UNIVERSIDADE RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

AURENILDO BEZERRA DOS SANTOS

NÚMEROS IRRACIONAIS: DA IRRACIONALIDADE DE NÚMEROS ALGÉBRICOS AOS PRIMEIROS TRANSCENDENTES

MOSSORÓ/RN
2018

AURENILDO BEZERRA DOS SANTOS

NÚMEROS IRRACIONAIS: DA IRRACIONALIDADE DE NÚMEROS ALGÉBRICOS AOS PRIMEIROS TRANSCENDENTES

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Semiárido, Campus Mossoró/RN para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Profº. Dr. Odacir Almeida Neves

MOSSORÓ/RN

2018

Sn Santos, Aurenildo Bezerra dos.
Números irracionais: Da Irracionalidade de Números Algébricos aos Primeiros Transcendentes / Aurenildo Bezerra dos Santos. - 2018.
47 f. : il.

Orientador: Odacir Almeida Neves.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Ambiente, Tecnologia e Sociedade, 2018.

1. Ensino da Matemática. 2. História da Matemática. 3. Números Algébricos. 4. Números Transcendentes. 5. Números de Liouville. I. Neves, Odacir Almeida , orient. II. Título.

AURENILDO BEZERRA DOS SANTOS

NÚMEROS IRRACIONAIS: DA IRRACIONALIDADE DE NÚMEROS ALGÉBRICOS AOS PRIMEIROS TRANSCENDENTES

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADA EM: 14 / 11 / 2018

BANCA EXAMINADORA

Dr. ODACIR ALMEIDA NEVES- UFERSA
Presidente

Dr. ANTÔNIO RONALDO GOMES GARCIA- UFERSA
Membro interno

Ronaldo César Duarte

Dr. RONALDO CÉSAR DUARTE– UERN
Membro externo

MOSSORÓ/RN, 2018.

Dedico a Deus pelo dom da vida, à minha família, em especial, à minha mãe Evinha Bezerra de Assis Santos e ao meu pai Aurino Antônio dos Santos por todo apoio que me foi dado nessa caminhada vitoriosa.

AGRADECIMENTOS

Ao senhor Deus pela dádiva da vida e por me abençoar em todos os momentos. Obrigado meu Deus.

Quero agradecer, imensamente, ao meu orientador neste trabalho, Professor Odacir Almeida Neves, pela confiança, compreensão e por toda a ajuda prestada ao longo de sua realização. Quero agradecer também aos demais professores integrantes da banca: Antônio Ronaldo Gomes Garcia e Ronaldo César Duarte pelas sugestões valiosas que enriqueceram o trabalho e contribuíram bastante para realização deste trabalho.

À minha amada mãe, Evinha Bezerra de Assis Santos, pelo amor, dedicação e por sempre acreditar em mim, devo a ela tudo o que me tornei.

Aos professores que passaram e foram essenciais nessa caminhada rumo à minha formação.

Aos meus queridos colegas de mestrado do Campus da UFERSA-Mossoró, pelos ensinamentos e pelo espírito de companheirismo durante os dois anos de curso.

À minha noiva, Jaqueline Medeiros, por todo apoio na realização deste trabalho e compreensão nos meus momentos de ausência.

Agradeço aos meus alunos do Curso de Matemática do Campus Avançado de Patu, pelas palavras de incentivo e apoio durante o mestrado.

Agradeço ao PROFMAT e a CAPES por proporcionar que vários professores que, assim como eu, possam realizar o sonho de serem mestres.

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza- uma beleza fria e austera, com a da escultura.”

(Bertrand Russell)

RESUMO

No ensino fundamental e médio os números irracionais são tratados de forma muito superficial, enquanto os números naturais, inteiros e racionais abrangem praticamente todo ensino de matemática. Já na graduação, os números irracionais são estudados sob o ponto de vista da análise e da álgebra. Diferentemente do que ocorre com o estudo dos racionais, existem muitos problemas sobre propriedades de vários tipos de números irracionais, dos quais muitos ainda intrigam estudiosos da atualidade. A história da matemática relata o impacto causado pela descoberta dos pitagóricos de que o conjunto dos números racionais não é suficiente para representar medidas de qualquer comprimento. Diante da importância do conceito de irracionalidade e que seu conhecimento mais aprofundado é imprescindível para o ensino da matemática e a compreensão de seus diversos ramos, o presente trabalho procurou ampliar o foco do leitor relativo à sua visão sobre números, com destaque para os algébricos (irracionais) e os primeiros transcendentes que, segundo a história da matemática, são chamados de números de Liouville, esclarecendo então, um pouco a complexidade do comportamento desses números, mostrando tanto seu lado desafiador, como sua fertilidade matemática. Neste trabalho, abordamos, de formas distintas, as irracionalidades de $\sqrt{2}$ e de e (Constante de Euler), com objetivo de despertar no leitor o fascínio pela matemática, mostrando diferentes "ferramentas" que podemos usar para se obter um mesmo resultado em matemática. Finalizamos o trabalho introduzindo conceito de números algébricos e transcendentes.

Palavras-chave: Ensino da Matemática. História da Matemática. Números Algébricos. Números Transcendentes. Números de Liouville.

ABSTRACT

In primary and secondary education, irrational numbers are treated very superficially, while natural, whole, and rational numbers cover practically all mathematics education. Already in graduation, irrational numbers are studied from the point of view of analysis and algebra. Unlike the study of rationals, there are many problems about properties of various kinds of irrational numbers, of which many still intrigue scholars today. The history of mathematics relates the impact caused by the discovery of the Pythagoreans that the set of rational numbers is not sufficient to represent measures of any length. In view of the importance of the concept of irrationality and its deeper knowledge is essential for the teaching of mathematics and the understanding of its various branches, the present work sought to broaden the reader's focus on his view on numbers, with emphasis on algebraic irrational) and the first transcendents which, according to the history of mathematics, are called Liouville numbers, thus clarifying somewhat the complexity of the behavior of these numbers, showing both its challenging side and its mathematical fertility. In this work, we approach, in different ways, the irrationalities of $\sqrt{2}$ and e (Euler's Constant), in order to awaken in the reader the fascination with mathematics, showing different "tools" that we can use to obtain the same result in mathematics . We finish the work introducing concept of algebraic and transcendent numbers.

Keywords: Mathematics Teaching. History of Mathematics. Algebraic Numbers. Transcendent Numbers. Numbers of Liouville.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os conceitos de irracionalidade e de transcendência[1] estão ligados a um dos mais belos e desafiadores ramos da teoria dos números. Problemas relacionados a esses conceitos intrigam matemáticos até hoje.

Historicamente, a definição de número irracional surgiu nos estudos sobre incomensurabilidade entre dois segmentos de reta. Segundo LIMA (2006, p.60), "os gregos acreditavam que sejam quais fossem os comprimentos dos segmentos AB e CD haveria sempre um segmento EF que caberia um número exato n de vezes em AB e um número exato m de vezes em CD". As circunstâncias e a época para a primeira percepção de medidas incomensuráveis ainda causam incertezas. Credita-se ao pitagórico[2] Hipasus de Metapontum, por volta de 410 a.c., a descoberta de que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos de reta incomensuráveis. De acordo com BOYER (1996) os pitagóricos o expulsaram da confraria[3]. Uma história diz que os pitagóricos lhe erigiriam um túmulo, como se estivesse morto, outra que sua apostasia foi punida pela morte num naufrágio, sendo esta a punição por ter declarado tal descoberta.

Uma argumentação possível para demonstrar a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado pode ter sido a seguinte: sejam l e d as medidas do lado e da diagonal do quadrado, respectivamente. Suponhamos que exista um número $k \neq 0$ (que segundo os pitagóricos era inteiro ou razão entre dois inteiros) tal que $d = m \cdot k$ e $l = n.k$ com m e n inteiros não nulos e primos entre si, ou seja, o máximo divisor comum entre m e n é igual a 1.

Conforme o teorema de Pitágoras segue que $d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 2l^2$. Assim, temos que $m^2 \cdot k^2 = 2n^2k^2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$, isto é, m^2 é um número par e como consequência m é par. Dessa forma, existe $u \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2u$, daí obtemos a igualdade $(2u)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4u^2 = 2n^2 \Rightarrow 2u^2 = n^2$, o que implica n um número par, provocando uma contradição, pois m e n são primos entre si, por hipótese. Portanto, l e d são medidas incomensuráveis.

O conceito de número transcendente é bem mais "sofisticado" do que o de irracional, ou seja, provar a transcendência de um número é mais difícil do que a sua irracionalidade e

[1] Transcendência: Segundo Euler a razão pela qual um número é chamado de transcendente esse transcende o poder das operações algébricas.

[2] Pitagóricos: Seita filosófico-religiosa, liderada por Pitágoras por volta de 410 a.c. em que um dos pontos fundamentais de sua doutrina era o lema " os números governam o mundo".

[3] Confraria: um grupo de pessoas que se associa em torno de interesses ou objetivos comuns, seja o mesmo ofício, a mesma profissão, modo de vida ou religiosos ou espirituais.

isso se deve ao fato de que podemos definir um número irracional como o que não satisfaz uma equação polinomial, de grau 1, com coeficientes inteiros; já os transcendentes não são raízes de polinômios não nulos, de qualquer grau, com coeficientes inteiros. Estas caraterísticas complexas e desafiadoras estimulam a curiosidade e o fascínio de matemáticos até os dias atuais na tentativa de compreender a natureza algébrica desses números.

Segundo MARQUES (2013), desde meados do século XVIII, o estudo dos números transcendentes forma uma área central da teoria dos números: a teoria dos números transcendentes. Em 1874, o matemático Georg Cantor provou que "quase" todos os números são transcendentes, porém, paradoxalmente, provar a transcendência de um número é uma tarefa em geral complicada, apesar de existirem em abundância.

Diante disso, a motivação para a escolha do tema partiu de um desejo particular de despertar no leitor o interesse pelos números irracionais e transcendentes. Através de definições, teoremas e fatos que estão ligados à aritmética desses números, priorizando, sem perda de rigor matemático, uma abordagem elementar dos resultados que serão apresentados no decorrer deste trabalho.

A escolha de discorrer um trabalho que tratasse sobre irracionalidade e transcendência se deve à relevância do tema. Nesse sentido, temos como objetivo geral, ampliar o foco do leitor relativo à sua visão sobre números, com destaque para os algébricos (irracionais) e os primeiros transcendentes, que são conhecidos como números de Liouville, na perspectiva que este texto sirva de motivação para que se busque um aprofundamento em trabalhos mais abrangentes, os quais destacamos FIGUEREDO (2011) e MARQUES (2013). A partir daí, temos os seguintes objetivos específicos que listamos abaixo:

- apresentar vários caminhos para se obter a irracionalidade de um número;
- apresentar alguns resultados com intuito de introduzir pensamentos críticos na área dos números irracionais e transcendentes;
- compreender o conceito incomensurabilidade;
- compreender o conceito de números algébricos e transcendentes;
- compreender o teorema de Liouville;
- compreender a definição de números de Liouville;
- esclarecer a diferença entre irracionalidade algébrica e a transcendência de um número real.

Quanto à sua estruturação, o trabalho, além da introdução, apresenta no primeiro capítulo, alguns resultados preliminares de aritmética dos inteiros que servirão de base para provas posteriores. No segundo capítulo, apresentam-se algumas formas de se obter a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Serão três demonstrações de caráter algébrico e outras três por argumentos geométricos, na perspectiva de enfatizar que podemos obter um resultado por meio de várias técnicas e explorar a beleza que a matemática nos proporciona, que é a de relacionar ideias que, aparentemente, não têm ligações entre si, mas que podem ser usadas para resolver um mesmo problema. Aborda-se ainda a irracionalidade de $\sqrt{p}$, com p um natural primo, que será generalizado com a demonstração da irracionalidade de números da forma $\sqrt[m]{a}$ em que $\sqrt[m]{a} \notin \mathbb{N}$ com a e m naturais maiores do que 1, obtendo assim, a irracionalidade de números como $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt[5]{27}$, $\sqrt[7]{8}$,... No terceiro capítulo, explora-se a irracionalidade de e (constante de Euler) com uma abordagem similar à que foi feita com $\sqrt{2}$. No quarto capítulo, definem-se números algébricos e transcendentes, dentre os transcendentes, destacam-se os números de Liouville, que representam os primeiros exemplos desses números, explicitando algumas propriedades, como também, alguns resultados da rica história desses números na matemática.

1 RESULTADOS PRELIMINARES

Este capítulo contém definições e demonstrações de resultados que servirão de apoio para os demais capítulos deste trabalho. Aqui nos referenciamos em bibliografias como LIMA (2012) e SANTOS (2012).

1.1 INDUÇÃO

O chamado Princípio da indução Finita consiste numa indispensável ferramenta na demonstração de muitos teoremas. Enunciamos, abaixo, duas formas deste princípio e, também, o Princípio da Boa Ordenação.

$\boldsymbol{P_0}$. Princípio da Boa Ordenação (PBO)

Todo conjunto não-vazio $A \subset \mathbb{N}$ contém um elemento mínimo.

$\boldsymbol{P_1}$. Primeira forma do Princípio de Indução Finita

Seja B um subconjunto dos inteiros positivos. Se B possui as duas seguintes propriedades

(i) $1 \in B$

(ii) $k + 1 \in B$ sempre que $k \in B$

então B contém todos os inteiros positivos.

$\boldsymbol{P_2}$. Segunda forma do Princípio de Indução Finita

Seja B um subconjunto dos inteiros positivos. Se B possui as duas seguintes propriedades

(i) $1 \in B$

(ii) $k + 1 \in B$ sempre que $1,2, \dots, k \in B$

então B contém todos os inteiros positivos.

Na realidade os princípios P_0, P_1 e P_2 são equivalentes. Provaremos que $P_0 \Leftrightarrow P_1$. Para o leitor interessado sugerimos SANTOS (2012, p. 187,188)

Demonstração:

($\boldsymbol{P_0} \Rightarrow \boldsymbol{P_1}$) Desejamos provar que se B é um subconjunto dos inteiros positivos, possuindo as propriedades (i) e (ii), então B, necessariamente, contém todos os inteiros positivos. A prova que apresentamos é por contradição. Vamos supor que, mesmo possuindo as propriedades (i) e (ii), B não contenha todos os inteiros positivos. Seja A o conjunto dos inteiros positivos não contidos em B. Pelo PBO, A possui um menor elemento e este é maior do que 1 pois $1 \in B$. Seja a_0 este elemento. É claro que $a_0 - 1$ pertence a B e como B satisfaz (ii) então o sucessor de $a_0 - 1$, que é a_0, também deve pertencer a B. Esta contradição nos leva a concluir que A tem que ser vazio, o que conclui a demonstração.

($\boldsymbol{P_1} \Rightarrow \boldsymbol{P_0}$) Se $1 \in A$, então 1 será o menor elemento de A. Se, porém, $1 \notin A$, então $1 \in \mathbb{N} - A$. Para cada elemento $n \in \mathbb{N}$, seja $I_n = \{1,2,3, \dots, n\}$ e defina $B = \{n \in \mathbb{N}; I_n \subset \mathbb{N} - A\}$. Note que $1 \in B$ e que se $m \in A$ então $I_m \not\subset \mathbb{N} - A$ e, consequentemente $m \notin B$. Como $A \neq \emptyset$, então $B \neq \mathbb{N}$. De $1 \in B$, $B \neq \mathbb{N}$ e P_1, consegue-se $n_0 \in B$ tal que $n_0 + 1 \notin B$. Temos

(I) $n_0 \in B$ implica que $\{1,2, \dots, n_0\} \subset \mathbb{N} - A$ e portanto, $\{1,2, \dots, n_0\} \cap A = \emptyset$.

(II) $n_0 + 1 \notin B$ implica que existe um elemento $q \in I_{n_0+1}$ que não pertence a $\mathbb{N} - A$, ou seja, $q \in A$. Por (I), $q = n_0 + 1$.

Em resumo, provamos que qualquer inteiro positivo menor que $n_0 + 1$ não pertence ao conjunto A e que $n_0 + 1 \in A$. Portanto $n_0 + 1$ é o menor elemento de A.

1.2 NOÇÕES DE ARITMÉTICA DOS INTEIROS

O resultado a seguir é conhecido como algoritmo da divisão.

Teorema 1.2.1 Se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, então existem (e são únicos) $q, r \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq r < |b|$, tais que

$$a = qb + r$$

Prova. (i) Consideremos primeiramente o caso $b > 0$. Então teremos o conjunto dos múltiplos de b ordenados, de acordo com sua ordem natural sobre a reta:

$$\dots < -3b < -2b < -b < 0 < b < 2b < 3b < \cdots$$

O que dá uma decomposição da reta em intervalos disjuntos da forma $[qb,\ (q + 1)b) = \{x \in \mathbb{R}: qb \leq x < (q + 1)b\}$, onde $q \in \mathbb{Z}$. Assim dado $a \in \mathbb{Z}$, ele pertence a apenas um desses intervalos e portanto, deverá ser da forma $a = qb + r$, onde $r \in \mathbb{Z}$ e $r \geq 0$. É claro que $r < (q + 1)b - qb = b$.

(ii) agora se $b < 0$, então aplicamos o teorema no caso demonstrado em (i) para determinar $q', r \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq r < |b|$ para escrever

$$a = q'|b| + r$$

Fazendo $q = -q'$ e como $|b| = -b$, pois $b < 0$, obtemos

$$a = qb + r,$$

onde $q, r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < |b|$.

(iii) Resta demostrar que q r, com $0 \leq r < |b|$ são únicos. De fato, suponha que

$$a = qb + r \text{ e } a = q_1 b + r_1,$$

onde r_1 também satisfaz $0 \leq r_1 < |b|$. Por subtração das expressões obtemos
$(q - q_1)b + (r - r_1) = 0$, ou seja

$$r - r_1 = (q_1 - q)b.$$

Agora afirmamos que $r = r_1$, e essa igualdade implicará que $q = q_1$, o que nos dará a unicidade pedida. Ora, se $r = r_1$ não ocorresse, teríamos que

$$0 < |r_1 - r| < |b|$$

Assim,

$$|r - r_1| = |q_1 - q||b|$$

logo,

$$0 < |q_1 - q| < 1.$$

O que não pode ocorrer, pois $|q_1 - q|$ é um inteiro, o que não é possível, pois $|q_1 - q|$ é um número inteiro. Portanto a demonstração do Teorema 1.2.1 está completa.

Definição: Dados dois inteiros a e b chamamos de máximo divisor comum (abreviadamente mdc) de a e b ao maior inteiro $m = mdc(a, b)$ que é simultaneamente divisor de a e de b, isto é:

i) $m|a \; e \; m|b$

ii) $se \; r \in \mathbb{N}, \; r|a \; e \; r|b, então \; r \leq m$

Observação. Se um deles, digamos b, fosse 0, então o $mdc(a, 0) = |a|$, onde $|a|$ é o valor absoluto de a. Tem-se que o $mdc(a, b)$está definido para a ou b diferente de zero.

Definição: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, dizemos que eles são primos entre si se o máximo divisor comum de a e b é 1.

Teorema 1.2.2 (Fundamentação do Algoritmo de Euclides) Seja c o resto da divisão do inteiro a pelo inteiro (positivo) b. Então $mdc(a, b) = mdc(b, c)$.

Demonstração: Pela divisão euclidiana, existe um inteiro q tal que $a = qb + c$. Sejam $m = mdc(a, b)$ e $n = mdc(b, c)$. Como m é divisor tanto de a como de b, existem inteiros a_1 e b_1 tais que $a = ma_1$ e $b = mb_1$. Assim $c = a - qb = ma_1 - qmb_1 = m(a_1 - qb_1)$, logo m é divisor comum entre b e c, o que implica que $m \leq n$. Analogamente, como n é divisor tanto de b como de c, também é divisor de $a = qb + c$, logo é divisor comum entre a e b e, portanto $n \leq m$. Isso prova que $m = n$, como queríamos.

Observação: Algoritmo de Euclides - Podemos calcular o mdc entre dois inteiros aplicando recursivamente o teorema anterior, obtendo o chamado método das divisões sucessivas ou Algoritmo de Euclides.

Teorema 1.2.3 (Teorema de Bézout) Dados os inteiros a e b, existem inteiros x e y tais que $mdc(a,b) = ax + by$.

Demonstração: Sejam m o menor elemento positivo do conjunto I de todos os inteiros da forma $ax + by$, com x e y inteiros. Dividindo a por m encontramos $a = qm + r$, com q e r inteiros e $0 \leq r < m$. Por ser um elemento de I, m é a soma de um múltiplo de a com um múltiplo de b, logo $r = a - qm$ também será uma soma deste tipo e, portanto, elemento de I. Como $r < m$ e m é o menor elemento positivo de I, concluímos que $r = 0$, isto é m é divisor de a. Analogamente, provamos que m é divisor de b. Agora, se d é um divisor comum qualquer de a e b, d é divisor de qualquer elemento de I, logo d é divisor de m, o que implica que $d \leq m$. Assim, m é o máximo divisor comum de a e b.

Corolário 1.2.1 Todo divisor comum de dois inteiros a e b é divisor do $mdc(a,b)$.

Demonstração: Seja c um inteiro tal que $c|a$ e $c|b$. Considere $d = mdc(a,b)$, pelo Teorema de Bézout segue que existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ax + by$. Como $c|a \Rightarrow c|ax$ e $c|b \Rightarrow c|by$, daí temos que $c|(ax + by) \Rightarrow c|d$.

Teorema 1.2.4 Se o produto bc é múltiplo de a e $mdc(a,b) = 1$, então c é múltiplo de a.

Demonstração. Pelo Teorema de Bézout, existem inteiros x e y tais que $1 = ax + by$. Multiplicando por c obtemos $c = cax + bcy$. Como cax e bcy são múltiplos de a, c é múltiplo de a.

Definição. Um número inteiro $n > 1)$ possuindo somente dois divisores positivos n e 1 é chamado primo. Se $n > 1$ não é primo dizemos que n é composto.

Lema 1.2.1 Se $p|ab, p$ primo, então $p|a \; ou \; p|b$.

Demonstração: Se $p \nmid a$, então $mdc(a,p) = 1$ o que implica, pelo Teorema 2.1.4, $p|b$.

Teorema 1.2.5 (Teorema Fundamental da Aritmética-TFA) Todo inteiro maior do que 1 pode ser representado de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos.

Demonstração: Se n é primo não há nada a ser demonstrado. Suponhamos, então, n composto. Seja $p_1 > 1$ o menor dos divisores positivos de n. Afirmamos que p_1 é primo. Isto é verdade, pois, caso contrário existiria $p, 1 < p < p_1$ com $p|n$, contradizendo a escolha de p_1. Logo, $n = p_1 n_1$.

Se n_1 for primo a prova está completa. Caso contrário, tomamos p_2 como o menor divisor positivo de n_1. Pelo argumento anterior, p_2 é primo e temos que $n = p_1 p_2 n_2$. Repetindo este procedimento, obtemos uma sequencia decrescente de inteiros positivos $n_1, n_2, \dots, n_r$. Como todos eles são inteiros maiores do que 1, este processo deve terminar. Como os primos na sequencia $p_1, p_2, \dots, p_k$ não são, necessariamente, distintos, n terá, em geral, a forma:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}.$$

Para mostrarmos a unicidade usamos indução em n. Para $n = 2$ e afirmação é verdadeira. Assumimos então, que ela se verifica para todos os inteiros maiores do que 1 e menores do que n. Vamos provar que ela também é verdadeira para n. Se n é primo, não há nada a provar. Vamos supor, então, que n seja composto e que tenha duas fatorações, isto é,

$$n = p_1 p_2 \dots p_s = q_1 q_2 \dots q_r.$$

Vamos provar que $s = r$ e que cada p_i é igual a algum q_j. Como p_1 divide o produto $q_1 q_2 \dots q_r$ ele divide pelo menos um dos fatores q_j. Sem perda de generalidade podemos supor que $p_1 | q_1$. Como são ambos primos, isto implica $p_1 = q_1$. Logo $n/p_1 = p_2 \dots p_s = q_2 \dots q_r$. Como $1 < n/p_1 < n$, a hipótese de indução os diz que as duas fatorações são idênticas, isto é, $s = r$ e, a menos da ordem, as fatorações $p_1 p_2 \dots p_s$ e $q_1 q_2 \dots q_s$ são iguais.

Teorema 1.2.6 (Euclides). Existem infinitos primos.

Demonstração: Suponha por absurdo que $p_1, p_2 \dots p_m$ fossem todos primos. O número $N = p_1, p_2 \dots p_m + 1 > 1$ não seria divisível por nenhum primo p_i tal que $i \in \{1,2, \dots, m\}$, o que contradiz o Teorema Fundamental da Aritmética.

2 A IRRACIONALIDADE DE $\sqrt{2}$

As ideias para a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ consistem em supor que $\sqrt{2}$ é um número racional e chegar numa contradição. A razão de se obter que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ por argumentos simples está ligada ao fato de que esse é um número algébrico, como veremos mais adiante neste trabalho, ou seja, por existir um $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x = 2$, possibilita-nos mostrar sua irracionalidade usando fortemente essa relação.

2.1 DEMONSTRAÇÃO POR PARIDADE E FRAÇÕES IRREDUTÍVEIS

A demonstração a seguir usa as ideias de paridade e frações irredutíveis e é frequentemente utilizada em textos para a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ devido a sua simplicidade.

Demonstração:

Suponha que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \text{ com } p, q \in \mathbb{Z} \ e \ q \neq 0, \qquad \text{(i)}$$

onde $p \,/\, q$ é uma fração irredutível $(mdc(p, q) = 1)$. Logo, elevando os membros de (i) ao quadrado, tem-se.

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ é um número par.}$$

Temos que se p^2 é par, então p é par, de fato, se p fosse ímpar, ou seja, $p = 2m + 1$, para algum $m \in \mathbb{Z}$, teríamos $p^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$, o que acarreta p^2 ímpar.

Segue-se que p par, existe um $n \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2n$, logo:

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow (2n)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4n^2 = 2q^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2n^2 = q^2 \Rightarrow q^2 \text{ é } par \Rightarrow q \text{ é } par.$$

Mas, com $p \ e \ q$ números pares teríamos $mdc(p, q) \neq 1$, o que contradiz a hipótese de que a fração $\frac{P}{q}$ é irredutível.

2.2 DEMONSTRAÇÃO VIA TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA (TFA)

A próxima demonstração baseia-se no Teorema Fundamental da Aritmética (TFA).

Demonstração:

Suponhamos que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, como $\sqrt{2} > 0$ podemos supor $m, n \in \mathbb{N}$. Elevando os membros da igualdade ao quadrado, segue que

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2,$$

mas essa igualdade é absurda, já que na fatoração de m^2 em primos o fator 2 aparece um número par de vezes. Enquanto em $2n^2$ o fator 2 aparece um número ímpar de vezes, o que contradiz a unicidade do TFA. Portanto $\sqrt{2}$ é irracional.

2.3 DEMONSTRAÇÃO VIA PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO (PBO)

Para a demonstração a seguir, usaremos o Princípio da Boa Ordenação (PBO):

Demonstração:

Suponha que o conjunto $S = \{n \in \mathbb{N};\ n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\}$ é não vazio $(S \neq \emptyset)$. Então, de acordo com o PBO, existe um $b \in S$ tal que $b \leq n, \forall n \in S$. Desse modo, temos:

$$b\sqrt{2} = a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

como

$$1 < \sqrt{2} < 2 \Leftrightarrow 1 < \frac{a}{b} < 2,$$

segue que multiplicando as desigualdades por $b > 0$, obtemos:

$$b < a < 2b,$$

subtraindo b em cada membro, segue que $0 < a - b < b \Rightarrow a - b < b. (*)$

Provaremos agora que $a - b \in S$. De fato,

$$\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}.$$

Por hipótese,

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

logo:

$$\sqrt{2} = \frac{2 - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b} - 1} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{\frac{2b - a}{b}}{\frac{a - b}{b}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} = \frac{2b - a}{a - b} \Leftrightarrow (a - b)\sqrt{2} = 2b - a \in \mathbb{Z},$$

logo $(a - b) \in S$, o que é um absurdo, já que de $(*)$ temos que $a - b < b$ e b é o elemento mínimo de S. Portanto, $S = \emptyset$ e $\sqrt{2}$ é irracional.

As próximas demonstrações para irracionalidade de $\sqrt{2}$ se baseiam em argumentos geométricos.

2.4 NÃO EXISTE UMA SUBSEQUÊNCIA INFINITA DECRESCENTE DE NÚMEROS NATURAIS

A seguinte prova se baseia no fato de que não existe uma subsequência decrescente e infinita de números naturais.

Demonstração:

Considere um retângulo R_1 com lados $L_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $l_1 = 1$. Como $L_1 > 2$, pode-se dividir R_1 em dois quadrados de lado 1 e um retângulo R_2 com lados $L_2 = 1$ e $l_2 = \sqrt{2} - 1$ (veja a Figura1) . Note que $\frac{L_1}{l_1} = \frac{L_2}{l_2} = \sqrt{2} + 1$. Recursivamente, constrói-se retângulos R_n, $n = 3,4,5,6, \dots$, com lado maior $L_n (= l_{n-1})$ e de lado menor $l_n (= L_{n-1} - 2l_{n-1})$. Provaremos por indução que $\frac{L_n}{l_n} = \sqrt{2} + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Suponha, por hipótese de indução, que $\frac{L_{n-1}}{l_{n-1}} = \sqrt{2} + 1$, então

$$\frac{L_n}{l_n} = \frac{l_{n-1}}{L_{n-1} - 2l_{n-1}} = \frac{1}{\frac{L_{n-1}}{l_{n-1}} - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

Logo, a proporção entre os lados maior e menor dos retângulos obtidos é sempre constante e igual a $\sqrt{2} + 1$, assim existem infinitos retângulos R_n. Note que:

$$1 < \sqrt{2} + 1 = \frac{L_n}{l_n} = \frac{l_{n-1}}{l_n} \Longrightarrow l_{n-1} > l_n.$$

ou seja, a sequência (l_n) é decrescente e infinita.

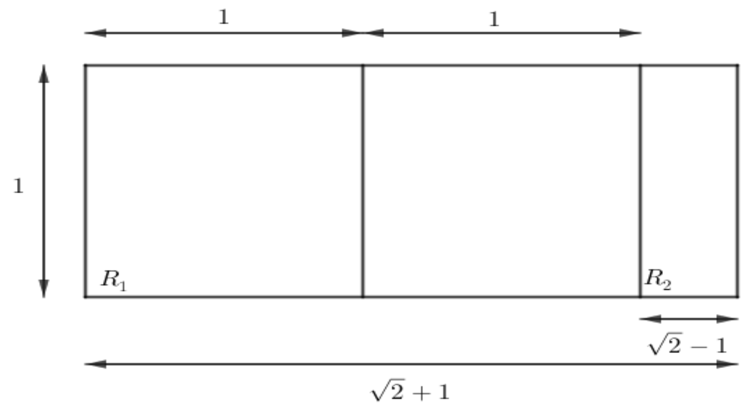


Figura 1 - Representação geométrica da demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ utilizando retângulos.

Fonte: Elaborada pelo autor

Suponha que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com p e q números naturais primos entre si. Definimos S_1 como o retângulo e para cada $n \in \mathbb{N}$ de lados $L'_1 = p + q$ e $l'_1 = q$, desse modo, temos:

$$\frac{L'_1}{l'_1} = \frac{p+q}{q} = \frac{p}{q} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

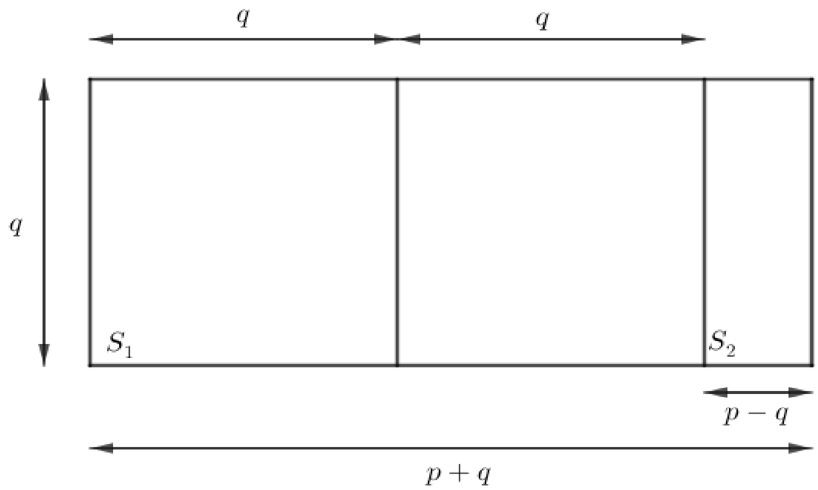


Figura 2 - Representação geométrica da demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ utilizando retângulos.

Fonte: Elaborada pelo autor

assim, analogamente à construção anterior, obtemos infinitos retângulos S_n com lados L'_n e l'_n. Como a construção dos lados menores l'_n envolve subtração a partir dos lados $p + q$ e q, obtendo uma sequência $l'_1 > l'_2 > l'_3 > \cdots > l'_n > \cdots$ de números inteiros positivos, já que se tratam de lados de um retângulo, o que acarreta um absurdo, pois a sequência (l'_n) é decrescente e infinita de números naturais, o que não é possível.

2.5 USANDO TRIÂNGULOS

A demonstração que apresentaremos agora foi publicada por APOSTOL (2000) e utiliza construções com triângulos.

Demonstração:

Considere um triângulo retângulo isósceles com os catetos medindo 1, suponha que sua hipotenusa possa ser expressa por um número racional, isto é,

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

com $p \; e \; q$ inteiros positivos tais que $mdc(p, q) = 1$. Denominaremos tal triângulo por T_1. Multiplicando todos os lados de T_1 por q, obtemos um triângulo T, semelhante a T_1 com catetos e hipotenusa medindo $q \; e \; p$, respectivamente. Não existe outro triângulo com lados de medida inteira menor e semelhante a T. De fato, para todo k inteiro positivo $k < q$, ao multiplicarmos os lados de T_1 por k, obtemos um novo triângulo com catetos de medida k e hipotenusa $k\sqrt{2} = k.\frac{p}{q}$, que não é um número inteiro já que q não divide k, o que gera uma contradição.

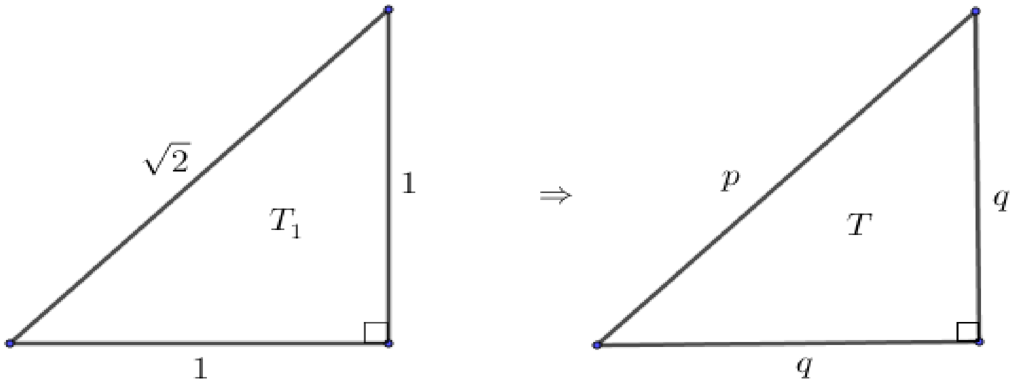


Figura 3 - Representação geométrica da demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ utilizando triângulos.

Fonte: Elaborada pelo autor

A partir daí, basta construir um triângulo semelhante a T com lados de medidas inteiras e menores do que os lados de T. Seja T o triângulo ABC, conforme a figura 4, traçamos um arco AX com centro no vértice C e X é um ponto sobre a hipotenusa de medida p.

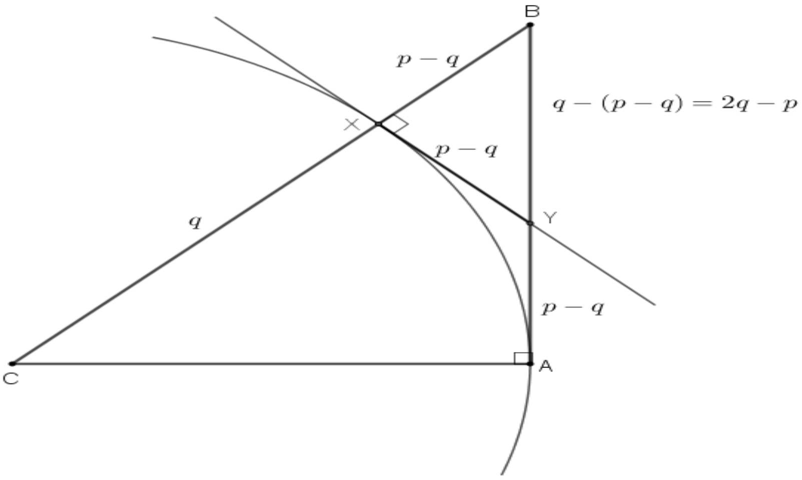


Figura 4 - Representação geométrica da demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ utilizando retângulos.
Fonte: Elaborada pelo autor

Observe que os números inteiros $p - q$ e $2q - p$ representam, respectivamente, os catetos e a hipotenusa do triângulo XYB que é semelhante T, o que é um absurdo. Portanto, por estes argumentos, o número $\sqrt{2}$ é irracional.

2.6 USANDO QUADRADOS

Antes de abordarmos a irracionalidade de outros números, apresentaremos uma demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional com o auxílio de construções de quadrados, aparentemente, a prova foi descoberta por Stanley Tennenbaum na década de 1950, mas foi amplamente divulgada por John Conway por volta de 1990.

Demonstração:

Suponha que $\sqrt{2}$ possa ser escrito na forma $\sqrt{2} = \frac{x}{y}$, com x e y números naturais e primos entre si. Não existem números naturais x_1 e y_1 com $x_1 < x$ ou $y_1 < y$ tais que

$$\sqrt{2} = \frac{x_1}{y_1} \Leftrightarrow 2 = \frac{{x_1}^2}{{y_1}^2}.$$

De fato, se $x_1 < x$ e $2.{y_1}^2 = {x_1}^2$, teríamos

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{{x_1}^2}{{y_1}^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1},$$

logo x e y não seriam primos entre si, acarretando uma contradição. A figura a seguir expressa o significado geométrico da relação $x^2 = 2y^2$.

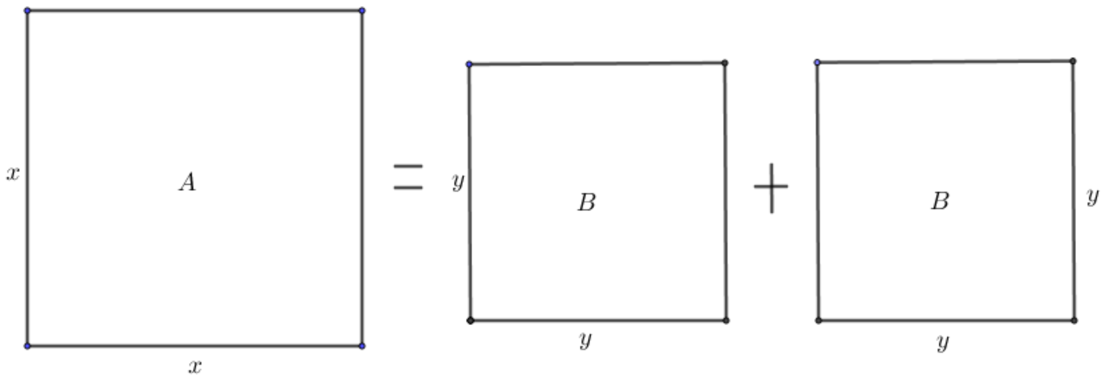


Figura 5 - Representação geométrica da demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ utilizando quadrados.

Fonte: Elaborada pelo Autor

Isto é, o quadrado de lado x e área A tem o dobro da área do quadrado B com lado y. Agora vamos sobrepor os dois quadrados de área B no quadrado A, veja a figura a seguir:

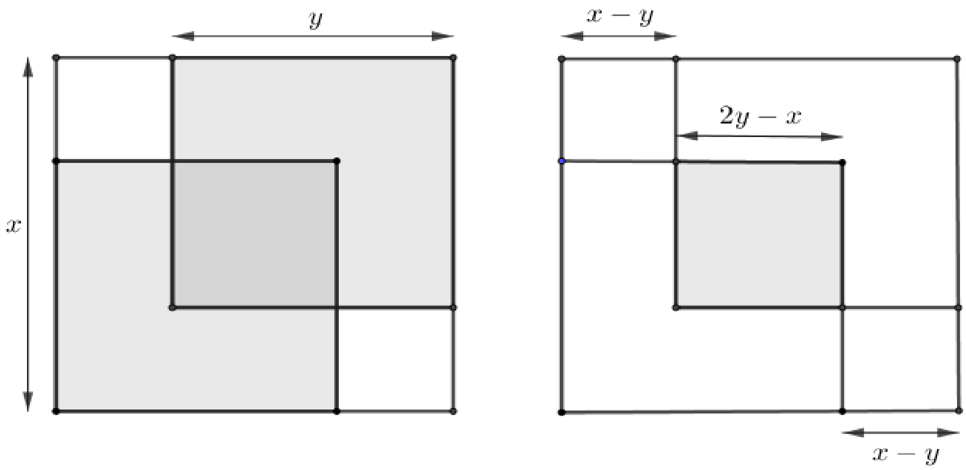


Figura 6 - Representação geométrica da demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ utilizando quadrados.

Fonte: Elaborada pelo autor

Na figura 6, à esquerda, são formados três novos quadrados cujos lados são os números inteiros $2x - y$ e $x - y$. A soma das áreas dos dois quadrados de lado $x - y$ é igual à área do quadrado de lado $2y - x$, pois $2B = A$. Logo, obtemos $2B_1 = A_1$ onde A_1 é a área do quadrado de lado $x_1 = 2y - x$ e B_1 a área do quadrado de lado $y_1 = x - y$. Veja a figura a seguir:

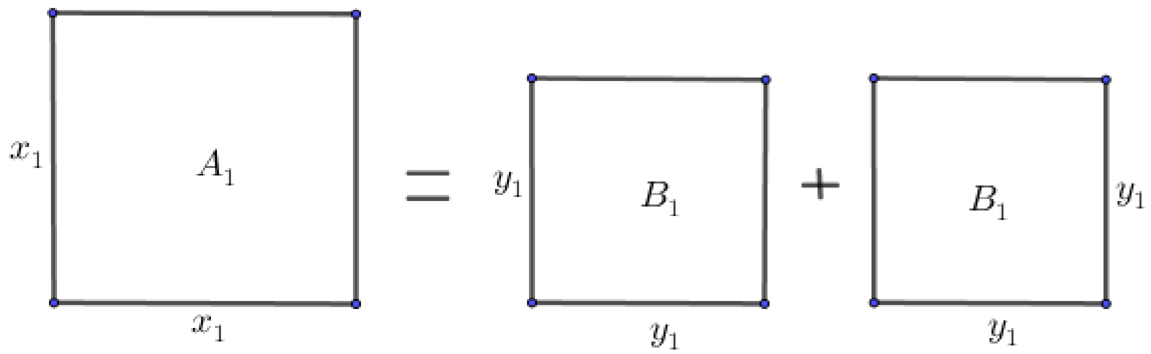


Figura 7 - Representação geométrica da demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ utilizando retângulos.

Fonte: Elaborada pelo autor

Daí, tem-se ${x_1}^2 = 2{y_1}^2$. Como $x_1 < x$ e x_1 é um número inteiro, chegamos numa contradição. Portanto $\sqrt{2}$ é irracional.

2.7 IRRACIONALIDADE DE $\sqrt{\boldsymbol{p}}$

Trataremos agora da irracionalidade de $\sqrt{p}$, com $p \in \mathbb{N}$ e primo, logo em seguida provaremos a irracionalidade de números do tipo $\sqrt[m]{p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}}$. Nas demonstrações utilizaremos o TFA.

Demonstração:

Por um procedimento análogo ao que foi feito com $\sqrt{2}$, supõe-se, por hipótese, que $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$ com m e n números naturais e primos entre si, isto é, $mdc(m, n) = 1$. Logo, $\sqrt{p} = \frac{m}{n} \Rightarrow p = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = pn^2 \Rightarrow p|m^2$. Como p é primo, segue que $p|m$. Assim, existe um $x \in \mathbb{Z}$ tal que $m = x \cdot p$, desse modo temos que:

$m^2 = pn^2 \Rightarrow (xp)^2 = pn^2 \Rightarrow x^2p^2 = pn^2 \Rightarrow x^2p = n^2 \Rightarrow p|n^2 \Rightarrow p|n.$

Logo, $p|m$ e $p|n$, o que contradiz a hipótese de m e n serem primos entre si. Portanto, $\sqrt{p}$ é irracional.

2.8 IRRACIONALIDADE DE $\sqrt[m]{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n_1}} \cdot \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{n_2}} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{n_r}}}$

A prova a seguir revela um resultado mais geral, que mostra a irracionalidade de números como: $\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{15}$, $\sqrt[4]{27}$ e $\sqrt[3]{9}$ isto é, números da forma $\sqrt[m]{a}$, onde a e m são números naturais maiores do que 1 tais que:

$$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$$

em que $p_1, p_2, \ldots, p_r$ são primos distintos e $n_1, n_2, \ldots, n_r$ pertencem aos naturais, além disso, $n_k < m$, para todo $k = 1,2,3, \ldots, r$. Vale salientar que a existência da fatoração $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$ é garantida pelo TFA.

Demonstração:

Suponha que $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}}$ seja racional, segue que:

$$\sqrt[m]{p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}} = \frac{u}{v}$$

com u e v naturais e primos entre si. Manipulando obtemos:

$$p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r} = \frac{u^m}{v^m} \Rightarrow u^m = v^m \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r},$$

desse modo, para algum $k = 1,2,3, \ldots, r$ existe um n_k, que tomaremos n_1 sem perda de generalidade, tal que

$$p_1^{n_1} | u^m \Rightarrow p_1 | u^m \Rightarrow p_1 | u.$$

Então podemos escrever $u = p_1 \cdot t$, $t \in \mathbb{Z}$ e obtermos:

$$(p_1 \cdot t)^m = v^m \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r} \Rightarrow$$

$$p_1{}^m \cdot t^m = v^m \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r} \Rightarrow$$

$$p_1{}^j \cdot t^m = v^m \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$$

em que $j = (m - n_1) \in \mathbb{N}$, pois $m - n_1 > 0$. Logo,

$$p_1{}^j | v^m \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r} \Rightarrow$$

$$p_1 | v^m \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}.$$

Então, segue que $p_1 \nmid p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$, já que $p_1, p_2, \ldots, p_r$ são primos distintos. Portanto, $p_1 | v^m \Rightarrow p_1 | v$. Logo, $p_1 | u$ e $p_1 | v$, o que contradiz o fato de u e v serem primos entre si. Portanto, $\sqrt[m]{p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}} \notin \mathbb{Q}$.

De posse desse resultado, números como:

$\sqrt{10} = \sqrt{2 \cdot 5}$, $\sqrt[5]{27} = \sqrt[5]{3^3}$ e $\sqrt[5]{75} = \sqrt[5]{5^2 \cdot 3}$ são exemplos de números irracionais.

3 A IRRACIONALIDADE DA CONSTANTE DE EULER

Um importante exemplo de número irracional é o e conhecido como constante de Euler[4]. Apesar de, segundo MAOR (2008), as origens de e são anteriores a Euler e aparentemente surgiram em problemas de juros. MAOR (2008) afirma ainda que o número de Euler era conhecido, de modo implícito e não intencional, pelos antigos, por meio de situações de ordem prática, antes de qualquer estudo teórico.

Uma motivação para o estudo do numero e vem de cálculos financeiros, em virtude do limite da sequência de números reais cujo termo geral é $(1+1/n)^n$. A história conta que os babilônios haviam aproximado o valor da constante de Euler, em cálculos financeiros, mas não há indícios da compreensão deste fato, pelo caráter empírico da matemática deste povo. Vejamos alguns valores para expressão $(1+1/n)^n$ à medida que n cresce segundo a tabela:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$
2	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$
10	$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}593842601$
100	$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}70481382942152\ldots1$

Figura 8 - Desenvolvimento da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Fonte - Elaborada pelo autor

[4] Leonhard Euler (1707-1783), matemático suíço, foi um dos primeiros a estudar as propriedades do número e.

Todos os números da tabela são racionais e poderíamos realizar mais cálculos e ir um pouco mais além, porém estes cálculos não levariam a um entendimento das propriedades do número e. Na realidade, prova-se que

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Buscaremos agora a irracionalidade do número e por métodos diferentes, mas todas demonstrações que apresentaremos neste capítulo usam a série de Taylor da função exponencial.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Diferentemente, do que ocorreu com $\sqrt{2}$, as provas para a irracionalidade de e recaem em métodos um pouco mais sofisticados do ponto de vista desta comparação. Isso se deve ao fato de que e é um número transcendente, os quais abordaremos com mais detalhes no próximo capítulo. Para mais detalhes a respeito da transcendência de e recomendamos a leitura de MARQUES (2013).

Para as próximas demonstrações faremos uso de um resultado conhecido como Princípio Fundamental da Teoria dos Números.

3.1 TEOREMAS E PROPOSIÇÕES

Nesta seção será abordada a irracionalidade de e (Constante de Euler) de algumas maneiras distintas e em todas elas usaremos o forte fato do e ser definido por série em que seu termo geral converge para zero de forma muito rápida.

Teorema 3.1 *Dado $m \in \mathbb{Z}$, não existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $m < n < m + 1$.*

Demonstração: Como $m < n < m + 1$ se, e somente se $0 < n - m < 1$, então é necessário e suficiente mostrar que não há número natural entre 0 e 1. Suponhamos, por absurdo, que o teorema é falso, ou seja, podemos definir um conjunto $S = \{n \in \mathbb{N}; 0 < n < 1\}$ não vazio. Logo, pelo Princípio da Boa Ordenação (PBO), existe $n_0 \in S$ mínimo. Assim, n_0 satisfaz as desigualdades $0 < n_0 < 1$, agora multiplicando essas desigualdades por n_0, obtemos $0 < n_0^2 < n_0 \Leftrightarrow 0 < n_0^2 < n_0 < 1$, então $n_0^2 \in S$, contrariando a minimalidade de n_0.

Proposição 3.1 *O número **e** pertence ao intervalo aberto* $(2,3)$.

Demonstração:

Como

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

claramente $2 < e$, resta-nos mostrar que $e < 3$, para isso provaremos por indução que $n! > 2^{n-1}$ para $n \geq 4$. Para $n = 4$, temos $4! > 2^3 \Leftrightarrow 24 > 8$, o que é verdade. Suponhamos que $n! > 2^{n-1}$ para $n \geq 4$, resta mostrar que $(n+1)! > 2^n$. De fato,

$(n+1)! = (n+1)n! > 2 \cdot n!$, pois $n \geq 4$, logo, $(n+1)! > 2 \cdot n!$ e conforme a hipótese, segue que

$(n+1)! > 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, provando assim a desigualdade desejada. De posse disso, temos:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots$$

Note que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots$

é a soma de uma progressão geométrica infinita de razão $\frac{1}{2}$, logo,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Assim,

$$e < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots\right) = 1 + 2 = 3,$$

provando a proposição.

3.2 PROVA CLÁSSICA

A prova da irracionalidade de e que apresentaremos inicialmente foi dada por Fourier, em 1815, a qual julgamos a mais elementar. Considere a série de Taylor de e

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Suponha que e possa ser escrito na forma

$$e = \frac{p}{q}$$

com $p, q \in \mathbb{N}$ e $q > 1$, pois de acordo com a proposição 3.1, $e \notin \mathbb{Z}$ .Ao multiplicar os dois membros da igualdade por $q!$ temos:

$$e.q! = q! + q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{(q-1)!} + \frac{q!}{q!} + \frac{q!}{(q+1)!} + \cdots$$

$$\frac{p}{q}.q! = \left(q! + q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{(q-1)!} + \frac{q!}{q!}\right) + \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots\right)$$

$$p.(q-1)! = \left(q! + q! + \frac{q!}{2!} + \cdots + q + 1\right) + \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots\right)$$

$$\underbrace{p.(q-1)! - \left(q! + q! + \frac{q!}{2!} + \cdots + q + 1\right)}_{\in\mathbb{Z}} = \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots\right).$$

Seja $S = \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots\right)$, claramente $S > 0$, pois é soma de infinitas frações positivas. Provaremos agora que $S < 1$. Note que as desigualdades abaixo são verdadeiras, já que $q > 1$.

$$\frac{1}{(q+2)(q+1)} < \frac{1}{(q+1)(q+1)} = \frac{1}{(q+1)^2}$$

$$\frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)} < \frac{1}{(q+1)(q+1)(q+1)} = \frac{1}{(q+1)^3}$$

$$\frac{1}{(q+4)(q+3)(q+2)(q+1)} < \frac{1}{(q+1)(q+1)(q+1)(q+1)} = \frac{1}{(q+1)^4}$$

… ….

Faremos agora uma estimativa para o número S:

$$S = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots$$

$$\leq \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \cdots$$

Temos que a soma

$$\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \cdots$$

é de uma progressão geométrica de infinitas parcelas, com razão

$$\frac{1}{q+1} < 1,$$

já que $q \in \mathbb{N}$. Logo:

$$S \leq \frac{1/(q+1)}{1 - 1/(q+1)} = \frac{1/(q+1)}{q/(q+1)} = \frac{1}{q}$$

Como $q > 1$, segue que

$$S \leq \frac{1}{q} < 1.$$

Portanto S pertence ao intervalo $(0,1)$ o que é um absurdo. Portanto $e \notin \mathbb{Q}$.

3.3 PROVA POR SÉRIE ALTERNADA

Para a próxima demonstração da irracionalidade do número e, utiliza-se o conceito de séries alternadas. Uma série alternada é uma série da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots,$$

em que a sequência de números reais (a_n) é não negativa. Dizemos que

$$S_m = \sum_{n=1}^{m}(-1)^{n+1}.a_n$$

é a m-ésima soma parcial da série. Um critério para a série convergir é o seguinte:
se,

i) $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

ii) a_n converge para zero,

então a série converge para um número real S, satisfazendo

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Este resultado é devido a Leibniz e será usado para a demonstração seguinte. Para mais detalhes sobre o Teorema de Leibniz e o estudo de séries, sugerimos LIMA (2012).

Demonstração: Suponha que $e = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$, então $e^{-1} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$. Mas,

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!},$$

já que a série da função exponencial é

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Assim, seja

$$\sum_{n=0}^{p}\frac{(-1)^n}{n!}$$

uma soma parcial de e^{-1}, temos que

$$(-1)^{p+1}.p!\left(e^{-1} - \sum_{n=0}^{p}\frac{(-1)^n}{n!}\right) = (-1)^{p+1}.p!\left(\frac{q}{p} - \sum_{n=0}^{p}\frac{(-1)^n}{n!}\right) =$$

$$= (-1)^{p+1}.\left(q(p-1)! - \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n.p!}{n!}\right)$$

temos que o número

$$(-1)^{p+1}.\left(q(p-1)! - \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n.p!}{n!}\right)$$

pertence aos inteiros, a partir daí, obtemos

$$(-1)^{p+1}p!\left(\frac{q}{p} - \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n}{n!}\right) = (-1)^{p+1}p! \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$= (-1)^{p+1}.p!\left[\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!} + \frac{(-1)^{p+2}}{(p+2)!} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} - \cdots.$$

Note que a série

$$\frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} - \cdots$$

é alternada e satisfaz $(i) e\ (ii)$. Sejam S_1 e S_2 as primeiras somas parciais, ou seja,

$$S_1 = \frac{1}{p+1} \quad \text{e} \quad S_2 = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+2)-1}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p+2}.$$

Fazendo

$$S = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} - \cdots,$$

temos que

$$S \in \left(\frac{1}{p+2}, \frac{1}{p+1}\right).$$

Como $p \in \mathbb{N}$ segue que

$$\left(\frac{1}{p+2}, \frac{1}{p+1}\right) \subset (0,1),$$

ou seja, $S \in (0;1)$, o que é um absurdo já que $S \in \mathbb{Z}$. Daí e é irracional.

3.4 PROVA GEOMÉTRICA

Em 2006, Jonathan Sondow deu uma demonstração da irracionalidade de e utilizando geometria. Para esta demonstração usaremos o seguinte resultado sobre intervalos encaixados.

Lema 3.4.1 Seja $\{I_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ uma família de intervalos fechados e limitados tal que $I_{n+1} \subset I_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Então existe $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Além disso, se $I_n=[a_n;b_n]$ e $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, então x_0 é único.

Demonstração: Dado que $I_{n+1} \subset I_n$, temos que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Ou seja, a sequencia (a_n) é monótona não decrescente e limitada superiormente por $b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Portanto (a_n) converge, isto é, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ e $x_0 \leq b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Enquanto a sequencia (b_n) é monótona não crescente e limitada inferiormente por x_0. Então existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} b_n = y_0\ e\ x_0 \leq y_0$. Como $a_n \leq x_0 \leq b_n\ e\ a_n \leq y_0 \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, tem-se que $x_0 \in I_n\ e\ y_0 \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $\{x_0; y_0\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Além disso, se $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, então $x_0 = y_0$. Suponhamos que exista $x_1 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, então $a_n \leq x_1 \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Daí $x_0 = \lim_{n\to\infty} a_n \leq x_1\ e\ y_0 = \lim_{n\to\infty} b_n \geq x_1$, logo segue que $x_0 \leq x_1 \leq y_0$. Se $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, então$x_0 = x_1 = y_0$ e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x_0\}$

A ideia é construir uma sequencia (I_n) de intervalos fechados tal que

$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ com $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{e\}, \forall n \geq 1.$

Assim, construímos os intervalos $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n, \ldots.$ como se segue:

$$I_1 = \left[1 + \frac{1}{1!}; 1 + \frac{2}{1!}\right] = \left[\frac{a_1}{1!}; \frac{a_1 + 1}{1!}\right]$$

$$I_2 = \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}; 1 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!}\right] = \left[\frac{a_2}{2!}; \frac{a_2 + 1}{2!}\right]$$

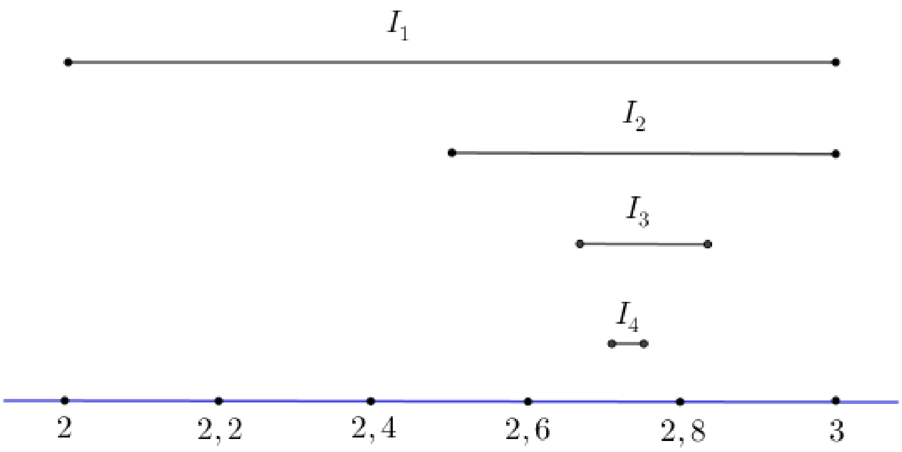
$$I_3 = \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}; 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!}\right] = \left[\frac{a_3}{3!}; \frac{a_3 + 1}{3!}\right]$$

$$I_4 = \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}; 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{2}{4!}\right] = \left[\frac{a_4}{4!}; \frac{a_4 + 1}{4!}\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_n = \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}; 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{2}{n!}\right] = \left[\frac{a_n}{n!}; \frac{a_n + 1}{n!}\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$



Note que o comprimento de cada intervalo I_n é $\frac{1}{n!}$, $\forall n \geq 1$ e que

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

Então, pelo Lema 3.4.1 segue que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\theta\} \text{ com } \theta \in \mathbb{R}$$

Mostraremos que $\theta = e$, ou seja, que $e \in \left(\frac{a_n}{n!}; \frac{a_n+1}{n!}\right) \subset \left[\frac{a_n}{n!}; \frac{a_n+1}{n!}\right]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente

$$e > \frac{a_n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

para todo $n \geq 1$. Logo, basta mostrar que

$$e < \frac{a_n + 1}{n!}$$

Assim, segue que

$$e < \frac{a_n + 1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} \Leftrightarrow e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!} \Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!},$$

multiplicando por $n!$ os membros de

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!}, \text{obtemos}$$

$$n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < 1. \qquad (*)$$

Mostraremos que a desigualdade $(*)$ fazendo uma estimativa de

$$n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Daí, temos:

$$n!\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}=n!\left[\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=1.$$

Logo, a desigualdade $(*)$ é verdadeira para todo $n\geq 1$. Portanto

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n=\{e\}.$$

Agora, suponha que $e=\frac{p}{q}$ com p e q números naturais,

como $e\in\left(\frac{a_n}{n!};\frac{a_n+1}{n!}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, em particular $e\in\left(\frac{a_q}{q!};\frac{a_q+1}{q!}\right)$, ou seja,

$$\frac{a_q}{q!}<e<\frac{a_q+1}{q!}\Leftrightarrow\frac{a_q}{q!}<\frac{p}{q}<\frac{a_q+1}{q!}.$$

Como

$$\frac{p}{q}=\frac{p(q-1)!}{q(q-1)!}=\frac{p(q-1)!}{q!},$$

temos:

$$\frac{a_q}{q!}<\frac{p(q-1)!}{q!}<\frac{a_q+1}{q!}\Leftrightarrow a_q<\underbrace{p(q-1)!}_{\in\mathbb{Z}}<a_q+1.$$

Absurdo, já que $p(q-1)!\in\mathbb{Z}$. Portanto $e\notin\mathbb{Q}$.

4 NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

Neste capítulo definem-se os números algébricos e transcendentes explorando suas propriedades aritméticas e algébricas. Em sequência, aborda-se os números de Liouville, que foram os primeiros exemplos de números transcendentes, confirmando algumas conjecturas de Euler sobre a existência desses.

4.1 INTEIROS ALGÉBRICOS

Definição. Qualquer solução de uma equação polinomial da forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

onde os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ são números inteiros, é chamado um inteiro algébrico, isto é, qualquer raiz de um polinômio mônico.

Assim, qualquer número inteiro b é um inteiro algébrico, pois a equação

$$x - b = 0$$

tem b por solução. Também $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$ são exemplos de inteiros algébricos, já que são soluções da equação

$$x^2 - 3 = 0.$$

Números complexos também podem ser inteiros algébricos. Por exemplo, $1 + i$ e $1 - i$ são raízes da equação

$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Teorema 4.1.1 *Um inteiro algébrico real é inteiro ou irracional.*

Prova: Seja α um inteiro algébrico. Suponha, por absurdo, que $\alpha = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ e $q > 1, p$ e q primos entre si. Isto é, α é um número racional que não é inteiro. Como α é uma solução de uma equação do tipo (1), substituindo x por $\frac{p}{q}$ na equação (1) temos,

$$p^n = -a_{n-1}p^{n-1}q - a_{n-1}p^{n-2}q^2 - \cdots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n,$$

ou seja,

$$p^n = q(-a_{n-1}p^{n-1} - a_{n-1}p^{n-2}q - \cdots - a_1 p q^{n-2} - a_0 q^{n-1}).$$

Assim, q divide p^n. Seja r um fator primo de q $(r = q$ se q for primo). Assim r divide p^n. Em virtude do Lema 1.2.1, segue-se que r divide p. Consequentemente r divide p e q o que gera um absurdo, pois p e q primos entre si, por hipótese.

4.2 NÚMEROS TRANSCENDENTES

4.2.1 Definições e Exemplos

Definição. Um número complexo α é chamado algébrico se é raiz de uma equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

onde $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = 1,2, \dots, n$. O conjunto destes números será denotado por $\overline{\mathbb{Q}}$.

Definição. O polinômio minimal de α é o polinômio primitivo,[5] de menor grau, que possui α como raiz. Assim, definimos o grau de α como sendo o grau de seu polinômio minimal.

Exemplo.4.2.1 Todo número racional, $\alpha = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, é algébrico, pois é raiz do polinômio $qx - p$.

Exemplo.4.2.2 Números irracionais podem ser algébricos como é o caso de $\sqrt{2}$, já que é raiz do polinômio $x^2 - 2$.

Exemplo.4.2.3 Números complexos também podem ser algébricos, como é o caso de $1 + i$ que é raiz de $x^2 - 2x + 2$.

Definição. Os números que não são algébricos são chamados transcendentes, ou seja, o conjunto dos números transcendentes é o complementar de $\overline{\mathbb{Q}}$ que denotaremos por $\mathbb{T}$.

A proposição a seguir apresenta algumas propriedades aritméticas dos números algébricos.

Proposição 4.2.1 *Seja α um algébrico, assim*:

i. A soma de dois números algébricos é algébrico.
ii. O produto de dois números algébricos é algébrico.
iii. O simétrico $-\alpha$ de um número algébrico α é algébrico.
iv. O inverso α^{-1} de um número algébrico $\alpha \neq 0$ é algébrico.

Demonstração: Consultar FIGUEIREDO (2011, p.17)

A proposição 4.2.1 caracteriza o conjunto dos números algébricos como um corpo[6]. Ao longo do texto veremos exemplos de números transcendentes. É possível afirmar a existência desses através dos próximos resultados.

Definição. Um conjunto K é dito enumerável se K é finito ou se existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \to K$.

Exemplo 4.2.4 O conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável já que

[5] Um polinômio de coeficientes inteiros que são primos entre si

[6] Um corpo ou campo é um anel comutativo com unidade em que todo elemento diferente de 0 possui um elemento inverso com relação à multiplicação.

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2}, se\ n \text{ é par} \\ -\left(\dfrac{n-1}{2}\right), se\ n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é claramente uma bijeção.

Teorema 4.2.1

i. O conjunto dos números reais é não enumerável.
ii. A união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.
iii. Se B é enumerável, então $B^k = \underbrace{B \times B \times ... \times B}_{k\ vezes}$ é enumerável.

As demonstrações das afirmações do Teorema 4.2.1 podem ser encontradas em LIMA (2013).

Teorema 4.2.2 *O conjunto dos números algébricos é enumerável*

Demonstração: A correspondência que associa ao polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ a lista $(a_0, a_1, ..., a_n)$ é uma bijeção entre o conjunto P_n dos polinômios de coeficientes inteiros e com grau $\leq n$ e o produto cartesiano $\mathbb{Z}^{n+1} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}$, daí P_n é enumerável. Logo o conjunto $P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$ dos polinômios com coeficientes inteiros é enumerável. Para cada número algébrico α escolha um polinômio P_α de coeficientes inteiros que tenha α como raiz. A correspondência $\alpha \mapsto P_\alpha$ define uma função do conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$ no conjunto P, tal que a imagem inversa de cada elemento de P é finita. Logo $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável.

O fato de $\overline{\mathbb{Q}}$ ser enumerável nos leva a concluir que existem mais transcendentes do que algébricos já que a enumerabilidade $\overline{\mathbb{Q}}$ implica que $\mathbb{T}$ é não enumerável. Definiremos agora conjuntos de medida nula nos reais e a partir daí concluiremos que quase todos os números reais são transcendentes.

Definição. Um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ tem medida (de Lebesgue) nula, e denotamos $m(B) = 0$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe uma quantidade enumerável de intervalos $(I_n)_{n\geq 1}$ em que
$B \subset \bigcup_{n\geq 1} I_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon$.

Dizemos que quase todos os números reais tem uma propriedade, se o subconjunto de $\mathbb{R}$ que não tem tal propriedade tem medida nula.

Proposição. 4.2.1 *Se $A \subset \mathbb{R}$ é enumerável, então A tem medida nula.*

A prova desta proposição pode ser encontrada em MARQUES (2013, p.67).

Proposição. 4.2.2 *Quase todo número real é transcendente.*

Demonstração: Como conjunto dos algébricos reais ($\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$) é enumerável, segue da proposição 4.2.1 que $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ tem medida nula, logo quase todos os números reais são transcendentes.

Vale ressaltar que apesar da abundância, mostrar a transcendência de um número é bem complicado. O matemático Joseph Liouville, através de uma ideia simples e eficaz, estabeleceu uma condição que fosse satisfeita por todos os números algébricos e, em seguida, construir algum número que não tivesse tal propriedade. Assim, mostrou-se os primeiros exemplos de números transcendentes que hoje conhecemos como números de Liouville.

4.3 NÚMEROS DE LIOUVILLE

Teorema 4.3.1 (Teorema de Liouville)

Se $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ tem grau $n \geq 2$ então existe uma constante positiva $A = A(\alpha)$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{A}{q^n}$$

para todo $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \geq 1$.

Demonstração: Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ com $a_0,\ a_1, \ldots, a_n$ inteiros, o polinômio minimal de α, ou seja, $f(\alpha) = 0$. Sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $[\alpha - \delta, \alpha + \delta] \cap \mathcal{R}_f = \{\alpha\}$ onde R_f é o conjunto das raízes reais de $f(x)$, caso contrário teríamos R_f um conjunto infinito, o que não pode ocorrer pelo Teorema Fundamental da Álgebra. Dados $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \geq 1$ e $mdc(p, q) = 1$, temos duas possibilidades:

$$\frac{p}{q} \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \text{ ou } \frac{p}{q} \notin [\alpha - \delta, \alpha + \delta].$$

Se $\frac{p}{q} \notin [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ então $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \delta \geq \frac{\delta}{q^n}$. Se $\frac{p}{q} \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, como $f(x)$ é continua e derivável em $\left[\alpha, \frac{p}{q}\right]$ (aqui, sem perda de generalidade estamos supondo $\frac{p}{q} > \alpha$) logo, pelo Teorema do Valor Médio[7], existe $\theta \in \left(\alpha, \frac{p}{q}\right)$ tal que

$$f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) = f'(\theta)\left(\alpha - \frac{p}{q}\right),$$

donde

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |f'(\theta)|\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

[7] Se a função $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) então existe $\theta \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\theta)(b - a)$.

Como f' é continua em $\left[\alpha,\ \frac{p}{q}\right]$ então existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in \left[\alpha, \frac{p}{q}\right]$. Assim, temos que

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \qquad (i)$$

Observe que $\frac{p}{q} \neq \alpha$ já que α tem grau maior ou igual a 2 por hipótese e todo racional tem grau 1. Logo, $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ e daí

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| &= \left|a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0\right| \\ &= \left|\frac{a_np^n + a_{n-1}qp^{n-1} + \cdots + a_1q^{n-1}p + a_0q^n}{q^n}\right| \\ &= \frac{|a_np^n + a_{n-1}qp^{n-1} + \cdots + a_1q^{n-1}p + a_0q^n|}{q^n} \\ &\geq \frac{1}{q^n}\end{aligned}$$

Portanto, por (i) temos que:

$$\frac{1}{q^n} \leq \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \Rightarrow$$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{Mq^n}$$

e tomando $A(\alpha) = min\left\{\delta, \frac{1}{M}\right\}$ temos em ambos os casos que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{A}{q^n}$$

como queríamos mostrar.

Sabe-se que o conjunto dos números racionais é denso na reta, o que significa que todo número real pode ser aproximado por racionais. O que o Teorema 4.3.1 diz que número algébrico real de grau ≥ 2 não pode ser "bem aproximado" por racionais, de modo que, nas condições do Teorema 4.3.1, qualquer aproximação por racionais tem que respeitar esse comportamento. A partir daí, a ideia de Liouville foi de construir números reais que fossem "bem aproximados" por racionais.

Definição: Um número real α é chamado número de Liouville se existir uma sequência de racionais $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$, com $q_j > 1$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}, \text{ para todo } j \geq 1.$$

Denotaremos o conjunto dos números de Liouville por $\mathbb{L}$.

Proposição 4.3.1 *A sequência* $(q_j)_{j\geq 1}$ *é ilimitada.*

Demonstração: Note que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j} \leq 1, \forall j \geq 1$$

Agora suponha que (q_j) é limitada, ou seja, suponha que exista $M \in \mathbb{R}$ tal que $|q_j| \leq M$ para todo $j \geq 1$. Logo, seque que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < 1 \Rightarrow |\alpha q_j - p_j| < q_j \leq M.$$

É fato que $|x - y| \geq |x| - |y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, então

$$|p_j| - |\alpha q_j| \leq |\alpha q_j - p_j| < M.$$

e a partir daí,

$$\begin{aligned} |p_j| &< M + |\alpha q_j| \\ &\leq M + |\alpha| M \\ &= (1 + |\alpha|)M. \end{aligned}$$

Logo, a sequencia p_j também é limitada, o que contradiz o fato de a sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$ ser infinita. Portanto $(q_j)_{j\geq 1}$ é ilimitada.

Corolário 4.3.1 *Todo número de Liouville é irracional*

Demonstração: Suponha por absurdo que exista um número racional $\frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ que seja número de Liouville. Então existem infinitos racionais $\frac{p_j}{q_j}$ diferentes de $\frac{p}{q}$, tais que

$$\frac{1}{q_j^j} > \left|\frac{p}{q} - \frac{p_j}{q_j}\right| = \left|\frac{pq_j - p_j q}{qq_j}\right| \geq \frac{1}{|q| q_j}.$$

Assim, $q_j^{j-1} < |q|$, o que contradiz o fato de que $(q_j)_{j\geq 1}$ é ilimitada.

Teorema 4.3.2 *Todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração: Pelo Corolário 4.3.1, um número de Liouville α não pode ser racional. Daí suponha que α é algébrico de grau $n > 1$. Assim, pelo Teorema de Liouville, existe uma constante $A > 0$ tal que, para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, tem-se $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{A}{q^n}$. Em particular,

$\frac{A}{q_j^n} < \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Onde a sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$ e dada a partir do fato de α ser número de Liouville. Daí, segue que $q_j^{j-n} < 1/A$, contradizendo a Proposição 4.3.1. Portanto α não pode ser algébrico.

A partir disso, Liouville mostrou a existência dos números transcendentes exibindo uma classe de números que satisfazem o Teorema 4.3.2, portanto transcendentes, o exemplo mais famoso é conhecido como Constante de Liouville.

Exemplo 4.3.1 O número

$$l = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0{,}110001000000000000000001 0 \ldots$$

é número de Liouvile.

Demonstração: Defina $p_j = \sum_{n=1}^{j} 10^{j!-n!}$ e $q_j = 10^{j!}$. Observe que $p_j, q_j \in \mathbb{Z}$ para todo $j \geq 1$ e

$$\frac{p_j}{q_j} = \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{10^{n!}},$$

ou seja, $\frac{p_j}{q_j}$ é uma soma parcial de $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$. Assim,

$$\left|l - \frac{p_j}{q_j}\right| = \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} \Leftrightarrow$$

$$\left|l - \frac{p_j}{q_j}\right| = \frac{1}{10^{(j+1)!}} + \frac{1}{10^{(j+2)!}} + \frac{1}{10^{(j+3)!}} + \cdots \Leftrightarrow$$

$$\left|l - \frac{p_j}{q_j}\right| = \frac{1}{10^{(j+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10^{(j+2)!-(j+1)!}} + \frac{1}{10^{(j+3)!-(j+1)!}} + \cdots\right).$$

Mostraremos agora que $(j+k)! - (j+1)! > k-1, \forall k \geq 2$. De fato,

$$(j+k)! - (j+1)! = (j+1)!\,[(j+k)(j+k-1)\ldots(j+2) - 1] > k-1,$$

desse modo tem-se a desigualdade:

$$\left|l - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{10^{(j+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) \Leftrightarrow$$

$$\left|l - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{10^{(j+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) = \frac{1}{10^{(j+1)!}}\,\frac{10}{9} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{10^{(j+1)!}}\,\frac{10}{9} < \frac{10}{10^{(j+1)!}} = \frac{1}{10^{(j+1)!-1}} \Leftrightarrow$$

$$\left| l - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{10^{(j+1)!-1}}.$$

Agora, basta provar que

$$\frac{1}{10^{(j+1)!-1}} \leq \frac{1}{10^{j!j}} \Leftrightarrow (j+1)! - 1 \geq j!\, j,$$

o que ocorre pois

$$(j+1)! - 1 = (j+1)j! - 1 = jj! + j! - 1 \geq jj!.$$

Logo,

$$\left| l - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{{q_j}^j}$$

o que implica que l é um número de Liouville e, portanto, transcendente.

Na realidade Liouville provou que todo número da forma $\sum_{n=1}^{\infty} b^{-n!}$ é número de Liouville para todo inteiro $b \geq 2$, mostrando que existem infinitos números desse tipo.

Um questionamento natural seria perguntar se a recíproca do Teorema 4.3.2 é verdadeira, ou seja, se todo número transcendente é número de Liouville. A resposta é não, uma vez que é possível provar que conjunto $\mathbb{L}$ tem medida nula nos reais, isto é, os números de Liouville são praticamente “invisíveis” na reta. Para a comprovação desse fato sugerimos ver Marques (2013, p.85,86)

Apesar de que, dentre os transcendentes, os números de Liouville serem uma minoria na reta, em 1962, P. Erdös provou que todo número real pode ser escrito como uma soma entre dois números de Liouville. Para Marques (2013, p. 86), isso significa que os números do conjunto $\mathbb{L}$ estão posicionados de forma estratégica na reta.

4.4 UM POUCO MAIS SOBRE TRANSCENDÊNCIA

Agora falaremos um pouco sobre alguns resultados da teoria transcendente dos números, enunciando alguns teoremas cujas demonstrações são não triviais e serão omitidas aqui. Para o leitor interessado recomendamos a leitura de Marques (2013).

Em 1873, o matemático Hermite mostrou a transcendência de e, e, em 1884, Lindemann generalizou os métodos de Hermite e provou que e^{α} é transcendente, sempre que α é algébrico não nulo. Como consequência, temos que $\ln 2$, $e^{\sqrt{2}}$ e $cos 5$ são transcendentes. No entanto, a consequência mais importante do Teorema de Lindemann é a transcendência de π e portanto a impossibilidade de se construir um quadrado com a área de círculo dado.

Em 1900, no congresso internacional de matemática em Paris, Hilbert propôs uma lista com 23 problemas, em que o sétimo perguntava se o logaritmo de um número algébrico numa base algébrica deveria ser racional ou transcendente. A solução desse problema foi dada em 1934, independentemente, por Gelfond e Schneider. O Teorema de Gelfond-Schneider diz que se α é algébrico, diferente de 0 e 1, e β é algébrico, não racional, então α^{β} é transcendente. Assim $2^{\sqrt{2}}, i^{i}$ e $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ são exemplos de números transcendentes.

De posse do próximo resultado podemos estabelecer também a transcendência de e^{π}. De fato, considere a uma função f tal que

$$f(x) = \big(cos(x) - isen(x)\big)e^{ix},$$

em que $i = \sqrt{-1}$. Derivando a função f, obtemos:

$$f'(x) = i\big(cos(x) - isen(x)\big)e^{ix} + \big(-sen(x) - icos(x)\big)e^{ix} = 0.$$

Logo, a função f é constante, e como $f(0) = 1$, tem-se que $\big(cos(x) - isen(x)\big)e^{ix} = 1$. Multiplicando ambos os membros da igualdade por $cos(x) + isen(x)$, obtemos uma relação conhecida como Fórmula de Euler:

$$cos(x) + isen(x) = e^{ix} \qquad (*)$$

Substituindo x por π em $(*)$, obtemos a Identidade de Euler

$$e^{i\pi} = -1$$

Pela Identidade de Euler, segue que $e^{\pi} = (-1)^{-i}$, o que mostra a transcendência de e^{π} de acordo com o Teorema de Gelfond-Schneider.

No entanto, não é conhecido um resultado similar para o caso α^{β}, onde $\alpha\ e\ \beta$ são transcendentes. De acordo com Marques (2013), “em vista do Teorema de Gelfond-Schneider somos levados a crer que o resultado dessa potenciação deveria ser um transcendente, porém e e $\ln 2$ são transcendentes, mas $e^{ln2} = 2$ é algébrico. Agora o caso $\alpha = \beta$, parece ser mais intrigante: o número α^{α} pode ser algébrico, para algum α transcendente? Uma resposta negativa para essa questão implicaria, de imediato, a transcendência de e^{e} e π^{π}”. Na verdade, se admitirmos a veracidade do problema em aberto mais importante da teoria dos números transcendentes a chamada Conjectura de Schanuel, estabelecida por Stephen Schanuel na década de 1960, podemos estabelecer a transcendência, por exemplo, dos números $e + \pi, e\pi, e^{e}, \pi^{\pi}, \pi^{e}, \ln(ln2)$ e $\ln(\pi)$ como consequência imediata dessa conjetura

A conjectura de Schanuel afirma que dados $x_1, \ldots, x_n$ números complexos linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$, existem pelo menos n números algebricamente independentes dentre, $x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}$. Esse resultado se aplica também em generalizações para outros teoremas na teoria transcendente.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentadas algumas demonstrações da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e da Constante de Euler que são números bem conhecidos, como também tratamos da irracionalidade de números não tão conhecidos como a Constante de Liouville ($\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$). Abordamos também, o conceito de números algébricos e transcendentes com objetivo de enriquecer o conhecimento do leitor referente à teoria dos números irracionais e transcendentes, por meio de métodos, que se fundamentaram de argumentos elementares até alguns mais sofisticados e que exigem um pouco de maturidade matemática.

Após a conclusão desse trabalho ficou evidenciado que não há motivos para o ensino de números irracionais e transcendentes serem tão obsoletos no ensino básico, algumas provas feitas neste texto sobre a irracionalidade de $\sqrt{2}$ e da Constante de Euler são, perfeitamente, compreensíveis por alunos do ensino médio sem que seja necessário um conhecimento aprofundado dos temas, devido a isso e a escassez de materiais que tratem dos temas irracionalidade e transcendência, este trabalho buscou apresentar, de forma elementar, a história e as propriedades fascinantes que os números irracionais e transcendentes têm.

Diante disso, o texto foi escrito na perspectiva de estimular o leitor a explorar este rico e intrigante ramo da teoria dos números (irracionais e transcendentes) que investiga problemas que desafiam os matemáticos por gerações. Por exemplo, a irracionalidade e a transcendência de números como $\pi^e, \pi^\pi, e^e, \pi e$ e $e + \pi$ ainda são desconhecidas.

Desse modo, tentamos evidenciar e esclarecer um pouco sobre a natureza aritmética dos números irracionais e transcendentes com a preocupação de discorrer um texto motivador e de fácil compreensão. Alguns problemas que foram tratados aqui, podem servir de fonte inspiradora para despertar no leitor a satisfação e o gosto pela matemática.

REFERÊNCIAS

APOSTOL, Tom M. **Irrationality of The Square Root of Two-A Geometric Proof**, The American Mathematical Monthly, v. 107, n. 9, p. 841-842, 2000.

BOYER, Carl B.. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1996.

CONWAY, John. The power of mathematics, Darwin College LecturesCambridge, v. 16, 2006. Disponível em: < http://thewe.net/math/conway.pdf > Acesso em: 20.12. 2017.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de**. Números Irracionais e Transcendentes**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM (Coleção de Iniciação Científica; nº 1), 2011.

LIMA, E., et al. **A Matemática do Ensino Médio**. v 1. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA.2012. v 1.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**, 14 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. v 1.

MAOR, Eli. **e: A História de um Número. Tradução**: Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.

MARQUES, Diego. **Teoria dos Números Transcendentes**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM (Coleção Textos Universitários), 2013.

SANTOS, José P. de O. **Introdução à Teoria dos Números**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.