UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Flávio Coêlho dos Santos

A utilização de frações contínuas na construção do calendário ocidental moderno

São Luís - MA

2018

Flávio Coêlho dos Santos

A utilização de frações contínuas na construção do calendário ocidental moderno

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jairo Santos da Silva.

São Luís - MA

2018

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Santos, Flávio Coêlho dos.
A utilização de frações contínuas na construção do calendário ocidental moderno / Flávio Coêlho dos Santos. - 2018.
58 p.

Orientador(a): Jairo Santos da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, UFMA, 2018.

1. Calendário. 2. Frações contínuas. 3. Sequências numéricas. I. Silva, Jairo Santos da. II. Título.

Flávio Coêlho dos Santos

A utilização de frações contínuas na construção do calendário ocidental moderno

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jairo Santos da Silva.

Aprovada em: 13/09/2018

Banca Examinadora

Jairo Santos da Silva

Prof. Dr. Jairo Santos da Silva - UFMA
Orientador

Prof. Dr. Antonio José da Silva - UFMA
Avaliador Interno ao Programa

Prof. Dr. Marcos Antonio Ferreira de Araújo - UFMA
Avaliador Interno ao Programa

Prof. Dr. Gerard John Alva Morales - UFMA
Avaliador Externo ao Programa

Agradecimentos

À Deus, a quem dedico todos os momentos da minha vida.

À minha mãe Valdecira Coêlho dos Santos, pelo apoio, pois sem ela eu não teria a tranquilidade para concluir mais uma etapa da minha vida.

Ao professor e orientador, Prof. Dr. Jairo Santos da Silva, pela paciência, incentivo, apoio e confiança em todos os momentos.

Ao amigo Framilson José Ferreira Carneiro pelo compartilhamento do seu acervo bibliográfico e auxilio durante o desenvolvimento desta dissertação.

Aos colegas e amigos da turma do curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), por terem contribuído de uma forma indireta na realização deste trabalho.

A todos os professores do curso pelo aprendizado.

E finalmente, à CAPES, pelo apoio financeiro.

“O calendário é intolerável para toda a sabedoria, o horror de toda a astronomia, e objeto de riso do ponto de vista do matemático”

Roger Bacon

Resumo

A presente dissertação tem como objetivo apresentar a importância das Frações Contínuas e explorar o contexto histórico de seu desenvolvimento. Para tanto, inicia-se uma discussão sobre o algoritmo de Euclides, revisitam-se os estudos de vários matemáticos, para enfim chegarmos à composição das frações como a conhecemos e utilizamos hoje. Conceitos básicos de sequências numéricas serão igualmente abordados, pois são de essencial importância para a compreensão das frações contínuas. Em seguida, será feito um estudo acerca da teoria das Frações Contínuas e seus principais resultados. Finalmente, numa abordagem mais prática, será demonstrado uma aplicação da teoria das frações contínuas na construção de um calendário.

Palavras-chave: Frações contínuas. Sequências numéricas. Calendário.

Abstract

This dissertation aims to present the importance of Continued Fractions and to explore the historical context of their development. For this, a discussion about the Euclid algorithm is initiated, the studies of several mathematicians are revisited, in order to arrive at the composition of the fractions as we know them and use them today. Basic concepts of numerical sequences will also be addressed, as they are of essential importance for the understanding of continued fractions. Then, a study will be done about the Continued Fractions theory and their main results. Finally, in a more practical approach, it will be demonstrated an application of the continued fractions theory in the construction of a calendar.

Keywords: Continued fractions. Numerical sequences. Calendar

Sumário

Introdução

As frações contínuas desempenham um papel essencial na matemática atual. Em princípio, constituem uma ferramenta muito importante para novas descobertas na teoria dos números, conhecidos como Análise Diofantina. Além disso, também existe a importante generalização das frações contínuas, a saber, a Teoria Analítica das Frações Contínuas, uma extensa área para pesquisa presente e futura. No campo computacional, as frações contínuas são usadas para dar aproximações a várias funções complicadas, e uma vez codificadas para as máquinas eletrônicas, fornecem resultados numéricos tão rápidos quanto valiosos para os cientistas e para aqueles que trabalham em campos matemáticos aplicados.

O desenvolvimento do conceito de uma fração contínua tem base no algoritmo euclidiano, um processo para se achar o Máximo Divisor Comum (M.D.C) de dois números inteiros - que é essencialmente um método para converter uma fração em uma fração contínua. Possui tal nomenclatura porque se encontra no início do Livro VII dos Elementos de Euclides, o "pai" da Geometria, embora o processo em si, sem dúvida, fosse conhecido muito tempo antes. Esse algoritmo, facilmente identificado nos fundamentos de vários progressos da matemática moderna, enunciado em forma de regra exprime o seguinte: Divida o maior dos dois números inteiros positivos pelo menor e então divida o divisor pelo resto. Continue esse processo de dividir o último divisor pelo último resto, até que a divisão seja exata (CAJORI, 2007).

O já citado procedimento de Euclides para encontrar o (M.D.C) de dois números é, inquestionavelmente, um primeiro passo importante no desenvolvimento do conceito de uma fração contínua. Seguido dele, vemos no trabalho do matemático indiano Aryabhata (476-550) uma das primeiras tentativas na solução geral de uma equação indeterminada linear pelo uso de frações contínuas. No entanto, apesar de utilizar tais referências para resolver Equação Diofantina Linear, ou seja, encontrar as soluções inteiras de equações com uma ou mais incógnitas, Aryabhata descuidou em apresentar um método geral.

Enquanto isso, Rafael Bombelli (1526-1572) insere em seu livro Álgebra, por volta de 1575, um capítulo sobre raízes quadradas. Bombelli utilizou este tipo de fração para aproximar raízes quadradas. Em nosso simbolismo moderno, ele demonstrou, por exemplo, que

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6+}\frac{4}{6+\cdots}$$

indicando que provavelmente ele conhecia a seguinte relação

$$\sqrt{a^2+b^2} = a + \frac{b}{2a+}\frac{b}{2a+\cdots}.$$

Já Pietro Antonio Cataldi (1548-1626), em um tratado sobre a teoria das raízes expressou $\sqrt{18}$, em meados de 1613, da seguinte forma:

$$4. + \cfrac{2}{8._{\&}\cfrac{2}{8._{\&}\cfrac{2}{8}}}.$$

Por conveniência ele modificou para:

$$4.\&\frac{2}{8.}\&\frac{2}{8.},$$

e atualmente a notação é a seguinte:

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{2}{8+}\frac{2}{8+\cdots}.$$

No século seguinte, já em 1618, Daniel Schwenter (1585-1636), professor de hebraico, línguas orientais e matemática na Universidade de Altdorf, na Alemanha, apresenta o estudo Geometria Prática. Ali ele obtém aproximações de 177/233 encontrando o máximo divisor comum de 177 e 233. A partir desses cálculos ele determinou os convergentes para as seguintes frações: 79/104, 19/25, 3/4, 1/1 e 0/1.

Contemporâneo de Schwenter, John Wallis (1616-1703) publica alguns anos mais tarde, mais precisamente em 1655, seu maior trabalho: Arithmetica Infinitorum. Pela aplicação da análise ao método dos indivisíveis, ele aumentou amplamente o poder deste instrumento para efetuar quadraturas. Criou a concepção aritmética de um limite por considerar valores sucessivos de uma fração, obtida no estudo de certas razões. Esses fatores fracionários aproximam-se monotonamente de um valor limite, de modo que a diferença se torne menor do que qualquer valor arbitrário e desaparece quando o processo é levado ao infinito (CAJORI, 2007).

O símbolo do infinito é devido a Wallis. Estudando a quadratura do círculo chegou a expressão para o valor de π . Procurando resolver uma questão em particular por interpolação, um método do qual foi precursor, chegou a seguinte expressão:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \times 9 \cdots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 8 \times 1 \cdots}.$$

Ele mesmo não conseguiu fazer a interpolação, porque não empregou expoentes literais ou gerais, e não pôde conceber uma série com mais do que um termo e menos do que dois; o que pareceu a ele possuir uma série interpolada.

Wallis mantinha relações com William Brouncker (1620-1684), um dos fundadores e o primeiro presidente da Real Sociedade de Londres para o Melhoramento do Conhecimento Natural. Lord Brouncker escreveu sobre a retificação da parábola e da cicloide e usava séries infinitas para expressar quantidade que não podia determinar de outra maneira. Ele foi o primeiro britânico a investigar e usar propriedades das frações contínuas. Ele ainda converteu o resultado de Wallis, em relação ao desenvolvimento de $4/\pi$, na seguinte e interessante fração contínua:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cdots}}}.$$

A expressão de Brouncker deu nascimento a Teoria das Frações Contínuas (EVES, 2004).

O próximo escritor a lidar com frações continuas de maneira notável foi o grande matemático e físico holandês Christiaan Huygens (1629-1695). Huygens, que também exercia a função de mecânico, começou a desenvolver um Planetário mecânico para a Academia Roial de Ciências. Para isso, valeu-se das frações contínuas com o objetivo de aproximar o design correto para as rodas dentadas desse planetário. Em seu tratado "Descriptio Automati Planetarii", ele detalha os métodos de usar convergências de frações contínuas para encontrar a melhor aproximação dos racionais para relações de engrenagem. Essas aproximações permitiram que ele escolhesse as engrenagens com o número correto de dentes em 1682, quando ele finalmente concluiu este projeto (EVES 2004).

Seguindo a trajetória do desenvolvimento da Teoria das Frações Contínuas, é importante destacar o grande livro de memórias de Leonhard Euler (1707-1783), "Fractionibus Continius (1737)", responsável por lançar as bases para a teoria moderna. O processo de redução de Euler de a/b para uma fração contínua equivale ao mesmo que o processo hindu de encontrar o maior divisor comum de a e b por divisão, chamado frequentemente de o método de Diofantina. Essas equações provavelmente surgiram de problemas na astronomia. Elas foram aplicadas, por exemplo, para determinar o momento em que uma certa constelação dos planetas ocorreria nos céus (CAJORI, 2007).

Outro singular documento que merece menção é de autoria de Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Nascido em Mulhouse, na Alsácia (antiga região administrativa da França, localizada a leste do país), era filho de um pobre alfaiate. Enquanto trabalhava no negócio do pai, autodidata que era, adquiriu conhecimento acerca de matemática elementar. Em 1764 estabeleceu-se em Berlim, onde se tornou membro da Academia. Desfrutando da convivência com L. Euler e J. Lagrange e consequentemente influenciando o trabalho destes, fez diversas pesquisas em matemática pura. Em 1761 encaminhou à Academia de Berlim uma memória - posteriormente publicada em 1768 - na qual ele prova rigorosamente que π é um número irracional. Esta prova é inclusive apresentada de forma simplificada na nota IV da Géométrie, de autoria do matemático francês Adrien-Marie Legendre. As demonstrações de Lambert repousaram na expressão para o número e como uma fração contínua dada por Euler, que em 1737 mostrou substancialmente a irracionalidade de e (EVES, 2004).

Finalmente, mas não menos importante, citamos a contribuição de Joseph Louis Lagrange (1736-1813), um dos maiores matemáticos de todos os tempos, de origem francesa assim como Lambert. Enriqueceu a Álgebra pela pesquisa sobre a solução de equações. No seu Réflexions sur la résolution algébrique des équations (Reflexões sobre a resolução algébrica das equações), publicado nas Memórias da Academia de Berlim entre os anos de 1770 e 1771, Lagrange esboçou todas as soluções conhecidas de equações algébricas, usando o princípio uniforme que consiste na formação e solução de equações de grau menor cujas raízes são funções lineares das raízes procuradas, e das raízes da unidade, mostrando que a quíntica não pode ser reduzida deste modo, pois sua resolvente é do sexto grau. Sua contribuição foi além por meio do ensaio Sur la résolution des équations numériques (Sobre a resolução das equações numéricas), onde passa a desenvolver um novo modo de obter valores aproximados para as raízes, ou seja, frações contínuas; e com seu Additions. Este último apresenta maiores detalhes que o exercício anterior, datado de 1767. Diferente dos métodos de aproximação mais antigos, o de Lagrange não apresentou casos de falha do método. Ele demonstrou que as raízes irracionais de equações quadráticas têm expansão periódica na forma de fração contínua (CAJORI, 2007).

O que podemos notar até aqui é que a Teoria das Frações Contínuas foi desenvolvida ao longo dos tempos com a contribuição de grandes matemáticos até chegar como a conhecemos hoje.

Atualmente, o tema se mostra essencial no campo da matemática elementar, tendo aplicação tanto na Matemática Pura quanto nas chamadas Ciências Aplicadas. São ferramentas essenciais, por exemplo, na teoria de aproximação de números reais por números racionais. Além disso, frações contínuas é um dos tópicos próprios da Educação Superior, mas que por possuir diferentes aplicações é possível ser perfeitamente adaptado e trabalhado no ensino médio, diminuindo assim a distância que existe entre essas duas modalidades de ensino.

Neste sentido, a temática torna-se relevante devido ao fato de ser uma ferramenta muito versátil para resolver problemas relacionados com movimentos que envolvem dois períodos distintos.

O presente trabalho tem como principal objetivo explorar a teoria das frações contínuas, suas propriedades e seu uso na construção de um calendário moderno. O mesmo está organizado em três capítulos como segue.

O Capítulo 1 é dedicado a um sucinto estudo das sequências numéricas, partindo de seus conceitos e resultados fundamentais, tendo por objetivo a aplicação desse aprendizado na teoria das frações contínuas.

No Capítulo 2, daremos ênfase as frações racionais que podem ser expandidas para as frações contínuas, sendo gradativamente introduzida uma notação mais geral, bem como a exposição de alguns teoremas que serão provados. Além disso, discorreremos sobre a expansão de números irracionais em frações contínuas infinitas que podem ser utilizadas para propor melhores aproximações dos números racionais aos irracionais e aos convergentes.

Finalmente, no último capítulo, deste trabalho, faremos uso da teoria de frações contínuas para fins de uma aplicação. Com isso, pretende-se mostrar a importância dessa ferramenta matemática na construção do calendário ocidental moderno, sendo este o objetivo final da pesquisa.

Capítulo 1

Sequências Numéricas

Neste capítulo, apresentamos de maneira objetiva os principais conceitos, definições e resultados necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Os resultados serão fornecidos sem demonstrações, pois não é o objetivo principal deste trabalho, mas deixaremos as referências onde podem ser encontradas.

1.1 Conceitos preliminares

Definição 1.1. *Uma sequência ou sucessão de números reais é uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real $f(n)$.*

O valor da sequência f no número natural n é denominado n-ésimo termo ou termo geral da sequência f e é representado genericamente por a_n, b_n, x_n etc. Faremos referência ao termo geral x_n como sendo a sequência f tal que $f(n) = x_n$.

Assim, uma sequência numérica nada mais é do que uma lista ordenada infinita de números reais.

Utilizaremos a seguinte notação para representarmos uma sequência numérica:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, ...)$$

ou

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ou simplesmente,

$$(x_n)$$

em que x_1 é o primeiro termo e x_n é o termo de ordem n. Em se tratando de uma lista infinita cada termo x_n tem um sucessor x_{n+1} e uma sequência pode ser representada pelo seu termo geral ou explicitando-se seus primeiros termos.

Observação 1.1. *Na definição* 1.1 *estamos considerando* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Descreveremos uma sequência numérica, quando necessário, por meio da fórmula do termo geral x_n, quando houver.

A imagem da sequência numérica é formada pelo conjunto de todos os valores x_n, e pode ser um conjunto finito ou infinito.

Exemplo 1.1. $(2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots)$ *representa uma sequência numérica, com primeiro termo* $x_1 = 2$, *e termo geral dado por* $x_n = 2n$.

Exemplo 1.2. $(1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots)$ *representa uma sequência numérica, com primeiro termo* $x_1 = 1$, *e termo geral dado por* $x_n = 1/n$.

No Ensino Médio nos deparamos com alguns exemplos importantes de sequências numéricas. Dentre elas podemos citar a Progressão Aritmética e a Progressão Geométrica, definidas a seguir.

Definição 1.2. *Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência numérica na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra* r.

Em uma progressão aritmética $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, para avançar um termo, basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. O termo geral de uma progressão aritmética é dado por um polinômio em n,

$$x_n = x_1 + (n-1)r = rn + (x_1 - r).$$

Em virtude do termo geral de uma progressão aritmética ser um polinômio podemos levar em consideração dois casos:

1. Se $r \neq 0$, ou seja, se a progressão não for estacionária (constante), esse polinômio é de grau 1.

2. Se $r = 0$, ou seja, se a progressão for estacionária (constante), esse polinômio é de grau menor que 1.

Exemplo 1.3. *As seguintes sequências* $(2, 5, 8, 11, \ldots)$ *e* $(7, 12, 17, 22, \ldots)$ *são progressões aritméticas cujas razões valem, respectivamente,* 3 *e* 5.

Exemplo 1.4. *Há dois tipos de anos bissextos: os que são múltiplos de* 4 *mas não de* 100 *e os que são múltiplos de* 400. *Quantos são os anos bissextos entre* 1582 *e* 2401*? São múltiplos de* 4 *os anos* $(1600, 1604, 1608, \ldots, 2400)$, *ou seja, temos uma progressão aritmética em que o primeiro termo* $x_1 = 1600$, *o último termo* $x_n = 2400$ *e a razão* $r = 4$. *Para sabermos quantos são os anos múltiplos de* 4 *entre* 1582 *e* 2401 *utilizamos a seguinte expressão:*

$$x_n = x_1 + (n-1)r.$$

Fazendo os cálculos encontramos $n = 201$ *que representa a quantidade de anos que são múltiplos de* 4, *mas os anos* $1700, 1800, 1900, 2100, 2200, 2300$ *não são bissextos por serem múltiplos de* 100, *mas não de* 400. *Portanto, temos* 195 *anos bissextos.*

Teorema 1.1. *A soma dos* n *primeiros termos de uma progressão aritmética* $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ *é:*

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n)n}{2}.$$

Demonstração: Veja, MORGADO e CARVALHO (2015). ■

Exemplo 1.5. *Qual é o valor da soma dos* 20 *primeiros termos da progressão aritmética* $(2, 6, 10, \ldots)$*? Como a razão* r *da progressão aritmética é* 4, *o vigésimo termo da sequência numérica é dado por*

$$x_{20} = x_1 + 19r = 2 + 76 = 78.$$

Logo, pelo Teorema 1.1, a soma dos vinte primeiros termos é

$$S_{20} = \frac{(2 + 78)20}{2} = 800.$$

Definição 1.3. *Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica em que o quociente entre um termo e seu antecessor é constante. Esse quociente é uma constante não nula chamada razão.*

Em uma progressão geométrica $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, para avançar um termo basta multiplicar pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante. Considerando q a razão, temos a seguinte relação:

$$x_n = x_1 q^{n-1}.$$

Exemplo 1.6. *As sequências* $(2, 6, 18, 54, 162, \ldots)$ *e* $(512, 128, 32, 8, 2, \ldots)$ *são progressões geométricas cujas razões valem, respectivamente,* $q_1 = 3$ *e* $q_2 = 1/4$.

Teorema 1.2. *A soma dos* n *primeiros termos de uma progressão geométrica* (x_n) *de razão* $q \neq 1$, *é*

$$S_n = x_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Demonstração: Veja, MORGADO e CARVALHO (2015). ■

Exemplo 1.7. *Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa* 1 *grão de trigo pela primeira casa,* 2 *grãos pela segunda,* 4 *grãos pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada casa nova. Sabendo que o tabuleiro de xadrez tem* 64 *casas, o número de grãos pedidos pelo inventor do jogo é a soma dos* 64 *primeiros termos da progressão geométrica* $(1, 2, 4, 8, \ldots)$, *onde o primeiro termo* $x_1 = 1$ *e a razão* $q = 2$. *Utilizando o Teorema* 1.2, *temos*

$$S_n = x_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1.$$

Portanto, a recompensa foi de $2^{64} - 1$ *grãos.*

1.1.1 Sequências limitadas

Definição 1.4. *Uma sequência* (x_n) *é dita limitada superiormente quando existir um número real* M, *denominado cota superior da sequência, que atenda a seguinte condição:*

$$x_n \leq M,$$

para todo e qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.8. *A sequência de termo geral* $x_n = 1 - n^2$ *é limitada superiormente. Neste caso, qualquer número não negativo é cota superior de* $\{x_n\}_{n \geq 1}$ *e a menor das cotas superiores é* $M = 0$.

Definição 1.5. *Uma sequência* (x_n) *é dita limitada inferiormente quando existir um número real* m*, denominado cota inferior da sequência, que atende à seguinte condição:*

$$m \leq x_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$*.*

Exemplo 1.9. *A sequência de termo geral* $x_n = n$ *não é limitada superiormente, mas é inferiormente, sendo* 1*, ou qualquer número menor que* 1*, uma cota inferior de* $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$*. A maior das cotas inferiores de* $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$ *é* $m = 1$*.*

Definição 1.6. *Uma sequência* (x_n) *é dita limitada quando o for superior e inferiormente, isto é, quando existir uma constante positiva* C *tal que:*

$$|x_n| \leq C,$$

para todo e qualquer $n \in \mathbb{N}$*.*

Exemplo 1.10. *A sequência de termo geral* $x_n = (-1)^n$ *é limitada, visto que* $|x_n| = 1$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

1.1.2 Sequências monótonas

Definição 1.7. *Uma sequência* (x_n) *é denominada crescente quando* $x_n < x_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, isto é,* $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots$*. Se vale* $x_n \leq x_{n+1}$ *para todo* n*, a sequência é chamada não decrescente.*

Exemplo 1.11. *A sequência* $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right)$ *é crescente. Já a sequência* $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots)$ *é crescente, mas não estritamente crescente, isto é, é uma sequência não decrescente.*

Definição 1.8. *Uma sequência* (x_n) *é denominada decrescente quando* $x_{n+1} < x_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, isto é,* $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots$*. Ela é chamada não crescente quando* $x_{n+1} \leq x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Exemplo 1.12. *A sequência* $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ *é decrescente. Por outro lado,a sequência* $\left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$ *é não crescente já que decresce, mas não de forma estrita.*

Observação 1.2. *As sequências crescentes, não decrescentes, decrescentes e não crescentes são chamadas sequências monótonas.*

1.2 Convergência de sequências

Definição 1.9. *Dizemos que uma sequência* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *converge para um número real* l *quando, fixado arbitrariamente um erro* $\epsilon > 0$ *para o valor de* l*, existir um índice* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_n - l| < \epsilon$*, para todo* $n > n_0$*.*

Alternadamente, se $(x_n)_{n\geqslant 1}$ convergir para l, diremos que a sequência é convergente e que l é o limite da mesma, fato que denotaremos escrevendo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

ou

$$x_n \to l.$$

Uma sequência que não converge para real algum será dita divergente.

Exemplo 1.13. *A sequência* $(x_n)_{n\geq 1}$*, dada por* $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$*, converge para 0. De fato,*

$$x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \tag{1.1}$$

Assim, dado $\epsilon > 0$*, e tomando* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n_0 > 1/4\epsilon^2$*, temos*

$$n > n_0 \Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n_0+1} + \sqrt{n_0} > 2\sqrt{n_0} > \frac{1}{\epsilon}.$$

Daí, usando (1.1)*, obtemos*

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - 0| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \epsilon.$$

Teorema 1.3. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Veja, MUNIZ NETO (2015). ■

Exemplo 1.14. *A sequência* $(1, 2, 3, 4, \ldots)$*, onde* $x_n = n$*, não é convergente pois não é limitada.*

Teorema 1.4. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Veja, MUNIZ NETO (2015). ■

Exemplo 1.15. *A sequência cujo n-ésimo termo é* $x_n = 1/n$ *é monótona decrescente, já que*

$$x_1 = 1 > x_2 = \frac{1}{2} > x_3 = \frac{1}{3} > \ldots > x_n = \frac{1}{n} \ldots$$

e também limitada, pois $|x_n| = |1/n| = 1/n \leq 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots$. *Dessa forma, pelo Teorema* 1.4, $x_n = 1/n$ *é convergente. Neste caso,*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0.$$

Com efeito, dado $\epsilon > 0$, *tomando* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n_0 > 1/\epsilon$, *temos*

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Capítulo 2

Frações Contínuas

Neste capítulo, apresentamos os principais resultados referentes a teoria das frações contínuas. Para mais detalhes, sugerimos, por exemplo: ANDRADE e BRACCIALI (2005), CHIHARA (1978), MORGADO e CARVALHO (2015), NIVEN (1990), OLDS (1963), WALL (1948).

2.1 Conceitos preliminares

Quando nos deparamos com a equação quadrática

$$x^2 - 5x - 1 = 0, \tag{2.1}$$

podemos desenvolvê-la dividindo toda equação por x, isto é,

$$x = 5 + \frac{1}{x}.$$

A quantidade desconhecida x ainda é encontrada no lado direito desta equação e, portanto, pode ser substituída por $5 + 1/x$, resultando em

$$x = 5 + \frac{1}{x} = 5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{x}}.$$

Repetindo esse processo, obtemos

$$x = 5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{x}}}}.$$

Considere a sucessão de frações

$$5,\ 5 + \frac{1}{5},\ 5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5}},\ 5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5}}}, \cdots .$$

Note que esta sucessão, que na sua forma decimal é equivalente a

$$\begin{aligned}
&5 = 5,0;\\
&5 + \frac{1}{5} = 5,2;\\
&5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5}} = 5,1923;\\
&5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5}}} = 5,19259;
\end{aligned}$$

se aproxima cada vez mais da raiz positiva da equação quadrática (2.1), a saber

$$x = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} = 5,19258\ldots\ .$$

Esses cálculos preliminares sugerem algumas questões interessantes. Primeiro, se calcularmos mais e mais sucessão de frações, continuaremos a obter melhores e melhores aproximações para

$$x = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}?$$

Em segundo lugar, suponha que consideremos o processo usado anteriormente como sendo infinito

$$x = 5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\ddots}}}},$$

onde os três pontos representam a palavra "e assim por diante". Isso indica que as frações sucessivas continuam sem fim?

Estas e outras questões serão discutidas e respondidas neste trabalho.

Definição 2.1. *Uma expressão da forma*

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}}, \tag{2.2}$$

é chamada de fração contínua. Em geral, os números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots; b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ *podem ser reais ou complexos, e a quantidade de termos pode ser finita ou infinita.*

Podemos também denotá-la da seguinte forma:

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+\cdots+}\frac{b_n}{a_n+\cdots},$$

onde b_i/a_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, são chamados de quocientes parciais. Chamaremos a_i e b_i, respectivamente, de denominador e numerador do quociente parcial b_i/a_i.

Observação 2.1. *Quando em* (2.2) *tivermos* $b_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, *isto é,*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}, \tag{2.3}$$

com a hipótese de que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *são números inteiros positivos e* a_0 *é um inteiro qualquer, a fração contínua* (2.3) *é denominada de fração contínua simples.*

Para o casa finito, temos a seguinte notação:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

ou, ainda,

$$a_0 + \frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+\cdots+}\frac{1}{a_n} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

2.2 Expansão de números racionais em frações contínuas

Um número racional é uma fração da forma p/q onde p e q são números inteiros com $q \neq 0$. Como veremos adiante, no Teorema 2.1, todo número racional pode ser expresso como uma fração contínua simples finita. O exemplo abaixo ilustra um caso particular dessa afirmação.

Exemplo 2.1. *Escrevendo o número* $355/106$ *na forma de fração contínua simples finita, obtemos*

$$\frac{355}{106} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}} = 3 + \frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2},$$

ou seja,

$$\frac{355}{106} = [3; 2, 1, 6, 2, 2].$$

O procedimento para obter esse resultado pode ser descrito da maneira como segue.

Primeiro dividimos 355 por 106 para obter o quociente 3 e resto 37, de modo que

$$\frac{355}{106} = 3 + \frac{37}{106} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{106}{37}}. \tag{2.4}$$

O próximo passo é dividir 106 por 37 para obter

$$\frac{106}{37} = 2 + \frac{32}{37} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{37}{32}}. \tag{2.5}$$

Continuando o processo de divisão agora com 37 e 32, temos

$$\frac{37}{32} = 1 + \frac{5}{32} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{32}{5}}. \tag{2.6}$$

Dividindo 32 por 5, obtemos

$$\frac{32}{5} = 6 + \frac{2}{5} = 6 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}. \tag{2.7}$$

Finalmente dividimos 5 por 2 para obter

$$\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}. \tag{2.8}$$

Agora, fazendo as devidas substituições, usando (2.4) a (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{355}{106} &= 3 + \cfrac{1}{\cfrac{106}{37}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{37}{32}}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{32}{5}}}} \\ &= 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}}}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2. *Analogamente ao procedimento descrito no exemplo anterior, pode-se mostrar que a fração contínua que representa o número racional* $11/17$ *é dada por*

$$\frac{11}{17} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}} = [0; 1, 1, 1, 5].$$

Teorema 2.1. *Qualquer fração contínua simples finita representa um número racional. Por outro lado, qualquer número racional* p/q *pode ser representado como uma fração contínua simples finita, com algumas exceções, a representação ou expansão é única.*

Demonstração: Por se tratar de uma fração contínua simples finita, a primeira parte neste teorema é imediata, pois se qualquer expansão terminar, podemos sempre transformar a expansão em uma fração racional.

Reciprocamente, seja p/q, sem perda de generalidade, com $q > 0$, uma fração racional. Pelo algoritmo da divisão, obtemos

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q}, \qquad \textit{com} \qquad 0 \leqslant r_1 < q,$$

onde a_0 é o inteiro exclusivo escolhido de modo a tornar o restante r_1 maior ou igual a 0 e menor que q.

Se $r_1 = 0$, o processo termina e a expansão de fração contínua para p/q é a_0.

Se $r_1 \neq 0$ nós escrevemos

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}}, \qquad \textit{com} \qquad 0 < r_1 < q, \tag{2.9}$$

e repetimos o processo de divisão, dividindo q por r_1 para obter

$$\frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1}, \qquad \textit{com} \qquad 0 \leqslant r_2 < r_1. \tag{2.10}$$

Observe agora que q/r_1 é uma fração positiva, de modo que a_1 é o único inteiro positivo, fazendo com que r_2 esteja entre zero e r_1.

Se $r_2 = 0$, o processo para e substituímos $q/r_1 = a_1$ em (2.9) para obter

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1]$$

como a expansão de fração contínua para p/q. Se $r_2 \neq 0$, escrevemos (2.10) da seguinte forma:

$$\frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}, \tag{2.11}$$

e repetimos novamente o processo de divisão usando r_1/r_2. Observamos que os cálculos param quando o resto da divisão for igual a zero.

Assim, por divisões sucessivas obtemos uma sequência de equações:

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{p}{q} = a_0 + \dfrac{r_1}{q}, & \text{com} & 0 < r_1 < q \\
\dfrac{q}{r_1} = a_1 + \dfrac{r_2}{r_1}, & \text{com} & 0 < r_2 < r_1 \\
\dfrac{r_1}{r_2} = a_2 + \dfrac{r_3}{r_2}, & \text{com} & 0 < r_3 < r_2 \\
\vdots & & \vdots \\
\dfrac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = a_{n-2} + \dfrac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, & \text{com} & 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \\
\dfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_{n-1} + \dfrac{0}{r_{n-1}}, & \text{com} & r_n = 0
\end{array}, \tag{2.12}$$

terminando, após um certo número finito de divisões, com a equação em que o resto r_n, para algum n, é igual a zero, o que sempre ocorrerá já que $q > r_1 > r_2 > \ldots$ é uma sequência monótona decrescente de inteiros positivos (veja Teorema 1.4). Agora podemos representar p/q como uma fração contínua simples finita. De fato, usando (2.9), (2.11) e a terceira equação de (2.12), obtemos

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_3}{r_2}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}}}}.$$

Usando as demais relações em (2.12), fazendo sucessivas substituições chegamos a expansão

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1}{}_{+}\frac{1}{a_2}{}_{+\cdots+}\frac{1}{a_{n-1}} = [a_0; a_1, a_2 \ldots, a_{n-1}].$$

■

As equações (2.12) são precisamente as equações usadas em um procedimento conhecido como algoritmo de Euclides para encontrar o maior divisor comum dos inteiros p e q. Para isso, escrevemos as equações (2.12) na forma

$$\begin{array}{rcc} p = a_0 q + r_1, & \text{com} & 0 < r_1 < q \\ q = a_1 r_1 + r_2, & \text{com} & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = a_2 r_2 + r_3, & \text{com} & 0 < r_3 < r_2 \\ \vdots & & \vdots \\ r_{n-3} = a_{n-2} r_{n-2} + r_{n-1}, & \text{com} & 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \\ r_{n-2} = a_{n-1} r_{n-1} + 0 = a_{n-1} r_{n-1}, & \text{com} & r_n = 0 \end{array}.$$

Exemplo 2.3. *Utilizando o algoritmo de Euclides para determinar o máximo divisor comum de* $p = 6381$ *e* $q = 5163$*, temos*

$$\begin{array}{rcl} 6381 & = & 1 \times 5163 + 1218 \\ 5163 & = & 4 \times 1218 + 291 \\ 1218 & = & 4 \times 291 + 54 \\ 291 & = & 5 \times 54 + 21 \\ 54 & = & 2 \times 21 + 12 \\ 21 & = & 1 \times 12 + 9 \\ 12 & = & 1 \times 9 + 3 \\ 9 & = & 3 \times 3 + 0 \end{array}. \tag{2.13}$$

Portanto, 3 *(o último resto não nulo em* (2.13)*) é o máximo divisor comum de* 6381 *e* 5163*.*

Podemos observar que $6381 = 3^2 \times 709$, *onde* 709 *é um número primo, e* $5163 = 3 \times 1721$, *onde* 1721 *também é um número primo. Assim,* 3 *é o único fator comum para esses dois números e, portanto, é o máximo divisor comum.*

Exemplo 2.4. *Encontrar a fração contínua que representa o número* $201/87$ *usando o algoritmo de Euclides. Temos,*

$$\begin{array}{rcl} 201 & = & 2 \times 87 + 27 \\ 87 & = & 3 \times 27 + 6 \\ 27 & = & 4 \times 6 + 3 \\ 6 & = & 2 \times 3 + 0 \end{array}.$$

Daí, obtemos

$$\frac{201}{87} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}} = [2; 3, 4, 2].$$

2.3 Convergentes de frações contínuas

Consideremos a sequência $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, construída da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_1 &= a_0 + \frac{b_1}{a_1} \\ c_2 &= a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\frac{b_2}{a_2} \\ &\vdots \\ c_n &= a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\frac{b_2}{a_2 + \cdots +}\frac{b_n}{a_n} \\ &\vdots \end{aligned} \quad . \tag{2.14}$$

O termo geral c_n, que é uma fração contínua finita, é chamado de n-ésimo convergente da fração contínua

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 +}\frac{b_2}{a_2 +}\frac{b_3}{a_3 +} \cdots . \tag{2.15}$$

Observação 2.2. *É possível que certos convergentes sejam indefinidos uma vez que* *tratam-se de frações contínuas. Por exemplo,*

$$c_3 = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3}}} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{\cfrac{a_2a_3 + b_3}{a_3}}}$$

não tem sentido se $a_2a_3 = -b_3$.

Definição 2.2. *A fração contínua* (2.15) *converge para o valor* k*, sendo* k *finito, se no máximo um número finito de* c_n *é indefinido e*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = k.$$

Caso contrário, diremos que a fração contínua diverge.

Se a fração contínua converge para k, podemos escrevê-la da seguinte maneira:

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 + \cdots +} \frac{b_n}{a_n + \cdots} = k.$$

Utilizando as relações em (2.14) podemos escrever $c_n = p_n/q_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, onde

$$\begin{array}{ll} p_0 = a_0, & q_0 = 1 \\ p_1 = a_0a_1 + b_1, & q_1 = a_1 \\ p_2 = a_0a_1a_2 + a_0b_2 + b_1a_2, & q_2 = a_1a_2 + b_2 \\ \vdots & \vdots \end{array}.$$

Assim, obtemos o resultado a seguir que demonstraremos utilizando o princípio da indução finita.

Teorema 2.2. *Sejam as sequências* (p_n) *e* (q_n) *tais que*

$$p_n = a_np_{n-1} + b_np_{n-2} \quad e \quad q_n = a_nq_{n-1} + b_nq_{n-2}, \quad n \geq 1, \tag{2.16}$$

com $p_{-1} = 1$*,* $p_0 = a_0$*,* $q_{-1} = 0$*,* $q_0 = 1$ *e* $a_n \neq 0$ *para* $n \geqslant 1$*. Então, o n-ésimo convergente* c_n*, dado por* (2.14)*, satisfaz* $c_n = p_n/q_n$*,* $n = 0, 1, 2, \ldots$*.*

Demonstração: Para $n = 0$ o resultado é imediato. Para $n = 1$, temos

$$p_1 = a_1p_0 + b_1p_{-1} = a_1a_0 + b_1$$

e

$$q_1 = a_1 q_0 + b_1 q_{-1} = a_1.$$

Consequentemente,

$$c_1 = a_0 + \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + b_1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

e o resultado também é válido para $n = 1$.

Suponhamos, por hipótese de indução, que $c_n = p_n/q_n$ para todo $n \leq k$, onde p_n e q_n são dados por (2.16). Mostraremos que esse resultado será válido também para $n = k + 1$. De fato, note que

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 + \cdots +} \frac{b_k}{a_k +} \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} \\ &= a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 + \cdots +} \frac{b_k}{a_k^{'}} = c_k^{'} \end{aligned}$$

onde $a_k^{'} = a_k + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}}$ e $c_k^{'}$ é o k-ésimo convergente da fração contínua

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 + \cdots +} \frac{b_k}{a_k^{'} +} \frac{b_{k+2}}{a_{k+2} + \cdots}.$$

Daí, usando a hipótese de indução para $c_k^{'}$, obtemos

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= c_k^{'} = \frac{a_k^{'} p_{k-1} + b_k p_{k-2}}{a_k^{'} q_{k-1} + b_k q_{k-2}} = \frac{\left[a_k + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right] p_{k-1} + b_k p_{k-2}}{\left[a_k + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right] q_{k-1} + b_k q_{k-2}} \\ &= \frac{(a_k p_{k-1} + b_k p_{k-2}) + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}} p_{k-1}}{(a_k q_{k-1} + b_k q_{k-2}) + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}} q_{k-1}} = \frac{p_k + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}} p_{k-1}}{q_k + \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}} q_{k-1}} \qquad (2.17) \\ &= \frac{a_{k+1} p_k + b_{k+1} p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + b_{k+1} q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}, \end{aligned}$$

o que conclui a prova. ■

Observação 2.3. *As fórmulas dadas em* (2.16) *para* p_n *e* q_n *são conhecidas como fórmula de Wallis (veja, por exemplo, CHIHARA - 1978) e* p_n *e* q_n *são chamados, respectivamente, n-ésimo numerador parcial e n-ésimo denominador parcial da fração contínua.*

Como consequência imediata do Teorema 2.2 podemos enunciar o seguinte resultado:

Corolário 2.1. *Os numeradores p_n e os denominadores q_n dos convergentes c_n da fração contínua simples $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, ...]$ satisfazem as equações*

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad e \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geq 1, \tag{2.18}$$

com as seguintes condições iniciais: $p_{-1} = 1$, $p_0 = a_0$, $q_{-1} = 0$ e $q_0 = 1$.

Exemplo 2.5. *De acordo com (2.14), pode-se mostrar que os convergentes da fração contínua simples finita*

$$\frac{290}{81} = [3; 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2]$$

são dados por

$$c_0 = 3, \qquad c_1 = 3 + \frac{1}{1} = 4,$$

$$c_2 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{7}{2}, \qquad c_3 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{18}{5},$$

$$c_4 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{25}{7}, \qquad c_5 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}} = \frac{43}{12},$$

$$c_6 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}} = \frac{68}{19}, \qquad c_7 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}}} = \frac{111}{31},$$

$$c_8 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}}} = \frac{290}{81}.$$

Como podemos observar, esse processo de encontrar os valores dos convergentes *pode ser muito trabalhoso. Uma maneira de obtermos tais valores mais rapidamente é utilizarmos o Corolário* 2.1*. De fato, neste caso, temos*

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{p_0}{q_0} = 3, & c_1 &= \frac{p_1}{q_1} = \frac{1\times 3+1}{1} = 4,\\
c_2 &= \frac{p_2}{q_2} = \frac{1\times 4+3}{1\times 1+1} = \frac{7}{2}, & c_3 &= \frac{p_3}{q_3} = \frac{2\times 7+4}{2\times 2+1} = \frac{18}{5},\\
c_4 &= \frac{p_4}{q_4} = \frac{1\times 18+7}{1\times 5+2} = \frac{25}{7}, & c_5 &= \frac{p_5}{q_5} = \frac{1\times 25+18}{1\times 7+5} = \frac{43}{12},\\
c_6 &= \frac{p_6}{q_6} = \frac{1\times 43+25}{1\times 12+7} = \frac{68}{19}, & c_7 &= \frac{p_7}{q_7} = \frac{1\times 68+43}{1\times 19+12} = \frac{111}{31},
\end{aligned}
$$

$$c_8 = \frac{p_8}{q_8} = \frac{2\times 111+68}{2\times 31+19} = \frac{290}{81}.$$

Um outro resultado importante envolvendo os numeradores e denominadores de dois convergentes consecutivos é dado como segue.

Teorema 2.3. *Os numeradores e denominadores dos convergentes de ordem n e $n-1$ da fração contínua* (2.15) *satisfazem a seguinte relação (conhecida como Fórmula do Determinante):*

$$\begin{vmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{vmatrix} = p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1} b_1 b_2 b_3 \dots b_n, \quad n \geq 1.$$

Demonstração: Note que, pelo Teorema 2.2,

$$p_1 q_0 - q_1 p_0 = (a_0 a_1 + b_1)1 - a_0 a_1 = (-1)^2 b_1$$

e o resultado é válido para $n = 1$. Suponhamos, por hipótese de indução, que o resultado seja válido para $n = k$, isto é,

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k+1} b_1 b_2 b_3 \dots b_k. \tag{2.19}$$

Mostraremos que este resultado também é válido para $n = k+1$. De fato, novamente

Teorema 2.2, temos

$$\begin{aligned} p_{k+1}q_k - q_{k+1}p_k &= (a_{k+1}p_k + b_{k+1}p_{k-1})q_k - (a_{k+1}q_k + b_{k+1}q_{k-1})p_k \\ &= a_{k+1}p_kq_k + b_{k+1}p_{k-1}q_k - a_{k+1}q_kp_k - b_{k+1}q_{k-1}p_k \\ &= -(p_kq_{k-1} - q_kp_{k-1})b_{k+1}. \end{aligned}$$

Daí, utilizando a hipótese de indução (2.19), obtemos

$$p_{k+1}q_k - q_{k+1}p_k = -[(-1)^{k+1}b_1b_2b_3\ldots b_k]b_{k+1} = (-1)^{k+2}b_1b_2b_3\ldots b_kb_{k+1},$$

o que concluí a prova. ■

Corolário 2.2. *Se o n-ésimo convergente da fração contínua simples* $[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ *é dado por* $c_n = p_n/q_n$*, então, para todo* $n \geq 1$*, vale a seguinte relação*

$$\begin{vmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{vmatrix} = p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^{n+1}. \tag{2.20}$$

Demonstração: Segue diretamente do Teorema 2.3 já que, neste caso, $b_k = 1$ para todo $k \geq 1$. ■

Proposição 2.1. *Se o n-ésimo convergente da fração contínua simples* $[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ *é* $c_n = p_n/q_n$*, então vale a seguinte relação*

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_nq_{n-1}}, \tag{2.21}$$

para todo número natural $n \geq 1$*.*

Demonstração: Para todo $n \geq 1$, temos

$$c_n - c_{n-1} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n}{q_nq_{n-1}}.$$

Agora o resultado em (2.21) segue diretamente da igualdade (2.20) obtida no Corolário 2.2. ■

Proposição 2.2. *Se o n-ésimo convergente da fração contínua simples* $[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ *é* $c_n = p_n/q_n$*, então vale a seguinte relação*

$$c_n - c_{n-2} = \frac{(-1)^{n+2} a_n}{q_n q_{n-2}} \tag{2.22}$$

para todo número natural $n > 1$*.*

Demonstração: Pelo Corolário 2.1, para todo $n > 1$, temos

$$\begin{aligned} c_n - c_{n-2} &= \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2}}{q_n q_{n-2}} \\ &= \frac{(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-2}}{q_n q_{n-2}} \\ &= \frac{(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) a_n}{q_n q_{n-2}}. \end{aligned}$$

Mas, pelo Corolário 2.2, $p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$, para todo $n \geq 2$. Consequentemente,

$$c_n - c_{n-2} = \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n+2} a_n}{q_n q_{n-2}},$$

e isto conclui a prova de (2.22). ■

2.4 Expansão de números irracionais em frações contínuas

Nesta seção trataremos da expansão de números irracionais em frações contínuas simples e também outro tipo de expansão em frações contínuas para números irracionais conhecidos como quadráticos.

Os números reias podem ser classificados como racionais e irracionais, mas podemos classificá-los em duas outras categorias. Uma contém os chamados números algébricos, isto é, números que são soluções de equações algébricas com coeficientes inteiros, e a outra contém todos os demais números, sendo esses chamados transcendentes.

Alguns números algébricos são racionais e outros irracionais, mas todos os números transcendentes são irracionais.

Um número é racional se é da forma p/q, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Caso contrário, o número é chamado irracional.

O procedimento para expandir um número irracional em fração contínua simples é fundamentalmente o mesmo que usamos para números racionais, ou seja, substituições sucessivas.

Seja x um número irracional qualquer. Podemos calcular a_0, o maior número inteiro inferior a x, e expressar x na forma

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \quad \text{onde} \quad 0 < \frac{1}{x_1} < 1 \ .$$

Consequentemente,

$$x_1 = \frac{1}{x - a_0} > 1$$

é um número irracional. Da mesma forma, podemos escrever

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad \text{onde} \quad 0 < \frac{1}{x_2} < 1,$$

com $a_1 \geq 1$, sendo a_1 o maior inteiro inferior a x_1. Neste caso, temos

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} > 1$$

que é, também, um número irracional.

Este processo pode ser repetido infinitamente, produzindo sucessivamente as seguintes equações

$$\begin{array}{lll} x = a_0 + \dfrac{1}{x_1}, & x_1 > 1 & \\ x_1 = a_1 + \dfrac{1}{x_2}, & x_2 > 1, & a_1 \geq 1, \\ x_2 = a_2 + \dfrac{1}{x_3}, & x_3 > 1, & a_2 \geq 1, \\ \quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots \\ x_n = a_n + \dfrac{1}{x_{n+1}}, & x_{n+1} > 1, & a_n \geq 1, \\ \quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots \end{array} \tag{2.23}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ são todos números inteiros e os números $x, x_1, x_2, \ldots$ são todos irracionais.

Este processo não termina, pois a única maneira que isso poderia acontecer seria termos um número inteiro igual a x_n, ou seja, $x_n = a_n$ para algum n o que é impossível, pois x_n é um número irracional para todo n.

Fazendo as devidas substituições nas equações (2.23), podemos obter a fração contínua simples infinita

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}} = \dots$$

ou, equivalentemente,

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots].$$

Exemplo 2.6. *Expandir $\sqrt{2}$ em uma fração contínua simples e infinita.*

Isto pode ser feito como descrito no processo acima. Note que, o maior número inteiro menor que $\sqrt{2} = 1,414\dots$ é $a_0 = 1$, então

$$\sqrt{2} = a_0 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{x_1}. \tag{2.24}$$

Resolvendo esta equação para x_1, obtemos

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} . \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} + 1.$$

Consequentemente,

$$\sqrt{2} = a_0 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}. \tag{2.25}$$

O maior número inteiro que é menor que $x_1 = \sqrt{2} + 1 = 2,414\dots$ é $a_1 = 2$. Assim,

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2} = 2 + \frac{1}{x_2},$$

onde

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - 2} = \frac{1}{(\sqrt{2} + 1) - 2} = \sqrt{2} + 1. \tag{2.26}$$

Portanto, de (2.24), (2.25) e (2.26), temos

$$\sqrt{2} = a_0 + \frac{1}{x_1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2} + 1}}.$$

Além disso, como $x_2 = \sqrt{2} + 1$ é o mesmo que $x_1 = \sqrt{2} + 1$, os cálculos de x_3, x_4, $\dots$ produzirão o mesmo resultado, ou seja, $\sqrt{2} + 1$. Assim, todos os quocientes parciais *subsequentes serão iguais a 2 e a expansão infinita de $\sqrt{2}$ será*

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2_+}\frac{1}{2_+}\cdots = [1; 2, 2, \ldots].$$

Exemplo 2.7. *Podemos encontrar a expansão em fração contínua simples e infinita do número $x = (25 + \sqrt{53})/22$ utilizando (de modo análogo) o mesmo processo descrito no Exemplo 2.6. De fato, sabemos que $\sqrt{53}$ é um número entre 7 e 8, e o maior inteiro menor que x é $a_0 = 1$. Então,*

$$x = \frac{25 + \sqrt{53}}{22} = a_0 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{x_1}.$$

Isolando x_1 no primeiro membro, temos

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\dfrac{25+\sqrt{53}}{22} - 1} \\ &= \frac{1}{\dfrac{3+\sqrt{53}}{22}} = \frac{22}{3+\sqrt{53}}. \end{aligned}$$

Multiplicando numerador e denominador por $3 - \sqrt{53}$, obtemos

$$x_1 = \frac{\sqrt{53} - 3}{2} = 2,14\ldots$$

que é um número maior que 1. O maior número inteiro menor que x_1 é $a_1 = 2$, assim

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2} = 2 + \frac{1}{x_2},$$

onde

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - 2} = \frac{2}{\sqrt{53} - 7} = \frac{\sqrt{53} + 7}{2} = 7,14\ldots \ .$$

Agora, o maior número inteiro menor que x_2 é $a_2 = 7$. Daí,

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} = 7 + \frac{1}{x_3},$$

onde

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - 7} = \frac{2}{\sqrt{53} - 7} = \frac{\sqrt{53} + 7}{2} = 7,14\ldots \ .$$

Uma vez que, $x_3 = x_2$, se continuarmos o processo acima, encontraremos

$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \ldots$ *(já que o último cálculo vai se repetir). Portanto, a expansão será dada por*

$$x = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_2}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{x_3}}} = \ldots,$$

de onde concluímos que

$$x = \frac{25 + \sqrt{53}}{22} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{7+}\frac{1}{7+}\frac{1}{7+}\frac{1}{7+}\ldots = [1; 2, 7, 7, 7, \ldots].$$

Os números da forma

$$\frac{P \pm \sqrt{D}}{Q},$$

onde P, D, Q são inteiros, e onde D é um inteiro positivo, mas não é um quadrado perfeito, são números irracionais. Um número desta forma é chamado de quadrático, uma vez que é a raiz de uma equação quadrática, do tipo.

$$Q^2x^2 - 2PQx + (P^2 - D) = 0.$$

Se um número real satisfaz alguma equação da forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x + a_1x + a_0 = 0,$$

com coeficientes a_0, a_1, a_2, $\ldots$,a_n, sendo números inteiros, dizemos que ele é um número algébrico.

Caso o número real não satisfaça nenhuma equação desse tipo, dizemos que ele é um número transcendente.

Observação 2.4. *Os números complexos também são divididos em algébricos e transcendentes.*

Nos próximos dois exemplos, apresentamos as respectivas expansões em frações contínuas de dois números transcendentes bem conhecidos, a saber, o número π (pi) e o número e (número de Euler). Estas expansões podem ser obtidas exatamente como nos Exemplos 2.6 e 2.7.

Exemplo 2.8. *O número transcendente* $\pi = 3,141592653589793238\ldots$ *tem expansão em* *fração contínua dada por*

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}.$$

Exemplo 2.9. *O número transcendente* $e = 2,718281828459\ldots$, *tem expansão em fração contínua dada por*

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}}.$$

2.5 Frações contínuas periódicas

Definição 2.3. *Chama-se fração contínua periódica a toda fração contínua simples infinita* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *em que os inteiros* a_i *se repetem periodicamente a partir de um certo índice. Tal fração é denotada por*

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, \overline{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}}], \quad n > 1,$$

onde $a_{k+n} = a_k$, *para algum inteiro* $k \geq 0$. *Neste caso, os valores* $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}$ *formam o período da fração contínua.*

Observação 2.5. (i) *Uma fração contínua que é periódica desde o início, ou seja,*

$$[\overline{a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}}]$$

é chamada fração contínua puramente periódica.

(ii) *Os números representados por frações continuas puramente periódicas são irracionais quadráticos de um tipo particular e podem ser diferentes de outros irracionais quadráticos.*

Exemplo 2.10. *A expansão do número* $\sqrt{11}+3$ *em uma fração contínua infinita, é dada* *por*

$$\sqrt{11}+3 = 6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\ddots}}}}} = [6;3,6,3,6,3,\ldots] = [\overline{6,3}],$$

que é uma fração contínua puramente periódica.

Os teoremas de Leonhard Euler e Joseph Louis Lagrange são resultados essenciais sobre frações contínuas periódicas e números irracionais quadráticos, motivo pelo qual os demonstraremos, respectivamente, a seguir.

Teorema 2.4. *Se x é uma fração contínua periódica, isto é, se*

$$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, \overline{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}}],$$

então x é um número irracional quadrático.

Demonstração: Seja $x = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k]$, onde $x_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots]$. Assim,

$$x_k = [a_k; a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}, x_k]$$

Daí, considerando p''/q'' e p'/q' os dois últimos convergentes de $[a_k; a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}]$ e usando o Corolário 2.1, temos que

$$x_k = \frac{x_k p' + p''}{x_k q' + q''},$$

ou seja,

$$q' x_k^2 + (q'' - p')x_k - p'' = 0. \tag{2.27}$$

Mas, como $x = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k]$, novamente pelo Corolário 2.1, temos

$$x = \frac{x_k p_{k-1} + p_{k-2}}{x_k q_{k-1} + q_{k-2}}$$

e, consequentemente,

$$x_k = \frac{p_{k-2} - q_{k-2}x}{q_{k-1}x - p_{k-1}}.$$

Agora, substituindo-se o valor de x_k dado acima em (2.27) e fazendo as devidas simplificações, obtemos

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde

$$a = q'q_{k-2}^2 - (q'' - q')q_{k-2}q_{k-1} - p''q_{k-1}^2,$$

$$b = 2(p''p_{k-1}q_{k-1} - q'p_{k-2}q_{k-2}) + (q'' - p')(p_{k-2}q_{k-1} + q_{k-2}p_{k-1}),$$

$$c = q'p_{k-2}^2 - (q'' - p')p_{k-2}p_{k-1} - p''p_{k-1}^2.$$

Portanto, a, b e c são números inteiros. Como x é irracional, então $b^2 - 4ac > 0$ e isto concluí a prova. ■

Para provar o próximo teorema faremos uso do seguinte lema cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em ANDRADE e BRACCIALI (2005).

Lema 2.1. *Seja x um irracional qualquer e (c_n) a sequência dos convergentes da fração contínua simples associado a x. Então,*

$$\frac{1}{2q_kq_{k+1}} < |x - c_k| < \frac{1}{q_kq_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2}, \qquad k \geqslant 1.$$

Demonstração: Veja, por exemplo, ANDRADE e BRACCIALI (2005). ■

Teorema 2.5. *Qualquer número quadrático irracional x tem uma expansão em fração contínua que é periódica de certo ponto em diante.*

Demonstração: Um número quadrático irracional satisfaz a uma equação quadrática com coeficientes inteiros, que pode ser escrita como

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{2.28}$$

Seja $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]$. Tomando-se $x_k = [a_k; a_{k+1} \ldots]$, temos

$$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x_k].$$

Além disso, pelo Corolário 2.1,

$$x = \frac{x_kp_{k-1} + p_{k-2}}{x_kq_{k-1} + q_{k-2}}.$$

Substituindo-se o valor acima em (2.28), obtemos

$$A_k x_k^2 + B_k x_k + C_k = 0, \tag{2.29}$$

onde

$$\begin{aligned} A_k &= ap_{k-1}^2 + bp_{k-1}q_{k-1} + cq_{k-1}^2, \\ B_k &= 2ap_{k-1}p_{k-2} + b(p_{k-1}q_{k-2} + p_{k-2}q_{k-1}) + 2cq_{k-1}q_{k-2}, \\ C_k &= ap_{k-2}^2 + bp_{k-2}q_{k-2} + cq_{k-2}^2. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Note que, se $A_k = 0$, obtemos

$$p_{k-1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} q_{k-1}.$$

Logo,

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Consequentemente, a equação (2.28) tem um número racional como raiz, o que é impossível, pois x é irracional. Portanto $A_k \neq 0$ e a equação quadrática

$$A_k y_k^2 + B_k y_k + C_k = 0,$$

tem x_k como uma de suas raízes.

Agora, utilizando o Corolário 2.2 juntamente com os valores de A_k, B_k e C_k (obtidos em (2.30)), não é difícil ver que

$$B_k^2 - 4A_k C_k = b^2 - 4ac. \tag{2.31}$$

Além disso, pelo Lema 2.1, temos

$$xq_{k-1} - p_{k-1} > -1/q_k. \tag{2.32}$$

Logo, existe um número λ_{k-1}, com $|\lambda_{k-1}| < 1$, tal que

$$p_{k-1} = xq_{k-1} + \frac{\lambda_{k-1}}{q_{k-1}}.$$

Portanto, como consequência da equação acima, da primeira igualdade em (2.30) e de

(2.28), obtemos

$$A_k = (ax^2 + bx + c)q_{k-1}^2 + 2ax\lambda_{k-1} + a\frac{\lambda_{k-1}^2}{q_{k-1}^2} + b\lambda_{k-1} = 2ax\lambda_{k-1} + a\frac{\lambda_{k-1}^2}{q_{k-1}^2} + b\lambda_{k-1}.$$

Daí,

$$|A_k| < 2|ax| + |a| + |b|, \tag{2.33}$$

visto que, pelo Lema 2.1 e por (2.32) $|\lambda_{k-1}^2/q_{k-1}^2| < 1$. Mas, como $C_k = A_{k+1}$, temos também que

$$|C_k| < 2|ax| + |a| + |b|. \tag{2.34}$$

Finalmente, usando (2.31), (2.33) e (2.34), concluímos que

$$B_k^2 \leqslant 4|A_kC_k| + |b^2 - 4ac| < 4(2|ax| + |b| + |c|)^2 + |b^2 - 4ac|.$$

Note que os valores absolutos A_k, B_k e C_k são menores do que os números que não dependem de k. Como A_k, B_k e C_k são números inteiros, existe apenas um número finito de triplas A_k, B_k, C_k diferentes entre si. Logo, podemos encontrar uma tripla (A, B, C) que ocorre pelo menos três vezes, digamos $(A_{k_1}, B_{k_1}C_{k_1})$, $(A_{k_2}, B_{k_2}C_{k_2})$ e $(A_{k_3}, B_{k_3}, C_{k_3})$. Portanto, de (2.29), x_{k_1}, x_{k_2} e x_{k_3} são raízes da equação

$$Ay^2 + By + C = 0.$$

Obviamente, pelo menos duas das raízes acima são iguais, por exemplo x_{k_1} e x_{k_2}. Consequentemente,

$$a_{k_2} = a_{k_1}, \;\; a_{k_2+1} = a_{k_1+1}, \;\; a_{k_2+2} = a_{k_1+2}, \ldots$$

e, portanto, a fração contínua $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]$ é periódica. ■

2.5.1 Sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa (1175 - 1250) também conhecido como Fibonacci, isto é, filho de Bonaccio é a pessoa a quem devemos o renascimento da matemática no solo cristão.

Fibonacci, em 1202, publicou sua famosa obra intitulada Liber abaci. A obra se ocupa de aritmética e álgebra elementares. O livro enfatiza e defende a notação indo-arábica, muito se devendo a ele pela introdução desses números na Europa.

Os quinze capítulos da obra explicam a leitura e a escrita dos novos números, métodos de cálculo com inteiros e frações, o cálculo de raízes quadradas e cúbicas e a resolução de equações lineares e quadráticas, tanto pelo método de falsa posição como por processos algébricos. O trabalho contém uma farta coleção de problemas dentre eles podemos citar o da reprodução dos coelhos que deu origem à importante sequência de Fibonacci.

Exemplo 2.11. *Suponha que um casal de coelhos demore dois meses para procriar. A partir daí, a cada mês produz um novo casal de coelhos. Começando no mês 1 com um único casal, qual é o número de casal de coelhos no mês n?*

Seja (F_n) A sequência que corresponde a quantidade de casal de coelhos no mês n.

Os dois primeiros termos da sequência são $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$, pois o casal não se reproduz até o segundo mês.

No terceiro mês temos dois casais de coelhos, um adulto e um jovem.

No quarto mês temos três casais de coelhos, dois adultos e um jovem.

No quinto mês temos cinco casais de coelhos, três adultos e dois jovens.

No sexto mês temos oito casais de coelhos, cinco adultos e três jovens.

No sétimo mês temos treze casais de coelhos, oito adultos e cinco jovens.

No oitavo mês temos vinte e um casais de coelhos, treze adultos e oito jovens.

No nono mês temos trinta e quatro casais de coelhos, vinte e um adultos e treze jovens.

No décimo mês temos cinquenta e cinco casais de coelhos, trinta e quatro adultos e vinte e um jovens.

No décimo primeiro mês temos oitenta e nove casais de coelhos, cinquenta e cinco adultos e trinta e quatro jovens.

No décimo segundo mês temos cento e quarenta e quatro casais de coelhos, oitenta e nove adultos e cinquenta e cinco jovens.

De um modo geral, em cada mês n, com $n \geq 12$, teremos os casais presentes no mês anterior, mais um número de novos filhotes correspondentes aos casais maduros, mas estes já estavam dois meses antes.

Logo, para $n \geq 12$,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

ou, equivalentemente,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \;\; n \geq 1,$$

onde $F_1 = F_2 = 1$.

Temos assim a sequência de Fibonacci que é a mais simples de todas as frações contínuas infinitas, onde podemos representar por

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}} = [1; 1, 1, 1, \ldots]. \tag{2.35}$$

Fazendo $x = [1; 1, 1, 1, \ldots]$, podemos ver que x satisfaz a equação

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

já que

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Como a fração contínua (2.35) produz um número positivo, resolvendo a equação acima, obtemos

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803\ldots$$

que é conhecido como número áureo e é denotado por $\Phi = 1,61803\ldots$. Os convergentes para a raiz dessa equação são (veja Teorema 2.2 ou Corolário 2.1)

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots,$$

com numeradores e denominadores sendo formados a partir da sequência de números inteiros

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots.$$

Cada um desses números, após os dois primeiros, é igual à soma dos dois anteriores; assim, $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ e assim por diante. Os números $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$ são conhecidos como os números de Fibonacci, em homenagem ao grande matemático do século XIII, Leonardo Fibonacci.

Capítulo 3

Uma Aplicação da Teoria das Frações Contínuas

Neste capítulo, vamos contar a história dos calendários através do tempo e sua importância na organização de uma sociedade, bem como a utilização de frações contínuas na sua construção. As principais referências aqui utilizadas são: ANDRADE e BRACCIALI (2005), CAJORI (2007), DUNCAN (1999), EVES (2004), SILVA (2016).

3.1 História dos calendários

Nós somos um povo do calendário. Observando nossa história, percebemos que nos sentimos desconfortáveis com o presente de uma forma que nossos ancestrais que araram os campos e viveram e morreram segundo os grandes ciclos da natureza jamais teriam compreendido. Medir o tempo e criar um calendário funcional se tornou preocupação e desafio para astrônomos, matemáticos, padres, reis, ou qualquer outrem a partir do momento em que surgiu a real necessidade de contar os dias até a próxima colheita, ou calcular quando os impostos precisavam ser pagos, e ainda resolver qual seria o momento exato de fazer um sacrifício para pacificar um deus enfurecido. Quando afirma-se que mensurar o tempo foi, de fato, um desafio, o termo não está sendo utilizado de maneira arbitrária.

Sete séculos atrás, um monge inglês de nome Roger Bacon, enviou uma carta a Roma. Endereçada ao Papa Clemente IV, tratava-se de um apelo urgente para que se determinasse o próprio tempo. Calculando que o ano do calendário era cerca de onze minutos mais longo do que o ano solar de fato, Bacon informou ao supremo pontífice que isso implicava um erro a cada 125 anos. Tal excedente de tempo, com o passar dos séculos, acumularia até à época nove dias. Se deixado como estava, o afastamento iria um dia levar março para o meio do inverno e agosto cairia na primavera no hemisfério norte. Com essas declarações, em 1267, Bacon se arriscava a ser declarado herege por desafiar a veracidade da Igreja Católica. Esse fato poderia vir a ser o fim da história de Roger Bacon, não fosse pelo súbito interesse de um homem chamado Guy Le Gros Foulques.

Em 1265, este ex-advogado e conselheiro do Rei Luís IX da França, soube do pensamento de Bacon e o contatou. Roger Bacon prometeu então preparar um manuscrito e enviá-lo o mais rápido possível. Por quase dois anos ele trabalhou ardilosamente, finalmente enviando um tratado épico a Roma em 1267 chamado Opus Maius (Obra Maior). Sua violenta crítica acerca das falhas no calendário aparece em um longo e pouco objetivo capítulo sobre matemática, em uma seção onde ele defende o uso da objetividade dos números e das ciências como forma de expor erros.

No entanto, somente em 1582, o Papa Gregório XIII (1502-1585) finalmente fixou o calendário. Àquela época, novos apelos já vinham abertamente pedindo a correção por várias décadas. Até mesmo Copérnico escreveu uma seção sobre a verdadeira duração do ano no seu Revoluções das Esferas Celestiais, no ano de 1543, data de uma geração antes da correção do Papa Gregório. A reforma de Gregório veio depois que ele nomeou uma comissão para estudar o calendário em 1572 ou 1574, liderado pelo matemático bávaro Christopher Clavius (1537-1612), um de dois discretos heróis da correção gregoriana. O outro foi um médico italiano obscuro chamado Aloysius Lilius (1510-1576), que imaginou a solução que Gregório editou como bula papal em 24 de fevereiro de 1582.

Na construção de determinação do tempo, o Sol não era a única deixa natural utilizada pelos povos passados. Para rever eventos como o inverno, chuvas sazonais e a colheita, a Lua também era tida como um "relógio". Quase toda cultura antiga cultuavam a Lua. Os antigos egípcios chamavam de Khonsu, seu deus Lua, enquanto os sumérios a denominavam Nanna. Até hoje as pessoas celebram a Lua, fazendo festas, danças e rituais solenes para a Lua nova. A Lua deu a Hesíodo e aos gregos o seu ano, que eles basearam em doze meses lunares com uma média próxima a 29 1/2 dias, equivalentes a cerca de 354 dias.

A Lua tornou-se suprema, com variações neste mesmo ano de doze meses e 354 dias aparecendo por toda parte na medida em que a Idade da Pedra ia se transformando na Era Neolítica e as pessoas começavam a descobrir como construir cidades, irrigar campos, estabelecer governos e organizar exércitos.

O problema aparece no tempo que a Lua leva para passar através das suas fases enquanto órbita da Terra, que não dá um número bom para dividir em um ano de aproximadamente 365 1/4 dias. De fato, um mês lunar de verdade tem 29,5306 dias e se medido por instrumentos modernos, o que a iguala a um ano lunar de precisos doze meses - ou seja, 365,242199 dias -, pode-se então compreender as frustações intensas dos astrônomos através dos séculos tentando estabelecer uma ligação entre o Sol e a Lua.

O Egito foi a primeira civilização ancestral a corrigir o erro da Lua e seguir o Sol. De forma notável, eles o fizeram bem cedo - há quase seis mil anos -, quando os povos vivendo ao longo do Nilo imaginaram que um ano solar correspondia aproximadamente a 365 dias. Isto levou a um calendário com doze meses de trinta dias cada e mais cinco dias adicionais que a mitologia egípcia afirma terem sido acrescentados ao ano pelo deus Tot. Três milênios depois, os egípcios estabeleceram o que pode ter sido a primeira data da história da humanidade, que os cronógrafos calcularam ser 4241 a.C.

Tudo que um fazendeiro do antigo Egito precisava fazer era plantar um junco alto na lama ao longo da ribanceira do Nilo, fazer nele uma ranhura para medir o ponto alto da enchente, e em seguida contar os dias até a próxima marca d'água alta, que ocorreria exatamente um ano mais tarde. Este mecanismo simples, chamado nilômetro, era então o mais exato calendário do mundo, baseado nas estações como elas eram reguladas pela órbita da Terra e pela inclinação do seu eixo, e não mais pelas fases da Lua.

A aparição da estrela mais brilhante que pode ser observada no céu, não levando em conta o sol, é conhecida como Sírio e coincidia com a enchente anual do rio Nilo. Ela também tornou-se o primeiro dia do mês de Tot, o deus egípcio do ano novo, comemorado anualmente com cerimônias elaboradas que começavam quando o Sírio aparecia no topo dos obeliscos precisamente alinhados como pontos de observação no chão abaixo. Registrando o momento da aparição de Sírio com exatidão a cada ano, os astrônomos egípcios acabaram percebendo que o ano solar era um quarto de dia mais longo do que 365 dias. Os egípcios também usaram as pirâmides para medir as sombras e determinar a chegada dos equinócios.

Acrescentar um quarto de dia ao ano egípcio foi uma descoberta revolucionária. Isto trouxe ao ano egípcio uma margem de 11 minutos e 24 segundos (com um segundo a mais ou a menos) do verdadeiro ano solar pelo menos dois mil anos antes de Júlio César adotar o calendário de 365 1/4 dias para Roma, e mais de três milênios antes do apelo de Roger Bacon ao Papa Clemente IV.

Em 238 a.C., Ptolomeu III ordenou um sistema para pular anos e acrescentar um dia extra a cada quatro anos. Mas ainda assim os sacerdotes resistiram ao édito até o ano 30 a.C., quando Roma conquistou o Egito e Augusto forçou o povo do Nilo a acrescentar um quarto de dia extra ao seu calendário para alinhá-lo com o calendário juliano. Isto estabilizou o calendário egípcio de forma que o primeiro dia de Tot sempre caía no dia 29 de agosto.

Ninguém sabe ao certo, embora sua disposição não deixe dúvida de que o povo que o construiu era astronomicamente sofisticado o suficiente para construir um mecanismo que medisse com exatidão o ano solar; mas evidências vêm de pedras colocadas em padrões ao redor de Stonehenge que se alinham com o Sol tanto nos solstícios quanto nos equinócios, e com a Lua à medida que ela faz a sua órbita ao redor da Terra. Este calendário gigante teria permitido a um antigo bretão antecipar ciclos astronômicos e eventos com tanta exatidão quanto os egípcios observando Sírio - ou, até, um astrônomo moderno usando mapas solares ou estrelas solares ou estelares.

Os maias também desenvolveram seus sistemas de calendários. Eram três no total e dentre eles citaremos o que tinha 365 dias, com dezoito meses de vinte dias, ao qual eram acrescentados mais cinco dias. Ele era chamado de haab. Como para os egípcios, estes cinco dias extras eram considerados especiais, embora os maias acreditassem que eles eram de azar e evitassem todo tipo de atividade enquanto aguardavam ansiosamente que eles passassem.

Cronologicamente, mais adiante, no século IV a.C., o astrônomo Eudóxio de Cnido concebeu uma teoria matemática envolvendo esferas que ele usava para tentar explicar os movimentos dos planetas e da Lua, e o que parecia ser o movimento do Sol em um universo centrado na Terra. Aristóteles (384-322 a.C.), - trabalhando nos anos imediatamente anteriores à fundação de Alexandria - com seus escritos em astronomia, expande o pensamento de Eudóxio sobre as esferas planetárias ao sugerir que as estrelas, os planetas e o Sol estão literalmente encaixados em esferas invisíveis que orbitam a Terra em uma série de círculos concêntricos.

Já em Alexandria, Aristarco (270 a.C.), um dos maiores entre os antigos astrônomos do local, construiu um relógio de Sol modificado chamado skaphe, uma espécie de bacia esférica com um ponteiro no centro como um pequeno obelisco para lançar uma sombra sobre as linhas marcadas na superfície da bacia. Usando este dispositivo ele podia medir a altura e a direção do Sol. Isto lhe permitia entender que o Sol lança luz contra uma Lua crescente, como vista da Terra, a um ângulo de 87 graus. A partir disto, ele concluiu que o Sol tem muitas vezes o tamanho da Terra e deve estar muito longe. Aristarco também deduziu que a Terra gira em torno do Sol, uma teoria astronômica que vai contra a ortodoxia aceita de que o Sol orbita uma Terra estacionária. Ele argumentava que o Sol parecia mover-se no céu porque a Terra girava em seu próprio eixo.

Uma geração depois de Aristarco, um matemático, filósofo, geógrafo e astrônomo, chamado Eratóstenes (276-194 a.C.), deduziu com uma margem de um décimo de um grau a inclinação do eixo de rotação da Terra, que causa as estações. Ele também mediu a circunferência da Terra com um erro de cerca de quatrocentos quilômetros. Alguns anos depois, Ctesibius de Alexandria construiu um elaborado relógio d'água usando bóias, um guincho de correntes, um cabo dentado, um dial e um sistema de relógio de Sol que associava o caminho do Sol astronômica e geometricamente com os níveis de sua sombra. Embora estes observadores de estrelas tenham deixado sua contribuição, nenhum deles foi tão influente quanto o último grande astrônomo de Alexandria, Cláudio Ptolomeu. Um grego que era cidadão romano, com cerca de dois séculos depois da temporada de César do Egito, Ptolomeu compilou uma enciclopédia maciça sobre astronomia e geografia que se tornou, juntamente com o elementos sobre matemática de Euclides, um texto largamente reverenciado, embora nem sempre completamente entendido, na Idade Média.

O sistema ordenado por Ptolomeu III em 238 a.C. (um ano igual a 365 1/4 dias, com a fração sendo considerada através de um sistema cíclico de três anos de 365 dias seguidos por um ano bissexto de 366 dias) foi um dos muitos sistemas utilizados para afinar as reformas com o intuito de acertar o calendário. Inclusive, César chamou os melhores filósofos e matemáticos da época, incluindo o astrônomo Sosígenes, que parece ter ido de Alexandria a Roma para afinar as reformas que ele e César tinham discutido no Egito.

Para trazer o calendário de volta ao alinhamento com o equinócio da primavera, que deveria ocorrer por tradição em 25 de março, César também ordenou dois meses intercalares extras adicionados ao ano 46 a.C. - consistindo de 33 e 34 dias inseridos entre novembro e dezembro. Combinados com um mês intercalar já instalado em fevereiro, o ano inteiro de 46 a.C. acabou sendo esticado até extraordinários 445 dias. César chamou de "ultimus annus confusionis". Para finalizar suas reformas do calendário, César mudou o primeiro dia do ano de março para janeiro, mais próximo do solstício de inverno - uma reforma anterior do calendário que nem sempre tinha recebido adesões. Ele então reorganizou as durações dos meses para acrescentar os dez dias necessários a trazer o ano de 355 para 365 dias, arranjando-os de forma a criar um calendário de doze meses alternando 30 e 31 dias, com a exceção de fevereiro, que sob o sistema de César tinha 29 dias em um ano normal e de 30 em um ano bissexto.

Quando o novo dia amanheceu em primeiro de janeiro de 45 a.C., os romanos acordaram com um novo calendário que estava então entre os mais exatos do mundo. Ainda assim, continuou sujeito a erros e manipulações por parte de sacerdotes e políticos.

Depois de várias reclamações, o calendário de César tornou-se um objeto de orgulho para os romanos.

Escavações através do antigo império revelaram calendários entalhados em pedra e pintados em paredes, da mesma forma que nós penduramos os nossos calendários hoje em dia. O calendário de César também injetou um novo espírito em como as pessoas pensavam a respeito do tempo. Antes, ele era pensado como um ciclo de eventos naturais recorrentes, ou como instrumento de poder. Não mais. Agora, o calendário estava a disposição de todos como uma ferramenta prática e objetiva para organizar itinerários e horários de navegação, plantações, culto aos deuses, planejamento de casamentos, o momento de enviar cartas aos amigos, etc.

Combinado com a crescente popularidade de relógios de Sol e de água sofisticados, o novo calendário juliano introduziu o conceito de seres humanos ordenando suas próprias vidas individuais ao longo de uma progressão linear operando de forma independente da Lua, das estações e dos deuses.

Inevitavelmente, a nova ordem de Constantino, assim como a de César três séculos e meio antes, conseguiu pôr seu selo no calendário, neste caso, ao criar um novo sistema, religiosamente inspirado, de medir o tempo. Constantino fez isto deixando intacto o calendário básico de César de 365 1/4 dias e doze meses, enquanto operava três grandes mudanças dentro desta estrutura: a introdução do domingo como um dia santo em uma nova semana de sete dias; o reconhecimento oficial dos feriados cristãos como o Natal com datas fixas; e o enxerto no calendário da celebração da Páscoa, que não é uma data fixa, sendo condicionada ao calendário lunar judeu em uso quando Cristo foi crucificado.

A primeira atitude do imperador no sentido de reordenar o calendário veio em um édito divulgado em 321, nove anos após a batalha da ponte Mílvia, quando ele estabeleceu o domingo como o primeiro dia da semana de sete dias. A segunda mudança importante do calendário introduzida por Constantino foi em relação a quando celebrar a Páscoa, um assunto não tão fácil de resolver quanto a questão do domingo. Isto porque a Páscoa é o dia mais sagrado para os cristãos. E o culto à Páscoa é ainda mais complicado pelo fato de que a ressurreição de Cristo ocorreu durante a Páscoa judaica, que é datada segundo as fases da Lua no calendário judaico. Isso significa que a data da Páscoa judaica

- e da Páscoa cristã - se desvia do calendário solar, mudando todo ano.

O calendário de César continuaria a ser o calendário oficial no ocidente muito tempo depois da queda do Império, embora mais e mais pessoas passassem a achar uma lista organizada de dias, meses e anos uma coisa irrelevante. Até mesmo nos dias mais negros que se seguiram à queda de Roma, uma progressão de monges e pensadores isolados permaneceu inquisitivo, tanto quanto eles tinham capacidade, em relação à natureza e a ciência - inclusive em relação a meios melhores de medir o que Agostinho dizia ser imensurável: o tempo.

Quando os sinos repicaram por toda a Europa nos momentos minguantes de 4 de outubro de 1582, o calendário fez algo que não fazia desde a época de Júlio César: pulou dez dias, pelo menos nos países que obedeciam à bula do papa. Qualquer pessoa viva naquele que deveria ser 5 de outubro, instantaneamente perdeu dez dias de sua vida segundo o novo calendário de Roma. Isto genuinamente aborreceu as pessoas, que acharam que de alguma forma os dias tinham sido tomados delas. Em Frankfurt uma multidão se revoltou contra o papa e os matemáticos que, eles acreditavam, tinham conspirado para cometer este roubo. Outros expressaram abertamente seu medo e desconforto em aborrecer os santos para os quais rezavam e ver consequências disto na perda de tudo, desde boas colheitas até a vida após a morte no paraíso.

Os navegantes, muleteiros, tecelões, ferreiros e reis se preocupavam com impostos não coletados, salários não recebidos e prazos que passariam a vencer dez dias mais cedo. Banqueiros coçavam a cabeça para chegar a uma conclusão em relação a como calcular os juros durante um mês de apenas 21 dias, e padres locais tentaram explicar aos fiéis ansiosos que dias santos não eram os únicos dias atropelados: o mesmo tinha acontecido com outras datas, a exemplo os de aniversários, de nascimentos e casamentos, até feriados locais e cerimônias civis. Inclusive o aniversário do papa tinha mudado de 1 de janeiro de 1502 para 11 de janeiro de 1502.

Nações menos seguras no seio do Catolicismo, ou com menos pressa, não concordaram imediatamente. A França esperou até dezembro, quando o Rei Henrique III ordenou a mudança. A Bélgica e os estados católicos da Holanda também demoraram até o final de 1582, com Flandres e partes da Bélgica fazendo o pulo no dia seguinte 21 de dezembro que passou a ser 1 de janeiro. Em 1584 o resto da Bélgica tinha feito a mudança. A Hungria obedeceu em 1587.

Mais tarde, em 1700, os protestantes na Alemanha e Dinamarca adotaram a maioria das reformas gregorianas, inclusive a remoção dos dez dias do seu calendário solar e a regra do ano bissexto secular. Em 1775 Frederico, o Grande, finalmente supriu o calendário da Páscoa protestante, fato depois do qual o calendário gregoriano completo passou a ser a regra na Alemanha.

As igrejas orientais permaneceram inteiramente opostas ao calendário gregoriano até pouco depois da Primeira Guerra Mundial, quando um congresso de igrejas ortodoxas se reuniu em 1923 em Constantinopla. Durante todo o período da alteração de tempo gregoriano, poucas pessoas provavelmente focaram no papel da ciência, não percebendo que esta reforma era uma das primeiras instâncias no início da era moderna quando uma mudança que afeta quase todas as pessoas é lançada menos pela religiosidade e mais por um novo respeito pela exatidão científica - neste caso, para obter o tempo correto.

Em 10 de maio de 1750, um conde chamado George Parker (1697-1764) fez uma palestra na Royal Society com o seguinte título: "Observações a respeito dos anos solar e lunar, o ciclo dos dezenove anos, habitualmente chamado de O Número de Dourado, a epacta e o método para encontrar a época da Páscoa como são observados hoje na maior parte da Europa". Parker, um astrônomo amador bem relacionado com o círculo newtoniano em Greenwich e Londres, começou a sua fala fazendo uma atualização de quando o calendário juliano tinha se afastado em relação ao ano verdadeiro desde a época de César e desde a reforma gregoriana. Como ponto de referência, ele usou o que era então talvez a medida mais exata do ano já obtida: 365 dias, 5 horas 48 minutos e 55 segundos - calculado pelo falecido astrônomo real Edmund Halley (1656-1742), o homem que deu seu nome ao cometa Halley.

Países e povos fora da Europa em sua maioria não tiveram reação ao novo calendário nas décadas e séculos que se seguiram a 1582. A exceção foram as Américas, onde a reforma foi imposta por Espanha e Portugal sobre os povos que conquistaram. Entre estes estavam os astecas, incas e maias, cuja obra brilhante a respeito de astronomia e calendários já estava na maior parte esquecida e apagada pelos europeus, embora até hoje grupos isolados de maias, por exemplo, continuem a usar seu antigo calendário. Mais tarde, Grã-Bretanha, França, Estados Unidos e outras potências coloniais impuseram seu calendário às tribos indígenas no hemisfério ocidental. Na Ásia, os japoneses adotaram o calendário gregoriano em 1873, durante o período de ocidentalização dos imperadores Meiji. A maioria dos países e povos neste continente e na África preferiram manter seus próprios calendários a não ser que fossem forçados a mudar pelas potências coloniais europeias. A China resistiu até 1912, embora o calendário gregoriano só tenha se firmado por todo o país com a vitória do comunismo em 1949. Em 1 de outubro deste ano, um triunfante Mao Tsé-tung subiu em um palanque no topo do Portão da Paz Celestial, a entrada principal do palácio imperial de Pequim, ordenando logo em seguida que aquela cidade se tornasse a capital da China, que a bandeira vermelha com uma grande estrela dourada e quatro pequenas se tornasse a bandeira oficial chinesa, e que o ano ficasse de acordo com o calendário gregoriano.

Nesta época este calendário, lançado dois mil anos antes por Júlio César e modificado mil e seiscentos anos depois por um papa, tinha se tornado o calendário do mundo: um código para medir o tempo que hoje quase todos os povos usam como padrão global. Hoje a questão continua na era do tempo atômico, o que nos leva, por fim, ao prédio 78 do Observatório Naval norte - americano em Washington, onde o tempo é agora medido não através da observação da Lua ou do Sol, ou com um relógio de Sol ou de água, um pêndulo, mola ou cristal de quartzo, mas sim com uma minúscula massa de um elemento raro chamado césio. Ele também contribui para um sistema maior que mantém o tempo para o mundo inteiro, com exatidão de um bilionésimo de segundo por ano, ou 0,00000000114079 de um ano.

Exceto pelo fato de que o tempo oficial não é mais de fato medido desta forma, usando antiquados segundos e anos. Desde 1972, quando a rede atômica começou a funcionar, o Tempo Universal Coordenado (UTC) tem sido medido não pelo movimento da Terra no espaço mas sim pelas oscilações do nível atômico de um metal raro, macio, de cor azulada acinzentada, chamado césio. Em 1967 a taxa de pulso do césio estava calibrada em 9.192.631.770 oscilações por segundo. Esta é agora a medida oficial do tempo do mundo, substituindo o velho padrão baseado na rotação e órbita da Terra, que tinha usado como número-base um segundo igual 1/31556925,9747 de um ano. Isso significa que sob o novo regime do césio o ano não é mais oficialmente medido como tendo 365,242199 dias, mas sim como tendo 290.091.200.500.000.000 oscilações de césio (Cs), com uma aproximação de um ano ou duas oscilações.

O que significa que finalmente foi criado um mecanismo que consegue medir um ano verdadeiro e exato. Que era o objetivo de César, Aryabhata, al-Khwarizmi, Bacon, Clavius e tantos outros.

3.2 Utilizando frações contínuas na construção de um calendário

Um ano consiste de aproximadamente 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos que equivale a 365,242199 dias. As medidas do tempo e os calendários, como vimos, também são baseadas nos movimentos de rotação e translação da Terra e pela dinâmica de translação da Lua. A cada dia a Terra se desloca aproximadamente um grau, ou seja:

$$\frac{360°}{365,24}\, dia = 0,986°\; dia$$

O período de rotação da Terra é de 23h 56m 05s e o dia solar aparente corresponde entre 23h 45m a 24h 15m. Do dia solar aparente podemos tirar uma média que chamamos de dia solar médio, que é de 24 horas, sendo essa a média anual dos dias solares aparente.

O problema técnico do calendário é que, para ser prático, deve definir um período com um número inteiro de dias. Para tanto, esse período deve manter sincronia com um período astronômico que, geralmente, envolve uma parte fracionada do dia. A solução requer, de um lado, a determinação cada vez mais precisa da parte fracionada; e do outro, uma representação aproximada, mas satisfatória dessa parte fragmentada. Neste contexto as frações contínuas são ferramentas essências visto que esta parte fragmentada pode ser representada por meio de uma série finita de frações contínuas. É essa série que prescreve as regras de inserção de um dia inteiro no calendário para manter a sincronia; ou seja, a parte decimal do ano $0,242199074$ certamente, de tempos em tempos, deve ser convertida em um dia que chamamos de ano bissexto.

3.2.1 Solução utilizando frações contínuas

Utilizando frações contínuas, pode-se mostrar que

$$\frac{5h\ 48min\ 46seg}{1dia} = \frac{20926seg}{86400seg} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{64}}}}}} = [0;4,7,1,3,5,64].$$

A fração contínua $[0;4,7,1,3,5,64]$ fornece aproximações para o número $0,2421$

99074. Portanto, temos aproximações que nos dão diversas alternativas de correção do problema. A primeira aproximação desse número é dada por:

$$c_1 = [0; 4] = \frac{1}{4} = 0,25.$$

O calendário Juliano utilizava essa aproximação, que fornece um ano bissexto a cada 4 anos. Como podemos verificar no calendário Juliano, na média, um ano possui 365 dias e 6 horas ou o equivalente $365,25$ dias. Fazendo a subtração entre a duração do ano baseado no calendário Juliano que é de $365,25$ dias e a duração do ano real que é de (aproximadamente 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos) obtemos um resultado de 11 minutos e 14 segundos, sendo, portanto, esse o erro ao utilizarmos tal aproximação. Essa diferença, no entanto, não pode ser desprezada, pois ao longo do tempo esse erro gera a cada 128 anos, um dia em avanço em relação ao ano real.

O próximo convergente é dado por:

$$c_2 = [0; 4, 7] = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}} = \frac{7}{29} \cong 0,241379\ldots \ .$$

Com essa aproximação teríamos 7 anos bissextos a cada 29 anos. Contudo, seria uma regra de difícil aplicabilidade. Podemos simplificá-la, multiplicando seu numerador e denominador por 4. Então:

$$c_2 = [0; 4, 7] = \frac{4.7}{4.29} = \frac{28}{116} \cong 0,2413\ldots \ .$$

Para fazermos uma comparação com o calendário Juliano vamos multiplicar o numerador e o denominador da fração $1/4$ por 29 obtendo $29/116$.

Isto é, a cada 116 anos, teríamos somente 28 anos bissextos, em vez dos 29 anos bissextos previstos pelo calendário Juliano. Se utilizássemos tal aproximação, deveríamos excluir um dos 29 anos que são bissextos, e transformá-lo em um ano simples. A única complexidade dessa regra seria a obtenção dos múltiplos de 116. O erro ocasionado por essa aproximação seria de 1 minuto e 11 segundos a menos que a duração de 1 ano, pois a fração $7/29$ de um dia, equivale a aproximadamente 5 horas, 47 minutos e 35 segundos, transformando para segundos obtemos 20855 segundos, que é 71 segundos a menos do que deveria ser. Esta diferença de $20926 - 20855 = 71$ segundos por ano gera a cada 1217 anos, um erro de um dia a menos no calendário em relação ao ano real.

Agora temos que:

$$c_3 = [0; 4, 7, 1] = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{8}{33} = 0,2424\ldots\ .$$

Essa aproximação é muito boa em termos de erro, pois a fração 8/33 de um dia, que corresponde a aproximadamente 5 horas, 49 minutos e 5 segundos, ou seja, temos 20945 segundos, que é 19 segundos a mais do que o esperado. Isso ocasiona 1 dia a mais a cada 4547 anos. Seriam 8 anos bissextos em cada conjunto de 33 anos, mas também teríamos dificuldade com a elaboração de uma regra para sua aplicação. Podemos contornar tal problema, considerando que:

$$c_3 = \frac{8}{33} = \frac{8.4}{33.4} = \frac{32}{132}.$$

Para fazermos uma comparação dessa regra com a regra do calendário Juliano vamos multiplicar o numerador e o denominador da seguinte fração 1/4 por 33 onde obtemos a seguinte fração 33/132. Então, se aplicássemos tal regra, teríamos 32 anos bissextos a cada 132 anos, ao invés dos 33 anos bissextos do calendário Juliano. Da mesma forma do caso anterior, a principal dificuldade técnica seria a obtenção dos múltiplos de 132.

O próximo convergente,

$$c_4 = [4, 7, 1, 3] = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}} = \frac{31}{128} = 0,2421875$$

é extremamente próximo do esperado, pois a fração 31/128 do dia corresponde a 5 horas, 48 minutos e 45 segundos, ou seja, diferindo apenas de 1 segundo da duração média de 1 ano, que é de fato um erro muito pequeno. Assim, se utilizássemos tal regra, levaríamos 86400 anos para termos um dia de diferença entre o calendário e o ano real. E, a cada 128 anos, teríamos 31 anos bissextos, ao contrário dos 32 anos do calendário Juliano.

O próximo convergente é o mais preciso:

$$c_5 = [4, 7, 1, 3, 5] = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}}}} = \frac{163}{673} \cong 0,2421991\ldots \quad .$$

Nesse caso teríamos aproximadamente 5 horas, 48 minutos e $46,002$ segundos, porém, o tamanho do seu denominador o torna inviável.

Podemos fazer novamente uma comparação com o calendário Juliano. Para isso, vamos multiplicando numerador e denominador da fração $163/673$ por 4, obtendo a seguinte fração equivalente

$$c_5 = \frac{652}{2692}.$$

Assim, se utilizássemos esse convergente, teríamos a cada 2692 anos, 652 anos bissextos, em oposição aos 673 previstos pelo calendário Juliano. Essa regra, além de difícil aplicabilidade - pois teria um ciclo de 2692 anos - traria o problema da escolha dos 21 anos que deveriam ser bissextos, contudo seriam transformados em anos simples. Isso poderia ser resolvido, por exemplo, excluindo-se um ano bissexto, a cada 128 anos.

Conclusão

Nesta dissertação realizou-se o estudo acerca da Teoria das Frações Contínuas, suas principais propriedades e uma das muitas de suas aplicações. Mostramos que é possível utilizar frações contínuas tanto em aplicações teóricas (na construção de conceitos) quanto em aplicações de ordem prática (por exemplo, na construção de um calendário).

As frações contínuas como vimos, podem ser utilizadas para aproximações, por exemplo de números irracionais por racionais, a qual envolve apenas operações elementares com números inteiros - motivo pelo qual pode ser utilizada (de maneira introdutória) inclusive no ensino fundamental e/ou médio, por exemplo, em feira de ciências e seminários.

Diante do exposto, observou-se as implicações desta teoria nos diferentes domínios da matemática e ciências afins, ficando perceptível sua importância e aplicabilidade.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, E. X. L; BRACCIALI, C. F. **Frações contínuas:** propriedades e aplicações. São Paulo: SBMAC, 2005.

[2] CAJORI, F. **Uma história da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

[3] CHIHARA, T. S. **An intruduction to orthogonal polynomial**. New York: Gordon and Breach, 1978.

[4] DUNCAN, D. E. **Calendário**. Tradução de João Domenech. Rio de Janeiro: Ediouro, 1999.

[5] EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

[6] MATOS, M. P. **Séries e equações diferenciais**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda. 2017.

[7] MUNIZ NETO, A. C. **Fundamentos de cálculo**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[8] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[9] NIVEN, I. **Números:** racionais e irracionais. Rio de Janeiro: SBM, 1990.

[10] OLDS, C. D. **Continued fractions**. New York: The L.W. Springer Company, 1963.

[11] SILVA, S. A. **Introdução às frações contínuas**. PROFMAT, UFMA-2016.

[12] WALL, H. S. **Analytic theory of continued fractions**. New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1948.