UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARCELO QUEIROZ

SOBRE A IMPORTÂNCIA DA DISCIPLINA DESENHO GEOMÉTRICO NO ENSINO BÁSICO DA MATEMÁTICA COM FOCO NO 9º ANO DO EF

FORTALEZA

2018

MARCELO QUEIROZ

SOBRE A IMPORTÂNCIA DA DISCIPLINA DESENHO GEOMÉTRICO NO ENSINO BÁSICO DA MATEMÁTICA COM FOCO NO 9º ANO DO EF

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gregorio Pacelli Feitosa Bessa.

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Q45s Queiroz, Marcelo.
Sobre a importância da disciplina Desenho Geométrico no ensino básico da Matemática com foca no 9º Ano do ensino fundamental / Marcelo Queiroz. – 2018.
73 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Gregorio Pacelli Feitosa Bessa.

1. Geometria. 2. Construções geométricas. 3. Resolução gráfica. 4. Método Euclidiano. I. Título.
CDD 510

MARCELO QUEIROZ

SOBRE A IMPORTÂNCIA DA DISCIPLINA DESENHO GEOMÉTRICO NO ENSINO BÁSICO DA MATEMÁTICA COM FOCO NO 9º ANO DO EF

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 25/10/2018.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Gregorio Pacelli Feitosa Bessa (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Profª. Drª. Maria Cristiane Magalhães Brandão
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

À minha família

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus que iluminou o meu caminho durante esta caminhada.

Ao meu orientador meus sinceros agradecimentos pela disponibilidade dispensada para realização deste trabalho.

A minha esposa, Vanina Cristina Ribeiro Queiroz, que de forma especial e carinhosa me deu força e coragem, me apoiando nos momentos de dificuldades e às minhas filhas, Marcelle Ribeiro Queiroz e Mariana Ribeiro Queiroz que iluminaram de maneira especial os meus pensamentos me levando a buscar mais conhecimentos.

Agradecer de forma grata e grandiosa a meus pais, Iris Barbosa Queiroz e Maria José do Nascimento Queiroz, a quem eu rogo todas as noites a minha existência.

A todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram para que este projeto fosse concluído, em especial à Coordenação do 3º Ano do Ensino Médio do Colégio Militar de Fortaleza.

A todos os professores do núcleo PROFMAT/UFC, pelos conhecimentos transmitidos que muito acrescentaram na minha formação profissional e pessoal.

Aos coordenadores do curso, professores José Othon Dantas Lopes e José Valter Lopes Nunes, sempre solícitos e atenciosos.

Aos colegas do curso pelo convívio e troca de experiência durante essa jornada exaustiva, porém gratificante.

“A felicidade dos povos e a tranquilidade dos Estados dependem da boa educação da juventude.” (EMÍLIO CASTELAR).

RESUMO

O presente trabalho visa mostrar a importância da disciplina Desenho Geométrico no currículo matemático do Ensino Básico, uma vez que a disciplina passou a ser optativa no currículo brasileiro. Mostraremos que a prática das construções geométricas possibilita a utilização de estratégias de resolução de problemas e de planejamento de ações. Esse conjunto de atividades, proporcionado por essa área do conhecimento, desafia o campo racional discente, portanto, é bastante provável que se nasça, desse contexto, o interesse do aluno pela aprendizagem de conceitos matemáticos e geométricos, o que justifica a importância dessa disciplina na composição do currículo educacional do ensino básico.

Para alcançar nosso objetivo, faremos, passo a passo, algumas construções geométricas, utilizando os conceitos da geometria plana para justificá-las, e ao final, apresentaremos algumas aplicações, mostrando que essas construções não constituem uma mera coleção de receitas memorizadas.

Devido à extensão do assunto em pauta, seguiremos um sumário que abrange o conteúdo ministrado no 9º Ano do Ensino Fundamental, obviamente que não na sua totalidade, mas de forma a alcançar nosso objetivo, tais como: obtenção da raiz da equação do 1º grau pelo método Euclidiano; resolução gráfica que envolvem expressões racionais e irracionais; determinação de segmento conhecendo-se sua soma/diferença e sua média geométrica; e resolução gráfica da equação do 2ºgrau.

Palavras-chave: Geometria. Construções geométricas. Resolução gráfica. Método Euclidiano.

ABSTRACT

The present work seeks to show the importance of the discipline Geometric Drawing in the mathematical curriculum of the Elementary School, once the discipline started to be optional in the Brazilian curriculum. We will show that the practice of the geometric constructions makes possible the use of strategies of resolution of problems and of action planning. That group of activities, provided by that area of the knowledge, challenges student's rational field, therefore, it is quite probable that is born from this context the student's interest for the learning of mathematical and geometric concepts, what justifies the importance of that discipline in the composition of the education curriculum of the basic teaching.

To reach our objective, we will do, step by step, some geometric constructions, using the concepts of the Flat Geometry to justify them, and at the end, we will present some applications, showing that those constructions don't constitute a mere collection of memorized recipes.

Due to the extension of the subject on the agenda, a summary that includes the content given in the 9th Year of the Elementary School, obviously not in its totality, but in way to reach our objective, such as: obtaining the root of the equation of the 1 first degree of the Euclidian Method; graphic resolution that involves rational and irrational expressions; segment determination with its sum and difference and its geometric average; and graphic resolution of the equation of the 2 second degree.

Keywords: Geometric Constructions. Graphic resolution. Euclidian Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Transporte de segmento.. 12
Figura 2 – Soma de segmentos... 13
Figura 3 – Subtração de segmentos.. 13
Figura 4 – Mediatriz de um segmento.. 14
Figura 5 – Reta perpendicular à reta r passando por um ponto $P \in r$...................... 15
Figura 6 – Reta perpendicular à reta r passando por um ponto $P \notin r$...................... 15
Figura 7 – Reta perpendicular ao segmento AB, passando pela extremidade B..... 16
Figura 8 – Reta paralela à reta r passando por um ponto $P \notin r$ 17
Figura 9 – Construção das paralelas à reta r, dela distando o segmento AB.......... 17
Figura 10 – Transporte de ângulo... 18
Figura 11 – Soma e subtração de ângulos.. 19
Figura 12 – Arco capaz... 20
Figura 13 – Feixe de paralelas cortado por transversais.. 21
Figura 14 – Divisão de segmento em partes diretamente proporcionais.................. 21
Figura 15 – Quarta proporcional.. 24
Figura 16 – Terceira proporcional.. 25
Figura 17 – Quarta e terceira proporcionais reiteradas.. 27
Figura 18 – Triângulo retângulo.. 28
Figura 19 – Média proporcional pelo processo aditivo.. 30
Figura 20 – Média proporcional pelo processo subtrativo...................................... 31
Figura 21 – Aplicação da média proporcional pelo processo aditivo...................... 31
Figura 22 – Aplicação da média proporcional pelo processo subtrativo.................. 32
Figura 23 – Aplicação da média proporcional pelo processo subtrativo.................. 33
Figura 24 – Aplicação 5.1.. 35
Figura 25 – Aplicação 5.2.. 37
Figura 26 – Aplicação 5.3.. 39
Figura 27 – Aplicação 5.4.. 41
Figura 28 – Aplicação 5.5.. 42
Figura 29 – Aplicação 5.6.. 44
Figura 30 – Aplicação 5.7.. 46
Figura 31 – Aplicação 5.8.. 49
Figura 32 – Aplicação 5.9.. 51
Figura 33 – Aplicação 5.10.. 56

Figura 34	–	Aplicação 5.11	57
Figura 35	–	Aplicação 5.12	60
Figura 36	–	Relação métrica na circunferência	60
Figura 37	–	Aplicação 5.13	61
Figura 38	–	Aplicação 5.14	63
Figura 39	–	Aplicação 5.15	64
Figura 40	–	Aplicação 5.16	65
Figura 41	–	Aplicação 5.17	67
Figura 42	–	Triângulo isósceles	67
Figura 43	–	Aplicação 5.18	71

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	**11**
2	**CONSTRUÇÕES FUNDAMENTAIS**	**12**
2.1	**Transporte de segmento**	**12**
2.2	**Operações com segmentos**	**12**
2.2.1	Soma de segmentos	12
2.2.2	Subtração de segmentos	13
2.3	**Mediatriz de um segmeto**	**13**
2.4	**Retas perpendiculares**	**14**
2.4.1	Construção da perpendicular que passa por um ponto qualquer, pertencente a uma reta	14
2.4.2	Construção da perpendicular que passa por um ponto dado, não pertencente à reta	15
2.4.3	Construção da perpendicular que passa pela extremidade de um segmento de reta	16
2.5	**Retas paralelas**	**16**
2.5.1	Construção da paralela a uma reta por um ponto dado fora dela	16
2.5.2	Construção das paralelas à reta r dada, dela distando um segmento dado	17
2.6	**Transporte de ângulo**	**18**
2.7	**Operações com ângulos**	**18**
2.7.1	Soma e subtração de ângulos	18
2.8	**Arco capaz**	**19**
3	**DIVISÃO DE SEGMENTOS EM PARTES DIRETAMENTE PROPORCIONAIS**	**21**
3.1	**Quarta e terceira proporcionais de segmentos dados**	**23**
3.2	**Quarta e terceira proporcionais reiteradas**	**25**
4	**MÉDIA PROPORCIONAL**	**28**
5	**APLICAÇÕES DIVERSAS**	**34**
5.1	**Obtenção da raiz da equação do 1º grau pelo método Euclidiano**	**34**
5.2	**Resolução gráfica de expressões irracionais**	**40**
5.3	**Resolução gráfica que envolvem expressões racionais e irracionais**	**49**
5.4	**Determinação de segmento conhecendo-se sua soma e sua média geométrica**	**56**
5.5	**Determinação de segmento conhecendo-se sua diferença e sua média geométrica**	**60**
5.6	**Resolução gráfica da equação do 2ºgrau**	**62**
6	**CONCLUSÃO**	**72**
	REFERÊNCIAS	**73**

1 INTRODUÇÃO

O Desenho Geométrico é uma importante disciplina do currículo escolar brasileiro. Por meio de traçados geométricos realizados com instrumentos, tais como: régua, compasso, esquadros e transferidor, essa disciplina possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico, da precisão, da organização matemática, além da criatividade (MARMO e MARMO, 1994).

De acordo com autores como Silva (2006) e Costa (2013), o ensino das construções geométricas pode contribuir para o entendimento dos conceitos das propriedades e das relações geométricas e algébricas, estudadas separadamente em Matemática. Nesse sentido, Zuin (2001) relata que o ensino das construções geométricas, visto na disciplina de Desenho Geométrico, propicia uma maior compreensão e embasamento teórico para o ensino da Geometria Plana. Mas, infelizmente, apesar de sua importância e potencialidades, essa disciplina hoje é estudada em poucas escolas brasileiras, sendo considerada somente como parte optativa do currículo escolar (ZUIN, 2001).

Sendo assim, este trabalho se desenvolve, inicialmente, com algumas construções geométricas fundamentais, seguidas de conteúdos ministrados no 9º Ano do Ensino Fundamental para, ao final, serem apresentadas atividades de aplicação desses conteúdos, com a finalidade de mostrar a importância da disciplina Desenho Geométrico. O nosso objetivo será alcançado na medida em que o aluno for capaz de perceber que, com o simples uso de régua e compasso, poderá resolver problemas, os quais, aparentemente, só seriam resolvidos com a álgebra.

2 CONSTRUÇÕES FUNDAMENTAIS

Na sequência, serão apresentadas algumas construções fundamentais indispensáveis ao nosso estudo.

2.1 Transporte de segmento

Nesta seção, veremos como realizar o transporte gráfico de segmento, que consiste em construir um segmento congruente a um segmento dado.

Considere o segmento AB, construa um segmento CD tal que $\overline{CD} = \overline{AB}$.

Construção:

Trace uma reta suporte r e marque sobre ela um ponto C. Com o compasso, centre em C, abertura $\overline{AB}$ e marque sobre r o ponto D, obtendo o segmento CD, tal que $\overline{CD} = \overline{AB}$.

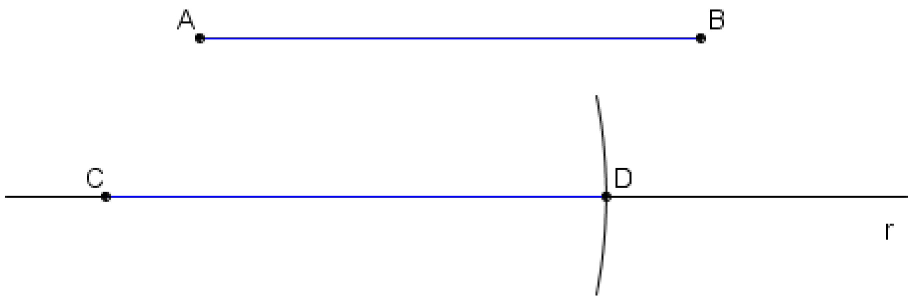


Figura 1- Transporte de segmento

2.2 Operações com segmentos

Veremos, nesta seção, duas operações gráficas com segmentos, a soma e a subtração.

2.2.1 Soma de segmentos

Dados os segmentos AB e CD, construa o segmento EF, tal que $\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{CD}$.

Construção:

Trace uma reta suporte r e marque sobre ela um ponto E. Com o compasso, centre em E, abertura $\overline{AB}$ e marque, sobre r, o ponto M, obtendo o segmento EM, tal que $\overline{EM} = \overline{AB}$. Agora, centre em M, abertura $\overline{CD}$ e marque, sobre r, o ponto F, obtendo o segmento MF, tal que $\overline{MF} = \overline{CD}$ e $M \in EF$. Das operações realizadas, resulta que $\overline{EF} = \overline{AB} + \overline{CD}$.

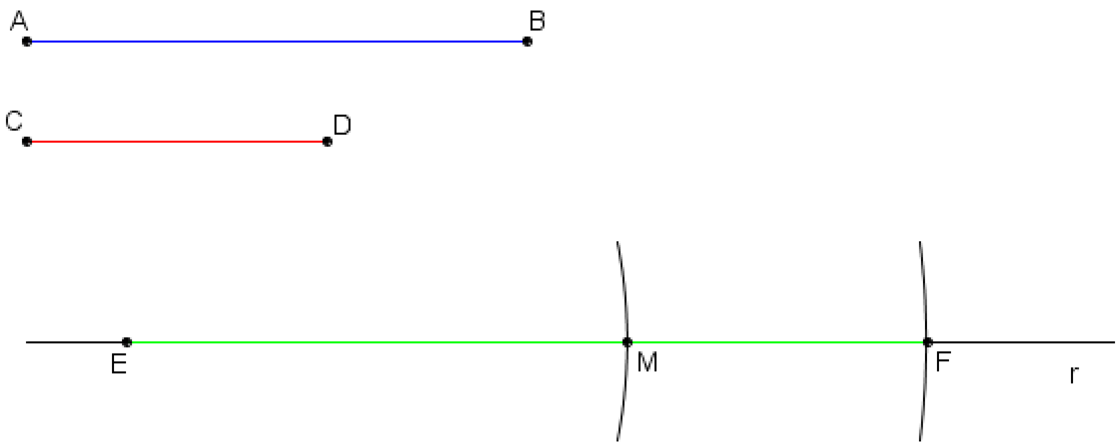


Figura 2 - Soma de segmentos

2.2.2 Subtração de segmentos

Dados os segmentos AB e CD, com $\overline{AB} > \overline{CD}$. Construa o segmento GH, tal que $\overline{GH} = \overline{AB} - \overline{CD}$.

Construção:

Trace uma reta suporte r e marque sobre ela um ponto O. Com o compasso, centre em O, com abertura $\overline{AB}$ marque, sobre r, o ponto H, obtendo o segmento OH, tal que $\overline{OH} = \overline{AB}$. Agora, centre em O, com abertura $\overline{CD}$ marque, sobre r, o ponto G, obtendo o segmento OG, tal que $\overline{OG} = \overline{CD}$ e $G \in OH$. Com essas construções, obtemos $\overline{GH} = \overline{AB} - \overline{CD}$.

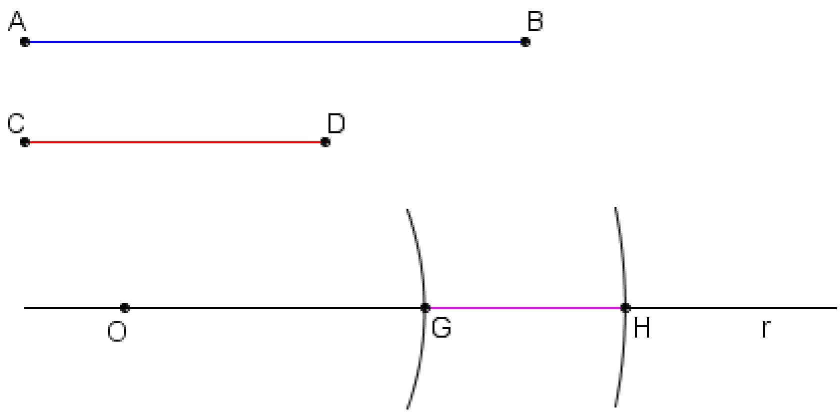


Figura 3 - Subtração de segmentos

2.3 Mediatriz de um segmento

Nesta seção, veremos como construir a mediatriz de um segmento de reta.

A mediatriz é uma reta que passa pelo ponto médio do segmento e é perpendicular a ele. Tal construção nos permitirá construir retas perpendiculares a outras retas, como veremos mais adiante.

Construção:

Dado o segmento AB. Trace os círculos de centro em A e B, com raio R maior do que a metade do segmento AB. Esses dois círculos se intersectam em dois pontos, C e D, que ligados com a régua, oferece-nos a reta r que passa pelo ponto médio M do segmento AB e é perpendicular a ele.

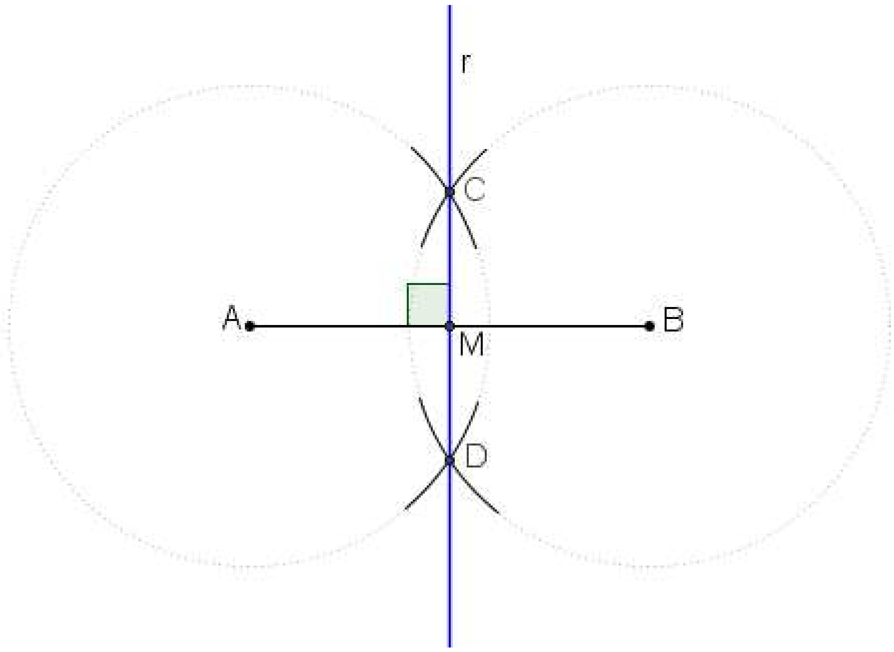


Figura 4 – Mediatriz de um segmento

Justificativa:

Observe que, $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BD}$, portanto ACBD forma um losango, que sabemos ter as diagonais $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ perpendiculares entre si e se intersectando no ponto médio.

2.4 Retas Perpendiculares

Nesta seção, apresentaremos três casos para construção de retas perpendiculares.

2.4.1 Construção da perpendicular que passa por um ponto qualquer, pertencente a uma reta

Construção:

Seja a reta r e um ponto P pertencente a ela. Centre em P, com abertura R qualquer, trace um círculo que intersecte a reta r nos pontos A e B. Agora, trace os círculos de centro em A e B, com raio $R' > R$. Esses dois círculos se intersectam em dois pontos, C e D, que ligados com a régua, oferece-nos a reta s que passa por P e é perpendicular à reta r.

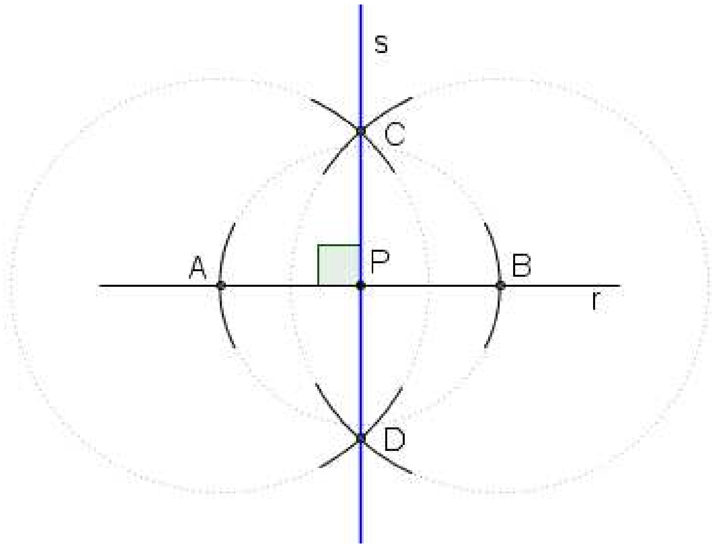


Figura 5 – Reta perpendicular à reta r passando por um ponto $P \in r$

Justificativa:

Note que P é ponto médio do segmento AB, daí o item 2.3 justifica a construção.

2.4.2 Construção da perpendicular que passa por um ponto dado, não pertencente à reta

Construção:

Seja a reta r e um ponto P fora dela. Centre em P, com abertura R qualquer, trace um círculo que intersecte a reta r em pelo menos dois pontos, A e B. Agora, trace os círculos de centro em A e B, com raio R' maior do que a metade do segmento AB. Esses dois círculos se intersectam em dois pontos, C e D, que ligados com a régua nos dá a reta s que passa por P e é perpendicular à reta r.

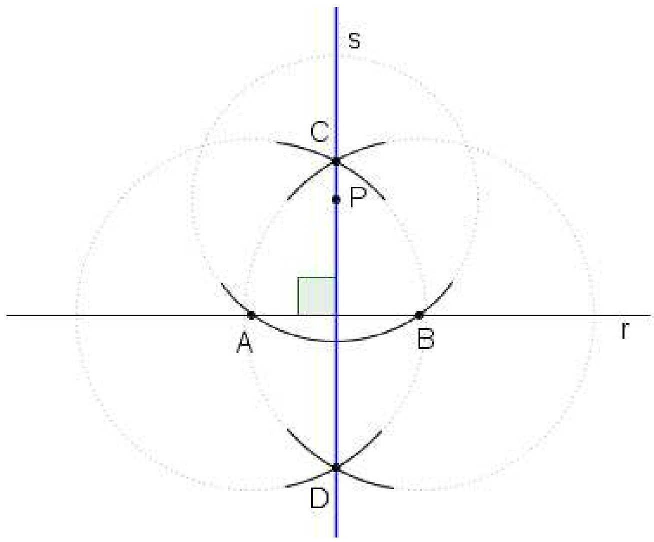


Figura 6 - Reta perpendicular à reta r passando por um ponto $P \notin r$

Justificativa:

Veja que P é equidistante de A e B, portanto pertence à mediatriz do segmento AB, na figura, representada pela reta s. E como já sabemos, s é perpendicular ao segmento AB.

2.4.3 Construção da perpendicular que passa pela extremidade de um segmento de reta

Construção:

Seja o segmento AB. Para construir uma perpendicular passando por B (passando por A, a construção é análoga), basta fazer o prolongamento do segmento a partir da extremidade B, à direita, de modo que, ao traçar o círculo de centro B e raio R, intersecte o segmento e o prolongamento, obtendo os pontos C e D. Então proceda como em 2.3, determinando a mediatriz do segmento CD.

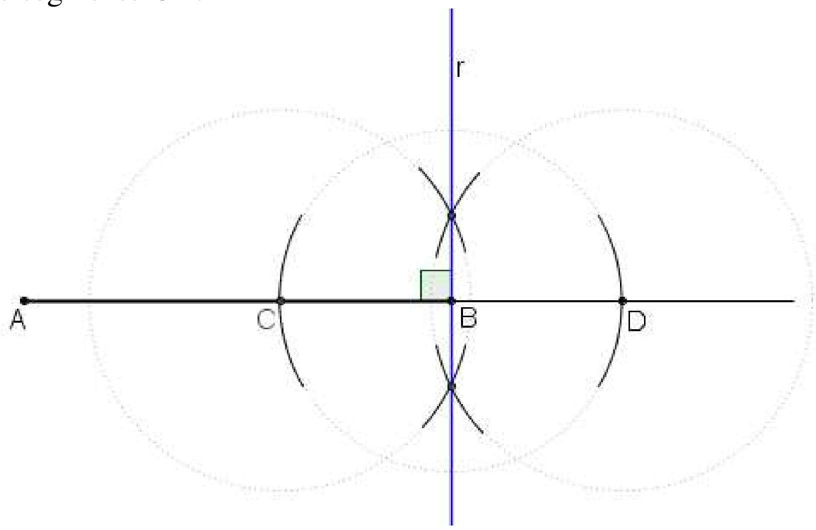


Figura 7 – Reta perpendicular ao segmento AB, passando pela extremidade B

Justificativa:

Note que B é ponto médio do segmento CD. Portanto a mediatriz do segmento CD passa por B e é perpendicular a ele, e, consequentemente, também ao segmento AB.

2.5 Retas Paralelas

Apresentaremos, nesta seção, dois casos para construção de retas paralelas.

2.5.1 Construção da paralela a uma reta por um ponto dado fora dela

Construção:

Seja a reta r e um ponto P fora dela. Tome sobre r um ponto O, que não seja a projeção ortogonal de P sobre r, trace o círculo de centro O e raio $\overline{OP}$, obtendo os pontos C e D, interseções com a reta r. Agora, trace o círculo de centro C e raio $\overline{DP}$, que intersectará o círculo de centro O e raio $\overline{OP}$ no ponto E, situado no mesmo semiplano de P em relação à reta r. Ligando, com a régua, os pontos E e P, obtemos a reta s que passa por P e é paralela à reta r.

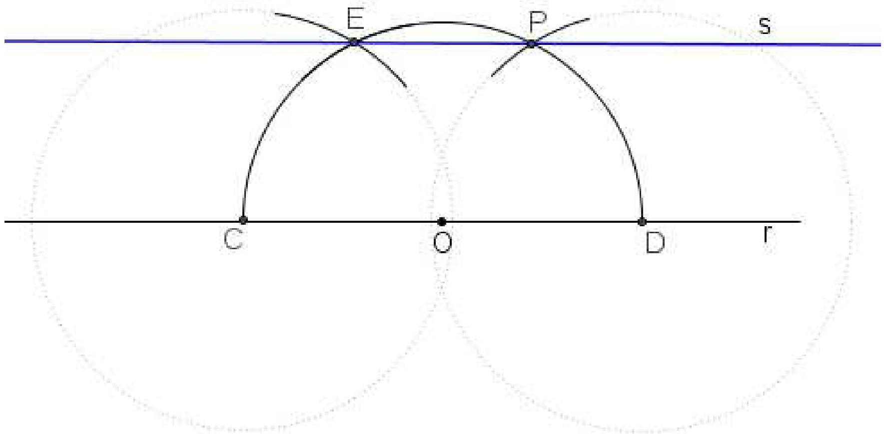


Figura 8 - Reta paralela à reta r passando por um ponto $P \notin r$

Justificativa:

Como os triângulos COE e DOP são congruentes (caso LAL), suas alturas são congruentes, logo, $\overleftrightarrow{EP}$ é paralela a r.

2.5.2 Construção das paralelas à reta r dada, dela distando um segmento dado

Construção:

Seja a reta r e um segmento AB. Por um ponto P qualquer pertencente à reta r, trace uma reta t perpendicular a r, conforme descrito no item 2.4.1. Em seguida, trace o círculo de centro P e raio $\overline{AB}$, obtendo os pontos C e D, interseções com a reta t. Construa agora, por C e D, as retas paralelas à reta r, como descrito em 2.5.1.

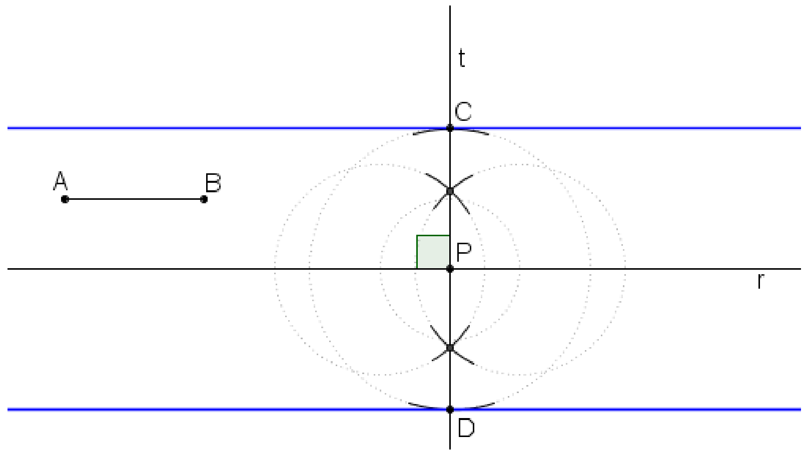


Figura 9 - Construção das paralelas à reta r, dela distando o segmento AB

2.6 Transporte de ângulo

Consiste, a partir de um ângulo conhecido, obter um ângulo congruente a ele.

Construção:

Dado um ângulo $B\hat{A}C$. Para construção do ângulo $B'\hat{A'}C'$ congruente ao ângulo $B\hat{A}C$, trace um círculo com centro em A e raio R qualquer, obtendo os pontos D e E, interseções com os lados do ângulo $B\hat{A}C$. Agora, considere a semirreta $A'B'$, centre em A' com abertura R e trace um círculo que intersectará a semirreta $A'B'$ no ponto D'. Em seguida, centre em D', com abertura $\overline{DE}$, trace um círculo, obtendo o ponto C', uma das interseções com o círculo de centro A' e raio R. Ligue, com a régua, os pontos A' e C', obtendo o ângulo $B'\hat{A'}C'$. A figura 10 ilustra a construção.

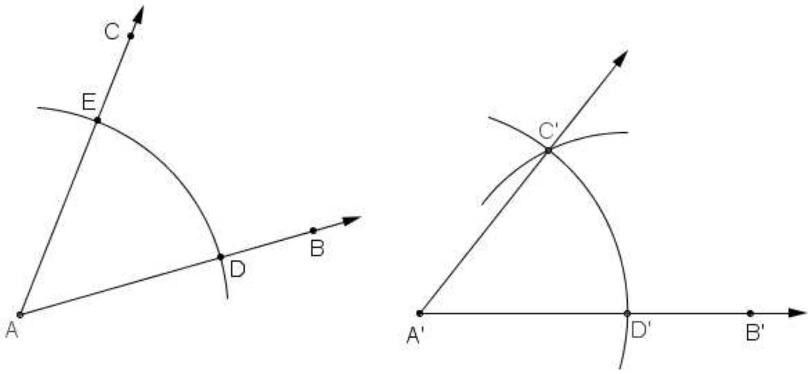


Figura 10 – Transporte de ângulo

2.7 Operações com ângulos

Veremos, nesta seção, duas operações gráficas com ângulos, a soma e a subtração.

2.7.1 Soma e subtração de ângulos

Dados os ângulos $B\hat{A}C$ e $E\hat{D}F$, com $B\hat{A}C > E\hat{D}F$, construa os ângulos $H\hat{G}I$ e $H\hat{G}L$, tais que $H\hat{G}I = B\hat{A}C + E\hat{D}F$ e $H\hat{G}L = B\hat{A}C - E\hat{D}F$.

Construção:

Trace um círculo com centro em A e abertura R, obtendo os pontos B’ e C’, respectivamente, interseções com as semirretas AB e AC. Agora, trace um círculo com centro D e raio R, obtendo os pontos E’ e F’, respectivamente, interseções com as semirretas DE e DF. Considere, agora, a semirreta GJ. Centre em G e trace o círculo de raio R, obtendo o ponto $H \in \overrightarrow{GJ}$. Trace o círculo de centro H e raio $\overline{B'C'}$, obtendo o ponto E, uma das interseções com o círculo de centro G e raio R. Para finalizar, centre em E, com abertura $\overline{E'F'}$ e trace o círculo, obtendo os pontos I e L, interseções com o círculo de centre G e raio R.

Na construção realizada, pelo item 2.6, transporte de ângulos, temos que $B\hat{A}C = H\hat{G}E$ e $E\hat{D}F = L\hat{G}E = E\hat{G}I$. Donde concluímos que, $H\hat{G}I = B\hat{A}C + E\hat{D}F$ e $H\hat{G}L = B\hat{A}C - E\hat{D}F$. A figura 11 ilustra a construção.

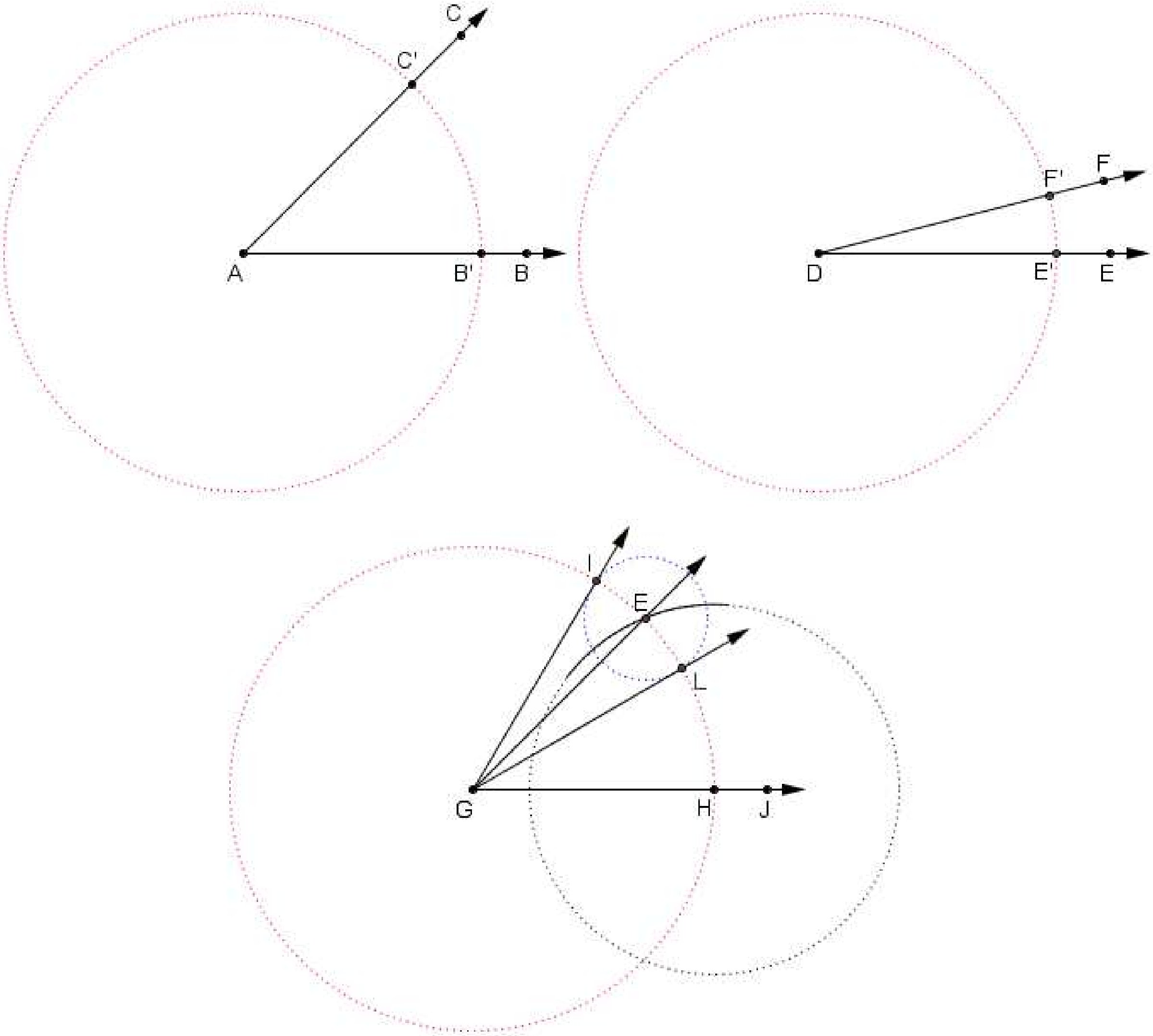


Figura 11 – Soma e subtração de ângulos

2.8 Arco capaz

O arco capaz é o lugar geométrico dos pontos do plano que possuem a propriedade de ver um segmento dado sob um mesmo ângulo, também dado, ou seja, qualquer ponto desse arco, unido às extremidades do segmento dado, determina o mesmo ângulo.

Construção:

Dado o ângulo $D\hat{O}C$ e um segmento AB. Construa um ângulo $B\hat{A}X$ congruente ao ângulo $D\hat{O}C$, de forma que $B\hat{A}X$ fique no semiplano inferior determinado por $\overleftrightarrow{AB}$. Trace, agora, uma reta r, perpendicular à semirreta AX, passando por A. Em seguida, construa a mediatriz do segmento AB, que intersectará a reta r no ponto O. Para finalizar, construa o círculo de centro O e raio $\overline{OA} = \overline{OB}$. O arco capaz do ângulo $D\hat{O}C$ sobre o segmento AB é o arco de extremidades A e B, situado no semiplano superior determinado por $\overleftrightarrow{AB}$. Para obter o arco capaz do ângulo $D\hat{O}C$ sobre o segmento AB, situado no semiplano inferior determinado por $\overleftrightarrow{AB}$, basta traçar o círculo de centro M, ponto médio de $\overleftrightarrow{AB}$, e raio $\overline{MO}$, que intersectará a mediatriz de $\overleftrightarrow{AB}$ no ponto O'. De modo análogo ao anterior, desta vez centrando em O', com abertura $\overline{O'A} = \overline{O'B}$, faça o círculo, obtendo o arco de extremidades A e B, situado no semiplano inferior determinado por $\overleftrightarrow{AB}$. A figura abaixo ilustra a construção.

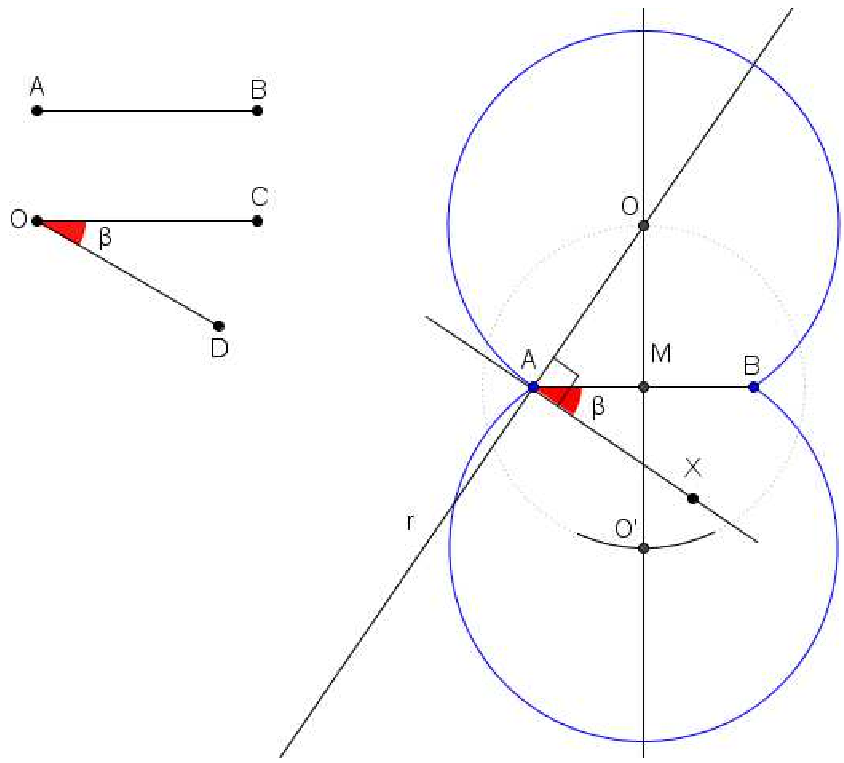


Figura 12 – Arco capaz

3 DIVISÃO DE SEGMENTOS EM PARTES DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Inicialmente, trataremos, neste capítulo, sobre a divisão de um segmento em partes diretamente proporcionais a outros segmentos dados. Nas seções seguintes, trataremos da quarta e terceira proporcionais, ferramentas importantes para a construção das raízes das equações do 1º grau e outras aplicações.

Os fundamentos geométricos para realizar tal divisão encontram-se no Teorema de Thales. Vejamos algumas definições antes de enunciá-lo.

Definição 3.1. *Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.*

Definição 3.2. *Transversal do feixe de retas paralelas é uma reta do plano do feixe que concorre com todas as retas do feixe.*

Definição 3.3. *Pontos correspondentes de duas transversais são pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe.*

Definição 3.4. *Segmentos correspondentes de duas transversais são segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes. Na figura abaixo, temos* A e A', B e B', C e C', D e D' *são pontos correspondentes e* $\overline{AB}$ *e* $\overline{A'B'}$ *,* $\overline{CD}$ *e* $\overline{C'D'}$ *são segmentos correspondentes.*

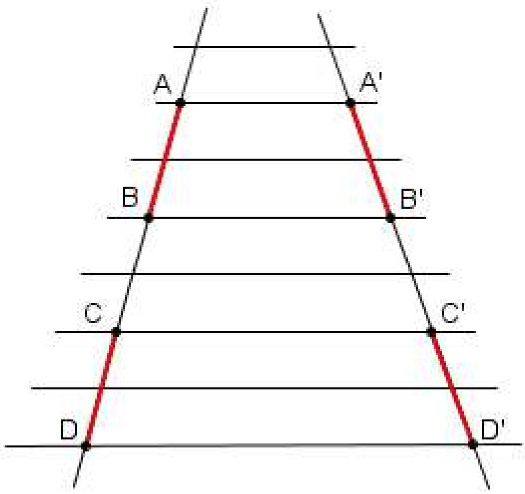


Figura 13 – Feixe de paralelas cortado por transversais

Destacamos a propriedade abaixo envolvendo retas transversais e feixe de retas paralelas.

Se duas retas transversais de um feixe de retas paralelas distintas e um segmento de uma delas é dividido em p partes congruentes entre si e pelos pontos de divisão são *conduzidas retas do feixe, então o segmento correspondente da outra transversal também é dividido em p partes e essas partes também são congruentes entre si.*

Proposição 3.1 (Teorema de Thales). *Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.*

Vejamos agora, através do exemplo abaixo, como se obtém a divisão de um segmento dado em partes diretamente proporcionais a outros segmentos, também dados.

Exemplo 3.1. Dado o segmento AB, dividi-lo em partes diretamente proporcionais aos segmentos de medidas a, b e c.

Construção

Traça-se uma semirreta de origem em A, extremidade do segmento AB, passando pelo ponto X, situado no semiplano inferior determinado por $\overleftrightarrow{AB}$. Construa a circunferência de centro em A e raio a. A interseção dessa circunferência com $\overrightarrow{AX}$, determina o ponto C, tal que $\overline{AC} = a$. Repita o procedimento, agora construindo a circunferência de centro C e raio b determinando o ponto D, interseção dessa circunferência com $\overrightarrow{AX}$, tal que $\overline{CD} = b$. Agora, construa a circunferência de centro em D e raio c. A interseção dessa circunferência com $\overrightarrow{AX}$, determina o ponto E, tal que $\overline{DE} = c$. Trace a reta r que passa pelos pontos E e B, e construa as retas s e t, paralelas à reta r, passando, respectivamente, pelos pontos D e C. As retas s e t intersectam o segmento AB, respectivamente, nos pontos F e G. A figura 14 ilustra a construção.

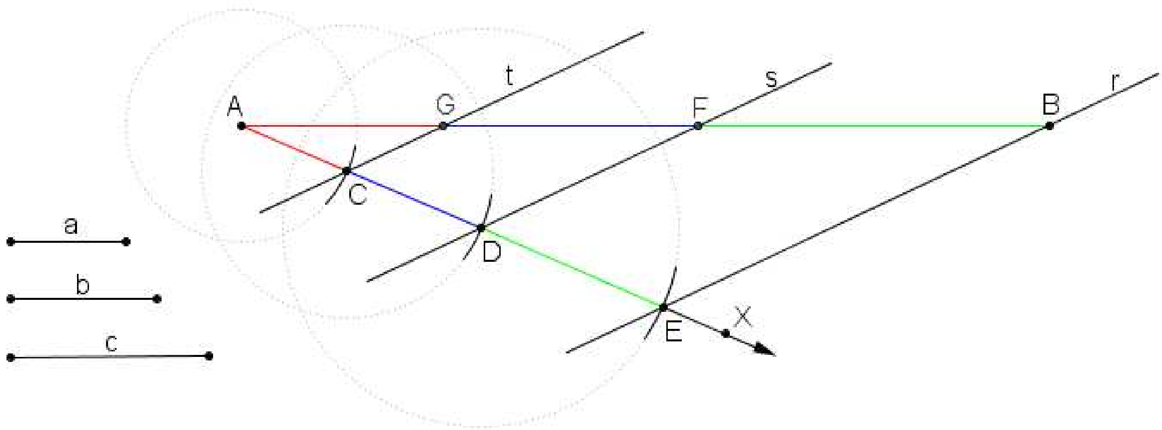


Figura 14 – Divisão de segmento em partes diretamente proporcionais

Note que, pelo Teorema de Thales, $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{GF}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{FB}}{\overline{DE}}$.

3.1 Quarta e terceira proporcionais de segmentos dados

Nesta seção, veremos como obter, graficamente, a quarta e a terceira proporcionais de segmentos dados. Tal procedimento, fundamenta-se no Teorema de Thales.

Como sabemos, chamamos **quarta proporcional** a três números reais positivos, o número real positivo x que com eles formam uma proporção. Sendo assim, dados três números, nas condições anteriores, dependendo da ordem que eles são apresentados, podemos obter três soluções.

Assim, sejam dados os números a, b e c, o número x que com eles formam uma proporção pode ser determinado através das expressões abaixo.

1ª) $x = \frac{bc}{a}$

2ª) $x = \frac{ac}{b}$

3ª) $x = \frac{ab}{c}$

O nosso propósito é determinar, graficamente, a partir de três segmentos conhecidos, um segmento que, com eles formam uma proporção. Para dar um tratamento gráfico ao problema, utilizaremos a construção apresentada no início do capítulo, por meio da qual mostramos como dividir um segmento dado, em partes proporcionais a outros segmentos conhecidos.

Exemplo 3.2. Sejam dados os segmentos de reta AB, CD e EF. Obtenha o segmento GH, tal que $\overline{GH} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{EF}}$.

Da igualdade, obtemos a proporção $\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{GH}}$, donde concluímos que o segmento GH é a quarta proporcional dos segmentos EF, AB e CD, dados nessa ordem. Observe que o segmento GH poderia ser obtido, também, através da proporção $\frac{\overline{EF}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{GH}}$.

Para obter, graficamente, o segmento GH, façamos a construção descrita abaixo.

Construção:

Inicialmente, traçam-se as semirretas $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$, conforme figura 15. Construa a circunferência de centro em O e raio $\overline{EF}$. A interseção dessa circunferência com $\overrightarrow{OX}$, determina o ponto R, tal que $\overline{OR} = \overline{EF}$. Repita o procedimento, agora construindo a circunferência de centro O e raio $\overline{AB}$, determinando o ponto S sobre $\overrightarrow{OY}$, tal que $\overline{OS} = \overline{AB}$. Agora, construa a circunferência de centro em R e raio $\overline{CD}$. A interseção dessa circunferência com $\overrightarrow{OX}$, determina o ponto T, tal que $\overline{RT} = \overline{CD}$. Trace a reta r definida por R e S e em seguida a reta t paralela à reta r, passando por T. A interseção da reta t com $\overrightarrow{OY}$ nos dá o ponto U. Daí, pelo Teorema de Thales, temos que $\frac{\overline{OR}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{RT}}{\overline{SU}}$, donde concluímos que $\overline{GH} = \overline{SU} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{EF}}$.

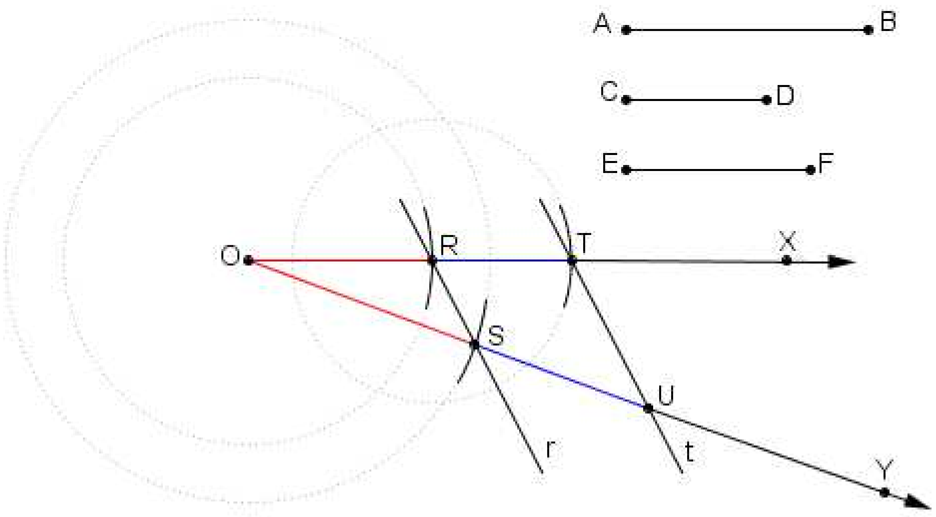


Figura 15 – Quarta proporcional

Chamamos de proporção contínua a proporção que tem meios ou extremos iguais. Nela qualquer dos termos não repetidos é a terceira proporcional ao que se repete e ao outro. Por exemplo, na proporção $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, **a** é a terceira proporcional a **b** e **c**, e **c** é a terceira proporcional a **b** e **a**.

Portanto, dados dois números reais positivos e distintos, há duas possibilidades de se obter um terceiro número, que com eles formam uma proporção contínua e que será chamado de **terceira proporcional**.

Sejam dados os números a e b. O número x que com eles formam uma proporção contínua, pode ser determinado através das expressões abaixo.

1ª) $\frac{a}{b} = \frac{b}{x} \Rightarrow x = \frac{b^2}{a}$

2ª) $\frac{b}{a} = \frac{a}{x} \Rightarrow x = \frac{a^2}{b}$

Assim como no estudo da quarta proporcional, o nosso propósito é determinar, graficamente, a terceira proporcional de dois segmentos dados. Portanto, basta observar que, onde se lê $x = \frac{b^2}{a}$, podemos entender como $x = \frac{b \cdot b}{a}$ donde tiramos a proporção $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$. Daí, utilizando o processo visto no exemplo anterior, determina-se o segmento de comprimento x.

Exemplo 3.3. Sejam dados os segmentos de reta AB e CD. Obtenha o segmento EF, tal que $\overline{EF} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}}$.

Da igualdade, obtemos $\overline{EF} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AB}}{\overline{CD}}$ e a proporção $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$, donde concluímos que o segmento EF é a terceira proporcional dos segmentos AB e CD, com o segmento AB se repetindo. A construção é idêntica à feita para determinar a quarta proporcional. A figura 16 ilustra a construção e nela temos: $\overline{OR} = \overline{CD}$, $\overline{OS} = \overline{AB}$, $\overline{RT} = \overline{AB}$ e $\overline{SU} = \overline{EF}$.

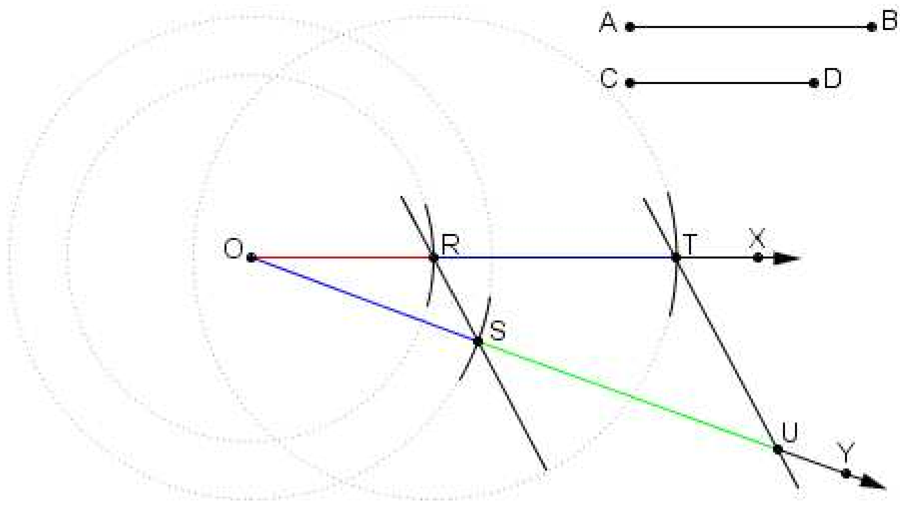


Figura 16 – Terceira proporcional

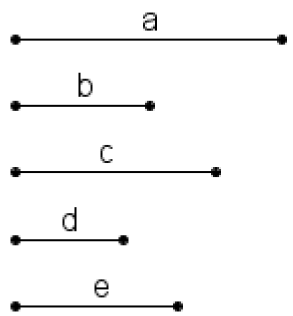
3.1 Quarta e terceira proporcionais reiteradas

É um processo que permite determinar expressões do tipo $x = \frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$. Consiste em fazer transformações na expressão dada, a fim de se obter uma expressão equivalente e que apareça em sua composição, quartas ou terceiras proporcionais.

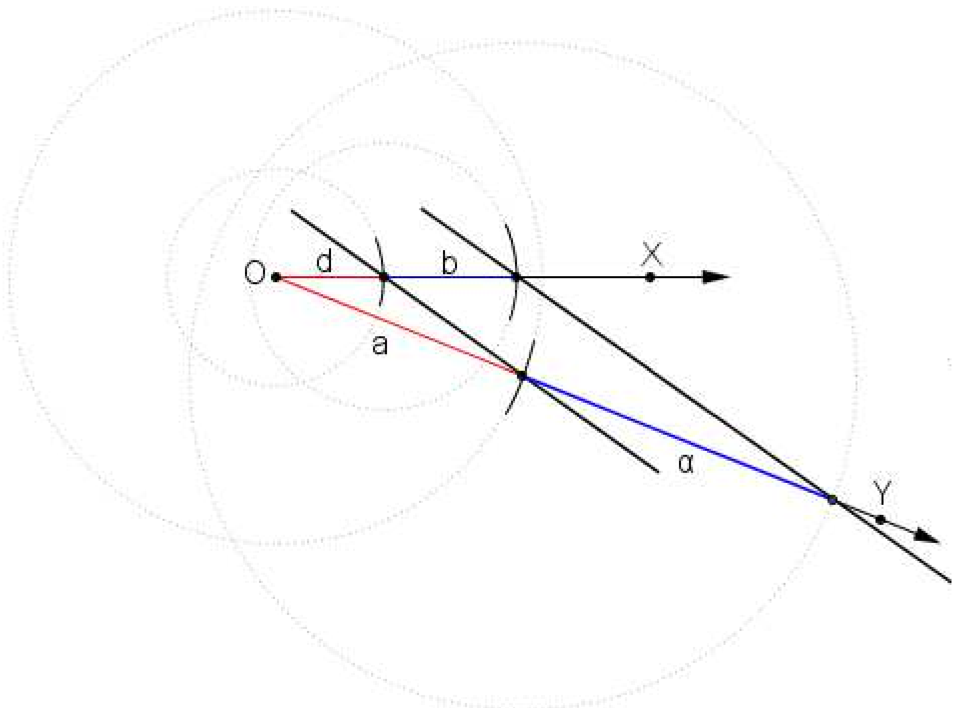
Veja que na expressão $x = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$, após efetuarmos algumas operações, sem com isso alterá-la, encontramos $x = \dfrac{a \cdot b}{d} \cdot \dfrac{c}{e}$ e, nela, identificamos uma quarta proporcional $\alpha = \dfrac{a \cdot b}{d}$. Após obter α, pelo processo descrito no estudo da quarta proporcional, ficamos com $x = \dfrac{\alpha \cdot c}{e}$, recaindo, mais uma vez, numa quarta proporcional. Veja como fica a solução gráfica.

Considere a, b, c, d e e como sendo as medidas dos segmentos que compõem a expressão acima. Para a determinação gráfica de x, façamos, inicialmente, a construção que determina o α, para em seguida, de posse de α, determinar o x.

Dados:



Construção de α.



Construção de x.

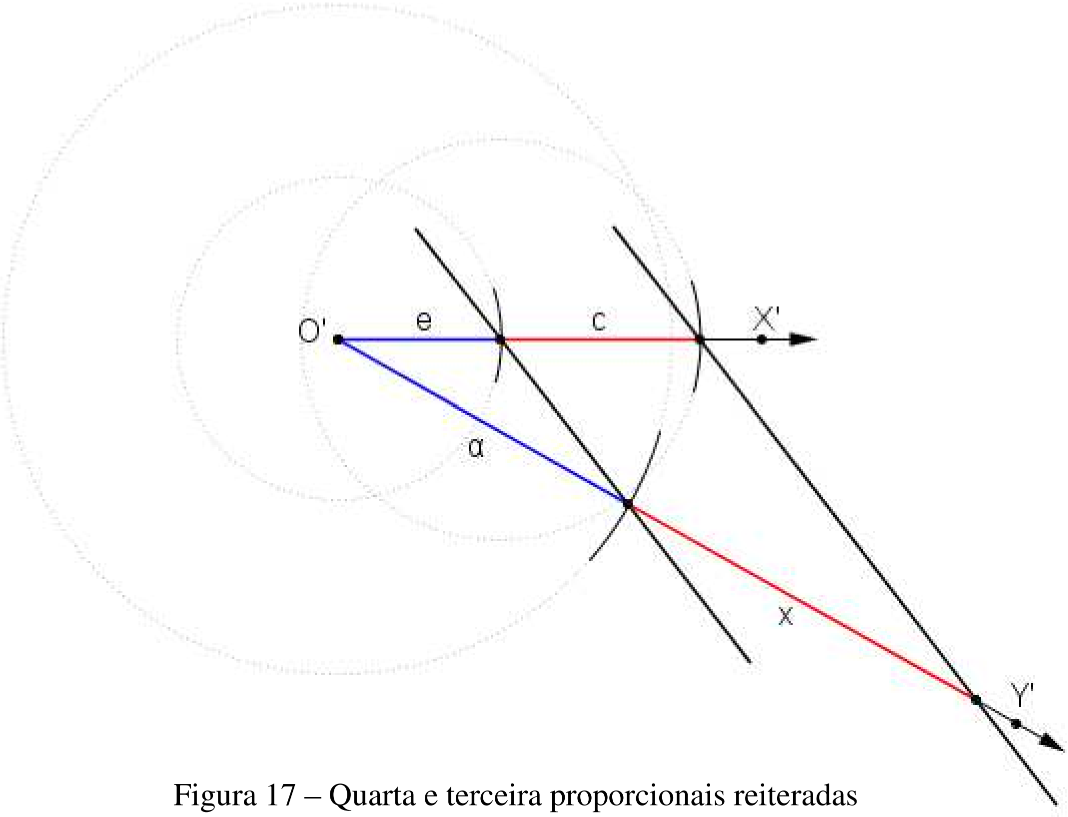


Figura 17 – Quarta e terceira proporcionais reiteradas

Cabe ressaltar que uma expressão pode ser expressa como uma composição de quartas e terceiras proporcionais. Por exemplo, a expressão $x = \frac{a^2 \cdot b}{c \cdot d} = \frac{\left(\frac{a^2}{c}\right) \cdot b}{d}$. Fazendo $\alpha = \frac{a^2}{c}$, que é uma terceira proporcional, a expressão que determina x, fica $x = \frac{\alpha \cdot b}{d}$, que é uma quarta proporcional.

4 MÉDIA PROPORCIONAL

Já aprendemos a construir as principais expressões racionais do primeiro grau por intermédio da quarta e terceira proporcionais. Estudaremos, neste capítulo, algumas expressões irracionais do primeiro grau que possuem apenas radicais de índice dois, tais como $x = \sqrt{2ab}$, $x = a\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3a^2 - 2b^2}$.

Para construir expressões dessa natureza, faremos uso da média proporcional e de algumas relações métricas no triângulo retângulo. Vejamos, então, esses conceitos.

Definimos, como média proporcional ou geométrica dos n números positivos n_1, n_2,...,n_n, o número p dado por

$$p = \sqrt[n]{n_1 n_2 \dots n_n}.$$

No nosso caso, trabalharemos apenas com a média proporcional de duas grandezas ou dois segmentos dados. Portanto, conforme definição, dados dois segmentos de comprimentos a e b, o comprimento x do segmento que expressa a média proporcional entre ambos, será dado por $x = \sqrt{ab}$. Mais adiante, veremos como obter tal resultado graficamente.

Antes, vejamos algumas relações métricas no triângulo retângulo.

Seja ABC um triângulo retângulo em A, com catetos, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e a hipotenusa $\overline{BC} = a$. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{CH} = m$, $\overline{BH} = n$ e $\overline{AH} = h$, temos:

(a) $h^2 = mn$.

(b) $b^2 = am$.

(c) $c^2 = an$.

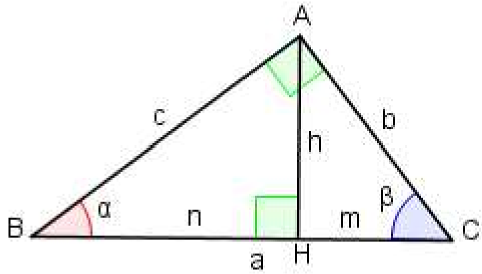


Figura 18 – Triângulo retângulo

Demonstração: Conforme figura 18, os triângulos ABH e ACH; ABH e ABC; e ACH e ABC são semelhantes, pelo caso AA. Assim, nessa ordem de semelhança entre os triângulos, concluímos que $\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AH}}$, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}}$ ou ainda, $\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$, $\frac{c}{a} = \frac{n}{c}$ e $\frac{b}{a} = \frac{m}{b}$, donde vem que $h^2 = mn$, $c^2 = an$ e $b^2 = am$.

Somando, membro a membro, as relações $c^2 = an$ e $b^2 = am$, obtemos $a(m+n) = b^2 + c^2$. Mas m + n = a, donde concluímos que $a^2 = b^2 + c^2$. Tal relação é o conteúdo do famoso **teorema de Pitágoras**.

Agora, estamos em condições de determinar, graficamente, expressões do tipo $x = \sqrt{yz}$. Observe que a expressão ainda pode ser dada como $x^2 = yz$, o que nos faz recordar uma das relações métricas no triângulo retângulo vista acima.

Pois bem, associando a expressão $x^2 = yz$ à relação $h^2 = mn$, entendemos que o x corresponde à altura h relativa à hipotenusa e, y e z, como sendo as projeções m e n dos catetos sobre a hipotenusa.

Considere, então, y e z como sendo as medidas dos segmentos que representam as projeções dos catetos sobre a hipotenusa e x o comprimento, a ser determinado, da altura relativa à hipotenusa. O processo que nos permite obter o segmento de medida x, está descrito abaixo e, é conhecido como **processo aditivo**.

Construção:

Trace uma reta suporte r e marque sobre ela o ponto A. Centre em A, com abertura y, obtenha o ponto B, sobre a reta r, tal que $\overline{AB} = y$. Agora centre em B, com abertura z, obtenha o ponto C, sobre a reta r, tal que $\overline{BC} = z$ e $B \in \overline{AB}$. O que fizemos foi realizar dois transportes de segmentos, conforme visto na seção 2.1. O próximo passo é determinar o ponto médio do segmento AC. Para tal, faça a construção da mediatriz do segmento AC, conforme descrito na seção 2.3. A interseção da mediatriz com a reta r nos dá o ponto O, ponto médio do segmento AC. Em seguida, construa o semicírculo de centro O e raio $\overline{OA}$ que, como sabemos corresponde ao arco capaz de 90º. Logo qualquer ponto pertencente ao semicírculo, ligado com as extremidades A e C do segmento AC, formará um triângulo retângulo. Portanto, para determinar o segmento de medida x pretendido, basta traçar uma perpendicular pelo ponto B, construção feita na seção 2.4.1, e obter o ponto D, interseção da perpendicular com o semicírculo. O segmento de medida x procurado é o segmento BD. Veja figura 19.

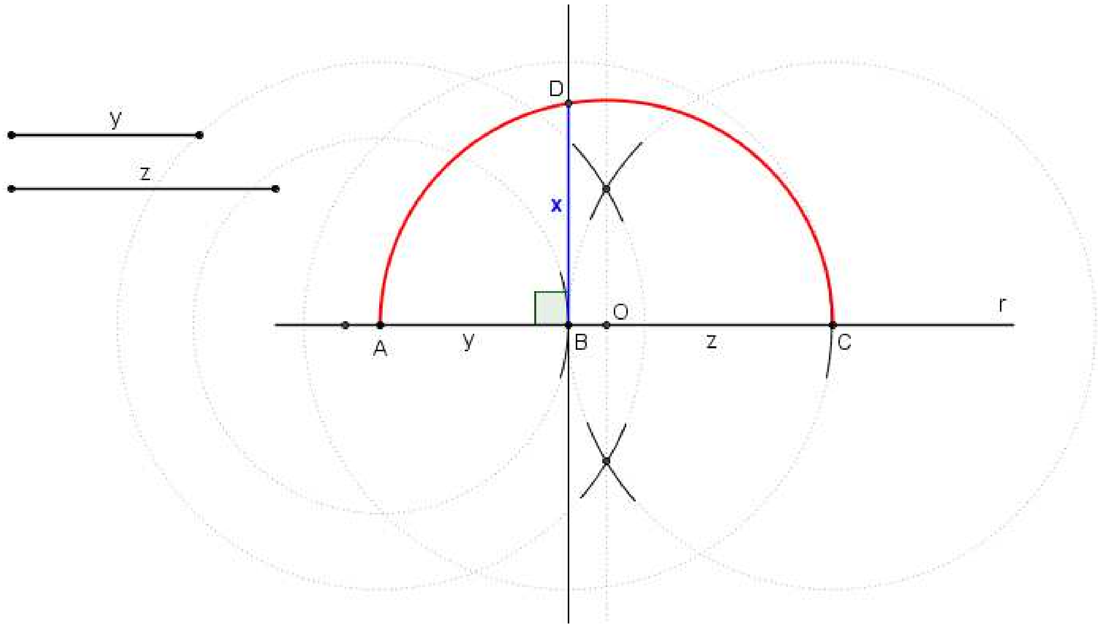


Figura 19 – Média proporcional pelo processo aditivo

No caso de associar a expressão $x^2 = yz$ à relação $b^2 = am$, entendemos que o x corresponde ao cateto b e, y e z, como sendo, respectivamente, a hipotenusa a e a projeção m do cateto b sobre a hipotenusa.

Considere, então, y e z como sendo as medidas dos segmentos que representam, respectivamente, a hipotenusa a, e a projeção m do cateto b sobre a hipotenusa e x o comprimento, a ser determinado, do cateto b. O processo que nos permite obter o segmento de medida x, está descrito abaixo e, é conhecido como **processo subtrativo.**

Construção:

Trace uma reta suporte r e marque sobre ela o ponto A. Centre em A, com abertura y, obtenha o ponto B, sobre a reta r, tal que $\overline{AB} = y$. Agora centre em A, com abertura z, obtenha o ponto C, sobre a reta r, tal que $\overline{AC} = z$ e $C \in \overline{AB}$. O que fizemos foi realizar dois transportes de segmentos, conforme visto na seção 2.1. O próximo passo é determinar o ponto médio do segmento AB. Para tal, faça a construção da mediatriz do segmento AB, conforme descrito na seção 2.3. A interseção da mediatriz com a reta r, nos dá o ponto O, ponto médio do segmento AB. Em seguida, construa o semicírculo de centro O e raio $\overline{OA}$ que, como sabemos corresponde ao arco capaz de 90º. Logo, qualquer ponto pertencente ao semicírculo, ligado com as extremidades A e B do segmento AB, formará um triângulo retângulo. Portanto, para determinar o segmento de medida x pretendido, basta traçar uma perpendicular pelo ponto C, construção feita na seção 2.4.1, e obter o ponto D, interseção da perpendicular com o semicírculo. O segmento de medida x procurado é o segmento AD. Veja figura 20.

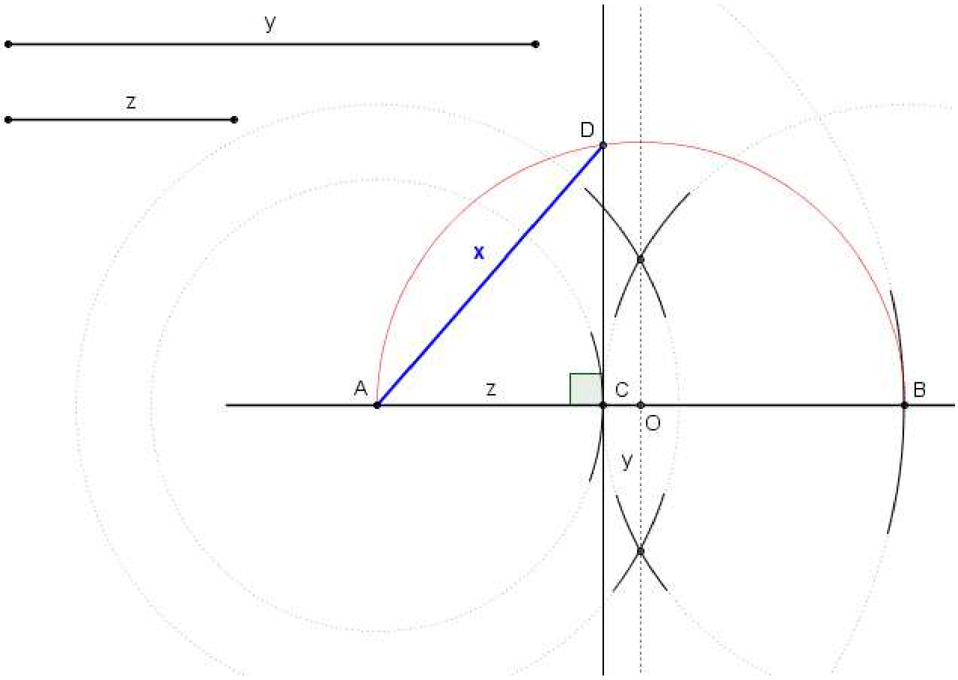


Figura 20 – Média proporcional pelo processo subtrativo

Vejamos alguns exemplos de aplicação da média proporcional.

Exemplo 4.1. Determine, graficamente, o comprimento x de um segmento, dado pela expressão $x = a\sqrt{3}$, onde a é o comprimento de um segmento conhecido.

A ideia é fazer com que x fique determinado a partir de uma média proporcional, a fim de utilizar uns dos processos já vistos. Portanto reescrevemos a expressão $x = a\sqrt{3}$, como $x = \sqrt{a^2 3} = \sqrt{a(3a)}$. Logo, para se determinar a expressão $x = a\sqrt{3}$, é suficiente construir a média proporcional entre a e 3a. A figura 21 ilustra a construção pelo processo aditivo.

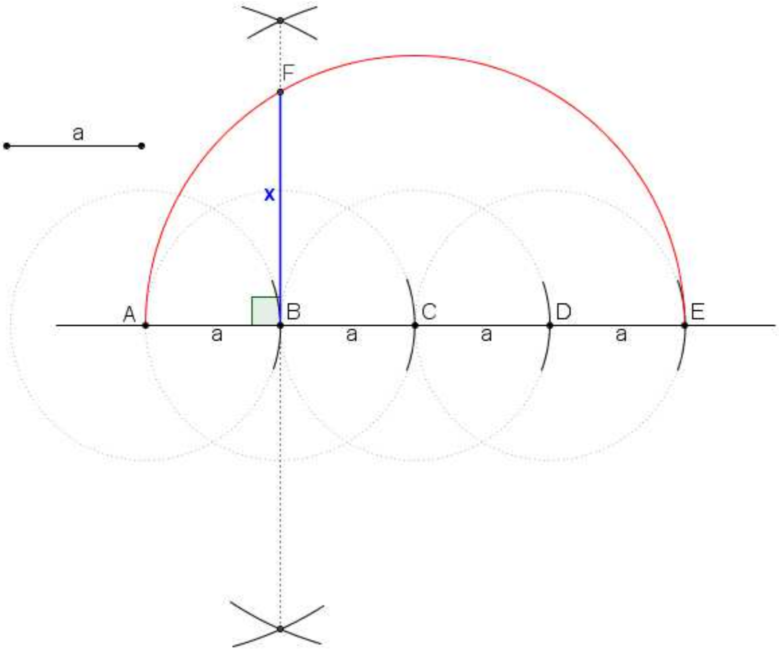


Figura 21 – Aplicação da média proporcional pelo processo aditivo

Exemplo 4.2. Determine, graficamente, o comprimento x de um segmento, dado pela expressão $x = a\sqrt{6}$, onde a é o comprimento de um segmento conhecido.

Fazendo como no exemplo anterior, a expressão $x = a\sqrt{6}$, após sofrer algumas operações, fica $x = \sqrt{a^2 6} = \sqrt{a(6a)}$. Logo, para se determinar a expressão $x = a\sqrt{6}$, é suficiente construir a média proporcional entre a e 6a. A figura 22 ilustra a construção pelo método subtrativo.

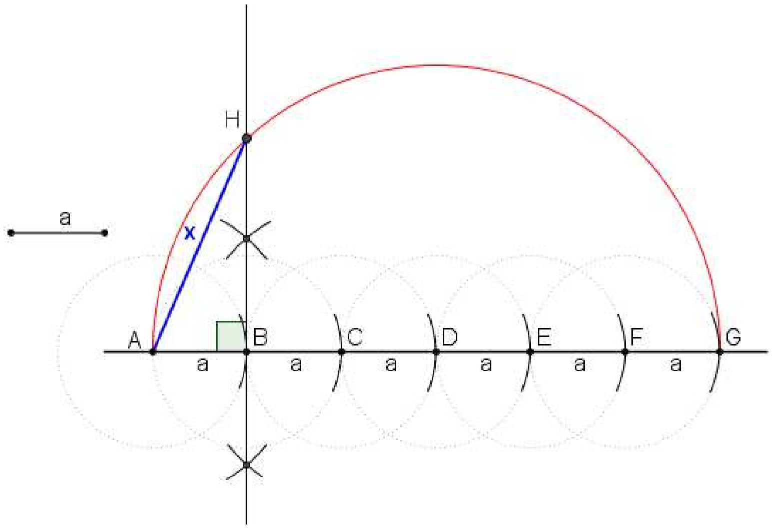


Figura 22 – Aplicação da média proporcional pelo processo subtrativo

Note que, no segundo exemplo, não foi preciso fatorar o radicando, mas em algumas situações, no caso quando ele for muito grande, sempre que possível devemos decompô-lo em dois fatores diferentes da unidade. Por exemplo, $x = a\sqrt{15} = \sqrt{a^2 \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt{3a \cdot 5a}$ e, obteríamos o x como a média proporcional entre 3a e 5a.

Exemplo 4.3. Determine, graficamente, o comprimento x de um segmento, dado pela expressão $x = a\sqrt{\frac{3}{2}}$, onde a é o comprimento de um segmento conhecido.

Após realizar algumas operações na expressão, obtemos

$$x = a\sqrt{\frac{3}{2}} = a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = a\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{a \cdot 6a}}{2} = \frac{\sqrt{2a \cdot 3a}}{2}.$$

Portanto, x pode ser obtido fazendo-se a média proporcional entre a e 6a (exemplo 4.3) ou 2a e 3a e, depois, dividindo o resultado por dois. A figura 23 ilustra a construção pelo método subtrativo com os valores 2a e 3a.

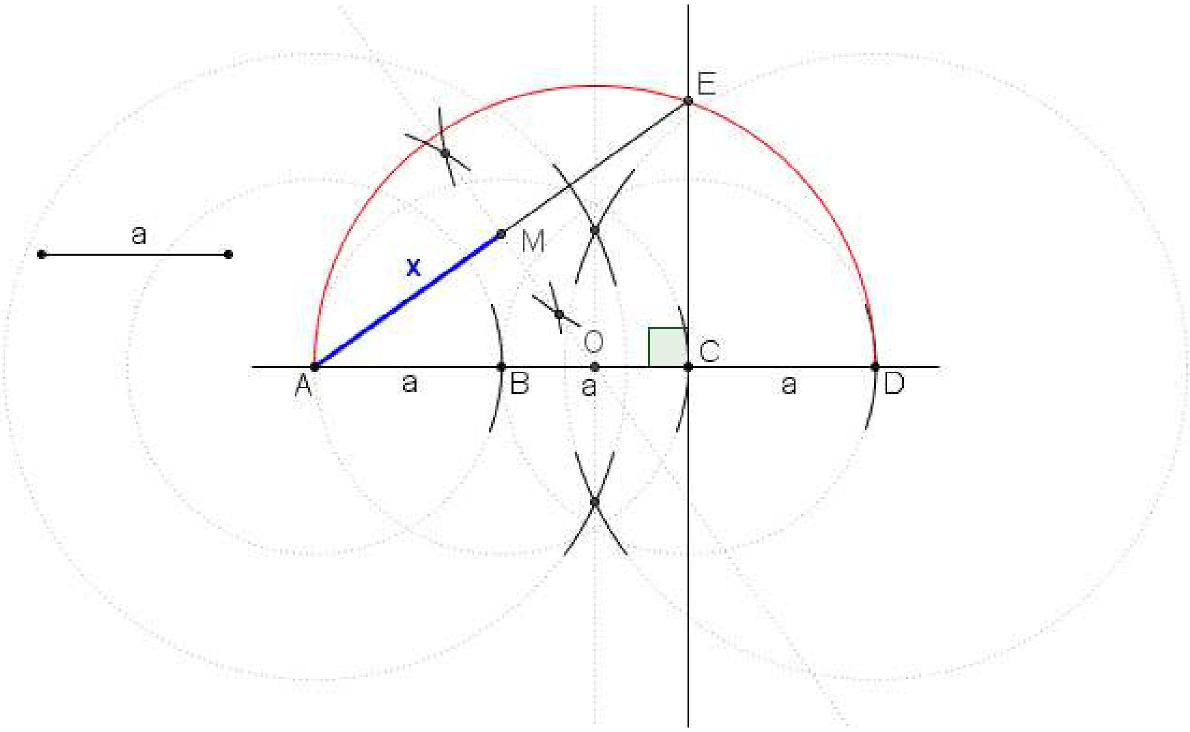


Figura 23 – Aplicação da média proporcional pelo processo subtrativo

5 APLICAÇÕES DIVERSAS

Neste capítulo, veremos várias aplicações envolvendo as construções vistas até agora. São aplicações que visam mostrar, e desta forma alcançar nosso objetivo, que a disciplina Desenho Geométrico desenvolve, no aluno, a imaginação, o planejamento e o raciocínio lógico, deixando claro a importância dessa disciplina, que desde 1971, deixou de ser obrigatória, pois com a promulgação da Lei 5692 - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, o Desenho Geométrico passou a fazer parte do núcleo das disciplinas optativas.

Nas diversas aplicações a seguir, procuramos descrever todos os passos feitos para a sua resolução, mencionando as construções, vistas até o momento, necessárias à resolução do problema apresentado.

5.1 Obtenção da raiz da equação do 1º grau pelo método Euclidiano

Considere a equação $ax + b = 0$. Isolando x no 1º membro, obtemos $x = -\frac{b}{a} = -\frac{1 \cdot b}{a}$. Note que a variante x, raiz da equação, a menos do sinal negativo, é a quarta proporcional entre os números a, 1 e b ou a, b e 1, conforme estudado na seção 3.1. Adotando a unidade gráfica u conveniente, a raiz x será dada pela quarta proporcional entre as medidas au, u e bu que, na solução gráfica, corresponderão às medidas dos comprimentos dos segmentos. Na determinação gráfica da raiz, construiremos o módulo da mesma, para ao final, após uma análise dos valores envolvidos, determinarmos o sinal dela. Esse método de solução, em que a raiz de uma equação do 1º grau é interpretada como uma quarta proporcional, eventualmente, uma terceira proporcional, é chamado **método Euclidiano**.

Aplicação 5.1. Dada a equação $2x - 5 = 0$, determine sua raiz pelo método Euclidiano.

Para a determinação gráfica da raiz da equação, basta isolar o x no primeiro membro e determiná-lo utilizando a construção da quarta proporcional.

Construção:

A raiz será dada por $x = \frac{5}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2}$, donde tiramos a proporção $\frac{2}{1} = \frac{5}{x}$. Portanto, para determinar graficamente o segmento de comprimento x, basta fazer a construção vista no capítulo 3, seção 3.1, que trata sobre quarta proporcional. A figura 24 ilustra a construção.

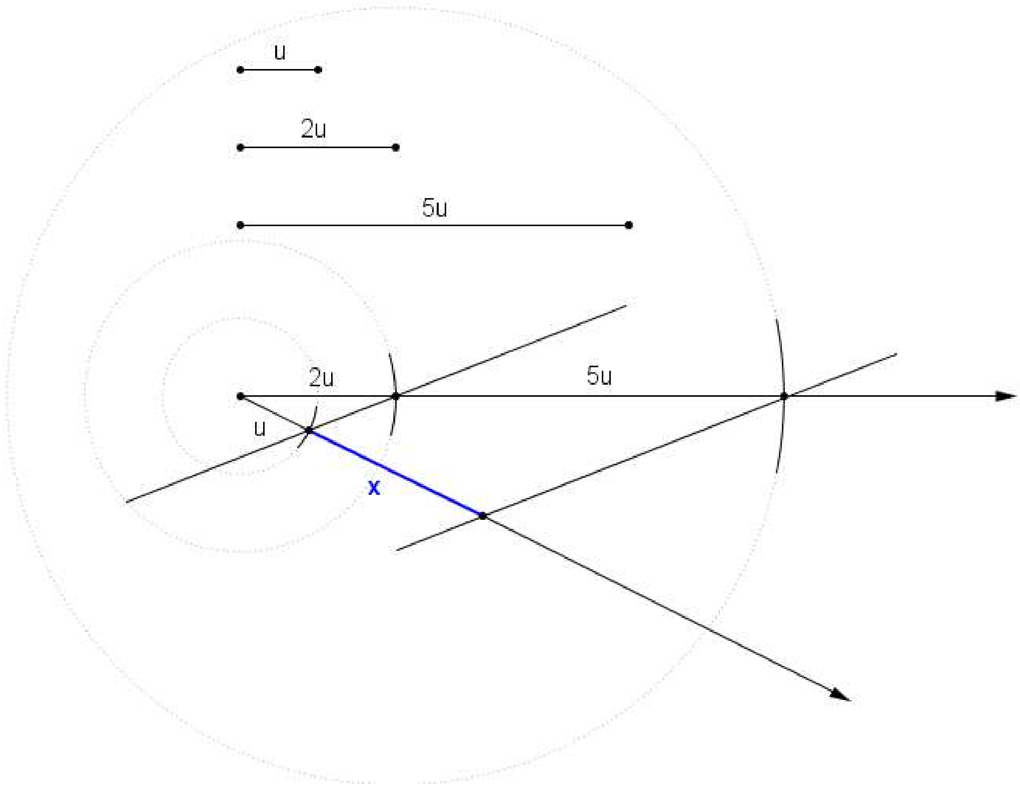


Figura 24 – Aplicação 5.1

Aplicação 5.2. Dada a equação $\frac{1}{b-x} = \frac{a}{bx+cd}$, determine sua raiz pelo método Euclidiano.

Dados:

- Unidade gráfica u.

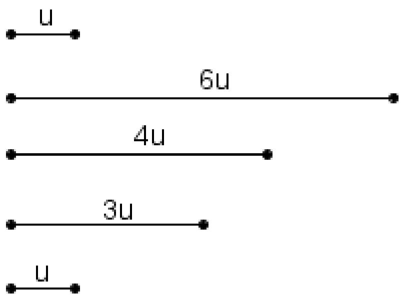
- Os valores a = 6u, b = 4u, c = 3u e d = u.

Após algumas operações sobre a equação, chegamos à raiz, dada pela expressão $x = \frac{ab-cd}{a+b}$. Com a finalidade de utilizarmos as construções já conhecidas, para obtenção gráfica da raiz, façamos $x = \frac{a\left(b-\frac{cd}{a}\right)}{a+b}$. Com isso, podemos identificar na expressão uma quarta proporcional, dada por $\alpha = \frac{cd}{a}$, uma subtração de segmentos, dada por $\beta = b - \alpha$, uma soma de segmentos, dada por $\delta = a + b$ e por fim, $x = \frac{a \cdot \beta}{\delta}$ dado por uma quarta proporcional.

Construção:

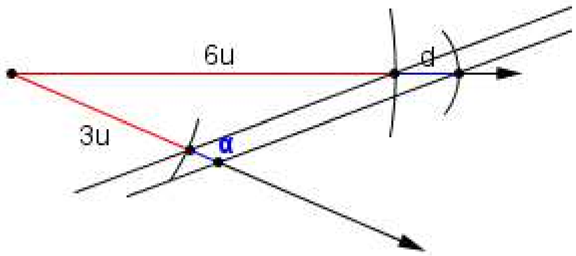
Para a determinação de α, β, δ e x façamos, respectivamente, as construções de uma quarta proporcional, uma subtração de segmentos, uma soma de segmentos e uma quarta proporcional, conforme visto anteriormente. A figura 25 ilustra as construções.

Dados:



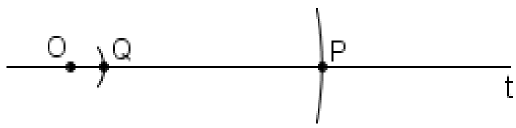
Construção de α.

Temos que $\alpha = \frac{cd}{a} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{d}{\alpha}$. Portanto α é a quarta proporcional entre a, c e d, nessa ordem.



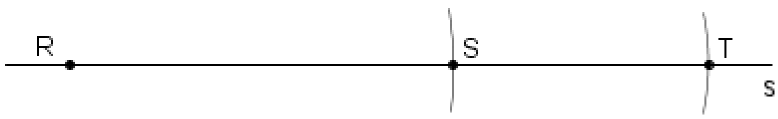
Construção de β.

Temos que $\beta = b - \alpha$. Fazendo $\overline{OP} = b$ e $\overline{OQ} = \alpha$, concluímos que $\beta = \overline{QP}$.



Construção de δ.

Temos que $\delta = a + b$. Fazendo $\overline{RS} = a$ e $\overline{ST} = b$, obtemos $\delta = \overline{RT}$.



Construção de x.

Temos que $x = \frac{a\beta}{\delta} \Rightarrow \frac{\delta}{a} = \frac{\beta}{x}$. Portanto, x é a quarta proporcional entre δ, a e β, nessa ordem.

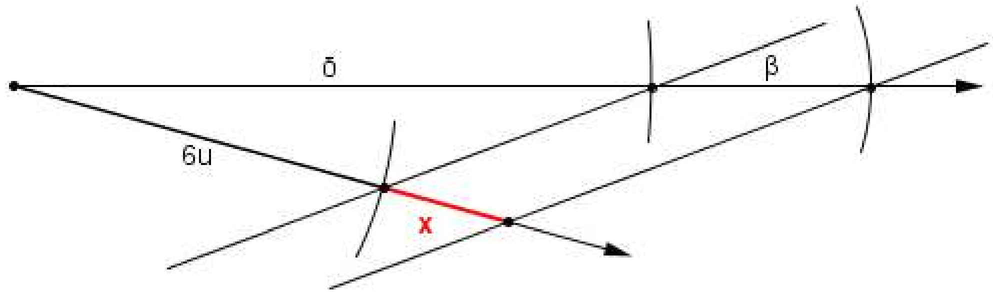


Figura 25 – Aplicação 5.2

Aplicação 5.3. Dada a equação $a(x-a)+b(x-b)+c(x-c)=0$, determine sua raiz pelo método Euclidiano.

Dados:

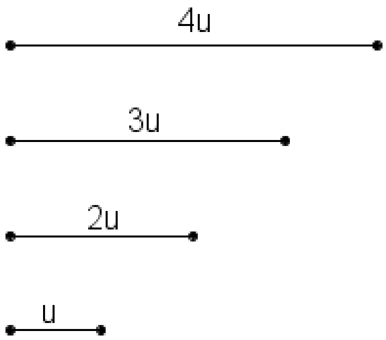
- Unidade gráfica u.
- Os valores a = 4u, b = 3u e c = 2u.

Assim como foi feito na aplicação 5.1, precisamos obter a expressão que nos dá a raiz da equação. Então, após algumas operações sobre a equação, chegamos à raiz, dada pela expressão $x = \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$. Com a finalidade de utilizarmos as construções já conhecidas e obtermos a raiz pelo método Euclidiano, façamos $x = \frac{a\left(a+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{a}\right)}{a+b+c}$. Portanto identificamos, na expressão, duas terceiras proporcionais, dada por $\alpha = \frac{b^2}{a}$ e $\beta = \frac{c^2}{a}$, duas somas de segmentos, dada por $\delta = a+\alpha+\beta$ e $\varepsilon = a+b+c$ e, por fim, $x = \frac{a \cdot \delta}{\varepsilon}$, dado por uma quarta proporcional.

Construção:

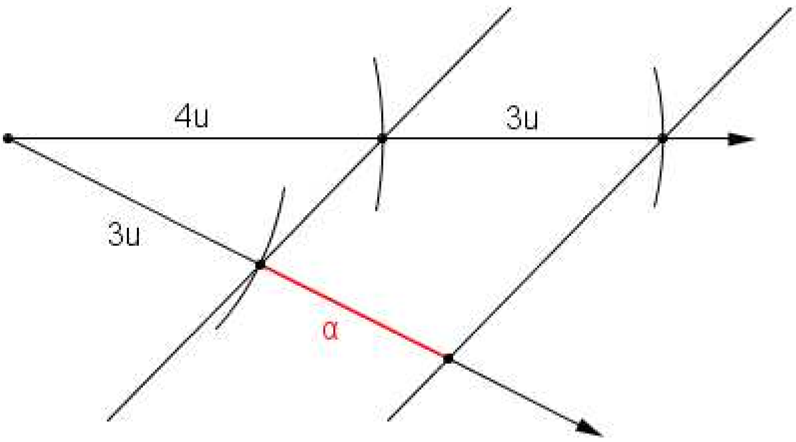
Para a determinação de α, β, δ, ε e x façamos, respectivamente, as construções de duas terceiras proporcionais, duas somas de segmentos e uma quarta proporcional, conforme visto anteriormente. A figura 26 ilustra as construções.

Dados:



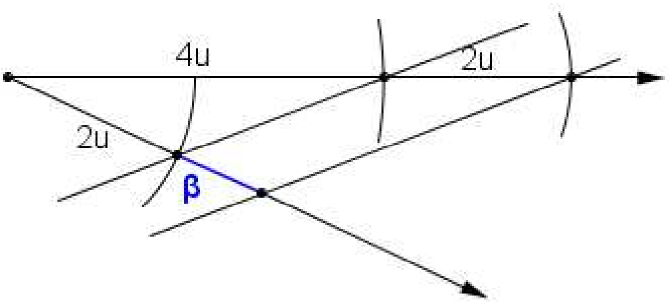
Construção de α.

Temos que $\alpha = \dfrac{b^2}{a} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{\alpha}$. Portanto α é a terceira proporcional entre a e b.



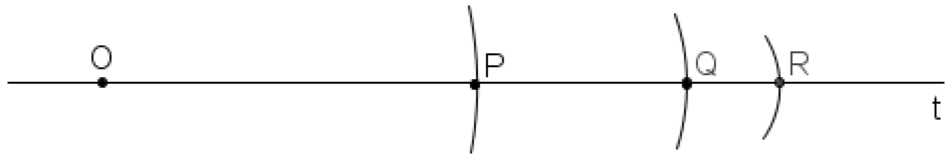
Construção de β.

Temos que $\beta = \dfrac{c^2}{a} \Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{\beta}$. Portanto β é a terceira proporcional entre a e c.



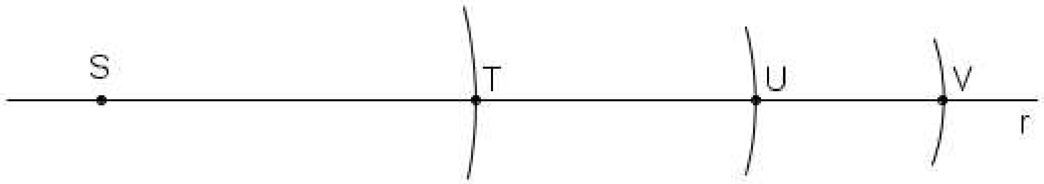
Construção de δ.

Temos que $\delta = a + \alpha + \beta$. Fazendo $\overline{OP} = a$, $\overline{PQ} = \alpha$ e $\overline{QR} = \beta$, obtemos $\delta = \overline{OR}$.



Construção de ε.

Temos que $\varepsilon = a + b + c$. Daí fazendo $\overline{ST} = a$, $\overline{TU} = b$ e $\overline{UV} = c$ obtemos $\varepsilon = \overline{SV}$.



Construção de x.

Temos que $x = \frac{a\delta}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{a} = \frac{\delta}{x}$. Portanto x é a quarta proporcional entre ε, a e δ, nessa ordem.

A fim de economizar espaço, utilizaremos uma importante consequência do teorema de Thales nos triângulos.

Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intersecta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

Sendo assim, na figura temos: $\overline{XY} = \varepsilon, \overline{XZ} = a$, $\overline{XW} = \delta$ e $\overline{XK} = x$, portanto $\frac{\varepsilon}{a} = \frac{\delta}{x}$.

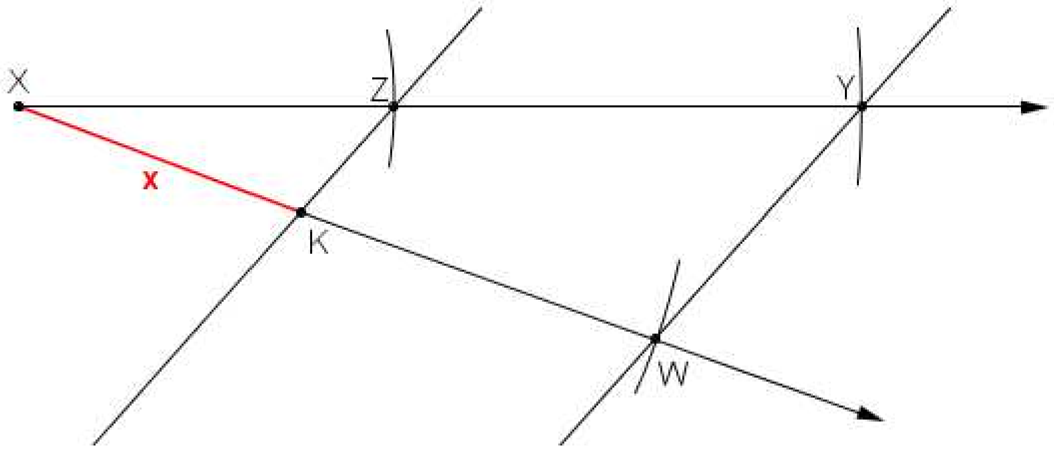


Figura 26 – Aplicação 5.3

5.2 Resolução gráfica de expressões irracionais

Nesta seção, veremos como determinar os valores de expressões da forma $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$, $x = \sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2 \pm d^2 ...}$ e $x = \sqrt{ma^2 \pm nb^2}$, em que m e n são números naturais e a, b, c, d, ... são comprimentos de segmentos dados, todos diferentes de zero. Obviamente, em alguns casos, será necessário impor condições entre as medidas desses segmentos para possibilitar a construção.

Para o cálculo geométrico de tais expressões, são necessárias, basicamente, as construções da média proporcional e algumas aplicações já estudadas, bem como a aplicação do teorema de Pitágoras e, consequentemente, a construção de triângulo retângulo.

Vejamos, então, como determinar o valor de x, na expressão $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$, em que a e b são os comprimentos de segmentos dados, ambos diferentes de zero.

Façamos, inicialmente, para o caso $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Veja que $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ pode ser escrito como $x^2 = a^2 + b^2$, que comparada com o teorema de Pitágoras, concluímos que o x será a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são a e b. Portanto, para determinar o valor de x, graficamente, nos resta construir um triângulo retângulo a partir dos segmentos de medidas a e b, no caso os catetos do triângulo, que como sabemos são perpendiculares.

Aplicação 5.4. Determinar, graficamente, o valor de x na expressão $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, sabendo-se que a = 5,0u e b = 3,0u, onde u é a unidade gráfica.

Considerando que os valores de a, b e x correspondem às medidas dos comprimentos dos segmentos que representam os lados do triângulo retângulo e identificando o x como a hipotenusa desse triângulo de catetos a e b, façamos a construção abaixo para obtê-lo.

Construção:

Para a construção do triângulo retângulo, trace uma reta suporte t e, em seguida, a partir de um ponto arbitrário, por exemplo O, transporte o cateto de medida a, obtendo o segmento OP, tal que $\overline{OP}$ = a. Então, pela extremidade O do segmento OP, construa uma perpendicular e transporte o outro cateto b, a partir de O, sobre ela, obtendo o segmento OQ, tal que $\overline{OQ}$ = b. Para finalizar, ligue os pontos P e Q obtendo o triângulo retângulo OPQ. O valor do x procurado é o comprimento da hipotenusa $\overline{PQ}$. A figura 27 ilustra a construção.

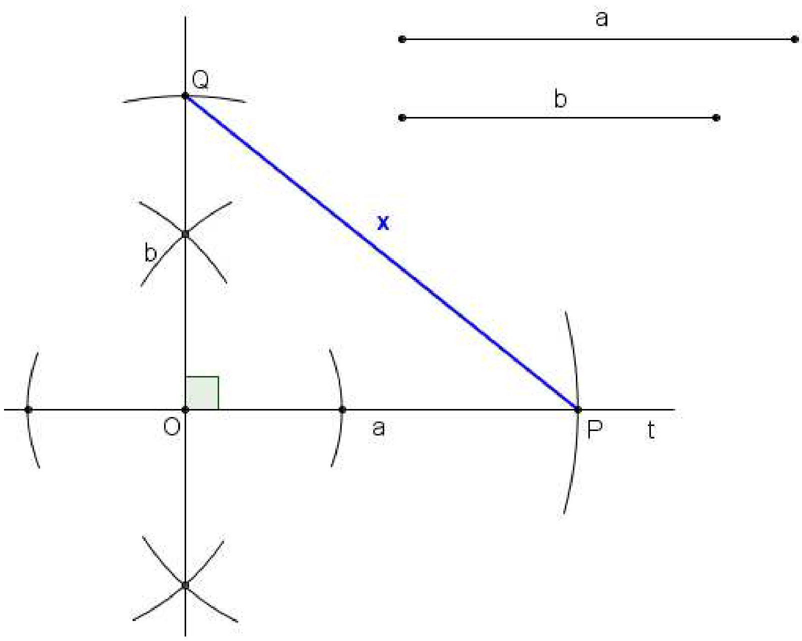


Figura 27 – Aplicação 5.4

No caso de $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, que pode ser escrito como $x^2 = a^2 - b^2$, concluímos que, após comparar a relação com o teorema de Pitágoras, o **x** será um dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa a, cujo outro cateto é o b. Cabe ressaltar que o valor de a deverá ser maior do que o valor de b, para que seja possível a solução. Portanto, para determinar o valor de x, graficamente, nos resta construir um triângulo retângulo a partir dos segmentos de medidas a e b, sendo o segmento de medida a e o segmento de medida b, respectivamente, a hipotenusa e um dos catetos.

Aplicação 5.5. Determinar, graficamente, o valor de x na expressão $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, sabendo-se que $a = 5{,}0\,u$ e $b = 3{,}0\,u$, onde u é a unidade gráfica.

Considerando que os valores de a, b e x correspondem às medidas dos comprimentos dos segmentos que representam os lados do triângulo retângulo e identificando o x como um dos catetos e, a e b, respectivamente, como a hipotenusa e o outro cateto, façamos a construção abaixo para obter o x.

Construção:

Para a construção do triângulo retângulo, trace uma reta suporte t e, em seguida, a partir de um ponto arbitrário, por exemplo O, transporte a hipotenusa a, obtendo o segmento OP, tal que $\overline{OP}$ = a. Construa o arco capaz de 90º relativo ao segmento OP e, em seguida, construa a circunferência de centro O e raio b. A interseção da circunferência com o arco capaz nos dá o ponto Q, que ligado com O, obtemos o segmento OQ, tal que $\overline{OQ} = b$. Para finalizar, ligue os pontos P e Q obtendo o triângulo retângulo OPQ. O valor do x procurado é o comprimento do cateto $\overline{PQ}$. A figura 28 ilustra a construção.

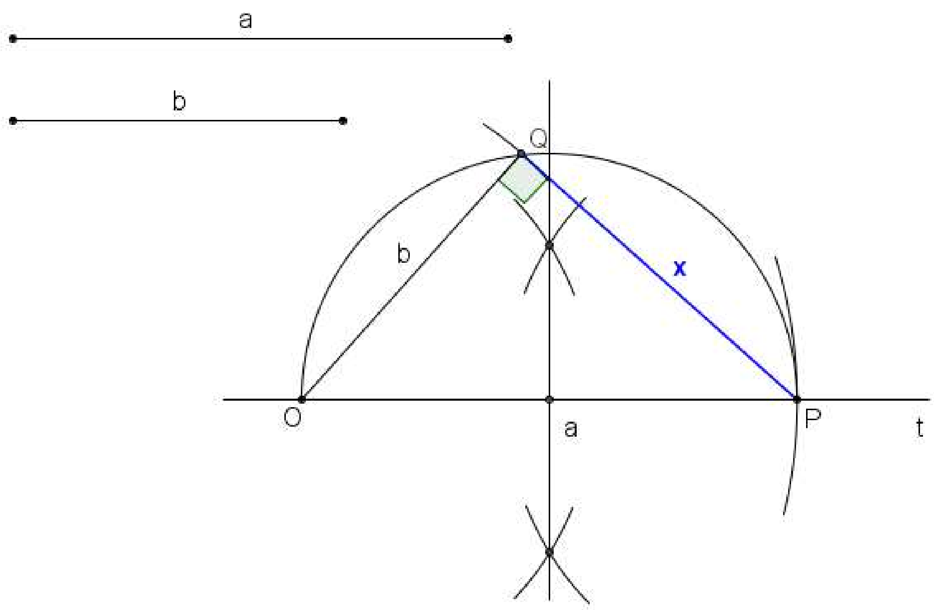


Figura 28 – Aplicação 5.5

Vamos ao caso em que x é dado por $x = \sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2 \pm d^2 ....}$. As expressões desta forma constroem-se por etapas, utilizando reiteradamente os dois casos vistos anteriormente.

Assim, fazendo $\alpha^2 = a^2 \pm b^2$, ficamos com $x = \sqrt{\alpha^2 \pm c^2 \pm d^2 ....}$, com α determinado conforme os casos anteriores.

Fazendo, agora, $\beta^2 = \alpha^2 \pm c^2$, ficamos com $x = \sqrt{\beta^2 \pm d^2 ....}$, com β determinado conforme o α.

E, assim por diante, até x ficar determinado por uma das expressões do tipo $x = \sqrt{\delta^2 \pm \varepsilon^2}$.Cabe lembrar que os valores envolvidos na construção, deverão atender as condições já mencionadas.

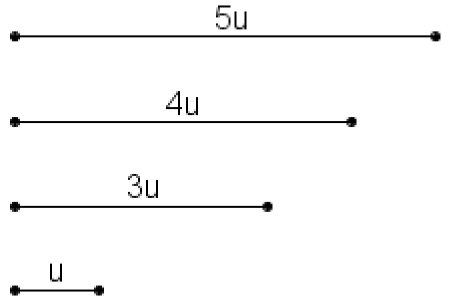
Aplicação 5.6. Determinar, graficamente, o valor de x na expressão $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$, sabendo-se que $a = 5{,}0\,u$, $b = 4{,}0\,u$ e $c = 3{,}0\,u$, onde u é a unidade gráfica.

De acordo com o comentado acima, façamos $\alpha^2 = a^2 + b^2$ e após obtermos o α, conforme aplicação 5.4, o x fica determinado pela expressão $x = \sqrt{\alpha^2 - c^2}$, recaindo na aplicação 5.5.

Construção:

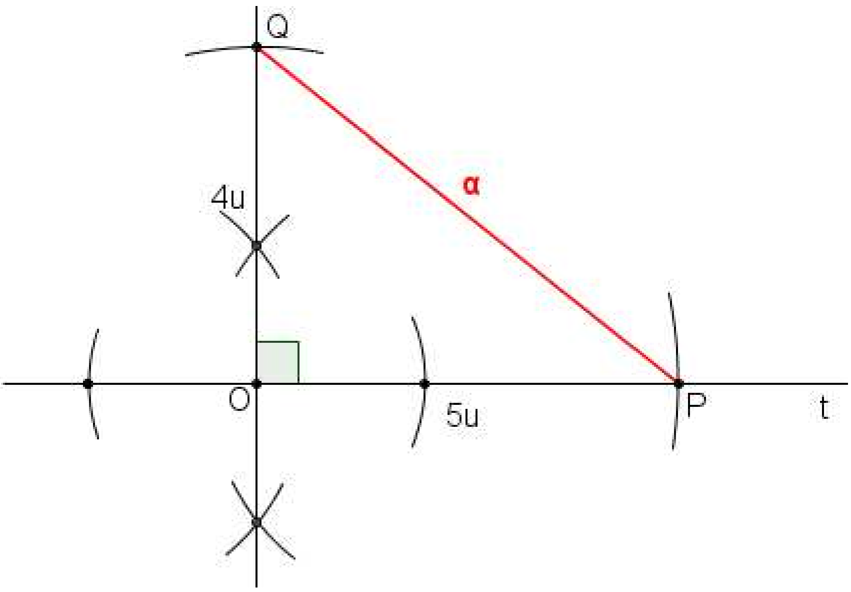
Para a obtenção de α, faça conforme descrito na aplicação 5.4. Após determinado o α, x é obtido conforme descrito em 5.5. A figura 29 ilustra a construção.

Dados:



Construção de α.

Temos que $\alpha^2 = a^2 + b^2$. Portanto α é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos a e b.



Construção de x.

Temos que $x^2 = \alpha^2 - c^2$. Portanto x é um dos catetos de um triângulo retângulo e, α e c, respectivamente, como a hipotenusa e o outro cateto.

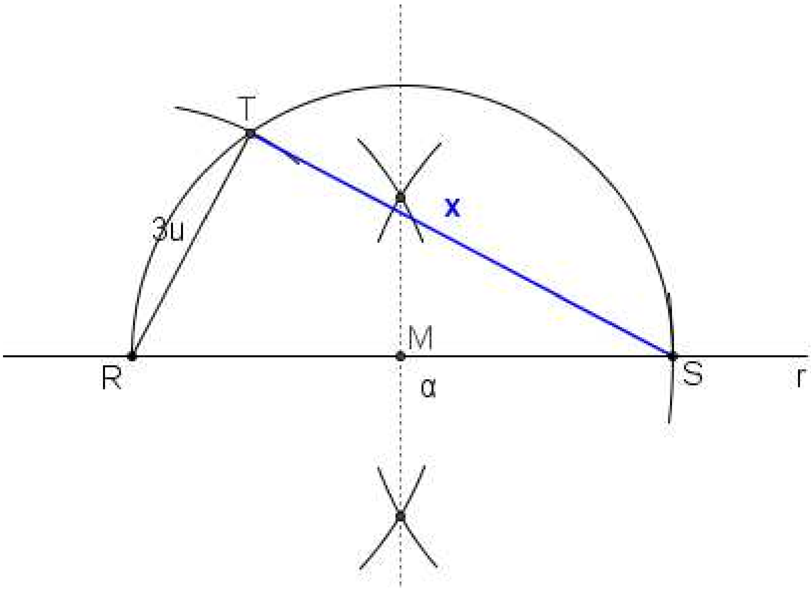


Figura 29 – Aplicação 5.6

Finalmente, vamos ao caso em que x é dado por $x = \sqrt{ma^2 \pm nb^2}$. Para obter o valor de x, basta escrever $ma^2 = \left(a\sqrt{m}\right)^2$ e $nb^2 = \left(b\sqrt{n}\right)^2$. Por meio desse artifício, reescrevemos a expressão obtendo $x = \sqrt{\left(a\sqrt{m}\right)^2 \pm \left(b\sqrt{n}\right)^2}$, recaindo nos primeiros casos. Veja que para determinar $a\sqrt{m}$ e $b\sqrt{n}$, faremos uso da média proporcional vista no capítulo 4.

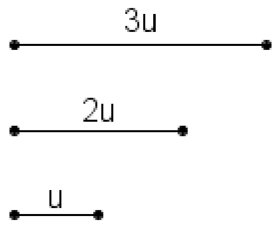
Aplicação 5.7. Determinar, graficamente, o valor de x na expressão $x = \sqrt{3a^2 + 2b^2}$, sabendo-se que $a = 3{,}0u$ e $b = 2{,}0u$, onde u é a unidade gráfica.

Utilizando o artificio sugerido acima, façamos $3a^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2$ e $2b^2 = \left(b\sqrt{2}\right)^2$, o que nos dá $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, com $\alpha = a\sqrt{3}$ e $\beta = b\sqrt{2}$, que será obtido conforme aplicação 5.4. Para tanto, precisamos determinar o α e o β fazendo uso da média proporcional.

Construção:

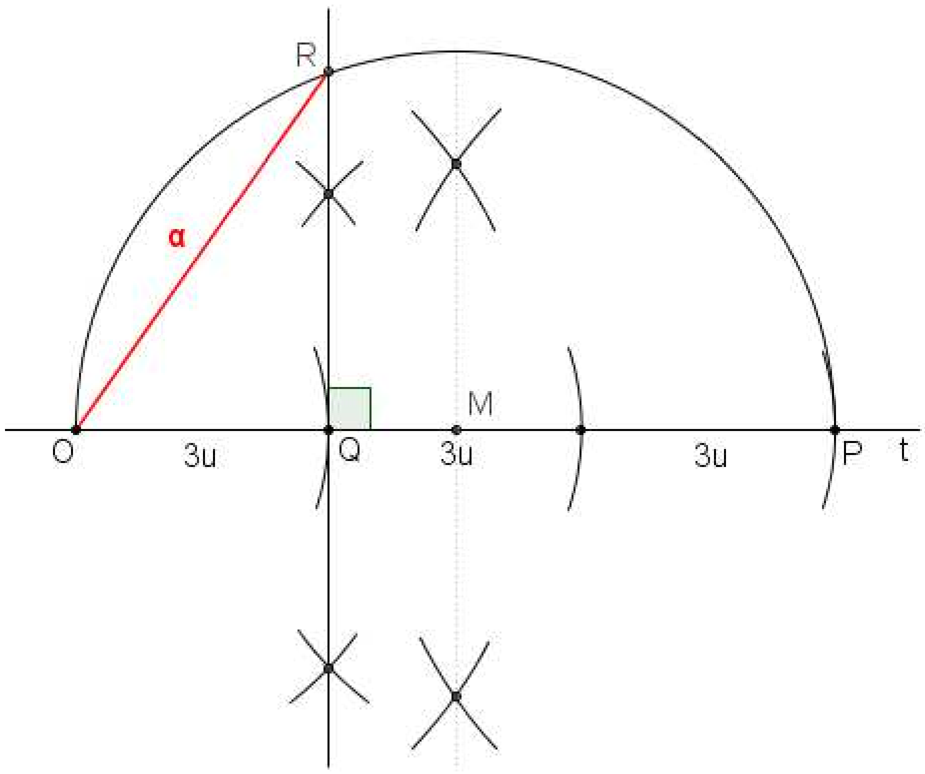
As construções para obtenção do α e β estão descritas no capítulo 4, média proporcional pelo processo aditivo ou subtrativo. Para a construção do x, após determinação do α e do β, faça conforme aplicação 5.4. A figura 30 ilustra a construção.

Dados:



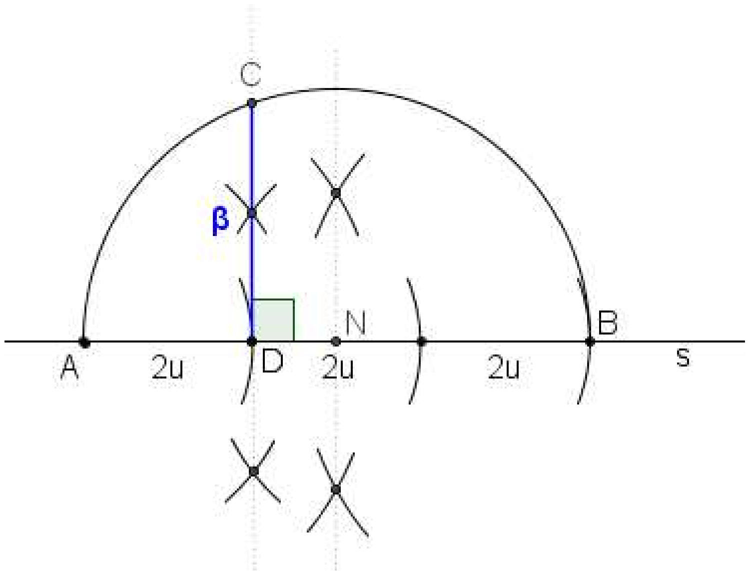
Construção de α.

Temos que $\alpha = a\sqrt{3} = \sqrt{a \cdot 3a}$. Portanto α é a média proporcional entre a e 3a. Determinemos α, pelo processo subtrativo.



Construção de β.

Temos que $\beta = a\sqrt{2} = \sqrt{a \cdot 2a}$. Portanto β é a média proporcional entre a e 2a. Determinemos β, pelo processo aditivo.



Construção de x.

Temos que $x^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Portanto x é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos α e β.

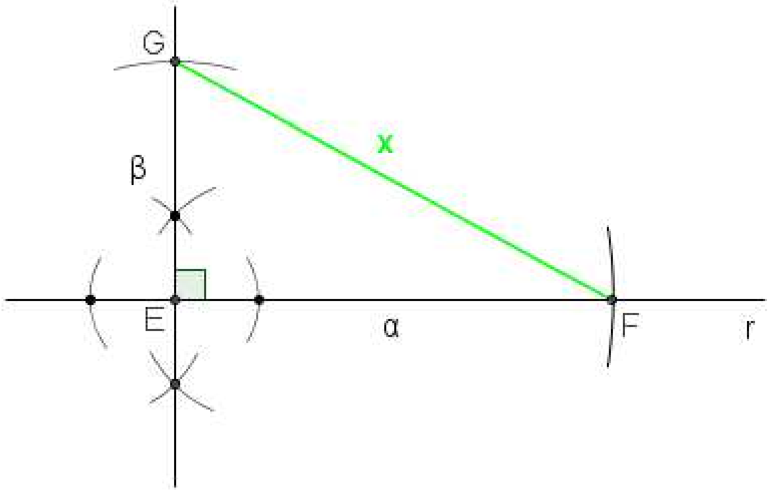


Figura 30 – Aplicação 5.7

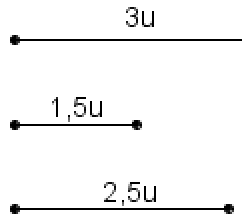
Aplicação 5.8. Determinar, graficamente, o valor de x na expressão $x = \sqrt{3a^2 - \frac{5}{4}b^2 + \frac{c^2}{3}}$, sabendo-se que $a = 3{,}0\,u$ e $b = 1{,}5\,u$ e $c = 2{,}5\,u$, em que u é a unidade gráfica.

Utilizando o artifício sugerido na aplicação 5.7, façamos $3a^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2$, $\frac{5}{4}b^2 = \left(b\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2$ e $\frac{c^2}{3} = \left(c\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$, daí o x fica determinado por $x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 + \delta^2}$, com $\alpha = a\sqrt{3}$, $\beta = b\sqrt{\frac{5}{4}}$ e $\delta = c\sqrt{\frac{1}{3}}$, que será obtido conforme aplicação 5.6. Para tanto, precisamos determinar o α, β e δ fazendo uso da média proporcional e suas aplicações vistas no capítulo 4.

Construção:

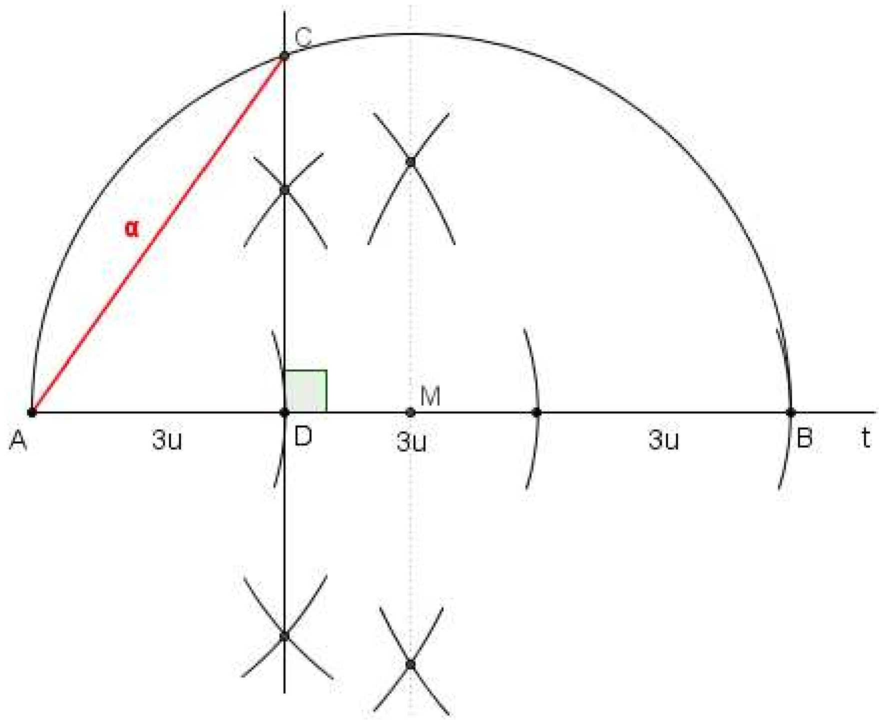
As construções para obtenção do α, β e δ estão descritas no capítulo 4, média proporcional pelo processo aditivo ou subtrativo. Para a construção do x, após a determinação do α, do β e do δ, faça conforme aplicação 5.6. A figura 31 ilustra a construção.

Dados:



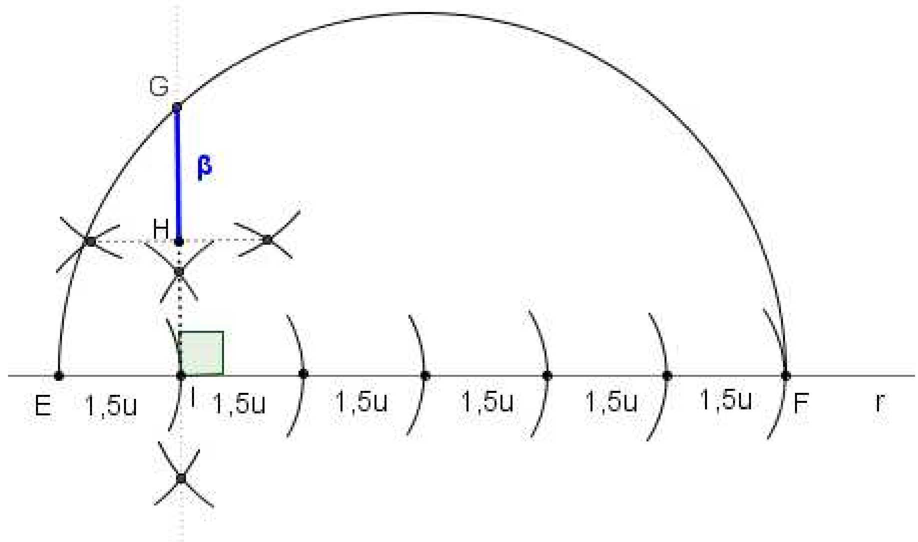
Construção de α.

Temos que $\alpha = a\sqrt{3} = \sqrt{a \cdot 3a}$. Portanto podemos determiná-lo usando a média proporcional, com utilização do processo subtrativo.



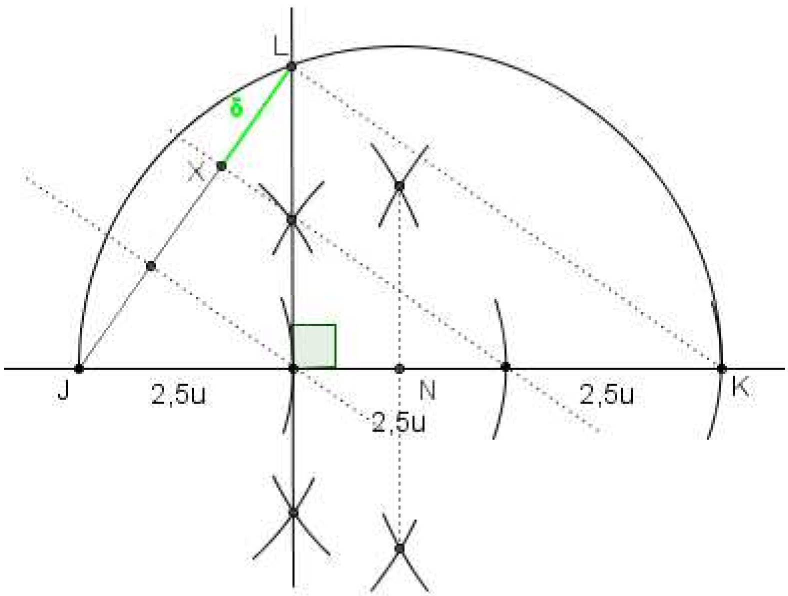
Construção de β.

Temos que $\beta = b\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{b \cdot 5b}}{2}$. Portanto podemos determiná-lo usando a média proporcional, com utilização do processo aditivo para obter $\sqrt{b \cdot 5b}$ e, em seguida, dividir o resultado por dois para obter β.



Construção de δ.

Temos que $\delta = c\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{c \cdot 3c}}{3}$. Portanto podemos determiná-lo usando a média proporcional, com utilização do processo subtrativo para obter $\sqrt{c \cdot 3c}$ e, em seguida, dividir o resultado por três para obter δ.



Construção do x.

Temos que $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2}$. Portanto, para obter o x, façamos $\varepsilon^2 = \alpha^2 + \beta^2$, que será obtido conforme aplicação 5.4, para, em seguida, determinarmos o x, dado por $x = \sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}$, pelo mesmo processo.

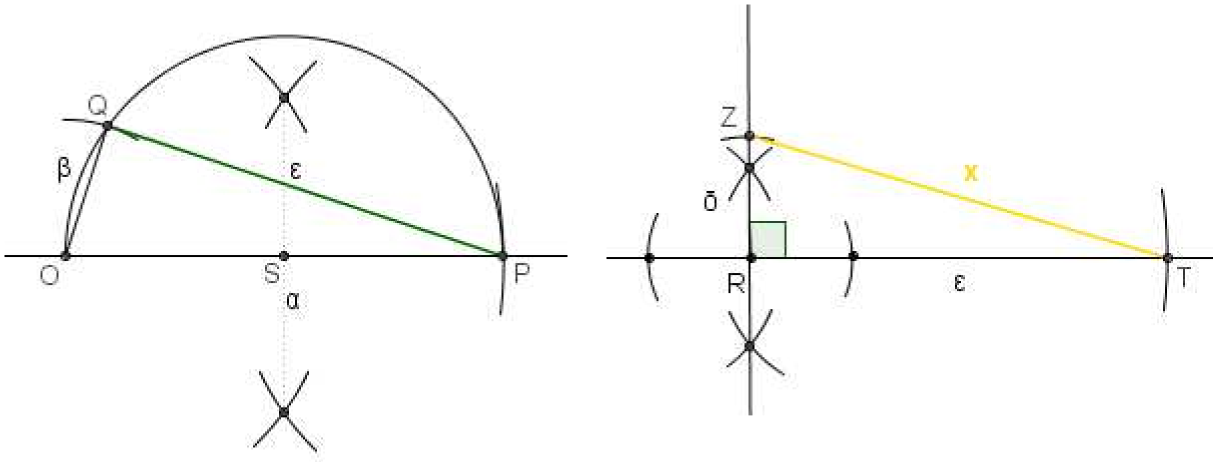


Figura 31 – Aplicação 5.8

5.3 Resolução gráfica que envolvem expressões racionais e irracionais

Nesta seção, trataremos da resolução gráfica das expressões que envolvem todas as construções feitas no estudo das expressões racionais e irracionais. Portanto dada a expressão que representa o comprimento de um segmento, nela poderá figurar, explicita ou implicitamente, uma soma e/ou diferença de segmentos; um produto e/ou quociente de segmentos; uma quarta e/ou terceira proporcionais reiteradas; uma média aritmética e/ou geométrica de segmentos; e aplicações do teorema de Pitágoras. Vejamos as aplicações.

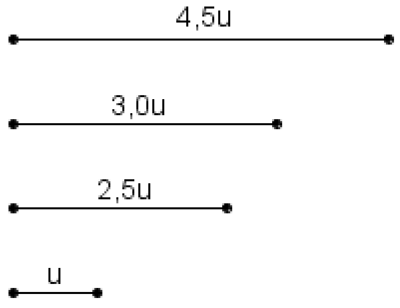
Aplicação 5.9. Determinar, graficamente, o valor de x na expressão $x = \dfrac{a\sqrt{2} \cdot c}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, sabendo-se que $a = 4{,}5u$, $b = 3{,}0u$ e $c = 2{,}5u$, onde u é a unidade gráfica.

O valor de x é obtido fazendo-se $\alpha = a\sqrt{2}$ e $\beta = \sqrt{a^2 - b^2}$ e, portanto, x é dado pela expressão $x = \dfrac{\alpha \cdot c}{\beta}$, ou seja, por uma quarta proporcional.

Construção:

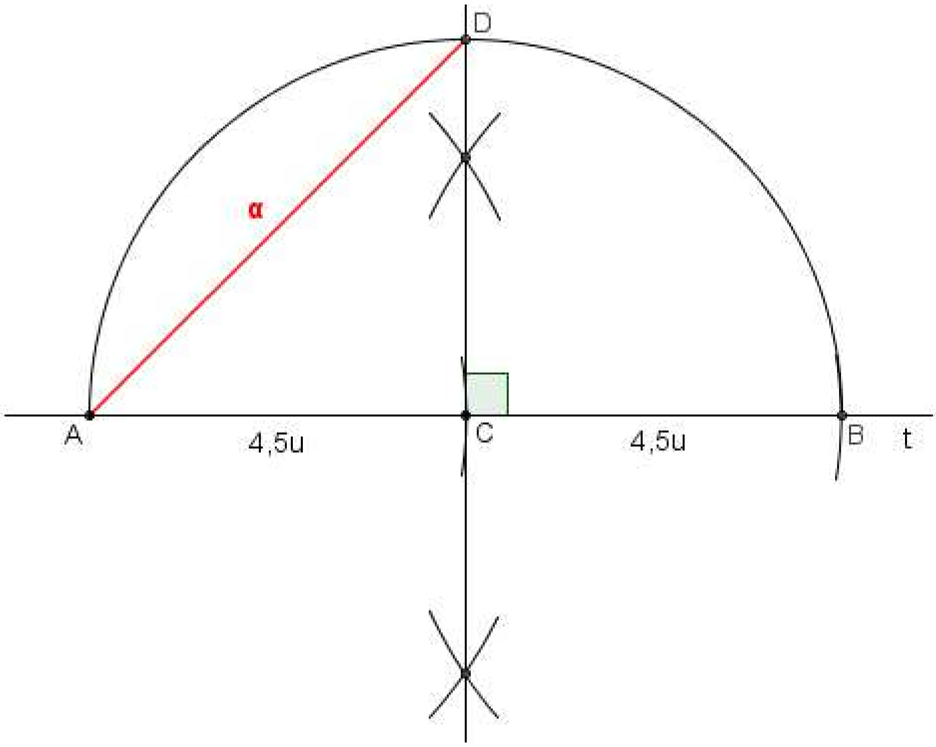
As construções para obtenção de α e β são, respectivamente, uma média proporcional e as aplicações do teorema de Pitágoras, ambas vistas em aplicações anteriores. A figura 32 ilustra a construção.

Dados:



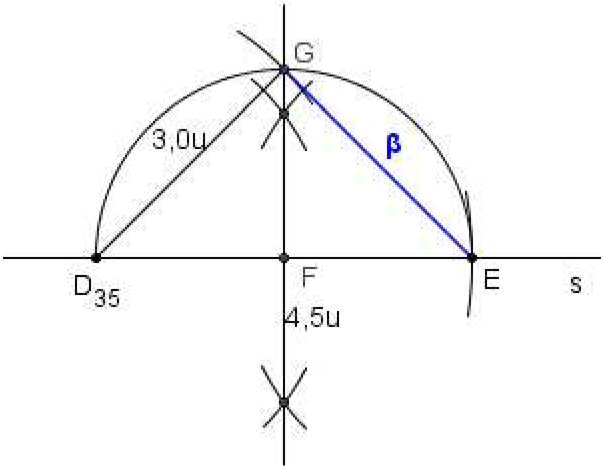
Construção de α.

Temos que $\alpha = a\sqrt{2} = \sqrt{a \cdot 2a}$. Portanto podemos determiná-lo usando a média proporcional, com utilização do processo aditivo.



Construção de β .

Temos que $\beta = \sqrt{a^2 - b^2}$. Portanto podemos determiná-lo usando as aplicações do teorema de Pitágoras.



Construção de x.

Temos que $x = \dfrac{\alpha \cdot c}{\beta}$. Portanto podemos determiná-lo usando a quarta proporcional.

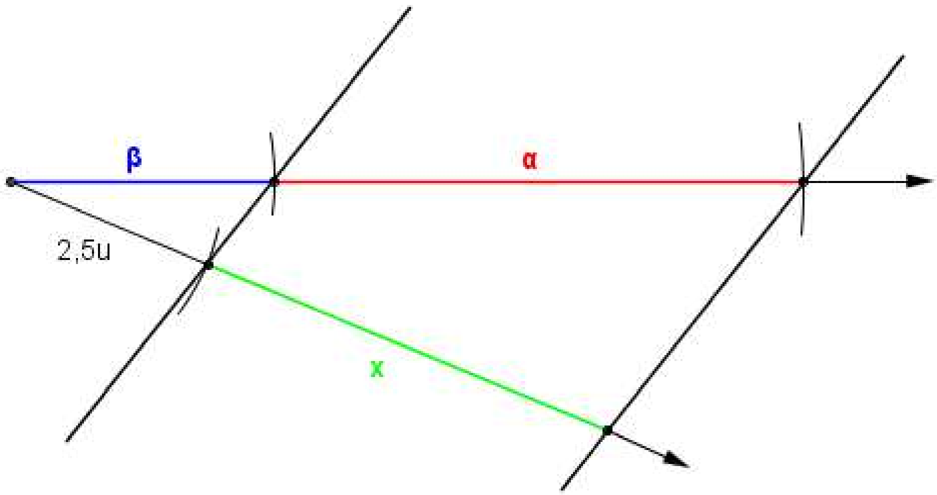


Figura 32 – Aplicação 5.9

Aplicação 5.10. Determinar, graficamente, o valor de x na expressão $x = \dfrac{\sqrt{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{3}{4}b^2} \cdot \left(4a^2 - 2c^2\right)}{(b+c)^2}$, sabendo-se que $a = 4{,}0\,u$, $b = 2{,}0\,u$ e $c = 3{,}0\,u$, onde u é a unidade gráfica.

Para determinarmos x, façamos como nas aplicações anteriores, reescrevendo a expressão dada da seguinte forma.

$$x = \frac{\sqrt{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{3}{4}b^2} \cdot 2a\left(2a - \dfrac{c^2}{a}\right)}{(b+c)^2}$$

E nela, identificamos:

$$\alpha = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{3}{4}b^2}$$

$$\beta = 2a$$

$$\gamma = \frac{c^2}{a}$$

$$\delta = \beta - \gamma$$

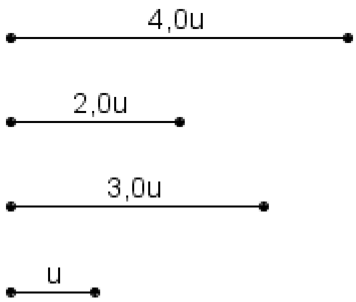
$$\varepsilon = b + c$$

Daí x fica determinado pela expressão $x = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \delta}{\varepsilon^2}$, como já visto, representa uma quarta proporcional reiterada.

Construção:

Inicialmente, façamos as construções de α, conforme aplicação 5.8, de β, uma multiplicação de segmento, de γ, uma terceira proporcional, de δ, uma subtração de segmentos, de ε, uma soma de segmentos e, por fim, a construção de x, uma quarta proporcional reiterada. Todas as construções já realizadas em atividades anteriores. A figura 33 ilustra a construção.

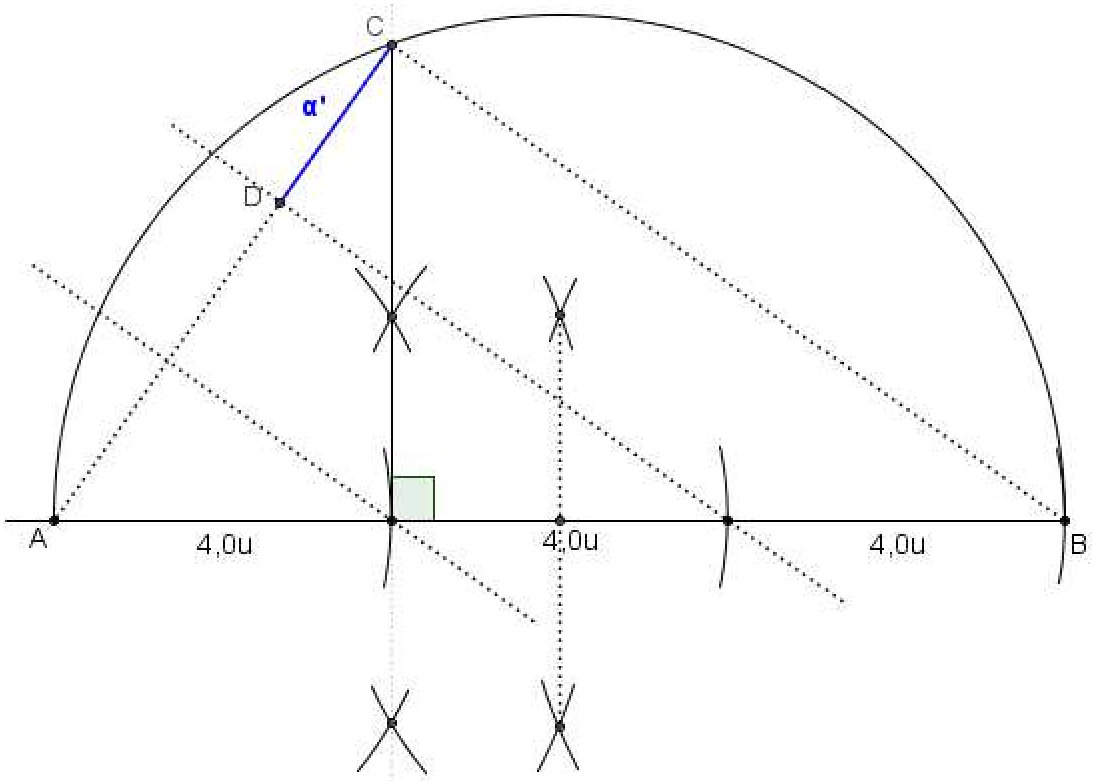
Dados:



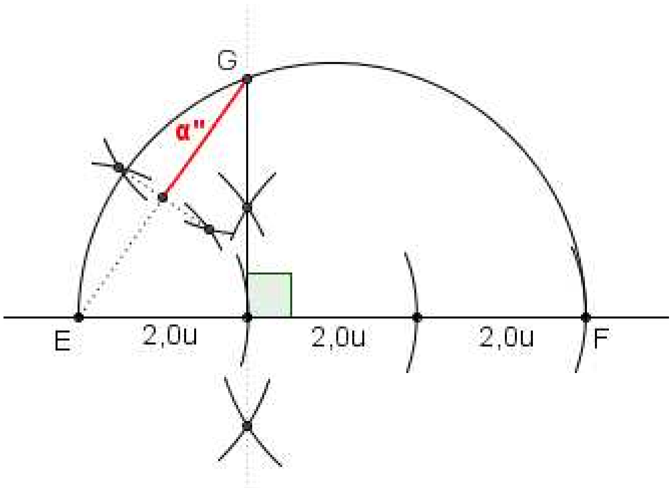
Construção de α.

Temos que $\alpha = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{3}{4}b^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a \cdot 3a}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{b \cdot 3b}}{2}\right)^2}$, fazendo $\alpha' = \frac{\sqrt{a \cdot 3a}}{3}$ e $\alpha'' = \frac{\sqrt{b \cdot 3b}}{2}$, ficamos com $\alpha = \sqrt{(\alpha')^2 + (\alpha'')^2}$. Portanto, para obter α, façamos inicialmente a construção de α' e α'', utilizando a média proporcional, para depois, construir α pela aplicação do teorema de Pitágoras.

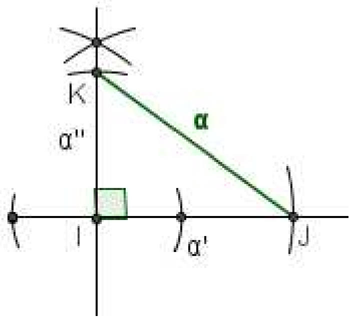
Construção de α'.



Construção de α''.

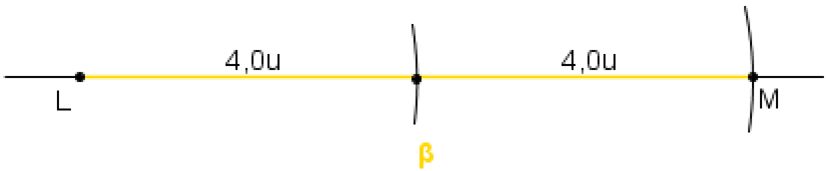


Construção de α.



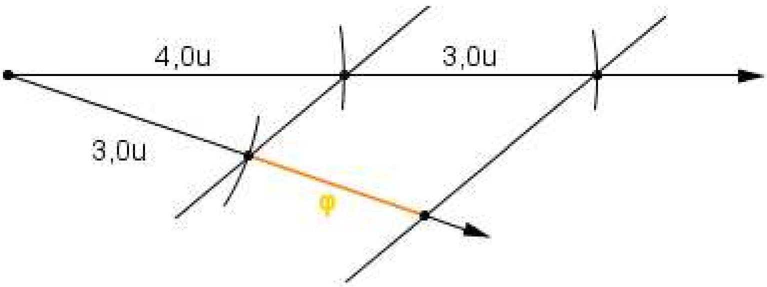
Construção de β.

Temos que $\beta = 2a$. Portanto trata-se de uma multiplicação de segmentos, que pode ser construído através do transporte de segmento visto na seção 2.1.



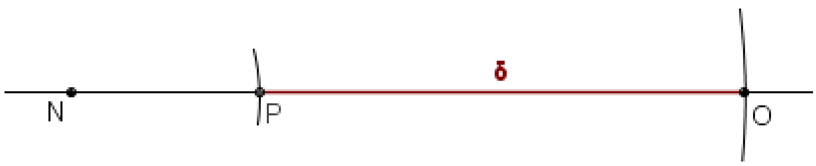
Construção de φ.

Temos que $\varphi = \dfrac{c^2}{a} \Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{\varphi}$. Portanto podemos determiná-lo utilizando a construção da terceira proporcional.



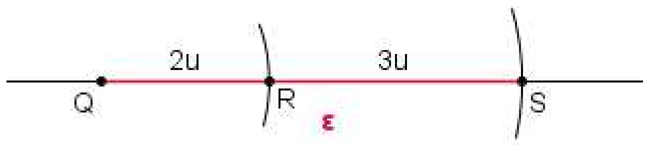
Construção de δ.

Temos que $\delta = \beta - \varphi$. Portanto trata-se de uma subtração de segmentos.



Construção de ε.

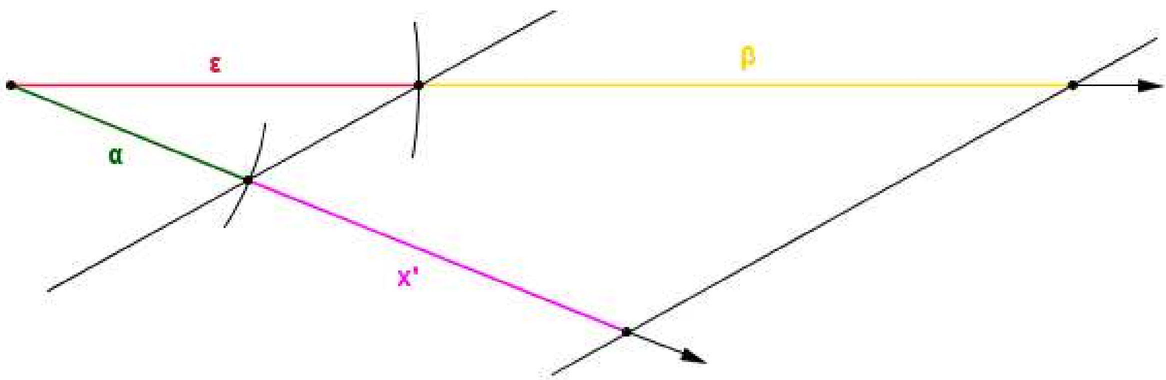
Temos que $\varepsilon = b + c$. Portanto trata-se de uma soma de segmentos.



Construção de x.

Temos que $x = \dfrac{\sqrt{\dfrac{a^2}{3} + \dfrac{3}{4}b^2} \cdot 2a\left(2a - \dfrac{c^2}{a}\right)}{(b+c)^2}$. Daí x fica determinado pela expressão $x = \dfrac{\alpha \cdot \beta \cdot \delta}{\varepsilon^2}$ como já visto, representa uma quarta proporcional reiterada. Podemos reescrever a expressão como $x = \dfrac{\alpha \cdot \beta}{\varepsilon} \cdot \dfrac{\delta}{\varepsilon}$. Fazendo $x' = \dfrac{\alpha \cdot \beta}{\varepsilon}$, ficamos com $x = \dfrac{x' \cdot \delta}{\varepsilon}$. Portanto determinaremos x’, utilizando a quarta proporcional, para em seguida determinar o x, mais uma vez, utilizando-se da quarta proporcional.

Construção de x’.



Construção de x.

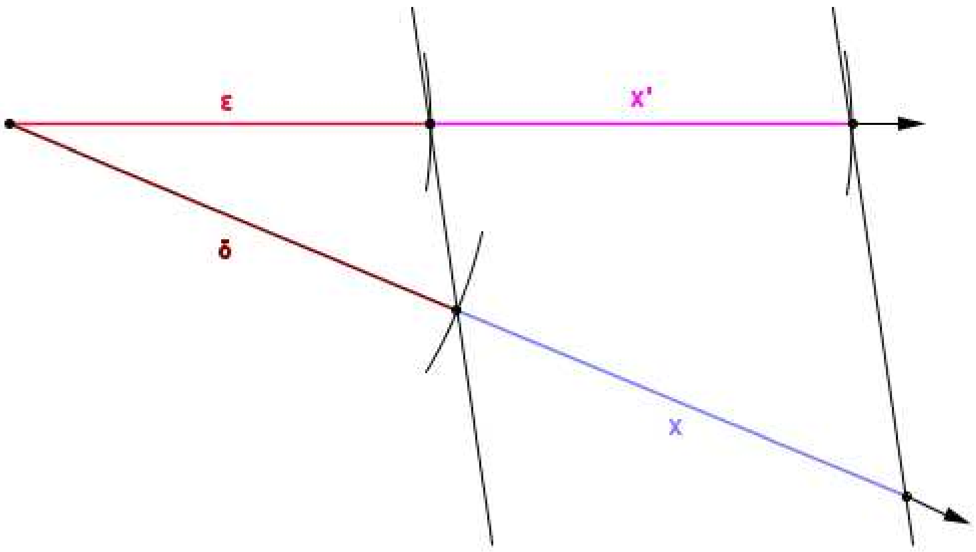


Figura 33 – Aplicação 5.10

5.4 Determinação de segmento conhecendo-se sua soma e sua média geométrica

Para a determinação das medidas de dois segmentos conhecendo-se sua soma e sua média geométrica, faremos uso do processo aditivo para determinação da média proporcional, visto no capítulo 4.

Aplicação 5.11. Determinar, graficamente, as medidas x e y, com x < y, de dois segmentos, cuja soma é 10 u e o produto 16 u, onde u é a unidade gráfica.

Sabemos que $x+y=10$ e que $x \cdot y = 16 \Rightarrow x \cdot y = 4^2$, donde concluímos que 4 é a média proporcional entre x e y. Então, com os elementos fornecidos e utilizando-se do processo aditivo para a determinação da média proporcional determinaremos os segmentos x e y.

Construção:

Trace uma reta suporte t e, sobre ela, tome um segmento AB de comprimento 10u. Determine o ponto médio do segmento AB para, então, construir a semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$ (arco capaz de 90º). Faça a construção de uma paralela à $\overleftrightarrow{AB}$ distando 4u, conforme visto na seção 2.5.2. A interseção da paralela com a semicircunferência nos dá os pontos E e F. Por E, trace uma perpendicular à $\overleftrightarrow{AB}$ determinando o ponto G, interseção entre a perpendicular e $\overleftrightarrow{AB}$. Os segmentos AG e BG são, respectivamente, os segmentos de medidas x e y procurados. A figura 34 ilustra a construção.

Note que esta construção está sujeita à condição de termos a média proporcional menor do que ou igual à metade da soma dos segmentos.

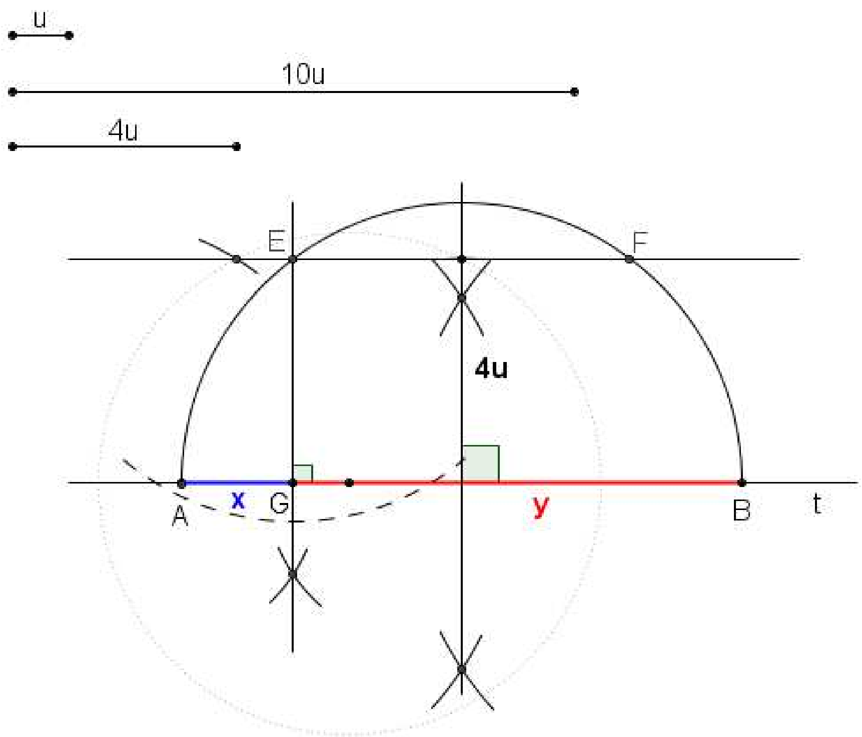


Figura 34 – Aplicação 5.11

Aplicação 5.12. Construir um triângulo retângulo, sabendo-se que a hipotenusa é igual ao segmento de medida a e a soma das medidas dos catetos é igual a **s.**

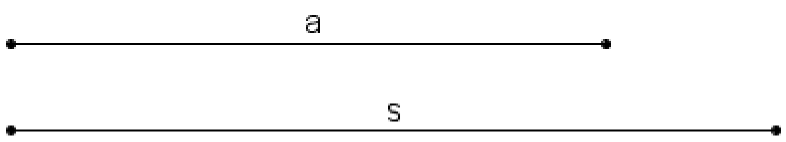
Chamando de x e y as medidas dos catetos do triângulo e sabendo-se que $x^2 + y^2 = a^2$ e que $x^2 + 2xy + y^2 = s^2$, após subtrairmos membro a membro as duas igualdades e isolarmos xy, obtemos $xy = \dfrac{s^2 - a^2}{2}$. Portanto, com a soma e o produto das medidas de dois segmentos, que são os catetos do triângulo retângulo, faremos como na aplicação anterior.

A média proporcional dos segmentos será dada por $n = \sqrt{\dfrac{s^2 - a^2}{2}} = \dfrac{\sqrt{s^2 - a^2} \cdot \sqrt{2}}{2}$. Fazendo $\alpha = \sqrt{s^2 - a^2}$, ficamos com $n = \dfrac{\alpha \cdot \sqrt{2}}{2}$. Assim, procedendo como na aplicação anterior, determinaremos os catetos x e y, e, consequentemente, o triângulo retângulo pedido.

Construção:

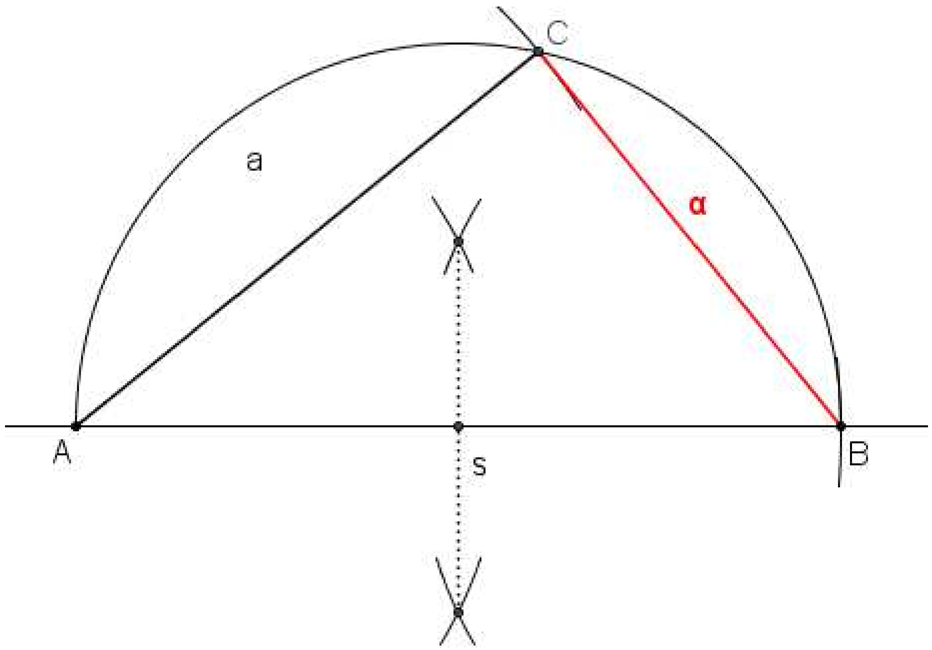
Para a construção do segmento que representa a média proporcional, faremos, inicialmente, a construção do segmento de medida α, dado por $\alpha = \sqrt{s^2 - a^2}$. Para tal, façamos como na aplicação 5.5. Após a construção de α, a média proporcional n ficará dada por $n = \dfrac{\alpha \cdot \sqrt{2}}{2}$, e será determinada conforme mostrado no capítulo 4. De posse do segmento de medida n, que representa a média proporcional, e de m, que representa a soma das medidas dos segmentos, façamos como na aplicação anterior para determinar x e y, e, finalizar, construindo o triângulo retângulo conforme feito na aplicação 5.4. A figura 35 ilustra a construção.

Dados:



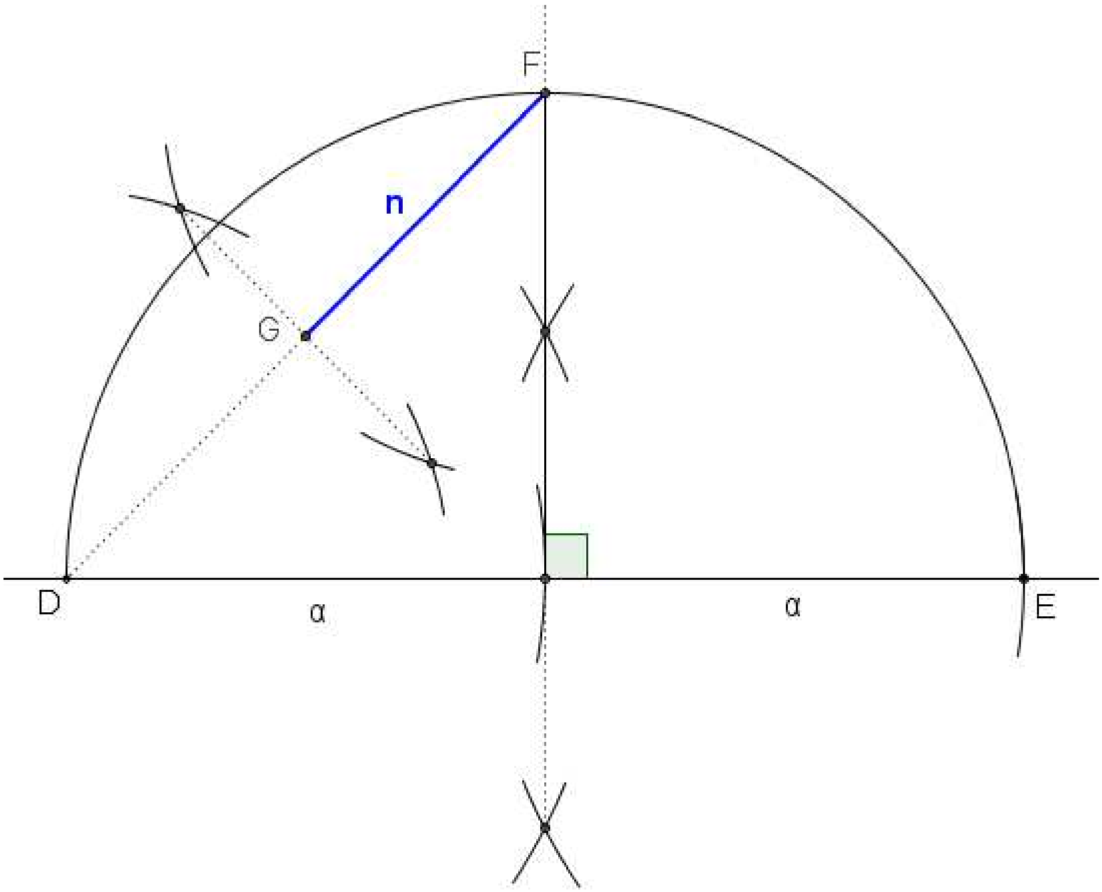
Construção de α.

O α é dado por $\alpha = \sqrt{s^2 - a^2}$. Assim, para determiná-lo, faremos uso da aplicação do teorema de Pitágoras, onde o segmento de medida s é a hipotenusa, o segmento de medida a, um dos catetos e, α, o outro cateto.



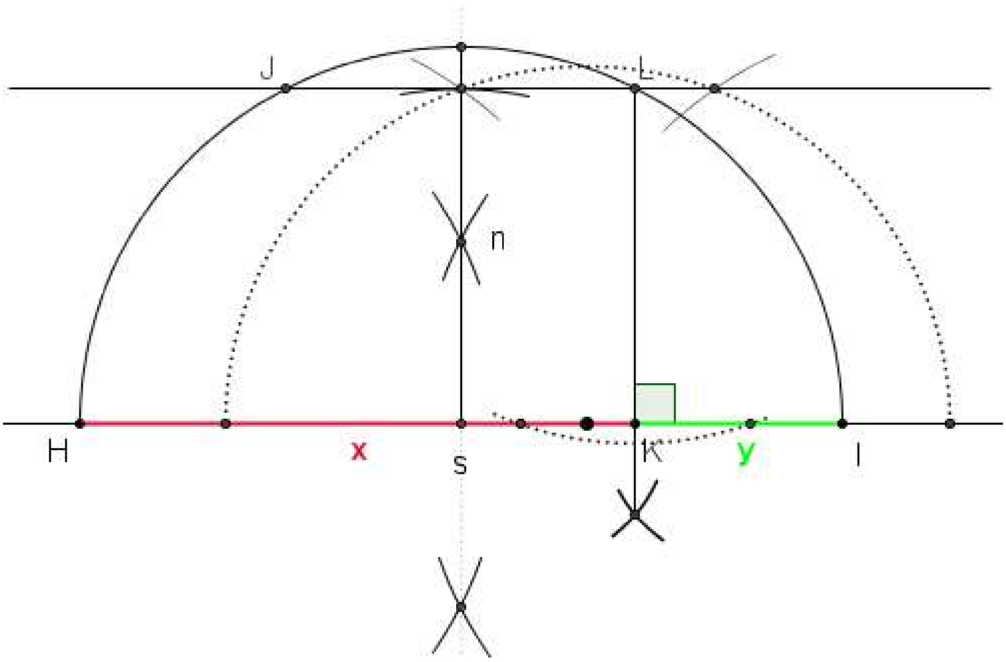
Construção de n.

Sabemos que n é dado por $n = \sqrt{\dfrac{s^2 - a}{2}} = \dfrac{\sqrt{s^2 - a} \cdot \sqrt{2}}{2} = \dfrac{\alpha \cdot \sqrt{2}}{2}$. Então o n é determinado construindo a média proporcional entre α e 2α ,e, ao final, dividindo-a por dois.



Construção de x e y .

Conhecendo-se m e n, a construção de x e y será feita como na aplicação anterior.



Construção do triângulo retângulo.

A construção do triângulo, será feita como descrito na aplicação 5.4.

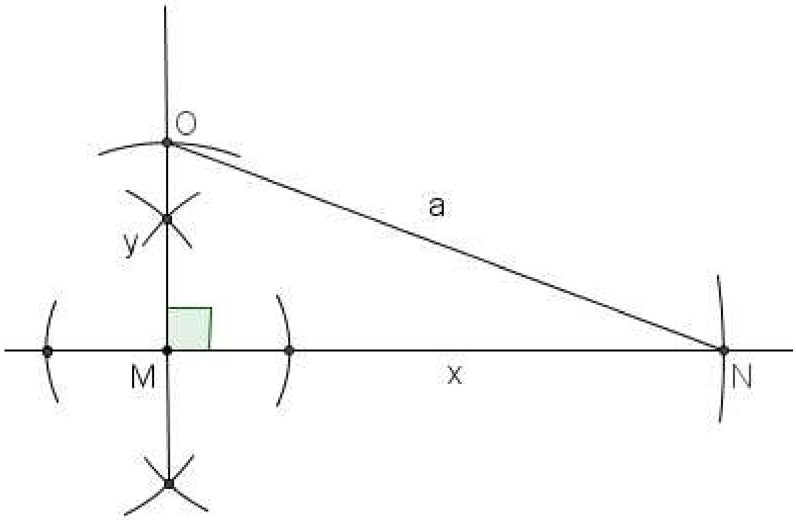


Figura 35 – Aplicação 5.12

5.5 Determinação de segmento conhecendo-se sua diferença e sua média geométrica

Nesse caso, faremos uso da seguinte relação métrica na circunferência "Se de um ponto exterior a uma circunferência, traçarmos um segmento tangente e um segmento secante à circunferência, o comprimento da tangente será a média proporcional entre o comprimento da secante inteira com o comprimento da sua parte exterior". Veja a figura abaixo.

$\overline{PA}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$

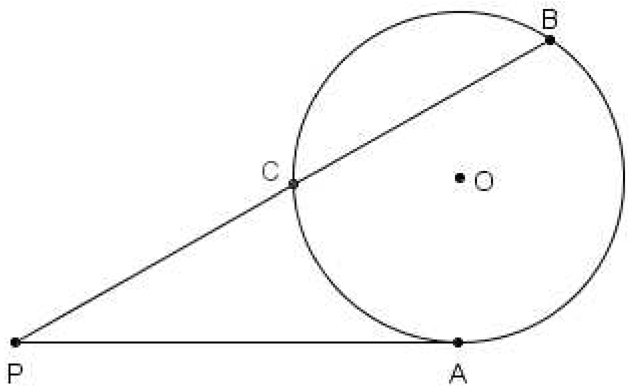


Figura 36 – Relação métrica na circunferência

Aplicação 5.13. Determinar, graficamente, as medidas x e y, com x > y, de dois segmentos, cuja diferença é 6 u e o produto 16 u, onde u é a unidade gráfica.

Sabemos que $x - y = 10$ e que $x \cdot y = 16 \Rightarrow x \cdot y = 4^2$, donde concluímos que 4 é a média proporcional entre x e y. Então, com os elementos fornecidos e utilizando-se da relação métrica enunciada acima, determinaremos os segmentos de medidas x e y.

Analisando os dados fornecidos, concluímos que a média proporcional entre x e y será o segmento tangente e, o x e o y serão, respectivamente, o comprimento inteiro e o comprimento da parte exterior da secante.

Construção:

Trace uma reta suporte t e tome sobre ela o segmento AB de medida 4u. Construa uma perpendicular pela extremidade B do segmento AB, conforme descrito na seção 2.4.3. Sobre a perpendicular e a partir de B, tome o segmento BO de medida 3u (semidiferença entre x e y). Trace a semirreta AO e em seguida, a circunferência de centro O e raio 3u, obtendo os pontos C e D, interseções com a semirreta AO. Os segmentos AC e AD são, respectivamente, os segmentos de medidas y e x procurados. A figura 37 ilustra a construção.

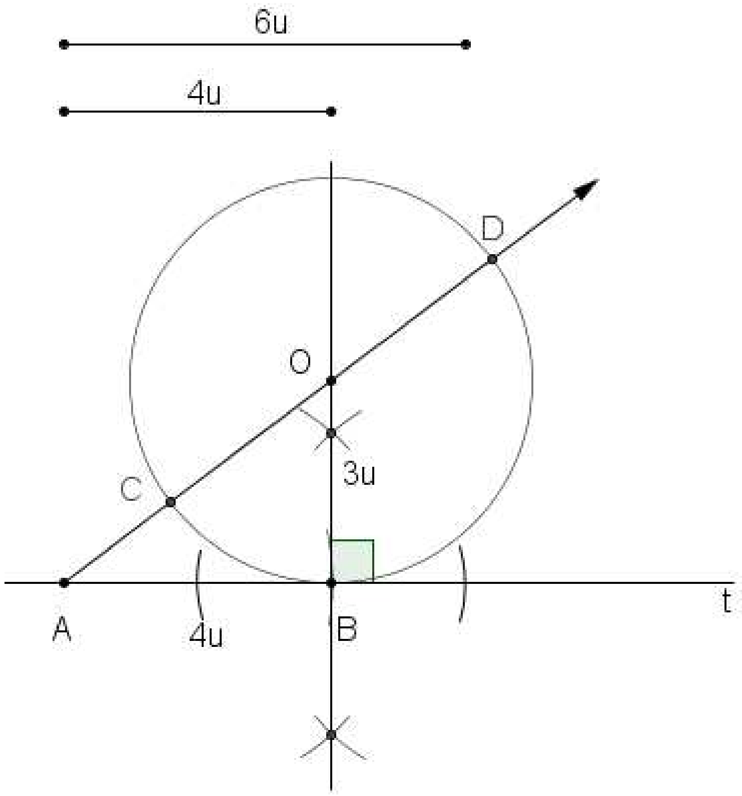


Figura 37 – Aplicação 5.13

5.6 Resolução gráfica da equação do 2º grau

Veremos, agora, como obter, graficamente, ou seja, pelo método Euclidiano, as raízes das equações do 2º grau.

Tal como nas resoluções gráficas das equações do 1º grau, a resolução gráfica das equações do 2º grau será precedida de uma análise para determinar os sinais das raízes, uma vez que, nas resoluções gráficas, elas exprimem os comprimentos dos segmentos. Portanto, após apresentada a equação a ser resolvida, faremos uma análise dos sinais das raízes e, caso apresente como solução raízes negativas, utilizaremos o seu módulo para exprimir a medida do segmento na resolução gráfica.

No nosso estudo, analisaremos equações da forma:

1) $x^2 - mx + n^2 = 0$

2) $x^2 + mx + n^2 = 0$

3) $x^2 + mx - n^2 = 0$

4) $x^2 - mx - n^2 = 0$

Cabe ressaltar que consideraremos sempre o coeficiente do termo x^2 igual a unidade, em todas as formas apresentadas. Caso seja diferente da unidade, deveremos prepará-la de forma a obter o coeficiente desejado. Designaremos por x_1 e x_2 as raízes da equação, com $|x_1| \geq |x_2|$.

Antes de iniciarmos o nosso estudo, recordemos as relações existentes entre as raízes da equação do 2º grau e seus coeficientes.

Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2 \pm bx \pm c = 0$, com a, b e c reais, com $a \neq 0$. Temos que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, o que nos faz lembrar de imediato as construções vistas na seção anterior.

Vamos ao estudo das quatro formas apresentadas.

1. Equação da forma $x^2 - mx + n^2 = 0$.

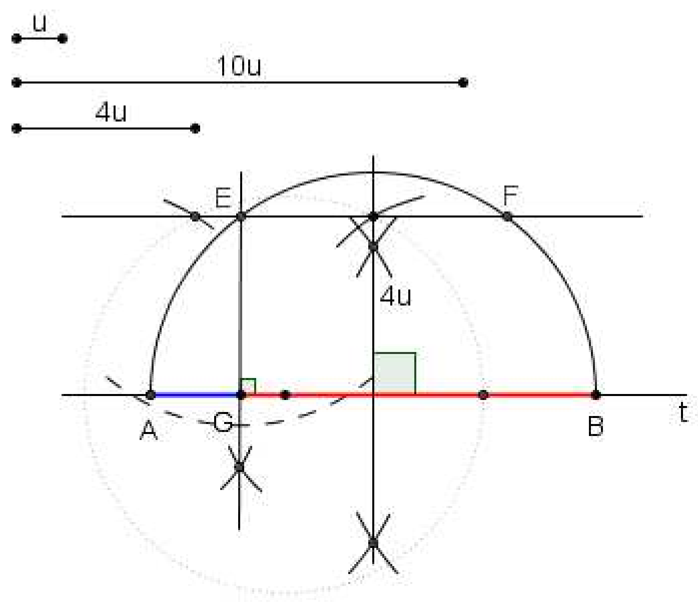
Analisando os sinais dos coeficientes, concluímos que ambas as raízes são positivas. Portanto sendo x_1 e x_2 valores que exprimem os comprimentos dos segmentos na resolução gráfica e, que, pelas relações entre as raízes e os coeficientes, temos $x_1 + x_2 = m$ e $x_1 \cdot x_2 = n^2$, donde concluímos que n é a média proporcional entre x_1 e x_2. Daí, de posse da soma e da média proporcional dos comprimentos dos segmentos, podemos obter a solução gráfica da equação, conforme apresentado na seção anterior.

Aplicação 5.14. Dê a solução Euclidiana da equação $x^2 - 10x + 16 = 0$.

Analisando os sinais dos coeficientes, concluímos que ambas as raízes são positivas. Portanto sendo x_1 e x_2 valores que exprimem os comprimentos dos segmentos na resolução gráfica e, que, pelas relações entre as raízes e os coeficientes, temos $x_1 + x_2 = 10$ e $x_1 \cdot x_2 = 4^2$, donde concluímos que 4 é a média proporcional entre x_1 e x_2. Daí, para obter graficamente os valores de x_1 e x_2, faremos como na seção anterior. Veja que as raízes procuradas são os resultados obtidos na aplicação 5.11.

Construção:

Conforme aplicação 5.11. A figura 38 ilustra a construção.



.

Figura 38 – Aplicação 5.14

A solução gráfica será dada pelos segmentos $\overline{AG} = \beta = x_2$ e $\overline{BG} = \alpha = x_1$.

2. Equação da forma $x^2 + mx + n^2 = 0$.

Analisando os sinais dos coeficientes, concluímos que ambas as raízes são negativas. Portanto sendo $|x_1| = -x_1 = \alpha$ e $|x_2| = -x_2 = \beta$ os valores que exprimem os comprimentos dos segmentos na resolução gráfica e, que, pelas relações entre as raízes e os coeficientes, temos $x_1 + x_2 = -m \Rightarrow (-x_1) + (-x_2) = m \Rightarrow \alpha + \beta = m$ e $x_1 \cdot x_2 = n^2 \Rightarrow$ $(-x_1) \cdot (-x_2) = n^2 \Rightarrow \alpha \cdot \beta = n^2$, donde concluímos que n é a média proporcional entre α e β.

Daí, de posse da soma e da média proporcional dos módulos das raízes e utilizando-se da construção vista na seção anterior, chegaremos a solução gráfica da equação.

Aplicação 5.15. Determinar, graficamente, as raízes da equação $x^2 + 12x + 25 = 0$.

Analisando os sinais dos coeficientes, concluímos que ambas as raízes são negativas. Portanto sendo $|x_1| = -x_1 = \alpha$ e $|x_2| = -x_2 = \beta$ os valores que exprimem os comprimentos dos segmentos na resolução gráfica e, que, pelas relações entre as raízes e os coeficientes, temos $x_1 + x_2 = -12 \Rightarrow (-x_1) + (-x_2) = 12 \Rightarrow \alpha + \beta = 12$ e $x_1 \cdot x_2 = 5^2 \Rightarrow (-x_1) \cdot (-x_2) = 5^2 \Rightarrow \alpha \cdot \beta = 5^2$, donde concluímos que 5 é a média proporcional entre α e β. Daí, de posse da soma e da média proporcional dos módulos das raízes e utilizando-se da construção vista na seção anterior, chegaremos a solução gráfica da equação.

Construção:

A construção é a apresentada na aplicação 5.4. A figura 39 ilustra a construção.

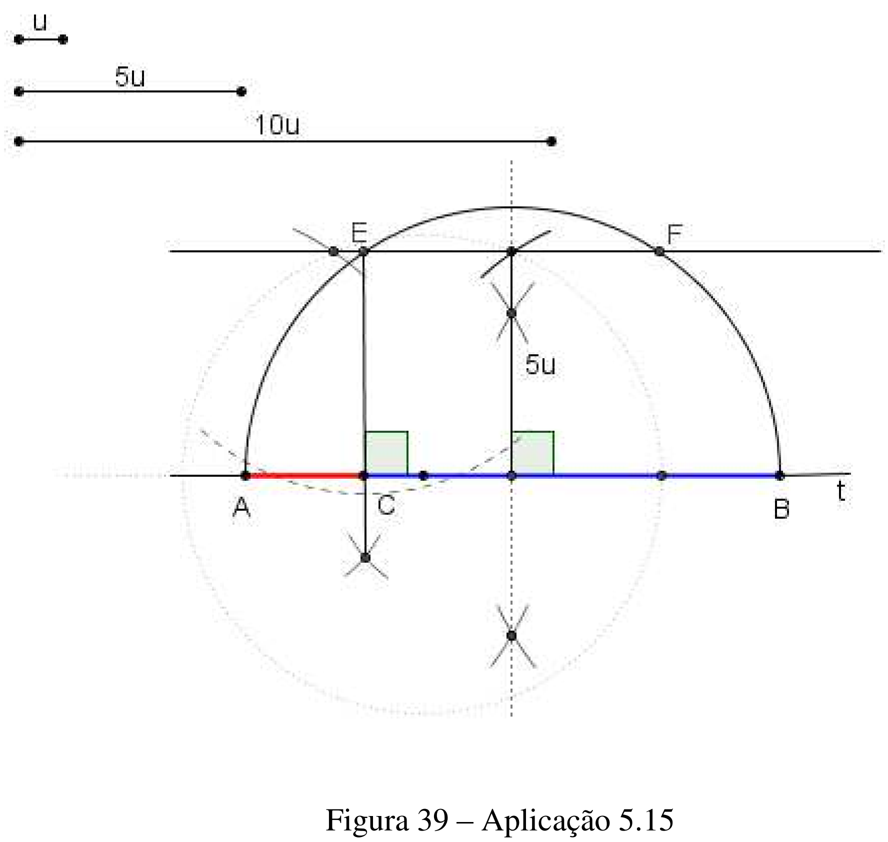


Figura 39 – Aplicação 5.15

A solução gráfica será dada pelos segmentos $\overline{AC} = \beta = -x_2$ e $\overline{BC} = \alpha = -x_1$.

3. Equação da forma $x^2 + mx - n^2 = 0$.

Analisando os sinais dos coeficientes, concluímos que a raiz de maior módulo tem sinal negativo e a de menor módulo positivo. Portanto, de acordo com o estabelecido inicialmente, $|x_1| > |x_2|$, considerando $|x_1| = -x_1 = \alpha$ e x_2 os valores que exprimem os comprimentos dos segmentos na resolução gráfica e, que, das relações existentes entre as raízes e os coeficientes, temos $x_1 + x_2 = -m \Rightarrow (-x_1) + (-x_2) = m \Rightarrow \alpha - x_2 = 12$ e $x_1 \cdot x_2 = -n^2$ $\Rightarrow (-x_1) \cdot x_2 = n^2 \Rightarrow \alpha \cdot x_2 = n^2$, donde concluímos que n é a média proporcional entre α e x_2. Daí, de posse da diferença e da média proporcional entre α e x_2, e utilizando-se da construção vista na seção 5.5, chegaremos à solução gráfica da equação.

Aplicação 5.16. Determinar graficamente as raízes da equação $x^2 + 6x - 16 = 0$.

Analisando os sinais dos coeficientes, concluímos que a raiz de maior módulo tem sinal negativo e a de menor módulo positivo. Portanto, de acordo com o estabelecido inicialmente, $|x_1| > |x_2|$, considerando $|x_1| = -x_1 = \alpha$ e x_2 os valores que exprimem os comprimentos dos segmentos na resolução gráfica e, que, das relações existentes entre as raízes e os coeficientes, temos $x_1 + x_2 = -6 \Rightarrow (-x_1) + (-x_2) = 6 \Rightarrow \alpha - x_2 = 6$ e $x_1 \cdot x_2 = -4^2 \Rightarrow$ $(-x_1) \cdot x_2 = 4^2 \Rightarrow \alpha \cdot x_2 = 4^2$, donde concluímos que 4 é a média proporcional entre α e x_2. Daí, de posse da diferença e da média proporcional entre α e x_2, e utilizando-se da construção vista na seção 5.5, chegaremos à solução gráfica da equação.

Construção: A construção é a apresentada na aplicação 5.5. A figura 40 ilustra a construção.

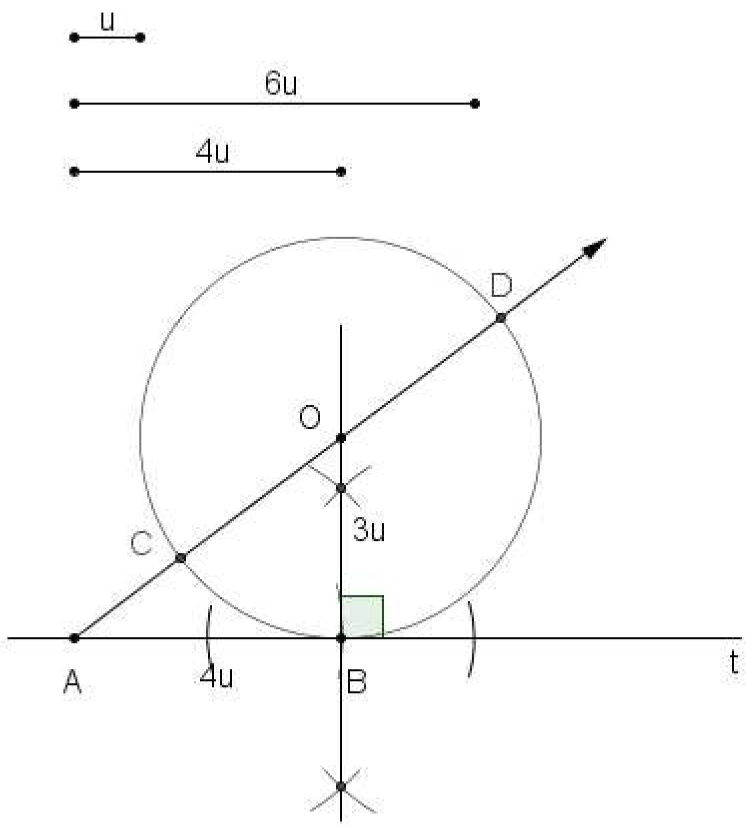


Figura 40 – Aplicação 5.16

A solução gráfica será dada pelos segmentos $\overline{AD} = \alpha = -x_1$ e $\overline{AC} = x_2$.

4. Equação da forma $x^2 - mx - n^2 = 0$

Analisando os sinais dos coeficientes, concluímos que a raiz de maior módulo tem sinal positivo e a de menor módulo negativo. Portanto, de acordo com o estabelecido inicialmente, $|x_1| > |x_2|$, considerando x_1 e $|x_2| = -x_2 = \alpha$ os valores que exprimem os comprimentos dos segmentos na resolução gráfica e, que, pelas relações existentes entre as raízes e os coeficientes, temos $x_1 + x_2 = m \Rightarrow x_1 - (-x_2) = m \Rightarrow x_1 - \alpha = m$ e $x_1 \cdot x_2 = -n^2$ $\Rightarrow x_1 \cdot (-x_2) = n^2 \Rightarrow x_1 \cdot \alpha = n^2$, donde concluímos que n é a média proporcional entre x_1 e α. Daí, de posse da diferença e da média proporcional entre x_1 e α, e utilizando-se da construção vista na seção 5.5, chegaremos a solução gráfica da equação.

Aplicação 5.17. Determinar graficamente as raízes da equação $3x^2 - 18x - 75 = 0$.

Precisamos, inicialmente, preparar a equação de forma que o coeficiente de x^2 seja a unidade. Para tal, basta dividir toda a equação por 3, e assim obteremos $x^2 - 6x - 25 = 0$.

Analisando os sinais dos coeficientes, da nova equação, concluímos que a raiz de maior módulo tem sinal positivo e a de menor módulo negativo. Portanto, de acordo com o estabelecido inicialmente, $|x_1| > |x_2|$, considerando x_1 e $|x_2| = -x_2 = \alpha$ os valores que exprimem os comprimentos dos segmentos na resolução gráfica e, que, pelas relações existentes entre as raízes e os coeficientes, temos $x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow x_1 - (-x_2) = 6 \Rightarrow x_1 - \alpha = 6$ e $x_1 \cdot x_2 = -5^2 \Rightarrow x_1 \cdot (-x_2) = 5^2 \Rightarrow x_1 \cdot \alpha = 5^2$, donde concluímos que 5 é a média proporcional entre x_1 e α. Daí, de posse da diferença e da média proporcional entre x_1 e α, e utilizando-se da construção vista na seção 5.5, chegaremos à solução gráfica da equação.

Construção:

A construção é a apresentada na aplicação 5.5. A figura 41 ilustra a construção.

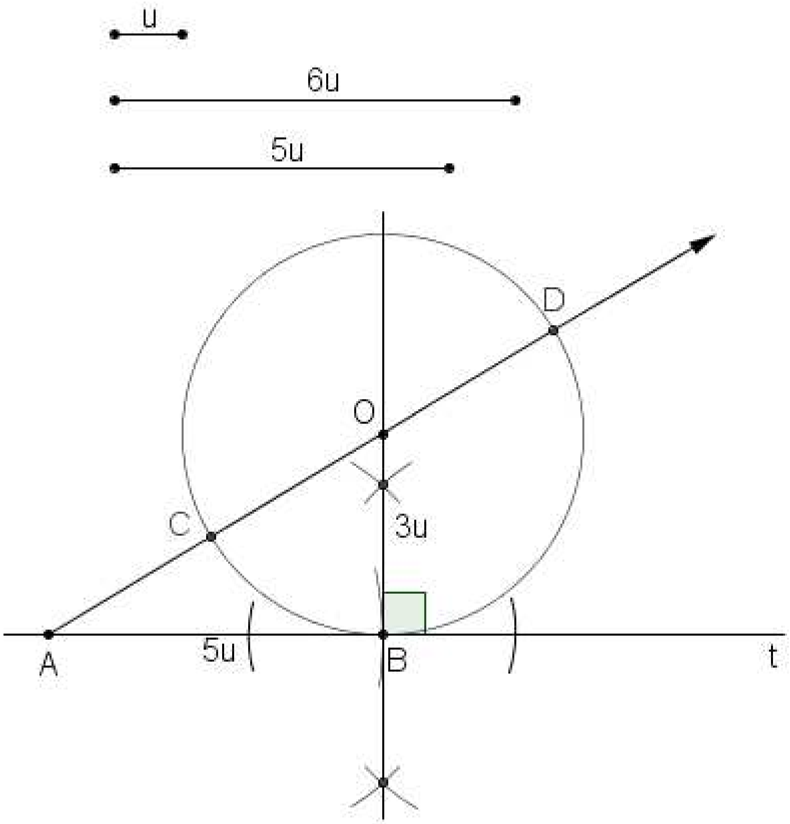


Figura 41 – Aplicação 5.17

A solução gráfica será dada pelos segmentos $\overline{AD} = x_1$ e $\overline{AC} = \alpha = -x_2$.

Aplicação 5.18. Construir um triângulo isósceles ABC, sabendo-se que a diferença entre a base $\overline{BC}$ e a altura $\overline{AH}$ é igual ao segmento de comprimento d e que o lado $\overline{AC}$ é igual ao segmento de comprimento b.

A figura 42 representa um esboço do triângulo a ser construído.

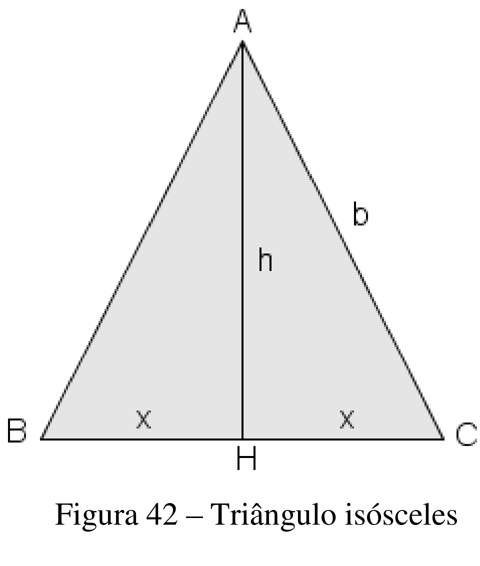


Figura 42 – Triângulo isósceles

Sabe-se que $d = 2x - h \Rightarrow h = 2x - d$ e que no triângulo ACH temos $b^2 = x^2 + h^2$. Então, substituindo $h = 2x - d$ em $b^2 = x^2 + h^2$, e, após efetuarmos algumas operações, encontraremos a equação do 2º grau $x^2 - \frac{4d}{5}x + \frac{d^2 - b^2}{5} = 0$, a qual resolveremos conforme a aplicação 5.14. O objetivo é determinar, graficamente, o segmento de comprimento x, para, então, construir o triângulo ABC.

Considerando, como nas aplicações anteriores, x' e x'' as raízes da equação, temos:

$$x' + x'' = \frac{4}{5}d = m$$

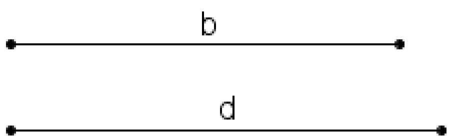
$$x' \cdot x'' = \frac{d^2 - b^2}{5} = \left(\sqrt{\frac{d^2 - b^2}{5}}\right)^2 = (n)^2$$

Daí, de posse da soma m e da média proporcional n dos comprimentos dos segmentos, podemos obter graficamente a solução gráfica da equação.

Construção:

Inicialmente, determinaremos o segmento de medida m, utilizando-se da divisão de segmentos em partes diretamente proporcionais, conforme estudado no capítulo 3. Nesse caso, para obter a fração do segmento d pretendida, basta dividi-lo em cinco partes iguais e pegar quatro partes, obtendo o segmento de medida m. Em seguida, construiremos o segmento de medida n. Veja que n, após algumas operações será obtido pela expressão $n = \frac{\alpha\sqrt{5}}{5}$, com $\alpha = \sqrt{d^2 - b^2}$. Para obtenção de α, faça conforme visto na seção 5.2 e, para obter n, conforme visto no capítulo 4. De posse de m e n, obteremos x_1 e x_2, conforme a aplicação 5.14. Feito isso, com x_1 e x_2 determinados, façamos com a construção do triângulo pedido. A figura 43 ilustra a construção.

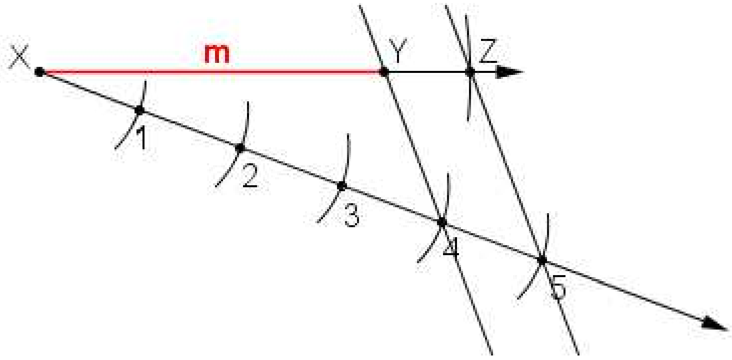
Dados:



Construção de m.

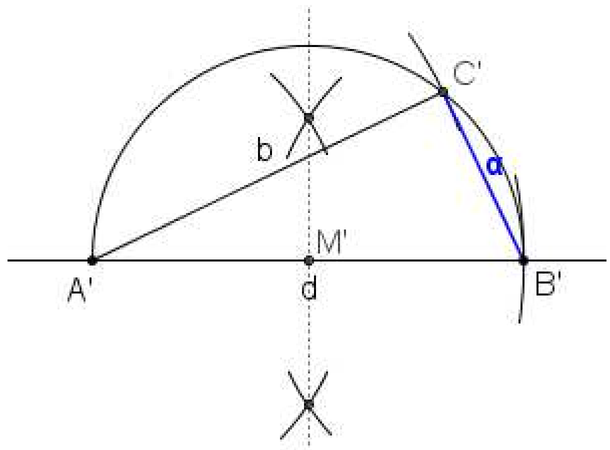
Temos que $m = \frac{4}{5}d$. Portanto, para determinar m, utilizaremos o conceito da divisão de segmento em partes diretamente proporcionais, visto no capítulo 3. Para tal, adotaremos um segmento de medida arbitrária e faremos a divisão do segmento de medida d em cinco partes diretamente proporcionais a ele, consequentemente, o segmento d, ficará dividido em cinco partes congruentes. Assim, o segmento m é facilmente determinado.

Temos, na figura abaixo, que $\overline{XZ} = d$ e $\overline{X1} = \overline{12} = \overline{23} = \overline{34} = \overline{45}$ são os segmentos de medida arbitrária. Após a construção, m fica determinado pelo segmento XY.



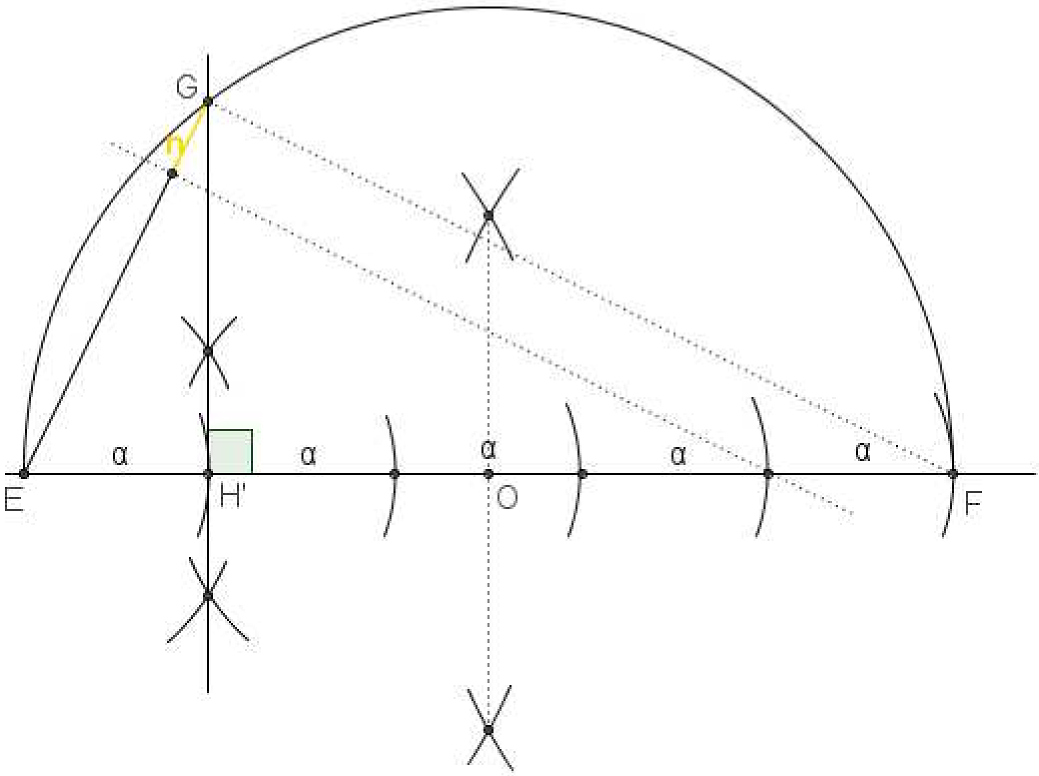
Construção de α.

Temos que α é dado por $\alpha = \sqrt{d^2 - b^2}$. Portanto α é determinado aplicando-se o teorema de Pitágoras. Na expressão, d é a hipotenusa, b, um dos catetos e, α, o outro cateto.



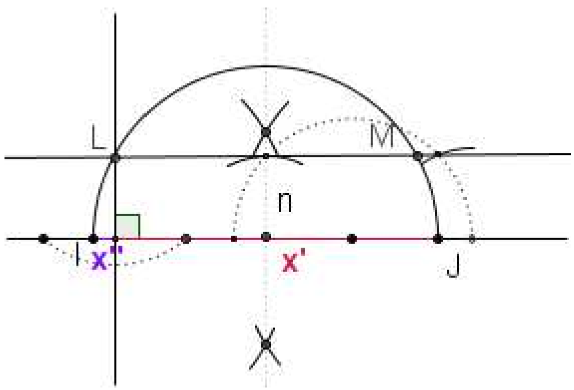
Construção de n.

Temos que n é dado por $n = \frac{\alpha\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{\alpha 5\alpha}}{5}$. Assim, para determinar n, basta determinar a média proporcional entre α e 5α, para em seguida, dividi-la em cinco partes congruentes.



Construção de x’ e x’’.

Temos que x’ e x’’ são as raízes da equação $x^2 - \frac{4d}{5}x + \frac{d^2 - b^2}{5} = 0$. Sabemos, também, que $x' + x'' = \frac{4}{5}d = m$ e $x' \cdot x'' = \frac{d^2 - b^2}{5} = \left(\sqrt{\frac{d^2 - b^2}{5}}\right)^2 = (n)^2$. Portanto façamos como nas aplicações anteriores para determiná-las.



Construção do triângulo ABC.

Note que apenas x’ é solução do problema. Para construção do triângulo ABC, trace uma reta suporte e transporte 2x’ a partir de um ponto B qualquer, pertencente a ela, obtendo o ponto C, tal que $\overline{BC} = 2x'$. Então, construa a mediatriz do segmento AC e, em seguida, construa a circunferência de centro C e raio b. A interseção da circunferência com a mediatriz, nos dá o ponto A, que ligado com B e C forma o triângulo procurado.

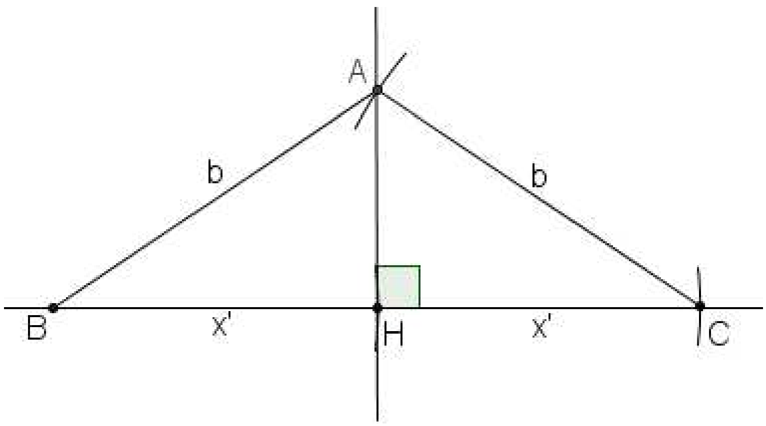


Figura 43 – Aplicação 5.18

6 CONCLUSÃO

Portanto, como foi visto no decorrer do trabalho, utilizando-se das construções fundamentais, dos assuntos abordados no 9º Ano do Ensino Fundamental e suas aplicações, mostramos que a disciplina Desenho Geométrico não se restringe à memorização de sequências para realizar construções. Como já comentado, a prática das construções geométricas possibilita a utilização de estratégias de resolução de problemas e de planejamento de ações, desafiando o campo racional discente.

Acreditamos que, com as aplicações apresentadas, o nosso objetivo foi alcançado, na medida em que elas foram solucionadas, com o uso de régua e compasso e, desta forma oportunizando ao aluno perceber que se pode resolver problemas, os quais, aparentemente, só seriam resolvidos com a álgebra, utilizando esses instrumentos.

Então, nesse contexto é que se espera do aluno o interesse pela aprendizagem de conceitos matemáticos, particularmente na geometria, justificando, assim, a importância da disciplina Desenho Geométrico, na composição do currículo educacional do ensino básico.

REFERÊNCIAS

BONGIOVANNI, Vincenzo; SAVIETTO, Elder e MOREIRA, Luciano. **Desenho Geométrico para o 2º grau**. 4. ed. São Paulo: Ática, 2007.

JÚNIOR, Isaías M.. **Desenho Geométrico**. 10. ed. São Paulo: Ática, 1996.

OLIVEIRA, Clézio Lemes de. **Importância do Desenho Geométrico**. Brasília: UCB, 2005. Disponível em:<www.ucb.br / sites / 100 / 103 / TCC / 12005 / ClezioLemesdeOliveira.pdf>. Acesso em 02 ago. 2018.

PUTNOKI, José Carlos. **Elementos de Geometria e Desenho Geométrico**. São Paulo: Scipione, 1993.

WAGNER, E.; CARNEIRO, Jose Paulo Q. **Construções Geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática).

WAGNER, Eduardo. **Uma Introdução às Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: PIC, 2009.

HEFEZ, A. e VILLELA, M. L. T. **Polinômios e Equações Algébricas**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT)

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar: polinômios**. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção Professor de Matemática)

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT)

MORGADO, A. C. e CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção PROMAT)

CALFA, Humberto Giovanni e BARBOSA, Roberto Carvalho. **Desenho Geométrico Plano vol 1**. 2. ed. Rio de Janeiro: Biblioteca do Exército Editora, 1997. (Coleção Marechal Trompowsky)

CALFA, Humberto Giovanni; ALMEIDA, Luiz Abreu de. e BARBOSA, Roberto Carvalho. **Desenho Geométrico Plano vol 2**. 2. ed. Rio de Janeiro: Biblioteca do Exército Editora, 1997. (Coleção Marechal Trompowsky)

DOLCE, Osvaldo e POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana**. 8. Ed. São Paulo: Atual, 2005.