

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL  
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

**PÂMELA CATARINA DE SOUSA BRANDÃO**

**ESTUDO DE MATRIZES DE MANEIRA SIGNIFICATIVA**

Três Lagoas – MS  
2018

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL  
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

**PÂMELA CATARINA DE SOUSA BRANDÃO**

**ESTUDO DE MATRIZES DE MANEIRA SIGNIFICATIVA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Dr<sup>a</sup> Eugenia Brunilda Opazo Uribe

Três Lagoas – MS  
2018

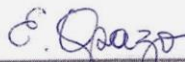
PÂMELA CATARINA DE SOUSA BRANDÃO

PÂMELA CATARINA DE SOUSA BRANDÃO

**ESTUDO DE MATRIZES DE MANEIRA SIGNIFICATIVA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:



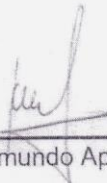
---

Prof. Dr<sup>a</sup> Eugenia Brunilda Opazo Uribe



---

Prof. Dr. Renato Cesar da Silva



---

Prof. Jaime Edmundo Apaza Rodriguez

Três Lagoas – MS  
2018

A Deus, à minha família e à minha filha.

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus por me sustentar e dar discernimento em todo esse período de estudos.

À professora Dr. Eugenia Brunilda Opazo Uribe pela magnífica orientação, incentivo, sugestões e conversas.

Aos colegas de mestrado, pela convivência e companheirismo, dos quais jamais esquecerei.

Aos meus pais, por me darem a vida e sempre me apoiarem.

À minha família, por compreender a minha ausência em casa e isolamento nos dias de estudos.

Ao meu esposo, que sempre esteve ao meu lado, me apoiou e incentivou a estudar.

À minha filha que ainda no ventre me deu forças e motivos para concluir o mestrado.

## RESUMO

Este trabalho tem por objetivo refletir sobre o ensino de matrizes, fazendo uma introdução teórica sobre conceitos que fazem parte do conteúdo abordado no ensino médio, para em seguida analisar livros didáticos e a forma como abordam esse conteúdo. Foram entrevistando professores de matemática do ensino médio. Foi realizada uma intervenção em sala de aula na qual foi introduzido o jogo Batalha Naval, como meio de auxiliar o estudo inicial de matrizes, permitindo que o aluno se familiarize com a notação matricial e os elementos da matriz e também foram analisados e resolvidos problemas contextualizados. A intervenção na escola foi realizada com 40 alunos no total do segundo ano do ensino médio da Escola Estadual Padre João Tomes, do município de Três Lagoas – MS. O presente estudo caracteriza-se como pesquisa descritiva, com abordagem qualitativa. A partir do desenvolvimento da aula foi possível avaliar a capacidade dos alunos como meio de identificar uma Matriz numérica e suas características; reconhecer e desenvolver os conceitos sobre matrizes em situações-problema; encontrar os elementos de uma Matriz, bem como identificá-los de acordo com índices fornecidos.

**Palavras –chave:** Matrizes, Ensino de Matrizes, Ensino de Matemática.

## ABSTRACT

This work aims to reflect on the teaching of matrices, marking a theoretical introduction concepts that are part of the content covered in high school, to then analyze textbooks and they way they approach this content. They were interviewing high school math teachers. An intervention was performed in the classroom in which the game Naval Battle was introduced, as a means of assisting the initial study of matrices, allowing the student to familiarize themselves with the matrix notation and the elements of the Matrix and were also analyzed and resolved Contextual Problems. The intervention at the School was performed with 40 students in the total of the second year of high School of the state School of Padre João Tomes, of the municipality of Três Lagoas - MS. This study is characterized as descriptive research, whit qualitative Approach. From the development of the class it was possible evaluate the capacity of the pupils as a means of identifying a numerical matrix and its characteristics; Recognize and develop concepts about matrices in problem situations; find the elements of an array as identify them according to the indexes provided.

Key words: Matrices, Teaching of matrices, Teaching Mathematics.



## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> – Participação dos alunos na atividade proposta.....	48
--	----

## LISTA DE TABELA

<b>Tabela 1</b> – Nota dos alunos.....	15
<b>Tabela 2</b> – Número de automóveis vendidos.....	29
<b>Tabela 3</b> – Batalha Naval.....	46
<b>Tabela 4</b> – Acertos e erros.....	47
<b>Tabela 5</b> – Calorias queimadas por hora.....	49
<b>Tabela 6</b> – Horas por dia de cada atividade.....	49

## LISTA DE GRÁFICO

<b>Gráfico 1</b> - Leciona ou lecionou como professor (a) de Matemática na Rede Pública de Ensino?.....	39
<b>Gráfico 2</b> - Leciona ou lecionou como professor (a) de Matemática no 2º ano do Ensino Médio?.....	40
<b>Gráfico 3</b> - Você considera importante o estudo de Matrizes no Ensino Médio?.....	40
<b>Gráfico 4</b> - Você acha que as competências e habilidades estabelecidas nos referenciais curriculares atendem as necessidades de seus alunos?.....	41
<b>Gráfico 5</b> - Você utilizou livros didáticos como base para resolver exercícios? .....	42
<b>Gráfico 6</b> - Os livros didáticos oferecidos abordam o conteúdo de Matrizes de maneira:.....	43
<b>Gráfico 7</b> - Durante o ensino de Matrizes, você utilizou situações problemas?.....	43

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	13
2 MATRIZES .....	15
2.1 HISTÓRIA .....	15
2.2 DEFINIÇÃO .....	16
2.3 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES .....	18
2.3.1 MATRIZ LINHA E MATRIZ COLUNA.....	18
2.3.2 MATRIZ NULA .....	18
2.3.3 MATRIZ DIAGONAL .....	19
2.3.4 MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR E MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR.....	19
2.3.5 MATRIZ IDENTIDADE.....	19
2.3.6 MATRIZ IDEMPOTENTE .....	20
2.3.7 MATRIZ TRANSPOSTA.....	20
2.3.8 MATRIZ SIMÉTRICA .....	21
2.3.9 MATRIZ ANTISSIMÉTRICA .....	21
2.4 OPERAÇÕES COM MATRIZES .....	22
2.4.1 IGUALDADE DE MATRIZES.....	22
2.4.2 ADIÇÃO DE MATRIZES.....	22
2.4.3 SUBTRAÇÃO DE MATRIZES .....	24
2.4.4 MULTIPLICAÇÃO DE UMA MATRIZ POR UM NÚMERO REAL.....	24
2.4.5 MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES.....	24
2.5 MATRIZ INVERSA.....	26
3 ANÁLISE DA ABORDAGEM DO TEMA MATRIZES NOS LIVROS DIDÁTICOS .....	29
3.1 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN) .....	29
3.2 LIVRO DIDÁTICO .....	30
4 ENSINO DE MATRIZES: OPINIÕES DE PROFESSORES EM EXERCÍCIO .....	33
5 PROPOSTA DE TRABALHO DIFERENCIADO.....	39
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	47
REFERÊNCIAS .....	48

## 1 INTRODUÇÃO

Os desafios no ensino de matemática são diversos, na maioria das vezes considerada como a disciplina mais difícil, o professor além de pensar na formação do estudante deve se preocupar em atrair o estudante para este mundo abstrato e importante e ir em busca de materiais didáticos para o desenvolvimento de suas aulas. (SANTOS, 2007).

A proposta da Rede Estadual de Ensino em Mato Grosso do Sul é que o ensino de matemática ocorra de maneira significativa para o estudante, auxiliando em sua formação cognitiva e seu desenvolvimento como cidadão, ideia que está presente no Plano Estadual de Educação de Mato Grosso do Sul.

O grande desafio para se alcançar a universalização do ensino fundamental relaciona-se, portanto, à melhoria das condições de permanência do aluno na escola, com aprendizagens significativas, passando pela melhoria dos processos de formação docente e de gestão, pela redução das taxas de reprovação, de abandono escolar e, conseqüentemente, de distorção idade-série e, ainda, pela implementação de condições para a oferta de ensino de qualidade para todos, com inclusão plena daqueles em situação de vulnerabilidade social. (Mato Grosso do Sul, 2014).

Pensando nisso, diariamente professores buscam novas alternativas e metodologias para utilizar em sala de aula e desenvolver um bom trabalho.

A escolha do tema do trabalho, ensino de matrizes, está relacionada com a dificuldade encontrada para atender o referencial do estado de maneira a equacionar os conteúdos, o desenvolvimento dos mesmos de maneira significativa e o tempo disponível para isso. Assim, a proposta foi buscar alternativas de trabalhar o conteúdo em sala de aula buscando despertar o interesse dos alunos e ao mesmo tempo aguçar a curiosidade deles sobre o assunto, o que, em tese, permitiria desenvolver o trabalho mais facilmente e aproveitar melhor o tempo.

O conteúdo de matrizes está previsto para o 2º ano do Ensino Médio, no segundo bimestre, tendo o professor cerca de um mês para trabalhar o conteúdo, pois outros conteúdos também são inseridos no bimestre.

Foi introduzido um jogo, a Batalha Naval, com o objetivo de auxiliar o estudo inicial de matrizes, permitindo que o aluno se familiarize com a notação matricial e os elementos da matriz. A vantagem do jogo em questão é que não precisa de materiais especiais, apenas lápis e papel; ao mesmo tempo, o uso da atividade

permitiu promover a interação entre os estudantes. Após a introdução dos conceitos e estudo das principais propriedades das matrizes, um novo momento foi proposto: a resolução de situações problemas conhecidas pelos estudantes que possuem aplicações de matrizes, com isso o estudante pode perceber a importância deste estudo.

Este trabalho caracteriza-se como pesquisa descritiva, com abordagem qualitativa. A pesquisa descritiva segundo Gil (2010) descreve as características de determinadas populações ou fenômenos, utilizando de técnicas padronizadas de coleta de dados, como por exemplo, o questionário e a observação imediata.

A metodologia qualitativa busca analisar e interpretar aspectos mais profundos, descrevendo a complexidade do comportamento humano, além de fornecer análise mais detalhada sobre as investigações, hábitos, atitudes, tendências de comportamento, dentre outros (LAKATOS, 2011).

Este trabalho inicia-se com um capítulo que aborda a história das Matrizes, sua definição, seus principais tipos, bem como operações básicas com Matrizes. No capítulo 2 foi feita a análise da abordagem do tema matrizes nos livros didáticos disponíveis em maior quantidade na biblioteca da Escola em que foi realizada uma intervenção com jogos e problemas diferenciados. O capítulo 3 é dedicado a uma pesquisa com professores de Três Lagoas- MS em relação ao ensino das Matrizes. Por fim, no capítulo 4, é relatada uma experiência de trabalho diferenciada por meio da utilização de Matrizes, através de um jogo e problemas do cotidiano, realizada com duas turmas de segundo ano de ensino médio da Escola Estadual Padre João Tomes da cidade de Três Lagoas-MS.

## 2 MATRIZES

Neste capítulo é abordada a história das Matrizes, sua definição, seus principais tipos, bem como operações básicas com Matrizes. Para os aspectos teóricos, exemplos e exercícios o trabalho foi baseado em Giovanni (1994), Gentil (1998), Machado (1986), Iezzi (1998), Bezerra (2010), Moura (2014), Silva (2014) e CRUZ (2013).

### 2.1 HISTÓRIA

O surgimento das Matrizes ocorreu devido à necessidade de resolução de sistemas lineares. Desde os tempos remotos, os chineses, apreciadores por diagramas, representavam os sistemas lineares através de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro (MOURA, 2014)

Desse modo, eles descobriram o método de resolução por eliminação, que anula os coeficientes através de operações elementares. Assim, as Matrizes apareceram pela primeira vez em 1683, por meio do japonês Seki Kowa (1637 – 1708), que fez uso da ideia de determinante em seus trabalhos a respeito dos sistemas lineares.

Todavia, segundo Silva (2014) o primeiro uso implícito da noção de matriz aconteceu por meio de Joseph Louis Lagrange (1736-1813), em 1790; e o primeiro a nomeá-la foi Augustin-Louis Cauchy (1789- 1857) que as denominou de tabelas. Mas, foi somente em 1850, com o matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897), que esse tipo de configuração numérica recebeu o nome de Matriz.

Logo após, ainda no ano de 1850, em parceria de Arthur Cayley (1821-1895), matemático inglês, divulgou o nome, Matriz, iniciando demonstrações de seu uso; tais divulgações se deram, por exemplo, por meio de sua obra: *Memoir on the Theory of Matrices* (1858), passando a ser considerado então, o pai das Matrizes.

Registros indicam que o primeiro curso de Teoria das Matrizes, foi voltado ao Teorema Espectral, que já era conhecido antes de Cayley dar início ao estudo das matrizes. Uma vez que, a maioria dos resultados básicos da Teoria das Matrizes foi

descoberta quando os estudiosos de matemática dos séculos XVIII e XIX passaram a investigar a Teoria das Formas Quadráticas (SILVA, 2014). Atualmente, são indispensáveis para o estudo de tais formas por meio de notação e metodologia matricial.

## 2.2 DEFINIÇÃO

Observe a tabela abaixo, que aponta as notas de José, Maria e Ricardo, em quatro disciplinas (Português, Matemática, Química e Física):

**Tabela 1** – Nota dos alunos

Nome	Português	Matemática	Química	Física
José	8,5	9,0	10,0	9,5
Maria	9,0	10,0	8,5	8,0
Ricardo	8,0	7,0	8,5	7,5

Fonte: Silva (2014).

Segundo Silva (2014) uma tabela deste tipo, em que os números estão dispostos em 3 linhas e 4 colunas, denomina-se Matriz **3X4** (lê-se três por quatro) e é representada da seguinte maneira:

$$M = \begin{pmatrix} 8,5 & 9,0 & 10,0 & 9,5 \\ 9,0 & 10,0 & 9,5 & 8,0 \\ 8,0 & 7,0 & 8,5 & 7,5 \end{pmatrix}$$

**Definição:** Sejam  $m$  e  $n$  dois números naturais não nulos, chama-se matriz  $m$  por  $n$  (indica-se  $m \times n$ ) toda tabela  $M$  de elementos, dispostos em  $m$  linhas e  $n$  colunas.



Será utilizada a notação  $(A_{ij})_{m \times n}$  onde o par de índices  $ij$  representa a posição de cada elemento  $a_{ij}$  dentro da matriz, sendo que  $i$  representa a linha e  $j$  representa a coluna. Assim, uma toda matriz  $m \times n$  pode ser representada de maneira genérica como,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ou ainda como,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Observações:

- Caso  $m = n$  a matriz será chamada de matriz quadrada de ordem  $m$  (ou  $n$ ).
- Caso  $m \neq n$  a matriz será chamada de matriz retangular de dimensão  $m \times n$ .
- Em uma matriz quadrada pode ser destacada a diagonal principal formada por todos os elementos que tem os dois índices iguais e que no caso da matriz  $A$ , está destacada em negrito:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

- A diagonal secundária de uma matriz quadrada  $B$  formada por todos os elementos que têm a soma dos índices iguais a  $n + 1$ , na matriz  $B$  abaixo a diagonal secundária está destacada em negrito:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n-1} & \mathbf{b_{1n}} \\ b_{21} & \mathbf{b_{22}} & b_{23} & \cdots & \mathbf{b_{2n-1}} & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-11} & \mathbf{b_{n-12}} & b_{n-13} & \cdots & b_{n-1n-1} & b_{n-1n} \\ \mathbf{b_{n1}} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn-1} & b_{nn} \end{bmatrix}$$

## 2.3 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

### 2.3.1 MATRIZ LINHA E MATRIZ COLUNA

Considerando uma matriz qualquer  $(A_{ij})_{m \times n}$  podem ser considerados os seguintes casos:

- Se  $m = 1$ , a matriz terá dimensão  $1 \times n$  e será denominada Matriz Linha. Uma matriz linha pode ser escrita de maneira genérica como

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}).$$

Por exemplo, a matriz  $A = (5 \ 4 \ 7)$  é uma matriz linha.

- Se  $n = 1$ , a matriz terá dimensão  $m \times 1$  e será denominada Matriz Coluna. Uma matriz coluna pode ser escrita de maneira genérica como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, a matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}$  é uma Matriz Coluna.

### 2.3.2 MATRIZ NULA

É uma matriz (quadrada ou retangular) que possui todos os elementos iguais a zero, ou seja,  $a_{ij} = 0$ , para todo  $i$  e  $j$ . Notação:  $O_{m \times n}$ . Por exemplo, a matriz nula de dimensão  $2 \times 3$  é

$$O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 2.3.3 MATRIZ DIAGONAL

É uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})$  em que todos os elementos fora da diagonal principal são nulos, isto é,  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ .

Por exemplo, as matrizes A e B abaixo são matrizes diagonais,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

### 2.3.4 MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR E MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Uma matriz quadrada de ordem n é denominada Matriz Triangular quando todos os seus elementos, acima ou abaixo, da diagonal principal forem nulos, valendo ressaltar que pode haver zero na diagonal. Assim,

- Matriz Triangular Superior é uma matriz quadrada cujos elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos, ou seja,  $a_{ij} = 0$  para  $i > j$ . Por exemplo, as matrizes A e B são exemplos de matriz triangular superior:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Matriz Triangular Inferior é uma matriz quadrada cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos, ou seja,  $a_{ij} = 0$  para  $i < j$ . Por exemplo, as matrizes A e B são exemplos de matriz triangular inferior:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 2.3.5 MATRIZ IDENTIDADE

A matriz identidade é um caso particular de matriz diagonal, em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Assim, a matriz identidade de ordem  $n$  denotada por  $I_n$ , é a matriz,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, as matrizes A e B abaixo representam a matriz identidade de ordem 2 e matriz identidade de ordem 3, respectivamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 2.3.6 MATRIZ IDEMPOTENTE

Uma matriz quadrada A é dita idempotente se  $A^2 = A$ . Por exemplo, a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  é uma matriz idempotente. De fato,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

### 2.3.7 MATRIZ TRANSPOSTA

Se  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  é uma matriz  $m \times n$  qualquer, então, a transposta de A, denotada por  $A^t$ , é definida como a matriz  $n \times m$ , que resulta da transformação das linhas em colunas ordenadamente; dessa forma, a primeira coluna de  $A^t$  é a primeira linha de A, a segunda coluna de  $A^t$  é a segunda linha de A, assim, consecutivamente. Assim, tem-se

$$A^t = (a_{ji})_{n \times m}$$

Por exemplo, considerando a matriz  $A$  tal que  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$ , a transposta de  $A$  será a matriz  $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ .

Propriedades:

Considerando as matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  e  $\alpha$  um número real não nulo, tem-se

- a)  $(A^t)^t = A$ .
- b)  $(A + B)^t = A^t + B^t$ .
- c)  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ .
- d)  $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ .

### 2.3.8 MATRIZ SIMÉTRICA

Se uma matriz quadrada  $A$  é igual à sua matriz transposta  $A^t$  ( $A = A^t$ ) é dito que  $A$  é uma Matriz Simétrica. Nesse caso, temos que se  $A = (a_{ij})_n$ , então  $a_{ij} = a_{ji}$  para quaisquer  $i, j$ , ou seja, os elementos da matriz  $A$  estão posicionados de maneira simétrica em relação à diagonal principal. Por exemplo, a matriz  $A$  é simétrica,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

### 2.3.9 MATRIZ ANTISSIMÉTRICA

Se  $A$  é uma matriz quadrada e  $A = -A^t$  diz-se que  $A$  é antissimétrica. Por exemplo, a matriz  $A$  abaixo é antissimétrica,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 8 \\ 5 & -8 & 0 \end{pmatrix} \quad -A^t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 8 \\ 5 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observação: Existem matrizes que não são simétricas nem antissimétricas. É o caso da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

cuja transposta é  $A^t = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$ , o que permite concluir que  $A \neq A^t$  e  $A \neq -A^t$ .

## 2.4 OPERAÇÕES COM MATRIZES

### 2.4.1 IGUALDADE DE MATRIZES

Dadas as matrizes A e B da mesma dimensão. Se cada elemento de A for igual ao elemento correspondente de B, as matrizes A e B são ditas iguais. Simbolicamente, pode-se escrever: dadas as matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ para todo } 1 \leq i \leq m \text{ e todo } 1 \leq j \leq n$$

Por exemplo,

a) As matrizes  $A = \begin{bmatrix} 2^3 & \text{sen}\pi & \log 1 \\ -3 & -1 & 9 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3^2 \end{bmatrix}$  são iguais.

b) Dadas as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $A = B$  se, e somente se,  $c = 0$  e  $b = 3$ .

### 2.4.2 ADIÇÃO DE MATRIZES

Dadas as matrizes  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$ , da mesma ordem  $m \times n$ , temos que a soma  $A + B$  é igual a matriz  $C = (c_{ij})$  de ordem  $m \times n$ , tal que  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Assim, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Então,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} + b_{m3} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Por exemplo, dadas as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , pode-se obter a soma

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Propriedades:

Sejam as matrizes  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  e  $C = (c_{ij})$  da mesma dimensão  $m \times n$ , então valem as seguintes propriedades:

(i) Comutativa:  $A + B = B + A$ ;

De fato, o elemento  $(i, j)$  da matriz  $A + B$  é  $a_{ij} + b_{ij}$  e o elemento  $(i, j)$  da matriz  $B + A$  é  $b_{ij} + a_{ij}$ . Como  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  são números reais, então  $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ .

(ii) Associativa:  $A + (B + C) = (A + B) + C$ ;

De fato, o elemento  $(i, j)$  da matriz  $A + (B + C)$  é  $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$ , como  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  e  $c_{ij}$  são números reais,  $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$  e portanto,

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Essa propriedade afirma que você pode alterar o agrupamento em uma adição de matrizes e obter o mesmo resultado. Por exemplo, você pode somar a matriz A à matriz B primeiro, e depois somar a matriz C, ou, você pode somar a matriz B à matriz C, e então somar esse resultado à matriz A.

(iii) Elemento Neutro: é a matriz  $0_{m \times n}$  tal que  $A + 0 = 0 + A = A$ ;

(iv) Elemento Oposto: para cada matriz  $A = (a_{ij})$  de dimensão  $m \times n$ , o elemento oposto da adição de matrizes é a matriz oposta de A, denominada  $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$  tal que  $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$

### 2.4.3 SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

A diferença entre as matrizes  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$ , de mesma ordem  $m \times n$ , é a soma da matriz A com a oposta de B, ou seja,  $A + (-B)$ . Assim,  $A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$ .

Por exemplo, considerando as matrizes A e B de dimensão  $3 \times 2$ ,  $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  e  $B =$

$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , a subtração dessas matrizes é

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -5 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como resultado obtém-se então a matriz  $C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -5 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$

### 2.4.4 MULTIPLICAÇÃO DE UMA MATRIZ POR UM NÚMERO REAL

Dada uma matriz  $A = (a_{ij})$  de dimensão  $m \times n$  e um número real  $k$ , temos que  $k \cdot A$  é uma matriz também de dimensão  $m \times n$  com elementos  $b_{ij}$ , tais que  $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ . Por exemplo, considerando a matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $k = 3$ , tem-se,

$$k \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriedades:

Sejam as matrizes  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  e  $C = (c_{ij})$  da mesma dimensão  $m \times n$  e dois números reais  $\alpha$  e  $\beta$ , valem as seguintes propriedades:

(i)  $\beta \cdot (\alpha \cdot A) = \alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$

(ii)  $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

(iii)  $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

### 2.4.5 MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES



Dadas as matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{jk})_{n \times p}$  o produto de A com B é a matriz C tal que  $C = A \cdot B = (c_{ik})_{m \times p}$  onde,

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \dots + a_{in}b_{nk}$$

Para todo  $1 \leq i \leq m$  e todo  $1 \leq k \leq p$ . Equivalentemente pode-se escrever,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq k \leq p$$

Observação: Só é possível multiplicar a matriz A pela matriz B, se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. A matriz C resultante da multiplicação de A por B tem dimensão  $m \times p$ , onde m é o número de linhas de A e p é o número de colunas de B.

Propriedades:

Sejam as matrizes A, B e C matrizes cujos produtos podem ser realizados, então valem as seguintes propriedades:

(i) Associativa  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

(ii) Distributiva:

- à esquerda:  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

- à direita:  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ .

(iv) Elemento neutro: Considerando a matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  o elemento neutro é a matriz identidade de ordem m ( $I_m$ ) ou de ordem n ( $I_n$ ) pois  $I_m \cdot A = A = A \cdot I_n$ .

Observação: A multiplicação de matrizes não é comutativa.

Exemplos:

a) Dadas as matrizes  $A_{3 \times 2}$  e  $B_{2 \times 5}$ , é possível realizar o produto e  $(A \cdot B)_{3 \times 5}$

b) Dadas as matrizes  $A_{4 \times 1}$  e  $B_{2 \times 3}$ , não é possível obter o produto A.B, nem o produto B.A.

c) Dadas as matrizes  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ , de dimensão  $3 \times 2$  e  $2 \times 3$

respectivamente, é possível obter o produto A.B e o resultado é:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 + (-6) & 4 + 0 & 6 + 12 \\ 0 + (-20) & 0 + 0 & 0 + 4 \\ -1 + (-8) & -2 + 0 & -3 + 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{pmatrix}$$

Demonstração das propriedades:

(i) Associativa: Seja  $D = BC$ .

Elemento  $(k, j)$  de  $D$ :  $d_{kj} = \sum_{l=1}^q b_{kl} c_{lj}$  (1)

Elemento  $(i, j)$  de  $AD$ :  $(AD)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$  (2)

Substituindo (1) em (2):  $(AD)_{ij} = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q a_{ik} b_{kl} c_{lj}$ .

Seja  $Z = AB \equiv$  elemento  $(i, j)$  de  $(AB)C$ :

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{ij} &= (ZC)_{ij} = \sum_{l=1}^q z_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^q \left( \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{l=1}^q \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kl} c_{lj} \\ &= (A(BC))_{ij} \end{aligned}$$

(ii) a. Distributiva (à esquerda): Seja  $D = B + C$ .

Elemento  $(k, j)$  de  $D$ :  $d_{kj} = b_{kj} + c_{kj}$

Elemento  $(i, j)$  da matriz  $A(B + C)$

$$(A(B + C))_{ij} = (AD)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj}.$$

Elemento  $(i, j)$  da matriz  $AB + AC \equiv$  soma dos elementos  $(i, j)$  das matrizes  $AB$  e  $AC$

$$\begin{aligned} (AB + AC)_{ij} &= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = \left( \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right) + \left( \sum_{k=1}^p a_{ik} c_{kj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj} = (A(B + C))_{ij}. \end{aligned}$$

(ii) b. Distributiva (à direita):

A demonstração da propriedade é análoga a demonstração da propriedade 2.

## 2.5 MATRIZ INVERSA

Dada uma matriz quadrada  $A$ , de ordem  $n$ , chamamos de matriz inversa de  $A$  uma matriz quadrada  $B$  de ordem  $n$  tal que  $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ . Denotamos a matriz

inversa de A por  $A^{-1}$ . Quando existe a matriz inversa de A, dizemos que A é uma matriz invertível ou não singular ou inversível.

Exemplo: Considerando a matriz  $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , para verificar se é invertível é utilizada a definição. Caso exista a inversa  $A^{-1}$  de A, ela deve satisfazer a igualdade

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Então, assumindo que  $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  e o sistema abaixo terá que ser verificado

$$A \cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O que significa que,  $\begin{pmatrix} 5a + 8c & 5b + 8d \\ 2a + 3c & 2b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Aplicando a igualdade de matrizes, obtém-se,

$$\begin{cases} 5a + 8c = 1 \\ 2a + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } c = 2$$

$$\begin{cases} 5b + 8d = 0 \\ 2b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = 8 \text{ e } d = -5$$

$$\text{Então } A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Verificando a segunda igualdade,

$$A^{-1} \cdot A = I_n \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{obtém-se } \begin{pmatrix} 5a + 2b & 8a + 3b \\ 5c + 2d & 8c + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pela igualdade de matrizes, temos os sistemas

$$\begin{cases} 5a + 2b = 1 \\ 8a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = 8$$

$$\begin{cases} 5c + 2d = 0 \\ 8c + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 2 \text{ e } d = -5$$

$$\text{Então, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Logo } A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n.$$

Teorema: Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Se  $A$  é invertível, então a inversa de  $A$  é única.

Demonstração:

Como  $A$  é invertível existe pelo menos uma matriz quadrada de ordem  $n$  inversa de  $A$ . Sejam  $B$  e  $C$  matrizes inversas de  $A$ , assim  $AB = BA = I_n$ ;  $AC = CA = I_n$ . Pode-se escrever,

$$B = BI_n = B(AC) = BA(C) = I_n C = C.$$

### 3 ANÁLISE DA ABORDAGEM DO TEMA MATRIZES NOS LIVROS DIDÁTICOS

#### 3.1 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN)

A proposta da educação é que os estudantes tenham a habilidade de reconhecer situações problema do cotidiano, que envolvam ferramentas matemáticas e, além disso, saibam resolvê-las.

O livro didático disponível na escola traz inicialmente a definição de matrizes e logo em seguida alguns exemplos, não dando tanta importância para a contextualização do conteúdo. Após isso, explica as propriedades de matrizes acompanhadas por alguns exemplos, posteriormente a proposta de exercícios repetitivos para treino, novamente não mostra a aplicação dos conceitos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+):

[...] no ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional (BRASIL. 2002, p. 111).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais consta, de maneira precisa, o sentido do aprendizado da Matemática no Ensino Médio, que além do seu aspecto de ferramenta eficaz para a compreensão do mundo que nos cerca, trata-se também de linguagem formal e precisa com elementos para uma argumentação lógica e fundamentada. Estes aspectos caracterizam a Matemática como ciência com objetivos e métodos próprios:

“Nessa etapa da escolaridade, portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza.” (pg.111)

O estudo da matemática de modo contextualizado, integrado e relacionado a outros conhecimentos gera em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são primordialmente formadoras, à medida que familiarizam o aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias,

tomar decisões, generalizar, entre outras ações necessárias à sua formação (MENEGETTI, 2012).

As recentes Orientações Curriculares para o Ensino Médio apontam que o modo de trabalhar os conteúdos matemáticos deve, sempre, agregar um valor formativo em relação ao desenvolvimento do pensamento matemático. Os alunos devem ser colocados em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático (BRASIL, 2006).

[...] parte-se do princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o "pensar matematicamente". Nesse sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um "fazer matemático" por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento. (BRASIL, 2006, p.70)

### 3.2 LIVRO DIDÁTICO

Os livros didáticos são uma ferramenta importante para o professor e por esse motivo é feita uma análise sobre a forma em que o conteúdo de matrizes é desenvolvido em alguns livros didáticos. Os livros que foram utilizados para essa análise são aqueles que estão disponíveis em maior quantidade na biblioteca da escola e, portanto acabam sendo utilizados em sala de aula com os alunos. FERNANDES (2017) fez uma análise de alguns livros didáticos e afirma que não há uma apresentação clara e organizada dos conceitos, os exercícios são repetitivos, levando o aluno apenas a seguir as técnicas. A autora afirma ainda que os livros falham em apresentar atividades investigativas e em grupos, sendo elas essenciais no desenvolvimento do raciocínio lógico e na criação de estratégias na resolução de problemas.

O primeiro livro analisado foi de Giovanni (1994) que definem as matrizes como tabelas de números reais usadas na maioria dos ramos da ciência e da engenharia, sendo utilizadas na estatística, na economia, na física atômica, etc. Introduzem o conceito através de uma tabela de dados relacionada com o cotidiano dos alunos (tabela 2) e em seguida escreve os dados na forma matricial.

Exemplo: Considere a tabela 2, que indica o número de vendas efetuadas por uma agência de automóveis durante o primeiro trimestre.

**Tabela 2 – Número de automóveis vendidos**

	Janeiro	Fevereiro	Março
Monza	20	18	25
Fiat	12	10	15
Gol	15	9	20
Voyage	18	15	21

Fonte: Giovani; Bonjorno

Se quisermos saber a quantidade de carros Voyage vendidos em janeiro, iremos procurar o número que se encontra na 4ª linha e na 1ª coluna da tabela. No quadro indicado, os números colocados nas disposições horizontais formam o que denominamos linha e os colocados nas disposições verticais chamamos de coluna.

$$\begin{pmatrix} 20 & 18 & 25 \\ 12 & 10 & 15 \\ 15 & 9 & 20 \\ 18 & 15 & 21 \end{pmatrix}$$

Ou

$$\begin{bmatrix} 20 & 18 & 25 \\ 12 & 10 & 15 \\ 15 & 9 & 20 \\ 18 & 15 & 21 \end{bmatrix}$$

Após apresentar o exemplo e escrever os dados na forma de matriz, o livro apresenta conceitos, notação e explica que uma matriz não se restringe apenas aos números reais, a mesma pode se estender além dos conjuntos de números complexos, a qualquer outro tipo de objetos matemáticos, tal como as funções.

Além dos ramos da ciência e da engenharia, o autor poderia ter dado ênfase que além do uso nesses ramos, ela pode ser utilizada de modo constante por todos em outros tipos de atividades, todavia que seus usos na maioria das vezes são realizados de modo inconsciente e informal, como por exemplo, quando observamos a tabela de um campeonato de futebol. O livro de Giovanni e Bonjorno (1994)

conduz de maneira significativa a transformação da tabela, desde a ideia intuitiva até a formalização de matrizes.

Outro livro analisado foi o de Bezerra (1994) que apresenta a definição de matrizes diretamente, não realiza uma prévia com histórico tão pouco uma introdução com alguma tabela que reporte uma aplicação ou dados contextualizados.

Para Gentil (1998) a crescente utilização dos computadores tem feito com que a teoria das matrizes seja cada vez mais aplicada em setores como, por exemplo, na Economia, Engenharia, Matemática, Física, Tecnologia, dentre outros. O livro inicia-se ressaltando a importância das matrizes atualmente, especialmente na área da informática. Posteriormente realiza uma importante introdução histórica que poucos livros trazem. Porém deixa a desejar quando especifica o estudo de matrizes na introdução. Além de não expor uma tabela para a melhor compreensão do aluno, a identificação de elementos, linhas e colunas é feita de modo muito direto, faltando trabalhar com mais detalhes.

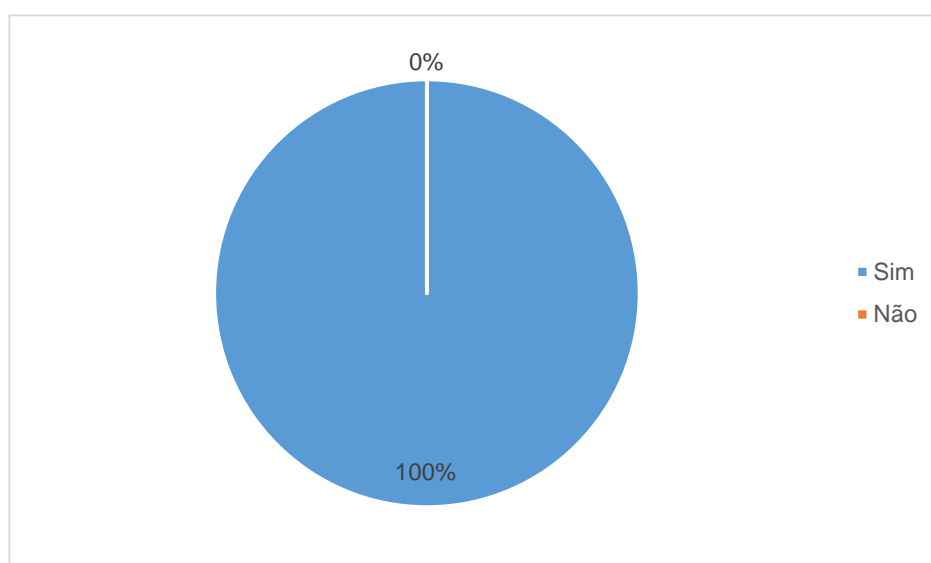


#### 4 ENSINO DE MATRIZES: OPINIÕES DE PROFESSORES EM EXERCÍCIO

Foi elaborado um questionário semiestruturado com o objetivo de servir de instrumento para entrevistar professores de ensino médio que trabalham em escolas de ensino básico de Três Lagoas-MS. As entrevistas foram realizadas com o objetivo de conhecer a opinião do professor sobre o tema matrizes e sua apresentação nos livros didáticos. Foram entrevistados 12 professores que trabalham em escolas da rede pública estadual e particular de Três Lagoas-MS. Os professores declararam ter idade entre 25 e 60 anos, 11 declararam ter formação de Licenciado em Matemática, enquanto um declarou ter formação de Licenciado em Física, o ano de formação deles está entre 1991 e 2017. Dentre os professores, 3 se formaram em universidades federais, 5 em estaduais e 4 em particulares. Os resultados da entrevista são apresentados em formato de gráficos.

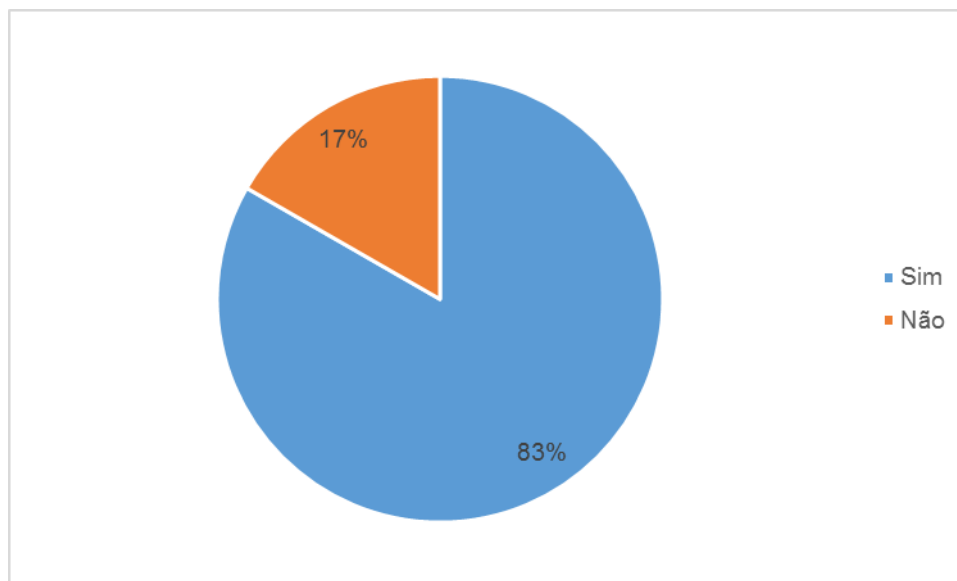
Os gráficos 1 e 2 tem relação com o lugar de exercício da profissão dos professores entrevistados. Assim, o Gráfico 1 mostra que todos os entrevistados afirmaram lecionar na Rede Pública de Ensino da cidade de Três Lagoas, sendo que 83,3% dos professores leciona no 2º ano do Ensino Médio, conforme mostrado no Gráfico 2.

**Gráfico 1** - Leciona ou lecionou como professor (a) de Matemática na Rede Pública de Ensino?



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2018).

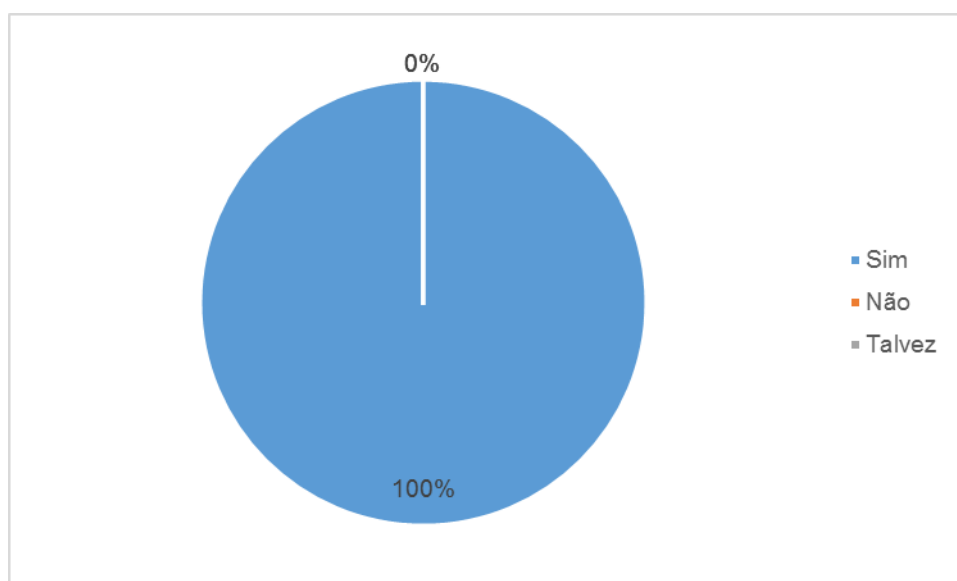
**Gráfico 2** - Leciona ou lecionou como professor (a) de Matemática no 2º ano do Ensino Médio?



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2018).

Em relação à importância do conteúdo em estudo, o gráfico 3 mostra que todos os professores entrevistados consideram o estudo de Matrizes no Ensino Médio importante.

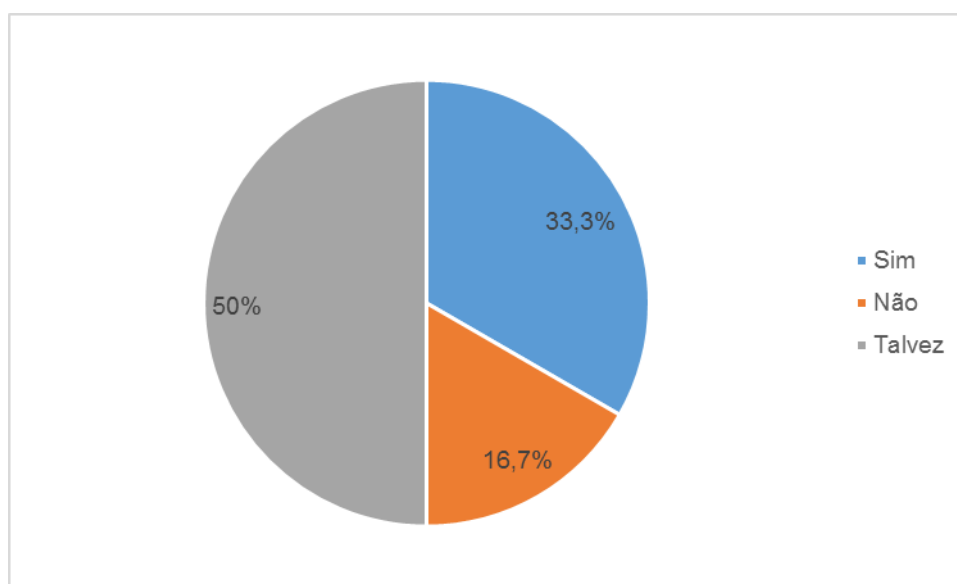
**Gráfico 3** - Você considera importante o estudo de Matrizes no Ensino Médio?



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2018).

Um currículo referenciado em competências supõe que se aceite o desafio de promover os conhecimentos próprios da disciplina articuladamente às competências e habilidades do aluno. É por meio de tais competências e habilidades que os alunos terão capacidade de argumentação consistente, de tomada de decisões consciente e refletida, de problematização e enraizamento dos conteúdos estudados em diferentes contextos e de imaginação de situações novas (BRASIL, 2010). O Gráfico 4 mostra a opinião dos professores ao serem questionados se as competências e habilidades definidas nos Referenciais Curriculares atendem as necessidades dos seus alunos. Os resultados mostram que 50% dos professores responderam que talvez, 33,3% disseram que sim e 16,7% assinalaram que não.

**Gráfico 4** - Você acha que as competências e habilidades estabelecidas nos referenciais curriculares atendem as necessidades de seus alunos?



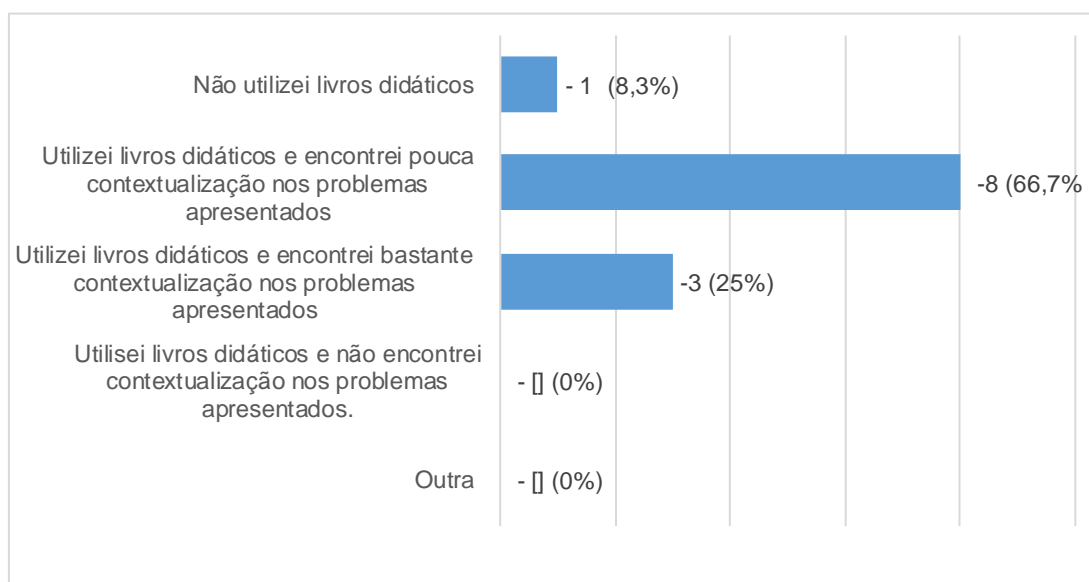
**Fonte:** Elaborado pelo autor (2018).

Foram incluídas questões em relação à utilização de livros didáticos já que existem referências que questionam a qualidade dos mesmos para o ensino de matrizes, em relação a conceitos e contextualização. De fato, Sanches (2002) afirma: percebe-se que os livros didáticos para o auxílio do ensino de matemática, particularmente de matrizes, apresentam confusões conceituais, linguagem inadequada, raras contextualizações e apenas, exercícios repetitivos, prejudicando assim, o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático dos alunos. Tal

dificuldade encontrada pelos professores de Matemática deve ser vista como um estímulo, para que estes busquem novos métodos e, sobretudo, formas práticas da utilização de matrizes no cotidiano dos alunos.

O Gráfico 5 mostra os resultados quanto a utilização de livros didáticos como base para resolver exercícios, um professor respondeu que não utilizou livro didático para a aprendizagem (8,3%); oito professores (66,7%) responderam que usaram livros didáticos e encontraram pouca contextualização nos problemas apresentados e apenas 3 professores (25%) responderam que utilizaram livros didáticos e encontraram bastante contextualização nos problemas apresentados.

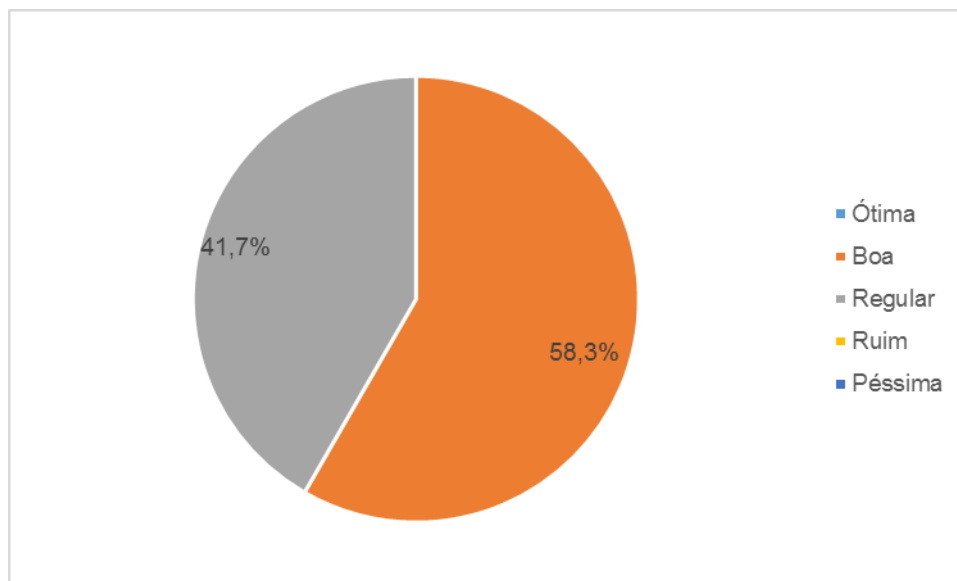
**Gráfico 5** - Você utilizou livros didáticos como base para resolver exercícios?



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2018).

Os professores foram questionados ainda sobre a forma em que são abordados os conteúdos nos livros didáticos disponibilizados pela escola. Conforme os entrevistados, os livros didáticos oferecidos pela escola abordam o conteúdo de Matrizes de maneira razoável, o Gráfico 6 mostra que 58,3% relataram ser abordado de maneira boa, enquanto que 41,7% consideram regular.

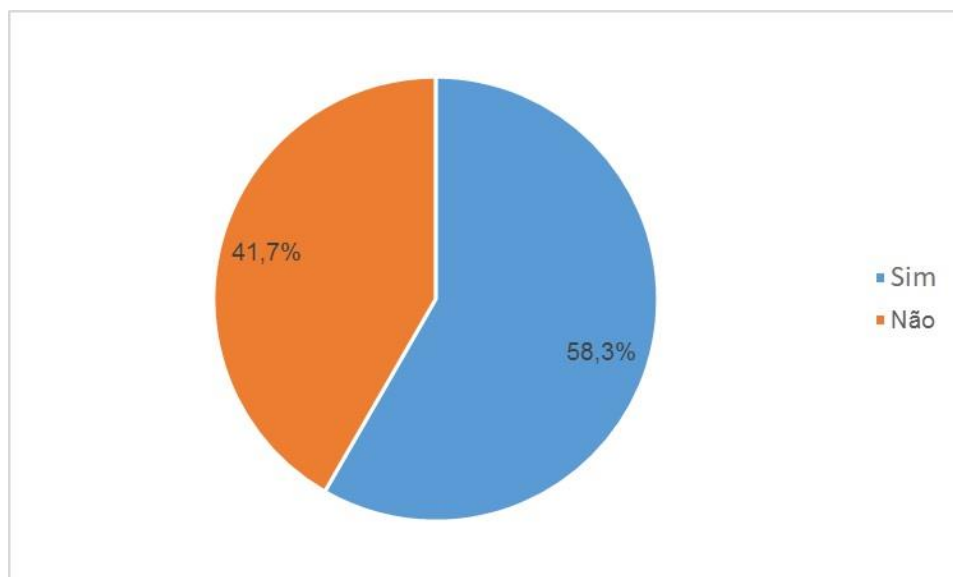
**Gráfico 6** - Os livros didáticos oferecidos abordam o conteúdo de Matrizes de maneira:



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2018).

Quanto à utilização de situações problemas durante o ensino de Matrizes, 58,3% dos entrevistados responderam que utilizam, enquanto 41,7% não utilizam, conforme aponta o Gráfico 7.

**Gráfico 7** - Durante o ensino de Matrizes, você utilizou situações problemas?



**Fonte:** Elaborado pelo autor (2018).

Baseados nas respostas dos professores entrevistados, podemos concluir que, apesar da importância do tema reconhecida por 100% dos entrevistados,

existem vários problemas a serem superados para desenvolver o tema matrizes de maneira significativa. As dificuldades estão associadas à falta de contextualização nos problemas apresentados em livros didáticos, à falta de uso de situações problemas, mas também estão ligadas às competências e habilidades definidas nos referenciais curriculares.

Pensando nestas dificuldades o trabalho apresenta uma proposta de trabalho diferenciado no próximo capítulo, utilizando um jogo para iniciar o conteúdo de matrizes e fixar os primeiros conceitos, bem como o uso de situações problemas em contextos que sejam acessíveis para o aluno.

## 5 PROPOSTA DE TRABALHO DIFERENCIADO

A proposta da educação é que os estudantes tenham a habilidade de reconhecer situações problema do cotidiano que envolvam ferramentas matemáticas e além disso saibam resolvê-las.

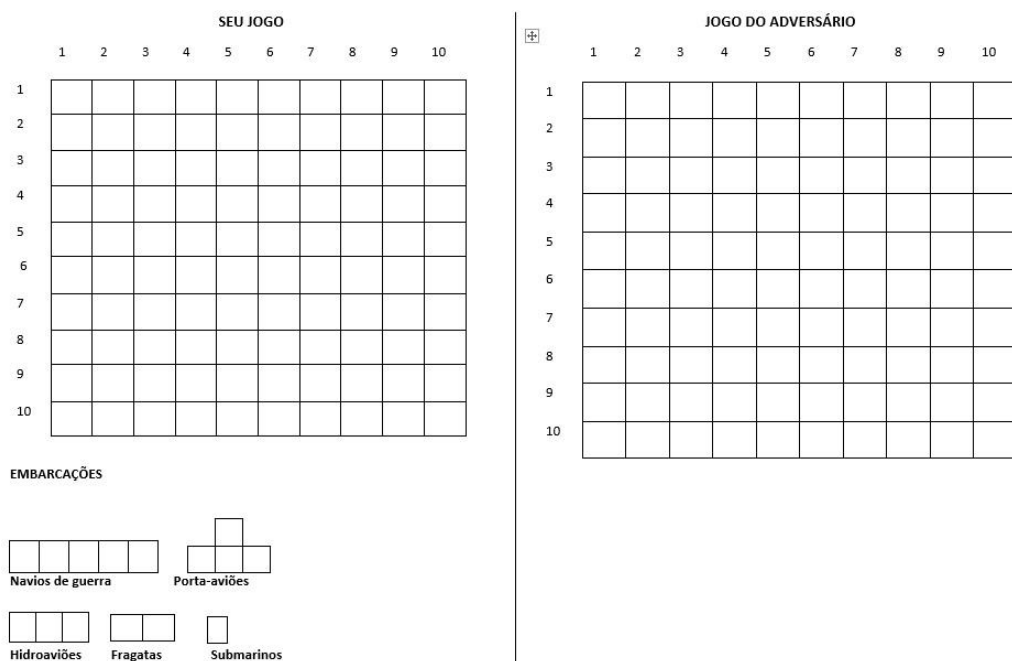
O livro didático disponível na escola traz inicialmente a definição de matrizes e logo em seguida alguns exemplos, não dando tanta importância para a contextualização do conteúdo. Após isso, explica as propriedades de matrizes acompanhadas por alguns exemplos, posteriormente a proposta de exercícios repetitivos para treino, novamente não mostra a aplicação dos conceitos.

Ao planejar as aulas o professor deve levar em consideração os aspectos sociais dos estudantes, o conhecimento prévio que cada um deles traz e a realidade que cada um vive. Ao notar as dificuldades e a resistência que os estudantes apresentaram diante do novo conteúdo, a professora percebeu a necessidade de se utilizar uma ferramenta pedagógica diferenciada, foi escolhido o jogo Batalha Naval, que já é conhecido pela maioria dos estudantes, porém realizado de uma maneira diferenciada.

A atividade foi realizada na Escola Estadual Padre João Tomes, localizada na Vila Piloto da cidade Três Lagoas, no mês de junho de 2017. Participaram da atividade duas turmas de segundo ano de ensino médio, com 40 alunos no total. Para a realização da atividade foi realizado um encontro com duração de 2 horas/aula para cada turma. O objetivo foi utilizar o jogo como ferramenta para incentivar o estudo de matrizes e fixar os primeiros conceitos, bem como a notação utilizada. O trabalho foi desenvolvido em conjunto com duas alunas do Curso de Licenciatura em Matemática do CPTL/UFMS e bolsistas do Programa de Educação Tutorial.

Para o desenvolvimento do jogo, a turma foi dividida em quatro grupos e cada grupo em duas equipes, foi distribuída uma tabela, conforme tabela 3, para cada equipe.

**Tabela 3 – Batalha Naval**



Fonte: Autor (2014).

Foi explicada a construção do tabuleiro que seria utilizado, bem como as regras do jogo e foram entregues pequenas peças representando as embarcações participantes da batalha, entre as quais estavam incluídos porta-aviões, hidroaviões, fragatas e navios de guerra. Cada equipe construiu o tabuleiro que utilizaria seguindo a indicação da professora dada em termos de dimensão de matrizes; em seguida, cada equipe escolheu o posicionamento das embarcações no tabuleiro construído. Finalmente, deram início à batalha naval "atirando nas embarcações da equipe contrária" através da tentativa de identificação da posição de cada uma delas anunciada utilizando notação matricial ("cantando" o número da linha e da coluna que deseja). Caso o tiro acertasse uma embarcação a equipe deveria dizer qual foi a embarcação atingida. Vence a equipe que acabar com todas as embarcações do adversário primeiro.

A professora solicitou aos alunos que no decorrer da atividade utilizassem essa descrição ao "cantar" cada jogada. Ex: Linha 1 – Coluna 3. Foi estipulado



também a ordem dos números a serem falados, primeiro linha e depois coluna, como meio de facilitar a compreensão da teoria a ser estudada em seguida.

Após a finalização da atividade, apresentou-se aos alunos os primeiros conceitos de Matrizes, fazendo uma ligação com a atividade no decorrer da explicação:

- Representação;
- Nomenclaturas e características (linha, coluna, diagonal principal e secundária, elemento, ordem);
- Tipo de matriz: quadrada, identidade, nula, linha, coluna;
- Posição de cada elemento.

Posteriormente a formalização dos conceitos iniciais de Matrizes, a professora utilizou os dados recolhidos anteriormente para o desenvolvimento da próxima atividade.

Realizou-se junto com a turma o levantamento dos dados e pediu que cada grupo organizasse as informações na forma matricial de acordo com o modelo a seguir.

**Tabela 4 – Acertos e erros**

Acertos		
	Equipe 1	Equipe 2
Grupo 1	19	21
Grupo 2	17	19
Erros		
	Equipe 1	Equipe 2
Grupo 1	15	12
Grupo 2	13	11

Fonte: Autor (2014).

Matriz de Acertos

$$A = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 17 & 19 \end{pmatrix}$$

Matriz de Erros

$$E = \begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}$$

A partir do desenvolvimento da aula foi possível avaliar a capacidade dos alunos como meio de identificar uma matriz numérica e suas características; reconhecer e desenvolver os conceitos sobre matrizes em situações-problema; encontrar os elementos de uma matriz, bem como identificá-los de acordo com índices fornecidos.

Os resultados do trabalho realizados foram apresentados na forma de comunicação oral no ENEPE 2017 realizado em Presidente Prudente, sendo publicado nos anais do evento (Brandão, 2017).

**Figura 1** – Participação dos alunos na atividade proposta



Fonte: Autor (2018).

Os alunos ficaram muito interessados, participaram ativamente da aula, acostumando rapidamente com a notação matricial e os elementos da matriz. Tanto

a professora como os alunos fizeram uma avaliação muito positiva da atividade realizada.

Depois de realizado o estudo teórico de matrizes e suas propriedades, a professora sentiu a necessidade de trabalhar com situações problemas para melhor entendimento do conteúdo a consciência da importância e aplicações no dia a dia. Foi escolhido utilizar um problema que descreve uma tabela nutricional para perda de peso.

De acordo com D'Ambrósio (1998) temos que contemplar nossos estudantes com problemas significativos ao invés de situações de exercícios repetitivos e artificiais. Esses exercícios mecânicos desenvolvem apenas a técnica, se o professor propõe situações problemas os estudantes não aprendem apenas a técnica, mas a sua aplicação em situações do seu cotidiano e reconhecer a importância que o mesmo tem para sua vida.

A situação problema desenvolvida com os estudantes está descrita no trabalho de Panciera e Ferreira (2007) e é a seguinte:

Fernando é um aluno que pesa 73 quilos. Ele quer perder peso por meio de um programa de dieta e de exercícios. Após consultar a tabela 1, ele montou o programa de exercícios na tabela 2. Quantas calorias ele vai queimar por dia se seguir esse programa?

**Tabela 5 – Calorias queimadas por hora**

Peso	Caminhar a 3km/h	Correr a 9Km/h	Andar de bicicleta a 9Km/h	Jogar futebol
69	213	651	304	420
73	225	688	321	441
77	237	726	338	468
82	249	764	356	492

Fonte: Panciera, Ferreira (2006).

**Tabela 6 – Horas por dia para cada atividade**

	Caminhar	Correr	Andar de bicicleta	Jogar futebol
Segunda feira	0,0	0,0	1,0	0,0
Terça feira	0,0	0,0	0,0	0,2
Quarta feira	0,4	0,5	0,0	0,0
Quinta feira	0,0	0,0	0,5	2,0
Sexta feira	0,4	0,5	0,0	0,0

Fonte: Panciera, Ferreira (2006).

Os estudantes puderam desenvolver essa atividade em dupla, possibilitando a discussão com os colegas, a troca de informação, além da interação entre os estudantes, sempre com a mediação da professora, que também é muito importante ao longo de todo o processo ensino aprendizagem. Vygotsky (1998) afirma que:

Aquilo que é zona de desenvolvimento proximal hoje, será o nível de desenvolvimento real amanhã – ou seja, aquilo que uma criança pode fazer com assistência hoje, ela será capaz de fazer sozinha amanhã.

Outros problemas foram propostos, tais como a análise de contas de energia das residências dos alunos a partir do trabalho descrito por SILVA (2011), que seguiu os nortes apontados por Biembengut e Hein (2007) e são baseados no desenvolvimento das seguintes etapas:

a) Interação

- Reconhecimento da situação-problema;
- Familiarização com o assunto a ser modelado -> pesquisa do tema.

b) Matematização

- Formulação do problema;
- Resolução do problema em termos do modelo.

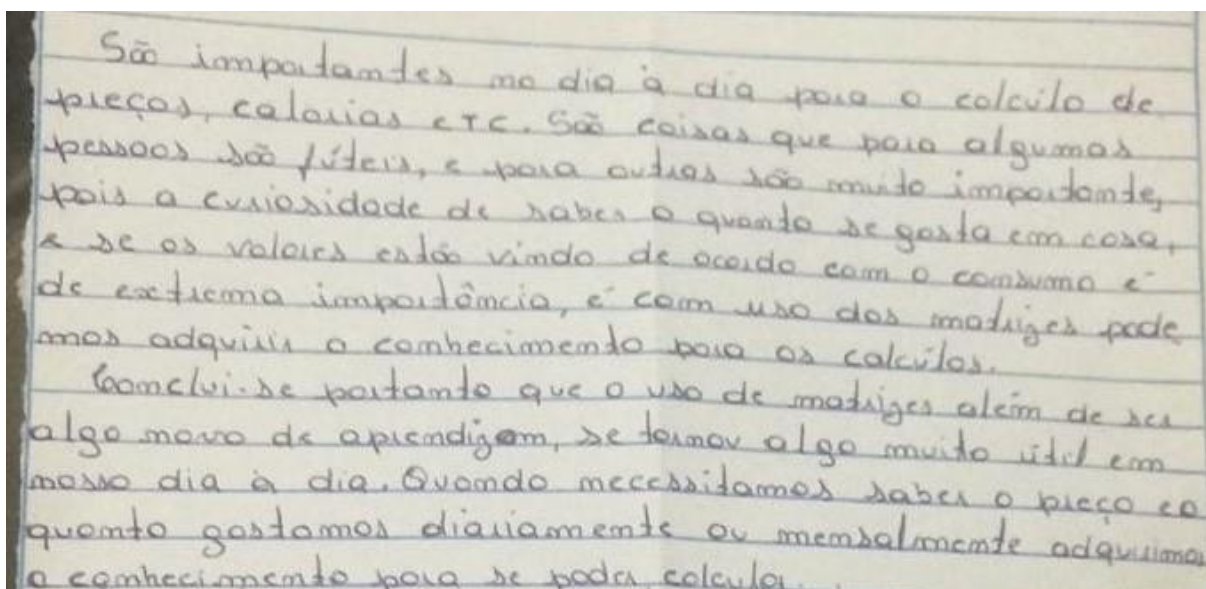
c) Modelo Matemático

- Interpretação da solução;
- Validação do modelo.

Partindo dessa ideia, a professora decide ser uma pessoa mediadora do conhecimento, dando a liberdade ao aluno e auxiliando-o, indicando alguns possíveis caminhos, ao invés de dar problemas seguidos de respostas já acabadas. Além de propor a elaboração de novas situações problemas em que o conteúdo pode ser desenvolvido.

Um dos estudantes apontou que as matrizes são importantes no dia a dia para o cálculo de preços, calorias, etc. São coisas que para algumas pessoas são fúteis, e para outras são muito importante, pois a curiosidade de saber o quanto se gasta em casa, e se os valores estão vindo de acordo com o consumo é de extrema importância, e com o uso das matrizes podemos adquirir o conhecimento para os cálculos. Conclui-se, portanto, que o uso de matrizes além de ser algo novo de aprendizagem, se tornou algo muito útil em nosso dia a dia. Quando necessitamos

saber o preço e quanto gastamos diariamente ou mensalmente adquirimos o conhecimento para se poder calcular.



Na opinião de outro aluno, as matrizes foram um dos conteúdos que deu para entender mais, para alguns alunos foi meio dificultoso, mas para os outros foi excelente, pois, além de ser fáceis eles vão ser muito importante para nós, para cálculos, trabalhos entre outras coisas. Vimos também sobre os sistemas lineares, podemos usar no nosso dia a dia como por exemplo, se quisermos saber o preço de algo ou quanto gastamos é só jogar no sistema linear, que saberemos tudo. Esse foi um conteúdo que mais gostei e que levarei para toda vida.

As matrizes foi um dos conteúdos que deu  
para entender mais, para alguns alunos  
foi meio difícil mas para os outros foi  
excelente. Por, além de ser fácil eles  
vão ser muito importante para nós, para  
cálculos, trabalhos e de outras coisas.  
Vimos também sobre os sistemas lineares,  
podemos usar no nosso dia a dia como por  
exemplo, se queremos saber o preço de algo  
ou o quanto gastamos e só jogamos no sistema  
linear que saberemos tudo. Esse foi um  
conteúdo que mais gostei e que levarei  
para toda vida.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo das matrizes no Ensino Médio de um modo geral é focado na técnica de operações e pouco se recorre à situação – problema e contextualização. Tal abordagem não permite ao aluno notar a aplicabilidade deste conteúdo, o que pode ser considerado um fator nada favorável em sua aprendizagem.

Partindo do objetivo de introduzir o jogo Batalha Naval, com meio de auxiliar o estudo inicial de matrizes, permitindo que o aluno se familiarize com a notação matricial e os elementos da matriz, foi possível avaliar a capacidade dos alunos como meio de identificar uma matriz numérica e suas características; reconhecer e desenvolver os conceitos sobre matrizes em situações-problema; encontrar os elementos de uma matriz, bem como identificá-los de acordo com índices fornecidos. Os alunos ficaram muito interessados, participaram ativamente da aula, acostumando rapidamente com a notação matricial e os elementos da matriz. Tanto a professora como os alunos fizeram uma avaliação muito positiva da atividade realizada.

O jogo ajudou o docente a despertar maior interesse em seus alunos pelo conteúdo e melhor aprendizagem, bem como a promoção de discussões e reflexões a respeito do estudo das matrizes no ensino médio.



## REFERÊNCIAS

BRASIL, MEC, SEB. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEB, 2006.

BRASIL. São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Ciências Humanas e suas tecnologias / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Paulo Miceli. – São Paulo: SEE, 2010

BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

BERBEL, N. A. N. **Metodologia da Problematização no Ensino Superior e sua contribuição para o plano da praxis**. Semina: v.17, n. esp., p.7-17, 1996.

BERBEL, N. A. **Metodologia da Problematização: uma alternativa metodológica apropriada para o Ensino Superior**. Semina: Londrina, v. 16, n. 2, n esp., p.9 -19, 1995.

BEZERRA, J. M. **Matemática para o ensino médio**. São Paulo: Scipione, 2010.

BRANDÃO, P.C.; MAGALHÃES, C. T.; FREITAS, T.S.C.; URIBE, E.B.O. **Jogo Batalha Naval: Um recurso para o ensino de matrizes**. Anais do Encontro Nacional de Ensino, Pesquisa e Extensão – ENEPE. Presidente Prudente, 23 a 26 de outubro, 2017. ISSN: 1677-6321.

CRUZ, L. F.; CHUEIRI, V. M. M. ; GONCALVES, E. M. . **INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA ÁLGEBRA LINEAR**. 1. ed. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2013. v. 1. 326p .

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**. São Paulo: Ática, 1998.

FERNANDES, R.S.; SILVA,N.; CARDOSO, A. Livros didáticos não contemplam as aplicações de matrizes. Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 5, N. 1, 2017.

GENTIL, N; SANTOS, J. C. A; BELLOTTO, A. **Matemática para o 2º grau**. São Paulo: Ática, 1998.

GIL, A. C. **Como elaborar Projetos de Pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GIOVANNI, José R; BONJORNIO, José R. **Matemática Fundamental**. São Paulo: FTD, 1994.

IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar Vol. 6 e 4 São Paulo, SP: Ed. Atual, 1998.



LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Metodologia científica**. 6.ed. São Paulo: Atlas, 2011.

MACHADO, Antônio dos Santos. Matemática: sistemas lineares e combinatória. São Paulo, SP: Atual, 1986.

MATO GROSSO DO SUL. Secretaria de Estado de Educação. **Plano Estadual de Educação de Mato Grosso do Sul (2014 – 2024)**. Campo Grande, 2014.

MENEGHETI, G; Redling; J. P. Tarefas Alternativas para o Ensino e a Aprendizagem de Funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio. Bolema, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42A, p. 193-229, abr. 2012.

MOURA, I. M. Contextualização de Matrizes Para o Ensino Médio. 2014. 68f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional Jataí, Jataí, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - Profissional), Jataí.

NASCIMENTO, Camila Ruiz do; PHILIPPSEN, Adriana Strieder. Resolvendo problemas de matrizes como desafio para a educação matemática no ensino médio. Disponível em: <[http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospede/pdebusca/producoes\\_pde/2014/2014\\_unespar-paranavai\\_mat\\_artigo\\_camila\\_ruiz.pdf](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospede/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unespar-paranavai_mat_artigo_camila_ruiz.pdf) 2014> Acesso em: 10 set. 2018.

PANCIERA, L.M.; FERREIRA, M.V. A modelagem matemática no ensino de matrizes e sistemas lineares. Jan/2007, Florianópolis - SC. 9p. Artigo. Disponível em: <<http://www.mtm.ufsc.br/daniel/7105/A%20MODELAGEM%20MATEM%C3%81TICA%20NO%20ENSINO%20DE%20MATRIZES.pdf>>. Acesso em: 07 mar. 2018

SANCHES, M.H.F. Efeitos de uma estratégia diferenciada dos conceitos de matrizes. 2002. 135f. Dissertação (Mestrado em educação matemática) UNICAMP, São Paulo. Disponível em: <[http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/253429/1/Sanches\\_MariaHelenaFigueiredo\\_M.pdf](http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/253429/1/Sanches_MariaHelenaFigueiredo_M.pdf)> Acesso em: 15 set. 2018.

SANTOS, J. A; FRANÇA, K. V; SANTOS, L. S. B. **Dificuldades na aprendizagem de matemática**. 2007. 41f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Adventista de São Paulo, São Paulo.

SILVA, A.Q.; ALVES, E.M.S.; NASCIMENTO, M.A.C.S. **O Ensino de Multiplicação de Matrizes por Meio de Contas de Energia Elétrica: Uma Experiência na Educação de Jovens E Adultos (EJA)**. II CNEM – Congresso Nacional de Educação Matemática. 2011.

SILVA, J. V.S. Aplicações de matrizes no ensino médio. 2014. 50F. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Estadual do Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.