UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -

PROFMAT

PROBLEMAS DE CORRELAÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA ABORDAGEM POR COLORAÇÃO DE VÉRTICES

Pablo Cabral da Silva

RIO DE JANEIRO

2018

PROBLEMAS DE CORRELAÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA ABORDAGEM POR COLORAÇÃO DE VÉRTICES

Pablo Cabral da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática por ter completado o Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional (PROFMAT).

Orientadora: Profª. Dra. Maria Aguieiras Alvarez de Freitas

RIO DE JANEIRO

2018

PROBLEMAS DE CORRELAÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA ABORDAGEM POR COLORAÇÃO DE VÉRTICES

Pablo Cabral da Silva

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática por ter completado o Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional (PROFMAT).

Aprovada por:

____

Maria Aguieiras Alvarez de Freitas, D. Sc.

Instituto de Matemática - UFRJ

____

Marisa Beatriz Bezerra Leal, D. Sc.

Instituto de Matemática - UFRJ

____

Renata Raposo Del-Vecchio, D. Sc.

Instituto de Matemática e Estatística - UFF

RIO DE JANEIRO

2018

CIP - Catalogação na Publicação

C117p

Cabral da Silva, Pablo
Problemas de Correlação: Uma Proposta de Solução por Coloração de Vértices / Pablo Cabral da Silva. - Rio de Janeiro, 2018.
109 f.

Orientadora: Maria Aguieiras Alvarez de Freitas.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

1. Lógica. 2. Grafos. 3. Problemas de Correlação. 4. Coloração de Vértices. I. Aguieiras Alvarez de Freitas, Maria , orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Aos meus pais e a minha esposa, pelo constante apoio.

AGRADECIMENTOS

Quero, primeiramente, agradecer pela oportunidade de estar apresentando este trabalho, por ter força de vontade para abdicar de algumas atividades e me dedicar a esta fase bastante importante para a conclusão de meu mestrado.

À minha esposa, por sempre estar ao meu lado me dando forças e incentivos para poder chegar até aqui. E também pela dedidacação que teve e profissionalismo na revisão ortográfica de minha dissertação. Enfim, obrigado por tudo! Amo você.

Esses eu não poderia deixar de agradecer, aos meus pais por toda torcida orientação, carinho e amor dados até aqui.

À banca examinadora pela credibilidade e profissionalismo demonstrados com a aceitação do convite para participar da avaliação deste trabalho.

Às diretoras do CIEP Doutor Joaquim Pimenta, pela colaboração dada ao deixar elaborar minha atividade com meus alunos para a complementação do meu trabalho.

Ao meu sogro Sérgio, por sempre estar ao meu lado e torcendo por mim com bastante orgulho dizendo: “quando nos conhecemos você disse que seria “doutor” em matemática, continue assim que você será”.

À minha sogra Andréa, por sempre me incentivar e também por ser um exemplo de superação e dedicação.

Ao “Tatinho”, que sempre me orienta e torce por mim. Obrigado por todo cuidado, carinho e amor ao longo de todo esse período.

Finalmente, o mais generoso agradecimento, à professora e orientadora Maria Aguieiras Alvarez de Freitas, pelas duas disciplinas ministradas nesse curso, em especial Aritmética, e também pela sua dedicação, pela sua quase sempre disponibilidade em me atender, me ouvir e me conduzir para o desenvolvimento de um trabalho de extrema importância, visando a minha continuidade na vida acadêmica. Gostaria de poder falar melhor porém no momento fico sem palavras que possam expressar a minha tamanha gratidão e finalizando com o humilde agradecimento na conclusão dessa jornada.

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo apresentar uma abordagem mais dinâmica e clara para resolver problemas de correlação. Buscando uma melhor compreensão de solução, utilizou-se a Teoria de Grafos, dando maior importância à coloração de vértices, como por exemplo número cromático de um grafo. Usamos esta metodologia com o intuito de mostrar que podemos utilizar a Teoria de Grafos na educação básica. Esta foi usada como sendo uma ferramenta facilitadora para a solução desses problemas. Como prova disso, foi aplicada esta metodologia com alunos do 9º ano do ensino fundamental. Foi possível observar bastante aceitação e interesse por parte dos estudantes.

Palavras–chave: Problemas de Correlação e Lógica, Grafos, Coloração de Vértices.

ABSTRACT

This dissertation aims to present a more dynamic and clear approach to solving correlation problems. In order to better understand the solution, we used Graph Theory, giving more importance to the coloring of vertices, such as, for example, a chromatic number of a graph. We used this methodology in order to show that we can use Graph Theory in basic education, it was used as a facilitating tool to solve these problems. As proof of this, this methodology was applied to students in the 9th year of elementary school. It was possible to observe that there was enough acceptance and interest for the students.

Key Words: Correlation problems and logic, Graphs, Colouring vertices.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O cotidiano da atividade docente, em turmas regulares do ensino fundamental, permite-nos reconhecer diversos aspectos que dificultam o entendimento e o aprendizado de matemática por parte dos alunos. Com isso, essa disciplina acaba se tornando um dos grandes entraves na vida escolar de muitos estudantes. Partindo dessa perspectiva, durante a vivência na sala de aula, destacamos e tomamos como ponto de partida deste trabalho um dos fatores que se configura como um obstáculo bastante pertinente: a dificuldade dos alunos em relação à modelagem/desenvolvimento de problemas de correlação através do método tradicional ensinado na educação básica (método de tabelas).

Sabe-se que este tipo de problema é apresentado, em geral, para alunos do ensino médio, propondo a sua solução através de tabelas. Neste trabalho, com a ajuda da Teoria de Grafos, será proposta uma nova forma de resolução através de coloração de vértices, o que facilita o processo de ensino/aprendizagem do aluno em relação à solução desses exercícios de lógica, destacando-se a possibilidade de abordagem ainda no ensino fundamental.

Para contribuir e ajudar a elucidar a escolha dessa temática, direcionamo-nos aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que se configuram como uma referência pedagógica para docentes de diferentes disciplinas e áreas, no âmbito educacional brasileiro, com especial atenção para o que é dito sobre os conceitos da lógica matemática na educação básica, visto que os problemas de correlação se enquadram neste tópico matemático.

A matemática faz parte do currículo pedagógico de todas as escolas existentes no mundo e sua aprendizagem é uma temática global, abordada de várias maneiras. Essa temática atrai inúmeros estudiosos que trabalham as dificuldades dos alunos apresentadas no ensino da matemática, bastante frequentes no trabalho do professor do ensino fundamental e médio. Essas dificuldades são notadas com mais frequência em problemas de lógica.

> Desse modo, a Matemática a ser ensinada era aquela concebida como lógica, compreendida a partir das estruturas, conferia um papel fundamental à linguagem matemática. Os formuladores dos currículos dessa época

> insistiam na necessidade de uma reforma pedagógica, incluindo a pesquisa de materiais novos e métodos de ensino renovados fato que desencadeou a preocupação com a Didática da Matemática, intensificando a pesquisa nessa área. (BRASIL, 1997, p. 16)

Além de buscar alternativas para despertar o interesse e possibilitar ao aluno o prazer/vontade de estudar, que é essencial para o seu desenvolvimento intelectual e profissional, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, há muitas décadas o professor de matemática vem enfrentando problemas nas escolas, pois muitos adotam exclusivamente o conteúdo do livro didático, sem utilizar as diretrizes dos parâmetros curriculares nacionais (PCNs). O professor leciona de forma mecânica, seguindo rigorosamente o livro didático e/ou os materiais do sistema de ensino. Este deixa de exercer seu papel de educador, transformando sua atividade em algo monótono que pouco acrescenta à visão de mundo e à formação da cultura geral do aluno.

> Parte dos problemas referentes ao ensino de Matemática estão relacionados ao processo de formação do magistério, tanto em relação à formação inicial como à formação continuada. Decorrentes dos problemas da formação de professores, as práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos, que, infelizmente, são muitas vezes de qualidade insatisfatória. A implantação de propostas inovadoras, por sua vez, esbarra na falta de uma formação profissional qualificada, na existência de concepções pedagógicas inadequadas e, ainda, nas restrições ligadas às condições de trabalho. (BRASIL, 1998, p. 18)

O ensino da matemática e da lógica não pode ser uma problemática que está presente apenas no âmbito escolar, pois a educação de qualidade deve satisfazer às expectativas e às necessidades sociais. Os alunos devem se tornar protagonistas da própria atividade e o professor deve usar diferentes linhas metodológicas com enfoque na lógica matemática para formar um aluno pensante, e não “apenas” um reprodutor de conteúdo. Portanto, a didática da matemática deve corresponder ao desenvolvimento lógico/cognitivo do ser humano.

> Isso ocorrerá à medida que o professor valorizar a troca de experiências entre os alunos como forma de aprendizagem, promover o intercâmbio de ideias como fonte de aprendizagem, respeitar ele próprio o pensamento e a produção dos alunos e desenvolver um trabalho livre do preconceito de que Matemática é um conhecimento direcionado para poucos indivíduos talentosos. (BRASIL, 1998, p. 30)

A presente dissertação está estruturada e organizada através de cinco capítulos que, unidos, contribuirão para a consolidação da proposta de estudo pretendida neste trabalho.

No capítulo 1, faremos uma breve história sobre o surgimento de Grafos e uma revisão da literatura sobre conceitos básicos da Teoria dos Grafos, no qual serão apresentados definições, exemplos e notações usadas neste conceito.

No capítulo 2, uma breve história sobre coloração de vértices será apresentada e será exposto, de forma mais abrangente, o conceito de coloração de vértices. Baseada neste conceito será montada a estrutura deste trabalho, a qual mostrará teoremas e demonstrações sobre coloração de vértices, com destaque para cotas inferiores e superiores para o número cromático de um grafo.

No capítulo 3, mostraremos a proposta de trabalho. Inicialmente, apresentaremos como os professores resolvem os problemas de correlação da maneira tradicional, apresentada em livros didáticos. Em seguida, serão expostas a modelagem e a solução desses problemas pelo conceito de coloração de vértices, fazendo uma relação entre a solução tradicional e a solução proposta.

O capítulo 4 abordará os resultados e discussões da atividade de campo aplicada no CIEP Doutor Joaquim Pimenta. Também serão mostradas as atividades que foram desenvolvidas com os alunos do 9° ano do ensino fundamental.

Encerrando, serão descritas de forma concisa as considerações finais deste trabalho.

CAPÍTULO 1

UMA BREVE INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRAFOS

A Teoria de Grafos, existente há mais de 270 anos, originou-se a partir da tentativa e da busca por soluções de diferentes problemas provenientes de áreas distintas. O primeiro registro que se tem de um problema cuja solução se enquadra nessa teoria data do século XVIII, mais precisamente em 1736, e recebe o nome de o problema de Euler, denominação obtida através do sobrenome do matemático que resolveu o problema.

No ano de 1736, o matemático e físico suíço Leonhard Paul Euler, ao visitar a cidade de Königsberg, localizada em Kaliningrad (antiga Prússia Oriental) e importante por fazer parte do comércio marítimo, descobriu que estava acontecendo uma discussão entre os intelectuais da região sobre o seguinte problema: como encontrar o percurso para um passeio que partisse de uma das margens do rio Pregel (rio que cortava a cidade), atravessando uma única vez cada uma das sete pontes existentes e retornando à margem de partida?

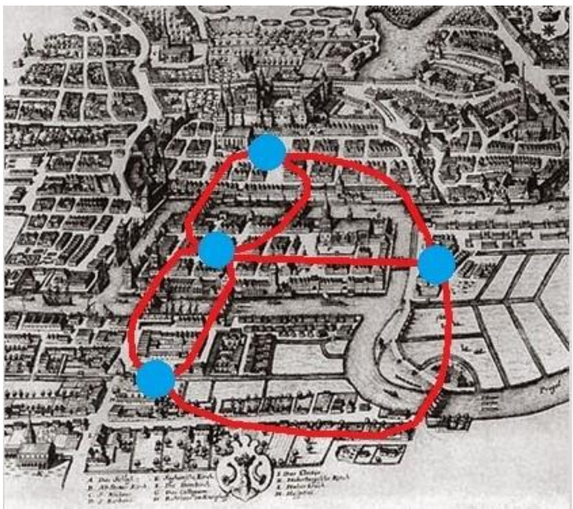


Figura 1 Pontes de Königsberg

No rio Pregel havia duas ilhas em seu interior que eram ligadas por uma ponte (figura 1), sendo que uma das ilhas tinha quatro pontes que ligavam às margens do rio e a outra ilha tinha duas pontes que também ligavam às margens do rio e ainda havia uma outra ponte que ligava essas duas ilhas. Esse problema ficou conhecido como as sete pontes de Königsberg. A solução do problema veio quando Euler, com a ajuda do conceito de grafos, provou para os intelectuais da cidade que o passeio que eles queriam só aconteceria se cada ilha fosse ligada à outra por um número par de pontes (figura 2).

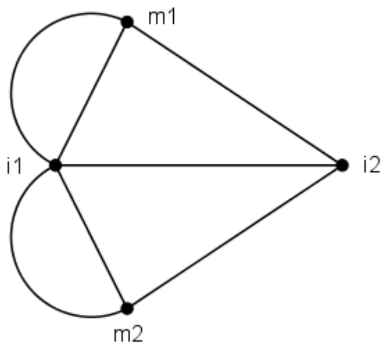


Figura 2 Grafo antes da solução de Euler

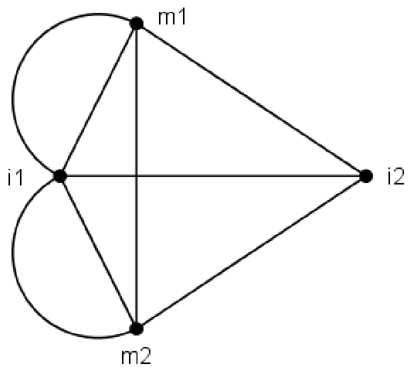


Figura 3 Grafo Depois da solução de Euler

Anos mais tarde, em 1847, o físico alemão Gustav Robert Kirchhoff resolveu um importantíssimo feito em eletricidade denominado problema de Kirchhoff. Ele usou a teoria dos grafos para resolver problemas que envolviam circuitos elétricos. Esse método de solução ficou conhecido como regra de Kirchhoff.

Em 1852, os irmãos Francis e Frederick Guthrie introduziram o problema de coloração de mapas, que será abordado de forma mais ampla no próximo capítulo.

No ano de 1857, o matemático britânico Arthur Cayley teve uma brilhante descoberta para a engenharia molecular. Através do conceito de grafos descobriu a técnica para determinar o número de diferentes isômeros de hidrocarbonetos, que ficou conhecido como o problema de Cayley.

A Teoria de Grafos, hoje, é bastante vasta possuindo um crescimento intenso em suas abordagens interdisciplinares. Como vimos acima, essa teoria teve contribuições importantes em campos diversos: da própria matemática (pontes de Königsberg), da física (regra de Kirchhoff), da química (O problema de Cayley) e na cartografia (o problema de Guthrie). A partir de agora, iremos denominar esses problemas como modelos de grafos para desenvolver outros problemas similares.

1.1 Abordagem Teórica

Definição 1.1 Um ***grafo*** – que chamaremos de G – é um objeto matemático constituído de dois conjuntos. O primeiro denominado de conjunto dos vértices denotado por V(G), ou simplesmente V, o outro de conjunto das arestas, ou seja, este conjunto é construído através das relações entre os elementos de V. Denotaremos o conjunto das arestas por E(G), ou simplesmente E. Supondo dois vértices a e b de V que estão relacionados, então chamaremos (a, b) ou ab como sendo uma aresta de G. Com isso, notamos um grafo G = (V, E). Usualmente, as letras que representam grafo, conjunto de vértices e conjunto de arestas são maiúsculas, enquanto que a representação de vértices e arestas pode ser minúscula ou maiúscula e também, representamos por números. Vale ressaltar que neste trabalho iremos abordar somente grafos não orientados.

Após a definição de grafos, retornamos aos problemas onde se iniciaram as ideias de grafos dizendo, a partir de cada problema, o que é vértice e o que é aresta. Vejamos a seguir:

- No problema de Euler:
  - Vértices – margens e ilha;
  - Arestas – pontes;

- No problema de Kirchhorff:
  - Vértices – ponto de conexão;
  - Arestas – correntes elétricas;

- No problema de Cayley:
  - Vértices – cada átomo;
  - Arestas – ligações entre dois átomos;

- No problema de Guthrie:
  - Vértices – cada região;
  - Arestas – fronteiras entre as regiões;

Definição 1.2 O ***rótulo*** de um vértice ou aresta é o nome dado a cada um desses elementos. Podemos ter grafos rotulados nos vértices (podemos identificar os vértices), grafos rotulados nas arestas (podemos identificar as arestas) ou grafos com ambas as rotulações (podemos identificar os vértices e as arestas). Sem os rótulos não é possível identificar qual aresta ou qual vértice estamos mencionando em certo problema.

Definição 1.3 ***Laço*** é uma ligação que é da forma (a, a).

Exemplo 1.1:

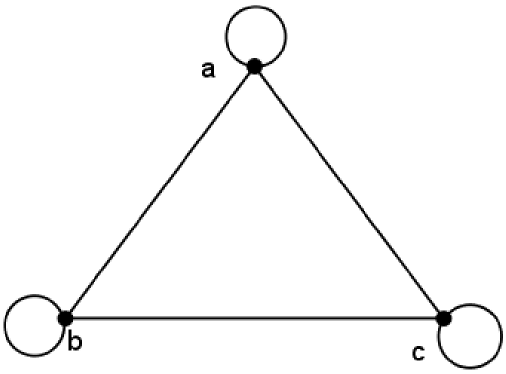


Figura 4 Laço de um grafo

Note que no grafo acima existem três laços, são eles: (a, a), (b, b) e (c, c).

Definição 1.4 Vizinhança ou **Adjacência** de **vértices** é em relação aos elementos dos conjuntos de arestas de um grafo, ou seja, se a, b $\in$ V(G) são tais que (a, b) $\in$ E(G), dizemos que b é “vizinho” de a ou que a e b são “adjacentes”. Notaremos vizinhança de um vértice a por:

$$N(a) = \{b \in V(G) \mid \exists\ (a, b) \in E(G)\} \text{ ou } N_G(a) = \{b \in V(G) \mid \exists\ (a, b) \in E(G)\}$$

Definição 1.5 Dizemos que duas arestas são **adjacentes** quando possuem um vértice em comum.

Exemplo 1.2:

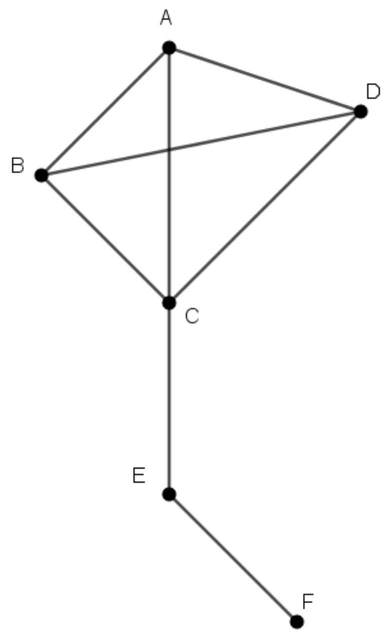


Figura 5 Grafo "pipa"

Vértices	Vértices Adjacentes	Arestas Adjacentes
A	N(A) = {B, C, D}	(A,B), (A, D), (A, C)
B	N(B) = {A, C, D}	(B, A), (B, C), (B, D)
C	N(C) = {A, B, D, E}	(C, A), (C, B), (C, D)
D	N(D) = {A, B, C}	(D, A), (D, B), (D, C)
E	N(E) = {C, F}	(E, C), (E, F)
F	N(F) = {E}	Não tem

Em relação ao grafo, a ordem dos vértices não importa, ou seja, a aresta (A, B) formada pelos dois vértices A e B é igual a aresta (B, A).

Definição 1.6 ***Grafos simples*** são grafos que não tem laços e nem mais de uma aresta entre o mesmo par de vértices. Caso contrário, o grafo é dito ***não-simples***. Neste trabalho só consideramos grafos simples.

Exemplo 1.3:

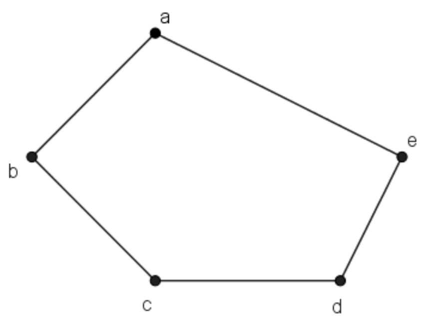


Figura 6 Grafo simples

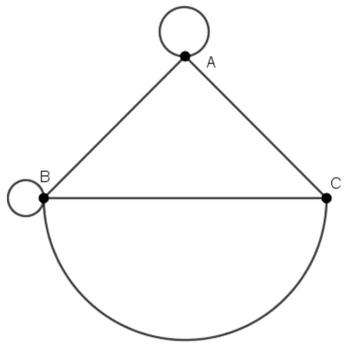
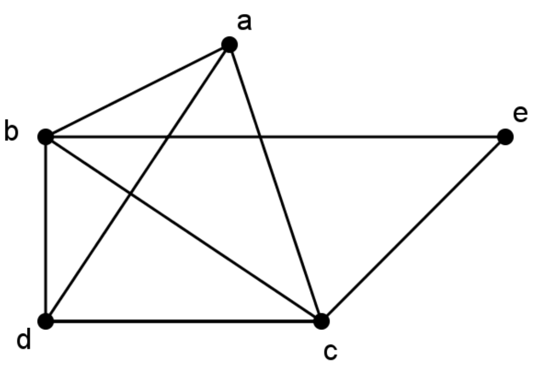


Figura 7 grafo não simples

Definição 1.7 A **ordem** de um grafo G é a cardinalidade de seu conjunto de vértices**.** Notaremos a ordem de um grafo G por $|V(G)|$.

Definição 1.8 O ***tamanho*** de um grafo é igual a quantidade de ligações que ele possui. Notaremos o tamanho de um grafo G por $|E(G)|$.

Exemplo 1.4:



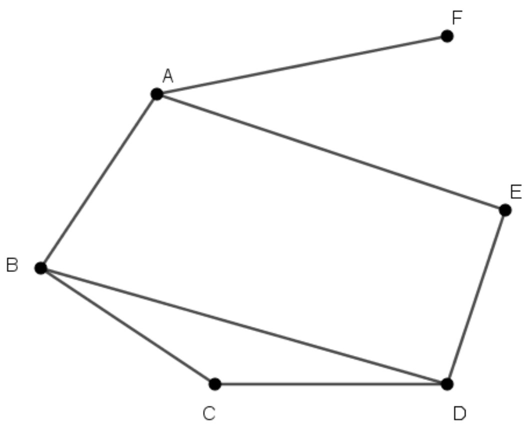
$|E(G)| = 8$

$|V(G)| = 5$

Figura 8 Grafo G

Definição 1.9 Em um grafo G, o ***grau de um vértice v*** , d(v), é igual ao número de vizinhos que ele possui. Ou seja, d(v) = │N(v)│.

Exemplo 1.5:



d(A) = 3
d(B) = 3
d(C) = 2
d(D) = 3
d(E) = 2

Figura 9 Grafo G

Para um grafo G, denotaremos por $\Delta(G)$ o grau máximo e $\delta(G)$ o grau mínimo. Assim,

$$\Delta(G) = \text{máx}\ \{d(v);\ v \in V(G)\}\ \text{e}$$

$$\delta(G) = \min\ \{d(v);\ v \in V(G)\}$$

No exemplo anterior, temos que $\delta(G) = 2$ e $\Delta(G) = 3$.

Definição 1.10 ***Grafo regular*** é aquele onde todos os vértices possuem o mesmo grau. Se em um grafo o grau de todos os seus vértices for "r", então ele é chamado de ***grafo r-regular***.

Exemplo 1.6:

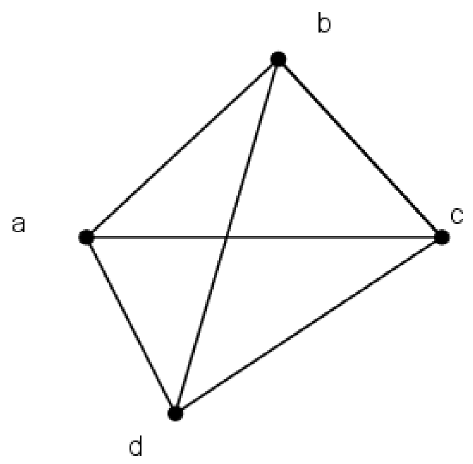


Figura 10 Grafo 3-regular

Temos no grafo acima que o grau de todos os vértices é 3, chamaremos esse grafo de 3-regular ou cúbico.

Definição 1.11 Um grafo G é dito ***completo*** se existe uma ligação entre cada par de vértices, ou seja, $d(v) = n - 1$, para todo $v \in V$, onde n é a ordem de G. Representamos $G = K_n$.

Exemplo 1.7:

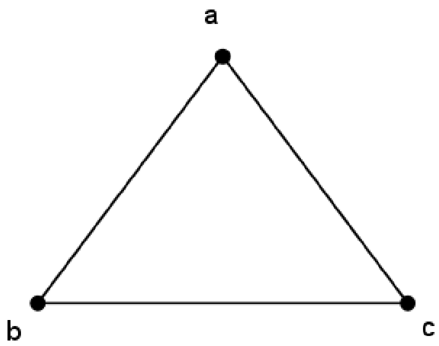


Figura 11 grafo K_3

Definição 1.12 O ***complementar*** de um grafo G é o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de G, mas as suas arestas são as que não estão em G, ou seja, para construirmos um grafo complementar devemos sempre ter a referência de um grafo completo. Representamos por G^C ou $\overline{G}$ o grafo complementar de G.

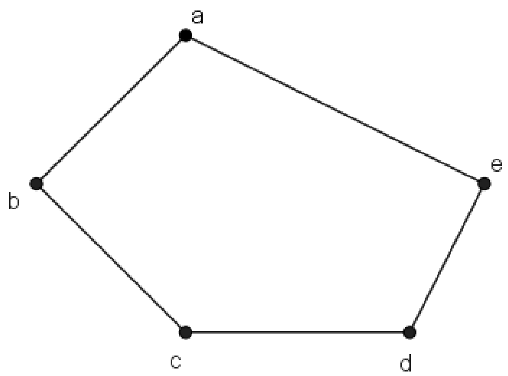


Figura 12 Grafo G

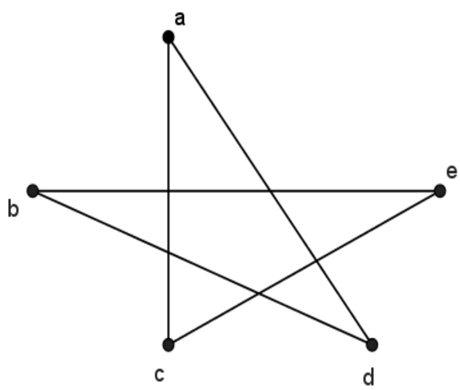


Figura 13 Grafo complementar de G

Definição 1.13 Um grafo G = (V, E) é dito ***bipartido*** se V = V1 ∪ V2 é uma partição e cada ligação de G é formada por vértices de subconjuntos diferentes.

Exemplo 1.8:

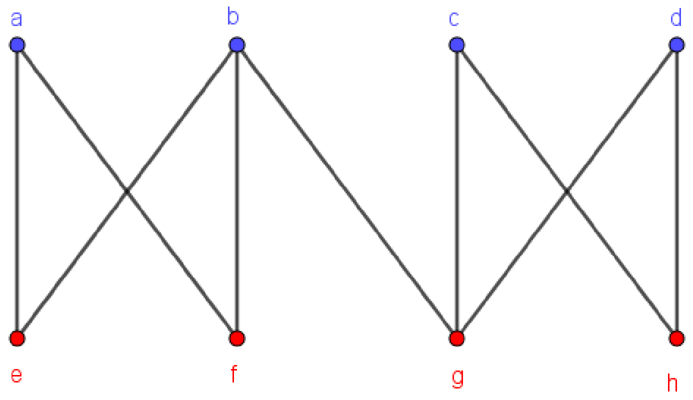


Figura 14 Grafo bipartido G

Perceba que o conjunto V = {a, b, c, d, e, f, g, h} pode ser particionado em dois subconjuntos V_1 = {a, b, c, d} e V_2 = {e, f, g, h}. Tem-se também que as extremidades das arestas de G estão em subconjuntos diferentes, portanto o grafo G é bipartido.

Um grafo bipartido G = ($V_1 \cup V_2$, E) é dito **bipartido completo** quando E = {(a, b); a ∈ V_1 e b ∈ V_2}. Neste caso, escrevemos G = $K_{p,q}$ (onde p e q são as cardinalidades dos subconjuntos V_1 e V_2, respectivamente). $K_{p,q}$ possui p x q arestas.

Exemplo 1.9:

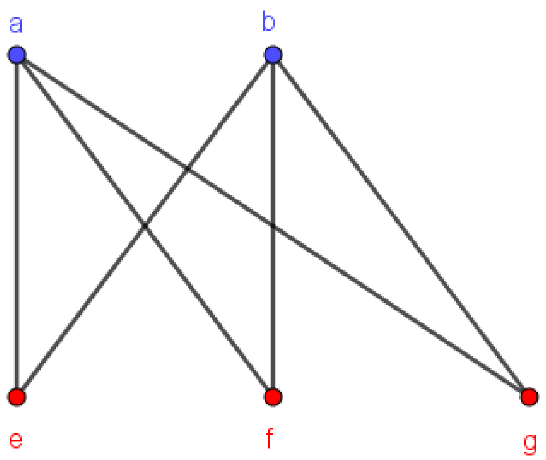


Figura 15 Grafo $K_{2,3}$

Definição 1.14 Dizemos que um grafo H é um ***subgrafo*** de G quando V(H) ⊆ V(G) e E(H) ⊆ E(G). Neste caso, escrevemos H ⊆ G. Se v ∈ V(G), então notaremos por H = G – v o subgrafo de G obtido deletando o vértice v e todas as arestas incidentes nele.

Exemplo 1.10:

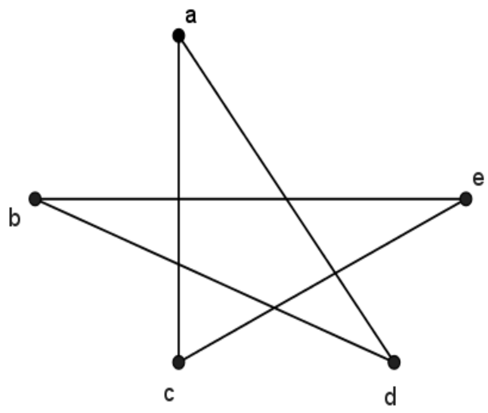


Figura 16 Grafo G

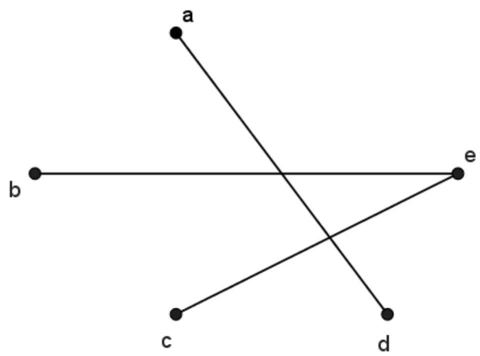


Figura 17 Subgrafo de G

É fácil perceber que H é subgrafo de G, pois V(H) = {a, b, c, d, e} ⊆ V(G) = {a, b, c, d, e} e E(H) = {(a, d), (b, e), (c, e)} ⊆ E(G) = {(a, d), (b, e), (c, e), (a, c), (b, d)}.

Definição 1.15 Um subgrafo H de G = (V, E) é dito ***induzido*** por um conjunto de vértices V_1 ⊆ V quando possui, do grafo primitivo, apenas estes vértices e todas as ligações entre eles, que figurarem no grafo original.

Exemplo 1.11:

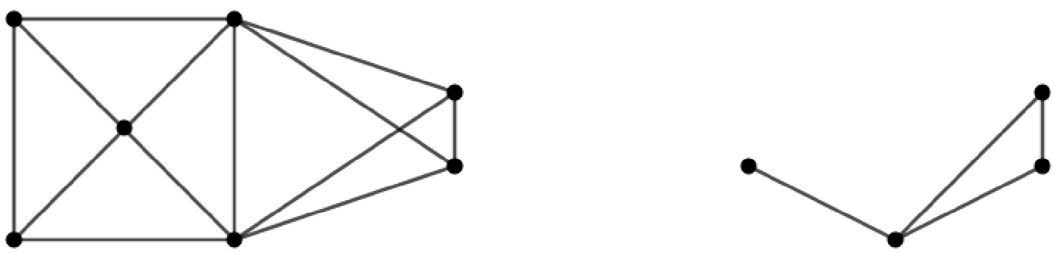


Figura 18 Grafo G e subgrafo induzido H

Definição 1.16 Um subgrafo H de G = (V, E) é dito ***gerador*** se V(H) = V(G).

Exemplo 1.12:

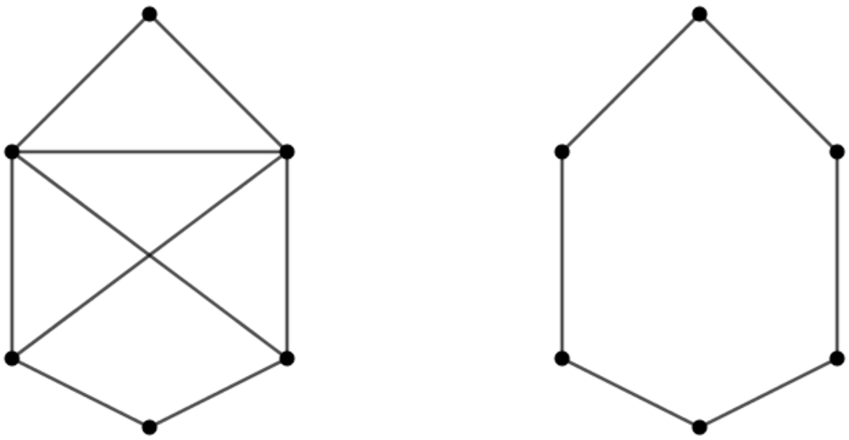


Figura *19* Grafo G e o subgrafo gerador H

Definição 1.17 Um subgrafo H de G é dito ***prório*** se H ≠ G.

Exemplo 1.13:

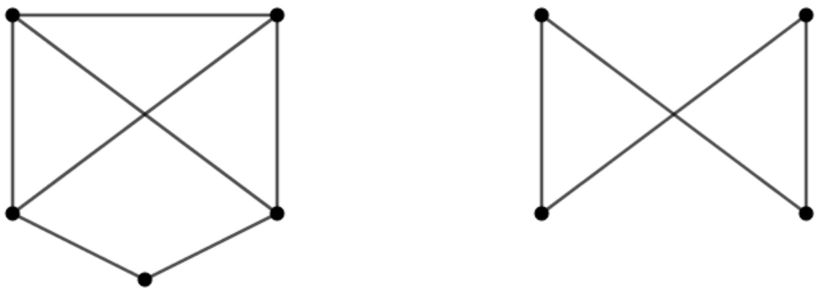


Figura 20 Grafo G e o subgrafo próprio H

Definição 1.18 Uma sequência de arestas sucessivamente adjacentes, cada uma tendo uma extremidade adjacente à anterior e a outra à subsequente (à exceção da primeira e da última) é dita um ***percurso*** em G.

- *Percurso fechado*: a última aresta da sucessão é adjacente a primeira;
- *Percurso aberto*: caso contrário

A seguir apresentamos um esquema sobre as classificações de um percurso:

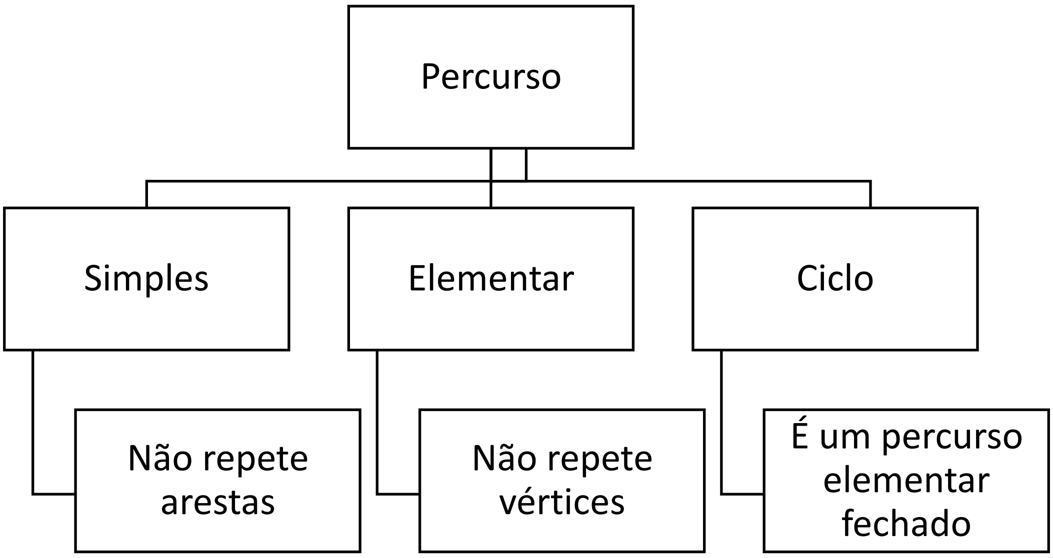


Figura 21 Tipos de percurso

O comprimento de um ciclo é dado pelo seu número de arestas. Se ele tem um número ímpar de arestas é dito um *ciclo ímpar*, caso contrário é um *ciclo par*.

Exemplo 1.14:

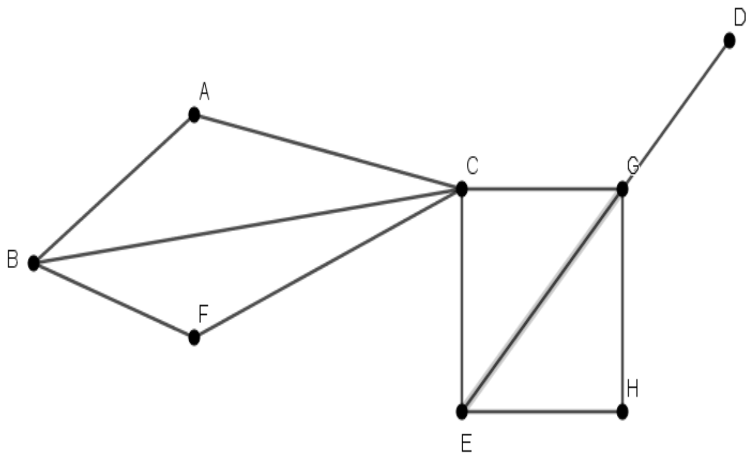


Figura 22 Grafo G

Cíclo par: A, B, F, C, A – quatro arestas.

Cíclo ímpar: A, B, C, A – três arestas.

Definição 1.19 Um grafo G é ***conexo*** quando para cada par a, b de seus vértices existe um percurso em G de extremidades a e b. Caso contrário, G é ***desconexo***.

Exemplo 1.15:

Figura 23 Grafos Conexo e Desconexo

Definição 1.20 Um subgrafo induzido completo de G é dito uma ***clique*** de G. Dizemos que uma clique H de G é ***maximal*** se não existe clique H' em G tal que H $\subsetneq$ H', e é ***máxima*** se |H| ≥ |H'|, para toda clique H' de G. Chamamos de ***número clique*** de G a cardinalidade de uma clique máxima de G e o denotamos por ω(G).

Exemplo 1.16: Na figura abaixo temos dois grafos G_1 e G_2 com $\omega(G_1) = 5$ e $\omega(G_2) = 4$.

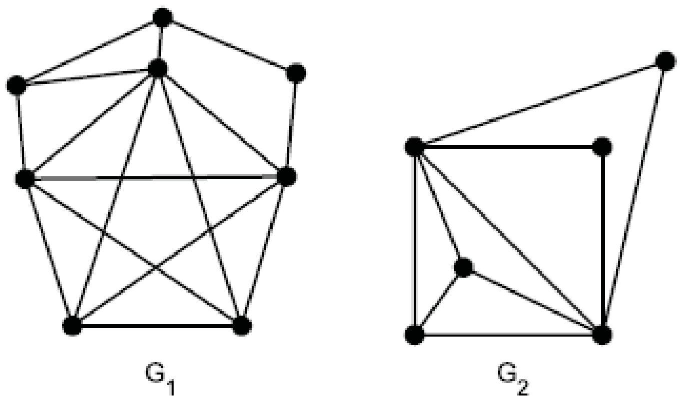


Figura 24 Garfos com números de cliques 5 e 4, respectivamente

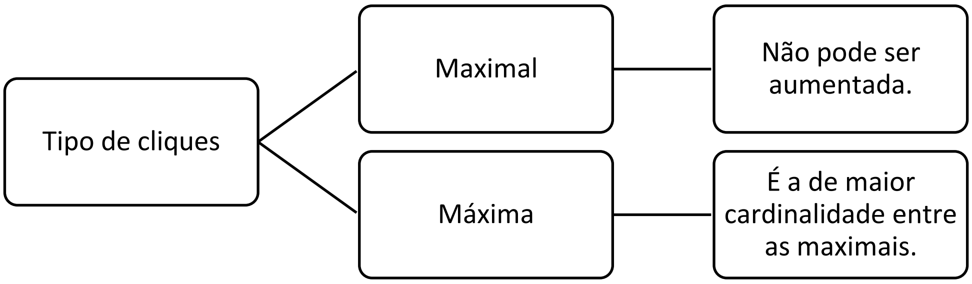


Figura 25 Esquema sobre os tipos de cliques.

Definição 1.21 Dois grafos G e H são ditos ***isomorfos*** quando existe uma bijeção entre seus conjuntos de vértices, $f: V(G) \rightarrow V(H)$ que preserva a relação de adjacências, isto é, qualquer par de vértices u e v de G são adjacentes se, e somente se, $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes em H.

Exemplo 1.17:

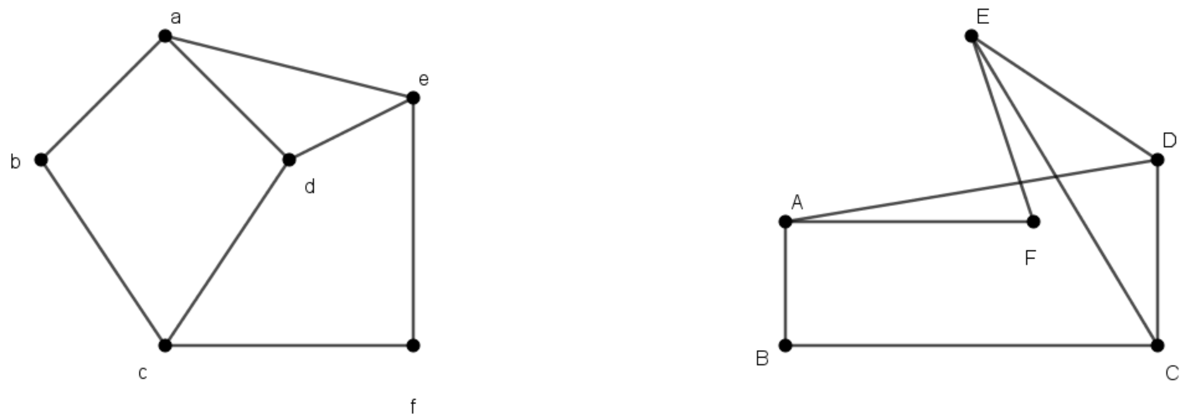


Figura 26 Grafos G e H

Com o intuito de verificar se os grafos G e H são isomorfos montaremos uma bijeção $f: V(G) \rightarrow V(H)$. Definindo:

$$f(a) = E$$
$$f(b) = F$$
$$f(c) = A$$
$$f(d) = D$$
$$f(e) = C$$
$$f(f) = B,$$

é fácil ver que a função é bijetora.

Observando os grafos G e H temos E(G) = {(a, b), (a, d), (a, e), (b, c), (c, d), (c, f), (d, e), (e, f)} e E(H) = {(E, F), (E, D), (E, C), (F, A), (A, D), (A, B), (D, C), (C, B)}. Vamos verificar se as adjacências estão preservadas pela bijeção:

(a, b) ↔ (f(a), f(b)) = (E, F).
(a, d) ↔ (f(a), f(d)) = (E, D).
(a, e) ↔ (f(a), f(e)) = (E, C).
(b, c) ↔ (f(b), f(c)) = (F, A).
(c, d) ↔ (f(c), f(d)) = (A, D).
(c, f) ↔ (f(c), f(f)) = (A, B).
(d, e) ↔ (f(d), f(e)) = (D, C).
(e, f) ↔ (f(e), f(f)) = (C, B).

Com isso, concluímos que os grafos G e H são isomorfos.

Em caso de grafos maiores, no entanto, torna-se bem mais complexa a verificação se são ou não isomorfos.

Definição 1.22 Ao menor número de vértices cuja a remoção desconecta de um grafo G ou o reduz a um único vértice, chama-se ***conectividade*** de vértices de G e representa-se por **κ(G).**

Em grafos completos, uma vez que todos os seus subgrafos induzidos são também completos, é impossível de desconectá-lo pela remoção de vértices. Assim, $\kappa(K_n) = n - 1$.

Se G não for completo, haverá dois vértices v e w ∈ V não adjacentes. Então, removendo todos os outros, o resultado será um grafo não conexo; logo, $\kappa(G) \leq n - 2$, para todo $G \neq K_n$. Um limite superior fácil de se obter é $\kappa(G) \leq \delta(G)$, uma vez que este é o número de arestas exigido para se separar um vértice de grau mínimo.

Diz-se que um grafo é ***h-conexo***, se $\kappa(G) \geq h$, $h \geq 1$. Logo, se $t \geq r$, um grafo t-conexo é também r-conexo.

Exemplo 1.18:

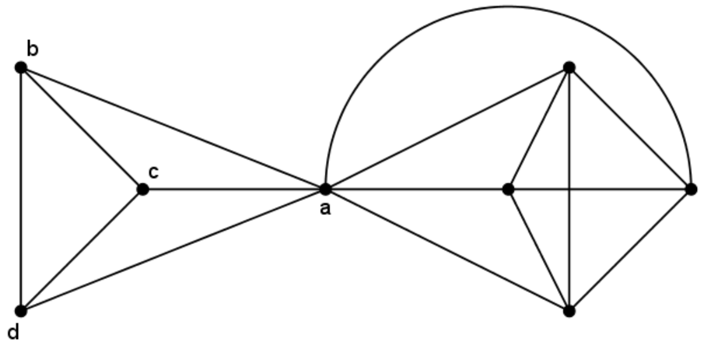


Figura 27 $\kappa(G) = 1$

Definição 1.23 Um ***conjunto dominante*** em um grafo G é um subconjunto de vértices, tal que todo vértice do grafo está no conjunto ou é adjacente a um de seus vértices. A cardinalidade do menor conjunto dominante de um grafo G é chamada de ***número de dominação*** e denotada por $\boldsymbol{\gamma(G)}$.

Exemplo 1.19:

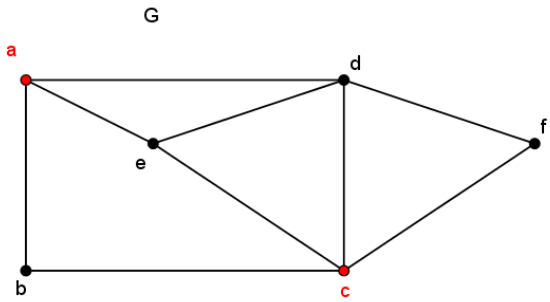


Figura 28 Representação do conjunto dominante

Neste grafo G, temos que V(G) = {a, b, c, d, e, f} e que A = {a, e, f}, B = {b, e, f} são conjuntos dominantes, mas o conjunto C = {a, c} é o menor conjunto dominante de G. Então $\gamma(G)$ = 2.

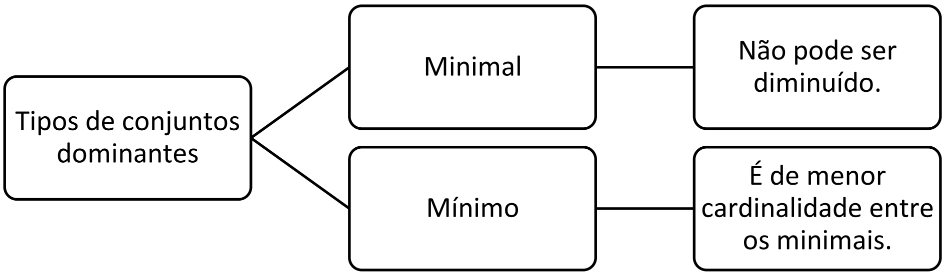


Figura 29 Esquema sobre os tipos de conjuntos dominantes

Definição 1.24 Um ***conjunto independente*** em um grafo G é um conjunto de vértices não adjacentes entre si. Um conjunto independente é dito maximal se não está estritamente contido em outros conjuntos independentes. Todo grafo tem ao menos um conjunto independente: o conjunto vazio. Um grafo pode ter vários conjuntos independentes distintos. O tamanho do maior conjunto independente é chamado ***número de independência***, denotado por **α(G)**.

Exemplo 1.20:

O grafo abaixo possui conjunto independente de tamanho 2 formado pelos vértices {A, E} e não possui conjunto independente de tamanho 3. Logo, α(G) = 2.

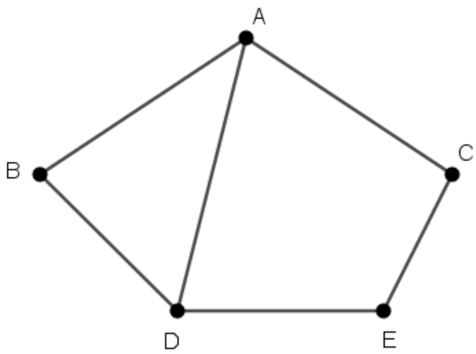


Figura 30 Grafo G

Exemplo 1.21:

No grafo $K_{2,4}$, os conjuntos partição X e Y são independentes e são os únicos maximais. Ainda, o conjunto Y é um conjunto independente máximo, uma vez que |Y| = 4 > 2 = |X| e portanto $\alpha(K_{2,4})=4$.

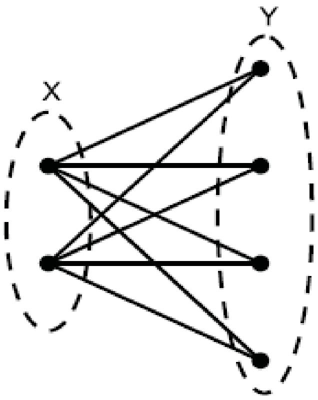


Figura 31 Grafo $K_{2,4}$

1.2 Passo a passo para construção de um Conjunto Independente Maximal

***Passo 1*:** Selecione um vértice (de menor grau) ainda não considerado;

Passo 2: Se este vértice não possuir arestas com vértices já adicionados, inclua-o no conjunto;

Passo 3: Remova as arestas deste vértice e os seus vértices vizinhos do grafo original;

Passo 4: Se houver vértices ainda não considerados volte para 1.

Exemplo 2.20:

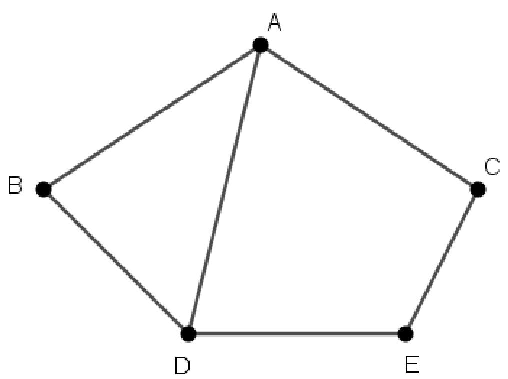


Figura 32 Grafo

Neste grafo, aplicaremos o passo a passo com objetivo de obter um dos conjuntos independentes maximais. Temos que d(A) = d(D) = 3 e d(B) = d(C) = d(E) = 2. Com isso, os vértices B, C e E são os de menores graus. Portanto, para iniciar a construção de um dos conjuntos independendes maximais, escolheremos começar com B, C ou E, como vemos a seguir:

B – entra
A – conflito
C – entra
D – conflito
E – conflito

Portanto, {B, C}, {A, E}, {C, D}, {B, E} são subconjuntos de V(G) que são conjuntos independentes maximais, e mais ainda, como não existe um subconjunto independentes com maior número de elementos, então todos estes serão considerados conjuntos independentes máximos.

Definição 1.25 Um grafo é ***planar*** se puder ser desenhado no plano sem que haja arestas se cruzando. Arestas se cruzam (cortam) se há interseção das linhas que as representam em um ponto que não seja um vértice. – Tal desenho é chamado representação planar do grafo. Se o desenho de um grafo tiver cruzamentos, o grafo pode ainda ser planar se puder ser desenhado sem cruzamentos.

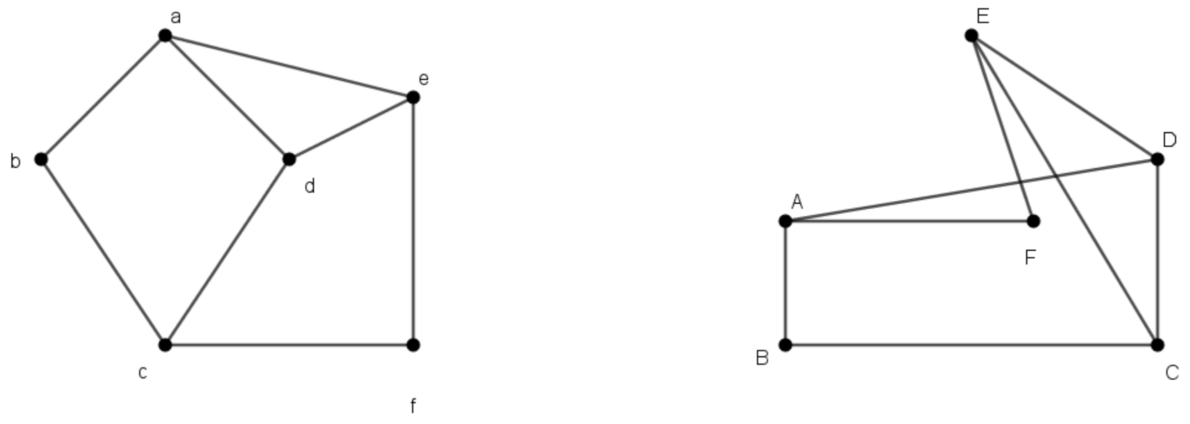


Figura 33 Grafo planar e não-planar

CAPÍTULO 2

COLORAÇÃO DE VÉRTICES

Antes de começar a enunciar o conceito de coloração de grafos, considerando o mapa do Brasil julga-se importante fazer uma suposição de tarefa sobre o conceito de coloração.

> Suponha a tarefa de colorir os estados brasileiros, representados por meio da figura 1, de tal forma que dois estados, com fronteiras em comum, tenham de ser coloridos por cores diferentes. Quantas cores, no mínimo, serão necessárias para a elaboração desta atividade? Sabendo que o número mínimo de cores usadas para resolver o problema é quatro, pode-se afirmar que isso é verdadeiro ou falso para qualquer mapa? (NETO e GOMES - 2014)

Figura 34 Mapa dos estados brasileiro

Mesmo que possa parecer uma pergunta ou mesmo uma curiosidade, este problema chamou a atenção e despertou o interesse de muitos pesquisadores matemáticos durante vários anos, devido às muitas tentativas de encontrar a solução, provocando, de forma significativa, o crescimento/desenvolvimento da Teoria de Grafos.

Em 1852, começava a surgir a ideia de coloração de vértices em uma carta escrita por Francis Guthrie ao seu irmão Frederick Guthrie. Francis presumia em sua carta que qualquer mapa desenhado poderia ser colorido com “somente” quatro cores, sem que os estados/países com divisas em comum tivessem a mesma cor. Na carta, Francis também questionava seu irmão sobre a possibilidade de existir alguma ideia para comprovar esse fato matematicamente.

Segundo REGO e SANTOS (2015), no mesmo ano, Frederick Guthrie, aluno da universidade de Londres, apresentou ao seu professor Augustus de Morgan a carta escrita por seu irmão. Porém, eles não foram capazes de elaborar uma demonstração, e, apesar do grande esforço aplicado ao longo dos 124 anos seguintes, nenhum matemático da época teve a capacidade de apresentar uma solução adequada para este problema. Este fato deu origem a um dos mais famosos teoremas da teoria de grafos. Este teorema ficou conhecido como “Teorema das Quatro Cores”.

Em 1879, Alfred Kempe, que era também advogado, publicou no *Journal American Mathematics* (Jornal de Matemática da América) um artigo provando o Teorema das Quatro Cores. Dez anos depois, essa demonstração foi contestada por Percy John Heawood, dizendo este que conseguiria resolver essa conjectura de Guthrie com “cinco” cores, e não com quatro.

Finalmente, esse problema só viria a ser resolvido em 1976, com a aplicação de uma técnica de prova por computadores. E com o auxílio dos resultados já estabelecidos naquela época sobre a Teoria de Grafos, Kenneth Appel e Wolfgang Haken conseguiram provar o teorema supracitado. Essa demonstração se realizou quando eles tiveram a brilhante ideia de associar pontos às regiões e unir dois pontos a uma linha, quando as regiões tinham uma fronteira em comum, chegando à conclusão de que qualquer mapa pode ser modelado como sendo um grafo.

> Em 1976, com a ajuda de um IBM 360, em Urbana (Illinois), Kenneth Appel e Wolfgang Haken apresentaram uma demonstração do Teorema das Quatro Cores. Quando a notícia do feito se espalhou pelos vários departamentos de matemática, houve um enorme entusiasmo, muitos professores interromperam as aulas para comemorar. Mas a euforia esfriou em muitos deles quando souberam que essa demonstração incluía mais de mil horas do uso de computadores de alta

> velocidade. A prova era demasiado longa para ser verificada à mão e havia sempre a possibilidade de os computadores terem cometido algum erro de difícil detecção. Hoje em dia a validade da demonstração é aceite na generalidade da comunidade matemática, mas continua a ser polémica. Está em causa o reconhecer uma argumentação baseada numa enorme quantidade de cálculos por computador, impossíveis de serem verificados detalhadamente por um ser humano durante toda a sua vida. (SOUSA – 2001)

Mas a história do Teorema das Quatro Cores não acaba aqui. A dificuldade em verificar todos os cálculos feitos na demonstração de Apple e Haken tem sido um incentivo para alguns matemáticos tentarem encontrar uma prova mais simples. Em agosto de 1994, no Congresso Internacional de Matemática, em Zurique, Paul D. Seymour apresentou uma prova simplificada do Teorema das Quatro Cores, cuja formulação foi o resultado do trabalho conjunto com Neil Robertson, Daniel P. Sanders e Robin Thomas. Também eles não conseguiram dispensar o uso do computador. Contudo, foram capazes de reduzir a quantidade de cálculos para um nível bastante tolerável. Aqueles que tenham os programas ao seu dispor e que tenham compreendido os fundamentos teóricos poderão, em menos de um dia, reproduzir a demonstração. A questão de construir uma demonstração que não necessite do auxílio de computadores continua em aberto.

De acordo com BOAVENTURA e JURKIEWICZ (2009), essa contribuição de Guthrie, Alfred Kempe, Kenneth Appel e Wolfgang Haken foi importantíssima para a área da cartografia, pois a coloração de mapas vinha sendo alvo de muitas pesquisas, já que os mapas encontrados no mercado tinham a necessidade de apresentar suas regiões com cores diferentes das regiões vizinhas para uma melhor visualização. Observava-se uma grande quantidade de cores que vinha sendo empregada para colorir estes mapas, ocorrendo um desperdício de material. Com a demonstração desse problema, esse desperdício de material foi reduzido, tendo assim uma grande contribuição na área da cartografia.

FATO	Surgiu o problema das Quatro Cores	Publicou um artigo provando o teorema das Quatro Cores	Contestou a demonstração de Kempe	Conseguiram demonstrar usando o computador o teorema das Quatro Cores	Apresentou de forma simplificada a demonstração do Teorema das Quatro Cores
ANO	1852	1879	1889	1976	1994
LOCAL	Londres	Londres	Londres	Urbana - Illinois (USA)	Zurique
MATEMÁTICO	Francis Guthrie e Frederick Guthrie	Alfred Kempe	Percy John Heawood	Kenneth Appel e Wolfgang Haken	Paul D. Seymour

Figura 35 Linha do tempo sobre o contexto histórico de coloração de vértices

2.1 Aprofundamento Teórico

Definição 2.1 Dado um grafo G = (V, E), efetuar uma coloração nada mais é do que atribuir cores aos seus vértices, respeitando a seguinte restrição: dois vértices adjacentes não podem assumir cores iguais. Tal processo é denominado ***coloração de vértices***..

A coloração de vértices pode ser considerada uma função c: V(G) → ℕ (onde ℕ é o conjunto dos números inteiros e positivos) tal que c(u) ≠ c(v) se u e v são adjacentes em G.

A coloração de um grafo sempre será possível. Se tivermos um grafo com *n* vértices podemos colori-lo utilizando *n* cores diferentes, sendo esta a solução trivial.

Uma **k-coloração** de G é uma coloração que utiliza um total de k cores, dizemos que um grafo G é *k*-colorível se houver uma coloração construída a partir do conjunto de *k* cores.

Exemplo 2.1:

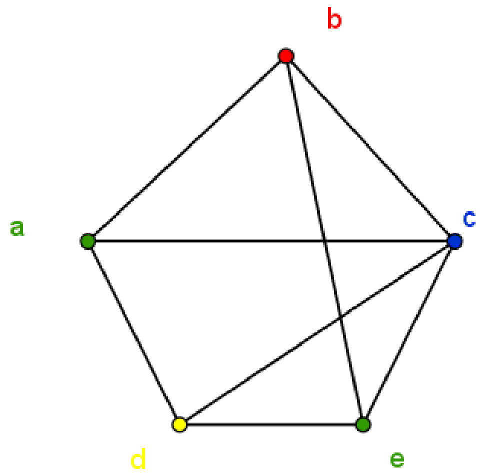


Figura 36 4-coloração

Definição 2.2 O ***número cromático*** de um grafo G é o menor número possível de cores que usamos para colorir seus vértices. Nota-se número cromático de G por **χ(G)**. Se χ(G) = k, o grafo é dito **k-cromático**.

De modo trivial, existem alguns tipos de grafos onde é possível obter o seu número cromático de acordo com as respectivas definições, como por exemplo:

- Se um grafo G com *n* vértices for completo, então $\chi(G)$ = *n;*
- Se um grafo G for bipartido com pelo menos uma aresta temos que $\chi(G)$ = 2;
- Se um grafo G com *n* vértices formar um ciclo então $\chi(G)$ = 2, se *n* for par e $\chi(G)$ = 3 se *n* for ímpar.

Exemplo 2.2:

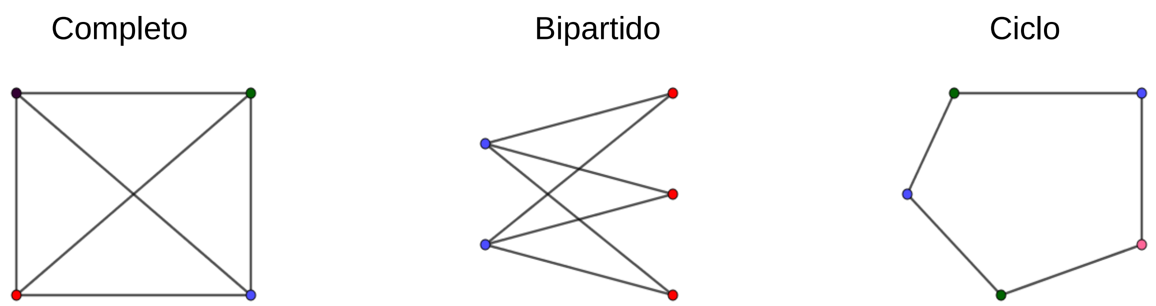


Figura 37 Números Cromáticos Triviais

Definição 2.3 Se o número de cores utilizados para colorir os vértices de um grafo for igual a χ(G), essa coloração é conhecida como ***coloração ótima*** ou ***coloração mínima*****.**

Exemplo 2.3:

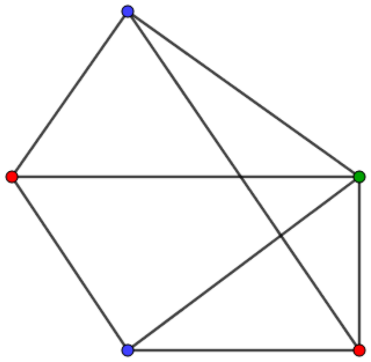


Figura 38 χ(G) = 3

Teorema 2.1: Se $\chi(G)$ = 2 então o grafo G é bipartido .

Demonstração:

Se um grafo possuir $\chi(G)$ = 2, podemos separar um subconjunto do outro, de modo que os vértices de mesma cor permaneçam juntos.

Pela definição de número cromático, não pode haver um par de vértices adjacentes com a mesma cor, ou seja, não há arestas entre dois vértices da mesma cor. Logo, só poderá haver arestas entre um vértice de um subconjunto para um vértice do outro, o que corresponde à definição de grafo bipartido.

■

Exemplo 2.4:

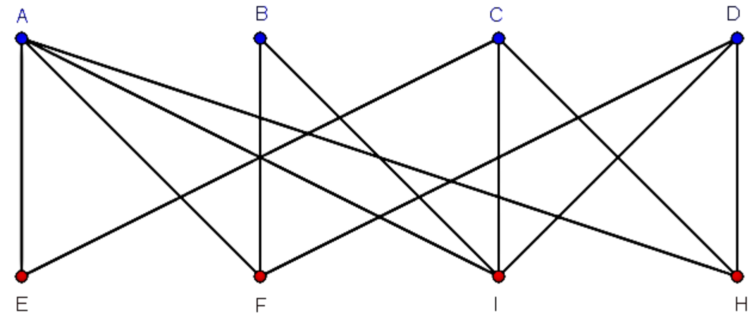


Figura 39 Grafo bipartido

No grafo acima, é fácil perceber que temos dois conjuntos independentes maximais, são eles: {A, B, C, D} os que recebem a cor azul e {E, F, I, H} os que recebem a cor vermelha. Como formamos apenas dois conjuntos independentes, temos que $\chi = 2$.

Em geral, o problema de encontrar uma coloração de um grafo G com $\chi(G)$ cores é extremante difícil. A estratégia usada para colorir se dá a partir de dois princípios, são eles: *por decisão*, no qual primeiro devemos verificar se o grafo é *k-colorível*; e *por análise*, no qual devemos encontrar o número cromático do grafo.

Para demonstrar que um grafo G é *k*-cromático, segundo NETO e GOMES (2014) tem-se que é necessário mostrar que existe uma *k*-coloração de G ($\chi(G) \leq k$) e que cada coloração de G requer pelo menos *k* cores ($\chi(G) \geq k$). Não existe uma fórmula geral para determinar o número cromático de um grafo. Por conseguinte, a análise deve estar concentrada em identificar o número cromático de alguns grafos específicos, ou de grafos que pertencem a alguma classe de interesse, ou ainda distinguir os limites inferiores ou superiores do número cromático de um grafo.

De acordo com ALVES (2015), o método sequencial para obter uma coloração de vértices, descrito a seguir, corresponde a uma *heurística gulosa*. O processo de heurística gulosa determina uma solução analisando elemento a elemento, sendo que a cada passo é adicionado um único elemento "candidato". O candidato escolhido segue um certo critério. A aplicação do método termina quando todos os elementos candidatos foram analisados. Vale ressaltar que um algoritmo heurístico pode determinar boas soluções na maioria das vezes, mas não é possível garantir uma boa solução para todos os casos. Uma ideia "gulosa" seria: percorrer todos os vértices do grafo, e se não houver conflitos de independência, acrescentamos o vértice ao conjunto.

2.2 Passo a passo para efetuar a coloração de vértices de um grafo

- Passo 1: Ordenar os vértices do grafo, ou seja, escolher uma sequência para os vértices de modo que cada vértice apareça uma única vez. É importante ressaltar que essa ordenação não tem relação alguma com a ordem em que os vértices aparecem no grafo;

- Passo 2: Pintar os vértices um a um, na sequência estabelecida no item anterior, atribuindo a cada vértice o menor inteiro (positivo) ainda não atribuído a um dos seus vértices adjacentes já coloridos.

Este método pode obter diversas colorações, dependendo da organização dos vértices escolhida, o que é um dos motivos de sua dificuldade. Mais ainda, como existem distintas maneiras de ordenações dos vértices que geram diferentes resultados, os exercícios sobre coloração não possuem uma única coloração.

2.3 Cotas para o número cromático de um grafo

Sendo a determinação do número cromático de um grafo um problema difícil em geral, é importante conhecer limitações superiores ou inferiores para ele, algumas delas apresentadas a seguir.

2.3.1 Cotas Inferiores

Teorema 2.3.1.1: *Para todo $H \subseteq G$, $\chi(G) \geq \chi(H)$.*

Demonstração: Se um grafo G é colorido com $\chi(G)$ cores, um subgrafo $H \subseteq G$ pode ser colorido repetindo-se as cores utilizadas em G, utilizando assim no máximo $\chi(G)$ cores.

■

Exemplo 2.5:

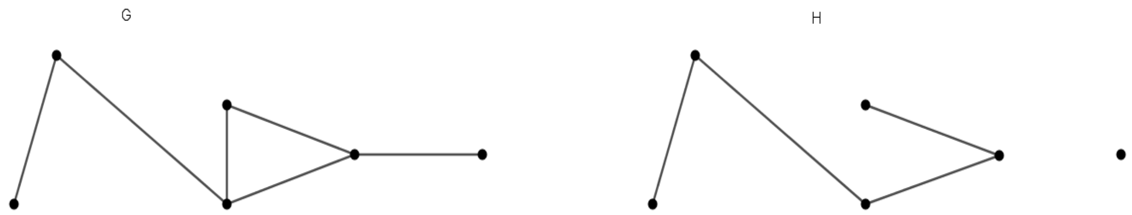


Figura 40 Grafos G e H

Como os vértices de G e H são os mesmos. E mais ainda, E(H) ⊆ E(G), então podemos dizer que H é subgrafo de G. Abaixo efetua-se a coloração de vértices de H:

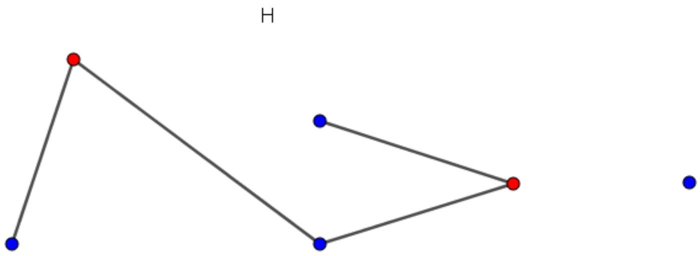


Figura 41 Coloração de H

Portanto, $\chi(H) = 2$ e pelo teorema acima temos que $\chi(G) \geq 2$.

Observa-se a coloração de G abaixo:

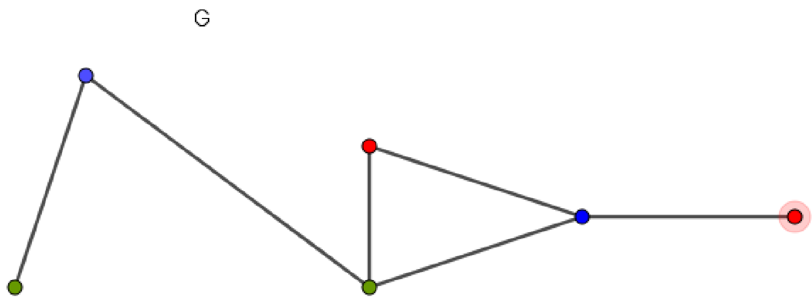


Figura 42 Coloração do grafo G

Logo, vimos que 2 é uma excelente cota inferior para este grafo, pois $\chi(G) = 3$.

O resultado a seguir relaciona o número cromático com o número de independência de um grafo.

Teorema 2.3.1.2: *Se G é um grafo com n vértices, $\chi(G).\alpha(G) \geq n$, isto é, $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.*

Demonstração: Seja $\{V_1, ..., V_k\}$ uma coloração dos vértices de G, em que cada V_i corresponde a um conjunto de vértices coloridos com a mesma cor, ou seja, $V_i \subseteq V(G)$, para $1 \leq i \leq k$. Temos $|V_i| \leq \alpha(G)$, para cada i, visto que $|V_i|$ representa o número de elementos do conjunto V_i. Logo, $n = |V_1|+|V_2|+...+|V_k| \leq k.\alpha(G)$. Mas, $\chi(G) = min\{k\}$ e, desse modo, $n \leq \chi(G).\alpha(G)$. Portanto, $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

■

Exemplo 2.6:

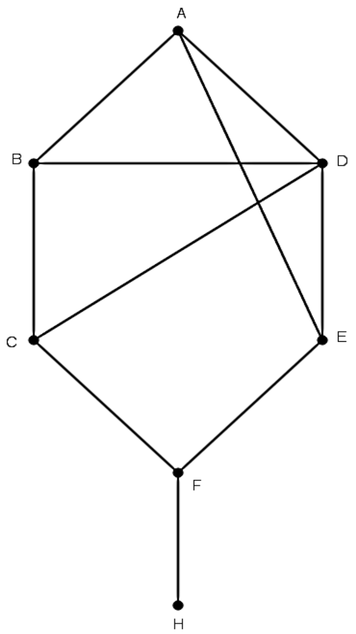


Figura 43 Grafo G

Analisando o grafo acima e construindo dois conjuntos independentes maximais, temos:

A – entra, B – conflito, C – entra, D – conflito, E – conflito, F – conflito e H – entra

F – entra, D – entra, E – conflito, H – conflito, A – conflito, B – conflito e C – conflito

Com isso, {A, C, H} e {D, F} são conjuntos independentes maximais, lembrando que em um grafo pode haver mais de um conjunto independente maximal. No exemplo

3.5, não há conjunto maximais de cardinalidade superior a três. Portanto, {A, E, H} é um conjunto independente máximo. Com isso, temos que α(G) = 3 e que *n* = 7, pelo resultado do teorema $\chi(G) \geq \frac{7}{3}$. Logo, $\chi(G) \geq 3$. Ou seja, para colorir o grafo acima iremos precisar de 3 ou mais cores.

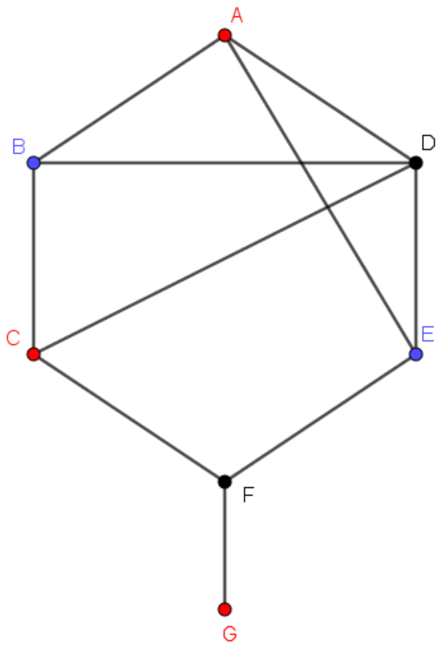


Figura 44 Número Cromático do grafo

Após a coloração do grafo acima segue que $\chi(G) = 3$.

Teorema 2.3.1.3: *Para todo grafo G, tem-se* $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Demonstração: A desigualdade decorre do seguinte fato óbvio: para qualquer coloração $\{X_1, ..., X_k\}$ dos vértices e qualquer clique C tem-se:

$$k \geq |C|.$$

Essa desigualdade vale, em particular, se a coloração é mínima e a clique é máxima. Logo, $\chi(G) \geq \omega(G)$.

■

Exemplo 2.7:

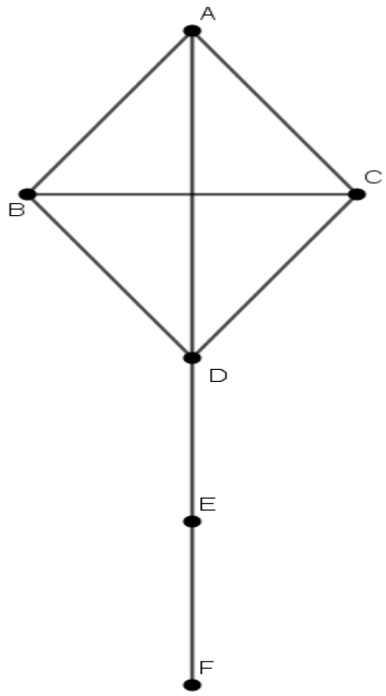


Figura 45 Grafo "pipa' quadrangular

Para os vértices {A, B, C, D}, temos uma aresta para cada par deles, então temos que $\omega = 4$. Com isso, $\chi(G) \geq 4$. Colorindo o grafo concluímos que:

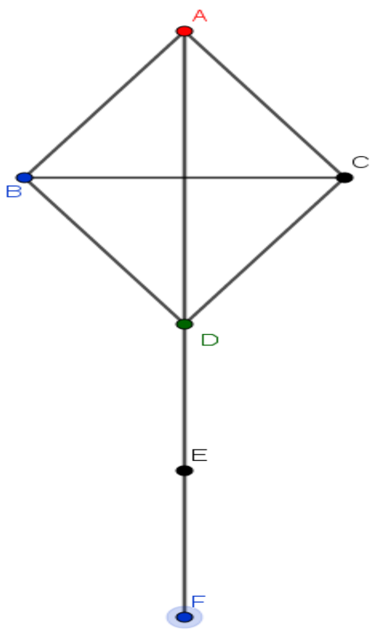


Figura 46 Número Cromático do grafo da figura 44

χ(G) = 4, para este grafo o teorema fornece uma excelente cota inferior.

Exemplo 2.8:

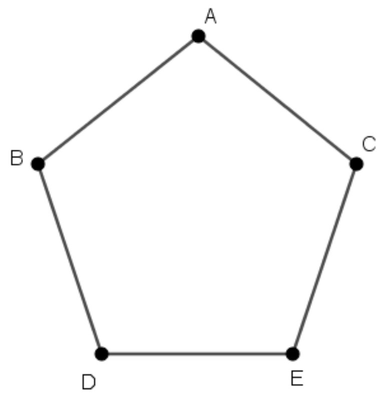


Figura 47 Grafo 2-regular

Temos que ω = 2 e colorindo os vértices tem-se χ = 3:

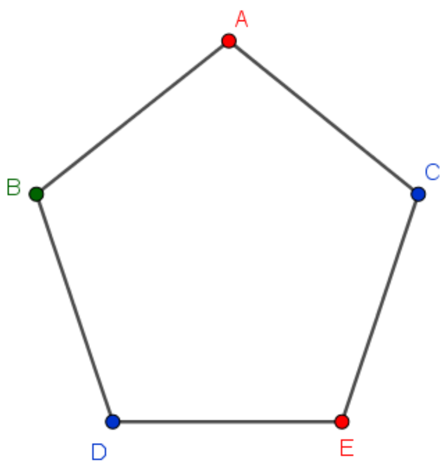


Figura 48 Número Cromático do grafo 2-regular

2.3.2 Cotas Superiores

Teorema 2.3.2.1: Para todo grafo G, tem-se $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$, *onde m é o tamanho de G, ou seja, a quantidade de arestas de G.*

Demonstração: Seja {X_1, ..., X_k} uma coloração mínima. Então, para todo i e todo j distinto de i, deve existir uma aresta com uma extremidade em X_i e outra em X_j. Assim, $m \geq \binom{k}{2}$ = (k^2 - k) = 2. Logo, k ≤ $\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}$.

■

Exemplo 2.9:

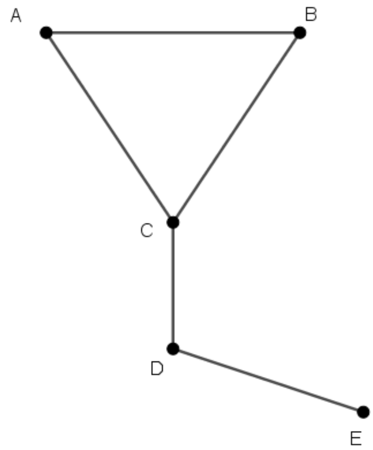


Figura 49 Grafo "pipa" triangular

Temos que m = 5, pelo teorema anterior, segue que:

$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2.5 + \frac{1}{4}} \Rightarrow \chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{10 + \frac{1}{4}} \Rightarrow \chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{41}{4}} \Rightarrow \chi(G) \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2} \Rightarrow \chi(G) \leq$ 3.

Colorindo o grafo, temos χ = 3:

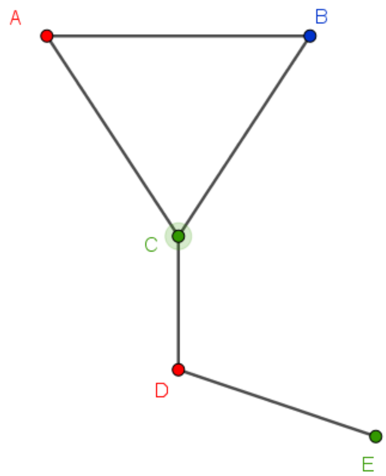


Figura 50 Número cromático do grafo

Teorema 2.3.2.3: (Teorema de Brooks, 1941): *Se G é um grafo conexo que não é completo e nem um cíclo ímpar, então* $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Demonstração: ver páginas 99 e 100 DIESTEL, 2005.

Teorema 2.3.2.4: *Para todo grafo G, tem-se* $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Demonstração: Essa prova é por indução finita em relação ao número de vértices. Se n(G) = 1, a proposição é obviamente verdadeira. Suponha agora que n(G) > 1. Seja x um vértice qualquer e H o grafo G - x. Por hipótese de indução, χ (H) ≤ Δ(H) + 1. Seja $\{X_1, ..., X_k\}$ uma coloração mínima de H. Como Δ(H) ≤ Δ(G), temos:

$$k \leq \Delta(G) + 1.$$

Se essa desigualdade é estrita, então $\{\{x\}, X_1, ..., X_k\}$ é uma coloração de G com não mais que Δ(G) + 1 cores. Suponha agora que k = Δ(G) + 1. Como $d_G(x) \leq \Delta(G) = k - 1$, o vértice x é adjacente a não mais que k - 1 cores diferentes. Portanto, existe i tal que $X_i \cup \{x\}$ é um conjunto independente. Se substituirmos X_i por $X_i \cup \{x\}$ em $\{X_1, ..., X_k\}$, teremos uma coloração de G com Δ(G) + 1 cores.

■

Exemplo 2.10:

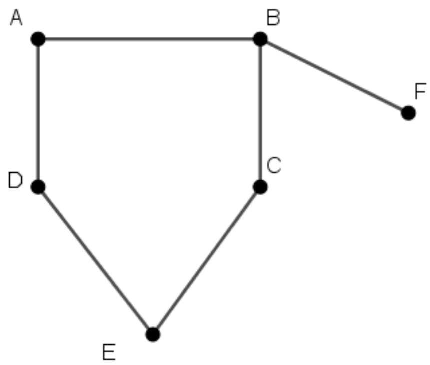


Figura 51

Analisando o grau de cada vértice, encontramos que d(A) = d(D) = d(E) = d(C) = 2, d(F) = 1 e d(B) = 3. Portanto, conclui-se que $\Delta = 3$ e , pelo teorema anterior, $\chi(G) \leq 3 + 1 = 4$.

Colorindo os vértices, temos $\chi = 3$:

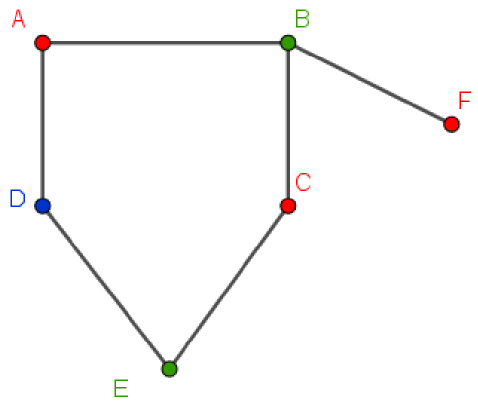


Figura 52 Número cromático do grafo da figura 51

Este teorema é uma boa cota superior neste exemplo.

$$\chi = 2.$$

Teorema 2.3.2.5: *Todo grafo G satisfaz* $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \subseteq G\}$.

Demonstração: Seja $k = \max\{\delta(H) : H \subseteq G\}$ e $n = |V(G)|$, e seja x_n um vértice de G que tem grau no máximo k. Considere $G_{n-1} = G - x_n$. Por hipótese, G_{n-1} tem um vértice, digamos x_{n-1}, de grau no máximo k. Defina:

$$G_{n-2} = G_{n-1} - x_{n-1} = G - \{x_n, x_{n-1}\}.$$

Continuando este procedimento, enumeramos todos os vértices de G de x_n até x_1. Claramente, a sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é tal que x_j é adjacente a no máximo k vértices que o precedem, para $1 \leq j \leq n$. Portanto, podemos colorir G com no máximo $k + 1$ cores.

■

Corolário do teorema 2.3.2.5: *Todo grafo G tem um subgrafo H tal que $\delta(H) \geq \chi(G) - 1$.*

Através do corolário 2.3.2.5, obtemos outro limitante observando que em toda coloração com χ cores existe ao menos uma aresta entre cada par de conjuntos da partição. Portanto, para um grafo com *m* arestas:

$$\binom{\chi}{2} \leq m \text{ , o que implica } \chi \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}} \text{ .}$$

■

Teorema 2.3.2.6 (Teorema das Quatro Cores):*Todo grafo planar é 4-colorível.*

Demonstração: A demonstração dada por Appel e Haken faz uso do computador e não pode ser verificada sem ele, de modo que não é uma prova completamente satisfatória.

■

Teorema 2.3.2.7: *Dado qualquer grafo G, há uma ordenação dos seus vértices tal que o método de coloração sequencial de vértices, aplicado a essa ordenação, produz uma coloração ótima.*

Demonstração: Dado um grafo G, seja V(G) = {v_1, ..., v_n}. Por simplicidade, vamos denotar χ(G) por χ. De acordo com a definição de χ, há uma coloração de vértices de G que utiliza χ cores. Isso significa que podemos particionar o conjunto V(G) em χ subconjuntos independentes da forma $\{v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^{ki}\}$, $1 \leq i \leq \chi$. Cada um desses subconjuntos de vértices é colorido com uma das χ cores. Consideremos a seguinte ordenação dos vértices de G:

$$v_1^1, \dots, v_1^{k1}, v_2^1, \dots, v_2^{k2}, \dots, v_\chi^1, \dots, v_\chi^{kx}$$

Aplicando o método de coloração de vértices com respeito a essa ordenação, obtemos uma coloração com χ cores. Provamos isso por indução em χ. De fato, se χ = 1, podemos atribuir esse inteiro a cada elemento de V(G). Ou seja, V(G) é um subconjunto independente de G e o método de coloração sequencial aplicado aos vértices ordenados da forma v_1, ..., v_n também atribui o inteiro 1 a cada um desses vértices, devido à ausência de arestas. Como hipótese de indução supomos que, sendo χ o número cromático de um grafo, ordenando os vértices de G na forma:

$$v_1^1, \dots, v_1^{k1}, v_2^1, \dots, v_2^{k2}, \dots, v_x^1, \dots, v_x^{kx},$$

O método de coloração sequencial fornece exatamente χ inteiros. Considere um grafo G com número cromático igual a χ + 1 e a ordenação:

$$v_1^1, \dots, v_1^{k1}, v_2^1, \dots, v_2^{k2}, \dots, v_x^1, \dots, v_x^{kx}, v_{x+1}^1, \dots, v_{x+1}^{kx+1}.$$

O número cromático do grafo G' com V(G') = $\{v_1^1, \dots, v_1^{k1}, v_2^1, \dots, v_2^{k2}, \dots, v_x^1, \dots, v_x^{kx}, v_{x+1}^1, \dots, v_{x+1}^{kx+1}\}$ é exatamente igual a χ. Pois, caso contrário, se este fosse igual a n < χ, G poderia ser colorido com as n+1 < χ+1 cores, o que é absurdo. Logo, pela hipótese de indução, ao aplicarmos o método sequencial de coloração a $v_1^1, \dots, v_1^{k1}, v_2^1, \dots, v_2^{k2}, \dots, v_x^1, \dots, v_x^{kx}$ obtemos exatamente χ inteiros que podem ser atribuídos a esses vértices.

O processo sequencial, aplicado ao vértice v_{x+1}^1, atribui um inteiro "n" que é igual ao menor inteiro ainda não atribuído aos vizinhos de v_{x+1}^1; ou seja, n é igual a χ + 1 se v_{x+1}^1 está relacionado a todos os vértices $v_1^1, \dots, v_1^{k1}, v_2^1, \dots, v_2^{k2}, \dots, v_x^1, \dots, v_x^{kx}$ ou n ≤ χ, caso contrário.

O mesmo ocorre com os vértices $v_{x+1}^2, \dots, v_{x+1}^{kx+1}$, já que estes vértices não estão relacionados entre si e tampouco com v_{x+1}^1. A pelo menos um dos vértices v_{x+1}^j, com 1 ≤ j ≤ χ + 1, será atribuído o inteiro χ + 1 pois, caso contrário, o número cromático de G seria igual a χ. Portanto, no final do processo sequencial aplicado ao grafo G, obtemos χ + 1 inteiros. Pelo princípio da indução o teorema está provado.

■

2.4 Aplicações

Neste tópico, abordaremos aplicações de colorações de vértices, especialmente em problemas em que precisamos repartir o conjunto de vértices em conjuntos de vértices independentes disjuntos. Além disso, serão expostos jogos e problemas, sendo que todos os exemplos desenvolvidos neste tópico podem ser adaptados e aplicados em sala de aula no ensino básico. Uma das aplicações mais interessantes para alunos do ensino fundamental e médio será a modelagem/resolução de problemas de correlação utilizando o algoritmo para coloração de vértices. Esta aplicação será apresentada no capítulo seguinte do trabalho.

Problema 2.4.1 (BOAVENTURA, JURKIEWICZ – 2009): Suponhamos que o grafo a seguir representa um parque em que estamos pensando em instalar barracas para venda de roupas. A operadora das barracas faz as seguintes restrições:

- Uma barraca deve ser localizada em uma esquina (vértice);
- Esquinas próximas (vértices adjacentes) só admitem uma barraca.

Por motivos comerciais, queremos evitar a diversificação excessiva de serviços. Qual seria o menor número de serviços que poderíamos utilizar?

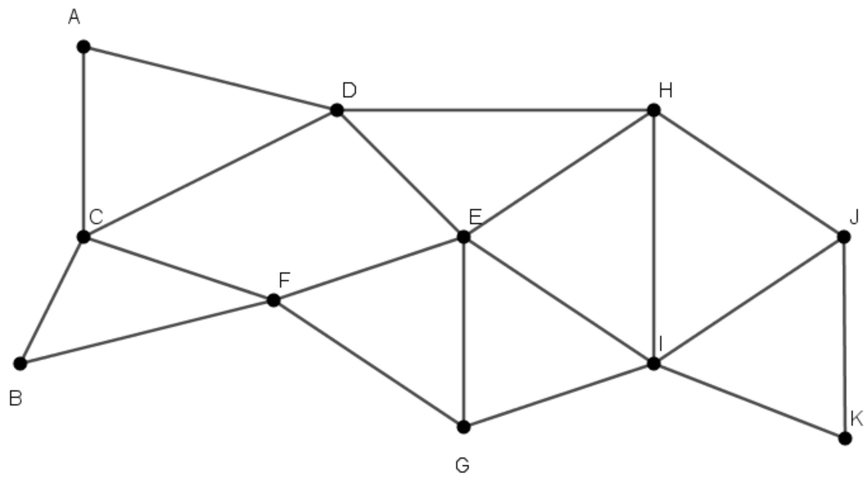


Figura 53 Representação do problema 3.7.1 em forma de grafo

Estamos procurando um conjunto independente. Para ter o *mínimo* de serviços, procuramos o número cromático do grafo, pois as cores irão representar os tipos de serviços. Como a quantidade de vértices é um pouco elevada, podemos ter um pouco de dificuldade para encontrar esse conjunto. Para facilitar, usaremos os teoremas acima sobre cotas inferiores e superiores para a encontrar a quantidade mínima de serviços. Como a $\omega(G)$ = 3, temos pelo teorema 2.3.1.3 que $\chi(G) \geq 3$. E mais ainda, como $\Delta(G) = 5$, então pelo teorema 2.3.2.4 temos que $\chi(G) \leq 5 + 1 = 6$. Portanto, podemos ter 3, 4, 5 ou 6 tipos de serviços diferentes. Como queremos a quantidade mínima começaremos com 3 cores. Se não conseguirmos passaremos para 4 cores e assim sucessivamente até encontrar a solução para o problema.

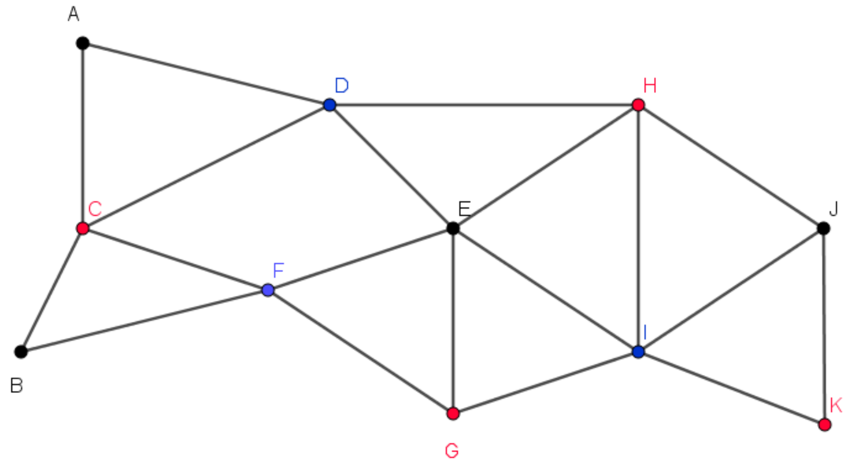


Figura 54 Número Cromático do grafo da figura 54

Como podemos observar, o grafo acima está colorido e com isso podemos ter, no mínimo, 3 tipos de serviços diferentes. É óbvio que conseguiremos mais de 3 tipos de serviços diferentes. Mas de acordo com o enunciado do problema, a resposta é 3.

Problema 2.4.2 (ALVES, 2015): O dono de uma loja de animais comprou certa quantidade de peixes ornamentais de diversas espécies, sendo apenas um exemplar de cada espécie. Alguns destes peixes não podem ficar no mesmo aquário. A compatibilidade entre as espécies está retratada na tabela a seguir (um X nessa tabela significa que as espécies representadas nas respectivas linhas e colunas não devem ficar no mesmo aquário).

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A		X	X		
B	X			X	X
C	X			X	
D		X	X		X
E		X		X	

Representação desse problema por meio de grafo:

Vértices – tipos de peixes

Arestas – são os tipos de peixes que não podem ficar no mesmo aquário

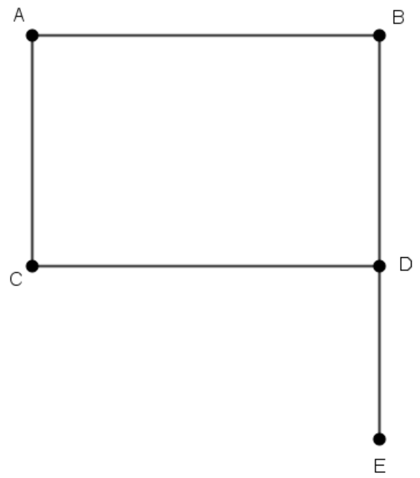


Figura 55 Representação do problema 2.4.2 em forma de grafo

Ao efetuar a coloração de vértices, encontraremos o número cromático e o conjunto de vértices independentes maximal que representa a quantidade mínima de aquários que devemos ter para colocar os peixes, respeitando as condições do problema.

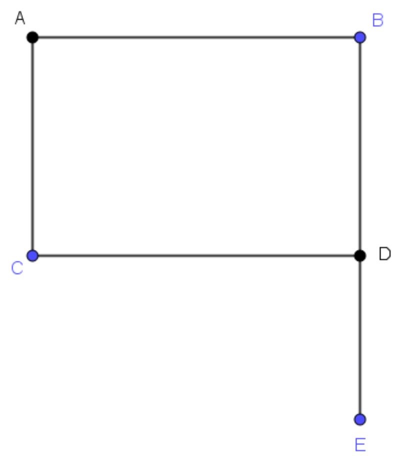


Figura 56 Número Cromático do grafo da figura 56

Concluímos que precisaremos de apenas dois aquários para dispor todos os tipos de peixes, pois {B, C, E} é um conjunto independente maximal.

Problema 2.4.3: Encontre uma coloração mínima dos vértices do grafo de Petersen.

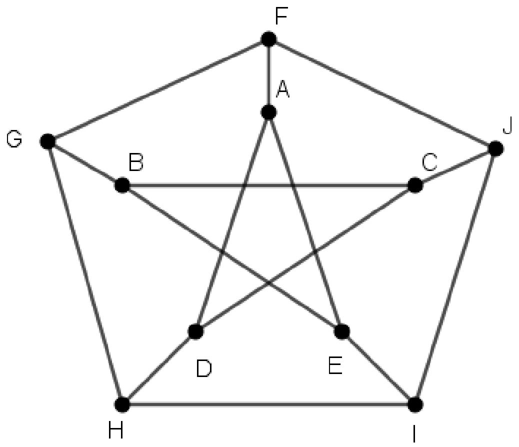


Figura 57 grafo de Petersen

Como é um grafo com uma pequena quantidade de vértices, iremos efetuar uma coloração gulosa para obter a coloração mínima. Abaixo, temos o grafo de Petersen já colorido. A coloração foi feita por tentativa e erro, de acordo com o algoritmo guloso de coloração de vértices.

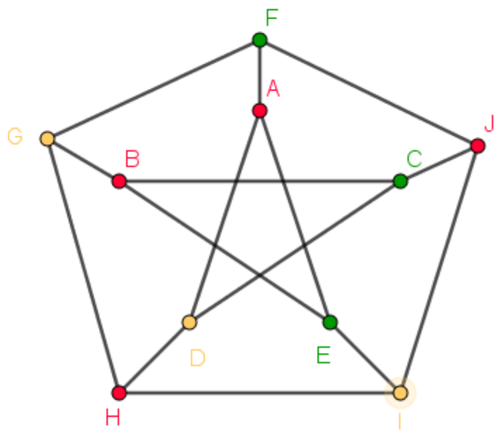


Figura 58 Número Cromático do grafo de Petersen

Inicialmente, colorimos os vértices A e B pela mesma cor (vermelha), pelo fato deles não serem vizinhos. Como B é vizinho de C, e A é vizinho de E, e mais ainda, sabendo que C e E não são vizinhos, conclui-se que eles irão assumir a mesma cor (verde). D é vizinho de A e C, então ele não poderá assumir nem a cor verde e nem a cor vermelha.

Definiremos uma terceira cor (amarela). F é vizinho de A, portanto não pode assumir a cor vermelha, mas então poderá assumir as cores verde ou amarela. Por escolha, ficou verde.

G é vizinho de F e B, então só poderá assumir a cor amarela. H é vizinho de D e G, então só poderá assumir a cor vermelha. I é vizinho de E e H, então só poderá assumir a cor amarela. E por fim, J é vizinho de C, F e I, então só poderá assumir a cor vermelha, e com isso, encontramos o número cromático do grafo de Petersen, ou seja, χ = 3. De fato, sendo {A, B, H, J} um conjunto independente maximal do grafo de Petersen, segue do teorema 2.3.1.2 que $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} = \frac{10}{4}$ = 2,5.

Problema 2.4.4: Uma indústria precisa armazenar o conjunto {A, B, C, D, E, F, G} de reagentes químicos. Por razões de segurança, A e B, A e F, C e B, C e D, C e G, E e F, F e G, A e G não devem ficar num mesmo compartimento do armazém. Quantos compartimentos o armazém deve ter no mínimo?

Antes de começar iremos representar o problema em forma de tabela, essa tabela irá representar os regentes que não poderão ficar juntos.

	A	B	C	D	E	F	G
A		x				X	X
B	x		x				
C		x		x			X
D			x				
E						X	
F	x				X		X
G	x		x			X	

Após a construção da tabela, elaboramos o grafo a partir das informações contidas nela. A letra “x” na tabela informa que os pares de vértices não serão vizinhos, ou seja, não existirá aresta entre esses produtos químicos. E os produtos químicos serão os vértices do grafo. A seguir tem-se a representação do problema em forma de grafo:

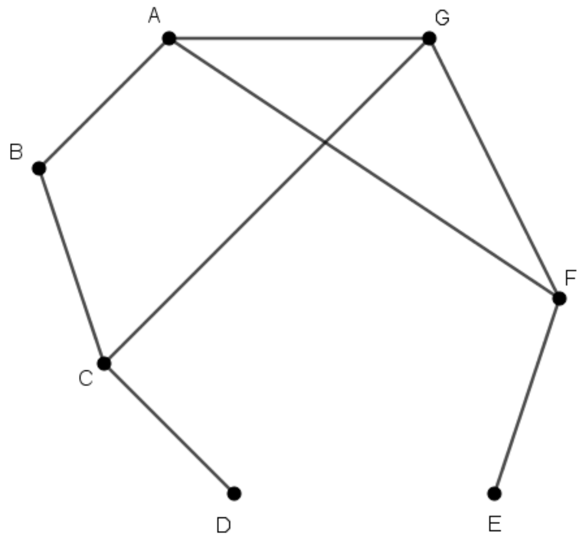


Figura 59 Representação do problema 2.4.4 em forma de grafo

Fazendo a coloração de vértices desse grafo, encontraremos a solução do problema, que é determinar a quantidade mínima de compartimentos, ou seja, cada cor diferente representa cada compartimento. Fazendo a coloração temos:

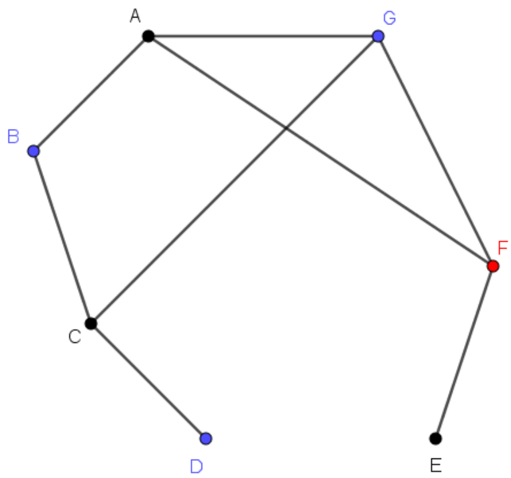


Figura 60 Número Cromático do grafo da figura 60

Como utilizamos, no mínimo, 3 cores distintas para efetuar a coloração do grafo acima, então a quantidade mínima de compartimentos que devemos utilizar para colocar esses reagentes químicos é 3.

Problema 2.4.5 (ALVES, 2015): Dois jogadores A e B têm quatro lápis de cores diferentes e um mapa não colorido (como sugestão, o mapa da América do Sul). Cada um dos jogadores pinta sucessivamente uma região do mapa. Perde o primeiro que não conseguir colorir adequadamente (estados que possuem divisa comum não podem ter a mesma cor) nenhuma das regiões ainda sem cor.

Figura 61 Mapa da América do Sul

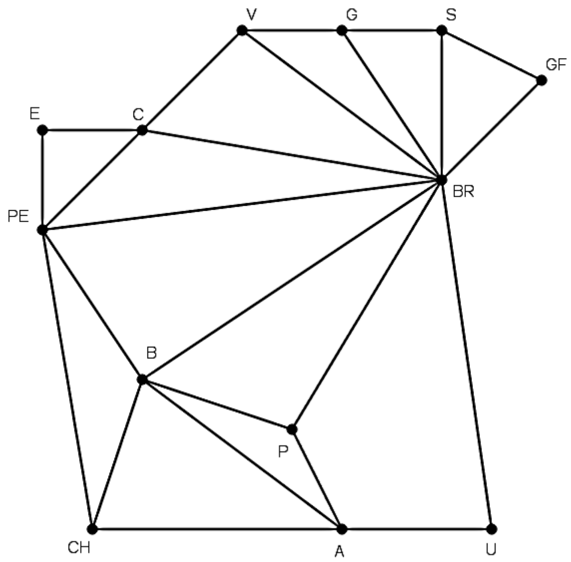


Figura 62 Representação do mapa da América do Sul em forma de grafo

O mapa a seguir, teremos um dos modelos de coloração do mapa da América do Sul do vencedor, lembrando que, pelo teorema das quatro cores, conseguimos colorir todo e qualquer mapa com apenas quatro cores distintas, não importando o número de regiões do mapa.

Figura 63 Coloração do mapa da América do Sul com "apenas" 4 cores

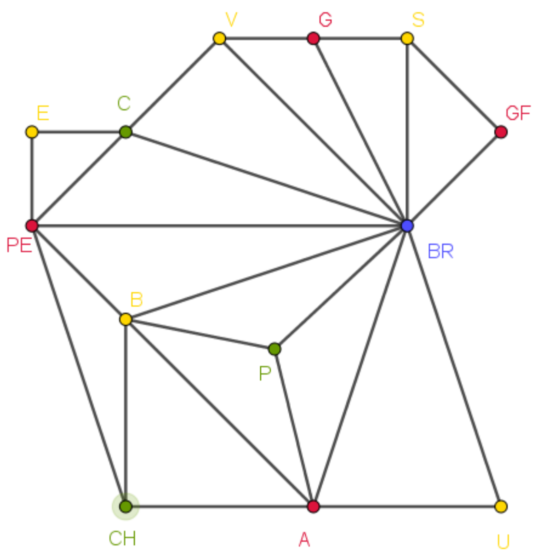


Figura 64 Número Cromático da figura 63

CAPÍTULO 3

PROBLEMAS DE CORRELAÇÃO

Neste capítulo, serão apresentadas a solução “tradicional” e a proposta de solução por coloração de vértices de problemas de correlação, fazendo as respectivas comparações entre as duas formas de resolver este tipo de problema.

Definição 3.1: Problemas de correlação são problemas de associação lógica entre certos conjuntos disjuntos (conjuntos que não possuem elementos em comum), como por exemplo: pessoas, lugares, objetos ou eventos fictícios. Essas relações são obtidas através das informações (“dicas”) contidas nos respectivos problemas. Finalizaremos o problema, quando conseguimos reformular os conjuntos dados em outros conjuntos disjuntos, de modo que esses “novos” conjuntos contenham um e somente um elemento de cada conjunto dado no problema.

Exemplo 3.1:

Três homens, Luís, Carlos e Paulo, são casados com Lúcia, Patrícia e Maria, mas não sabemos quem é casado com quem. Eles trabalham com Engenharia, Advocacia e Medicina, mas também não sabemos quem faz o quê. Com base nas dicas abaixo, tente descobrir o nome de cada marido, a profissão de cada um e o nome de suas esposas.

- O médico é casado com Maria.
- Paulo é advogado.
- Patrícia não é casada com Paulo.
- Carlos não é médico.

DICAS

No problema acima temos três conjuntos:

Homens = {Luís, Carlos, Paulo}
Mulheres = {Lúcia, Patrícia, Maria}
Profissões = {Engenheiro, Advogado, Médico}

Sendo assim, de acordo com as dicas dadas, iremos descobrir a esposa e a profissão de cada homem. Vale ressaltar que o exemplo anterior foi utilizado apenas para demonstrar como serão representados as dicas e os conjuntos nos problemas de correlação.

3.1 Questões e suas respectivas soluções por tabela

1) (FCC/PGE – 2013) Alberto, Bernardo, Custódio e Danilo são quatro músicos muito talentosos. Não necessariamente nesta ordem, um é pianista, outro violonista, outro saxofonista e há o baterista. Também se tem ciência de que:

- Alberto e Custódio assistiram à apresentação do saxofonista.
- O pianista dedicou uma música que compôs a Bernardo e ao baterista.
- O baterista, que já se apresentou com Danilo, quer muito fazer uma apresentação com Alberto.
- Alberto nunca conheceu Custódio.

Neste sentido, é possível concluir que o pianista, o saxofonista, o baterista e o violonista são, respectivamente:

a) Danilo, Bernardo, Custódio e Alberto.
b) Bernardo, Custódio, Alberto e Danilo.
c) Alberto, Danilo, Custódio e Bernardo.
d) Bernardo, Alberto, Danilo e Custódio.
e) Custódio, Danilo, Alberto e Bernardo.

Solução:

Inicialmente, montaremos uma tabela representando as linhas como sendo “os nomes” e as colunas representando “as profissões”. Iremos preencher a tabela com *SIM*, no caso das dicas afirmativas e, no caso contrário, com *NÃO*. Veja a tabela montada a seguir:

	Pianista	Violonista	Saxofonista	Baterista
Alberto				
Bernardo				
Custódio				
Danilo				

Figura 65 Tabela representativa do problema

Analisando as dicas, temos:

- Alberto e Custódio assistiram à apresentação do saxofonista. Ou seja, Nem Alberto e Nem Custódio são saxofonistas.

	Pianista	Violonista	Saxofonista	Baterista
Alberto			Não	
Bernardo				
Custódio			Não	
Danilo				

Figura 66 Tabela com inclusão da 1ª dica

- O pianista dedicou uma música que compôs a Bernardo e ao baterista. Ou seja, Bernardo não é pianista e nem baterista.

	Pianista	Violonista	Saxofonista	Baterista
Alberto			Não	
Bernardo	Não			Não
Custódio			Não	
Danilo				

Figura 67 Tabela com inclusão da 2ª dica

- O baterista, que já se apresentou com Danilo, quer muito fazer uma apresentação com Alberto. Ou seja, Danilo não é baterista e Alberto não é baterista. Portanto, Custódio é baterista.

	Pianista	Violonista	Saxofonista	Baterista
Alberto			Não	Não
Bernardo	Não			Não
Custódio	Não	Não	Não	Sim
Danilo				Não

Figura 68 Tabela com inclusão da 3ª dica

Sabendo agora que Custódio é baterista, retornamos às dicas. Como Alberto não conhece Custódio e o pianista dedicou uma música que compôs a Bernardo e ao Custódio, portanto Alberto não é pianista. Logo Danilo é pianista. Consequentemente, Bernardo é saxofonista e Alberto é violonista.

	Pianista	Violonista	Saxofonista	Baterista
Alberto	Não	Sim	Não	Não
Bernardo	Não	Não	Sim	Não
Custódio	Não	Não	Não	Sim
Danilo	Sim	Não	Não	Não

Figura 69 Tabela solução do problema

Resposta:

Alberto é violonista.

Bernardo é saxofonista.

Custódio é baterista.

Danilo é pianista.

Logo, o gabarito é letra A.

2) (CONSULPLAN/TSE: Técnico Judiciário – 2012) Os irmãos Ciro, Plínio e Vítor têm alturas e pesos diferentes. Considere que:

- O mais alto é o mais gordo, mas o mais baixo não é o mais magro.
- Vítor é mais baixo que Ciro e mais magro que Plínio.
- Plínio é o mais alto ou Ciro é o mais baixo.

Diante do exposto, é correto afirmar que:

a) a ordem crescente dos pesos desses irmãos é: Plínio, Vítor e Ciro.

b) Ciro é o mais magro e Plínio é o mais alto.

c) Plínio é o mais alto e Vítor é o mais gordo.

d) a ordem decrescente das alturas desses irmãos é: Ciro, Plínio e Vítor.

Solução:

Inicialmente, montaremos uma tabela representando as linhas como sendo “os nomes” e as colunas representando “os pesos” e “as alturas”. Iremos preencher a tabela com *SIM* para as dicas afirmativas e caso contrário com *NÃO*. Veja a tabela montada a seguir:

	Mais Gordo	Peso Médio	Mais Magro	Mais Alto	Altura Média	Mais Baixo
Ciro						
Plínio						
Vítor						

Figura 70 Tabela representativa do problema

Analisando as dicas do problema, temos:

- Vítor é mais baixo que Ciro e mais magro que Plínio.

Conclui-se então que Ciro não é o mais baixo e Vítor não é o mais gordo e nem o mais alto.

	Mais Gordo	Peso Médio	Mais Magro	Mais Alto	Altura Média	Mais Baixo
Ciro						Não
Plínio			Não			
Vítor	Não			Não		

Figura 71 Tabela com inclusão da 1ª dica

- Plínio é o mais alto ou Ciro é o mais baixo.

Como Ciro não é o mais baixo, com certeza Plínio é o mais alto.

	Mais Gordo	Peso Médio	Mais Magro	Mais Alto	Altura Média	Mais Baixo
Ciro				Não	Sim	Não
Plínio			Não	Sim	Não	Não
Vítor	Não			Não	Não	Sim

Figura 72 Tabela com inclusão da 2ª dica

- O mais alto é o mais gordo, mas o mais baixo não é o mais magro.

	Mais Gordo	Peso Médio	Mais Magro	Mais Alto	Altura Média	Mais Baixo
Ciro	Não	Não	Sim	Não	Sim	Não
Plínio	Sim	Não	Não	Sim	Não	Não
Vítor	Não	Sim	Não	Não	Não	Sim

Figura 73 Tabela solução do problema

Resposta:

Ciro é de altura intermediária e mais magro.
Plínio é o mais alto e o mais gordo.
Vítor é mais baixo e de peso intermediário.

Logo, gabarito letra B

3) (Escola de Administração Fazendária (ESAF) – Auditor Fiscal do Tesouro Nacional – 1996) Os carros de Artur, Bernardo e César são, não necessariamente nesta ordem, uma Brasília, uma Parati e um Santana. Um dos carros é cinza, um outro é verde, e o outro é azul. O carro de Artur é cinza; o carro de César é o Santana; o carro de Bernardo não é verde e não é a Brasília. Então, podemos concluir que as cores da Brasília, da Parati e do Santana são, respectivamente:

(a) cinza, verde e azul;
(b) azul, cinza e verde;
(c) azul, verde e cinza;

(d) cinza, azul e verde;

(e) verde, azul e cinza.

Solução:

Inicialmente, vamos modelar o problema acima por uma tabela representando as linhas como sendo “os nomes” e as colunas representando “os tipos de carro” e “as cores de cada carro”. Iremos preencher a tabela com *SIM* para as dicas afirmativas e, no caso contrário, com *NÃO*. Veja a tabela montada a seguir:

Motorista	CARRO			COR		
	Brasília	Parati	Santana	Cinza	Verde	Azul
Artur						
Bernardo						
Cesar						

Figura 74 Tabela representativa do problema

Agora iremos analisar as dicas:

- O carro de Artur é cinza

Motorista	CARRO			COR		
	Brasília	Parati	Santana	Cinza	Verde	Azul
Artur				SIM	NÃO	NÃO
Bernardo				NÃO		
Cesar				NÃO		

Figura 75 Tabela com inclusão da 1ª dica

- O carro de Cesar é o Santana

Motorista	CARRO			COR		
	Brasília	Parati	Santana	Cinza	Verde	Azul
Artur			NÃO	SIM	NÃO	NÃO
Bernardo			NÃO	NÃO		
Cesar	NÃO	NÃO	SIM	NÃO		

Figura 76 Tabela com inclusão da 2ª dica

- O carro de Bernardo não é verde e não é a Brasília

Motorista	CARRO			COR		
	Brasília	Parati	Santana	Cinza	Verde	Azul
Artur	SIM	NÃO	NÃO	SIM	NÃO	NÃO
Bernardo	NÃO	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	SIM
Cesar	NÃO	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO

Figura 77 Tabela solução

Resposta:

O carro de Artur é uma Brasília de cor cinza.
O carro de Bernardo é uma Parati de cor azul.
O carro de César é um Santana de cor verde.

Logo, gabarito letra D.

4) (ESAF – Analista de Finanças e Controle – 2002) Um agente de viagens atende a três amigas. Uma delas é loira, outra é morena e a outra é ruiva. O agente sabe que uma delas se chama Bete, outra se chama Elza e a outra se chama Sara. Sabe, ainda, que cada uma delas fará uma viagem a um país diferente da Europa: uma delas irá à Alemanha, outra irá à França e a terceira irá à Espanha. Ao agente de viagens, que queria identificar o nome e o destino de cada uma, elas deram as seguintes informações:

A loira disse: “Não vou à França nem à Espanha.”;

A morena disse: “Meu nome não é Elza nem Sara.”;

A ruiva disse: “Nem eu nem a Elza vamos à França.”.

O agente de viagens concluiu, então, acertadamente, que:

(a) A loira é Sara e vai à Espanha;

(b) A ruiva é Sara e vai à França;

(c) A ruiva é Bete e vai à Espanha;

(d) A morena é Bete e vai à Espanha;

(e) A loira é Elza e vai à Alemanha.

Solução:

Inicialmente, montaremos uma tabela representando as linhas como sendo “as cores de cabelo” e as colunas representando “os nomes” e “os países”. Iremos preencher a tabela com *SIM* para as dicas afirmativas e, no caso contrário, com *NÃO*. Veja a tabela montada a seguir:

	Bete	Elza	Sara	Alemanha	França	Espanha
Loura						
Morena						
Ruiva						

Figura 78 Tabela representativa do problema

Analisando as dicas, temos:

- A loura: “Não vou à França nem à Espanha”

	Bete	Elza	Sara	Alemanha	França	Espanha
Loura				Sim	Não	Não
Morena				Não		
Ruiva				Não		

Figura 79 Tabela com inclusão da 1ª dica

- A morena: "Meu nome não é Elza nem Sara"

	Bete	Elza	Sara	Alemanha	França	Espanha
Loura	Não			Sim	Não	Não
Morena	Sim	Não	Não	Não		
Ruiva	Não			Não		

Figura 80 Tabela com inclusão da 2ª dica

- A ruiva: "Nem eu nem Elza vamos à França"

	Bete	Elza	Sara	Alemanha	França	Espanha
Loura	Não	Sim	Não	Sim	Não	Não
Morena	Sim	Não	Não	Não	Sim	Não
Ruiva	Não	Não	Sim	Não	Não	Sim

Figura 81 Tabela solução do problema

Resposta:

Elza é loira e viajou para Alemanha.

Bete é morena e viajou para França.

Sara é ruiva e viajou para Espanha.

Logo, gabarito letra A.

3.2 Resolução dos problemas de correlação por coloração de vértices

Suponhamos que num problema de correlação são fornecidos elementos organizados em r classes distintas, digamos A_1, A_2, ..., A_r, cada uma delas com s elementos.

Também são dadas informações a respeito de como certos elementos de classes distintas podem ou não estar relacionados, as chamadas "dicas".

Podemos construir um grafo G = (V, E) que represente todas estas informações do seguinte modo:

- $V = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r$;
- Quaisquer dois vértices de uma mesma classe são adjacentes, ou seja, para i = 1, ..., r, o subgrafo gerado por A_i é completo;
- Dois vértices de classes distintas são adjacentes quando as informações fornecidas proíbem que estejam relacionados.

Notemos que buscar uma solução para o ***problema de correlação*** é equivalente buscar uma **s-coloração** para o grafo G que o representa.

3.2.1 Modelagem passo a passo do problema

1º passo: Identificar os conjuntos nos problemas;
2º passo: Cada elemento de cada conjunto será um vértice do grafo;
3º passo: Colorir os vértices do primeiro conjunto com cores diferentes;
4º passo: Construir arestas de acordo com as dicas do problema, ligando elementos que não podem ser escolhidos juntos;
5º passo: Colorir os outros vértices com as mesmas cores atribuídas aos elementos do primeiro conjunto, lembrando que, por definição, as extremidades de cada aresta possuem cores diferentes;
6º passo: Ao final do problema, no grafo colorido, os vértices que tiverem cores iguais formam a solução do problema.

Cabe aqui destacar que, apesar de os conjuntos distintos darem origem a subgrafos completos, não representaremos suas arestas internas para não sobrecarregar a representação do problema.

Vamos retornar aos exemplos da seção 3.1 e resolvê-los por este método, seguindo a ordem apresentada anteriormente.

<u>Questão 1</u>:

Primeiramente, iremos representar os “nomes” e as “profissões” como sendo os vértices de um grafo. Além disso, atribuiremos aleatoriamente uma cor diferente para cada vértice que representa um nome e, de acordo com as dicas, iremos construir as arestas. Em seguida, coloriremos cada vértice da profissão com as mesmas cores atribuídas para cada nome, conforme o grafo abaixo:

Figura 82 Modelagem do problema

- Alberto e Custódio assistiram à apresentação do saxofonista.

Nesta dica, entende-se que Alberto e Custódio não são saxofonistas. Ou seja, existem as arestas (Alberto, saxofonista) e (Custódio, saxofonista).

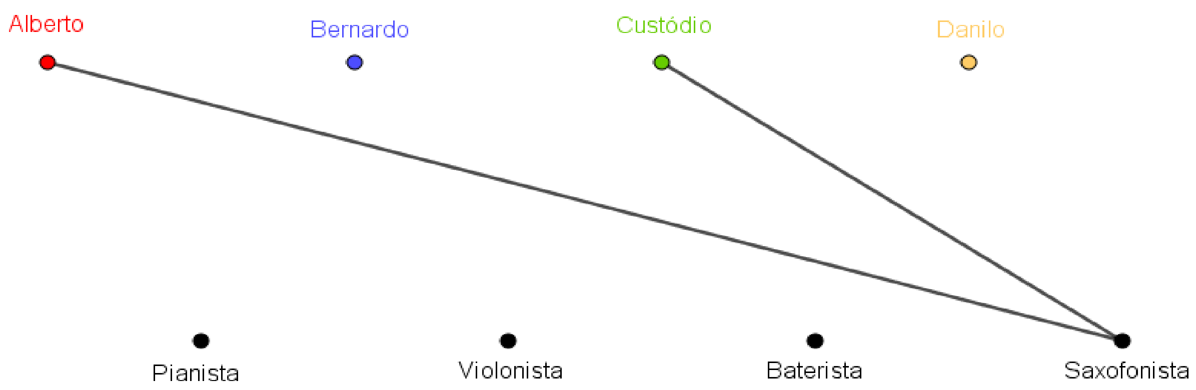


Figura 83 Grafo com a inclusão da 1ª dica

- O pianista dedicou uma música que compôs a Bernardo e ao baterista.

Através desta dica, entende-se dizer que Bernardo não é pianista e nem baterista. Isto é, existem as arestas (Bernardo, pianista) e (Bernardo, baterista).

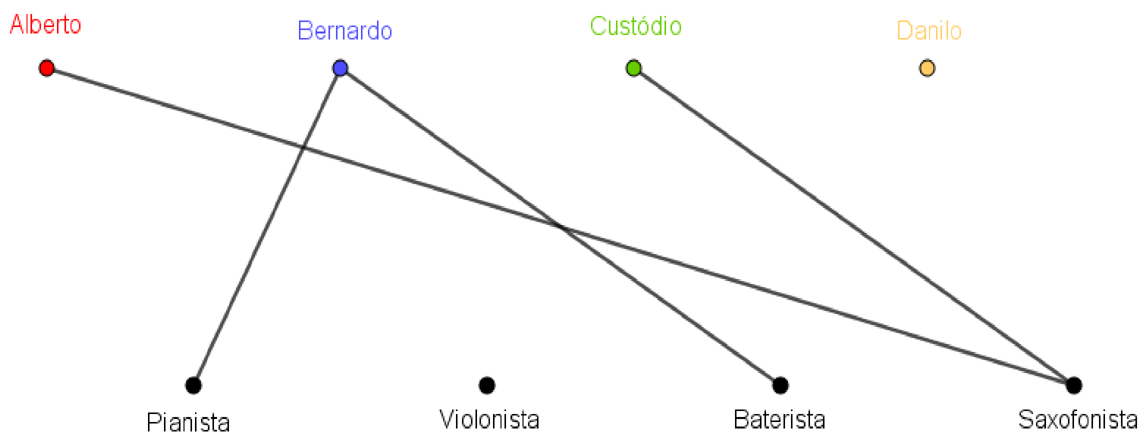


Figura 84 Grafo com a inclusão da 2ª dica

- O baterista, que já se apresentou com Danilo, quer muito fazer uma apresentação com Alberto.

Nesta dica, conclui-se que Danilo e Alberto não são bateristas. Logo, temos as arestas (Danilo, baterista) e (Alberto, baterista) e concluímos que Custódio é baterista.

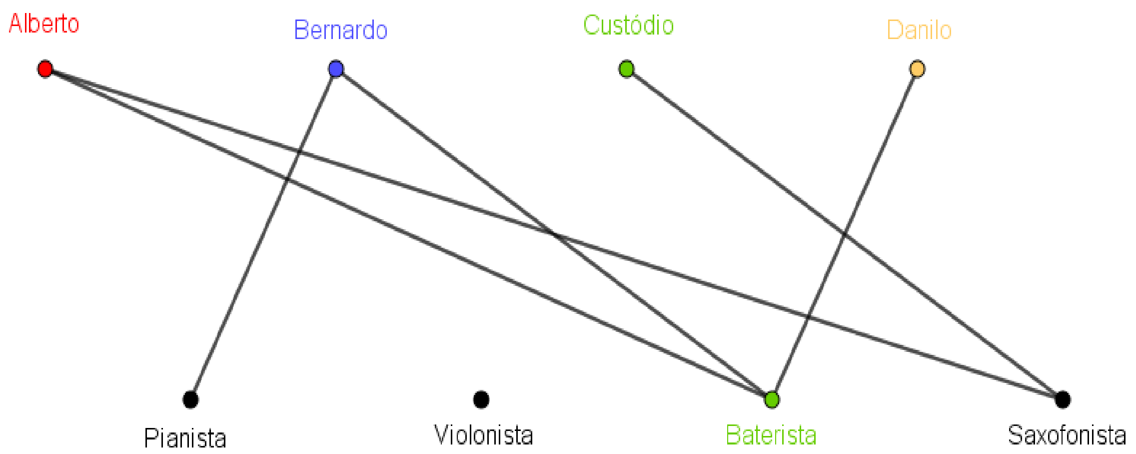


Figura 85 Grafo com a inclusão da 3ª dica

- Alberto nunca conheceu Custódio.

Como o pianista conhece o baterista, que é Custódio, e Alberto nunca conheceu Custódio. Então, por esta dica, conclui-se que Custódio e Alberto não são pianistas. Portanto, temos as arestas (Custódio, pianista) e (Alberto, Pianista).

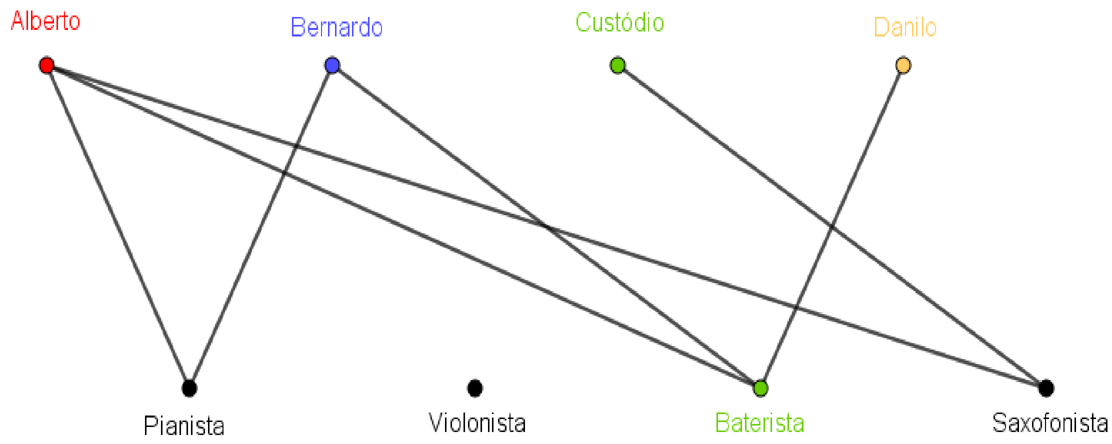


Figura 86 Grafo com a inclusão da 3ª dica

Utilizando o conceito de coloração de vértices, terminamos de colorir o grafo acima para obter a solução do problema. Com isso, o vértice "Baterista" assumirá a cor verde, o vértice "Saxofonista" assumirá a cor azul, o vértice "Pianista" assumirá a cor amarela e, por último, o vértice "Violonista" assumirá a cor vermelha. Após isso, veja como ficou a coloração que representa o problema no grafo abaixo:

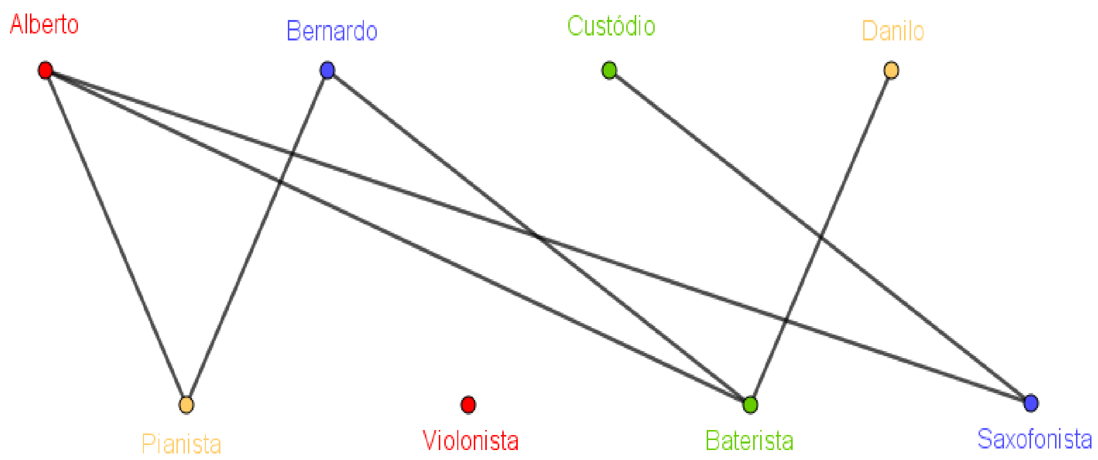


Figura 87 Representação do grafo solução do problema

Com isso, os conjuntos independentes máximos são: {Alberto, Violonista}, {Bernardo, Saxofonista}, {Custódio, Baterista} e {Danilo, Pianista} são as soluções do problema.

Resposta:

{Alberto, Violonista} → Alberto é violonista.
{Bernardo, Saxofonista} → Bernardo é saxofonista.
{Custódio, Baterista} → Custódio é baterista.
{Danilo, Pianista} → Danilo é pianista.

Logo, a resposta é letra A.

<u>Questão 2</u>:

Inicialmente, iremos representar os "nomes", as "alturas" ($A_1 < A_2 < A_3$) e os "pesos" ($P_1 < P_2 < P_3$) como sendo os vértices de um grafo. Além disso, atribuiremos aleatoriamente uma cor diferente para cada vértice que representa o nome e, de acordo com as dicas, iremos construir as arestas. Em seguida, coloriremos cada vértice das alturas e pesos com as mesmas cores atribuídas para cada nome, conforme o grafo abaixo:

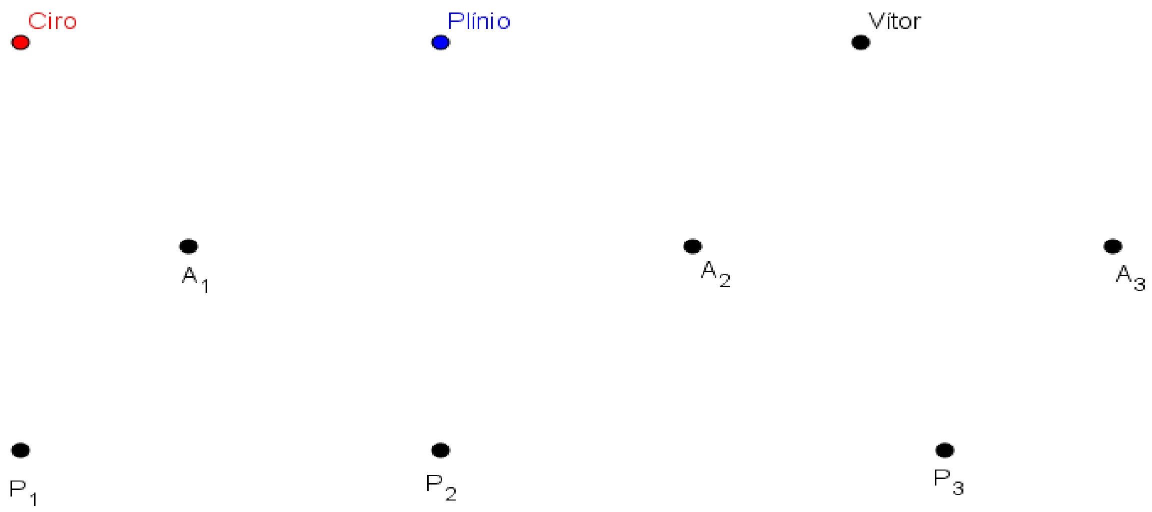


Figura 88 Modelagem do problema

- O mais alto é o mais gordo, mas o mais baixo não é o mais magro.

Nesta dica, entende-se que o mais alto assumirá a mesma cor que o mais gordo e que existe uma aresta entre o mais baixo e o mais magro.

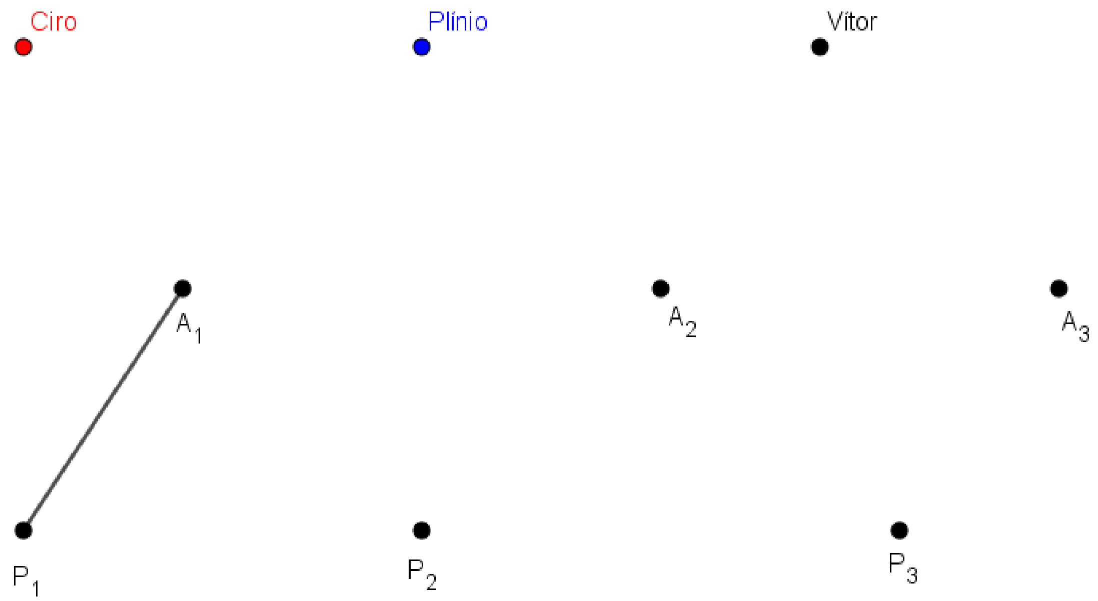


Figura 89 Grafo com a inclusão da 1ª dica

- Vítor é mais baixo que Ciro e mais magro que Plínio.

A partir desta dica, compreende-se que Vítor não é o mais alto e nem o mais gordo, ou seja, existe uma aresta entre Vítor e A_3 e Vítor e P_3.

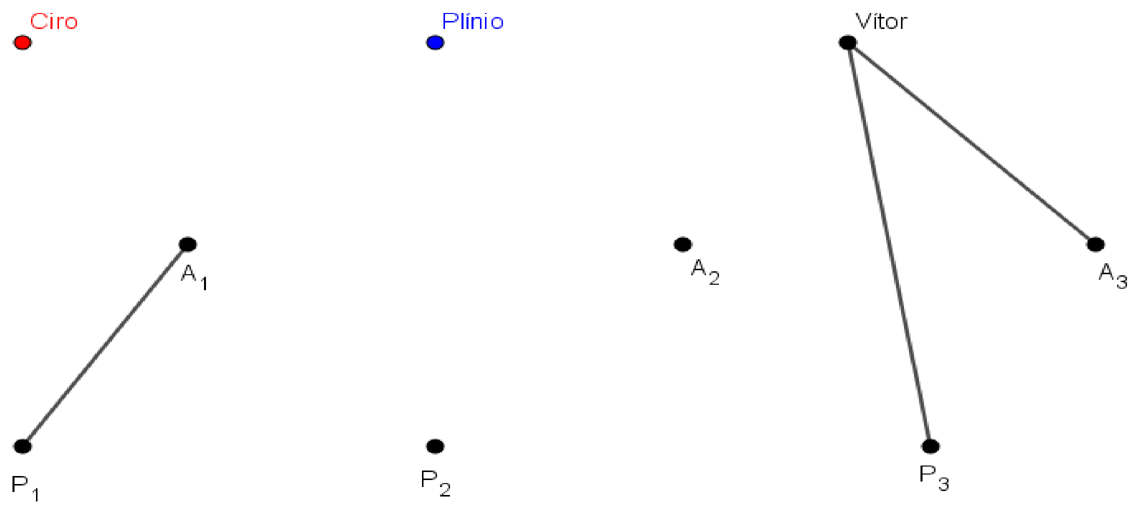


Figura 90 Grafo com a inclusão da 2ª dica

- Plínio é o mais alto ou Ciro é o mais baixo.

Nesta dica, iremos supor primeiro que Plínio é o mais alto. Com isso, Plínio também será o mais gordo. Ou seja, Plínio, A_3 e P_3 assumirão a mesma cor no grafo. Além disso, devido a segunda dica, teremos que Vítor é A_1 e Ciro é A_2.

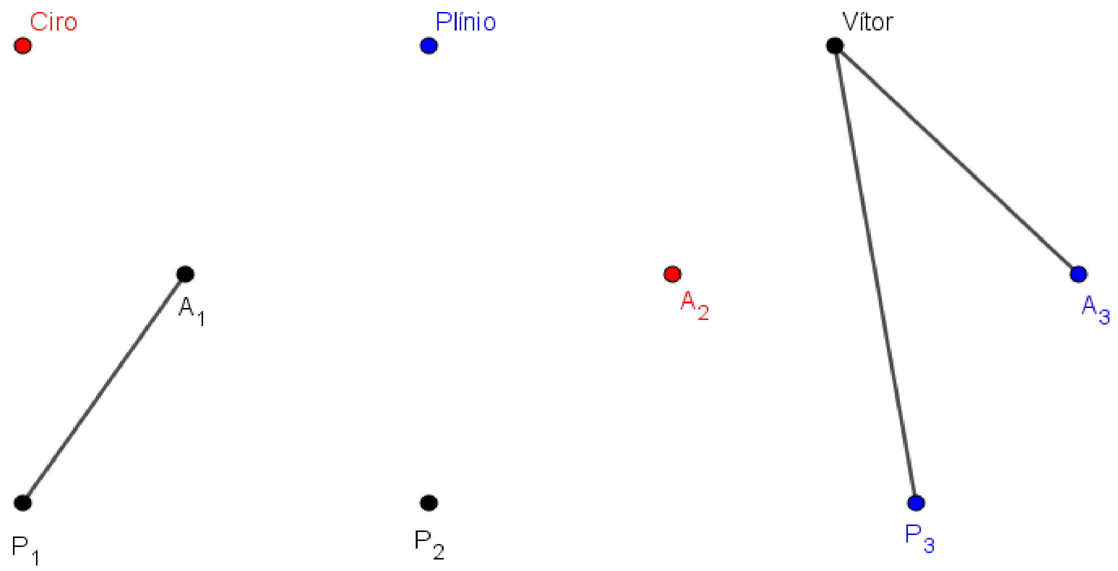


Figura 91 Grafo com a inclusão da 3ª dica

De acordo com a primeira dica, teremos que A_1 e P_2 assumirão a cor preta e também A_2 e P_1 assumirão a cor vermelha.

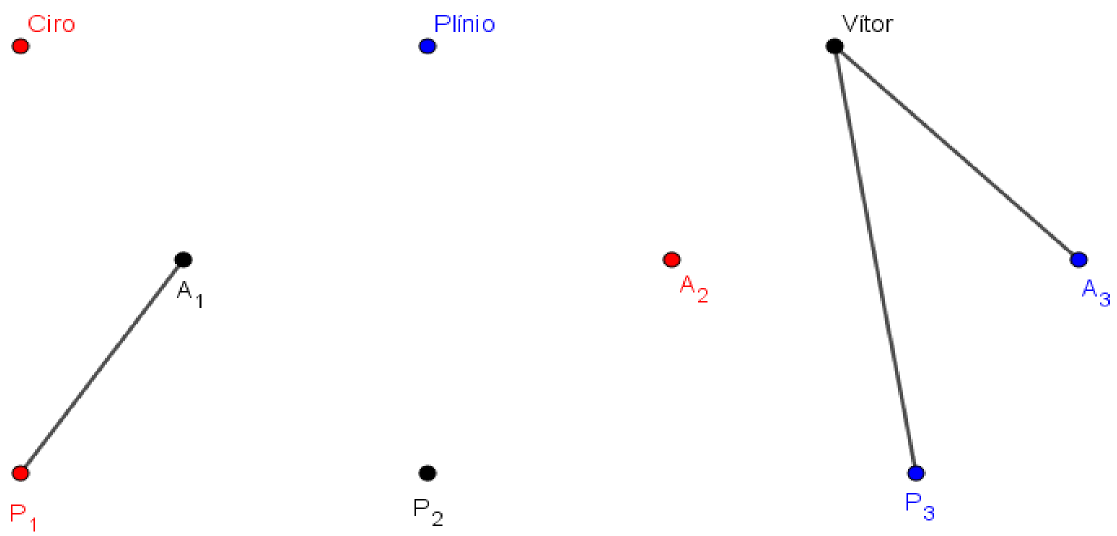


Figura 92 Representação do grafo solução do problema

Com isso, os conjuntos independentes máximos {Ciro, A_2 e P_1}, {Plínio, A_3 e P_3} e {Vítor, A_1 e P_2} são as soluções do problema.

Resposta:

{Ciro, A_2 e P_1} → Ciro é de altura intermediária e mais magro.
{Plínio, A_3 e P_3} → Plínio é o mais alto e o mais gordo.
{Vítor, A_1 e P_2} → Vítor é mais baixo e de peso intermediário.

Logo, a resposta é letra B.

<u>Questão 3</u>:

Para modelar o problema por grafo, iremos representar os "nomes", os "carros" e as "cores do carro" como sendo os vértices de um grafo. Além disso, atribuiremos aleatoriamente uma cor diferente para cada vértice que representa o nome. D,e acordo com as dicas iremos construir as arestas. Em seguida, coloriremos cada vértice dos carros e suas respectivas cores com as mesmas cores atribuídas para cada nome, conforme o grafo abaixo:

Figura 93 Modelagem do problema

Agora, analisando passo a passo as dicas, iremos construir as arestas e obter informações para colorir os vértices do grafo a fim de descobrir a solução do problema.

- O carro de Artur é cinza;

Nesta dica, conclui-se que o vértice “Cinza” assumirá a mesma cor que recebeu o vértice “Artur” no grafo acima, ou seja, o vértice “Cinza” receberá a cor vermelha. Com isso, podemos construir as arestas (Artur, Azul) e (Artur, Verde).

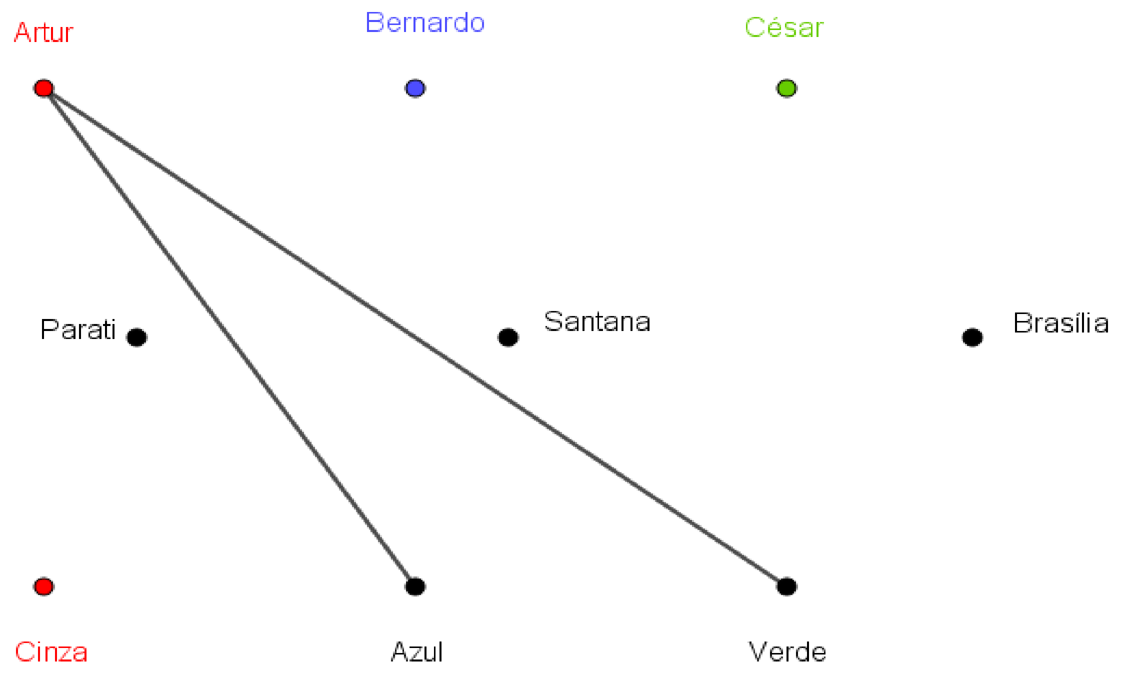


Figura 94 Grafo com a inclusão da 1ª dica

- O carro de César é o Santana;

Nesta dica, entende-se que o vértice “Santana” assumirá a mesma cor que recebeu o vértice “César” no grafo acima, ou seja, o vértice “Santana” receberá a cor verde. Com isso, podemos construir as arestas (César, Parati) e (César, Brasília).

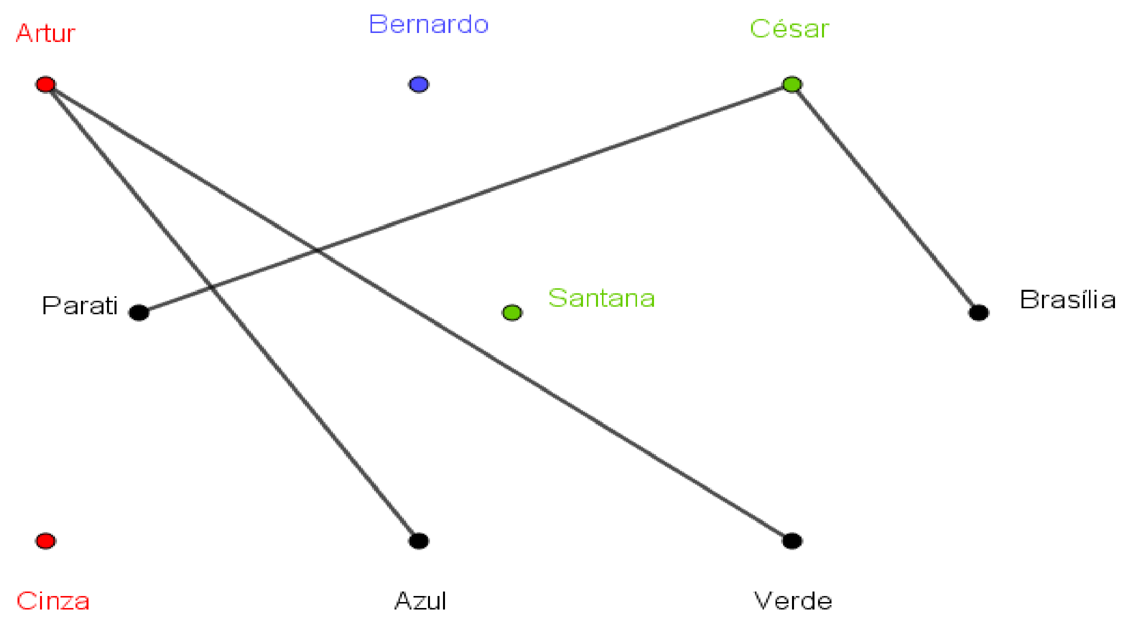


Figura 95 Grafo com a inclusão da 2ª dica

- O carro de Bernardo não é verde e não é a Brasília;

A partir desta dica, podemos construir as arestas (Bernardo, Verde) e (Bernardo, Brasília).

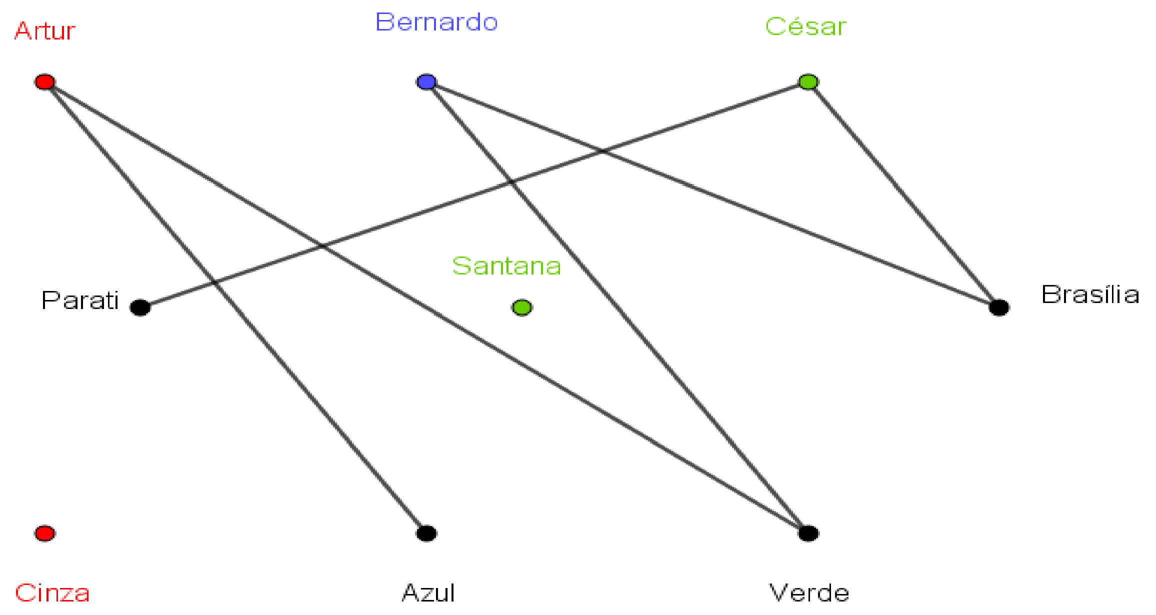


Figura 96 Grafo com a inclusão da 3ª dica

Após análise de todas as “dicas” do problema e a construção do grafo, utilizaremos o conceito de coloração de vértices para terminar de colorir o grafo e obter a resposta do problema.

Observando o grafo acima, temos as arestas (Bernardo, Brasília) e (César, Brasília), isso quer dizer que o vértice “Brasília” assumirá a cor vermelha. Com isso, Parati receberá a cor azul. Temos também as arestas (Artur, Verde) e (Bernardo, Verde), portanto o vértice “Verde” só poderá assumir a cor verde e consequentemente o vértice “Azul” receberá a cor azul.

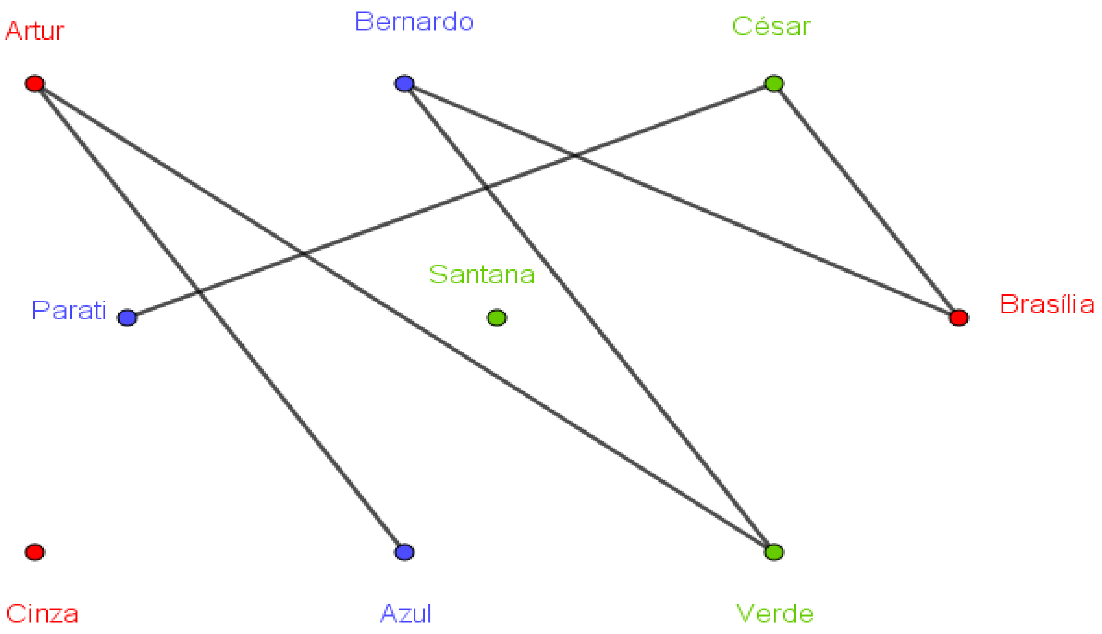


Figura 97 Grafo solução do problema

Com isso, os conjuntos independentes máximos {Artur, Brasília e Cinza}, {Bernardo, Parati e Azul} e {César, Santana e Verde} são as soluções do problema.

Resposta:

{Artur, Brasília e Cinza} → O carro de Artur é uma Brasília de cor cinza.
{Bernardo, Parati e Azul} → O carro de Bernardo é uma Parati de cor azul.
{César, Santana e Verde} → O carro de César é um Santana de cor verde.

Logo, gabarito letra D.

<u>Questão 4</u>:

Para modelar o problema acima por grafo, iremos representar as “cores de cabelo”, os “nomes” e os “países” como sendo os vértices do grafo. Além disso, atribuiremos aleatoriamente uma cor diferente para cada vértice que representa a cor de cabelo e, de acordo com as “dicas” do problema, iremos construir as arestas. Em seguida, coloriremos cada vértice dos nomes e países com as mesmas cores atribuídas para cada cor de cabelo, conforme o grafo abaixo:

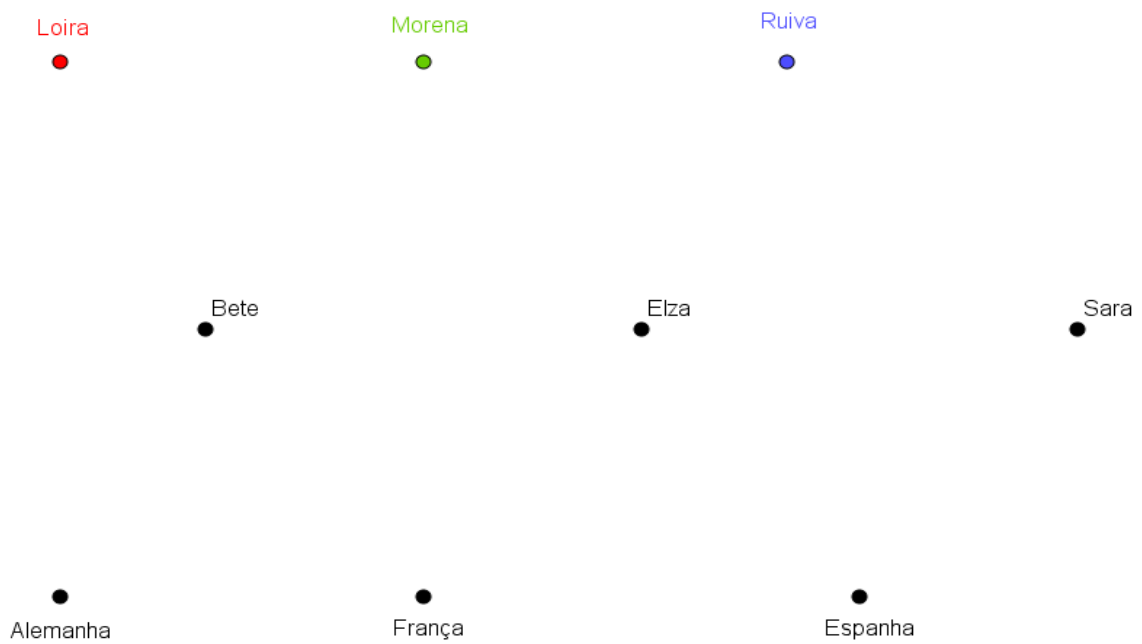


Figura 98 Modelagem do problema

Agora, analisando passo a passo as dicas, iremos construir as arestas e obter informações para colorir os vértices do grafo, a fim de obter a solução do problema.

- A loira disse: “Não vou à França nem à Espanha.”;

Através desta dica obtemos as arestas (Loira, França) e (Loira, Espanha). Além disso, a loira vai à Alemanha, ou seja, o vértice “Alemanha” terá a mesma cor que o vértice “Loira”.

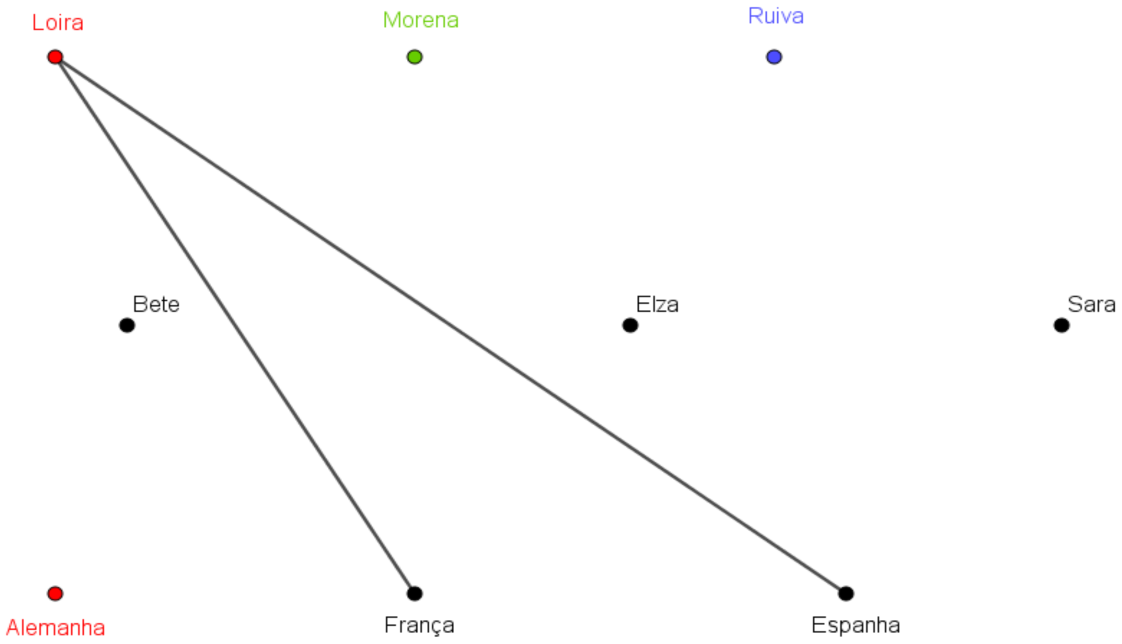


Figura 99 Grafo com a inclusão da 1ª dica

- A morena disse: “Meu nome não é Elza nem Sara.”;

A partir desta dica obteremos as arestas (morena, Elza) e (morena, Sara). Logo, a morena é Bete e os vértices que as representam receberão a mesma cor.

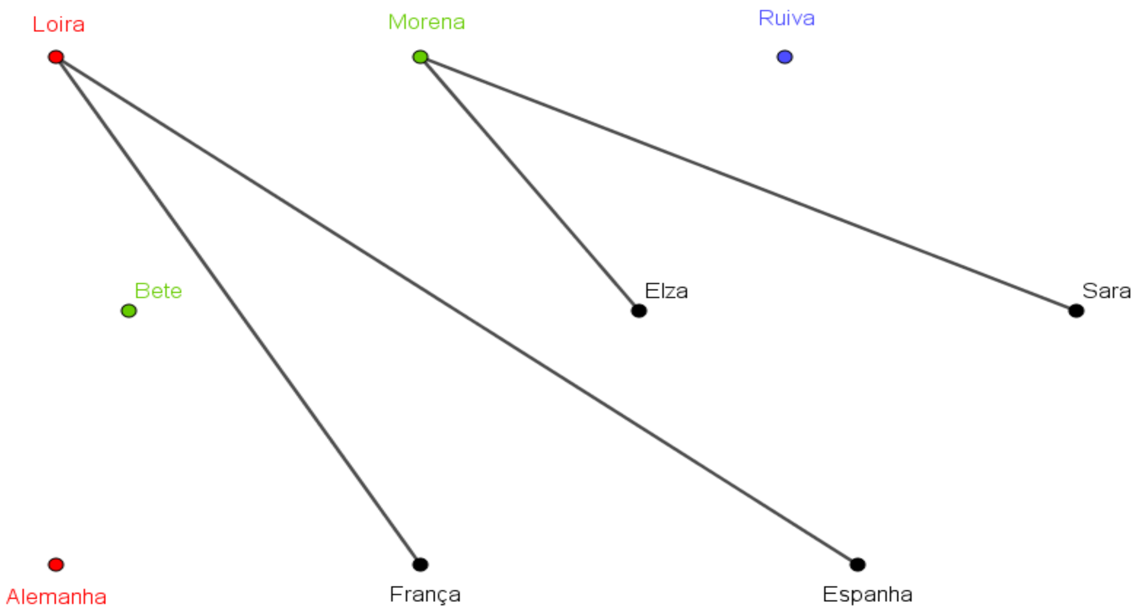


Figura 100 Grafo com a inclusão da 2ª dica

- A ruiva disse: “Nem eu nem a Elza vamos à França.”.

Existem as arestas (Ruiva, França) e (Elza, França). Com isso, conclui-se que a Elza não é ruiva, ou seja, temos também a aresta (Ruiva, Elza).

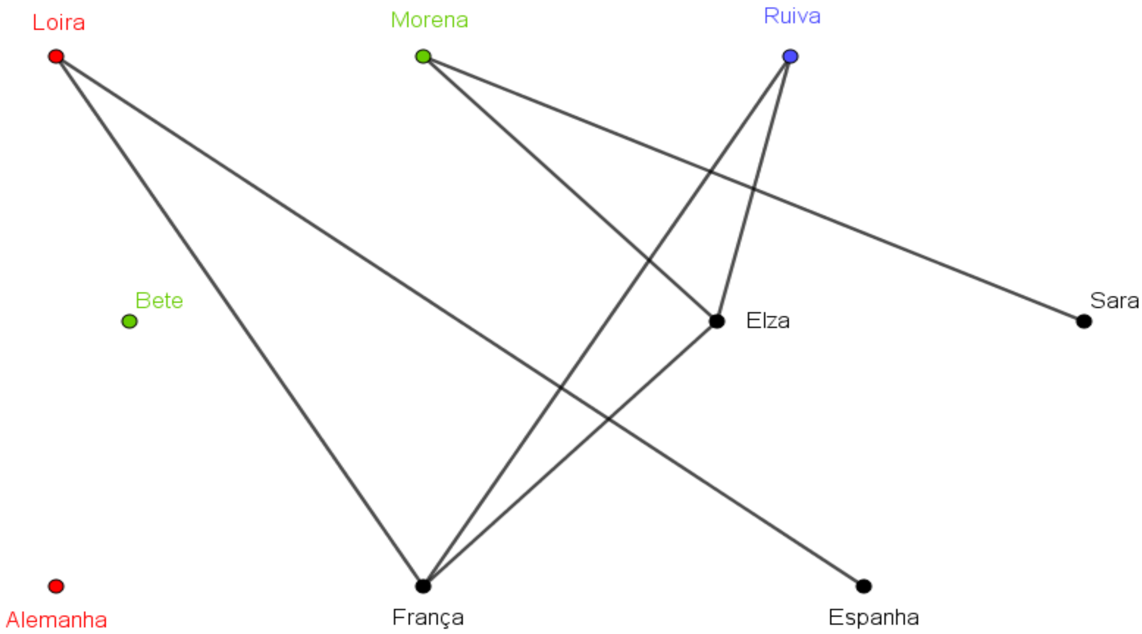


Figura 101 Grafo com a inclusão da 3ª dica

Após análise de todas as "dicas" do problema e a construção do grafo, utilizaremos o conceito de coloração de vértices para terminar de colorir o grafo e obter a resposta do problema.

Observando o grafo, temos as arestas (Morena, Elza) e (Ruiva, Elza). Portanto, o vértice "Elza" só poderá ser representado pela cor vermelha e, com isso, Sara só poderá ser representado pela cor azul. Além disso, temos as arestas (Loira, França) e (Ruiva, França), isto é, temos que o vértice "França" só poderá assumir a cor verde e, como consequência disso, o vértice "Espanha" só receber a cor azul.

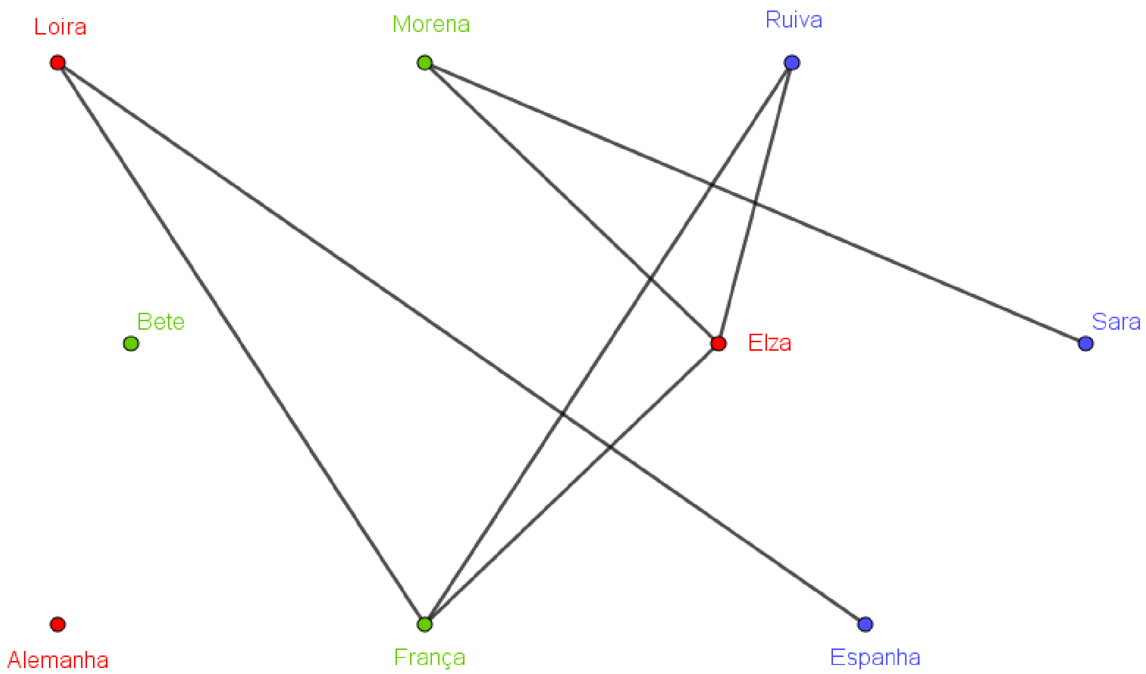


Figura 102 Grafo solução do problema

Com isso, os conjuntos independentes máximos {Loira, Elza, Alemanha}, {Morena, Bete, França} e {Ruiva, Sara, Espanha} são as soluções do problema.

Resposta:

{Loira, Elza, Alemanha} → Elza é loira e viajou para Alemanha.
{Morena, Bete, França} → Bete é morena e viajou para França.
{Ruiva, Sara, Espanha} → Sara é ruiva e viajou para Espanha.

Logo, gabarito letra A.

Comparando as soluções, observamos que o desenvolvimento proposto por coloração de vértices para problemas de lógica, que envolvem associações ou correlações de elementos de certos tipos de conjuntos, é uma excelente alternativa de resolução para estes problemas que aparecem constantemente em concursos públicos federais.

CAPÍTULO 4

TRABALHO DE CAMPO

A proposta foi desenvolvida no CIEP Doutor Joaquim Pimenta, instituição pública do município do Rio de Janeiro, de turno parcial, que possui turmas do 4º ao 9º ano, incluindo turmas de educação especial. Esta metodologia foi aplicada em uma turma do 9° ano do ensino fundamental com 27 alunos, na faixa etária entre 15 a 17 anos. Foram necessários 3 encontros com duração de dois tempos de aula com 50 minutos cada, totalizando 1hora e 40 minutos. Para a aplicação desta proposta de estudo, foi utilizado o projetor da escola, um computador, o quadro branco, caneta para quadro branco e lápis de cor.

Para a aplicação desta proposta de estudo, inicialmente realizamos uma abordagem teórica sobre o conceito de grafos, um resumo sobre a definição de grafos, sobre os elementos de um grafo, apresentamos a definição de coloração de vértices de um grafo, e também apresentamos o que são problemas de correlação e mostramos exemplos para auxiliar na compreensão dos alunos. As atividades propostas desenvolvidas foram: determinar os elementos de um grafo (vértices e arestas), colorir os vértices, determinar o número cromático e, ao fim, resolver problemas de correlação por coloração de vértices.

O primeiro encontro foi realizado na sala de aula, onde foram apresentados aos alunos os conceitos de grafos, tais como: definições, elementos, tipos de grafos e coloração de vértices. O objetivo desta atividade era o de ambientar os alunos em relação ao novo conteúdo que seria abordado.

No segundo encontro apresentamos aos alunos os problemas de correlação e a solução usual por tabelas. A seguir foi apresentada aos estudantes a resolução através do conceito de coloração de vértices, analisando se os alunos conseguiram aprender/compreender a proposta de estudo.

O terceiro encontro consistiu em uma atividade avaliativa em relação à compreensão dos alunos à proposta de estudo do novo método de resolução de questões que era pretendido. Essa avaliação foi realizada a partir de grupos. A turma foi dividida em 6 grupos de alunos, sendo 3 grupos compostos por 5 alunos e outros 3 grupos composto por 4 alunos. Para cada grupo foi escolhido e aplicado um problema de correlação diferente, mas com o mesmo nível de dificuldade, para ser desenvolvido por coloração de vértices.

No final desta atividade, o aluno foi capaz de: entender os conceitos de grafos, identificar o que é um problema de correlação e resolvê-lo por coloração de vértices.

4.1 Resultados, Discussões e Atividade

Neste tópico serão apresentadas as atividades, as discussões e os resultados da proposta de estudo sobre a solução de problemas de correlação com o uso de coloração de vértices, onde foi enfatizado o conceito de grafos como ferramenta para a solução desses problemas. Com a modelagem desses problemas através de coloração de vértices, buscou-se criar uma maior aproximação do aluno ao conceito de grafos, um tanto quanto abstrato, para que este seja capaz de usar este método nos problemas de correlação.

Durante os encontros, as atividades propostas e as informações apresentadas tinham objetivos diferentes, tais como: realizar uma breve apresentação do conteúdo, expor a teoria e conceituar os grafo, definir os elementos de um grafo e as diferentes formas de representá-lo, abordar a coloração de vértices e o número cromático, ensinar como identificar um problema de correlação, exemplificar, através de exercícios, a aplicação deste conteúdo e, por último, verificar a compreensão dos alunos em relação a proposta de estudo a partir de questões que seriam feitas por eles.

Antes de começar a fazer as tarefas, foi explicado para os alunos que grafo é um conceito que, em geral, não é abordado na Educação Básica e que o que estava sendo feito era uma proposta de estudo que seria avaliada após a aplicação do trabalho na turma deles. As atividades iniciais foram elaboradas com o objetivo de fazer com que o aluno conhecesse os elementos de um grafo e suas diferentes representações. Uma apresentação de slides foi usada para apresentar esses conteúdos aos alunos. Após essas atividades iniciais, começamos a identificar um grafo e determinar os elementos de um grafo.

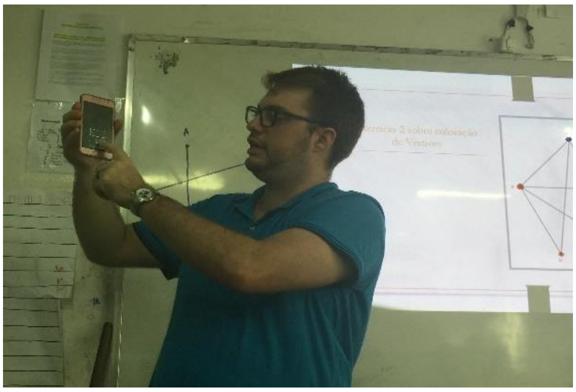


Figura 103 Com o uso do celular, mostrando aos alunos o que é um grafo

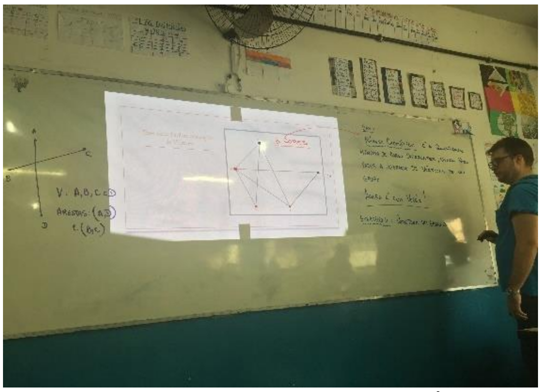


Figura 104 Momento da explicação do número cromático

O objetivo da pesquisa é criar alternativas para o ensino dos grafos, buscando trabalhar este conceito ainda na educação básica. E, além disso, buscar uma nova alternativa para resolver problemas de correlação, servindo como uma ferramenta para facilitar a visualização de tais problemas. O objetivo não é "apenas" de ensinar o aluno a entender o conceito de grafos, mas também fazer com que este entenda que podemos usar esse conceito como uma ferramenta facilitadora para desenvolver determinadas questões.

Após a realização de cada atividade, os alunos foram interrogados com o auxílio de perguntas relacionadas ao que já tinham visto, para ser analisado o resultado e avaliado o aprendizado. O resultado dessas perguntas é verificado nos gráficos abaixo.

Todos os alunos que realizaram e fizeram parte desta metodologia não tinham conhecimento do conceito de grafos. Mas, após a atividade, foi constatado que eles conseguiram assimilar os conceitos trabalhados, ficando mais familiarizados com o assunto, mas ainda sem compreendê-lo plenamente. Vamos apresentar a seguir as atividades propostas aos alunos.

4.2 Aplicação da Atividade

Esta atividade foi desenvolvida com as orientações do professor e teve como principal enfoque apresentar o conceito ao aluno, mostrando com bastante cuidado as definições, levando sempre em consideração que seria necessária a adequação da linguagem para que o aluno do 9º ano fosse capaz de assimilar o conceito, já que se tratava de um conteúdo novo. A seguir, temos o passo a passo dessa atividade apresentada e desenvolvida com eles, em sala de aula, com o auxílio do professor.

4.2.1 A Atividade

A atividade foi aplicada em grupo com diversos objetivos, quais sejam: verificar a capacidade de trabalharem em conjunto, verificar a interpretação do aluno em relação ao problema e analisar sua capacidade de modelar o problema para ser resolvido por coloração de vértices. Após a atividade, foi pedido aos alunos que escrevessem o passo a passo do pensamento deles para atingir a solução do problema.

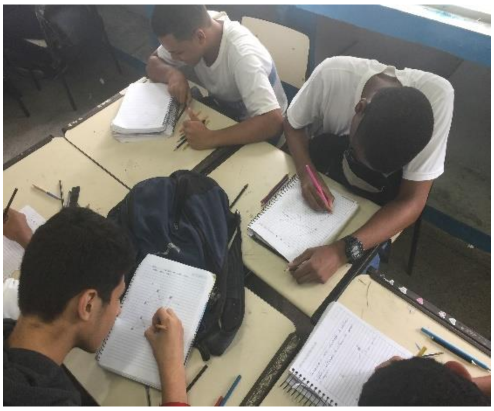


Figura 105 alunos reunidos resolvendo os problemas por coloração de vértices

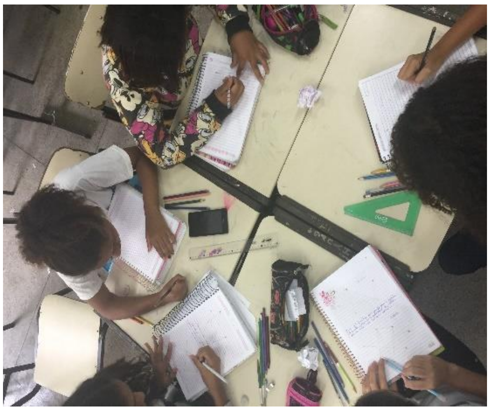


Figura 106 alunas reunidos fazendo as soluções por coloração de vértices

-4.2.2 Problemas Proposto para cada Grupo

Grupo 1:

Problema:

Dione, Isabela e Tainá levaram cada qual seu filho ou filha: Alice, Plínio e Rafael, não necessariamente nesta ordem, para um passeio no shopping. Cada criança ficou entretida com uma atividade diferente: fliperama, parque e teatrinho. Com base nas informações dadas, tente descobrir o nome de cada mãe e de cada criança e a atividade que fizeram durante o passeio no shopping.

- Plínio é filho de Tainá.
- Rafael ficou feliz em brincar no parque de diversões do shopping.
- Dione levou a filha ao teatrinho armado na praça de alimentação do shopping

Grupo 2:

Problema:

Samuel, Vitor e Gabriel trabalhavam em uma Multinacional. Um deles tinha barba, outro tinha bigode e o outro não tinha barba e nem bigode. Cada um deles exercia dentro da empresa uma atividade diferente: um era arquiteto, outro era engenheiro e o outro era eletricista. Com base nas dicas abaixo, descubra a característica e a função de cada homem.

- O que tinha barba era arquiteto.
- Vitor era engenheiro.
- O que era eletricista não tinha bigode nem se chamava Samuel.

Grupo 3:

Problema:

Cláudio e outros dois homens foram a uma feira de antiguidades. Cada um deles comprou um objeto diferente. Com base no que eles estão dizendo, tente descobrir o nome de cada um e o que cada qual comprou.

- O loiro disse: “Júlio e Maurício foram comigo na feira, mas eu não comprei as moedas.”
- O moreno disse: “Maurício comprou uma máquina fotográfica.”
- O ruivo disse: “Eu não comprei o espelho e nem as moedas antigas.”

Grupo 4:

Problema:

João e outros dois homens tomaram medidas pessoais contra a dengue esta semana. Com base no que eles estão dizendo, tente descobrir o nome de cada um e o que cada qual usou para combater o mosquito causador da doença.

- O moreno disse: “Eu comprei uma tomada repelente.”

- O ruivo disse: “João e Vítor estão trabalhando contra a dengue.”
- O loiro disse: “Eu comprei inseticida. João não comprou spray para a pele.”

Grupo 5:
Problema:

Hélio e outros dois homens conheceram cada qual seu melhor amigo na escola. Entretanto, cada um deles estava num período diferente na escola quando conheceu o seu amigo. Com base nas dicas abaixo, tente descobrir o nome de cada homem, a profissão atual e o período da escola em que estava quando conheceu o seu melhor amigo.

- Vinícius conheceu o seu melhor amigo no 2º grau.
- O engenheiro conheceu o seu melhor amigo no 1º grau.
- Hélio é médico e conheceu seu melhor amigo na faculdade.
- Tiago é engenheiro;
- Um deles é advogado;

Grupo 6:
Problema:

Três amigos: Marcos, Carlos e Felipe participam de competições de enduro com motos. Cada um tem uma moto: Honda, Yamaha e Suzuki, mas não sabemos qual moto pertence a quem. Cada moto tem uma cor diferente: Uma é azul, outra é amarela e a outra preta. Com base nas informações a seguir, identifique a quem pertence cada moto e a cor de cada uma delas.

- Quem tem a Suzuki tem a moto preta.
- Felipe tem a moto Yamaha.
- A moto amarela não é de Felipe.
- Carlos não tem a Suzuki.

Ao final desta atividade, os alunos perceberam que é possível resolver os problemas de correlação por coloração de vértices e que esta ferramenta ajuda a simplificar a solução do problema em questão.

4.2.2 Solução dos alunos

Avaliação

Grupo 1:

- Larissa gabriele
- Diego da Silva P.
- michel santos g. N
- Lina Claudia
-

Problema:

Dione, Isabela e Tainá levaram cada qual seu filho ou filha: Alice, Plínio e Rafael, não necessariamente nesta ordem, para um passeio no shopping. Cada criança ficou entretida com uma atividade diferente: fliperama, parque e teatrinho. Com base nas informações dadas, tente descobrir o nome de cada mulher e de cada criança e a atividade que fizeram durante o passeio no shopping.

- Plínio é filho de Tainá.

- Rafael ficou feliz em brincar no parque de diversões do shopping.

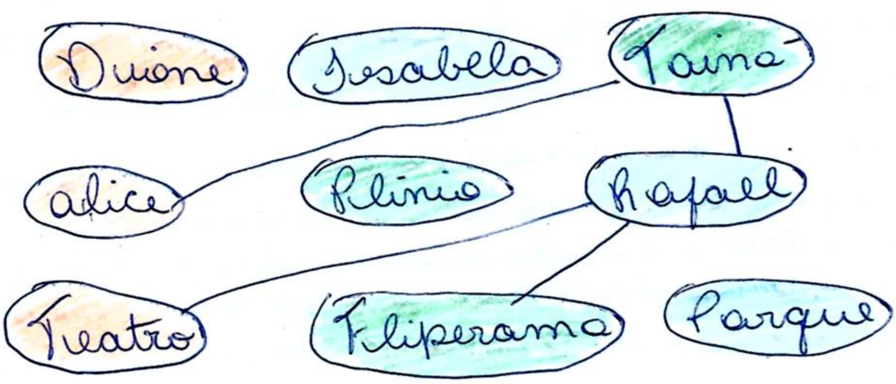
- Dione levou a filha ao teatrinho armado na praça de alimentação do shopping

Conjuntos

N: (dione, Isabela, Tainá).

F: (Alice, Plínio, Rafael).

A: (teatrinho, Fliperama, Parque).



Respostas

Diane é mãe de Alice e que foi ao teatro.
Tainá é mãe de Plínio que foi no fliperama
Isabela é mãe do Rafael que foi ao parque

Passo a Passo

nós primeiro descobrimos quais eram os conjuntos, depois nós pegamos e pintamos o primeiro grupo com cores diferentes, após isso a gente pegamos as dicas e fizemos as arestas, com a primeira dica, a gente soube que Plínio não era filho nem de Diane, nem de Isabela, então nós podemos fazer uma aresta pois eles eram diferentes e pintamos Plínio da mesma cor que Tainá, depois pegamos a segunda dica nós sabemos que Rafael ficou feliz no parque, então eles eram da mesma cor, sabemos que Rafael não ficou feliz nem no fliperama nem no teatro, então a gente pegamos e fizemos arestas, nos dois, eles eram de cores diferentes, na terceira dica, pegamos e vimos que a filha de Diane foi ao Teatro, sabemos que a Diane tem filha nós descobrimos que era a Alice, pois os outros dois são homens, então pintamos Alice e Diane da mesma cor, depois a gente vimos que na segunda coluna já tinham duas cores diferentes só faltava uma cor, pois cada elemento de cada ~~conjunto~~ conjuto, tem que ter cor diferente, e fizemos a mesma coisa no terceiro ~~conjunto~~ conjunto. assim descobrimos a solução do Problema.

Avaliação

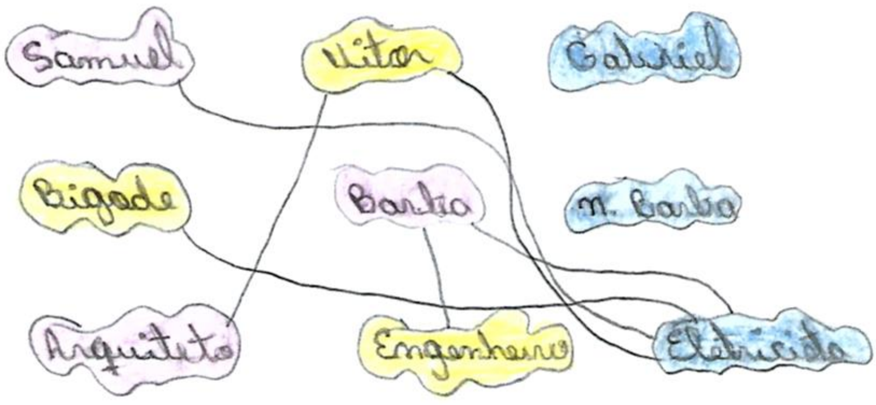
Grupo 2:

- Fernanda Rodrigues.
- Nalanda Oliveira.
- Andressa Cravo.
- Debora Targino.
- Alanis Navarro.

Problema:

Samuel, Vitor e Gabriel trabalhavam em uma Multinacional. Um deles tinha barba, outro tinha bigode e o outro não tinha barba. Cada um deles exercia dentro da empresa uma atividade diferente: um era arquiteto, outro era engenheiro e o outro era eletricista. Com base nas dicas abaixo, descubra a característica e a função de cada homem.

- O que tinha barba era arquiteto.
- Vitor era engenheiro.
- O que era eletricista não tinha bigode nem se chamava Samuel.



R: Samuel tem barba e trabalha como arquiteto
Vitor tem bigode e trabalha como engenheiro
Gabriel trabalha como eletricista

1º Passo:

Colocamos os elementos em forma de vértices do grafo.

2º Passo:

Colorimos os primeiros vértices com cores diferentes.

3º Passo:

Ligamos as arestas de acordo com as dicas.

4º Passo:

Colorimos os outros vértices de acordo com as arestas.

5º Passo:

Ao finalizar, colocamos as respostas abaixo.

Avaliação

Grupo 3:

- Leurrany da silva soares vieira.
- Ana Elisabeth Cristina DE Almeida Peixoto.
- Caroline da Silva Bezerra
- taila Santos Coelho.
-

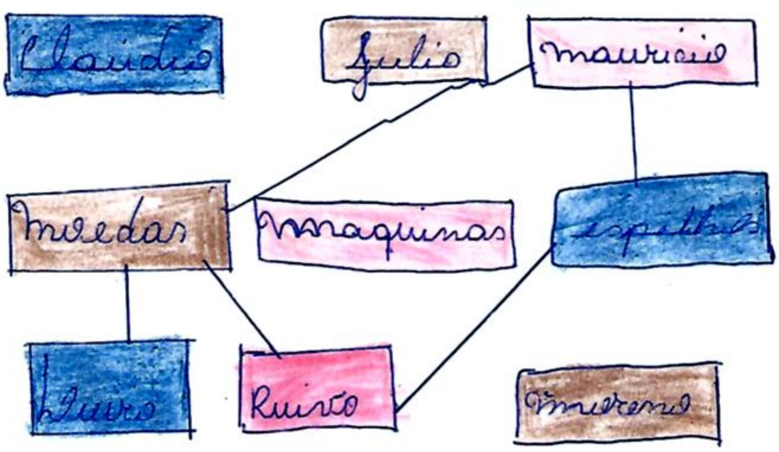
Problema:

Cláudio e outros dois homens foram a uma feira de antiguidades. Cada um deles comprou um objeto diferente. Com base no que eles estão dizendo, tente descobrir o nome de cada um e o que cada qual comprou.

- O loiro disse: "Júlio e Maurício foram comigo na feira, mas eu não comprei as moedas."

- O moreno disse: "Maurício comprou uma máquina fotográfica."

- O ruivo disse: "Eu não comprei o espelho e nem as moedas antigas."



1º Claudio Compro o espelho e era loiro

2º julio Compro as ~~moedas~~ e era moreno → moedas.

3º mauricio Compro maquinas e era Ruivo

1º Passo: Descobrimos quais eram conjuntos do problema

2º Passo: Pintamos o primeiro conjunto do problema

3º Passo: lemos as dicas Para descobrir onde era necessário colocar as aretas e onde os vertices tinham cores diferentes

4º Passo: Vimos que onde os vertices estavam com cores iguais era a solução dos problemos

5º: Apos descobir a solução dos problemos Pelas cores nos vertices escrevemos.

Avaliação

Grupo 4:

- Thamara Silva
- Taisa O'hara
- Bruna Antunes
- Diego Gomes

Elias Rubens

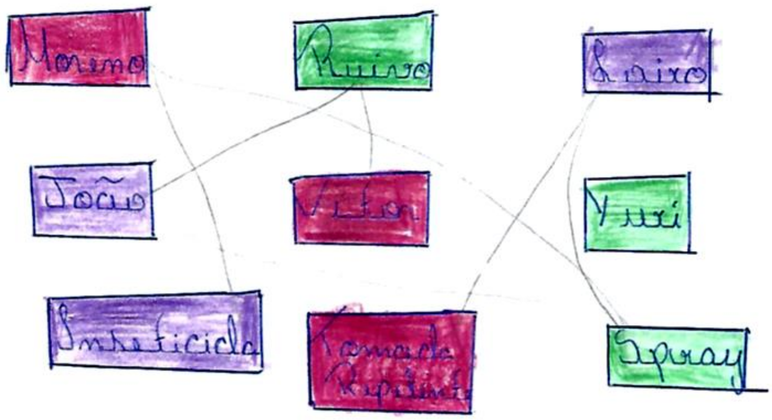
Problema:

João e outros dois homens tomaram medidas pessoais contra a dengue esta semana. Com base no que eles estão dizendo, tente descobrir o nome de cada um e o que cada qual usou para combater o mosquito causador da doença.

- O moreno disse: "Eu comprei uma tomada repelente."

- O ruivo disse: "João e Vítor estão trabalhando contra a dengue."

- O loiro disse: "Eu comprei inseticida. João não comprou spray para a pele."



Moreno e o Vitor e comprou tomada Repelente

Ruivo e o Yuri e Comprou Spray

Loiro e o João e Comprou Inseticida

1ª Passo: indentificamos os conjuntos (cor do cabelo, nomes e objetos)

2° Passo: colorimos as cores do cabelos. para poder completar o grafo.

3° passo: construimos as aresta com base nas dicas.

4° passo: Pintamos as arestas em base coloração diferente, e as que sobraram são a solução dos problemas.

Avaliação

Grupo 5:

- Lucas S. do Nascimento
- Cristian Monteiro Reis
- Nathan Kenichi F. Peços
- Rodrigo Silva de Souza
- Jhonathan da Silva.

Problema:

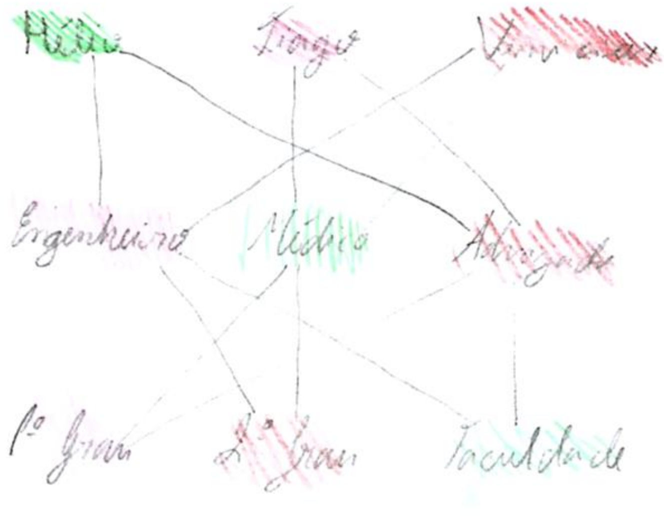
Hélio e outros dois homens conheceram cada qual seu melhor amigo na escola. Entretanto, cada um deles estavam num período diferente na escola quando conheceu o seu amigo. Com base nas dicas abaixo, tente descobrir o nome de cada homem, a profissão atual e o período da escola em que estava quando conheceu o seu melhor amigo.

- Vinícius conheceu o seu melhor amigo no 2º grau.

- O engenheiro conheceu o seu melhor amigo no 1º grau.

- Hélio é médico.

- TIAGO É O ENGENHEIRO.
- HÉLIO CONHECEU O SEU MELHOR AMIGO NA FACULDADE.
- UM DELES É ADVOGADO.



Conjuntos: Homens, Profissões, Período da escola em que estavam.

Concluimos que: Hélio é Médico e conheceu seu melhor amigo na Faculdade.

Tiago é Engenheiro e conheceu seu melhor amigo no 1º grau.

Vinicius é Advogado e conheceu seu melhor amigo no 2º grau.

1º Passo - Identificamos os conjuntos que foi dado no enunciado

2º Passo - Separamos os elementos

3º Passo - Montamos o grafo

4º Passo - Pintamos o grafo conforme as dicas foram dadas

5º Passo - Por último identificamos os vértices das mesmas cores e descobrimos a resposta

Avaliação

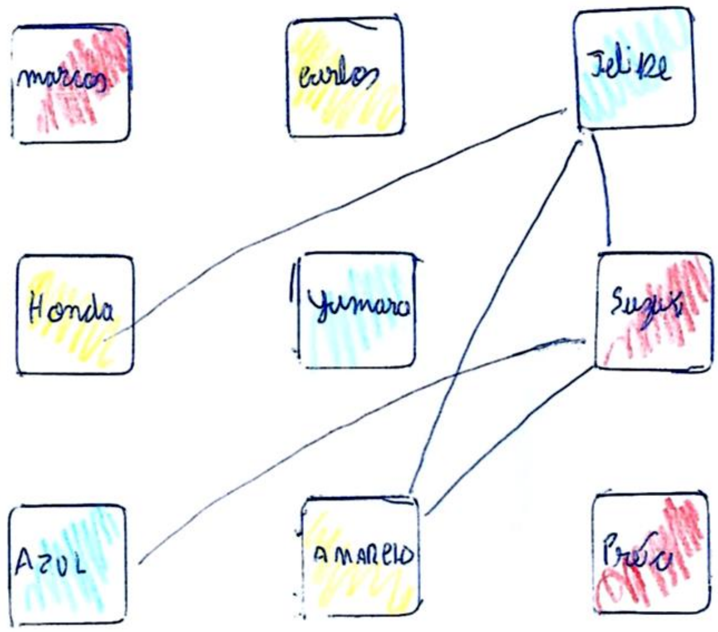
Grupo 6:

- max Henrique S. A. da Silva
- Máthues goes de maura Rodrigues
- alex vieira dos Santos
-
- MICHELL DOS SANTOS ALVES

Problema:

Três amigos: Marcos, Carlos e Felipe participam de competições de enduro com motos. Cada um tem uma moto: Honda, Yamaha e Suzuki, mas não sabemos qual moto pertence a quem. Cada moto tem uma cor diferente: Uma é azul, outra é amarela e a outra preta. Com base nas informações a seguir identifique a quem pertence cada moto e a cor de cada uma delas.

- Quem tem a Suzuki tem a moto preta.
- Felipe tem a moto Yamaha.
- A moto amarela não é de Felipe.
- Carlos não tem a Suzuki.



Conclusão

felipe é dono da yamaha da cor azul.
Marcos é dono da suzuki da cor Preta.
carlos é dono da Honda da cor amarela.

PASSOS

1º PASSO IDENTIFICAR OS CONJUNTOS
2º PASSO: MONTAR OS VÉRTICES
3º PASSO: SEGUIR AS DICAS
4º PASSO: FORMAR AS ARESTAS
5º PASSO: PINTAR OS VÉRTICES

Esses problemas fizeram parte de um método encontrado para serem analisadas as respostas dadas pelos alunos em relação ao que foi trabalhado com eles sobre modelagem de problemas de correlação pelo conceito de coloração de vértices. Surpreendentemente, todos os 27 alunos que participaram das atividades assimilaram de forma coerente a proposta de estudo, apesar de, segundo eles, estranharem o conteúdo por nunca terem tido aulas dessa forma.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação, propõe-se o desenvolvimento de um estudo para o aperfeiçoamento do processo de ensino e aprendizagem de lógica, tomando como tópico principal os problemas de correlação, com ênfase na proposta de solução por coloração de vértices. Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de que, num futuro bem próximo, os professores do ensino regular adotem esta metodologia de ensino que prioriza a Teoria de Grafos.

A Teoria de Grafos, ao contrário do que é pautado atualmente, não é um conceito que só poderá ser abordado no ensino superior. Como vimos no decorrer deste trabalho, trata-se de um conteúdo que poderá auxiliar positivamente os alunos da educação básica e servirá como ferramenta na solução de problemas, conforme proposto. Além disso, a abordagem da Teoria de Grafos, pretendida aqui em turmas do ensino fundamental, pode ser estendida até o ensino médio. Defende-se esta ideia visto que este conceito foi aceito, sem grandes dificuldades, pelos alunos do 9º ano, por se tratar de uma ferramenta facilitadora na solução de problemas de correlação. E mais ainda, por representar mais uma forma de resolver problemas deste tipo.

Então, em vista das considerações acima, este trabalho foi elaborado para enfatizar a importância da abordagem da Teoria dos Grafos na educação básica. Para isso, foi utilizado a coloração de vértices. É importante salientar que essa teoria foi desenvolvida, originalmente, como método de colorir mapas. Espera-se também que esta metodologia de ensino possa fazer parte do currículo mínimo de uma turma regular de 9º ano do ensino fundamental.

O presente trabalho foi construído e desenvolvido a partir de dois pilares que se relacionam entre si: problemas de correlação e a Teoria de Grafos. Através da relação entre estes conteúdos e suas respectivas aplicabilidades, elaborou-se uma metodologia que justificasse a relevância, a eficácia e ajudasse a comprovar que este método é definitivamente útil para determinados tipos de questões que fazem parte do conteúdo programático no ensino básico. Ao final desta pesquisa, verificou-se que, de fato, os alunos são capazes de assimilar efetivamente essa proposta de ensino, mesmo sendo um conceito de nível superior. Sendo assim, o objetivo deste trabalho foi atingido com êxito.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, Robson Piacente. Coloração de Grafos e aplicações. 2015. Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática) – Centro de Ciência Física e Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina.

AQUINO, Andréia Araújo de Farias. Atividades de modelagem matemática envolvendo a teoria dos grafos no ensino médio. 2014. 88 f. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, MG.

BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo; JURKIEWICZ, Samuel. Grafos: Introdução e Prática. São Paulo, 2009.

BRASIL**.** Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN – **PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS- MATEMÁTICA**. Brasília, 1997. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 13 de abril de 2018 às 12 horas.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (5ª A 8ª SÉRIES)**. Brasília, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12657%3 parametros-curriculares-nacionais-5o-a-8o-series&catid=195%3Aseb educacaobasica&Itemid=859 >. Acesso em: 21 de abril de 2018 às 15 horas.

COMICIA, Rafaela G. da Mota; DE VICENTE, Hamarildo. Teoria dos Grafos e Coloração de Mapas. 2010. Disponível em: < http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxivsam/artigos/64.pdf>. Acesso em: 05 de março de 2018.

DALL’ASTA, Marília Nunes; GAUTÉRIO, Ezequiel Gibbson; PEREIRA, Elaine Correa. Teoria de Grafos e Aplicações Cotidianas no Ensino Fundamental. *Revista UDESC*, Santa Catarina, v. 5, n. 1, 2011. Disponível em:

<http://www.revistas.udesc.br/index.php/udescemacao/article/view/2236/pdf_71>. Acesso em: 11 de julho de 2017.

DIESTEL, Reinhard. Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics). Springer, August 2005.

FEOFILOFF, Paulo; KOHAYAKAWA, Yoshiharu; WAKABAYASHI, Yoshiko. Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos. São Paulo, 2011.

HERNANDES, Fábio. O Problema de Coloração em Grafos Fuzzy. In: XXXIX SBPO – A Pesquisa Operacional e o Desenvolvimento Sustentável, Fortaleza/CE: SBPO, 2007. Disponível em: < http://www.din.uem.br/sbpo/sbpo2007/pdf/arq0249.pdf>. Acesso em: 05 de março de 2018.

JURKIEWICZ, Samuel; JUNIOR, Ivail Muniz. Qual é o menor caminho? (Conceitos, aplicações e experiências no ensino médio com teoria dos grafos e algoritmos). In: XXXIX SBPO – A Pesquisa Operacional e o Desenvolvimento Sustentável, Fortaleza/CE: SBPO, 2007. Disponível em: <http://www.din.uem.br/sbpo/sbpo2007/pdf/arq0002.pdf>. Acesso em: 13 de julho de 17.

LIMA, Aline Marie de. Uma Aplicação para o Problema de Coloração de Grafos. In: XIX Semana de Iniciação Científica, Guarapuava, PR: 2014. Disponível em: < http://anais.unicentro.br/proic/pdf/xixv2n1/285.pdf>. Acesso em: 05 de março de 2018.

MARTINS, Nicolas de Almeida. Problemas de Coloração de Grafos com Poucos P4's. 2013. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Departamento de Computação, Universidade Federal do Ceará, Ceará.

MULLER, Jonathan Gil. Teoria dos Grafos para o Ensino Fundamental: Desafios Lúdicos. 2015. 185 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, SC.

MULLER, Jonathan Gil; BAIER, Tânia. Teoria dos grafos: conceitos elementares para o ensino fundamental. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, São Paulo: SBEM, 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5378_2496_ID.pdf>. Acesso em: 12 de julho de 2017.

NETO, Alfredo Silveira Araújo; GOMES, Marcos José Negreiros. PROBLEMA E ALGORITMOS DE COLORAÇÃO EM GRAFOS - EXATOS E HEURÍSTICOS. Revista de Sistemas e Computação, Ceará, v. 4, n. 2, p. 101-115, 2014.

NETO, Alfredo Silveira Araújo; GOMES, Marcos José Negreiros. PROBLEMA E ALGORITMOS DE COLORAÇÃO EM GRAFOS - EXATOS E HEURÍSTICOS. Revista de Sistemas e Computação, Ceará, v. 4, n. 2, p. 101-115, 2014.

REGO, Marcelo Ferreira; SANTOS, Haroldo Gambini. ALGORITMOS PARA O PROBLEMA DE COLORAÇÃO DE GRAFOS. Ouro Preto, MG: 2015. Disponível em: <http://www.decom.ufop.br/menotti/paa111/files/PCC104-111-ars-11.1 MarceloFerreiraRego.pdf>. Acesso em: 05 de março de 2018.

SÁ, Lauro Chagas e; DA SILVA, Sandra Aparecida Fraga. Teoria dos Grafos: história, problemas e aplicações. In: 1º Encontro de Educação, Espírito Santo: Instituto Federal do Espírito Santo, 2013. Disponível em: <http://www.essentiaeditora.iff.edu.br/index.php/encontrodematematica/article/view/4861/2956>. Acesso em: 14 de julho de 17.

SOUSA, Lurdes. O TEOREMA DAS QUATRO CORES. Millenium – Revista da Escola Superior de Tecnologia do Instituto Superior Politécnico de Viseu - ISPV, v. 4, n. 24, p.125-151, 2001.

SOUZA, Renato Ferreira de. Resolução de Problemas via Teoria de Grafos. 2014. 61 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP, São Carlos, SP.

STECCA, Flávio de Freitas. Coloração de Arestas em Grafos Indiferença. 2003. 96 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Instituto de Computação, UNICAMP, Campinas, SP.

WAKABAYASHI, Yoshiko. Um curso de grafos. 02 jun. 2015, 02 dez. 2015. 104 p. Notas de Aula. Disciplina - MAC 5771.