Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Máximos e Mínimos: Uma Abordagem para o Ensino Médio

Marcos Antônio da Costa

Goiânia

2013

Marcos Antônio da Costa

Máximos e Mínimos: Uma Abordagem para o Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Maxwell Lizete da Silva

Goiânia

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

Costa, Marcos Antônio da.
C837m Máximos e mínimos [manuscrito] : uma abordagem para o ensino médio / Marcos Antônio da Costa. - 2013.
53 f.

Orientador: Prof. Dr. Maxwell Lizete da Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Bibliografia.

1. Máximos e mínimos – Funções, teoria das. 2. Problema isoperimétrico. I. Título.

CDU: 517.272

Marcos Antônio da Costa graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás no ano de 2001; Conclui o Curso de Pós-Graduação *Lato Sensu* em Matemática e Estatística pela Universidade Federal de Lavras em 2004 e o Curso de Pós-Graduação *Lato Sensu* em Métodos e Técnicas de Ensino pela Universidade Salgado de Oliveira - UNIVERSO, em 2006. Atualmente é professor da Educação Básica na Rede Municipal de Educação de Goiânia e na Rede Estadual de Educação de Goiás.

Dedico este trabalho aos meus pais José e Dejanir, à minha esposa Pollyana Ribeiro e à amiga Juliana Linhares.

Agradecimentos

Ao Professor Dr. Maxwell Lizete da Silva, pela orientação precisa e confiante. Auxiliou e orientou, com sua experiência e conhecimento, para que eu pudesse atingir os meus objetivos com amadurecimento e auto-confiança.

A todos os colegas da primeira turma do PROFMAT Goiânia.

Ao colega Rogério da Silva Cavalcante, pelo auxílio durante o Curso.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo suporte financeiro durante o Curso de Mestrado.

Resumo

Estudamos problemas envolvendo valores extremos, com foco nos estudantes do Ensino Médio. Apresentamos de forma simples e resumida, algumas ideias e teorias para a solução de tais problemas. Dentre os quais citamos o Problema de Dido e o de Heron. O principal referencial teórico para confecção deste trabalho foi o livro de *Tikhomirov* intitulado *Stories About Maxima and Minima.* Baseados em tal livro, aplicamos métodos e teorias elementares para solucionarmos problemas clássicos de máximos e mínimos.

Palavras-chave

Máximos e Mínimos, Problema Isoperimétrico, Médias, Otimização, Resolução de Problemas.

Abstract

We deal with extremum values problems. Our focus is the high school students. We present simple ideas and techniques on solving classical optimization problems. Among other problems we cite the classical isoperimetric ploblem and the Heron′s problem. We are based on the book *Stories About Maxima and Minima* by *Tikhomirov* which lead with these classical problems using only elementary mathematical subjects.

Keywords

Extremum value problems, Isoperimetric problem, Arithmetic and geometric Means.

Notações

Neste trabalho serão utilizadas as seguintes notações:

- O segmento de reta com extremidades em A e B: segmento AB;
- A reta determinada pelos pontos A e B: reta $\overleftrightarrow{AB}$;
- O comprimento (medida) do segmento de reta com extremidades em A e B: $\overline{AB}$;
- A semirreta com origem em A e que passa por B: $\overrightarrow{AB}$;
- O ângulo entre os seguimentos AB e BC: $A\hat{B}C$;
- O ângulo que está no vértice A: $\hat{A}$;
- O triângulo determinado pelos vértices A, B e C: $\triangle ABC$ ou triângulo ABC.

Sumário

Introdução

Aprende-se sobre máximos e mínimos na Educação Básica. Ainda no Ensino Fundamental, ao estudar o conjunto dos números naturais, aparecem mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum. Um pouco mais tarde, no Ensino Médio, aprende-se a encontrar máximos e mínimos de funções quadráticas, áreas máximas, perímetros máximos, dentre outras situações. Porém, na Educação Básica tais problemas são apresentados com uma abordagem ou com uma linguagem diferente das empregadas num curso superior.

Problemas de máximos e mínimos estão presentes em quase todas as atividades do mundo moderno. Pode-se dizer que apenas uma pequena parcela da população cria ou inventa coisas novas, mas uma grande parcela, trabalha com o objetivo de aperfeiçoar o que já foi inventado e colocar em funcionamento. Por exemplo, Thomas Alva Edison foi o primeiro a construir a primeira lâmpada incandescente comercializável em 1879, utilizando uma haste de carvão (carbono) muito fina. Em 1938 Nikola Tesla criou a lâmpada fluorescente, um tipo de lâmpada que ao contrário das de filamento, possui grande eficiência por emitir mais energia eletromagnética em forma de luz do que calor. Em 2010, Dean Kamen aproveitou o evento TEDMED para apresentar sua mais nova invenção: uma lâmpada de LED (Light Emitting Diode). Em resumo, a primeira lâmpada foi inventada e muitos trabalharam em função da produção e comercialização dessa lâmpada. A partir daí, naturalmente foram surgindo várias indagações, por exemplo: como produzí-la gastando o mínimo possível? como fazê-la de modo a ser mais potente? como comercializá-la tendo o maior lucro possível? É na tentativa de responder a tais perguntas, que se chegou à descoberta da lâmpada fluorescente, depois a LED, e certamente virão outras.

Os dados apresentados acima servem apenas para ilustrar situações onde trabalha-se com máximos e mínimos, talvez sem saber que tais assuntos e teorias estão ali presentes. Em qualquer empresa, grande ou pequena, ouve-se falar em encontrar, por exemplo, receita máxima, reduzir o desperdício, entre outras coisas. Na prática, os problemas de máximos e mínimos são frequentemente complexos, porque envolvem muitas variáveis.

Mostrar-se-á neste trabalho alguns problemas simples, mas que demonstram bem o tema máximos e mínimos.

Considerando que no mundo moderno os máximos e mínimos estão sempre presentes em quase tudo que se faz, as seguintes perguntas são pertinentes: Quando o homem começou a estudar máximos e mínimos? Quais são as teorias usadas na resolução de tais problemas? O porquê de estudar máximos e mínimos? Com o que já foi exposto até aqui, tem-se uma resposta razoável para a última pergunta, porém, as duas primeiras são muito difíceis de serem respondidas. Acredita-se, entretanto, que ao final deste trabalho chegar-se-á a respostas satisfatórias para tais perguntas.

Em muitos problemas é necessário achar o valor mínimo ou o valor máximo, ou seja, o menor ou o maior valor de alguma coisa. Ambas as noções -máximo e mínimo- são provenientes do termo latim extremums. Os problemas que requerem o encontro do valor máximo e mínimo são baseados na teoria dos valores extremos.

No decorrer deste trabalho resolver-se-á alguns problemas bastante antigos e outros mais recentes. Dentre os problemas antigos, há um, cujo possível autor é um famoso matemático da antiguidade Heron de Alexandria, tal problema é conhecido como Problema de Heron. Segundo consta em [12], *acredita-se que o Problema de Heron fora escrito no século I d.C.*. A escolha de tal problema deve-se ao fato de ser bastante conhecido até mesmo na Educação Básica e também por ser útil na demonstração de vários outros problemas.

Tratar-se-á, ainda, sobre o Problema de Dido, que é, aproximadamente, do século IX a. C., o qual é descrito no livro *Eneida* de Publio Virgílio Maronis (70 a.C. - 19 a.C.) e é o mais antigo problema de que há registo. Ele envolve máximos e mínimos e tem sido objeto de muitas generalizações ao longo dos tempos. Atualmente, problemas semelhantes aos de Dido são conhecidos como problemas Isoperimétricos.

Além desses dois problemas já mencionados, serão resolvidos muitos outros. Analisar-se-á problemas simples em um contexto econômico, que são situações que se levantam constantemente nas atividades econômicas. O objetivo é encontrar a maneira mais rápida, curta e barata, ou seja, a mais econômica de colocar em funcionamento algo que já existe. Essa é uma das principais razões para se resolverem problemas sobre máximos e mínimos e, para tanto, deve-se recorrer à Matemática.

O desejo de encontrar métodos e técnicas para resolver problemas de máximos e mínimos fez surgir teorias novas. De acordo com Tikhomirov [12], no século XVIII surgiu uma parte importante dessa teoria chamada *Calculo das Variações*, e muitos métodos que surgiram foram insuficientes para a solução de alguns problemas. Logo, esses métodos conduziram a formulação das divisões básicas da teoria dos valores extremos tais como: Programação Matemática , Convexidade e Teoria da Otimização.

O fato é que, ao longo da História da Matemática, os problemas de valores extremos e a necessidade de encontrarem suas soluções tem despertado o interesse de muitos matemáticos, pode-se citar: Euclides, Arquimedes, Heron, Snell, Tartaglia, Fermant, Kepler, Huygens, Johann Bernoulli, Newton, Leibniz dentre outros.

Acredita-se que o descrito até agora seja suficiente para justificar o interesse de compreender um pouco mais sobre máximos e mínimos.

De agora em diante, nos próximos capítulos apresentaremos alguns conceitos e teorias que serão úteis na resolução de problemas de máximos e mínimos, tais como: Desigualdade Triangular, O Problema Isoperimétrico de Zenodoro, Desigualdade das Médias e Funções Quadráticas.

Ademais, uma parte importante das aplicações do Cálculo Diferencial está relacionada ao problema de encontrar máximos e mínimos de funções (problemas de otimização). Na maioria das vezes, resolver esse tipo de problema consiste em transformá-lo num modelo matemático, onde algumas grandezas são dadas por uma função derivável de uma ou várias variáveis. E, os máximos ou mínimos da função, estão associados às informações que desejamos encontrar sobre o problema.

1 Desigualdade Triangular

O objetivo nesta subseção é demonstrar a desigualdade triangular, que tem origem na Geometria Euclidiana. É uma desigualdade bastante utilizada na resolução de diversos tipos de problemas dentro da Geometria Plana. As idéias apresentadas a seguir são encontradas em [4].

Definição 1.1. *Dados três pontos A, B e C não colineares, à reunião dos segmentos AB, AC e BC, chama-se triângulo ABC ou $\triangle ABC$.*

Antes de fazer a demonstração da desigualdade triangular serão apresentadas duas proposições.

Proposição 1.1. *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior lado está oposto ao maior ângulo.*

Demonstração: Conforme mostra a Figura 1, suponha que $\overline{BC} > \overline{AC}$, logo, é possível tomar um ponto D em BC tal que $\overline{CD} = \overline{CA}$. Como $D \in BC$, pode-se afirmar que D é interno ao ângulo $C\hat{A}B \Longrightarrow C\hat{A}B > C\hat{A}D$.

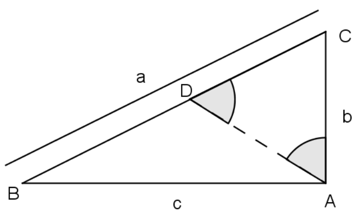

Figura 1:

Por construção o triângulo CAD é isósceles de base AD, então, $C\hat{A}D = C\hat{D}A$. Sendo assim, $C\hat{A}B > C\hat{D}A$. Por outro lado, tem-se que, $C\hat{D}A$ é ângulo externo no triângulo ABD, então, $C\hat{D}A > A\hat{B}D = A\hat{B}C$. Mas, $C\hat{A}B > C\hat{D}A$ e $C\hat{D}A > A\hat{B}C$, então, $C\hat{A}B > A\hat{B}C$. $\square$

Proposição 1.2. *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior ângulo está oposto ao maior lado.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer conforme mostra a Figura 2. Considere $B\hat{A}C > A\hat{B}C$ e mostrar-se-á que $\overline{BC} > \overline{AC}$. Aqui há três possibilidades para $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$:

$$\begin{cases} \overline{BC} & < & \overline{AC} \\ \overline{BC} & = & \overline{AC} \\ \overline{BC} & > & \overline{AC} \end{cases}$$

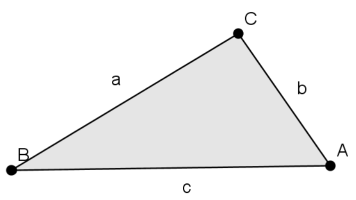

Figura 2:

Se $\overline{BC} < \overline{AC}$, então, pela Proposição 1.1, BÂC < AB̂C, o que contraria a hipótese.

Se $\overline{BC} = \overline{AC}$, então, o triângulo é isósceles, e BÂC = AB̂C, o que contraria a hipótese.

Sendo assim, por exclusão, temos que $\overline{BC} > \overline{AC}$. $\square$

Proposição 1.3. (Desigualdade Triangular): *Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ conforme mostra a Figura 3. Mostra-se-á que $a < b + c$.

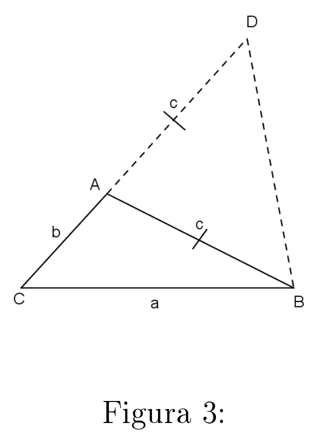

Figura 3:

Considere um ponto D na semirreta $\overrightarrow{CA}$, tal que $\overline{AD} = \overline{AB}$. Então temos, $\overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD} = \overline{CA} + \overline{AB}$

Como o triângulo ABD é isósceles de base BD, tem-se

$$A\hat{D}B = A\hat{B}D \tag{1}$$

Como o ponto A é interno ao ângulo $C\hat{B}D$, logo tem-se

$$C\hat{B}D > A\hat{B}D \tag{2}$$

De (1) e (2), conclui-se que $C\hat{B}D > A\hat{D}B = C\hat{D}B$.

Sendo assim, no triângulo BCD tem-se que $\overline{BC} < \overline{CD}$, pela Proposição 1.2. Logo

$$a = \overline{BC} < \overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD} = \overline{CA} + \overline{AB} = b + c$$

Portanto, $a < b + c$. $\square$

1.1 Aplicações

Problema 1 (Problema de Heron)**.** *Sejam r uma reta no plano e A e B dois pontos pertencentes a um dos semiplanos definidos por r. Encontre um ponto P da reta r que minimiza $\overline{AP} + \overline{PB}$.*

Solução: Se A' é o ponto simétrico de A em relação à reta r, afirma-se que o ponto P desejado é o ponto de interseção de $\overline{A'B}$ com r, conforme Figura 4.

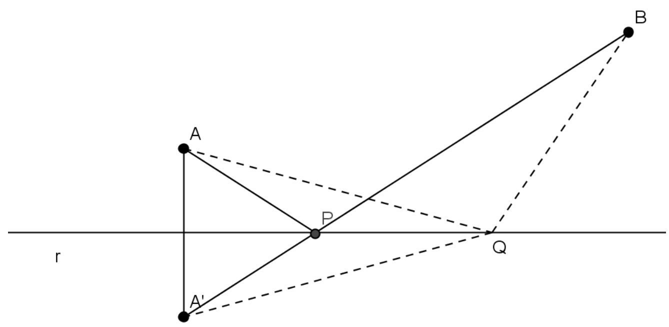

Figura 4:

Para provar este fato, tome Q, um ponto qualquer de r, tal que $Q \neq P$, conforme Figura 4 . O fato de A' ser simétrico de A em relação à reta r, nos garante que $\overline{AP} = \overline{A'P}$ e $\overline{AQ} = \overline{A'Q}$.

Pelas igualdades acima e a Proposição 1.3 sucessivamente tem-se:

$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{A'P} + \overline{PB} = \overline{A'B} < \overline{A'Q} + \overline{BQ} = \overline{AQ} + \overline{QB}$$

Problema 2. *Se D é o ponto da reta r nas condições do Problema de Heron e α e β são as amplitudes dos ângulos definidos pela reta r com AD e DB, respectivamente, então $\alpha = \beta$.*

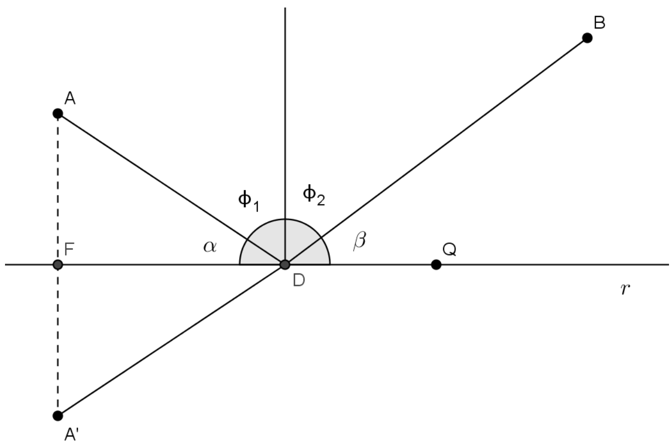

Figura 5: ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão

Solução: Seja F o ponto de interseção de AA' com r, conforme mostra a Figura 5. Note que os ângulos $A\hat{D}F = \alpha$ e $A'\hat{D}F$ são congruentes. Por outro lado os ângulos $Q\hat{D}B = \beta$ e $A'\hat{D}F$ são opostos pelo vértice, isto é, são congruentes. Portanto, $\alpha = \beta$. Como consequência, tem-se $\phi_1 = \phi_2$.

Observação: *Heron pensou na reta r como um espelho e considerou que a menor distância entre A e B coincide com o caminho atravessado por um raio de luz emitido de A e observado em B, deduzindo que quando a luz é refletida num espelho, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão formados por AD e DB com a perpendicular a r em D, conforme Figura 5.*

Problema 3 (PROFMAT - MA13 - UNIDADE - 5). *Dado um quadrilátero convexo $ABCD$, prove que o ponto P do plano para o qual a soma $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ é mínima é o ponto de concurso das diagonais de $ABCD$.*

Solução:

Observe a Figura 6, e veja que:

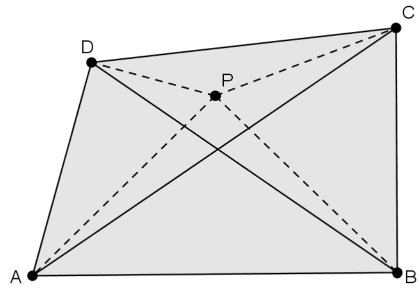

Figura 6:

No triângulo APC, pela Proposição 1.3 temos que $\overline{PA} + \overline{PC} > \overline{AC}$.

Observe que para ter a soma $\overline{PA} + \overline{PC}$ mínima é necessário que $\overline{PA} + \overline{PC} = \overline{AC}$, isto é, $P \in AC$.

No triângulo PBD, pela Proposição 1.3 temos que $\overline{PB} + \overline{PD} > \overline{BD}$.

Observe que para ter a soma $\overline{PB} + \overline{PD}$ mínima é necessário que $\overline{PB} + \overline{PD} = \overline{BD}$, isto é, $P \in \overline{BD}$.

Mas, se $P \in AC$ e $P \in BD$ então P pertence à interseção de AC com BD, ou seja, P é o ponto de concurso das diagonais.

2 Teorema Isoperimétrico Segundo Zenodoro

O problema isoperimétrico foi trabalhado por Zenodoro, pautando-se no estudo de problemas envolvendo polígonos. O objetivo de Zenodoro era encontrar entre todos os polígonos planos de n lados e de comprimento L (perímetro L), aquele que limitasse a maior área. A solução deste problema designa-se por *n-gono máximo de comprimento L*, que aqui será chamado de *n-ágono máximo de comprimento L*.

Observação: Neste trabalho serão apresentadas apenas algumas idéias de Zenodoro, e não uma reprodução literal de sua obra. As provas apresentadas neste tópico são baseadas em [12].

Definição 2.1. *Seja $n \geq 3$ um número natural e $A_1, A_2, \cdots A_{n-1}, A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n$ é um polígono convexo se, para $1 \leq i \leq n$, a reta A_iA_{i+1} não contém nenhum outro ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui, $A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$) .*

Lema 2.1. *Um polígono de n lados é convexo se e só se a amplitude de cada um dos seus ângulos internos é inferior a 180^o.*

Demonstração: Suponha por absurdo que um polígono convexo de n lados tenha um de seus ângulos interno não inferior a 180^o, conforme mostra a Figura 7.

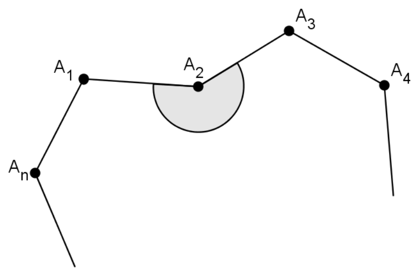

Figura 7:

Se o ângulo tem amplitude igual a 180^o, então o polígono terá $n-1$ lados, o que contraria a hipótese. Se o ângulo tem amplitude maior que 180^o, então o polígono não é convexo (conforme Definição 2.1), o que contraria a hipótese. Portanto um polígono convexo de n lados têm seus ângulos internos menor que 180^o. $\square$

Lema 2.2. *Um n-ágono máximo de comprimento L é convexo.*

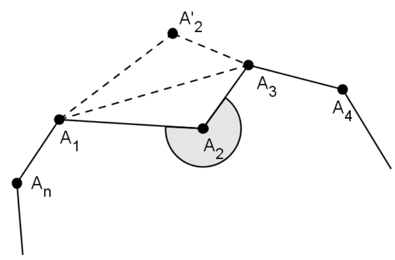

Figura 8:

Demonstração:

Seja $A_1A_2\cdots A_n$ *n-ágono* máximo de comprimento L. Suponha que o *n-ágono* seja não convexo, logo, existe pelo menos um de seus ângulos, cuja amplitude seja superior a 180^o, suponha que seja o interno $A_1\hat{A}_2A_3$ (Figura 8). Considerando A_2' o ponto obtido por reflexão ortogonal do vértice A_2 em relação ao segmento A_1A_3, obtém-se o polígono $A_1A_2'\cdots A_n$ com maior área e de mesmo comprimento L. O que é um absurdo, pois $A_1A_2\cdots A_n$ é um *n-ágono* máximo de comprimento L. $\square$

Lema 2.3. *Um n-ágono máximo de comprimento L deve ter lados iguais.*

Demonstração:

Seja $A_1A_2\cdots A_n$ um *n-ágono* máximo de comprimento L cujos lados não são todos de mesmo comprimento. Considere-se A_1A_2 e A_2A_3 dois lados adjacentes do *n-ágono* com comprimentos diferentes, e l a reta que passa em A_2 e é paralela a A_1A_3. Veja a Figura 9:

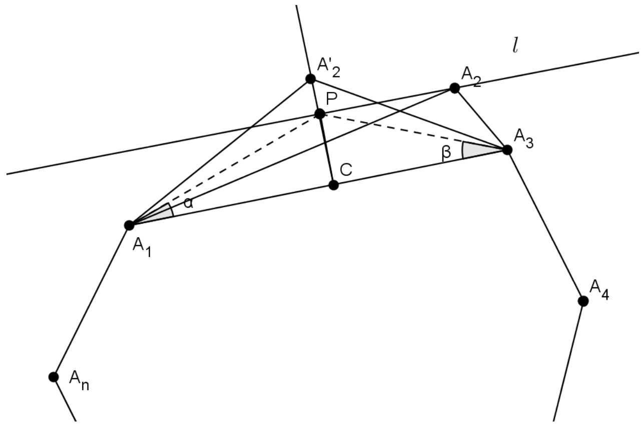

Figura 9:

Seja P o ponto que se obtém aplicando as idéias do **Problema 1**(Problema de Heron), à reta l e aos pontos A_1 e A_3, então,

$$\overline{A_1P} + \overline{PA_3} < \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} \tag{3}$$

Como o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão conforme demonstrado no **Problema 2**, então os ângulos α_1 e β_1, formados respectivamente por A_1P com l e A_3P com l são iguais. Como ângulos alternos internos têm a mesma amplitude, conclui-se que $\alpha = \beta$. Logo, o triângulo A_1PA_3 é isósceles de base A_1A_3. Como os pontos P e A_2 são distintos, pode-se afirmar que os triângulos A_1PA_3 e $A_1A_2A_3$ têm a mesma base e a mesma altura, logo têm a mesma área.

Construa um triângulo isósceles $A_1A_2'A_3$, tal que $\overline{A_1A_2'} + \overline{A_2'A_3} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3}$, conforme Figura 9, com A_2' pertencente à mediatriz do segmento A_1A_3, por (3), tem-se:

$\overline{A_1P}+\overline{PA_3} < \overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3} = \overline{A_1A_2'}+\overline{A_2'A_3}$, pois, A_2' pertence à semirreta oposta a $\overrightarrow{PC}$. Assim, a altura do triângulo $A_1A_2'A_3$ é maior do que a altura do triângulo $A_1A_2A_3$ e, portanto, têm área maior. Conclui-se então que a área do polígono $A_1A_2'\cdots A_n$ é maior do que a área do polígono $A_1A_2\cdots A_n$ e ambos têm complimento L, o que é um absurdo, pois, $A_1A_2\cdots A_n$ é um *n-ágono* máximo de comprimento L. $\square$

Lema 2.4. *Um n-ágono máximo de comprimento L deve ter ângulos iguais.*

Demonstração: Considere um *n-ágono* máximo de comprimento L. Até então nós sabemos que todos seus lados são iguais (Lema 2.3) e temos em mente que ele deve ser convexo. Vamos supor que nem todos os seus ângulos sejam iguais. Se os ângulos não são iguais, então deve existir dois ângulos adjacentes diferentes entre si, vamos dizer α e β. Afirmamos que isso implica na existência de dois ângulos não adjacentes diferentes entre si. Considere os seguintes ângulos $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \cdots$, (não menos que cinco) no polígono. Temos dois casos a considerar:

- Se $\gamma \neq \alpha$ ou $\delta \neq \beta$, então a afirmação está completa desde que α e γ (ou β e δ) sejam não adjacentes.
- Se $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ (já sabemos que $\alpha \neq \beta$), então a nossa sequência de ângulos fica, $\alpha, \beta, \alpha, \beta, \varepsilon, \cdots$ logo a prova está completa desde que o primeiro e o quarto ângulos não sejam adjacentes.

Veremos que a nossa suposição justifica a conclusão: Existem dois triângulos DEF e PQR com interiores disjuntos, conforme Figura 10.

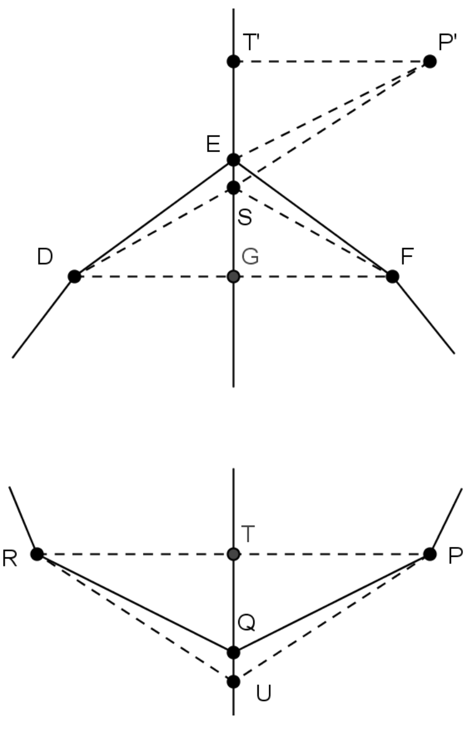

Figura 10:

Veja que escolhemos os triângulos DEF e PQR formados por vértices sucessivos de modo que $\hat{E} \neq \hat{Q}$. Tomando $\hat{E} < \hat{Q}$. Desde que $|DE| = |EF| = |PQ| = |QR|$, a desigualdade dos ângulos $\hat{E}$ e $\hat{F}$ implica que $|DF| < |PR|$. A partir de E e Q traçamos EG perpendiculares a DF e QT perpendicular a PR. A seguir nós estendemos o segmento EG e aplicamos a extensão do triangulo $ET'P'$ congruente ao triangulo QTP (T vai em direção a T', P a P' e Q a E). Agora aplicamos o **Problema de Heron** à reta $\overleftrightarrow{T'G}$ e no pontos P' e F. Seja S a solução do Problema de Heron, no caso, S é um ponto em $\overleftrightarrow{T'G}$ de modo que a soma das distâncias de P' a S e de S a F seja mínima. Pois $P'\hat{E}T'$ (igual metade de $P\hat{Q}R$) seja maior que o ângulo $F\hat{E}G$ (igual a metade de $D\hat{E}F$), o ponto S não coincide com o ponto E (os ângulos $P'\hat{S}T'$ e $F\hat{S}G$ são iguais). Agora traçamos na reta $\overleftrightarrow{QT}$ o segmento $\overline{TU}$ de forma que $\overline{TU} = \overline{T'S}$. Note que nos triângulos DSF e PUR, a soma dos lados laterais desses triângulos é menor que a soma dos lados laterais dos triângulos originais DEF e PQR.

Na verdade temos que: $|DS| + |SF| + |PU| + |UR| = 2(|SF| + |SP'|) < 2(|FE| + |EP'|) = |DE| + |EF| + |PQ| + |QR|$. No caso nossos triângulos são isósceles e S é a solução do problema de Heron. Por outro lado, a área do triangulo $P'ES$ é maior que a área do triangulo ESF, desde que suas respectivas alturas sejam $|P'T'| = \frac{1}{2}|PR|$ e $|FG| = \frac{1}{2}|DF|$, mas temos por hipótese que $|DF| < |PR|$. Sendo assim, a soma das áreas dos triângulos DSF e PUR é maior que soma das áreas dos triângulos originais DEF e PQR. De fato,

$S_{\triangle DSF} + S_{\triangle PUR} = S_{\triangle DEF} - 2S_{\triangle ESF} + S_{\triangle PQR} + 2S_{\triangle P'ES} > S_{\triangle DEF} + S_{\triangle PQR}$. Pois, pelo descrito acima, $-2S_{\triangle ESF} + 2S_{\triangle P'ES} > 0$.

Isto significa que o polígono $DSF \cdots PUR \cdots$ possui um perímetro menor e uma área maior que o polígono original $DEF \cdots PQR \cdots$. Agora podemos tratar tanto o triangulo DSF quanto o triangulo PUR como tratamos o triângulo A_1PA_3, quando provamos o Lema 2.3, o que significa que podemos modificá-lo para obter um polígono isoperimétrico com o polígono $DEF \cdots PQR$, de modo que a área do novo polígono seja maior que a área do polígono $DSF \cdots PUR$, que por sua vez já tem área maior que a área do polígono $DEF \cdots PQR$. Isso contradiz com a afirmação de que $DEF \cdots PQR$ é um *n-ágono* máximo de comprimento L, completando assim a prova do Lema 2 e também a teoria de Zenodoro. □

Teorema 2.1. *Um n-ágono máximo de comprimento L é regular.*

Demonstração: Decorre imediatamente dos lemas 2.3 e 2.4.□

Observação: *O Lema da existência de um n-ágono com maior área entre todos os n-ágonos com o mesmo perímetro ou seja um n-ágono máximo de comprimento L. Mostrou-se que se um n-ágono máximo existe ele deve ser regular. Mas realmente existe um n-ágono máximo? Se não existir podemos afirmar que a solução de problema de Dido se tornará cinzas. Afinal de contas nem toda função adquire um valor máximo. Por exemplo, a função* $f(x) = -(1+x^2)^{-1}$ *não tem máximo para* $x \in \mathbb{R}$. *Os autores da antiguidade não estavam preocupados em provar a existência de suas soluções. Somente por volta de 100 anos atrás que os matemáticos começaram a questionar e analisar seus trabalhos desenvolvendo métodos que demonstrem a existência de um determinado teorema. A seguir será citada sem prova uma afirmação a qual era inquestionável por Zenodoro.*

Lema 2.5. *Existe n-ágono máximo de comprimento L.*

O próximo Lema, o qual não se dará a prova, é consequência imediata das definições de comprimento e área de um conjunto de pontos. O Lema 2.6 e o Teorema 2.2 são encontrados em [2] e [3].

Lema 2.6. *Para toda curva simples fechada retificável de comprimento L' que delimita uma área A' e para* $\varepsilon > 0$, *existe um n-ágono de comprimento L e área A tal que* $\mid L - L' \mid \leq \varepsilon$ *e* $\mid A - A' \mid \leq \varepsilon$.

Teorema 2.2. *A área delimitada por uma curva simples fechada retificável com comprimento L não excede a área delimitada por uma circunferência com o mesmo comprimento L.*

Demonstração: Considere uma curva simples fechada retificável de comprimento L' que delimita uma área A'. Pela desigualdade $L^2 - 4\pi A \geq 0$ e pelo Lema 2.6, conclui-se que para $\varepsilon > 0$ existe um polígono de comprimento L e área A tal que $4\pi A' \leq 4\pi A + 4\pi\varepsilon \leq L^2 + 4\pi\varepsilon \leq (L' + \varepsilon)^2 + 4\pi\varepsilon = L'^2 + \varepsilon(2L' + 4\pi + \varepsilon)$, ou seja, $L'^2 + \varepsilon(2L' + 4\pi + \varepsilon) \geq 4\pi A'$. Como ε é arbitrário tem-se $L'^2 \geq 4\pi A'$. Logo, toda curva fechada satisfaz a desigualdade Isoperimétrica e a igualdade ocorre no caso de ser uma circunferência.□

2.1 Aplicações

Esse problema teve origem na Grécia Antiga, cerca do século IX a. C., mas ficou conhecido numa versão narrada em Eneida de Publio Virgílio Maronis (70 a.C. - 19 a.C.). *O Problema de Dido* surge baseado em uma lenda. Neste trabalho, a lenda pouco importa, mas, antes de enunciar o problema, far-se-á uma síntese da lenda.

Diz a lenda [1]*, segundo a Mitologia Romana, que a Princesa Dido (Elisa) era filha do Rei Mutto (Belus) de Tiro (cidade fenícia) e mulher de Siqueu (Acerbas).*

Depois que seu marido foi morto pelo Príncipe Pigmaleão (irmão de Dido), ela refugiou-se na costa do Mediterrâneo, no Norte da África. Lá chegando, dirigiu-se a Jarbas (Rei dos Gétulos) e barganhou certa quantia com a qual ela poderia comprar terras que poderiam ser envolvidas com um pedaço de couro de boi. Como Jarbas aceitou essa oferta, a esperta Dido cortou o couro em várias tiras, ligou-as pelas extremidades e procedeu a envolver a área de terra desejada tendo o comprimento dessas fitas como perímetro. Escolhendo terra ao longo do mar, ela não precisou usar fitas ao longo da costa marítima. Ao estender o couro em forma de semicírculo, obteve a máxima área de terra possível.

Desse modo, Dido estabeleceu o Estado de Cartago (hoje Tunísia), em 850 a.C., a futura rival de Roma. Conta ainda a lenda que, como Cartago prosperou bastante, Jarbas pediu-a em casamento. Para fugir a esse assédio, a então Rainha Dido preparou uma pira funeral e suicidou-se na frente de seu povo.

Esse incidente levanta a grande questão: Qual a curva que engloba a maior extensão de terra a ser cercado com o couro de um boi? Para responder esta questão, deve-se colocá-la de maneira matematicamente correta.

Problema 4. (Problema de Dido ou Problema Isoperimétrico Clássico) *Dentre todas as curvas planas fechadas (retificáveis) de um dado comprimento L, encontre aquela que engloba a maior área.*

Solução: Considere um *n-ágono* regular qualquer de comprimento L, delimitando uma área A. É fácil ver que $L = 2nR\sin(\frac{\pi}{n})$ e $A = \frac{r}{2}L$, onde R e r são os raios das

[1] http://www.seara.ufc.br/folclore/folclore250.htm

circunferências circunscrita e inscrita respectivamente no *n-ágono*.

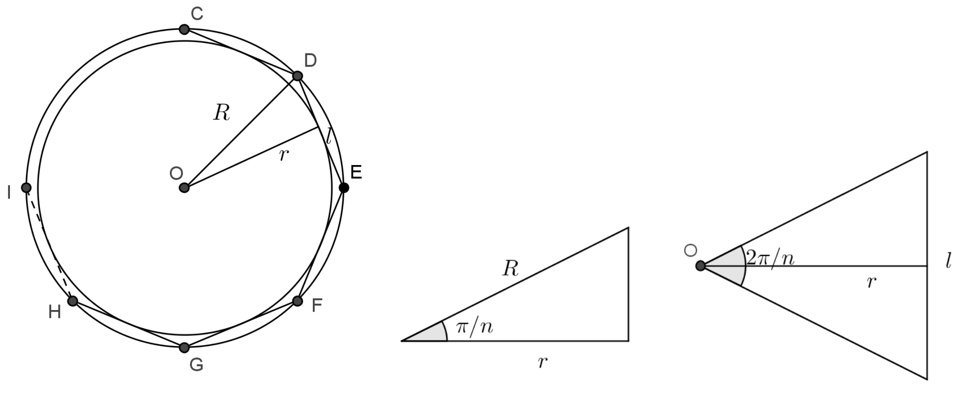

Figura 11:

Veja na Figura 11 acima, que o *n-ágono* pode ser dividido em n triângulos isósceles de lados R, R e l, altura r e ângulo central $\frac{2\pi}{n}$. Sendo assim, no triângulo da esquerda tem-se,

$$sin(\frac{\pi}{n}) = \frac{\frac{l}{2}}{R} = \frac{l}{2R} \Longrightarrow l = 2Rsin(\frac{\pi}{n}). \tag{4}$$

Mas,

$$L = \underbrace{l + l + \cdots + l}_{n \text{ vezes}} = nl \Longrightarrow l = \frac{L}{n} \tag{5}$$

Substituindo (5) em (4), chega-se a $\frac{L}{n} = 2nR\sin(\frac{\pi}{n}) \Longrightarrow L = 2nR\sin(\frac{\pi}{n})$.

Já o triângulo da direita tem base l e altura r, logo a área do triângulo será, $A_T = \frac{rl}{2}$, mas como visto acima $L = \underbrace{l + l + \cdots + l}_{n \text{ vezes}} = nl$. Sendo assim, a área do *n-ágono* será $A = nA_T = n\frac{rl}{2} = \frac{r}{2}nl = \frac{rL}{2}$.

Tem-se também no triângulo da esquerda que $cos(\frac{\pi}{n}) = \frac{r}{R} \Longrightarrow r = R\cos(\frac{\pi}{n})$. Portanto, pode-se fazer relações usando a área e o comprimento de um *n-ágono* regular, da seguinte forma: $A = \frac{rL}{2} \Longrightarrow r = \frac{2A}{L}$, mas, $r = R\cos(\frac{\pi}{n})$, igualando chega-se a $R = \frac{2A}{Lcos(\frac{\pi}{n})}$. Agora substituindo o valor de R na equação $L = 2nR\sin(\frac{\pi}{n})$, tem-se,

$L = 2n\frac{2A}{Lcos(\frac{\pi}{n})}sin(\frac{\pi}{n}) \Longrightarrow L^2 = 4ntan(\frac{\pi}{n})A \Longrightarrow L^2 - 4ntan(\frac{\pi}{n})A = 0$.

Pelo Teorema 2.1, o *n-ágono* máximo de comprimento L é regular, e chegamos que $L^2 - 4ntan(\frac{\pi}{n})A = 0$. Tomando-se um *n-ágono* arbitrário de comprimento L e de área A, então,

$$L^2 - 4n\tan(\frac{\pi}{n})A \geq 0 \tag{6}$$

Por outro lado, é facil ver que $\tan\theta \geq \theta$ se $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Para isto, observe na Figura 12 a seguir que a área do setor OAB (A_S) é menor que a área do triângulo OAC ($A_{\triangle OAB}$), ou seja,

$$A_S < A_{\triangle OAB} \Longrightarrow \frac{\theta}{2} < \frac{tan\theta}{2} \Longrightarrow \theta < tan\theta$$

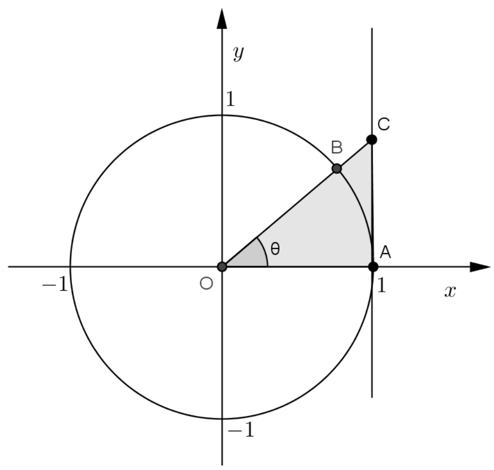

Figura 12:

As desigualdades $\tan\theta \geq \theta$, válida se $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ e (6), implicam que $L^2 - 4\pi A \geq 0$, para um *n-ágono* arbitrário e $n \geq 3$, ou seja,

$L^2 - 4n\tan(\frac{\pi}{n})A \geq 0 \Longrightarrow L^2 \geq 4n\tan(\frac{\pi}{n})A \Longrightarrow L^2 \geq 4n\frac{\pi}{n}A \Longrightarrow L^2 \geq 4\pi A \Longrightarrow L^2 - 4\pi A \geq 0$

Pelo Teorema 2.2 a igualdade $L^2 - 4\pi A = 0$, onde L e A são o seu comprimento e a sua área respectivamente ocorre apenas quando tem-se uma circunferência.

Problema 5. *Supondo que o litoral oceânico seja em linha reta, e que a Rainha Dido aproveitaria este lado (sem necessidade de cercar), começando a cercar em um ponto na margem do oceano e terminando em outro ponto também na margem do oceano. Dentre todas as curvas planas fechadas (retificáveis) com comprimento L, encontre aquela que engloba a maior área, nas condições do exercício.*

Solução: Já provamos anteriormente que entre todas as curvas planas fechadas a que delimita a maior área é aquela delimitada por um círculo. Para resolver este problema, vamos imaginar uma circunferência de comprimento $2L$, sendo a margem do oceano um diâmetro do círculo. Logo, a solução do exercício é a semicircunferência de comprimento L, que está sendo mostrado na Figura 13.

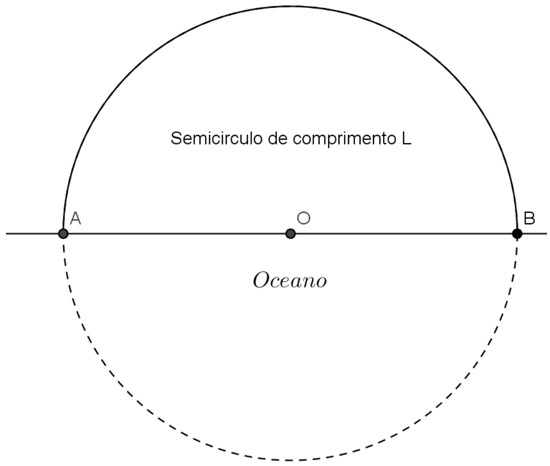

Figura 13:

Problema 6. *Um fazendeiro* [2]*quer fazer um cercado para fechar suas ovelhas. Ele possui tela para fazer* $80m$ *de cerca. Ele deseja aproveitar a margem de um rio (não necessitando fazer cerca), como ele deve fazer a cerca para cobrir a maior área possível, sabendo que ele só dispõe de 4 postes onde será fixada a tela?*

Solução:

Tem-se pelo Teorama 2.1, que o polígono de maior área com comprimento fixo, é regular. Além disso, quanto maior o número de lados maior será a área. Como o fazendeiro tem apenas 4 postes, dois devem ser fincados na margem do rio e os outros dois afastados do rio. Logo, sua cerca terá três lados, e o cercado terá o formato de um quadrilátero. Para saber qual a maior área, basta usar a estratégia do exercício anterior (Problema 5), tomando-se polígonos regulares, nos quais a metade do perímetro meça $80m$. Sendo possível então duas opções, conforme mostra a Figura 14.

[2]Adaptado do problema mencionado no vídeo http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1126

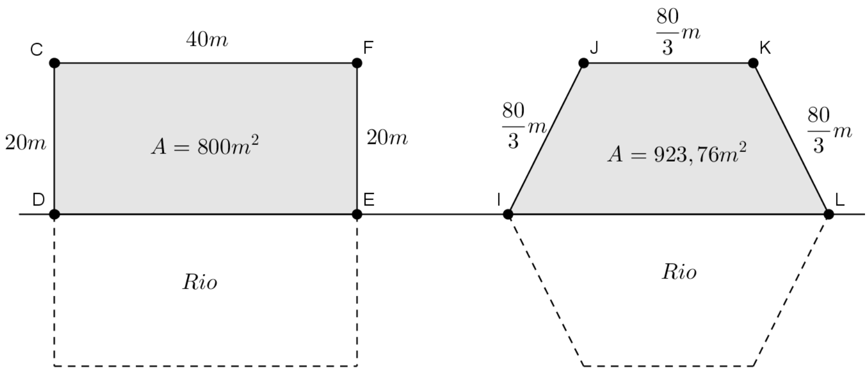

Figura 14:

Portanto, para que o fazendeiro consiga cercar a maior área possível, ele deve fazer o cercado no formato de um trapézio com base maior sendo a margem do rio, e os outros três lados medindo $\frac{80}{3}m$.

Problema 7. *Prove que dentre todos os triângulos de perímetro L, o de área máxima é o equilátero.*

Solução:

É imediato pelo Teorema 2.1.

Problema 8. *Prove que dentre todos os quadriláteros de perímetro L, o de área máxima é o quadrado.*

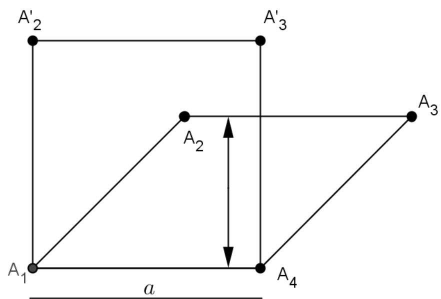

Figura 15:

Solução: Pelo Lema 2.3 é imediato que o quadrilátero máximo é o losango. Mas, o losango de maior altura é o quadrado conforme Figura 15. Veja que o quadrado

$A_1A'_2A'_3A_4$ têm área superior a qualquer outro losango. Portanto, o quadrilátero máximo é o quadrado.

3 Médias e Desigualdade das Médias

3.1 Médias

Neste trabalho tem-se interesse no estudo da desigualdade das médias. Porém, primeiro será explicitado quais são as médias mais comuns e como se define cada uma delas. Em [8] página 138 consta: *Uma idéia bastante importante é a idéia de média. Uma média de uma lista de números é um valor que pode substituir todos os alementos da lista sem alterar uma certa característica da lista.*

Observação: Neste trabalho, no estudo de Médias, já fica estabelecido que os elementos (números) envolvidos são positivos.

Se a característica a ser mantida for a soma dos elementos, chamar-se-á de Média Aritmética. A *média aritmética* dos números $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ é o valor A que safisfaz as igualdades:

$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \underbrace{A + A + A + \cdots + A}_{n \text{ vezes}} = n \cdot A$

ou seja,

$$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

Se a característica a ser mantida for o produto dos elementos, chamar-se-á de Média Geométrica. A *média geométrica* dos números $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ é o valor G que safisfaz as igualdades:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n = \underbrace{G \cdot G \cdot G \cdots G}_{n \text{ vezes}} = G^n$$

ou seja,

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n}$$

Se a característica a ser mantida for a soma dos inversos dos elementos, chamar-se-á de Média Harmônica. A *média harmônica* dos números $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ é o valor H que safisfaz as igualdades:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\underbrace{\frac{1}{H}+\frac{1}{H}+\frac{1}{H}+\cdots+\frac{1}{H}}_{n\text{ vezes}}=\frac{n}{H}$$

ou seja,

$$H=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

A Média Harmônica é então o inverso da Média Aritmética do inverso dos elementos (números listados).

Uma média que não se pode esquecer é a Média Quadrática. A *média quadrádica* Q é igual a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos números $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, ou seja,

$$Q=\sqrt[2]{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2}{n}}$$

3.2 A Desigualdade das Médias

A desigualdade das médias afirma que a Média Aritmética de n números, sejam eles, $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ é maior que ou igual à sua Média Geométrica e a igualdade só ocorre se $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$.

Será demonstrado que $G \leq A$. Segundo [12], existem muitas demonstrações diferentes para tal desigualdade, mas uma das mais interessante e completa foi formulada pelo matemático francês A. L. Cauchy. Apresentaremos duas demonstrações retiradas de [6] e [8], sendo a primeira um esboço do que foi feito por Cauchy.

Demonstração 1: Primeiro será provado para $n = 2$. Sendo os números x_1 e x_2, tem-se:

$A - G = \frac{x_1+x_2}{2} - \sqrt{x_1x_2} = \frac{x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}}{2} = \frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}{2} \geq 0$ e a igualdade ocorre somente quando $x_1 = x_2$. O que prova a desigualdade para $n = 2$.

Para prová-la para $n = 4$, utilizando o resultado anterior para os números $\frac{x_1+x_2}{2}$ e $\frac{x_3+x_4}{2}$, tem-se:

$$\frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)}$$

ou seja,

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geq \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)}$$

onde a igualdade só ocorre quando

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{x_3+x_4}{2}$$

Aplicando duas vezes a desigualdade para o caso $n = 2$, primeiramente para x_1 e x_2, e depois para x_3 e x_4, obtem-se:

$$\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}\frac{x_3+x_4}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}} = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$$

Demonstrando assim que $A \geq G$ para $n = 4$, e a igualdade ocorre só quando $x_1 = x_2$ e $x_3 = x_4$ e $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{x_3+x_4}{2}$, o que equivale a dizer que $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Repetindo esse argumento, prova-se para $8, 16, 32, \cdots$ números. Prova-se a desigualdade para $n = 2^k$, usando indução.

Será provado para $n = 3$. Sejam x_1, x_2 e x_3 e A a média aritmética entre eles e G a sua média geométrica. É verdade que:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+A}{4} = \frac{3A+A}{4} = A$$

Aplicando a desigualdade das médias no caso $n = 4$ aos números x_1, x_2, x_3 e A, obtem-se,

$$A = \frac{x_1+x_2+x_3+A}{4} \geq \sqrt[4]{x_1x_2x_3A}$$

Logo, $A^4 \geq x_1x_2x_3A \Longrightarrow A^3 \geq x_1x_2x_3 \Longrightarrow A \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3} = G$, e a igualdade só se verifica quando $x_1 = x_2 = x_3 = A$, ou seja, quando $x_1 = x_2 = x_3$.

Para provar a desigualdade para $n = 5$, sendo eles x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5, aplicar-se-ia a desigualdade aos 8 números x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A, A e A, onde A é a média aritmética dos números x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5.

Usando raciocínio análogo pode-se mostrar que a desigualdade é verdadeira para $n = K$, então ela é verdadeira também para todo $n \leq k$. $\square$

Demonstração 2:

Sejam os n números $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$. Dentre eles existe um que é o menor de todos, suponhamos que seja x_1, e existe um que é o maior de todos, suponhamos que seja x_n. A demonstração consiste em substituir esses dois números escolhidos x_1 e x_n pelos números G e $\frac{x_1 x_n}{G}$, mantendo inalterados os $n-2$ números restantes. Como $G.\frac{x_1 x_n}{G} = x_1 x_n$, a média geométrica desta nova lista de números continua igual a G. Mas, como $x_1 = \sqrt[n]{x_1^n} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = G \leq \sqrt[n]{x_n^n} = x_n$, tem-se

$x_1 + x_n - \left(G + \frac{x_1 x_n}{G}\right) = x_1 + x_n - G - \frac{x_1 x_n}{G} = x_1 - \frac{x_1 x_n}{G} - G + \frac{x_n G}{G} = (x_1 - G)\left(1 - \frac{x_n}{G}\right) \geq 0$,

logo, $x_1 + x_n \geq G + \frac{x_1 x_n}{G}$. Portanto, ao fazer a substituição de x_1 por G e x_n por $\frac{x_1 x_n}{G}$ a nova média aritmética é menor ou igual a anterior. Só é igual quando $x_1 = G$ ou $x_n = G$, de modo que todos os números dados são iguais. Prosseguindo com o mesmo raciocínio, suponhamos agora que x_2 e x_{n-1} sejam respectivamente o menor e o maior dos novos números. Substituindo-os por G e $\frac{x_2 x_{n-1}}{G}$, novamente não alteramos a média geométrica, mas a média aritmética mais uma vez fica menor ou igual. Depois desta segunda etapa, pelo menos dois números tornaram-se iguais a G. Depois de no máximo n etapas, obtemos n números iguais a G. Sua média geométrica é G e sua média aritmética também é G. Mas, como a média geométrica não alterou depois de nenhuma das etapas conclui-se que $G \leq A$. Só se tem $G = A$ quando, em todas as etapas do processo, a média aritmética mantiver inalterada, mas isso ocorre apenas quando todos os x_i forem iguais. $\square$

3.3 Desigualdade das Médias Generalizada

Dados n números $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, e chamando de A a Média Aritmética, de G a Média Geométrica, de H a Média Harmônica e de Q a Média Quadrática, mostra-se que: $H \leq G \leq A \leq Q$. Além disso duas quaiquer dessas médias são iguais apenas quando $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$.

Na subseção anterior ficou provado que $G \leq A$. A partir desta desigualdade prova-se que $H \leq G$.

Demonstração:

Sejam os números $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$. Vamos aplicar a desigualdade das médias geométrica e aritmética para o inverso desses n números.

É verdade que:

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3} \cdots \frac{1}{x_n}}$$

mas, veja que

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} = \frac{1}{H}$$

e

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3} \cdots \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n}} = \frac{1}{G}$$

logo,

$\frac{1}{H} \geq \frac{1}{G} \Longrightarrow H \leq G$. $\square$

Passar-se-á agora à demonstração da desigualdade $A \leq Q$. Antes, verifique-se a veracidade de:

$$0 \leq (a-b)^2 \Longrightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \tag{7}$$

Consedere $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ números quaisquer, veja que

$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$

$(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$$

$$\vdots$$

$$(x_1+\cdots+x_n)^2 = x_1^2+\cdots+x_n^2+2x_1x_2+\cdots+2x_1x_n+2x_2x_3+\cdots+2x_2x_n+\cdots+2x_{n-1}x_n$$

Usando este mesmo raciocínio tem-se

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}\right)^2 = \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2+2x_1x_2+2x_1x_3+\cdots+2x_{n-1}x_n}{n^2}$$

Aplicando o raciocínio usado em (7), tem-se

$2x_1x_2+\cdots+2x_1x_n+2x_2x_3+\cdots+2x_2x_n+\cdots+2x_{n-1}x_n \leq (x_1^2+x_2^2)+\cdots+(x_1^2+x_n^2)+(x_2^2+x_3^2)+\cdots+(x_{n-1}^2+x_n^2)$

Sendo assim, vale a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}\right)^2 &\leq \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2+(x_1^2+x_2^2)+\cdots+(x_1^2+x_n^2)+(x_2^2+x_3^2)+\cdots+(x_{n-1}^2+x_n^2)}{n^2} \\ &\leq n\left(\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n^2}\right) = \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n} \Rightarrow \left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}} \Rightarrow A \leq Q.$$

□

Sendo assim, fica demonstrado que $H \leq G \leq A \leq Q$.

3.4 Aplicações

Há diversos problemas envolvendo máximos e mínimos que podem ser resolvidos usado a desigualdade das médias. Veja alguns:

Problema 9. *Encontre o produto máximo de dois números cuja soma é constante.*

Solução:

Se a soma é constante, então temos uma característica da média aritmética. Sendo A a média aritmética e G a média geométrica, pela desigualdade das médias sabe-se que $G \leq A$, e a igualdade só ocorre se todos os x_i forem iguais. Sejam a e b os dois números, então, pela desigualdade das médias aritmética e geométrica, o produto será máximo quando $a = b$.

Problema 10. *Encontre a área máxima de um triangulo retângulo, sendo que a soma de seus lados menores é um numero constante L.*

Solução:

Se a soma é constante e igual a L, então temos uma característica da média aritmética. Sabe-se que a área do triângulo retângulo é igual ao semi-produto dos dois lados menores (catetos). Sejam a e b os dois lados menores, então, $A_T = \frac{ab}{2} \Longrightarrow 2A_T = ab \Longrightarrow \sqrt{2A_T} = \sqrt{ab}$ que é a média geométrica de a e b. Sabe-se também que $\frac{a+b}{2} = \frac{L}{2}$ é a sua média aritmética. Pela desigualdade das médias aritmética e geométrica $\sqrt{ab} \leq \frac{L}{2}$ a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$, ou seja, quando o triângulo retângulo for isósceles.

Portanto, a área máxima será: $A_T = \frac{ab}{2} = \frac{(a+b)^2}{8} = \frac{L^2}{8}$.

Problema 11. *Encontre o valor mínimo de $ax + \dfrac{b}{x}$, se $x > 0$ e $a, b > 0$.*

Solução:

A média geométrica de ax e $\frac{b}{x}$ é constante e igual a $\sqrt{ax \cdot \frac{b}{x}} = \sqrt{ab}$. Pela desigualdade das médias tem-se:

$\frac{ax+\frac{b}{x}}{2} \geq \sqrt{ax\frac{b}{x}} = \sqrt{ab} \Longrightarrow ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$. Portanto, o valor mínimo da soma será $2\sqrt{ab}$, que ocorre quando $x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

Problema 12 (PROFMAT - ENQ - 2012/1)**.** *Dado um número* $\mathbf{a} > \mathbf{0}$*, quanto medem os lados do retângulo de perímetro mínimo cuja área é* $\mathbf{a}$*?*

Solução:

Sejam x e y as dimensões de um retângulo de área $a > 0$. Então, $xy = a$, ou seja, a média geométrica de x e y, é dada por $\sqrt{xy} = \sqrt{a}$. Pela desigualdade das médias, $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, e a igualdade ocorre se , e somente se, $x = y$. Sabe-se que, $xy = a \Longrightarrow x^2 = a \Longrightarrow x = \sqrt{a} = y$. Sendo o perímetro igual a $2p$, temos:

$2p = 2x + 2y = 2x + 2x = 4x = 4\sqrt{a}$, que é o perímetro mínimo.

Problema 13 (PROFMAT - MA12 - AV2 - 2011)**.** *Uma caixa retangular sem tampa tem arestas medindo x, y, e z (veja figura, onde as linhas tracejadas indicam segmentos de arestas obstruídos por alguma face).*

1. *Exprima a área e o volume da caixa em função de x, y e z.*

2. *Use a desigualdade das médias para mostrar que, se o volume da caixa é igual a 32, então sua área é maior ou igual a 48.*

3. *Determine as medidas das arestas da caixa de área mínima com volume igual a 32.*

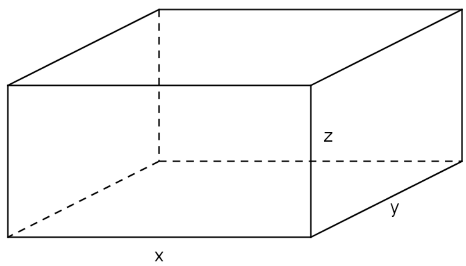

Figura 16: Caixa Retangular

Solução:

Observação: Para simplificar, vamos chamar a área da caixa de A_{cx} e o volume da caixa de V_{cx}.

1) As faces da caixa são retangulares. Logo, teremos:

$A_{cx} = xy + 2xz + 2yz$ e $V_{cx} = xyz = 32$.

2) A área da caixa é o triplo da média aritmética dos valores xy, $2xz$ e $2yz$. Pela desigualdade das médias, a média aritmética é maior do que ou igual à média geométrica, isto é,

$$\frac{xy + 2xz + 2yz}{3} \geq \sqrt[3]{xy.2xz.2yz} = \sqrt[3]{4x^2y^2z^2}$$

Sendo $xyz = 32$, têm-se que $\sqrt[3]{4x^2y^2z^2} = \sqrt[3]{4.xyz.xyz} = \sqrt[3]{4.32.32} = \sqrt[3]{64.64} = 4.4 = 16$.

então,

$$\frac{xy + 2xz + 2yz}{3} \geq 16 \Longrightarrow xy + 2xz + 2yz \geq 48$$

Portanto,

$A_{cx} = xy + 2xz + 2yz \geq 48$.

3) A igualdade entre as médias aritmética e geométrica ocorre se, e somente se, os termos são iguais. Neste caso deve-se ter $xy = 2xz = 2yz$. Como o volume é positivo, deve-se ter $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$. Então,

$$\begin{cases} 2xz = 2yz & \Longrightarrow & y = x \\ xy = 2yz & \Longrightarrow & z = \frac{x}{2} \end{cases}$$

como, $V_{cx} = xyz = 32 \Longrightarrow x.x.\frac{x}{2} = 32 \Longrightarrow x = 4$.

Portanto se $x = 4$, tem-se,

$$\begin{cases} y = x & \Longrightarrow & y = 4 \\ z = \frac{x}{2} & \Longrightarrow & z = 2 \end{cases}$$

São os valores de x, y e z que tornam a área da caixa mínima, quando o volume é 32.

4 Funções Quadráticas

Definição 4.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

A função quadrática pode vir escrita na sua forma canônica.

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}) = a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = a[(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}) - (\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a})] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a^2})]$

O termo $b^2 - 4ac$ recebe o nome de discriminante do trinômio do segundo grau, e é representado por Δ, logo, pode-se escrever:

$f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$

Observe que o termo $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ para todo x real, já o termo $-\frac{\Delta}{4a^2}$ é constante. Além dessas considerações, a diferença $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ é mínima quando tem-se $(x + \frac{b}{2a})^2 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-b}{2a}$. Neste ponto, se $a > 0$, $f(x)$ também assume seu valor mínimo. Portanto, o menor valor assumido pela função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é $f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$. Neste caso, $f(x)$ não assume valor máximo, pois a função é ilimitada superiormente.

De forma totalmente análoga, quando $a < 0$, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume valor máximo em $x = -\frac{b}{2a}$ e não tem valor mínimo, pois neste caso $f(x)$ é ilimitada inferiormente.

4.1 Aplicações

Muitos problemas envolvendo máximos e mínimos se resolvem fazendo uso da função quadrática. Essa função é bastante familiar aos alunos da Educação Básica. Logo, é importante mencioná-la neste trabalho. A seguir serão resolvidos alguns problemas usando tal função.

Problema 14. *Mostre que entre todos os retângulos de perímetro C, o de área máxima é o quadrado.*

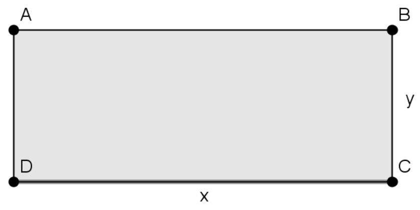

Figura 17: Retângulo de lados x e y

Solução: O perímetro do retângulo é $2x + 2y = C$ e a área é dada por xy.

Mas, $2x + 2y = C \implies y = \frac{C-2x}{2}$, substituindo esse valor na área,

$A_R = xy \implies A_R = x(\frac{C-2x}{2}) \implies A_R = -x^2 + \frac{Cx}{2}$

Agora tem-se a área em função de x, visto que C é fixo, que atingirá o valor máximo, no vértice, então,

$x_v = \frac{-b}{2a} \implies x_v = \frac{C}{4}$

Substituindo o valor de x, acha-se y,

$y = \frac{C-2x}{2} \implies y = \frac{C}{4}$

Portanto, a área será máxima quando $x = y = \frac{C}{4}$, ou seja, quando for um quadrado.

Problema 15. *Encontre as dimensões de um retângulo PQRS inscrito num círculo de raio r que nos dão a maior área possível*

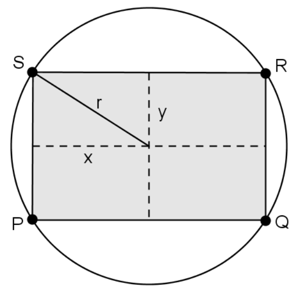

Figura 18: Retângulo Inscrito

Solução: Analisando a Figura 18, vê-se que, a área do retângulo é dada por $A_R = 2x \cdot 2y = 4xy$. Tomando o triângulo de lados x, y e r, e usando o teorema de pitágoras tem-se:

$r^2 = x^2 + y^2 \implies y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Agora, substituindo o valor de y encontrado na equação da área, tem-se a área em função da variável x, visto que r é fixo. Sendo assim,

$A_R = 4x\sqrt{r^2 - x^2} \Longrightarrow A_R^2 = 16x^2(r^2 - x^2)$

Fazendo a substituição $z = x^2$ tem-se

$A_R^2 = 16z(r^2 - z) \Longrightarrow A_R^2 = -16z^2 + 16r^2z$, o que ainda pode ser escrito $f(z) = -16z^2 + 16r^2z$.

Neste caso temos uma função quadrática onde $a = -16 < 0$. Portanto a função assume o valor máximo em $z_v = \frac{-b}{2a} \Longrightarrow z_v = \frac{r^2}{2}$

Substituindo z_v na igualdade $z = x^2$ tem-se

$z = x^2 \Longrightarrow \frac{r^2}{2} = x^2 \Longrightarrow x = \frac{r}{\sqrt{2}}$

Agora, sabe-se que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$, substituindo o valor de x encontra-se:

$y = \sqrt{r^2 - (\frac{r}{\sqrt{2}})^2} = \frac{r}{\sqrt{2}}$

Portanto, a área do retângulo $PQRS$ será máxima quando $x = y$, ou seja, quando tiver um quadrado.

Problema 16 (IFG - 2013). *O valor máximo de $11n - n^2$, em que n é um número inteiro, é:*

$a)29$ $b)30$ $c)31$ $d)32$ $e)40$

Solução: Seja a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 11x$. Como $a = -1 < 0$, a função tem ponto de máximo, que é: $x_v = \frac{-11}{2(-1)} = \frac{11}{2}$, substituindo na função tem-se, $f(\frac{11}{2}) = -(\frac{11}{2})^2 + 11(\frac{11}{2}) = -\frac{121}{4} + \frac{121}{2} = \frac{121}{4} = 30,25$. Logo, os valores inteiros de x que tornam $f(x)$ máximo são $x_1 = 5$ e $x_2 = 6$ e $f(5) = f(6) = 30$.

5 Uso do Cálculo Diferencial

O estudo do Cálculo Diferencial é bastante amplo. Porém, será apresentado neste trabalho apenas o que vai ser usado na resolução dos problemas de máximos e mínimos. Há muitos livros de Cálculo que apresentam a Teoria que será utilizada neste trabalho, como por exemplo [11].

Definição 5.1. *Uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tem máximo absoluto em c se $f(x) \leq f(c)$ para todo x no domínio D de f. Neste caso, o valor de $f(c)$ é chamado valor máximo de f em D.*

Definição 5.2. *Uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tem mínimo absoluto em c se $f(x) \geq f(c)$ para todo x no domínio D de f. Neste caso, o valor de $f(c)$ é chamado valor mínimo de f em D.*

Definição 5.3. *Uma função tem máximo local (ou máximo relativo) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I, tal que $c \in I$ e $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor máximo local de f.*

Definição 5.4. *Uma função tem mínimo local (ou mínimo relativo) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I, tal que $c \in I$ e $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor mínimo local de f.*

Teorema 5.1. *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função f contínua definida em um intervalo aberto I. Se f tem máximo ou mínimo local em $x = c$, $c \in I$ e f é derivável em c, então $f'(c) = 0$.*

Demonstração:

Suponha que f tenha um máximo local em $x = c$. A prova do caso em que f tem mínimo local em c é totalmente análoga.

Como f é derivável em c, então
$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c).$$
Como $f(c)$ é máximo local, há um intervalo (a, b) no domínio de f tal que $c \in (a, b)$ e $f(x) \leq f(c)$. Portanto, $f(x) - f(c) \leq 0$, para todo $x \in (a, b)$. Se $x < c$ então $x - c < 0$ e, portanto $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ para $x \in (a, b)$, logo

$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \tag{8}$$

Por outro lado, $x > c$ então $x - c > 0$ e, portanto, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ para $x \in (a,b)$, logo

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \tag{9}$$

Comparando as desigualdades (8) e (9), e levando em conta que são os mesmos números, resulta que
$\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) = 0.$ □

Definição 5.5. *Um ponto c no domínio de uma função f é chamado ponto crítico se ocorre um dos dois seguintes casos:*

(a) f não é derivável em x = c.

(b) f é derivável em x = c e f'(c) = 0.

Proposição 5.1. *Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a,b) então:*

i) f é não decrescente em $[a,b]$ se, e somente se, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Além disso, se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ então f é crescente em $[a,b]$

ii) f é não crescente em $[a,b]$ se, e somente se, $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Além disso, se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$ então f é decrescente em $[a,b]$

Proposição 5.2 (Teste da Derivada Primeira)**.** *Seja a função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a,b) e seja c um ponto crítico de f.*

i) Se f' passa de positiva para negativa em c então f tem um máximo local em c.

ii) Se f' passa de negativa para positiva em c então f tem um mínimo local em c.

Demonstração: Começemos demonstrando o item (i), se f' passa de passa de positiva para negativa em c então existem x_0, $x_1 \in (a,b)$, $x_0 < c < x_1$, tais que $f'(x) > 0$ se $x \in (x_0, c)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (c, x_1)$.

Pela Proposição 5.1 f é crescente em $[x_0, c]$ e decrescente em $[c, x_1]$, segue que $f(c)$ é valor máximo de f no intervalo $[x_0, x_1]$ que contém c.

Analogamente, se f' passa de negativa para positiva em c, então existe um intervalo $[x_0, x_1]$ contendo c tal que f é decrescente em $[x_0, c]$ e crescente em $[c, x_1]$. Portanto, $f(c)$ é valor mínimo no intervalo $[x_0, x_1]$ demonstramos assim o item (ii). □

5.1 Aplicações

É muito comum usar o Cálculo Diferencial para resolver diversos tipos de problemas, em diversas áreas do conhecimento. Dentre as aplicações do Cálculo inclui resolver problemas de otimização, que nada mais é que transformar os problemas em funções e encontrar seus pontos de máximos ou mínimos.

Observação: Os problemas que serão apresentados e resolvidos nesta seção foram quase todos retirados dos textos do Curso de Cálculo PROFMAT 2012.

Problema 17. *Considere uma chapa de vidro no formato de um triângulo retângulo de base* **a** *e altura* **b**. *Retira-se de cada cateto do triângulo uma faixa de largura* H. *Em seguida, com estas peças faz-se um aquário colado numa parede de vidro, de modo que uma face do aquário será a parede. Encontre a largura* H *que maximiza o volume do aquário.*

Solução: Veja na Figura 19 uma representação da situação:

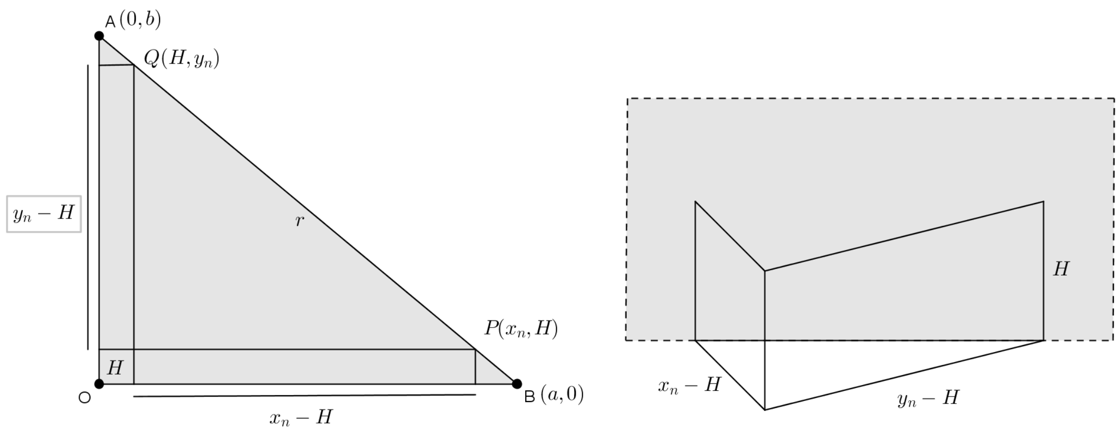

Figura 19:

Depois de retirar as duas faixas laterais de altura H, sobra um triângulo retângulo de catetos $x_n - H$ e $y_n - H$, este vai ser o fundo do aquário. O volume do aquário será obtido multiplicando a área da base (fundo) pela altura (que mede H), logo tem-se:

$$V(H) = (x_n - H) \cdot (y_n - H) \cdot \frac{H}{2}$$

A equação da reta r que passa por A e B, é $y = -\frac{b}{a}x + b$. Como os pontos P e Q estão em r, podemos substituir as coordenadas desses pontos e encontrar: $x_n = \dfrac{a(b-H)}{b}$ e $y_n = -\dfrac{bH}{a} + b$, substituindo x_n e y_n na expressão do volume, obtém-se,

$$V(H) = \left(a\frac{(b-H)}{b} - H\right) \cdot \left(b - \frac{bH}{a} - h\right) \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{2AB}[ab - H(a+b)]^2 \cdot H$$

Observe que a função $V(H)$ tem domínio $I = [0, \frac{ab}{a+b}]$ pois $ab - H(a+b) \geq 0 \Longrightarrow 0 \leq H \leq \frac{ab}{a+b}$. Tem-se também que $V(H)$ é polinomial, contínua e derivável em $\left(0, \frac{ab}{a+b}\right)$, assim $V(H)$ terá máximo nos extremos de I ou nos pontos críticos, que são os pontos que anulam $V'(H)$. Derivando $V(H)$, tem-se,

$$V'(H) = \frac{2}{ab}[[ab - (a+b)H]^2 H]' = \frac{1}{2ab}[ab - (a+b)H] \cdot [-3H(a+b) + ab]$$

Quando $V'(H) = 0$ tem-se $H = \frac{ab}{a+b}$ ou $H = \frac{ab}{3(a+b)}$, mas veja que:

$$V(0) = 0 = V\left(\tfrac{ab}{a+b}\right) \text{ e } V\left(\tfrac{ab}{3(a+b)}\right) = \frac{1}{2ab}\left(ab - \tfrac{ab}{3(a+b)}(a+b)\right)^2 \tfrac{ab}{3(a+b)} = \frac{2(ab)^2}{9(a+b)} > 0$$

Logo, o valor de H que maximiza o volume é $H = \frac{ab}{3(a+b)}$.

Problema 18. *Encontre o ponto do gráfico de* $y = x^2$ *mais próximo de* $(0, 2)$

Solução: Veja representação gráfica da situação (Figura 20):

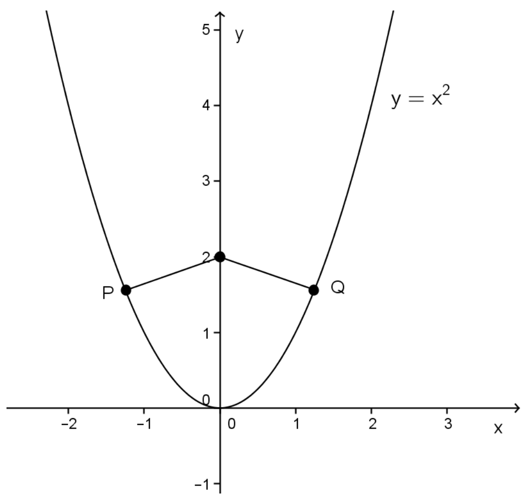

Figura 20:

Seja $P = (x, y)$ o ponto procurado, a distância do ponto $(0, 2)$ ao ponto P é dada por $d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{y^2 - 4y + 4 + x^2}$. Mas, sabe-se também que $y = x^2$. Substituindo o valor de x^2 na equação da distância obtêm-se a distância em função de y.

$$d(y) = \sqrt{y^2 - 3y + 4}.$$

Veja que $y^2 - 3y + 4 = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$, assim, o domínio de $d(y)$ são todos os $y \in \mathbb{R}$. Derivando a função $d(y)$, tem-se:

$$d'(y) = \frac{2y - 3}{2\sqrt{y^2 - 3y + 4}}$$

O ponto crítico de $d(y)$ é $d'(y) = 0$. Logo para que $d'(y) = 0$, deve-se ter $2y - 3 = 0 \Longrightarrow y = \frac{3}{2}$.

A função $d(y)$ tem apenas um ponto crítico.

Usando o Teste da Derivada Primeira *(ii)* no ponto crítico $y = \frac{3}{2}$, tem-se que o ponto é de mínimo local. Mas,

- $d'(y) < 0$ para $y < \frac{3}{2}$
- $d'(y) > 0$ para $y > \frac{3}{2}$

Logo, $y = \frac{3}{2}$ é ponto de mínimo global. Como $y = \frac{3}{2} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Portanto, os pontos do gráfico de $y = x^2$ que se encontram mais próximos de $(0, 2)$ são: $P = (-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2})$ e $Q = (\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2})$.

Problema 19. *O material para a base de uma caixa retangular com tampa aberta e base quadrada custa $R\$0,30$ por cm^2, enquanto que o material para as faces custa $R\$0,20$ por cm^2. Encontre as dimensões para a caixa de maior volume que pode ser feita com $R\$100,00$.*

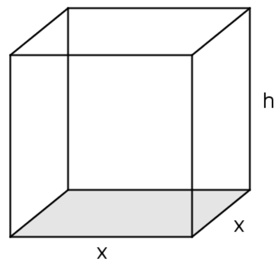

Figura 21: Caixa Aberta

Solução: A área lateral da caixa mede $A_L = 4xh$ e a área da base mede $A_B = x^2$. Neste problema, o custo total é obtido multiplicando a medida da área (em cm^2) pelo custo do cm^2. Logo, o custo total de fabricação da caixa será dado por, $C_T = 4xh.0,2 + x^2.0,3$. Como o custo total será de $R\$100,00$, tem-se $100 = 0,8xh + 0,3x^2 \Longrightarrow h = \frac{1000-3x^2}{8x}$.

O volume é dado por $V = x^2h$, substituindo o valor de h, encontra-se o volume em função de x, isto é,

$V(x) = x^2(\frac{1000-3x^2}{8x}) = \frac{1000x-3x^3}{8}$, com $x \in (0, +\infty)$.

Derivando a função $V(x)$, tem-se:

$$V'(x) = 125 - \frac{9x^2}{8}$$

O ponto crítico de $V(x)$ é $V'(x) = 0$. Então, $125 - \frac{9x^2}{8} = 0 \Longrightarrow x = \frac{10\sqrt{10}}{3}$, onde x é a madida da base da caixa.

Logo pelo Teste da Derivada Primeira *(i)* tem-se que $x = \frac{10\sqrt{10}}{3}$ é ponto de máximo local. Mas,

- $V'(x) > 0$ para $0 < x < \frac{10\sqrt{10}}{3}$
- $V'(x) < 0$ para $x > \frac{10\sqrt{10}}{3}$

Logo, $x = \frac{10\sqrt{10}}{3}$ é ponto de máximo global.

Substituindo o valor de x, encontra-se $h = \frac{5\sqrt{10}}{2}$, que são os valores que tornam o volume da caixa máximo. O volume máximo será $V(\frac{10\sqrt{10}}{3}) = \frac{1000\frac{10\sqrt{10}}{3} - 3(\frac{10\sqrt{10}}{3})^3}{8} = 878,41cm^3$

Problema 20. *Um fazendeiro quer cercar uma área de 100 alqueires em um campo retangular e então dividí-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como ele deve fazer isso de modo a minimizar o custo da cerca?*

Figura 22: Área Retangular

Solução:

O custo da cerca depede do seu comprimento, logo, quanto menos cerca mais barato. De acordo com a figura acima, tem-se $C = 2x + 3y$, onde C é o comprimento da cerca. Como um alqueire em Goiás são $48400m^2$, a área a ser cercada mede $4840000m^2$. Sendo assim tem-se:

$$A = xy \Longrightarrow 4840000 = xy \Longrightarrow y = \frac{4840000}{x}$$

Substituindo o valor de y, encontra-se o comprimento da cerca em função de x, isto é, $C : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $C(x) = 2x + 3(\frac{4840000}{x}) = 2x + \frac{14520000}{x}$, veja o esboço do gráfico desta função (Figura 23):

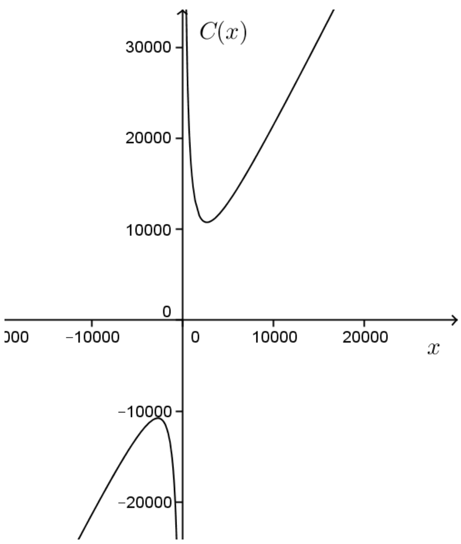

Figura 23:

Derivando a função $C(x)$, tem-se: $C'(x) = 2 - \frac{14520000}{x^2}$.

O ponto crítico de $C(x)$ no intervalo dado é $C'(x) = 0$. Então, $2 - \frac{14520000}{x^2} = 0 \Longrightarrow x \approx 2694,43$, onde x é medida de um dos lados da fazenda.

Analisando o comportamento de $C'(x)$ antes e depois de $x = 2694,43$, tem-se $C'(x)$ passa de negativa para positiva em $x = 2694,43$, isto é, pelo Teste da Derivada Primeira *(ii)*, o ponto $x = 2694,43$ é ponto de mínimo local. Mas, $C'(x) < 0$ para $x < 2694,43$ e $C'(x) > 0$ para $x > 2694,43$, logo $x = 2694,43$ é um ponto de minimo global.

Substituindo o valor de x, encontra-se $y = 1796,21$, que são os valores que tornam o comprimento da cerca mínimo, e consequentemente o custo mínimo. O comprimento mínimo será: $C(2694,43) = 2(2694,43) + \frac{14520000}{2694,43} \approx 10777,75$ metros.

Problema 21. *Uma lata cilíndrica deve ter a capacidade de* $50\pi cm^3$. *O material do topo e base da lata custa* $R\$25,00$ *por* m^2*, enquanto que o material com o qual a parte lateral será feita custa* $R\$20,00$ *por* m^2. *Encontre o raio da base e a altura da lata que minimiza o custo da lata.*

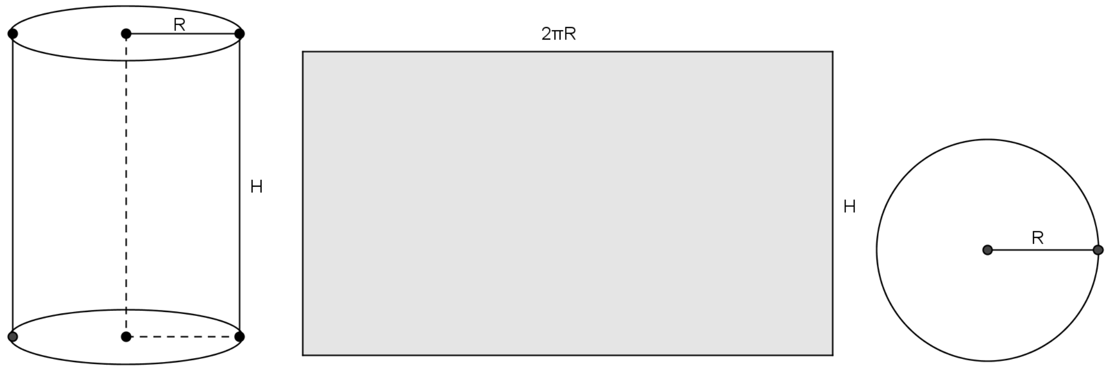

Figura 24: Lata, Área Lateral e Área do Fundo

Solução: O volume da lata é dado por $V_L = \pi R^2 H$. Como o volume já foi dado e vale 50π, pode-se substituir V_L, logo,

$$50\pi = \pi R^2 H \Longrightarrow H = \frac{50}{R^2}$$

A lata é confeccionada com dois tipos de materiais e com preços diferentes entre eles. A área lateral é retangular e mede $A_L = 2\pi RH$, e a área da base é igual à do topo e mede cada uma $A_B = \pi R^2$.

O preço do material da área lateral é $R\$20,00$ o m^2, que equivale a 1 centavo por $5cm^2$. Já o preço do material da base e topo custa $R\$25,00$ o m^2, que equivale a 1 centavo por $4cm^2$.

O custo é dado pelo produto entre a medida da área e o preço por área, sendo assim, tem-se:

$C_L = 2\pi RH(\frac{1}{5}) = 0,4\pi RH$ e $C_B = \pi R^2(\frac{1}{4}) = 0,25\pi R^2$, logo o custo total será,

$C = C_L + 2C_B \Longrightarrow C = 0,4\pi RH + 2 \cdot 0,25\pi R^2 = 0,4\pi RH + 0,5\pi R^2$, substituindo o valor de H, tem-se o custo em função de R, $C(R) = 0,4\pi R(\frac{50}{R^2}) + 0,5\pi R^2 = \frac{20\pi}{R} + 0,5\pi R^2$, com $0 < R < +\infty$.

Derivando a função $C(R)$, tem-se:

$$C'(R) = \frac{-20\pi}{R^2} + \pi R$$

O ponto crítico de $C(R)$ é $C'(R) = 0$, ou seja,

$$\pi R - \frac{20\pi}{R^2} = 0 \Longrightarrow \pi R = \frac{20\pi}{R^2} \Longrightarrow R = \sqrt[3]{20}$$

Usando o Teste da Derivada Primeira *(ii)* no ponto $R = \sqrt[3]{20}$ conclui-se, que este é um ponto de mínimo local. Mas, $C'(R) < 0$ para $0 < R < \sqrt[3]{20}$ e $C'(R) > 0$ para $R > \sqrt[3]{20}$, logo o ponto $R = \sqrt[3]{20}$ é ponto de mínimo global.

Como $R = \sqrt[3]{20}$ e $H = \frac{50}{R^2}$, substituindo o valor de R, obtém-se $H = \sqrt[3]{\frac{625}{2}}$. Portanto, $R = \sqrt[3]{20}$ e $H = \sqrt[3]{\frac{625}{2}}$ são os valores que tornam o custo da lata mínimo. O custo mínimo é: $C(\sqrt[3]{20}) = \frac{20\pi}{\sqrt[3]{20}} + 0,5\pi(\sqrt[3]{20})^2 \approx R\$\,0,3472$.

Conclusão

O processo de ensino aprendizagem é um grande desafio para o professor, mas com certeza é possível desenvolver um bom trabalho, desde que tenha dedicação, esforço e persistência para desafiar o meio educacional predominante. Nota-se que a experiência é um fator de grande importância para relacionar a teoria com a prática, pois é através dela que pode-se aperfeiçoar cada vez mais o trabalho a ser realizado.

Através deste trabalho foi possivel colocar de forma simples e clara várias componentes usadas para resolver problemas envolvendo máximos e mínimos, que certamente serão utilizadas por alunos secundaristas. No decorrer do trabalho, foi necessário recorrer a várias bibliografias, o que proporcionou a organização e desenvolvimento dos tópicos de forma segura e confiante.

Foram resolvidos proplemas antigos sobre máximos e mínimos, como o Problema Clássico Isoperimétrico (Problema de Dido), e para isto foi necessário pesquisar e recorrer às Teorias de Zenodoro. A Desigualdade Triangular foi necessária para resolver o Problema de Heron, e tais componentes são úteis para resolver diversos tipos de problemas. Por ser bastante interessante, foi definido Médias e provado suas desigualdades, pois se trata de um tópico pouco explorado no Ensino Médio e, no entanto a desigualdade das médias aritmética e geométrica é bastante útil para resolver diversos tipos de problemas de valores extremos. Por ser um assunto bem conhecido na Educação Básica, foi explorado a Função Quandrática e, por fim, algumas ferramentas do Cálculo Deiferencial para funções de uma variável que são também úteis na resolução de problemas de otimização e, apesar de pouco explorado no Ensino Médio, tais ferramentas foram apresentadas de forma simples, sendo possível alunos do Ensino Médio compreendê-las, bastando apenas um pouco de esforço e dedicação.

Já na parte de aplicações, foram selecionados alguns problemas práticos, sendo a maioria retirados do material elaborado para o PROFMAT, e até exercícios de vestibular. Neste momento foi possível tranformar um problemas prático em modelos matemáticos, organizar estratégias de resolução, utilizar técnicas e as teorias apresentadas e, por fim, chegar de forma simples aos resultados. Esta foi a parte mais interessante do trabalho, pois mostra como relacionar e utilizar as teorias em problemas contextualizados, sendo tal correlação necessária para levar aos alunos uma boa aprendizagem.

Observa-se, por fim, que a proposta deste trabalho foi inovadora, pois proporcionou a fazer algo bem diferente do que é feito nas escolas e do que é apresentado em livros didáticos da Educação Básica. O Trabalho Final de Curso foi uma das partes mais importantes de todo o curso, pois foi o momento em que pôde ser organizado algo diferente para ser levado à prática e contribuir, de alguma forma, para melhorar a Educação Básica do nosso País, que é o objetivo principal do PROFMAT.

Referências

[1] ÁVILA, Geraldo. *CÁLCULO das Funções de uma variável*, Volume I, 7^a Edição [reimpresão] Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[2] BLASCHKE, W. *Griechische und anschauliche Geometrie*, münchen, 1953.

[3] BLASCHKE, W. *Kreis und Kugel*, Leipzig, 1916, Berlim, 1956.

[4] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Geomatria Plana*, Fundamentos de Matemática Elementar, 8^a Edição, São Paulo: Atual, 2005.

[5] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Conjuntos e Funções*, Fundamentos de Matemática Elementar, 8^a Edição, São Paulo: Atual, 2004.

[6] LIMA, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

[7] MORGADO, Augusto César; *et alii*. *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 1, 6^a Edição, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[8] MORGADO, Augusto César; *et alii*. *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 2, 6^a Edição, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[9] NETO, Antônio C. Muniz. *Tópicos de Matemática Elementar - Geometria Euclidiana Plana*, Volume 2, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

[10] OLIVEIRA, Krerley I. M.; FERNANDEZ, Adan J. C.. *Iniciação à Matemática: Um Curso Com Problemas e Soluções*, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

[11] STEWART, James. *Cálculo*, Vol. I, 5^a Edição, São Paulo: Thomson Learning, 2006.

[12] TIKHOMIROV, V. M.. *Stories about Maxima and Minima*, Vol. I, American Mathematical Society, 1986.