

QUESTÃO 7

(Vunesp) O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.



Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de 4 m, o volume de concreto (em m^3) necessário para a construção da pirâmide será:

(A) 36

(B) 27

(C) 18

(D) 12

(E) 4

QUESTÃO 8

(FUNDATEC 2015 - adaptada). Um enfeite em formato de pirâmide regular e de base quadrada tem o lado da base medindo 10 cm e a altura de 15 cm. Qual é o volume em cm^3 dessa pirâmide?

(A) 150.

(B) 390.

(C) 415.

(D) 500.

(E) 1500.

QUESTÃO 9

(SEDUC-PI) A figura seguinte é um recipiente cilíndrico reto, e contém água até a metade de sua altura. Uma esfera maciça, colocada no seu interior, fica totalmente submersa, elevando a altura da água em 2cm. Qual é o volume dessa esfera?

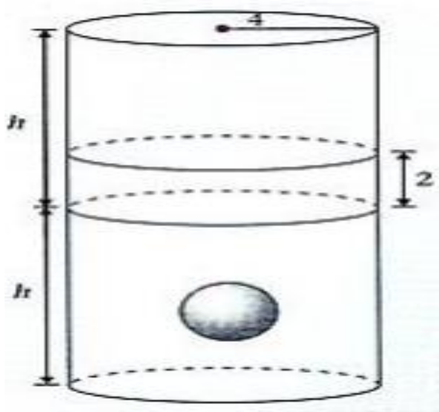
(A) 16π cm³

(B) 20π cm³

(C) 24π cm³

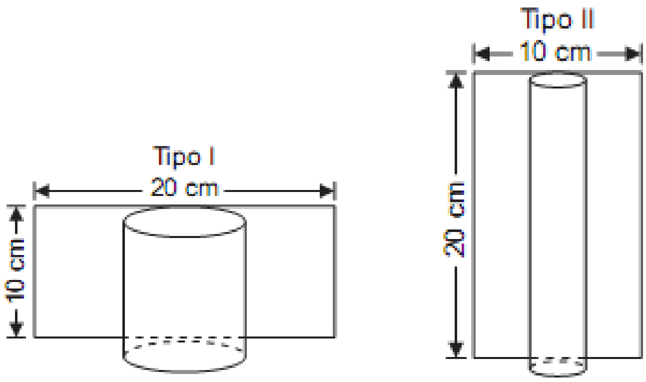
(D) 28π cm³

(E) 32π cm³



QUESTÃO 10

(Enem 2006) Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 m x 10 cm (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.



Supondo que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

(A) o triplo.

(B) o dobro.

(C) igual.

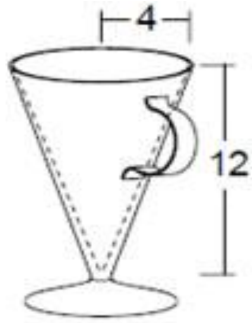
(D) a metade.

(E) a terça parte.

QUESTÃO 11

(Mundo Educação) Um copo será fabricado no formato de um cone com as seguintes medidas: 4 cm de raio e 12 cm de altura.

A capacidade do copo será aproximadamente



(A) 16 cm³

(B) 50 cm³

(C) 100 cm³

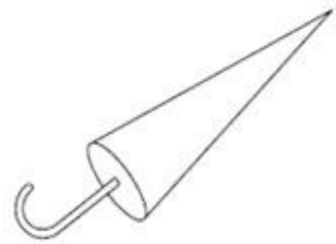
(D) 201 cm³

(E) 603 cm³

QUESTÃO 12

(Mundo Educação) Uma fábrica de doces e balas irá produzir chocolates na forma de guarda-chuva, com as seguintes medidas: 8 cm de altura e 3 cm de raio de acordo com a ilustração.

A quantidade de chocolate utilizada na produção de 200 peças será aproximadamente



(A) 7 litros.

(B) 15 litros

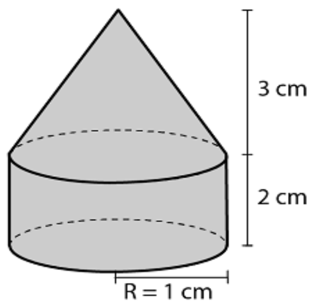
(C) 75 litros.

(D) 150 litros

(E) 226 litros.

QUESTÃO 13

(UCMG - 1981) O volume, em cm³, da figura formada por um cone e um cilindro circular reto, é:



(A) π

(B) 2π

(C) 3π

(D) 4π

(D) 5π

QUESTÃO 14

(Cefet - SC) Dado um copo em forma de cilindro e outro de forma cônica de mesma base e altura. Se eu encher completamente o copo cônico com água e derramar toda essa água no copo cilíndrico, quantas vezes terei que fazê-lo para encher completamente o copo cilíndrico?

(A) É impossível saber, pois não se sabe o volume de cada sólido.

(B) Apenas uma vez.

(C) Uma vez e meia.

(D) Duas vezes.

(E) Três vezes.

QUESTÃO 15

(Saber Matemática) O volume da esfera ao lado é aproximadamente:

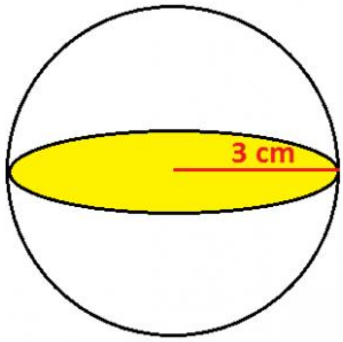
(A) 16 cm³

(B) 37 cm³

(C) 113 cm³

(D) 200 cm³

(E) 339 cm³



QUESTÃO 16

(Toda Matéria) Um reservatório esférico possui um raio interno de 2m. Sabendo que m³ = 1000 livros, quantos litros de gás cabe, aproximadamente, nesse reservatório? Utilize o valor de π = 3,14.

(A) 9000 litros.

(B) 13000 litros

(C) 17000 litros

(D) 25000 litros.

(E) 33000 litros.

APÊNDICE E - QUESTIONÁRIO AVALIATIVO

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF
Mestrando: Francisco Raimundo Coutinho Júnior
Orientador: Profº. Dr. Edson Leite Araújo

1 - Qual a sua idade?

____

2 – Sexo:

(   ) Masculino   (   ) Feminino

3 – Qual a profissional de seu pai ou responsável?

____

4 – Qual a profissional de sua mãe ou responsável?

____

5 - Em qual escola você concluiu o Ensino Fundamental?

(   ) Em uma escola deste município

(   ) Outra   Qual?______________________________ Local: ___________________

6 – Você já havia utilizado *softwares* (programas computacionais) educacionais em sala de aula?

(   ) Não

(   ) Sim   Qual? ___________________________________

7 – Você já havia utilizado *softwares* (programas computacionais) educacionais nas aulas de Matemática?

(   ) Não

(   ) Sim   Qual? ____________________ Para qual conteúdo? _________________

8 - Você teve dificuldade em relação a utilização do *Geogebra*? Se sim, qual foi a maior dificuldade?

____

9 - A utilização do software *Geogebra* lhe ajudou a compreender melhor a dedução das fórmulas para o cálculo de volume dos sólidos geométricos estudados? Se sim, de que forma?

____

____

____

____

10 - Em sua opinião, quais os pontos positivos e negativos da utilização do *Geogebra* no estudo volume dos sólidos geométricos estudados?

____

____

____

____

11 - Qual a sua opinião sobre a utilização de recursos tecnologicos em sala de aula como ferramenta de apoio à aprendizagem? Justifique.

____

____

____

____