Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT

O método dos teoremas mecânicos: A versão de Arquimedes para o Cálculo

Laécio Silva Rodrigues

São Luís – MA
2018

Laécio Silva Rodrigues

Dissertação de Mestrado:

O método dos teoremas mecânicos: A versão de Arquimedes para o Cálculo

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Maranhão, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Profº. Dr. Flausino Lucas Neves Spindola
Co-Orientador:
Profº. Ms. Anselmo Baganha Raposo Júnior

São Luís – MA
2018

RODRIGUES, Laécio Silva.

xxxx O método dos teoremas mecânicos: A versão de Arquimedes para o Cálculo.

Laécio Silva Rodrigues – São Luís: 2018.

Orientador: Prof^{o}. Dr. Flausino Lucas Neves Spindola

Co-Orientador: Prof^{o}. Ms. Anselmo Baganha Raposo Júnior.

1. Método dos teoremas mecânicos. 2. Método da exaustão. 3. Cálculo integral. I.Título

CDD xxx.xx

LAÉCIO SILVA RODRIGUES

O método dos teoremas mecânicos:
A versão de Arquimedes para o Cálculo

Dissertação apresentada ao PROFMAT/Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 05/10/2018

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Flausino Lucas Neves Spindola (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof^{o}. Ms. Anselmo Baganha Raposo Júnior (Co-Orientador)
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Dr. Antônio José da Silva
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão
Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

Dedico a minha amada esposa e a meus amados filhos.

Agradecimentos

Quero agradecer ao maravilhoso Deus a quem devo a minha existência, à minha amada família que sempre esteve ao meu lado compartilhando as alegrias e aflições dando–me forças para conquistar os meus objetivos, aos meus professores que proporcionaram tanto conhecimento e aprendizagem em minha vida acadêmica, enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente nesta etapa tão importante da minha vida.

"*Se uma quantidade não negativa for tão pequena que resulte menor que qualquer outra dada, certamente não podia ser senão zero. A quem pergunta o que é uma quantidade infinitamente pequena em matemática, nós respondemos que é, com efeito, zero. Assim, pois, não há tantos mistérios ocultos neste conceito como se costuma crer. Esses supostos mistérios converteram o cálculo do infinitamente pequeno em algo duvidoso para muita gente*".

Leonhard Euller.

Resumo

Neste trabalho, mostramos os cálculos de Arquimedes de Siracusa, que culminaram no seu Método dos Teoremas Mecânicos, uma antiga obra de Arquimedes encontrada por historiadores em 1906. São provados resultados utilizando a Teoria das Proporções e o Método da Exaustão de Eudoxo, o qual foi aperfeiçoado por Arquimedes. Dentre os principais resultados, estão a quadratura da lúnula, a quadratura da parábola, a aproximação da área do círculo e o cálculo do volume da esfera.

Palavras-chave: História da Matemática, Cálculo, Arquimedes, Método da Exaustão, Quadratura, Área, Volume.

Abstract

We present calculations made by Archimedes of Syracuse, which resulted in the Method of Mechanics Theorems, an ancient work of Archimedes, founded by historians in 1906. We proof some statements using the Theory of Proportions and the Method of Exhaustion of Eudoxus, that was improved by Archimedes. Among the principal results, we mention the quadrature of the lune, quadrature of the parabola, approximation of circle area, and calculation of sphere volume.

Keywords History of Mathematics, Calculus, Archimedes, Method of Exhaustion, Quadrature, Area, Volume

Sumário

Lista de Figuras

1 Introdução

Destaque o problema que te leva a falar desse tema
Estabeleça os objetivos de forma clara

O cálculo diferencial e integral é uma das mais poderosas ferramentas da matemática da atualidade. Sua aplicação desde sua descoberta tem contribuído para a evolução geral de diversas outras ciências.

O Cálculo, como teoria, surgiu no século XVII pelas mãos de um inglês, Isaac Newton (1642–1727), e um alemão, Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716), ambos trabalhando de forma independente. Eles trouxeram duas versões da mesma disciplina. O Cálculo era denominado por Newton de O Método de Fluxões e Fluentes, e por Leibniz de Calculus differentialis e Calculus summatorius.

Troque este termo "disciplina"

> "Os nomes de Leibniz e Newton estão hoje inextricavelmente unidos para a invenção da análise infinitesimal, uma das teorias matemáticas que mais enriqueceu a matemática moderna e determinou o progresso da ciência."(GIUSTI, 1988, p.1)

A eles é creditada a descoberta dessa teoria porque foram os únicos que perceberam que derivar uma função e integrar uma função são ações inversas, ou seja, a diferenciação é a operação inversa à integração. Essa descoberta está intimamente relacionada com o hoje em dia denominado Teorema Fundamental do Cálculo. Os dois se debruçaram em problemas que outros estudiosos de seu tempo conseguiram resolver para casos particulares, como o problema das tangentes e o problema da quadratura. (de onde vem essa informação?)

Figura 1: Gottfried Wilhelm Leibniz.

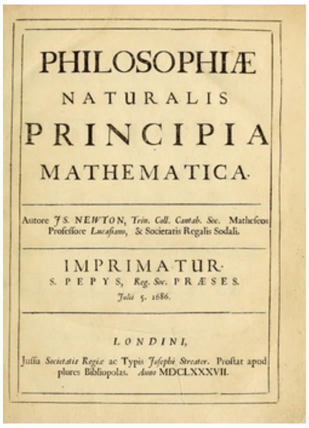
Fonte: `https://www.iep.utm.edu/leib-ove/`

Segundo Boyer (1974), apesar de Newton ter desenvolvido o Cálculo antes de Leibniz, a notação do segundo, bem como sua maneira de calcular derivadas, prevaleceram por terem se mostrado muito mais simples e convenientes.

Newton foi o primeiro a aplicar o Cálculo em sua monumental obra Philosophiae Naturalis Principia Mathematica de 1687. Mas muitos outros cientistas e matemáticos aplicariam o Cálculo nos anos e séculos seguintes.

Na figura 2 vemos uma das obras mais fundamentais da ciência humana. Nela Isaac Newton aplicou genialmente as ferramentas do Cálculo para provar matematicamente suas teorias físicas.

Figura 2: Princípios Matemáticos da Filosofia Natural, 1686.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Mathefeos Profeffore *Lucafiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juffu *Societatis Regiæ* ac Typis *Jofephi Streater*. Proftat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Fonte: `https://hu.wikipedia.org/wiki/PhilosophiaeNaturalisPrincipiaMathematica`

No entanto houve uma crise entre os matemáticos que faziam uso do Cálculo, justificado pelos chamados infinitésimos, e estudiosos de outras áreas, que eram alegavam que os fundamentos do Cálculo não estavam bem esclarecidos. No excelente texto, Paradoxos do Infinito, onde se comenta o trabalho de mesmo nome de Bernard Bolzano, publicado em 1851, encontramos a seguinte passagem:

> “Newton e Leibniz lidam com partes atômicas indivisíveis (infinitésimos) sem nenhum escrúpulo em relação à fundamentação de sua natureza. Em outras palavras, ninguém sabia o que era exatamente um infinitésimo indivisível, mas como o método e o raciocínio funcionavam bem, não se pedia uma fundamentação. Mas, Newton sofreu grande ataque do filósofo e bispo inglês chamado Berkeley que criticava os infinitésimos denominando-os de "fantasmas de quantidades que expiraram.” (ZUMPANO, 2001, p.3)

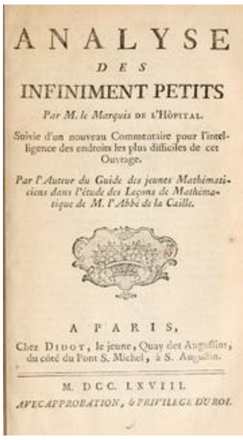
Essa falta de rigor no Cálculo passou a incomodar grandes matemáticos como D’Alembert em 1754 e Gauss em 1801, porém ambos sem nenhuma iniciativa nesse sentido. Segundo Glauco e Sebastião na monografia Metacálculo: a metafísica do cálculo:

> “o cálculo constitui um dos mais belos capítulos da história matemática, seus resultados foram largamente utilizados, sendo comprovados na prática, sem

que, no entanto, se soubesse o que acontecia no seu âmago para que manipulações com entes ínfimos gerassem resultados tão espetaculares. O Cálculo e seus "inexplicáveis" surgiram ou ressurgiram no momento certo, alavancando a ciência de maneira geral. Mas quando o homem teve tempo de olhar para ele com mais atenção percebeu que não conhecia o que estava usando." (GLAUCO; SEBASTIÃO, 2005, p.3)

Apenas depois, em 1692, surgiria o primeiro livro texto sobre Cálculo, Analyse des infiniment petits, de Guillaume François Antoine Marquês de L'Hospital (1661–1704), cujo frontispício vemos na figura 3

Figura 3: Análise dos Infinitésimos, 1692



ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS
Par M. le Marquis DE L'HÔPITAL.
Suivie d'un nouveau Commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet Ouvrage.
Par l'Auteur du Guide des jeunes Mathématiciens dans l'étude des Leçons de Mathématique de M. l'Abbé de la Caille.

A PARIS,
Chez DIDOT, le jeune, Quay des Augustins, du côté du Pont S. Michel, à S. Augustin.

M. DCC. LXVIII.
AVEC APPROBATION, & PRIVILEGE DU ROI.

Fonte: https://archive.org/details/analysedesinfini00lhos

Foi no século XIX que a insegurança causada pela falta de rigor nas bases do Cálculo passou a incomodar de fato os matemáticos, em meados de 1850 a necessidade de revisar e fundamentar a matemática já era um consenso. O aparecimento das geometrias não-euclidianas por volta de 1830 foi um fato que alavancou esse objetivo, pois elas colocaram em dúvida a própria noção de axioma e o sistema hipotético dedutivo característico dos gregos antigos.

Era preciso demonstrar os resultados sem apelar para intuições geométricas espaciais. Seria necessário encontrar uma linguagem adequada para lidar com o infinito e definir precisamente o conceito de limite. O próprio Newton percebeu a importância desse conceito:

"Isaac Newton, em Principia Mathematica, seu maior trabalho em Matemática e Ciência, foi o primeiro a reconhecer, em certo sentido, a necessidade do limite. No começo do livro I do Principia, tentou dar uma formulação precisa para o conceito do limite. Ele havia descoberto o papel preliminar que o limite teria no Cálculo, sendo essa a semente da definição moderna."
http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_limites.htm

Figura 4: Isaac Newton, Sir (1642–1727)

Fonte: `http://ecalculo.if.usp.br/historia/newton.htm`

Isso começou a ser feito por Cauchy na França e foi finalizada por Karl Weierstrass (1815-1897), figura 5, da Alemanha na segunda metade do século XIX. Esse esforço dos matemáticos ficou conhecido como aritmetização da análise. Toda a intuição geométrica foi abolida e as demonstrações eram puramente analíticas, formais e rigorosas, dentro dos princípios do método hipotético dedutivo dos gregos. O Cálculo do século XX, usando uma aritmética finitista se impõe, junto a linguagem dos conjuntos para formar a base dos fundamentos da matemática.

> "Weierstrass tentou separar o Cálculo da Geometria baseando-se apenas no conceito de números. Para isso foi necessário definir número irracional independentemente de limite. Chegou à conclusão da existência de um limite de uma sequência convergente tomando a própria sequência como o número ou limite e definiu número irracional como sequência ordenada de um agregado de racionais, contribuindo não só para a definição de número real mas também para um melhor conceito de limites, que é em essência o que temos hoje." (IEZZI; GELSON, capítulo 1)

Assim é que o Cálculo, advindo de Newton e Leibniz, pois estabeleceram seu teorema fundamental, apenas no final do século XIX, com Weierstrass foi plenamente teorizado. A busca por sua purificação mostrou abertamente o papel central do conceito de limite, ideia que permeou a mente de gigantes como Isaac Newton no século XVII, e Carl Gauss no século XIX, que não a expressaram em termos rigorosos.

Vimos portanto, que o Cálculo, embora surgido no século XVII, teve sua fundamentação rigorosamente alicerçada apenas no século XIX.

No entanto, podemos pensar na seguinte questão: existiu antes de Newton e Leibniz alguma ferramenta matemática que fosse tão poderosa e rigorosa quanto o Cálculo? É possível um Cálculo sem o conceito de limite?

Este trabalho procura mostrar que já na antiguidade grega surgiu uma versão do cálculo integral a partir do gênio de Arquimedes.

Figura 5: Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)

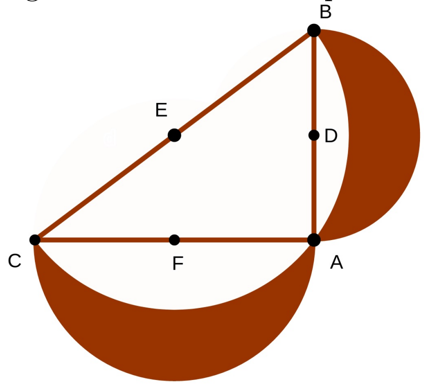
Fonte: http://ecalculo.if.usp.br/historia/weierstrass.htm

Esta dissertação procura destacar o papel de Arquimedes como o primeiro a vislumbrar o Cálculo integral. Na introdução, procuramos falar de como o Cálculo foi sistematizado na Europa entre os seculos XVII e XIX. No segundo capitulo apontamos os aspectos históricos vinculados ao Cálculo relativos à época de Arquimedes. No terceiro capítulo abordamos O Método da Exaustão.No quarto capítulo abordamos O Método, obra de Arquimedes que mostra sua versão do Cálculo Integral. É nesta obra que o vemos usando dinamicamente os conceitos matemáticos aplicados para obter quadraturas e cubaturas. Por fim, na conclusão, avaliamos o impacto deste trabalho sobre a nossa própria formação e de como pode ser utilizado no ensino básico.

2 Aspectos Históricos

O cálculo integral, uma área da Matemática que surgiu inicialmente motivada por problemas de quadratura (cálculo de áreas) e cubatura (cálculo de volumes), teve sua origem ainda na antiguidade grega. O cálculo de áreas de figuras delimitadas por segmento de retas está presente nas culturas dos mais diferentes povos da antiguidade. No entanto, Hipócrates de Chios (cerca de 440 A.C.), não o Hipócrates da medicina, conseguiu fazer a quadratura de lúnulas, uma figura delimitada por segmentos de reta e por arcos de circunferência, como podemos ver na fig. 6, onde ABC é um triângulo retângulo em A. BAC é um semicírculo centrado em E. Pra formar as lúnulas, construímos dois semicírculos, um centrado em D, com raio AD; e outro com centro em F, com raio AF. As lúnulas são obtidas fazendo a diferença entre o semicírculo maior e os dois semicírculos menores.

Figura 6: Lúnulas de Hipócrates



Fonte: Da autoria

Antifon (cerca de 430 A.C.) conforme Glauco e Sebastião [14], teve a ideia que poderia culminar na quadratura do círculo. Para isso bastava inscrever neste polígonos regulares, e tomar suas áreas como aproximação da área do círculo. O processo consistia em primeiramente inscrever um quadrado; depois um octógono, a seguir um hexadecaedro, e assim por diante. Essa forma de pensar, que requer um número infinito de etapas, nunca poderia ser terminada. Apesar disso, Antifon dava início ao que levaria, na antiguidade, ao Método da Exaustão, e na modernidade ao conceito de limite. Arquimedes (287–212

A.C.), um dos três maiores matemáticos de todos os tempos, provou seus teoremas relacionados a áreas e volumes usando o método de exaustão. No entanto, por muito tempo, na verdade por séculos, intrigou aos matemáticos a forma como Arquimedes descobria seus resultados, o método que ele utilizava por exemplo, para deduzir a fórmula da área do segmento parabólico.

O cálculo infinitesimal teve um desenvolvimento, de forma sistemática e massiva, no século XVII. Motivados praticamente pelas mesmas ideias dos antigos, os matemáticos dessa época desenvolveram a versão hoje conhecida, e que foi aplicada em inúmeros campos da ciência desde então.

O Teorema Fundamental do Cálculo, creditados ao inglês Isaac Newton (1643–1727) e ao alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) estabeleceu integração e diferenciação como operações matemática inversas. No entanto, ao contrário dos resultados obtidos por Arquimedes, o Cálculo moderno carecia de rigor. Apenas no século XIX, graças aos trabalhos iniciados pelo francês Augustin Louis Cauchy (1789–1857), e concluídos pelo alemão Karl Weierstrass (1815–1897), esse Cálculo surgido no século XVII se estabelecia em bases rigorosas.

Fazemos essa breve exposição com o intuito de trazer a devida importância para o trabalho de Arquimedes que pretendemos abordar aqui, ou seja, sua versão do Cálculo Integral desenvolvido sob o título: O método dos teoremas mecânicos.

3 O Método da Exaustão

O método da exaustão, que muitos pensam ser um método de descobertas matemáticas, é na verdade uma ideia. Também confundido com O Método de Arquimedes, esse é totalmente diferente, pois Arquimedes usa princípios físicos para deduzir propriedades matemáticas de figuras geométricas. Portanto, é importante esclarecer, procurando uma definição, baseada nas ideias que lhe deram origem, o chamado Método da Exaustão.

3.1 Antes de Arquimedes

Arquimedes aplicou como ninguém o Método da Exaustão, mas não é dele o mérito de tê–lo concebido. No entanto, o desenvolveu e o aplicou com maestria.

> "Em seu trabalho, desenvolveu também o método de exaustão, creditado a Eudoxo, pelo qual se aproxima a quantidade desejada pelas somas parciais de uma série ou pelos termos de uma sequência. Obteve aproximações da área de um círculo comparando-a com as áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos". (BOYER, 1974).

Boyer (1974) afirma que: "[...] a maior parte da matemática grega, e muito da investigação matemática posterior, foi motivada por esforços para conseguir o impossível".

Nesse trecho temos uma referencia à impossibilidade, hoje comprovada, de se quadrar um círculo, duplicar um cubo e triseccionar um ângulo, todos inicialmente dados, usando apenas instrumentos euclidianos, ou seja: esquadro, régua e compasso.

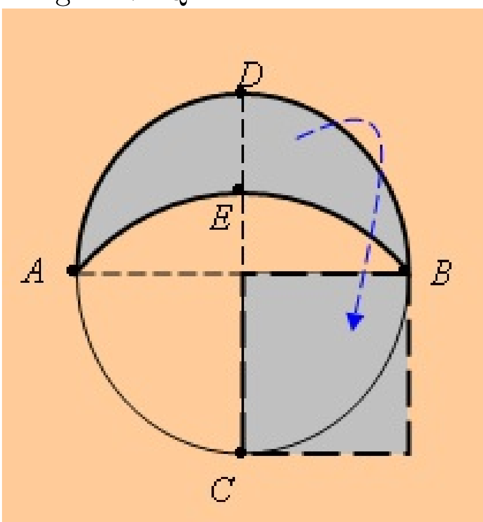
Assim um problema matemático cujos esforços de sábios na busca de sua solução levou a criação do Cálculo Integral, foi a quadratura do círculo. De enunciado simples passa uma ideia de que sua solução também o é: dado um círculo, construir com régua e compasso, um quadrado que tenha a mesma área.

> "A investigação destes problemas se ocuparam inúmeros pensadores gregos do período helênico, o mais antigo dos quais é o filósofo Anaxágoras (499-428 a. C), quem, segundo Plutarco, se havia ocupado da quadratura do círculo enquanto estava em Atenas preso sob a acusação de impiedade". (PASTOR; BANBINI, 1951, p. 35)

A primeira menção documentada que temos do problema da quadratura do círculo encontra–se no papiro Rhind, em torno de 1600 a.C: Construir um quadrado equivalente a um círculo. Resposta: retirar $\frac{1}{9}$ do diâmetro e construir o quadrado sobre o que resta. A origem do problema da quadratura do círculo é muito imprecisa. Contudo, ainda no século V a.C. Hipócrates de Chios, que pode ser considerado o primeiro matemático profissional a tentar resolver o problema da quadratura do círculo, desenvolveu um trabalho historicamente interessante. Na busca incessante da solução da quadratura exata do círculo, não obteve êxito, porém conseguiu pela primeira vez na história da matemática quadrar uma superfície curva, as conhecidas lúnulas de Hipócrates, Figura geométrica limitada por dois arcos circulares. Segue abaixo a prova de que essas figuras são facilmente quadráveis:

3.2 Quadratura da lúnula

Figura 7: Quadratura da lúnula

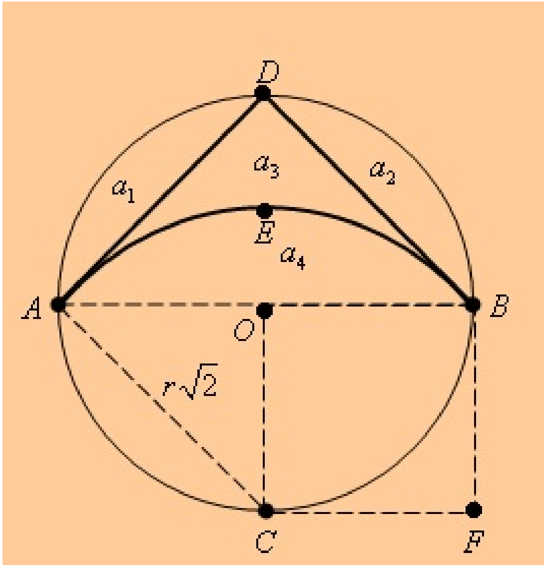


Fonte: Glauco e Sebastião, 2005, p. 51

Encontra–se uma demonstração da quadratura feita por Hipócrates no livro de Simmons, que diz que “esse teorema surpreendente parece ser a primeira demonstração precisa da quadratura de uma região limitada por curvas”. Para se verificar a demonstração “simples, mas engenhosa” precisa–se do último dos seguintes fatos geométricos, cada um implicando o seguinte:

Primeiramente consideremos as seguintes proposições: As áreas de dois círculos estão entre si assim como o quadrado de seus raios; Setores de dois círculos com ângulos centrais iguais estão entre si assim como o quadrado de seus raios; Seguimentos de dois círculos com ângulos centrais iguais estão entre sí assim como o quadrado de seus raios;

Figura 8: Construção da quadratura da lúnula



Fonte: Glauco e Sebastião, 2005, p. 52

Segue a prova do agora Teorema de Hipócrates. Começa–se por desenhar as lúnulas como mostrado na fig 8 a cima.

As cordas que unem D a A e a B são tangentes ao arco AEB e dividem a lúnula em três regiões com áreas a_1, a_2 e a_3. Denotando–se o raio do menor círculo por r, o teorema de Pitágoras afirma que o raio do círculo maior é $r\sqrt{2}$. É fácil ver que AD e BD são segmentos iguais do círculo menor e que AB é um segmento do círculo maior, todos com ângulos centrais retos. Usa–se agora a proposição (3) para inferir que $\dfrac{a_1}{a_4} = \dfrac{r^2}{(r\sqrt{2})^2} \Rightarrow \dfrac{a_1}{a_4} = \dfrac{1}{2}$. Isto acarreta que $a_1 = \dfrac{1}{2}a_4$ e $a_2 = \dfrac{1}{2}a_4$, logo $a_1 + a_2 = a_4$. Segue–se agora que (chamando–se a área da lúnula de a_L)

$$a_L = a_1 + a_2 + a_3 \Rightarrow a_L = a_4 + a_3 \Rightarrow aL = \Delta ABD \Rightarrow a_L = r^2.$$

Portanto a_L = área do quadrado $OBFC$. E a lúnula foi quadrada.

Sobre essa demonstração, temos o seguinte comentário:

> "Hipócrates foi contemporâneo de Péricles, o grande líder político e cultural de Atenas na idade do ouro. Mas nada do legado de Péricles tem a qualidade duradoura dessa bela descoberta geométrica; até mesmo o Parthenon, cujo projeto e construção supervisionou, está se desintegrando. O raciocínio de Hipócrates é modelo de prova matemática, intocada pelo tempo: em poucos passos elegantes converte algo fácil de entender mas difícil de acreditar em impossível de duvidar". (SIMMONS, 1988, p. 688).

A solução dada por Hipócrates à quadratura de lúnulas pode parecer corriqueira atualmente, pois temos um aparato algébrico, no entanto, imaginando-se naquela época, há aproximadamente 25 séculos, esse feito toma o ar de genial, que é como deve ser considerado.

Infelizmente a quadratura do círculo não foi lograda por Hipócrates e, nem mesmo em suas tentativas, visualizou a ideia engenhosa que levaria posteriormente ao desenvolvimento do Cálculo.

O problema da quadratura do círculo persistiu e foi atacado por diversos geômetras de alto quilate que, assim como Hipócrates de Chios, acabaram fazendo outras grandes descobertas que foram de fundamental importância para o progresso das matemáticas.

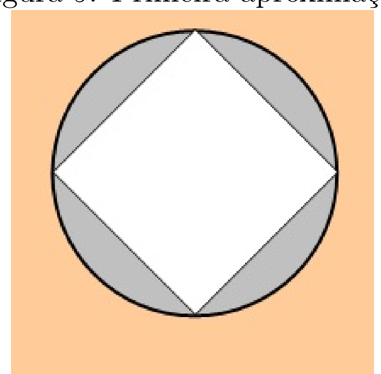
A matemática daquela época, vivia principalmente das grandes ideias e o sopro de inspiração ocorreu na cabeça de matemáticos e de não matemáticos, pois a Matemática, como uma rainha, soberana entre as ciências, faz uso de matemáticos e de não matemáticos desprovidos de preconceitos e recheados de criatividade.

3.3 Ideia de Antífon para exaurir o círculo

Nesse sentido, Antífon, sofista que viveu no século V a.C. desempenhou importante papel com suas ideias de que, a começar de um quadrado inscrito num círculo dado e, depois, seccionando os lados desse quadrado por suas mediarizes para obter um octógono e desse inscrito no mesmo círculo e, depois disso, do mesmo modo, um polígono de dezesseis lados e assim por diante, chegaria a um ponto em que o polígono assumiria a forma do círculo, e dessa forma o círculo estaria “exaurido”. Até então não havia ideia parecida.

Para muitos estudiosos da época, a ideia de Antífon para resolver o problema da quadratura do círculo foi vista como infrutífera. Todavia, essa forma de pensar é considerada, pelos historiadores modernos, o germe da ideia moderna do Cálculo Integral.

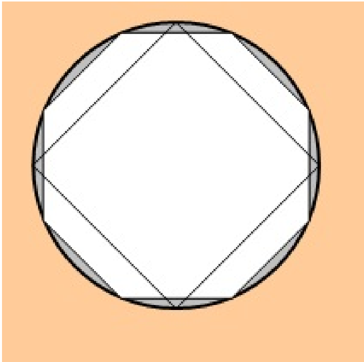
Figura 9: Primeira aproximação



Fonte: Da autoria

Essa mesma ideia encerra dificuldades enfrentadas pela teoria dos limites. Esse foi o primeiro passo rumo à descoberta daquela que é a maior e mais difundida ferramenta matemática de todos os tempos: o Cálculo Infinitesimal.

Figura 10: Segunda aproximação

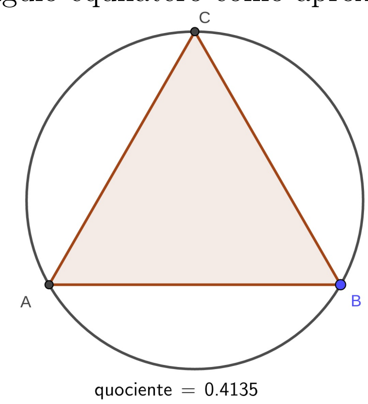


Fonte: Da autoria

Com o auxilio de um programa de geometria dinâmica, o Geogebra, determinamos o quociente entre a área do polígono regular inscrito em um círculo e a área deste círculo, podemos assim constatar numericamente que a área do polígono regular inscrito, à medida que seus lados vão aumentando, aproxima cada vez melhor a área do círculo dado:

- Triângulo equilátero:

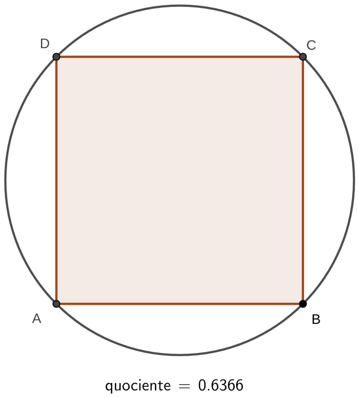
Figura 11: Triângulo equilátero como aproximação do círculo



Fonte: Da autoria - GeoGebra

- Quadrado:

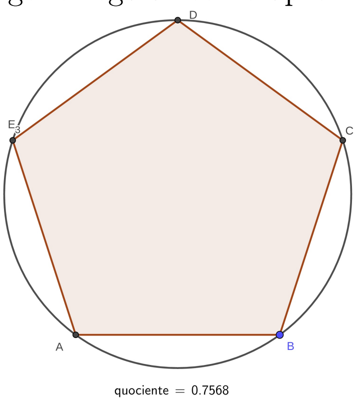
Figura 12: Quadrado como aproximação de um círculo



Fonte: Da autoria - GeoGebra

- Pentágono regular:

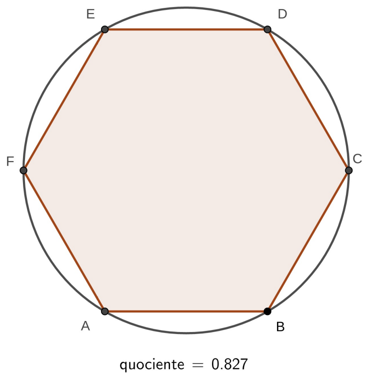
Figura 13: Pentágono regular como aproximação do círculo



Fonte: Da autoria - GeoGebra

- Hexágono regular:

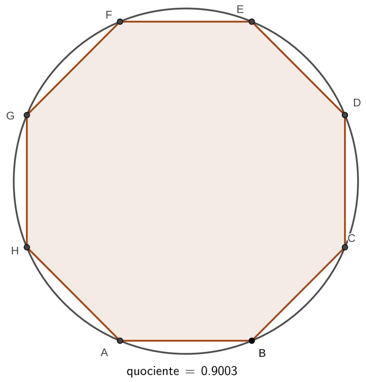
Figura 14: Hexágono regular como aproximação do círculo



Fonte: Da autoria - GeoGebra

- Octógono regular

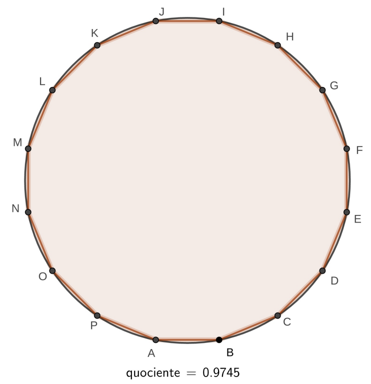
Figura 15: Octógono regular como aproximação do círculo



Fonte: Da autoria - GeoGebra

- Hexadecaedro regular:

Figura 16: Hexadecaedro regular como aproximação do círculo.



Fonte: Da autoria - GeoGebra

Aqui observamos que o quociente entre a área do hexadecaedro regular e a área do círculo igual a $0,9745$ o que significa que este exaure o círculo em $97,45\%$.

Essa forma de ver a quadratura do círculo apresenta uma novidade, é que a área do círculo é expressa de forma aproximada, sua exatidão é melhorada de etapa em etapa. No entanto, essa mesma ideia bate de frente com uma das fraquezas da matemática grega daquela época, exatamente porque esse processo é infinito. Todavia, um grande gênio daquele tempo encontrou uma forma de contornar essa dificuldade, ou seja, de ser rigoroso sem ter que encarar os processos infinitos.

3.4 Eudoxo de Chios e o Método de Exaustão

A seguinte citação:

De um modo geral os capítulos não podem iniciar com uma citação crua. No início e no término de cada capítulo, seção, subseção tu deve tanto introduzir quanto finalizar .

> Eudoxo de Chios tornou-se um dos mais conhecidos matemáticos de sua época, por dominar por completo as técnicas da geometria vigente. Seu trabalho merece nossa atenção, quando estuda um procedimento matemático para calcular a área de superfícies. Assim através desta técnica, que Arquimedes desenvolveria e chamaria de Método de Exaustão, articular-se-ia, no futuro, os conceitos dos infinitésimos, o de soma superior (sup) e soma inferior (inf), o que muito influenciaria os criadores do Calculo Integral. (RICIERI, 1989, p. 15)

Mostra porque o nome de Eudoxo aparece na lista dos criadores do Cálculo. "... Eudoxo é considerado, depois de Arquimedes, o maior matemático da Antiguidade" (DOMINGUES apud IEZZI; MURAKAMI; MACHADO, 1999, p. 62). Poucos contribuíram tanto quanto ele, naquela época remota, para a formulação de um Cálculo Integral.

Antes de Eudoxo não existia nenhum método consistente e rigoroso que permitisse a manipulação de grandezas incomensuráveis.

Eudoxo enfrentou problemas cruciais da matemática Grega, tornando possível a tradução matemática das idéias de Antífon, antes consideradas infrutíferas, o que possibilitou sua aplicação e manipulação por parte deste e de outros matemáticos posteriores.

O uso das idéias de Antífon exige, como se sabe hoje a chamada passagem ao limite, o que leva evidentemente a trabalhar com conceitos que os gregos de então estavam longe de sistematizar, como o de número real, infinito e contínuo. porém, Eudoxo formulou a sua teoria das proporções e fez com que o Método de Exaustão se tornasse tão poderoso quanto as modernas ferramentas que passeia o Cálculo, como se pode ver nesta passagem de Pastor e Banbini: "El método de exhaución substituye con igual rigor las actuales demonstraciones en las que se hace uso del concepto infinitesimal de limite" (PASTOR; BANBINI, 1951, p. 33).

3.5 Teoria da proporção de Eudoxo

Inicie com um texto para introduzir.
Deve ser algo relativo à propria citação

> "O mérito dessa definição está no fato de que ela permitiu que os antigos gregos dispusessem da estrutura dos números reais. O progresso feito por essa teoria só se compara aos trabalhos sobre os números reais realizados por Cauchy, Weierstrass e Dedekind, matemáticos do século XIX." (OLIVEIRO, 2007, p.43)

O que vemos é que a matemática que permitiu uma versão do Cálculo na antiguidade também foi uma construção coletiva. Como se sabe, na Grécia da antiguidade a descoberta de grandezas incomessuráveis levou os matemáticos de então a questionar suas concepções de número. O lema Tudo é número devido aos pitagórios, por falta de um entendimento perfeito das grandezas incomessuráveis, veio a perder força diante críticos sagazes como, por exemplo, Zenão de Eléia. No entanto, sem exigir o desvelamento desses conceitos fundamentais, Eudoxo formulou sua poderosa teoria das proporções que permite trabalhar com grandezas comensuráveis ou incomensuráveis. É a aplicação dessa teoria que Arquimedes faz para provar, pelo Método da Exaustão, seus teoremas referentes ao Cálculo.

> O Método da Exaustão é também conhecido por Princípio de Eudoxo- Arquimedes, por ter na sua base a teoria das proporções apresentada por Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) e por Arquimedes de Siracusa (287–212 a.C.) ter sido o matemático que maior visibilidade lhe deu. (JR; MARCO AURÉLIO KISTEMANN, 2008, p.54)

Por isso, é justo que aqui façamos uma apresentação dessa teoria, mesmo que brevemente. Não vamos, entretanto, entrar no mérito da discussão quanto as concepções filosóficas referentes aos conceitos de número que permeava a mente dos antigos, a apresentaremos tal qual é concebida hoje.

A Teoria das Proporções formulada por Eudoxo e magistralmente apresentada por Euclides no Livro V dos seus Elementos, veio para superar a teoria das proporções formulada pela escola pitagória. Assim, Euclides, com a definição 3 do Livro V, define: uma razão é uma espécie de relação a respeito do tamanho entre duas grandezas do mesmo tipo.

Introduza os exemplos e o porque deles... "A seguir trataremos de exemplos assim assado..."

Exemplo 3.1. A altura de Pedro é de $1,8$ m e a altura de Matheus é 160 cm. Qual a razão entre as alturas de Pedro e Matheus?

Solução: Observando a ordem de grandeza percebe–se que é preciso está na mesma unidade, fazendo a converção de $1,8$ m para cm, assim $1,8$ m $=180$ cm.

$$\text{Razão} = \frac{\text{altura de Pedro}}{\text{altura de Matheus}} = \frac{180}{160} = \frac{9}{8}$$

Logo para cada 9 cm de Pedro, temos 8 cm para Matheus.

Exemplo 3.2. Em uma festa, a razão entre o número de mulheres e o de homens é $\frac{5}{3}$. Qual a porcentagem de mulheres na festa é?

Solução: Como a razão reduzida entre o número de mulheres e de homens é de $\frac{5}{3}$, isto quer dizer que, para cada 5 mulheres tem–se 3 homens. Dessa forma $5 + 3 = 8$, isto é, num grupo de 8 pessoas nessa festa 5 são mulheres e 3 são homens.

Portanto, 5 mulheres em 8 pessoas equivalem a $\frac{5}{8} = 0,625\ (\times 100) = 62,5\%$.

Problema 3.1 (ENEM 2012)**.** O esporte de alta competição da atualidade produziu uma questão ainda sem resposta: Qual é o limite do corpo humano? O maratonista original, o grego da lenda, morreu de fadiga por ter corrido 42 quilômetros. O americano Dean Karnazes, cruzando sozinho as planícies da Califórnia, conseguiu correr dez vezes mais em 75 horas. Um professor de Educação Física, ao discutir com a turma o texto sobre a capacidade do maratonista americano, desenhou na lousa uma pista reta de 60 centímetros, que representaria o percurso referido.

Esta não é a forma de citar. Se queres dizer que os exemplo foi retirado desse endereço, então deve colocar na referencia a forma corretar de textos para acesso por meio eletronico.

Disponível em: `http://veja.abril.com.br`. Acesso em: 25 jun. 2011 (adaptado).

Acesse o endereço "more.ufsc..br" Nesse endereço tu poderá formatar qualquer referência e já da a forma de citar.

Se o percurso de Dean Karnazes fosse também em uma pista reta, qual seria a escala entre a pista feita pelo professor e a percorrida pelo atleta?

A) 1: 700

B) 1: 7.000

C) 1: 70.000

D) 1: 700.000

E) 1: 7.000.000

Solução: A escala é a razão entre a medida do desenho e a medida real. Chamando de $E =$ escala, $d =$ medida do desenho e $D =$ medido rela, tem–se $E = \frac{d}{D}$. Assim, $d = 60$ cm, $D = 42$ km $= 4.200.000$ cm.

$$E = \frac{60\ cm}{4.200.000\ cm} = \frac{1}{70.000}.$$

Logo, a escala é 1:70.000. Resposta certa letra C.

Continuando, apresenta a definição 4: Diz–se que têm uma razão as grandezas que são capazes, quando multiplicadas, de se exceder uma à outra.

A definição apresentada aqui nada define, entretanto, a segunda caracteriza duas grandezas homogêneas, do mesmo tipo, dois comprimentos, duas áreas ou dois volumes, etc. É na definição 5, do Livro V, que assenta a Teoria das Proporções: Diz-se que: grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, dados quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira e dados quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos simultaneamente excedem, são simultaneamente iguais ou ficam simultaneamente aquém dos últimos. Esta definição é consolidada na definição 6, do mesmo livro: Grandezas que têm a mesma razão dizem-se proporcionais.

Diz que a está para b assim como c está para d, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, para quaisquer números inteiros positivos não nulos m e n, tais que

$$m \cdot a = n \cdot b \quad \Rightarrow \quad m \cdot c = n \cdot d \tag{3.1}$$

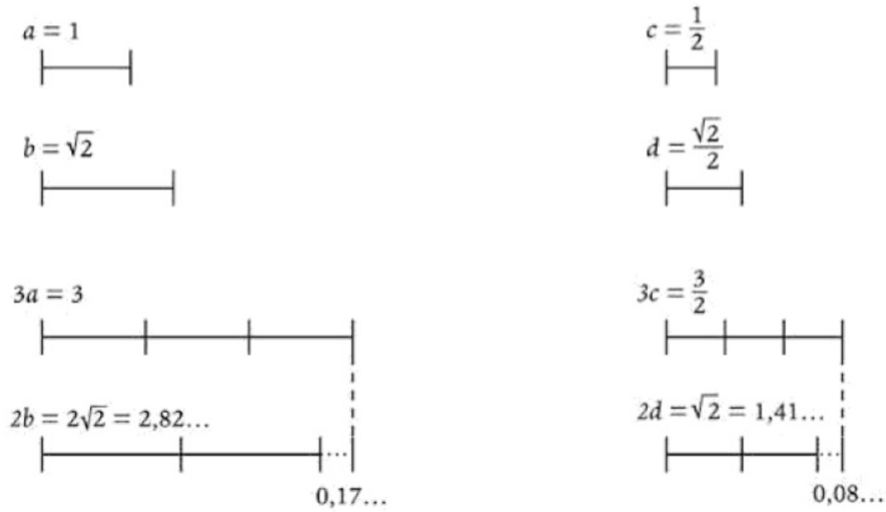
$$m \cdot a > n \cdot b \quad \Rightarrow \quad m \cdot c > n \cdot d \tag{3.2}$$

$$m \cdot a < n \cdot b \quad \Rightarrow \quad m \cdot c < n \cdot d \tag{3.3}$$

A afirmação (3.1) só é possivel se a e b, por um lado e c e d por outro forem comensuráveis.

Suponha que $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $c = \frac{1}{2}$ e $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pela definição existem inteiros positivos m e n. Seja $a : b :: c : d :: 2 : 3$, isto é, $m = 3$ e $n = 2$, observe que não obteremos o mesmo resultado, pois $3a$ e $2b$ não são iguais. Os quatros segmentos medirão, respectivamente $ma = 3$, $nb = 2\sqrt{2} \cong 2,82...$, $mc = \frac{3}{2} = 1,5$ e $nd = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 1,41...$.

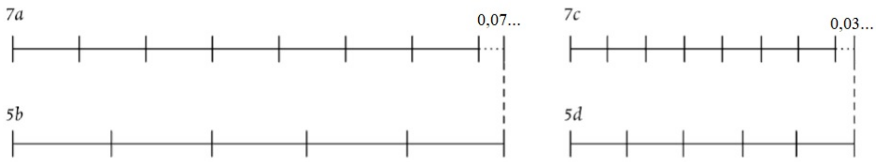
Figura 17: Verificação da teoria das proporções de Eudoxo, para $m = 3$ e $n = 2$.



Fonte:???

Assim, $3a > 2b$ e $3c > 2d$, estimando a diferença $3a - 2b = 3 - 2,82 \cong 0,17...$, seja o dobro da diferença $3c - 2d = 1,5 - 1,41 \cong 0,08....$ Tomando agora $m = 7$ e $n = 5$. Os quatros segmentos passam a medir $ma = 7$, $nb = 5\sqrt{2} \cong 7,07...$, $mc = \frac{7}{2} = 3,5$ e $nd = 5\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 3,53....$ Obtemos agora que 7a<5b e 7c<5d e a diferença $5b - 7a = 7,07... - 7 \cong 0,07...$, é a metade da diferença $5d - 7c = 3,53... - 3,5 \cong 0,03...$

Figura 18: Verificação da teoria das proporções de Eudoxo, para $m = 7$ e $n = 5$.



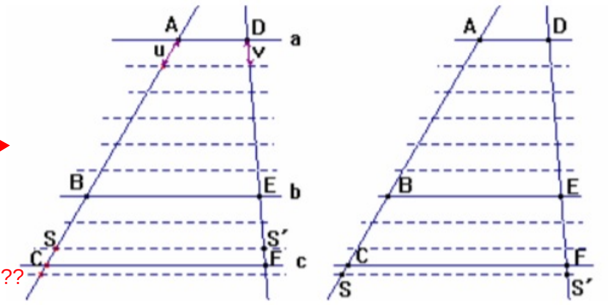
Fonte:??

Exemplo 3.3. Use a definição de Eudoxo para mostrar de que 1 está para $\sqrt{2}$ assim como $\sqrt{2}$ está para 2.

Solução:

Exemplo 3.4. Suponha que $r \parallel s$ e $s \parallel t$, mostre que $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$.

Figura:?????????????????



Fonte:??????????????????????

Solução: Sejam n e m dois números naturais qualquer. Vamos dividir AB em n partes iguais. Logo existe um segmento u tal que $AB = n \cdot u$ Vamos marcar m vezes u em BC. Sendo S a extremidade do último segmento contido em BC temos 3 casos possíveis:

- S está entre B e C.
- C está entre B e S .
- $C = S$ (nesse caso AB e BC são comensuráveis).

1º caso: S está entre B e C.

Logo $BS = m \cdot u$. De cada ponto de divisão de AB e BC tracemos paralelas às retas a, b e c. Essas retas interceptarão DE e EF em pontos que dividirão DE em n partes iguais a v e ES' em m partes iguais a v. Logo $DE = n \cdot v$ e $ES' = m \cdot v$. De $AB = n \cdot u$ vem que $m \cdot AB = m \cdot n \cdot u$ e de $BS = m \cdot u$ vem que $n \cdot BS = n \cdot m \cdot u$.

Como $BS < BC$ então $m \cdot AB = n \cdot BS < n \cdot BC$. Portanto $m \cdot AB < n \cdot BC$. De $DE = n \cdot v$ vem que $m \cdot DE = m \cdot n \cdot v$ e de $ES' = m \cdot v$ vem que $n \cdot ES' = n \cdot m \cdot v$. Como $ES' < EF$ então $m \cdot DE = n \cdot ES' < n \cdot EF$. Portanto $m \cdot DE < n \cdot EF$. Logo

$$m \cdot AB < n \cdot BC \Rightarrow m \cdot DE < n \cdot EF.$$

2º caso: C está entre B e S .

De $AB = n \cdot u$ vem que $m \cdot AB = m \cdot n \cdot u$. De $BS = m \cdot v$ vem que $n \cdot BS = n \cdot m \cdot v$. Como $BS > BC$ então $m \cdot AB = n \cdot BS > n \cdot BC$. Portanto $m \cdot AB > n \cdot BC$.

De $DE = n \cdot v$ vem que $m \cdot DE = m \cdot n \cdot v$ e de $ES' = m \cdot v$ então $n \cdot ES' = n \cdot m \cdot v$. Como $ES' > EF$ então $m \cdot DE = n \cdot ES' > n \cdot EF$. Portanto $m \cdot DE > n \cdot EF$. Logo

$$m \cdot AB > n \cdot BC \Rightarrow m \cdot DE > n \cdot EF.$$

3º caso: $C = S$ (nesse caso AB e BC são comensuráveis).

De $AB = n \cdot u$ vem que $m \cdot AB = m \cdot n \cdot u$ e de $BS = m \cdot v$ vem que $n \cdot BS = n \cdot m \cdot v$. Logo $m \cdot AB = n \cdot BS$ De $DE = n \cdot v$ vem que $m \cdot DE = m \cdot n \cdot v$ e de $EF = m \cdot v$ vem que $n \cdot EF = n \cdot m \cdot v$. Logo $m \cdot DE = n \cdot EF$ Logo

$$m \cdot AB = n \cdot BS \Rightarrow m \cdot DE = n \cdot EF.$$

Exemplo 3.5. Um círculo tem a mesma área de um triângulo retângulo no qual um dos lados do ângulo reto é igual ao raio do círculo e o outro igual ao comprimento da sua circunferência

Solução: Apresentaremos a demonstração utilizando a linguagem moderna, seguem da referência [4].

Representaremos com A, a área do círculo, e com T, a área do triângulo. Existem apenas três possibilidades:

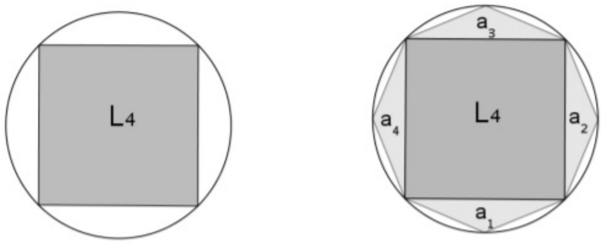
- $A > T$,
- $A < T$,
- $A = T$.

1º caso: Vamos supor inicialmente que $A > T$.

Notamos que $A - T$ corresponde a uma área e aplicaremos o princípio da exaustão às grandezas A e $A - T$.

Retiraremos da área A do círculo, a área de um quadrado inscrito que representaremos por L_4, que é maior que a metade da área do círculo. Sobrará $A - L_4$.

Figura 19: Método de exaustão.



Fonte: Da referência [4]

Tomando como base cada lado do quadrado, traçamos os triângulos isósceles com vértices na circunferência, cujas áreas representaremos por a_1, a_2, a_3, a_4.

Retiramos essas áreas da parte $A - L_4$.

Sobrará

$$(A - L_4) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \;=\; A - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + L_4) = A - L_8, \quad (3.4)$$

onde L_8 é a área do polígono regular inscrito de 8 lados.

Traçando novamente triângulos isósceles tendo como base os lados do octógono e retirando as áreas desses triângulos da parte que havia sobrado anteriormente, sobrará $A - L_{16}$, onde L_{16} é o polígono regular de 16 lados, inscrito na circunferência.

Após um número finito de etapas obteremos um polígono regular de área L_n tal que $A - L_n$ é menor que as grandezas A e $A - T$, consideradas inicialmente. Ou seja,

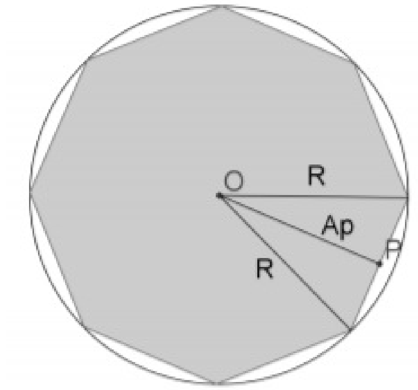
$$A - L_n \;<\; A - T, \quad (3.5)$$

o que nos leva a concluir que $T < L_n$.

Por outro lado, consideremos um polígono regular de n lados, de área L_n, inscrito no círculo de área A.

Nele, o apótema OP é menor que o raio R e o perímetro $2 \cdot p$ é menor que o comprimento C da circunferência.

Figura 20: Polígono inscrito.



Fonte: Da referência [4]

Então,

$$\mathsf{OP} \cdot 2 \cdot \mathsf{p} < \mathsf{R} \cdot \mathsf{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathsf{OP} \cdot 2 \cdot \mathsf{p}}{2} < \frac{\mathsf{R} \cdot \mathsf{C}}{2}. \tag{3.6}$$

Mas $\frac{\mathsf{OP} \cdot 2 \cdot \mathsf{p}}{2}$ é a área L_n do polígono e $\frac{\mathsf{R} \cdot \mathsf{C}}{2}$ é a área T do triângulo.

Logo, $\mathsf{L}_n < \mathsf{T}$, o que leva a uma contradição.

2º caso: Vamos supor agora que A < T.

Consideremos o quadrado circunscrito ao círculo cuja área representamos por L_4.

Notamos que $\mathsf{T} - \mathsf{A}$ corresponde a uma área e aplicaremos o princípio da exaustão às grandezas L_4 e $\mathsf{T} - \mathsf{A}$.

Vamos retirar do quadrado de área L_4, uma parte maior que a metade, que é o círculo de área A. Sobra $\mathsf{L}_4 - \mathsf{A}$.

Em cada canto do quadrado, traçamos os triângulos isósceles cujas bases são tangentes ao círculo. Representaremos suas áreas por a_1, a_2, a_3, a_4.

Retiramos essas áreas da parte $\mathsf{L}_4 - \mathsf{A}$.

Sobrará

$$(\mathsf{L}_4 - \mathsf{A}) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \;=\; (\mathsf{L}_4 - \mathsf{A}) - (\mathsf{L}_4 - \mathsf{L}_8) = \mathsf{L}_8 - \mathsf{A}, \tag{3.7}$$

onde L_8 é a área do polígono regular circunscrito, de 8 lados.

De maneira análoga, retirando da parte que sobra, $\mathsf{L}_8 - \mathsf{A}$, uma parte maior que sua metade, sobrará $\mathsf{L}_{16} - \mathsf{A}$.

Após um número finito de etapas obteremos um polígono regular de área L_n tal que $L_n - A$ é menor que $T - A$, considerada inicialmente.

Ou seja

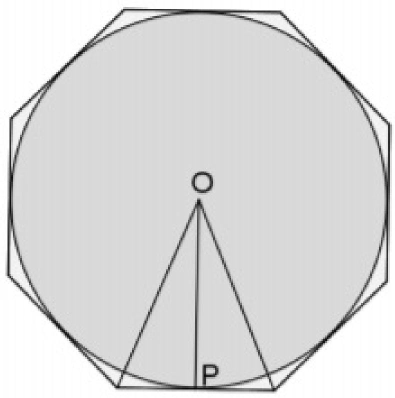
$$L_n - A < T - A \tag{3.8}$$

o que leva a concluir que $L_n < T$.

Por outro lado, vamos considerar um polígono regular de área L_n circunscrito no círculo de área A.

Na Figura 21, o apótema OP é igual ao raio R e o perímetro $2 \cdot p$ é maior que o comprimento C da circunferência.

Figura 21: Polígono circunscrito.



Fonte: Da referência [4]

Então,

$$OP \cdot 2 \cdot p > R \cdot C \quad \Rightarrow \quad \frac{OP \cdot 2 \cdot p}{2} > \frac{R \cdot C}{2}. \tag{3.9}$$

Mas $\dfrac{OP \cdot 2 \cdot p}{2}$ é a área L_n do polígono e $\dfrac{R \cdot C}{2}$ é a área T do triângulo.

Logo, $L_n > T$, o que leva a uma contradição.

Como $A > T$ levou a um absurdo e $A < T$ levou a outro absurdo, podemos concluir que $A = T$. Ou seja, a área do círculo é igual à área do triângulo retângulo cujos catetos são respectivamente, o raio e o comprimento desse círculo.

Dentre os matemáticos antigos, nenhum conseguiu utilizar com maior destreza o Método de exaustão quanto Arquimedes de Siracusa, o último na escala de aperfeiçoamento de uma idéia que nasceu com Antífon, encontrou sistemática e expressividade com Eudoxo e foi adotada, desenvolvida e aperfeiçoada pelo gênio de Siracusa

Podemos dizer que o primeiro fruto da idéia de Antífon, sem dúvida uma das mais belas idéias eternas da humanidade, O MÉTODO DE EXAUSTÃO, e o segundo surgiria cerca de dois mil anos depois, o Cálculo Infinitesimal.

Hoje é sabido que as ferramentas gregas eram muito precárias, idéias nebulosas sobre número, infinito, contínuo, entre outros, retardariam o aparecimento dos entes infinitesimais. Entre esses, um deles tem seu cerne na idéia de Antífon: o conceito de limite matemático, tão básico e tão sutil e que surgiria somente muito depois do próprio Cálculo Integral e Diferencial do século XVII, conservando a tradição de que em matemática os efeitos, não raro, precedem as causas.

Todavia, como veremos, a falta de conceitos e a nebulozidade das ideias dos antigos não foram suficientes para que Arquimedes desenvolvesse sua versão do Cálculo Integral.

4 O método dos teoremas mecânicos

Figura 22: Arquimedes de Siracusa

A citação e a figura são auxílio, ajudama explicar algo

Fonte: O'CONNOR; ROBERTSON, 2018 [on line])

Comece com texto introdutório e depois coloque esses elementos

> [...] estou persuadido de que isso não será um pequeno serviço prestado à matemática; pois percebo que alguns ou de meus contemporâneos ou de meus sucessores poderão por meio deste método quando ele estiver demonstrado, descobrir outros teoremas que ainda não me ocorreram. (Arquimedes, em AABOE, 1984, p. 119)

Arquimedes deu grandes contribuições em geometria. Seu método antecipou em 2000 anos o Cálculo Integral de Newton e Leibniz. Para ficar mais claro, vejamos as citações abaixo:

"[...] Arquimedes soma a série geométrica infinita $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots$ mostrando que ele estava totalmente consciente da sutileza do conceito de limite. Isto não estava claro a nenhum outro matemático até o século XIX" (SIMMONS, 1987, p. 685).

Arquimedes tinha plena consciência da importância de seu Método para resolver problemas de quadraturas e de cubaturas, sabia que bem compreendido, poderia alavancar o conhecimento humano:

> "[...] Achei apropriado explicitar e explicar em detalhe no mesmo livro as peculiaridades de um certo método, pelo qual será possível investigar alguns dos problemas da matemática por meio da mecânica. Este processo é, estou persuadido, útil até mesmo para a demonstração dos próprios teoremas; pois, certas coisas primeiro se fizeram claras para mim por meio de um método mecânico, embora tivessem que ser demonstradas posteriormente por meio da geometria, pois sua investigação pelo método citado não forneceu realmente uma demonstração. Mas é naturalmente mais fácil fornecer a demonstração de um problema

> quando adquirimos conhecimento prévio sobre ele por meio do método, do que achar a demonstração sem nenhum conhecimento anterior. Esta é a razão por que, no caso de teoremas de que Eudoxo foi o primeiro a achar a demonstração, ou seja, de que o cone é um terço do cilindro, e a pirâmide do prisma, que tem a mesma base e a mesma altura, não deveríamos atribuir pouco do mérito a Demócrito, que foi o primeiro a fazer a asserção relativamente a estas Figuras, embora não a tenha demonstrado. Eu próprio me encontro na posição de ter em primeiro lugar feito a descoberta do teorema agora publicado pelo método indicado, e acho necessário explicar o método parcialmente pois já falei dele, e não quero que achem que pronunciei palavras vãs, mas igualmente por que estou persuadido de que isso não será um pequeno serviço prestado à matemática; pois percebo que alguns ou de meus contemporâneos ou de meus sucessores poderão por meio deste método quando ele estiver demonstrado, descobrir outros teoremas que ainda não me ocorreram". (AABOE, 1984, p. 119).

Arquimedes viveu aproximadamente 75 anos, sua morte é cercada por uma áurea meio fabulosa, o que é comum na biografia dos grandes homens. Muito dessas fantasias históricas se deve ao fato de as informações que temos sobre esse gênio ter chegado a nós por meio do que dele disseram autores diversos, na maioria comentadores que viveram depois dele. O que pretendemos é dar uma olhada em seu MÉTODO totalmente original e que, por si só, constitui uma versão do cálculo integral. (Quem?)

De acordo com o livro Historia da Matemática dos professores Pastor e Bambine (1994), as principais obras de Arquimedes são:

1. Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas;
2. Sobre a Esfera e o Cilindro;
3. Sobre Espirais;
4. A Quadratura da Parábola;
5. Sobre Conóides e Esferóides;
6. Sobre Corpos Flutuantes;
7. A Medida de um Círculo;
8. O Contador de Grãos de Areia;
9. O Método dos teoremas mecânicos.

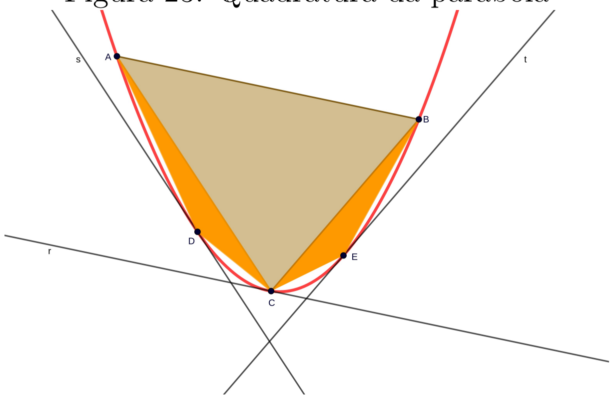
Se isso aqui foi retirado de algum lugar, então deve dizer de quem , que ano e que página

Sua obra se divide naquelas de caráter estritamente geométrico e aquelas em que ele faz uso dos princípios de estática, aplicando mecânicos. Os autores afirmam que em A quadratura da parábola, pela primeira vez, Arquimedes aplicou Cálculo Integral. Apenas cerca de dois mil anos depois, em sua concepção das fluxões, Isaac Newton, faria a mesma combinação: Matemática e Física, na sua versão do Cálculo. A quadratura da parábola foi o primeiro exemplo de quadratura de uma figura mistilínea cuja linha curva não é um arco de circunferência.

4.1 A quadratura da parábola

Arquimedes não podia usar polígonos regulares para calcular a área do seguimento parabólico, assim como fez com o círculo, mas venceu essa dificuldade fazendo uso original de triângulos. Ele começou por inscrever o triangulo ABC, figura 23, sua primeira aproximação da área do setor parabólico, onde o vértice C é escolhido como o ponto em que a tangente à parábola é paralela a AB. Sua segunda aproximação foi obtida juntando–e ao triangulo ABC os dois triângulos ACD e BCE, onde o vértice D é o ponto em que a tangente é paralela à AC e o vértice E é o ponto em que a tangente é paralela a BC.

Figura 23: Quadratura da parábola



Fonte: Da autoria

Para obter a terceira aproximação ele inscreveu triângulos da mesma maneira em cada uma das quatro regiões ainda não incluídas. Desse modo a terceira aproximação é a soma das áreas dos triângulos ABC, ACD e BCE com as dos quatro novos triângulos. Continuando esse processo até "exaurir" o seguimento parabólico, ele mostrou que a área é exatamente igual a quatro terços da área do primeiro triângulo ABC.

Arquimedes provou o seguinte teorema: A soma das áreas dos triângulos ACD e BCE é um quarto da área do triângulo ABC. Esta relação se repete em cada estágio sucessivo do processo. (vide figura 23)

No primeiro estágio o teorema garante que

$$\mathsf{ACD} + \mathsf{BCE} \;=\; \frac{1}{4}\mathsf{ABC}. \tag{4.1}$$

Posteriormente, no segundo estágio, haverá dois triângulos, Δ_1 e Δ_2, cujas somas das áreas será um quarto de ACD e dois triângulos, Δ_3 e Δ_4, cuja soma das áreas será um quarto da área de BCE.

Em relação ao triangulo ABC, no estágio 2 ter–se–á a seguinte área:

$$\begin{cases} \Delta_1 + \Delta_2 &= \frac{1}{4}ACD \\ \Delta_3 + \Delta_4 &= \frac{1}{4}BCE \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{4}ACD + \frac{1}{4}BCE = \frac{1}{4}(ACD + BCE)$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{4}(ACD + BCE) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}ABC\right) \tag{4.2}$$

De (4.1) e (4.2), somando tudo temos:

$$ABC + \frac{1}{4}ABC + \frac{1}{4^2}ABC.$$

Chamando de S_p a área do segmeto parabólico, no terceiro estágio, seguindo raciocínio análogo, chega-se a seguinte aproximação de sua área:

$$S_p \cong ABC + \frac{1}{4}ABC + \frac{1}{4^2}ABC + \frac{1}{4^3}ABC.$$

Arquimedes após observar o padrão escreveu a igualdade:

$$S_p = ABC + \frac{1}{4}ABC + \frac{1}{4^2}ABC + \frac{1}{4^3}ABC + \ldots \quad \text{ou} \quad S_p = ABC\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right)$$

Nesse momento Arquimedes usou um artifício para poder somar as infinitas parcelas de dentro do parêntese, multiplicou a igualdade por três obtendo os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} 3S_p &= 3ABC\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right) \\ 3S_p &= ABC\left(3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \ldots\right) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como o infinito era um inconveniente, ele decompôs o 1 desta maneira:

- $1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

- $\frac{1}{4} = \frac{4}{4^2} = \frac{3}{4^2} + \frac{1}{4^2} \Longrightarrow 1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{1}{4^2}$

- $\frac{1}{4^2} = \frac{4}{4^3} = \frac{3}{4^3} + \frac{1}{4^3} \Longrightarrow 1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{1}{4^3}$

E assim, Arquimedes somou a série infinita:

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{3}{4^4} + \ldots = 1$$

Substituindo esse resultado no último da equação (4.3), tem–se:

$$3S_p = ABC(3+1) \Longrightarrow 3S_p = 4ABC \Longrightarrow S_p = \frac{4}{3}ABC$$

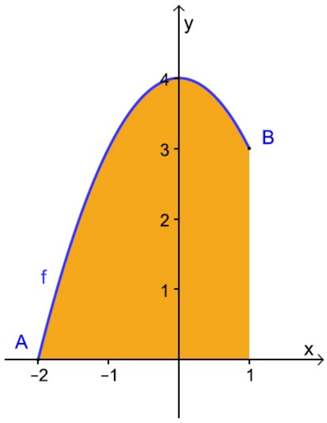
O próprio Arquimedes sabia ter sido Hipócrates de Chios o primeiro a calcular a área de uma Figura curvilínea: as já citadas lúnulas.

Noutra obra, a medida do circulo ou a quadratura do círculo, Arquimedes dar aproximadamente a resposta para o grande enigma matemático da antiguidade, aproveitando a sugestão feita por Antífon, este foi, como se viu, o primeiro a sugerir que se si fosse inscrevendo polígonos regulares num círculo e depois dobrando o número de lados e calculando suas respectivas áreas, num certo momento do processo, atingir-se-ia um polígono com área igual a área do círculo, o círculo ficaria então exaurido, por assim dizer. Porém problemas como a falta de clareza sobre o infinito e o contínuo adiaria o fim e a consumação dessas idéias por muitos séculos.

Exemplo 4.1. Considere o segmento parabolico delimitado pela parabola $f(x) = -x^2+4$ e pela reta $g(x) = x + 2$. Os pontos de intersecao dessas curvas sao $A = (-2, 0)$ e $B = (1, 3)$.

Solução:

Figura 24: Integral definida da funcao f no intervalo $[-2, 0]$.



Fonte: Da referência [12].

Da mesma forma que nas somas de Riemann, para este caso faremos uma diferenca de areas de regioes: a area sob o arco da parabola $y = f(x)$ e a area sob a reta $y = g(x)$.

A Figura 24 ilustra a area da regiao A_p sob a curva $y = f(x)$ calculada pela integral da funcao f no intervalo $[-2, 1]$. Note que a funcao f e continua em todo o intervalo $[-2, 1]$, logo podemos usar o TFC.

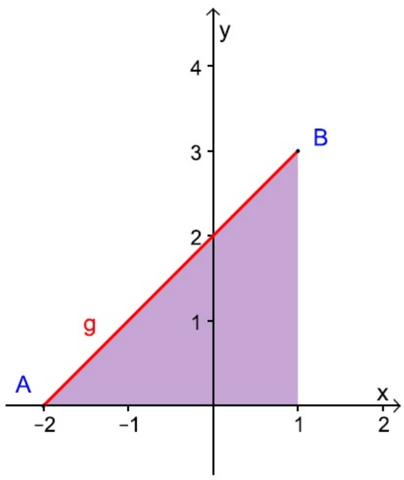
$$\begin{aligned} A_p &= \int_{-2}^{1} (-x^2 + 4)\ dx \\ &= -\frac{x^3}{3} + 4x\Big|_{-2}^{1} = \left[-\frac{(1)^3}{3} + 4 \cdot 1\right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2)\right] = 9 \end{aligned}$$

Portanto,

$$A_p = \int_{-2}^{1} (-x^2 + 4)\ dx = 9$$

Agora faremos o calculo para a regiao sob a reta AB, isto e, o calculo da area A_r abaixo da funcao g. A Figura 25 ilustra essa area.

Figura 25: Integral definida da funcao g no intervalo $[-2, 0]$.



Fonte: Da referência [12].

Como a funcao g e continua em todo o intervalo $[-2, 1]$ temos

$$\begin{aligned} A_r &= \int_{-2}^{1} (x + 2)\ dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_{-2}^{1} = \left[-\frac{(1)^2}{2} + 2 \cdot 1\right] - \left[-\frac{(-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2)\right] = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$A_r = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2)\ dx = \frac{9}{2}$$

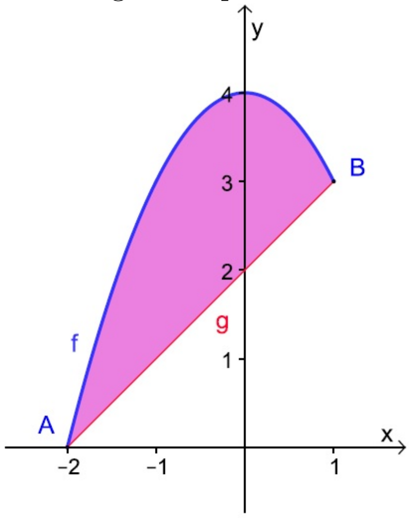
Deste modo, podemos agora calcular a area A_S por meio dos valores obtidos na integral da funcao f (4.4) e da funcao g (4.4).

Assim,

$$A_S = A_p - A_r = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

A Figura 26 mostra exatamente a área do segmento parabólico.

Figura 26: Área do segmento parabólico do Exemplo 4.1.



Fonte: Da referência [12].

4.2 Área de um Segmento Parabólico

Alguns resultados apresentados nessa seção seguem da referência [15].

A determinação da área de uma parábola é uma tarefa complexa se deixarmos de lado as ferramentas proporcionadas pelo cálculo diferencial e integral. Uma vez que Arquimedes era um excelente geômetra e que a área dos triângulos já lhe era familiar, ele relaciona a área de uma parábola com a área de dois triângulos específicos utilizando para isto a lei da alavanca.

Vamos ilustrar seu procedimento. Inicialmente apresentamos as figuras abaixo:

Faça uma ÚNICA figura ou separe-as

Figura 27: parábola cuja área pretende-se obter.

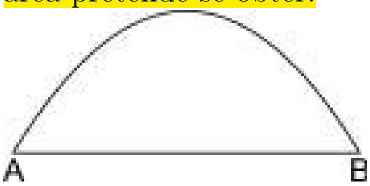


Figura 28: segmento CD perpendicular a AB, onde $AC = CB$.

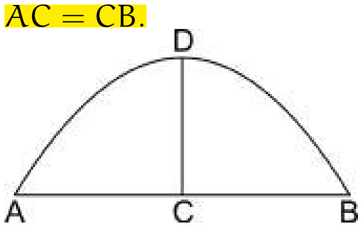
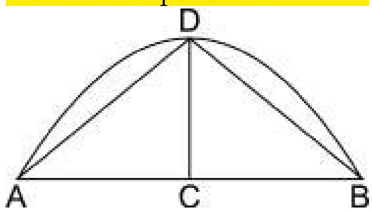


Figura 29: triângulo ADB inscrito na parábola ADB.



Fonte: Da referência [15].

Figura 30: parábola ADB circunscrita ao triângulo ABE. Temos EB tangente à parábola em B, sendo AE paralelo a CD.

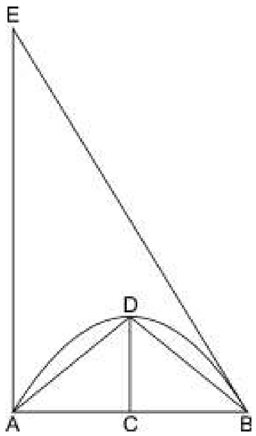
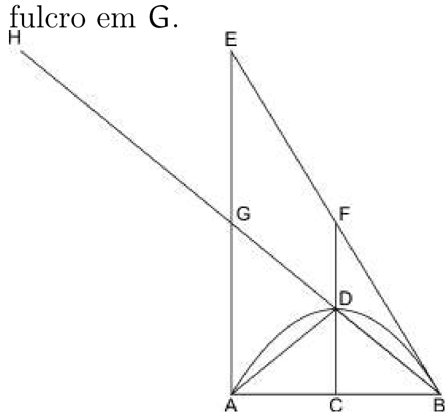


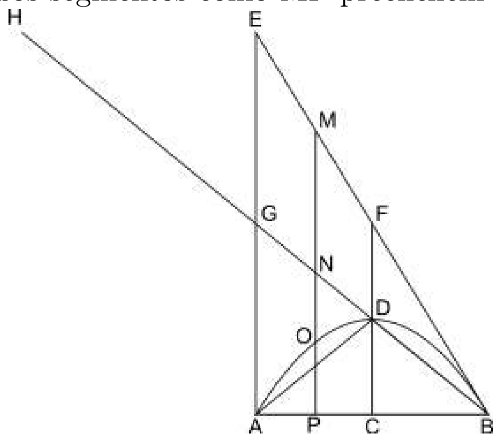
Figura 31: Temos $EG = GA$, $CD = DF$ e $BG = HG$. O segmento HB corresponderá a uma alavanca com fulcro em G.



Fonte: Da referência [15].

As Figuras 27 até 31 representam a construção da alavanca e dos triângulos AEB e ADB que serão relacionados com a área da parábola. Uma vez construída a Figura 31, Arquimedes traça segmentos de reta paralelos ao segmento AE, delimitados pelo triângulo AEB, como ilustrado na Figura 32. Cada um destes segmentos MP está a uma distância arbitrária AP ao longo do segmento AB.

Figura 32: Diversos segmentos como MP preenchem o triângulo AEB.

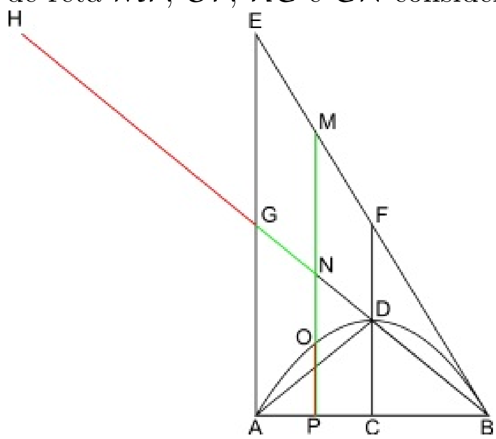


Fonte: Da referência [15].

Arquimedes demonstra matematicamente a seguinte proposição para todo segmento MP ao longo da base AB:

$$\frac{\mathsf{MP}}{\mathsf{OP}} = \frac{\mathsf{HG}}{\mathsf{GN}}$$

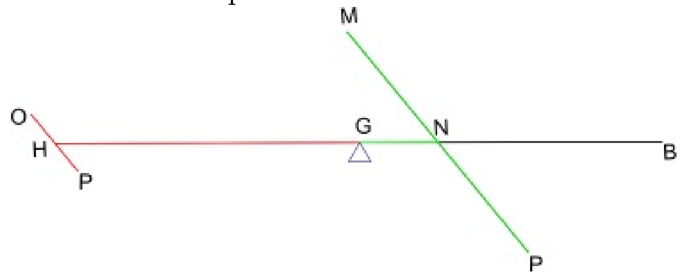
Figura 33: Segmentos de reta MP, OP, HG e GN considerados por Arquimedes.



Fonte: Da referência [15].

Arquimedes supõe então segmentos MP e OP com pesos proporcionais a seus comprimentos. Supõe ainda uma alavanca BH com seu fulcro colocado no seu ponto médio G. A equação anterior é equivalente à lei da alavanca. Ou seja, se deslocarmos o segmento PO e o prendermos pelo seu ponto médio na extremidade H da alavanca, enquanto que o segmento MP for mantido onde está ficando preso por seu ponto médio no ponto N da alavanca, teremos uma alavanca em equilíbrio como mostra a Figura 34.

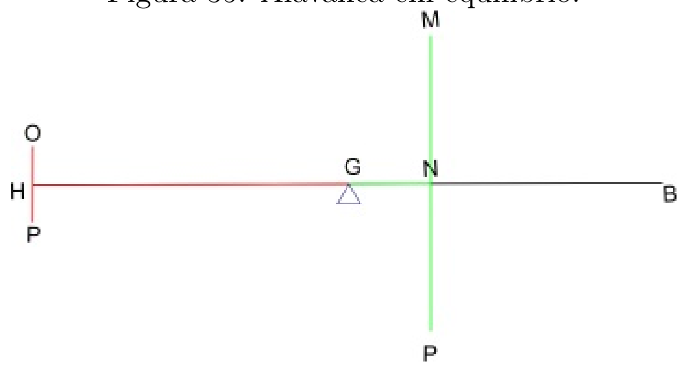
Figura 34: Alavanca HB em equilíbrio ao redor de seu fulcro localizado em G.



Fonte: Da referência [15].

Uma vez que os pontos N e H corresponderiam aos centros de gravidade das barras MP e OP, respectivamente, poderíamos orientá-las verticalmente que o sistema continuaria em equilíbrio, como mostra a Figura 35:

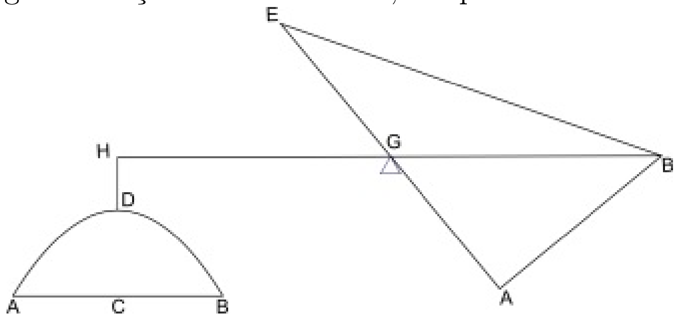
Figura 35: Alavanca em equilíbrio.



Fonte: Da referência [15].

Esta relação de equilíbrio vale para todos os segmentos de reta MP e OP. Arquimedes desloca então todos os segmentos de reta OP entre AB para a extremidade H da alavanca. Com isto ele reconstitui a área parabólica ADB, estando ela dependurada em H. Ao considerar todos os segmentos MP entre AB, com cada um deles preso na posição em que se encontra, Arquimedes reconstitui o triângulo AEB. Como a alavanca estava em equilíbrio para cada segmento MP e OP entre AB, ela continuará em equilíbrio ao considerar todos os segmentos entre A e B. Com isto teremos a situação de equilíbrio mostrada na Figura 36. Ou seja, Arquimedes demonstra que se todo o triângulo fosse preenchido com segmentos de reta, o braço GB da alavanca suspenderia o triângulo AEB enquanto que o ponto H suspenderia a parábola, com a alavanca permanecendo em equilíbrio ao redor de seu fulcro G.

Figura 36: Após "varrer" o triângulo AEB, teremos o equilíbrio entre o triângulo AEB dependurado ao longo do braço GB da alavanca, e a parábola ADB dependurada em H.

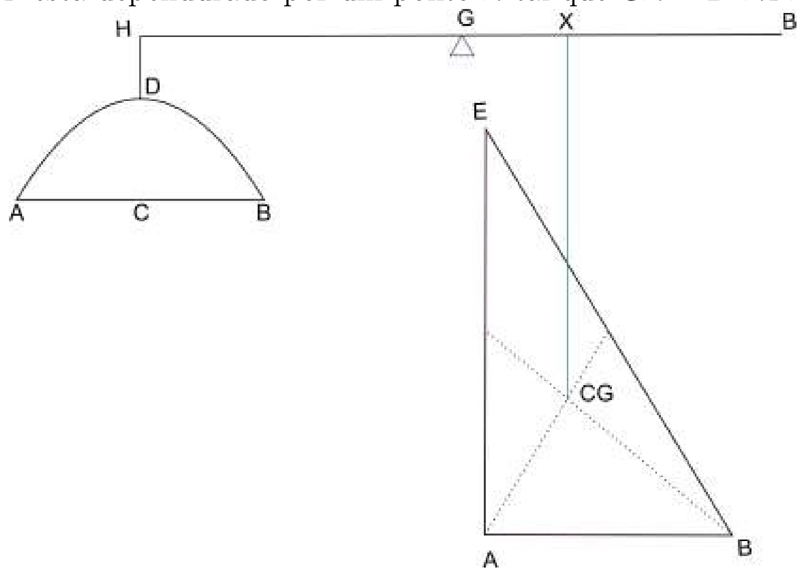


Fonte: Da referência [15].

Aqui vemos como Arquimedes utilizando-se do método mecânico reconstitui as áreas do triângulo e do segmento parabólico valendo–se da exaustão o que hoje nós fazemos com a ajuda da integral definida. Esta versão de Arquimedes para o cálculo se desvia do conceito de limite que só veio a ser estabelecido em bases formais no século XIX.

E finalmente, ao suspender o triângulo AEB por um fio pelo seu centro de gravidade, a alavanca permanecerá em equilíbrio. Em seu trabalho Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas, Arquimedes havia mostrado que o centro de gravidade de todo triângulo é ponto de encontro das medianas. Cada mediana é a reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. Seja V um dos vértices de um triângulo e M o ponto médio do lado oposto. O centro de gravidade CG deste triângulo é um ponto ao longo de VM tal que o segmento ligando V a CG é o dobro do segmento ligando o CG ao ponto médio M, ou seja, $VCG = 2 \cdot CGM$. No caso da Figura 36 podemos considerar B como sendo o vértice do triângulo ABE e G como sendo o ponto médio do lado oposto AE. O centro de gravidade será um ponto X ao longo de AG tal que $BX = 2 \cdot XG$. Com isto temos então a situação de equilíbrio mostrada na Figura 37:

Figura 37: Alavanca em equilíbrio com a parábola ADB dependurada em$\mathsf{H}$, enquanto que o triângulo AEB está dependurado por um ponto X tal que $\mathsf{GX} = 2 \cdot \mathsf{XB}$.



Fonte: Da referência [15].

Na Figura 37 temos a parábola ADB dependurada em H equilibrando o triângulo AEB colocado em X. O ponto X divide o segmento BG tal que:

$$\frac{\mathsf{GX}}{\mathsf{XB}} = \frac{1}{2}$$

Ou seja,

$$\frac{\mathsf{GH}}{\mathsf{GX}} = \frac{3}{1}$$

Considerando então os pesos da parábola e do triângulo como sendo proporcionais às suas áreas, a lei da alavanca e a relação anterior levam à seguinte relação:

$$\frac{\text{Área do segmento parabólico ADB}}{\text{Área do triângulo AEB}} = \frac{1}{3}.$$

Como o triângulo AEB tem o quádruplo da altura do triângulo ADB, sendo que ambos possuem a mesma base AB, temos que:

$$\frac{\text{Área do triângulo AEB}}{\text{Área do triângulo ADB}} = \frac{4}{1}.$$

Combinando as duas relações anteriores obtemos então o primeiro teorema de Arquimedes, a saber:

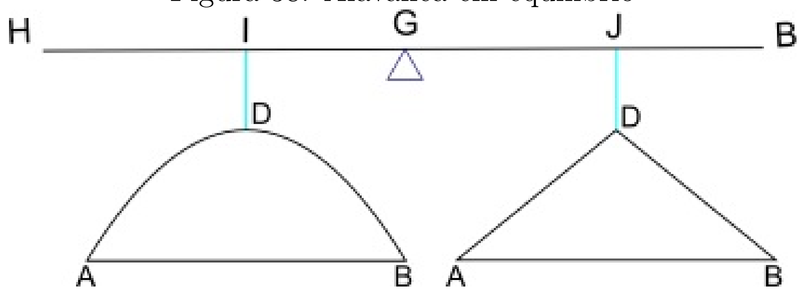
$$\frac{\text{Área do segmento parabólico ADB}}{\text{Área do triângulo inscrito ADB}} = \frac{4}{3}.$$

Esta relação está representada na Figura 38 em termos de uma alavanca em equilíbrio.

Temos a parábola ADB dependura em um ponto I e o triângulo ADB dependurado em outro ponto J. A alavanca BH fica em equilíbrio ao redor do fulcro G quando vale a seguinte relação:

$$\frac{\text{Área do segmento parabólico ADB}}{\text{Área do triângulo inscrito ADB}} = \frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{IG}} = \frac{4}{3}.$$

Figura 38: Alavanca em equilíbrio



Fonte: Da referência [15].

Esta última proporção corresponde ao primeiro teorema da obra O Método de Arquimedes. Um aspecto muito importante deste teorema é que Arquimedes está obtendo a área de um figura curva como uma parábola em termos da área de um triângulo conhecido. Como é sempre possível encontrar um quadrado de área equivalente a um certo triângulo, o que Arquimedes está obtendo é a quadratura de uma figura curva como uma parábola em termos de uma área conhecida.

4.3 Volume de uma Esfera

Algumas resultados apresentados nessa seção seguem da referência [15].

De forma semelhante ao método utilizado para determinar a área da parábola, Arquimedes utiliza figuras geométricas como cones e cilindros para determinar o volume da esfera. Para isto subdivide estas figuras volumétricas em vários planos paralelos. Considera que a soma destes infinitos planos corresponderá aos volumes das figuras tridimensionais.

Apresentamos na Figura 39 os elementos desta proposição de Arquimedes.

As figuras 39 até 42 representam a construção das figuras que serão utilizados para determinar o volume da esfera. O plano MN da Figura 42 é ortogonal ao segmento HAC e está a uma distância AS arbitrária a partir do ponto A. Ele corta o cone AEF em um círculo QR de raio SR, corta a esfera ABCD em um círculo OP de raio SP, corta o cilindro LGFE em um círculo de raio SN.

Figura 39: Esfera ABCDE de raio r.

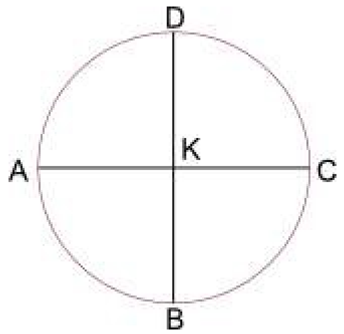


Figura 40: Temos dois cones ABD e AEF com vértices em A. A altura do primeiro cone é r, enquanto que a altura do segundo cone é 2r. A base do primeiro cone é um círculo de raio r, enquanto que a base do segundo cone é um círculo de raio 2r.

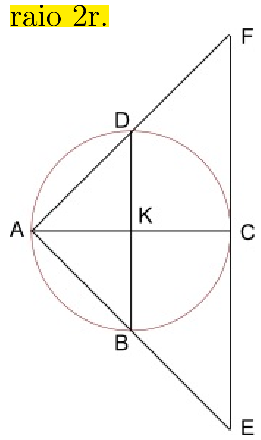
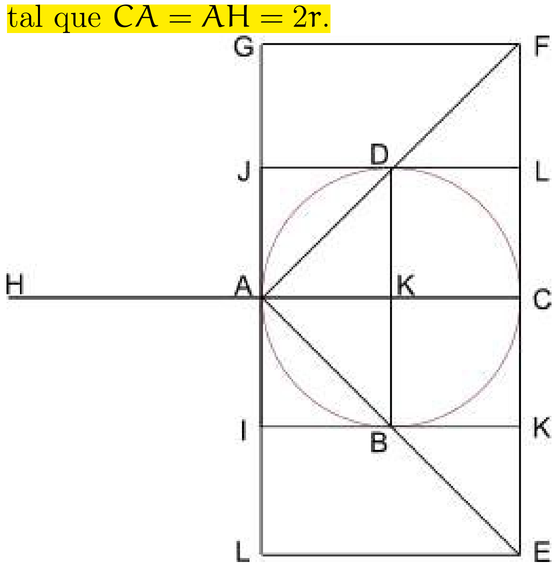
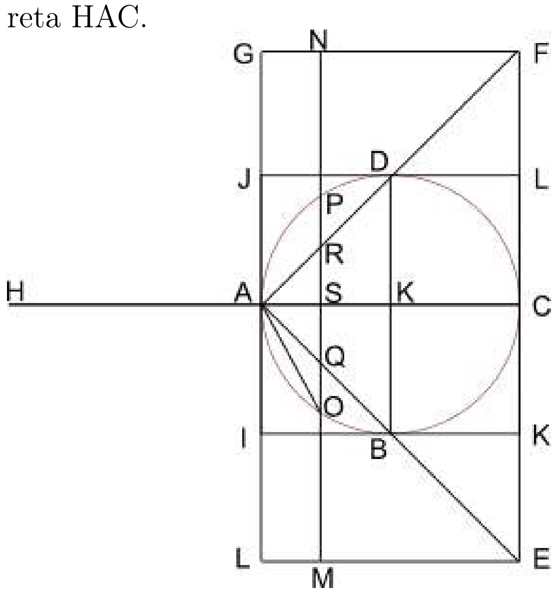


Figura 41: Retângulos IJKL e LGFE geradores dos cilindros com alturas iguais a $2r$ e bases como círculos centrados em A de raios r e $2r$, respectivamente. Marca-se H ao longo do prolongamento de CA tal que $CA = AH = 2r$.



idem

Figura 42: O plano MN é ortogonal à reta HAC.



Fonte: Da referência [15].

A representação tridimensional desta situação é representada na Figura 43:

Em nossa notação vem que Arquimedes inicialmente demonstra matematicamente que

$$\frac{MN^2}{OP^2 + QR^2} = \frac{HA}{AS}.$$

Figura 43: Representação tridimensional das figuras desenhadas.

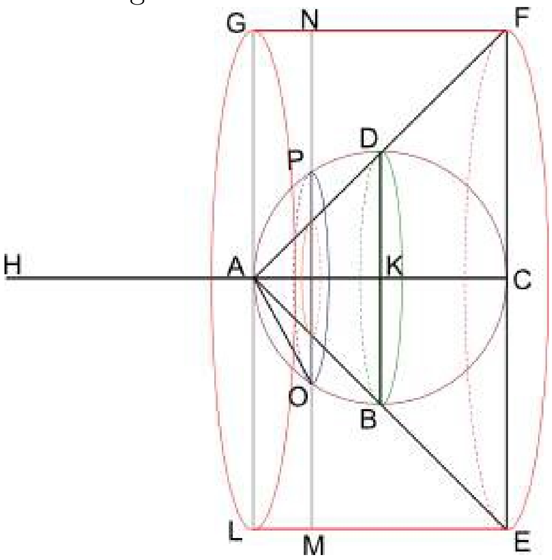
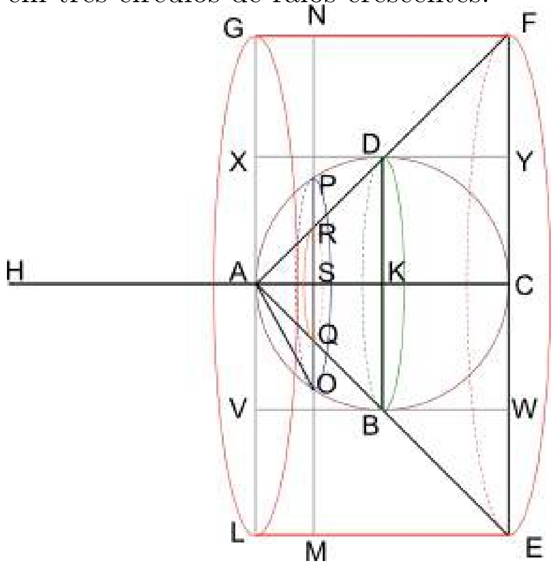


Figura 44: O plano ortogonal ao segmento HAAC e passando por MN vai cortar o cone, a esfera e o grande cilindro em três círculos de raios crescentes.



Fonte: Da referência [15].

Ele então considera os planos como tendo pesos proporcionais às suas áreas. Esta relação pode então ser escrita como:

$$\frac{(\text{círculo de raio MN})^2}{(\text{círculo de raio OP})^2 + (\text{círculo de raio QR})^2} = \frac{\mathsf{HA}}{\mathsf{AS}}.$$

O segmento HC será considerado como sendo a alavanca para esta situação, com seu fulcro no ponto médio A.

A última equação é então equivalente à lei da alavanca com o círculo de raio MN ficando em seu lugar e os dois outros círculos transportados para o ponto H. Ou seja, a alavanca vai ficar em equilíbrio ao redor do fulcro A quando os círculos de raios OP e QR estão dependurados em H, com o círculo de raio MN permanecendo preso à alavanca por seu centro colocado no ponto S. Ficamos então com a situação da Figuras 45 e 46.

Figura 45: Representação tridimensional da alavanca em equilíbrio.

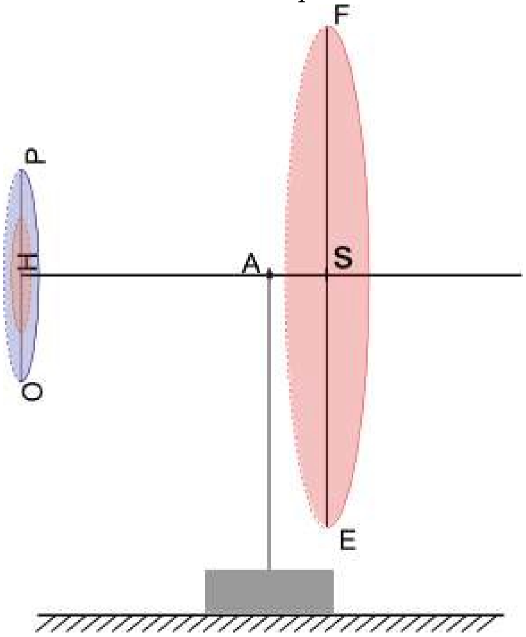
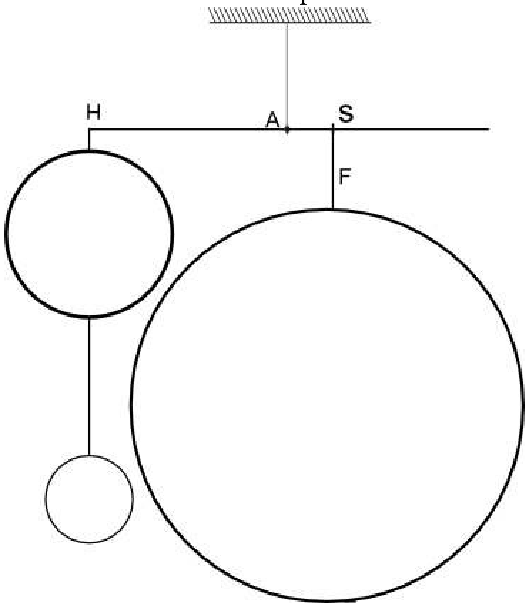


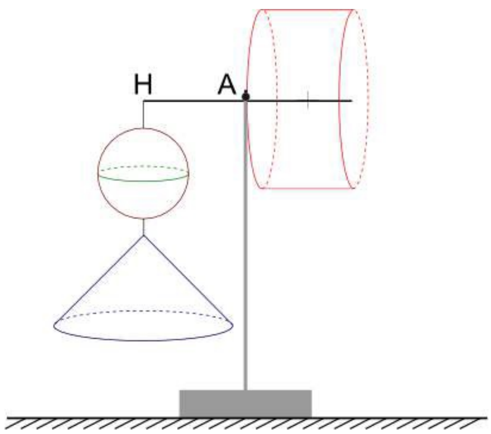
Figura 46: Representação bidimensional da alavanca em equilíbrio.



Fonte: Da referência [15].

Esta relação de equilíbrio vale para todos os círculos cortados por planos MN que estão a distâncias arbitrárias AS do ponto A. Arquimedes faz então uma varredura com os planos MN indo de A até C. Ou seja, ele desloca então todos os círculos de raios OP e QR para o ponto H, mantendo os círculos de raio MN em seus lugares. Com isto ele reconstrói a esfera ABCD dependurada em H, juntamente com o cone AEF dependurado em H, enquanto que o cilindro LGFE fica colocado ao longo do braço AC da alavanca. Nesta situação a alavanca permanece em equilíbrio ao redor do fulcro A, Figura 47.

Figura 47: Alavanca em equilíbrio ao redor do fulcro A com a esfera ABCD e o cone AEF dependurados em H, enquanto que o cilindro LGFE está dependurado ao redor do braço AKC.

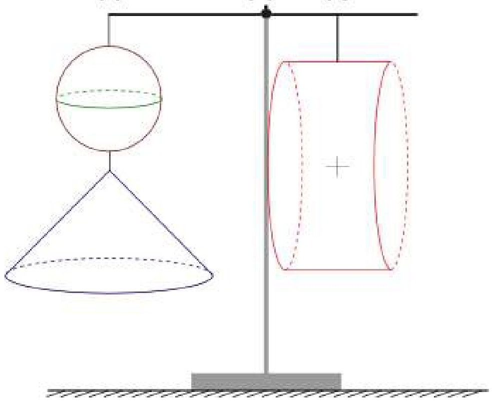


Fonte: Da referência [15].

Mais uma vez ao fazer a reconstrução das formas, Arquimedes demonstra a sua versão para o cálculo com tamanha habilidade que em nada se distancia da sutileza das resoluções modernas.

A alavanca vai permanecer em equilíbrio ao dependurar o cilindro LGFE por seu centro de gravidade que está no ponto K, que é o ponto médio do segmento AC. Com isto obtemos a situação de equilíbrio da Figura 48.

Figura 48: Alavanca em equilíbrio.



Fonte: Da referência [15].

Pela lei da alavanca temos então:

$$\frac{\text{cilindro}_{\mathsf{LGFE}}}{\text{esfera}_{\mathsf{ABCD}} + \text{cone}_{\mathsf{AEF}}} = \frac{\mathsf{HA}}{\mathsf{AK}} = \frac{2}{1}.$$

Mas o volume de todo cilindro é equivalente ao triplo do volume do cone inscrito no cilindro:

$$\text{cilindro}_{\mathsf{LGFE}} = 3 \cdot \text{cone}_{\mathsf{AEF}}.$$

Combinando estas duas equações obtém-se então:

$$2 \cdot \text{esfera}_{\mathsf{ABCD}} = \text{cone}_{\mathsf{AEF}}.$$

Como o cone AEF tem o dobro da altura do cone ABD e sua base tem o dobro do diâmetro da base do cone ABD vem que:

$$\text{cone}_{\mathsf{AEF}} = 8 \cdot \text{cone}_{\mathsf{ABD}}.$$

Combinando estas duas equações obtém-se finalmente o resultado anunciado por Arquimedes, a saber:

$$\text{esfera}_{\mathsf{ABCD}} = 4 \cdot \text{cone}_{\mathsf{ABD}}.$$

Este resultado pode ser colocado de uma forma mais conhecida para nós observando que o volume de um cone é um terço de sua base vezes sua altura. Como a base do cone ABD tem o mesmo raio r que a esfera, sua base tem como área πr^2. Com isto obtemos finalmente:

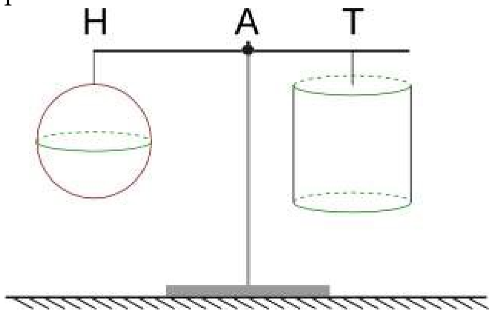
$$\text{volume de uma esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Outra maneira de expressar o equilíbrio é em termos do cilindro IJLK circunscrito à esfera ABCD. Este cilindro é o dobro do cilindro IJDB. Já o cilindro IJDB vale o triplo do cone ABD. Logo o cone ABD vale um sexto do cilindro IJDB. Como a esfera ABCD vale o quádruplo do cone ABD, obtemos que

$$\frac{\text{esfera}_{ABCD}}{\text{cilindro}_{IJDF}} = \frac{2}{3}.$$

Esta relação configura uma nova situação de equilíbrio de uma alavanca ao redor de seu fulcro A quando o braço da esfera vale 3 unidades de comprimento e o braço do cilindro circunscrito a esta esfera vale 2 unidades de comprimento. Esta situação de equilíbrio é mostrada na Figura 49com a esfera dependurada em H e o cilindro circunscrito dependurado em T.

Figura 49: Alavanca em equilíbrio com uma esfera e o cilindro circunscrito a esta esfera.



Fonte: Da referência [15].

Arquimedes considerava estes teoremas os mais importantes que obteve em sua vida. Por este motivo solicitou que em seu túmulo fosse colocada uma figura da esfera com o cilindro circunscrito. Embaixo desta figura foi colocado o teorema relacionando os volumes destes dois objetos.

Considerações Finais

Teu trabalho é muito bom, dê uma melhor finalização. Mostre o valor. Destaque a importância dele no ensino básico para professores e alunos. Será um fornte de consulta

Vimos neste trabalho que as ideias desenvolvidas a partir do século XVII, pelas mão de Isaac Newton e Leibniz, já tinham sido abordadas na antiguidade pelo grande gênio grego Arquimedes de Siracusa. Noutro formato, devido à matemática da época ser ainda muito rudimentar se comparada com a de hoje, ele desenvolveu sua própria versão do Método da Exaustão, aplicando propriedades extritamente geométricas que seus predecessores haviam desenvolvido. No entanto, Arquimedes foi muito além de seu tempo, criando de forma muito engenhosa uma maneira própria de abordar problemas geométricos vendo as suas figuras ideais como se fossem materiais, e as tratando assim fisicamente. O Princípio da alavanca, descoberto por ele, foi largamente aplicado para equilibrar figuras geométricas. Numa carta a Eratóstenes Arquimedes descreve a importância desse método. Esse trabalho conhecido como O Método ficou perdido, entretanto, em 1906 o filólogo dinamarquês Johan Ludvig Heiberg (1854-1928) reconheceu que no chamado palimpsesto de Arquimedes, texto antigo escrito sobre outro anterior em pergaminho, formando um códice, que originariamente foi uma cópia em grego de diversas obras suas. Posteriormente foi apagado rudimentarmente e usado para escrever salmos e orações de um convento.

É importante destacar que Arquimedes usava O método dos teoremas mecânicos para chegar a resultados matemáticos, como a fórmula do volume da esfera, mas os provava rigorosamente usando O método da exaustão. Dessa maneira, a versão do Cálculo de Arquimedes não deixou nada a desejar em relação ao rigor matemático dos dias atuais. Seus resultados são perenes.

Assim, vemos que esse tema extremamente rico pode muito bem ser abordado no ensino básico, visto que envolve não apenas operações matemáticas, mais ideias de cunho filosófico, e a história do desenvolvimento da matemática.

De nossa parte, aprendemos muito mais sobre a matemática dos antigos, e esperamos que nosso trabalho sirva como apoio a quem procure se enriquecer dessas ideias geniais. Não foi apenas na matemática que Arquimedes se fez presente, mas em praticamente toda a ciência. Não é por acaso que Arquimedes foi o único homem a quem se comparou o grande Newton.

Referências

Retire essa numeração!!!

[1] AABOE, A. – *Episódios da História Antiga da Matemática*. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 1984.

[2] GIUSTI, Enrico – *II calcolo infinitesimale tra Leibniz e Newton*. CONFERENZE DI FISICA E DI MATEMATICA. UNIVERS. TORINO. Vol. 46o,1 (1988).

[3] ZUMPANO, Antônio – *Os limites da matemática clássica*. Revista Ciência Hoje, Rio de Janeiro, v. 29, p.77-79, 2001.

[4] Bongiovanni, V. – *As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido: a teoria das proporções e o método da exaustão. Revista UNIÓN* – revista iberoamericana de educacion matematica, no 2, p. 91-110, disponível em <`http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/historia/textos/`>, 2005 . Acesso em 02/07/2014.

[5] BOYER, C.B. – *História da Matemática*. Ed. da Universidade de São Paulo, São Paulo- 1974 .

[6] BROLEZZI, A.C. – *A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática*. Tese de Doutorado. São Paulo, USP-1996.

[7] CENTURIÓN, Marília. – *Números e Operações*. Editora Scipione. São Paulo, 1994.

[8] CONTEÚDO, aberto – *In: Internet Encyclopedia of Philosophy: A perr-Reviewed Academic Resource*. Disponível em: <`https://www.iep.utm.edu/leib-ove/`> Acesso em: 27 de julho de 2018.

[9] EVES, Howard – *Introdução à história da matemática*; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

[10] STEWART, Ian – *História de las matemáticas en los últimos 10 000 años*. Tradução de Javier Garcia Sanz. 1 ed. Barcelona: Crítica, 2008.

[11] ROQUE, Tatiana – *História da matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[12] REIS, Náthaly Beatriz – *Quadratura da parábola: de arquimedes à integral definida*, Universidade Do Estado De Santa Catarina - UDESC – Joinville, 2015.

[13] OLIVEIRO, Mário – *História da matemática através de problemas – Mário Olivero*. Rio de Janeiro: UFF. CEP – EB, 2007. 160p. (Curso de Instrumentação para o Ensino de Matemática).

[14] MELO, Glauco; Silva, Sebastião Alves – *Metacálculo: a metafísica do cálculo*. Monografia. Imperatriz, UEMA-2005.

[15] SECO, Vicente Lima Ventura, ASSIS, André Koch Torres de – *Estudos sobre "O Método" de Arquimedes através da Construção de Balanças e Alavancas*. Universidade Estadual de Campinas Instituto de Física Gleb Wataghin. Relatório Final de F590 – Iniciação Científica I Primeiro semestre de 2010.

Teu trabalho tem 12,3% de similaridade com este trabalho aqui, então deve destacar oq ue é dele e citar que e dele. O que vc escreveu a partir dele, tu deve citar indiretamente. Mas se usou questões, resoluções , figuras , etc, deve citar diretamente. Tome cuidado pois os autores podem reclamar. Descaracterize por favor...