

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

FERNANDO FERREIRA AMORIM

Curvas Cicloidais: Parametrização, Propriedades e Aplicações

São Luís - MA

2018

FERNANDO FERREIRA AMORIM

Curvas Cicloidais: Parametrização, Propriedades e Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Josenildo de Souza Chaves

Coorientador: Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo

São Luís - MA

2018

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Amorim, Fernando Ferreira Amorim

Curvas Cicloidais: Parametrização, Propriedades e Aplicações /

Fernando Ferreira Amorim - 2018

79f.

Coorientador: Marcos Antônio Ferreira de Araújo.

Orientador: Josenildo de Souza Chaves.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/CCET, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2018.

1. Cicloide. 2. Ensino Médio. 3. Epicicloide. 4.

Hipocicloide. I. Araújo, Marcos Antônio Ferreira de

Araújo. II. Chaves, Josenildo de Souza Chaves. III.

Título.

FERNANDO FERREIRA AMORIM

Curvas Cicloidais: Parametrização, Propriedades e Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 11/10/2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Josenildo de Souza Chaves (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Marcos Antônio Ferreira de Araújo (Coorientador)
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Antônio José da Silva
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho
Universidade Federal do Maranhão

AGRADECIMENTOS

Ao nosso Deus, por orientar minha trajetória de vida.

A toda minha família, pela confiança e incentivo, em especial a minha filha Fernanda Carvalho Amorim, que me estimulou muito para o término desta dissertação.

De uma forma muito especial, ao meu amor, amiga e companheira Prof.^a Mestranda Yêda Sá Malta, pelo amor, incentivo e contribuição do começo ao fim do curso, sempre me estimulando a continuar firme e focado na concretização deste sonho pessoal e profissional.

A todos os amigos do PROFMAT 2016, em especial Laécio Silva Rodrigues e Wenceslau Silva Leite, companheiros em todas as etapas do programa.

A meu amigo Raimundo José Pinto Cutrim, pelo apoio e contribuição sem a qual a caminhada teria sido mais árdua.

A meu amigo e gestor, Jorge Luís dos Santos Pereira, da escola CE São José Operário, pois sua contribuição e parceria autorizando a execução dessa pesquisa foi crucial para o êxito da mesma.

Aos meus alunos do 3º ano e em especial a Antônio Oliveira, Larissa Barros, Auryadne Lima, Kelrylene Silva, Marina Pimenta, Allyssyene Buna, Arlynne Borges, Sthefanny Abigail Campos e Lays Mendes, com os quais tive contato direto na vivência de estudo com o foco neste trabalho.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e ao IMPA pelo desenvolvimento e condução do PROFMAT.

À CAPES, pelo auxílio financeiro da bolsa.

Aos professores do PROFMAT, em especial ao Prof. Dr. Josenildo de Souza Chaves por ter me orientado nessa dissertação e ao Prof. Me Anselmo Barganha Raposo Júnior pelo constante apoio em todo percurso desse mestrado.

A todos que direta ou indiretamente sempre lutam por novos ideais, meu cordial agradecimento.

“Caiam mil homens à tua esquerda e dez mil à tua direita, tu não serás atingido. Porém verás com teus próprios olhos, contemplarás o castigo dos pecadores, porque o Senhor é teu refúgio. Escolheste, por asilo, o Altíssimo. Nenhum mal te atingirá, nenhum flagelo chegará à tua tenda, porque aos seus anjos ele mandou que te guardem em todos os teus caminhos. Eles te sustentarão em suas mãos, para que não tropeces em alguma pedra ”. Salmo 91

RESUMO

Neste trabalho apresentamos as Curvas Cicloidais: Cicloide, Epicicloide e Hipocicloide, fazendo suas parametrizações e construindo essas curvas com o auxílio do software GeoGebra. Além disso, destacamos propriedades e aplicações dessas curvas planas. Especificamente, apresentamos uma proposta de trabalho para promover o estudo das Curvas Cicloidais no 3º ano do Ensino Médio. Algumas aplicações estão relacionadas ao conhecimento dos conteúdos: movimento retilíneo uniforme, movimento retilíneo uniformemente variado, movimento circular, força, energia, equações paramétricas de uma reta, razões trigonométricas, comprimento e área de um círculo. Uma experimentação em sala de aula foi realizada para apresentar algumas propriedades das Curvas Cicloidais, uma vez que a demonstração dessas propriedades abrange conceitos cuja notação formal é matéria específica do ensino superior. Este experimento serviu para mostrar que as Curvas Cicloidais podem ser abordadas de forma introdutória junto ao conteúdo do Ensino Médio e que a motivação do professor é fundamental no processo de aprendizagem.

Palavras-chave: Cicloide, Ensino Médio, Epicicloide, Hipocicloide.

ABSTRACT

In this work we present the Cycloid Curves: Cycloid, Epicycloid and Hypocycloid, making their parametrizations and building these curves with the support of GeoGebra software. In addition, we highlight properties and applications of these flat curves. Specifically, we present a work proposal to stimulate the study of Cycloid Curves in the 3rd year of High School. Some applications are related to the knowledge of the contents: uniform rectilinear motion, uniformly varied rectilinear motion, circular motion, force, energy, parametric equations of a line, trigonometric ratios, length and area of circle. A classroom experimentation was performed to present some properties of the Cycle Curves, since the demonstration of these properties covers concepts whose formal notation is specific subject of higher education. This experiment served to show that Cycloid Curves can be approached in a introductory way with the content of High School and that the motivation of the teacher is fundamental in the learning process.

Key-words: Cycloid, High School, Epicycloid, Hypocycloid.

Lista de Figuras

2.1	Reta s passando pelos pontos A , Q e B distintos.	15
2.2	Circunferência α centrada na origem.	16
2.3	Cicloide com círculo gerador.	18
2.4	Epicycloide com círculo gerador.	19
2.5	Epicycloide com 6 cúspides.	21
2.6	Epicycloide com 7 cúspides.	21
2.7	Epicycloide com infinitas cúspides.	21
2.8	Cardioide.	22
2.9	Ponto P descrevendo uma Hipocicloide.	23
2.10	Hipocicloide com 5 cúspides.	25
2.11	Hipocicloide com 7 cúspides.	25
2.12	Hipocicloide com infinitas cúspides.	25
2.13	Astroide.	26
2.14	Cicloide construída.	28
2.15	Epicycloide construída.	29
2.16	Hipocicloide construída.	30
3.1	Johann Bernoulli (1667-1748).	32
3.2	Sistema de Coordenadas.	33
3.3	Christiaan Huygens (1629-1695).	37
3.4	Cicloide invertida.	37
3.5	Esboço do relógio com pêndulo cicloidal feito por Huygens.	40
3.6	Reta r tangente à Curva Cicloide.	42
3.7	Rampa de skatistas.	43
3.8	Museu de Arte Kimbell.	43

3.9	Detalhe do corte desenhado da Arquitetura do museu.	43
3.10	Parte interna do museu Kimbell.	44
3.11	Cardioide, $R = r$	45
3.12	Gráficos das equações polares da Cardioide.	45
3.13	Nefroide, $R = 2r$	47
3.14	O par Tusi, $R = 2r$	50
3.15	Deltoide, $R = 3r$	50
3.16	Astroide, $R = 4r$	52
3.17	Régua Mágica - Espirógrafo.	54
4.1	Aula sobre parametrização de curvas.	56
4.2	Aula sobre como construir as Curvas Cicloidais no GeoGebra.	57
4.3	Régua Mágica ou Espirógrafo.	58
4.4	Formação das curvas no papel.	59
4.5	Mandalas construídas por meio da Régua Mágica.	59
4.6	Construção das figuras com a Régua Mágica.	60
4.7	Inspirograph.	60
4.8	Utilizando o Inspirograph no Laboratório de Informática.	60
4.9	Mandalas feitas no Inspirograph.	61
4.10	Cartazes das Curvas Cicloidais.	62
4.11	Construção da Curva Cicloide.	62
4.12	Dispositivo contendo uma reta, uma curva e a Curva Cicloide.	63
4.13	Confecção dos painéis de Mandalas.	64
4.14	Engrenagens de madeira.	64
4.15	Exposição da Curva Cicloide.	65
4.16	Exposição da Curva Epicicloide.	66
4.17	Exposição da Curva Hipocicloide.	67
4.18	Mural de Mandalas.	67
B.1	Curva Cicloide.	73
B.2	Marin Mersenne (1588 - 1648).	73
B.3	Blaise Pascal (1623 - 1662).	75
B.4	Sistema Celeste de Ptolomeu.	76

SUMÁRIO

Lista de Figuras	6
1 Introdução	10
1.1 Objetivos	12
1.2 Apresentação dos Capítulos	12
2 Parametrização das Curvas Cicloidais e Construção via GeoGebra	14
2.1 Parametrização da Reta	15
2.2 Parametrização da Circunferência	16
2.3 Parametrização da Cicloide	18
2.4 Parametrização da Epicloide	19
2.5 Parametrização da Hipocicloide	22
2.6 Construções das Curvas Cicloidais no GeoGebra	27
2.6.1 Construção da Cicloide	27
2.6.2 Construção da Epicloide	28
2.6.3 Construção da Hipocicloide	29
3 Propriedades e Aplicações das Curvas Cicloidais	31
3.1 Curva Cicloide	31
3.1.1 Problema da Braquistócrona	31
3.1.2 Problema da Tautócrona	36
3.2 Curva Epicloide	44
3.3 Curva Hipocicloide	49
4 Curvas Cicloidais no Ensino Médio	55
4.1 Introdução	55
4.2 Exposição em Sala de Aula	56

5	Considerações Finais	68
A	Demonstração da Identidade de Beltrami	70
B	Aspectos Históricos das Curvas Cicloidais	72
B.1	Curva Cicloide	72
B.2	Curvas Epicicloide e Hipocicloide	75
	Referências	77

Capítulo 1

Introdução

As Curvas Cicloidais tem sido objeto de estudo de vários autores. Dentre eles, Venceslau (2015), usa as Curvas Cicloidais para mostrar como realizar atividades capazes de tornar o ensino da Matemática interativo em sala de aula. Tagliolato (2015), apresenta o problema da Braquistócrona e uma proposta de trabalho para atender alunos do Ensino Médio e Ensino Fundamental. Bustillos & Sassine (2011), apresentam a história da Curva Cicloide e analisam as propriedades da Brasquistócrona e da Tautócrona. Munem & Foulis (1982), determinam o comprimento e área de algumas Curvas Cicloidais. Cutrim (2015), apresenta os princípios de parametrização de várias curvas planas com auxílio do software GeoGebra para serem aplicadas no Ensino Médio. Santos & Alencar (2003), analisam a geometria das curvas planas e descrevem suas parametrizações. Delgado, et al, 2013, descrevem a geometria analítica das Curvas Cicloidais com ênfase nas suas parametrizações.

Para representar uma curva no plano é possível adotar um ponto de vista dinâmico. Podemos descrever qualquer curva do plano como a trajetória de um ponto móvel, considerando as coordenadas x e y como funções da forma $x = f(t)$ e $y = g(t)$ chamadas funções paramétricas e observar que, quando o parâmetro t varia, o ponto $(x, y) = (f(t), g(t))$ também varia e traça uma curva C (Delgado, et al, 2013; Cutrim, 2015). Sendo que, o movimento de um ponto sobre uma circunferência quando esta rola sem deslizar sobre uma reta ou sobre uma outra circunferência (tanto exteriormente quanto interiormente) descreve exatamente o que chamamos de Curvas Cicloidais (Cicloide, Epicloide e Hipocicloide).

O mundo em que vivemos se transforma em uma velocidade muito superior à

do sistema de educação tradicional. Por essa razão, o desafio do professor é de procurar formas de ensino para efetivar a aprendizagem. Na literatura educacional, pode-se observar que muitos autores destacam que a experimentação constitui um importante recurso metodológico e que facilita o processo de ensino-aprendizagem, tornando-o, também, significativo. Segundo Demo (2011, p.41),

Cabe ao professor competente conduzir essa aprendizagem significativa, orientando o aluno permanentemente para expressar-se de maneira fundamentada, exercitar o questionamento e formulação própria, reconstruir autores e teorias e cotidianizar a pesquisa.

Entende-se que o docente pode utilizar diferentes recursos e materiais, com o objetivo de tornar o conteúdo teórico mais interessante, motivador e próximo da realidade. Assim, Freire (1996) afirma que, “*para compreender a teoria é preciso experienciá-la*”.

Destaca-se que a experimentação proporciona uma situação de investigação e permite a discussão e interpretação dos resultados encontrados. Nesse sentido, o desenvolvimento desse trabalho busca aguçar e estimular a curiosidade pelo estudo da Matemática, especialmente pelo estudo das Curvas Cicloidais, aliando teoria e prática, além disso, mostrando que a Matemática é uma ciência dinâmica e que não se restringe simplesmente a fatores de memorização e realização de cálculos.

Podemos perceber que a grande maioria dos alunos do ensino médio e até mesmo da graduação têm pouco, ou nenhum conhecimento sobre as Curvas Cicloidais e suas propriedades e aplicações. Diante dessa realidade, propomos um trabalho que venha contribuir para que eles possam ter uma nova visão sobre esses tipos de curvas e também possam compreender de forma prática a aplicação das mesmas no cotidiano, utilizaremos o software GeoGebra (Hohenwarter, 2004) como ferramenta de auxílio para a construção geométrica das curvas.

Com o conhecimento mais refinado sobre a parametrização dessas curvas, suas aplicações no cotidiano e a descrição dinâmica de seus traços no GeoGebra, haverá maior sentido para o aluno quando este, por exemplo, olhar uma rampa de skate e saber que o formato da mesma é descrito por uma Cicloide, assim como de qualquer curva de descida mais rápida. Blaise Pascal (1623–1662), já afirmava sobre a Cicloide na *Acta Eruditorum*, de acordo com Farina (2013):

“A Cicloide é uma curva tão usual e corrente que depois da reta e da circunferência nenhuma outra curva é tão comumente encontrada. É descrita tão frequentemente diante de nossos olhos que é surpreendente que não tenha sido considerada pelos antigos”.

Diante deste contexto, este estudo buscou responder as seguintes questões: Como estimular a importância da disciplina Matemática em sala de aula? Como superar as dificuldades encontradas pelos alunos para interpretar uma curva de maneira dinâmica e não somente fixa?

Nesse sentido justifica-se a elaboração deste trabalho, levando em consideração a minha experiência como docente do Ensino Médio na rede privada e pública do estado do Maranhão, oportunidade que fez por vários anos observar que a matriz curricular ministrada não perpassava pela possibilidade do estudo relacionado às Curvas Cicloidais e suas variantes.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma proposta de trabalho para promover o estudo das Curvas Cicloidais no Ensino Médio, suas propriedades e aplicações.

Como objetivos específicos:

- (i) determinar as equações paramétricas de algumas curvas planas, dentre elas as Curvas Cicloidais;
- (ii) explorar o GeoGebra para uma melhor visão geométrica de um ponto descrevendo as curvas planas;
- (iii) identificar propriedades e aplicações das Curvas Cicloidais;
- (iv) construir as curvas utilizando material didático e software alternativo.

1.2 Apresentação dos Capítulos

No Capítulo 2 apresentamos os fundamentos da parametrização das Curvas Cicloidais. Utilizamos o software GeoGebra como apoio computacional para construção das figuras. Definimos a parametrização de uma curva plana, parametrização da reta, parametrização da circunferência e parametrização das Curvas Cicloidais: Cicloide, Epicicloide e Hipocicloide. Descreve-se na Seção 2.6 como construir as Curvas Cicloidais no GeoGebra

para compreender visualmente como essas curvas se comportam quando fazemos variar seus parâmetros.

O Capítulo 3 apresenta as propriedades e aplicações das Curvas Cicloidais. Tratamos dos problemas da Braquistócrona e da Tautócrona caracterizadas na Curva Cicloide. Além disso, apresenta algumas relações de comprimento e área dessas curvas.

O Capítulo 4 descreve a parte experimental desta dissertação. Uma proposta de trabalho para o ensino das Curvas Cicloidais no 3º ano do Ensino Médio é apresentada. Para motivar a abordagem teórica e prática, foi utilizado o GeoGebra e uso de material didático específico.

No Apêndice A, apresentamos uma prova da identidade de Beltrami a partir da equação de Euler e no Apêndice B apresentamos os aspectos históricos das Curvas Cicloidais.

Capítulo 2

Parametrização das Curvas Cicloidais e Construção via GeoGebra

Neste Capítulo introduzimos a definição de curva plana parametrizada de acordo com Santos & Alencar (2003), parametrização da reta, da circunferência e das Curvas Cicloidais: Cicloide, Epicicloide e Hipocicloide. Além disso, apresentamos a descrição de como construir as Curvas Cicloidais no software GeoGebra.

Definição 2.1. Uma curva no plano \mathbb{R}^2 é uma aplicação $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $\beta(t) = (x(t), y(t))$, com $t \in \mathbb{R}$. O conjunto imagem C da aplicação β , dado por

$$C = \{\beta(t) = (x(t), y(t)); t \in I\}; \quad I \subset \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

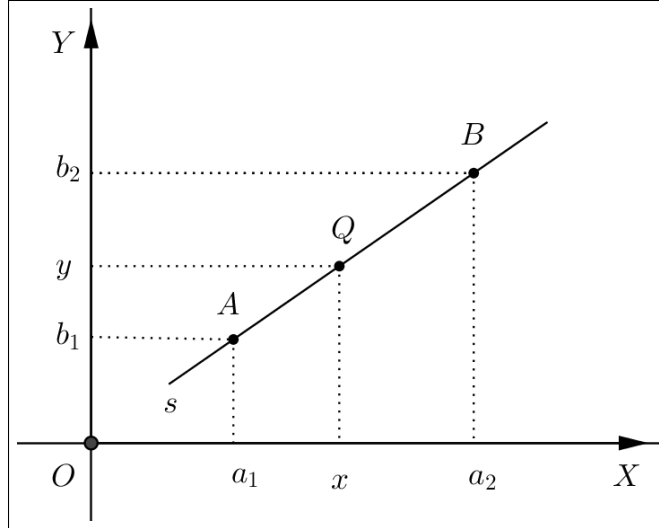
é chamado de traço de β . Devemos observar que, de acordo com a Definição 2.1, estamos analisando todo o movimento traçado e não somente o conjunto C . Nesse caso, β é dita uma parametrização em C e denominamos t o parâmetro da curva β . A parametrização de uma curva plana pode ser interpretada como a trajetória de uma partícula móvel que se desloca sobre o plano em um intervalo de tempo.

Nas Seções 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5 apresentamos as equações paramétricas da reta, circunferência, Cicloide, Epicicloide e Hipocicloide, respectivamente.

2.1 Parametrização da Reta

Seja s a reta que passa pelos pontos A e B e seja Q um ponto da reta s diferente de A e B . Considere Q interior ao segmento AB , conforme Figura 2.1.

Figura 2.1: Reta s passando pelos pontos A , Q e B distintos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja $t \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{|AQ|}{|AB|} = t$. Fazendo $A = (a_1, b_1)$, $Q = (x, y)$ e $B = (a_2, b_2)$, segue pelo teorema de Tales que:

$$\begin{aligned} \frac{|AQ|}{y - b_1} &= \frac{|AB|}{b_2 - b_1} \\ \frac{|AQ|}{|AB|} &= \frac{y - b_1}{b_2 - b_1} = t \\ y &= b_1 + (b_2 - b_1)t \end{aligned} \quad (2.2)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{|AQ|}{x - a_1} &= \frac{|AB|}{a_2 - a_1} \\ \frac{|AQ|}{|AB|} &= \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} = t \\ x &= a_1 + (a_2 - a_1)t. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Segue então, por (2.2) e (2.3) que as equações paramétricas da reta são:

$$s : \begin{cases} x = a_1 + (a_2 - a_1)t \\ y = b_1 + (b_2 - b_1)t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Exemplo 2.2. Considere os pontos $A = (-6, 2)$ e $B = (-2, -5)$, obtenha a equação paramétrica da reta r que passa por esses pontos.

Solução. Sendo $P = (x, y) \in r$, $A = (a_1, b_1) = (-6, 2)$, $B = (a_2, b_2) = (-2, -5)$ e $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{cases} x = a_1 + (a_2 - a_1)t \\ y = b_1 + (b_2 - b_1)t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 + 4t \\ y = 2 - 7t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

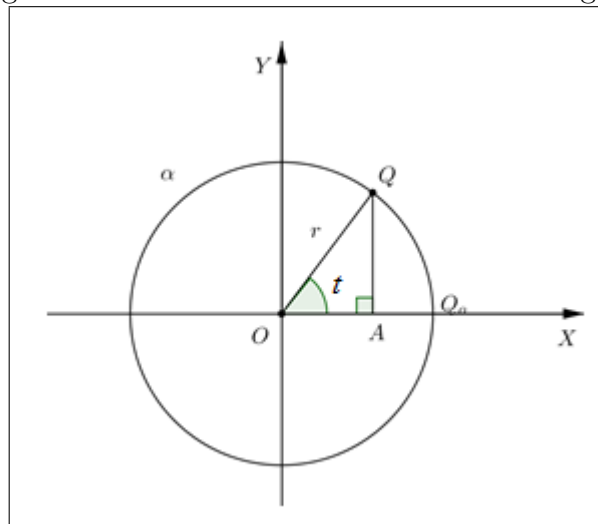
Logo, as equações paramétricas da reta r são

$$r : \begin{cases} x = -6 + 4t \\ y = 2 - 7t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.2 Parametrização da Circunferência

A equação da circunferência de raio $r > 0$ e centro na origem, Figura 2.2, é dada por $\alpha : x^2 + y^2 = r^2$.

Figura 2.2: Circunferência α centrada na origem.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando t a medida em radianos do ângulo $\widehat{Q_oOQ}$ (tomada no sentido positivo), onde O é a origem do sistema cartesiano, $Q_o = (r, 0) \in \alpha$ e $Q = (x, y) \in \alpha$. Sendo $A = (x, 0)$ a projeção ortogonal de Q sobre o eixo OX , resulta que $\triangle OQA$ é retângulo. Daí segue que:

$$\cos(t) = \frac{|OA|}{|OQ|} \Rightarrow \cos(t) = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos(t) \quad (2.5)$$

e

$$\sin(t) = \frac{|AQ|}{|OQ|} \Rightarrow \sin(t) = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin(t), \quad (2.6)$$

sendo que $Q = (r\cos(t), r\sin(t))$ percorre a circunferência no sentido anti-horário. De acordo com as equações 2.5 e 2.6, as equações paramétricas da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio r são dadas por:

$$\alpha : \begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\sin(t) \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Fazendo t percorrer os valores no intervalo $[0, 2\pi)$, obtemos todos os pontos da circunferência. No caso de $t \in \mathbb{R}$ temos um número infinito de voltas sobre a circunferência.

Observação 2.3. Caso a circunferência não esteja centrada na origem, ou seja, seu centro no ponto (x_o, y_o) , a equação da circunferência é $\alpha : (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$, então, as equações paramétricas da circunferência α nas coordenadas x e y são:

$$\alpha : \begin{cases} x = x_o + r\cos(t) \\ y = y_o + r\sin(t) \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Exemplo 2.4. Parametrize a circunferência $\alpha : x^2 + y^2 - 12x + 20y + 134 = 0$.

Solução. Completando os quadrados,

$$\begin{aligned} x^2 - 2 \times 6x + 36 + y^2 + 2 \times 10y + 100 + 134 - 36 - 100 &= 0, \\ (x - 6)^2 + (y + 10)^2 &= 2, \end{aligned}$$

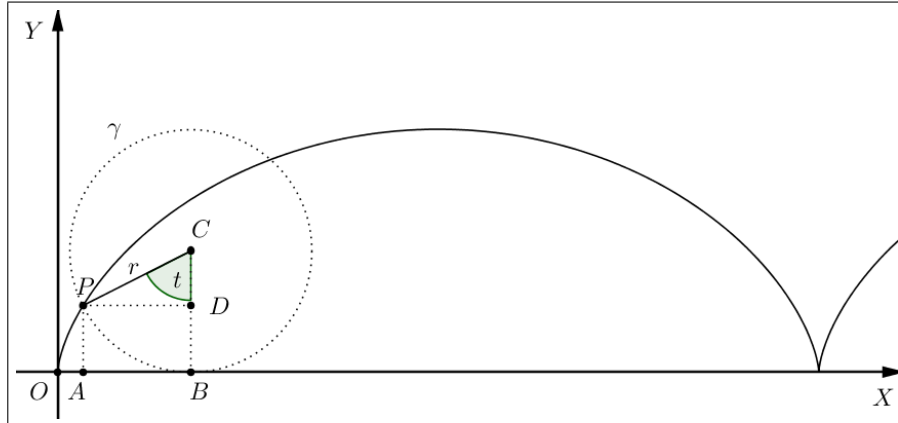
segue que α é a circunferência de centro $(6, -10)$ e raio $\sqrt{2}$. Logo, as equações paramétricas da circunferência α são,

$$\alpha : \begin{cases} x = 6 + \sqrt{2}\cos(t) \\ y = -10 + \sqrt{2}\sin(t) \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.3 Parametrização da Cicloide

A Cicloide é o lugar geométrico descrito pelo movimento do ponto $P = (0, 0)$ de um círculo de raio $r > 0$, centrado em $(0, r)$, quando o círculo gira sem deslizar sobre o eixo dos x (Figura 2.3).

Figura 2.3: Cicloide com círculo gerador.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando o círculo gira um ângulo t , seu centro se move um comprimento $|OB|$. Na Figura 2.3, temos $|OB|$ igual ao comprimento do arco BP , ou seja $|OB| = rt$, $|CB| = r$, $|CD| = r \cos(t)$ e $|DP| = r \sin(t)$.

Portanto, as coordenadas de P são

$$x = |OB| - |DP| = rt - r \sin(t) = r(t - \sin(t)) \quad (2.9)$$

e

$$y = |CB| - |CD| = r - r \cos(t) = r(1 - \cos(t)), \quad (2.10)$$

ou seja, as equações paramétricas da Cicloide são dadas por:

$$\begin{cases} x = r(t - \sin(t)) \\ y = r(1 - \cos(t)) \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Quando t varia de 0 a 2π , obtemos o primeiro arco da Cicloide.

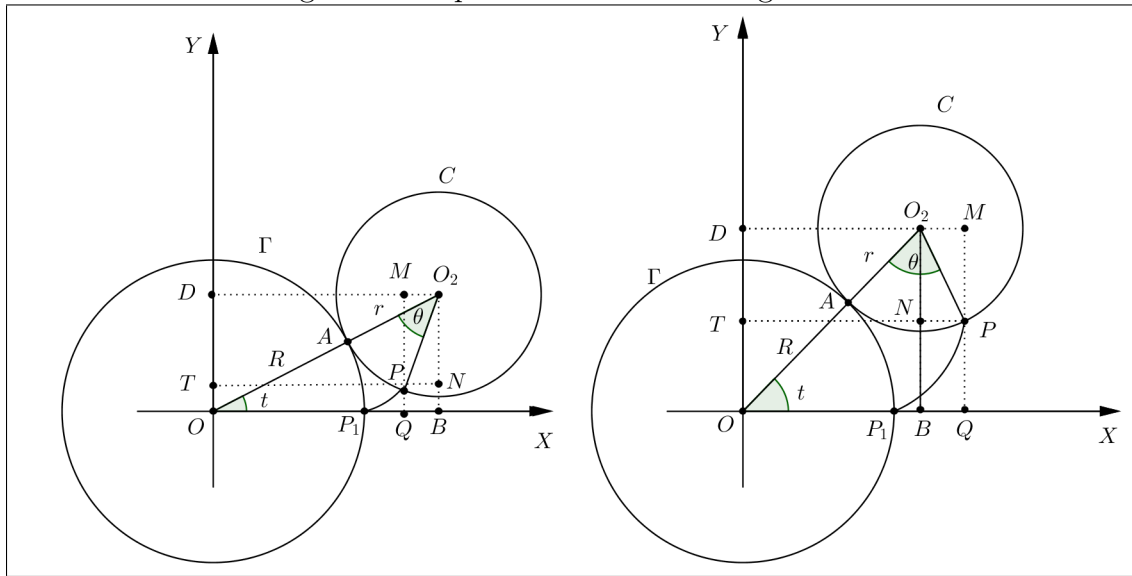
2.4 Parametrização da Epicicloide

Consideremos dois círculos Γ e C de raios R e r , respectivamente, tais que: $r < R$; Γ e C se tocam apenas em um ponto P ; os pontos de C , diferentes de P , estão no exterior de Γ . Denominamos Epicicloide o lugar geométrico descrito pelo ponto P , quando C rola sobre Γ , sem deslizar, mantendo todos os seus pontos na região limitada por Γ .

Para obtermos as equações paramétricas da Epicicloide, vamos admitir Γ com centro na origem, C iniciando o movimento com centro no ponto $(R + r, 0)$ e P com posição inicial $P_1 = (R, 0)$.

Determinemos as coordenadas do ponto $P = (x, y)$, Figura 2.4, em termos de um parâmetro, quando C rola sobre Γ sem deslizar.

Figura 2.4: Epicicloide com círculo gerador.



Fonte: Cutrim (2015).

Na Figura 2.4, designamos os seguintes elementos: $P = (x, y)$ da Epicicloide está inicialmente na posição P_1 , descreve-se o arco P_1P quando C rola um ângulo de medida θ sobre Γ ; A é o ponto de contato entre os círculos; O_2 é o centro de C ; B e D as projeções de O_2 sobre os eixos OX e OY ; $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as projeções de P sobre OX e OY ; M e N as projeções de P sobre O_2D e O_2B , respectivamente, e θ o ângulo $\widehat{AO_2P}$ descrito pelo ponto P com respeito à semirreta radial OO_2 .

Considerando o caso em que Q está entre O e B , Figura 2.4, temos:

$$x = |OQ| = |OB| - |QB| = |OB| - |O_2M| \quad (2.12)$$

e

$$y = |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|, \quad (2.13)$$

Sabendo que o centro de C descreve um círculo de raio $R+r$, e sendo t a medida do ângulo do semi-eixo OX positivo para OO_2 , no sentido anti-horário, obtemos:

$$|OB| = (R+r)\cos(t) \quad (2.14)$$

e

$$|OD| = (R+r)\sen(t). \quad (2.15)$$

Sendo θ a medida do ângulo de O_2A para O_2P , no sentido anti-horário, temos:

$$\widehat{NO_2P} = \widehat{OO_2B} - \widehat{AO_2P} = \left(\frac{\pi}{2} - t\right) - \theta = \frac{\pi}{2} - (t + \theta). \quad (2.16)$$

Portanto, no triângulo retângulo PNO_2 , temos:

$$|O_2M| = r\sen(\widehat{NO_2P}) = r\sen\left(\frac{\pi}{2} - (t + \theta)\right) = r\cos(t + \theta) \quad (2.17)$$

e

$$|O_2N| = r\cos(\widehat{NO_2P}) = r\cos\left(\frac{\pi}{2} - (t + \theta)\right) = r\sen(t + \theta). \quad (2.18)$$

Substituindo essas identidades nas relações 2.12 e 2.13, e usando o fato de que $\theta = Rt/r$, obtemos as seguintes equações paramétricas da Epicicloide:

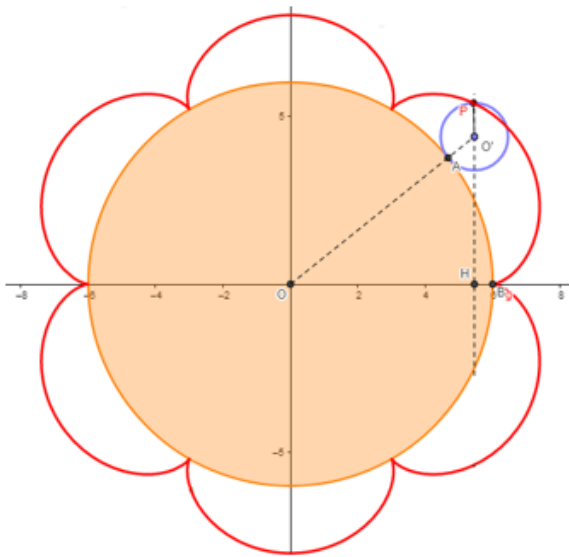
$$\begin{cases} x = (R+r)\cos(t) - r\cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)t\right) \\ y = (R+r)\sen(t) - r\sen\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)t\right) \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

Observe que, quando C percorre um arco de Γ de comprimento igual a $2\pi r$, o ponto P volta a tocar Γ . As cúspides (pontas) são formadas quando a circunferência externa se movimenta e seu ponto fixo toca a circunferência fixa. Portanto, se $R/r = n$, onde $n \in \mathbb{N}$, então o ponto P toca Γ n vezes e a n -ésima vez coincide com sua posição

inicial. Para verificar isto, basta observar que o comprimento de Γ contém n vezes o comprimento de C , pois $2\pi R = 2\pi(nr) = n(2\pi r)$, (Figura 2.5).

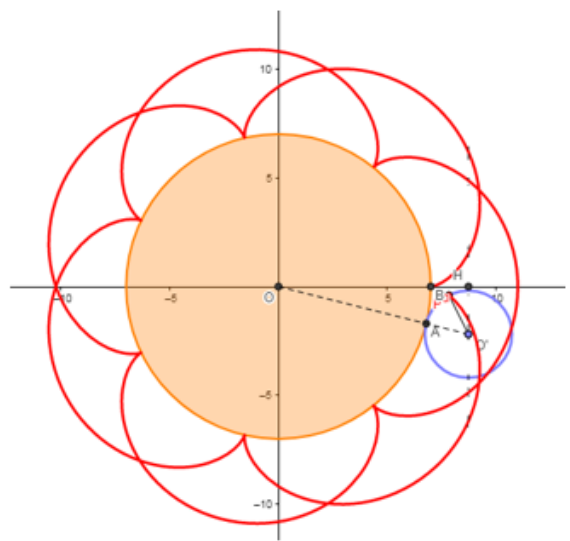
No caso em que R/r é um número racional da forma p/q , com $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, a Epicloide terá p cúspides quando a circunferência externa girar q vezes. Na Figura 2.6, temos $p/q = 7/2$. Agora, se R/r for um número irracional, a Epicloide não será fechada, não possui repetição, ou seja, o ponto fixo na circunferência que gira não volta para o início, o número de cúspides é infinito, (Figura 2.7).

Figura 2.5: Epicloide com 6 cúspides.



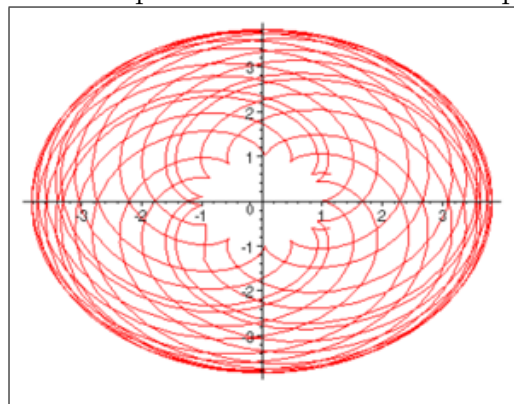
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.6: Epicloide com 7 cúspides.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.7: Epicloide com infinitas cúspides.



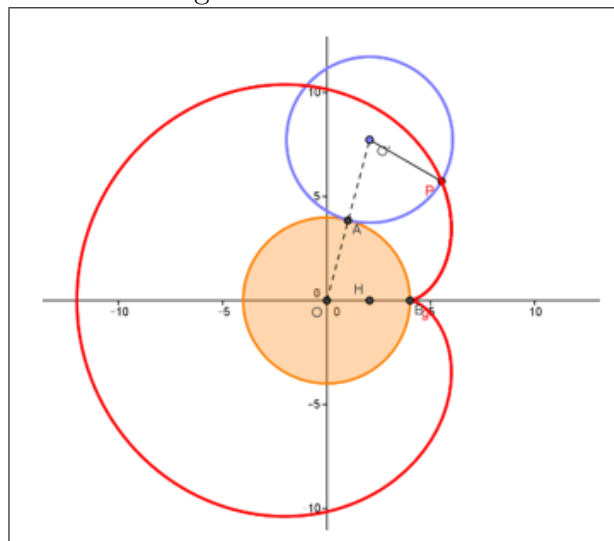
Fonte: Castro (2014).

Um caso particular é a Cardioide, que é obtida fazendo $r = R$, nas equações (2.19), portanto, $t = \theta$.

$$\begin{cases} x = 2r\cos(t) - r\cos(2t) \\ y = 2r\sen(t) - r\sen(2t) \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.20)$$

são as equações paramétricas da Cardioide, (Figura 2.8).

Figura 2.8: Cardioide.



Fonte: <http://algumascurvasplanas.blogspot.com/>

2.5 Parametrização da Hipocicloide

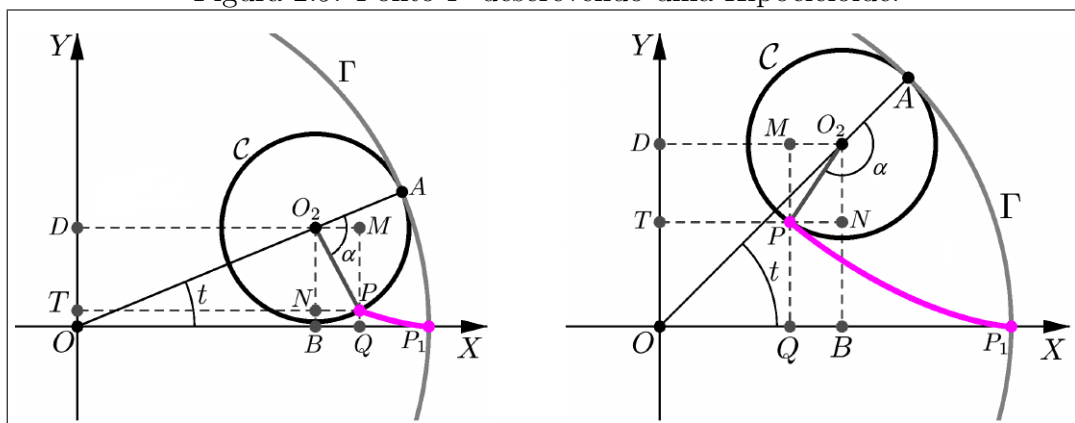
Consideremos dois círculos Γ e C de raios R e r , respectivamente, tais que: $r < R$; Γ e C se tocam apenas em um ponto P ; os pontos de C , diferentes de P , estão no interior de Γ . Denominamos Hipocicloide o lugar geométrico descrito pelo ponto P , quando C rola internamente em Γ , sem deslizar, mantendo todos os seus pontos na região limitada por Γ .

Para obtermos as equações paramétricas da Hipocicloide, vamos admitir Γ com centro na origem, C iniciando o movimento com centro no ponto $(R - r, 0)$ e P com posição inicial $P_1 = (R, 0)$.

Determinemos as coordenadas do ponto $P = (x, y)$ em termos de um parâmetro, quando C rola sobre Γ sem deslizar.

Na Figura 2.9, A é o ponto de C que toca Γ ; O_2 é o centro de C ; B e D as

Figura 2.9: Ponto P descrevendo uma Hipocicloide.



Fonte: Cutrim (2015).

projeções de O_2 sobre os eixos OX e OY ; $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as projeções de P sobre OX e OY ; M e N as projeções de P sobre O_2D e O_2B , respectivamente.

Considerando o caso em que B está entre O e Q , como mostrado na Figura 2.9, temos:

$$x = |OQ| = |OB| + |BQ| = |OB| + |O_2M| \quad (2.21)$$

e

$$y = |OT| = |OD| - |TD| = |OD| - |O_2N|. \quad (2.22)$$

Sabendo que o centro de C descreve um círculo de raio $R - r$, e sendo t a medida do ângulo do semieixo OX positivo para OO_2 , no sentido anti-horário, obtemos:

$$|OB| = (R - r)\cos(t) \quad (2.23)$$

e

$$|OD| = (R - r)\sen(t). \quad (2.24)$$

Denotando α a medida do ângulo de O_2A para O_2P , no sentido horário, temos:

$$\widehat{OO_2P} = \pi - \alpha \quad (2.25)$$

e

$$\widehat{OO_2P} - \widehat{NO_2P} = \frac{\pi}{2} - t. \quad (2.26)$$

Logo,

$$\widehat{NO_2P} = (t - \alpha) + \frac{\pi}{2}. \quad (2.27)$$

Portanto, no triângulo retângulo PNO_2 , temos:

$$|O_2M| = r \operatorname{sen}(\widehat{NO_2P}) = r \operatorname{sen}\left((t - \alpha) + \frac{\pi}{2}\right) = r \operatorname{cos}(t - \alpha) = r \operatorname{cos}(\alpha - t) \quad (2.28)$$

e

$$|O_2N| = r \operatorname{cos}(\widehat{NO_2P}) = r \operatorname{cos}\left((t - \alpha) + \frac{\pi}{2}\right) = -r \operatorname{sen}(t - \alpha) = r \operatorname{sen}(\alpha - t). \quad (2.29)$$

Observe ainda que o comprimento do arco de A até P , ao longo de C , é igual ao comprimento do arco de P_1 até A sobre o círculo Γ . Como a medida do primeiro arco é $r\alpha$ e a medida do segundo é Rt , então $r\alpha = Rt$, isto é, $\alpha = Rt/r$.

Substituindo essas identidades nas Equações (2.21) e (2.22), e usando o fato de que $\alpha = Rt/r$, obtemos as seguintes equações paramétricas da Hipocicloide:

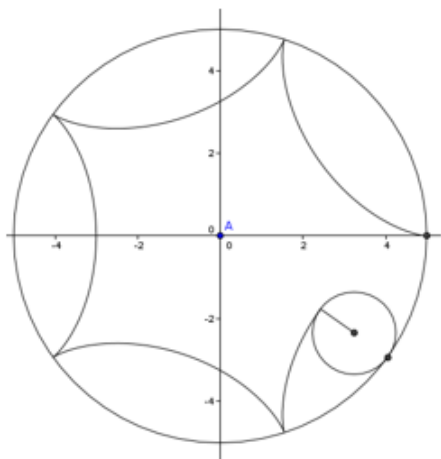
$$\begin{cases} x = (R - r)\operatorname{cos}(t) + r \operatorname{cos}\left(\left(\frac{R - r}{r}\right)t\right) \\ y = (R - r)\operatorname{sen}(t) - r \operatorname{sen}\left(\left(\frac{R - r}{r}\right)t\right) \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.30)$$

As cúspides ocorrem nos pontos onde o ponto de tangência dos dois círculos é o ponto P . Portanto, ocorrem quando

$$t = 2\pi n \frac{r}{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

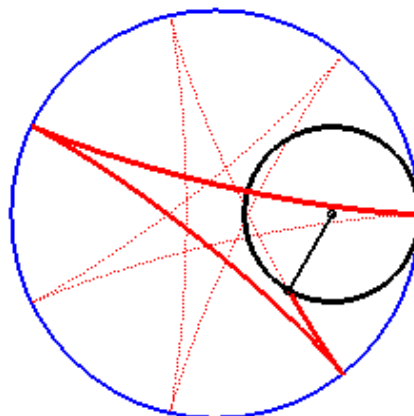
As características descritas para as cúspides na Epicicloide são as mesmas para as cúspides da Hipocicloide. Por exemplo, no caso em que $R/r = 5$ a Hipocicloide formada tem cinco 5 cúspides, Figura 2.10. Se $R/r = 7/3$, a mesma terá 7 cúspides quando a circunferência menor girar 3 voltas internamente na circunferência maior, Figura 2.11. Sendo R/r um número irracional, a Hipocicloide não será fechada, não possui repetição, ou seja, o ponto fixo na circunferência que gira não volta para o início, o número de cúspides é infinito, Figura 2.12.

Figura 2.10: Hipocicloide com 5 cúspides.



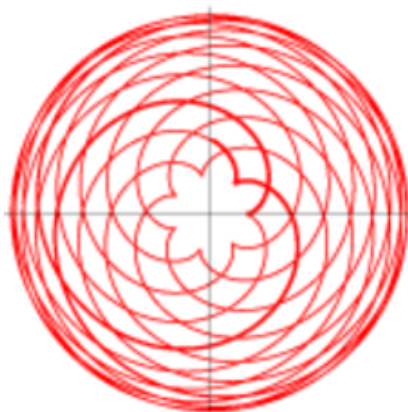
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.11: Hipocicloide com 7 cúspides.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.12: Hipocicloide com infinitas cúspides.



Fonte: Castro (2014).

Um caso particular é a Hipocicloide de quatro cúspides ou Astroide, Figura 2.13, que é obtida fazendo $r = R/4$.

Substituindo o valor de $r = R/4$ nas equações paramétricas da Hipocicloide (2.30), obtemos:

$$x = \frac{R}{4}(3\cos(t) + \cos(3t)) \quad (2.31)$$

e

$$y = \frac{R}{4}(3\sin(t) - \sin(3t)). \quad (2.32)$$

Utilizando as relações trigonométricas

$$\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t) \quad (2.33)$$

e

$$\sin(3t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t). \quad (2.34)$$

Temos que:

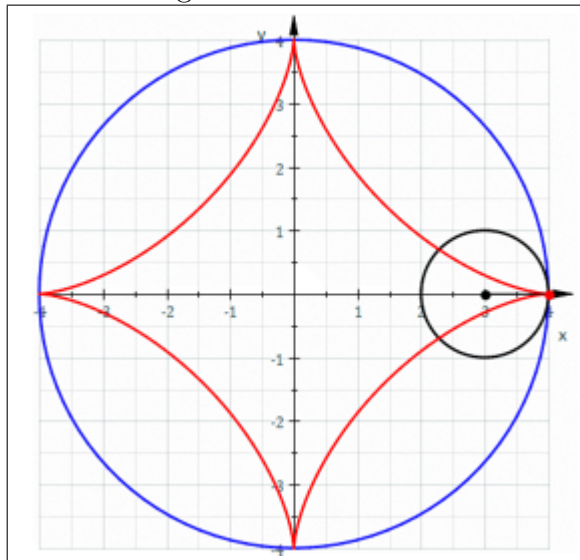
$$\begin{cases} x = R\cos^3(t) \\ y = R\sin^3(t) \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.35)$$

são as equações paramétricas da Astroide.

Eliminando o parâmetro t das equações paramétricas da Astroide, obtemos a equação cartesiana desta Hipocicloide, que é dada por

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}. \quad (2.36)$$

Figura 2.13: Astroide.



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.6 Construções das Curvas Cicloidais no GeoGebra

O recurso computacional GeoGebra facilita as construções de curvas e é uma ferramenta indispensável no que concerne ao processo de aprendizagem. Suas capacidades de modelação dinâmica permitem a transformação contínua de configurações, mantendo um conjunto de restrições e a possibilidade de testar propriedades; facilitam a experimentação matemática, contribuindo para a classificação de conceitos e para a compreensão de resultados (Castro, 2014).

2.6.1 Construção da Cicloide

Para a construção da Cicloide, segue-se os seguintes passos:




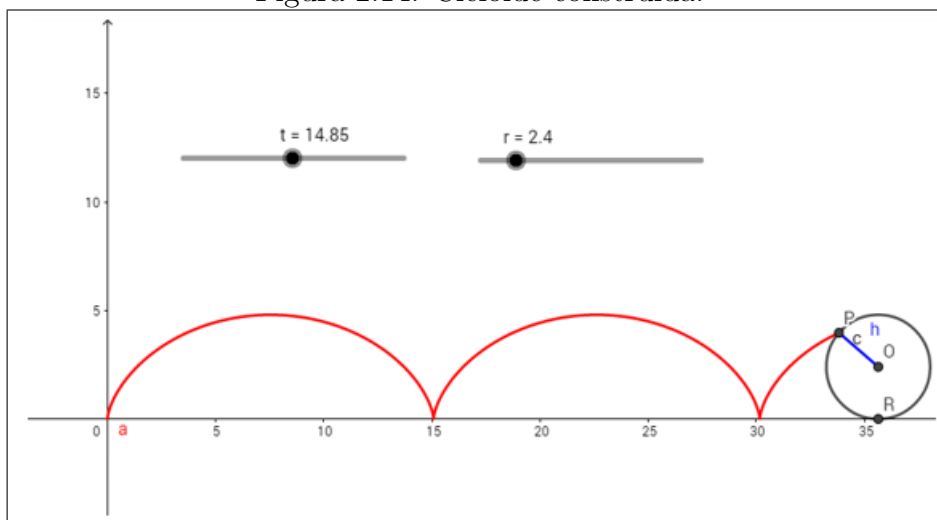
- (i) Criar dois controles deslizantes, no ícone  $a=2$, um para o parâmetro t e outro para o raio r da circunferência que rolará sobre a reta. Abra-se uma janela e, como exemplo, para o parâmetro t , utiliza-se mínimo: 0, máximo: 30 e incremento: 0,01. Para o raio r utiliza-se mínimo: 0, máximo: 5 e incremento: 0,1;
- (ii) Inserir as funções parametrizadas da Cicloide no campo “Entrada”. Os gráficos das funções formadas devem ficar ocultos, para isso, clicar com o botão direito do mouse sobre as curvas e selecionar exibir objeto. As funções parametrizadas podem ser, por exemplo, do tipo: $f(x) = r(x - \text{sen}(x))$ e $g(x) = r(1 - \text{cos}(x))$;
- (iii) No campo “Entrada” digitar curva, aparece o comando curva na forma: Curva[<Expressão>, <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>]. Após clicar sobre o comando, inserir as funções conforme o modelo: $Curva[f(s), g(s), s, 0, t]$. A curva Cicloide está formada;
- (iv) Construir três pontos $P = a(t)$, $R = (rt, 0)$ e $O = (rt, r)$ no campo “Entrada”. A partir desses pontos, traça-se a circunferência, no ícone , que tem centro em O e passa em P . O raio da circunferência é determinado pelo segmento que liga O até P , para isso, utilizar o ícone . Animando o controle deslizante temos a movimentação da circunferência, traçando assim a Cicloide, conforme a Figura 2.14.

Figura 2.14: Cicloide construída.



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.6.2 Construção da Epicloide

Segundo Miyasaki (2017), a construção da Epicloide segue os seguintes passos:

- (i) Criar três controles deslizantes, um para o parâmetro t , um para o raio r da circunferência que rola e outro para o raio R do círculo diretor. Os valores para os controles deslizantes podem ser os mesmos sugeridos na modelagem da Cicloide;
- (ii) Inserir as funções parametrizadas da Epicloide no campo “Entrada”. Os gráficos das funções formadas devem ficar ocultos, para isso, clicar com o botão direito do mouse sobre as curvas e selecionar exibir objeto. As funções parametrizadas podem ser, por exemplo, do tipo:

$$f(x) = (R+r)\cos x - r\cos\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)x\right) \quad \text{e} \quad g(x) = (R+r)\sin x - r\sin\left(\left(\frac{R+r}{r}\right)x\right);$$

- (iii) Inserir o comando curva no campo de “Entrada”. Neste comando devemos inserir as funções $f(s)$ e $g(s)$, juntamente com o parâmetro s fazendo-o variar de 0 até o parâmetro t . Através do comando curva, o GeoGebra plota o gráfico da curva parametrizada. Apesar de termos o traçado da curva, é necessário inserir o círculo diretor de raio R e a circunferência de raio r que rola;

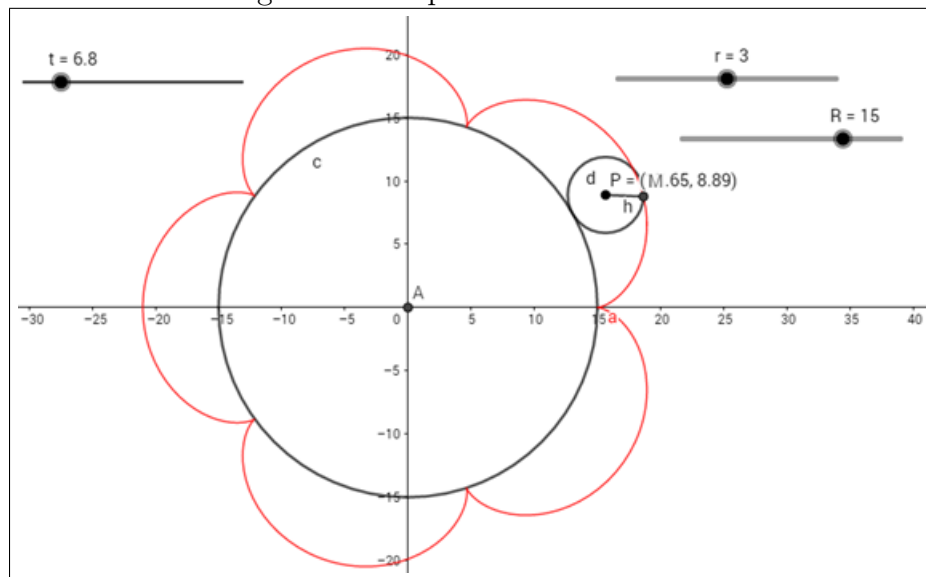
- (iv) No comando criar circunferência, faça-se o círculo diretor de raio R , centrada em $(0,0)$. Na construção da circunferência de raio r é importante notar que o seu centro se movimenta ao redor do círculo diretor de raio R , para que isso seja possível, cria-se o

ponto $P = ((R + r)\cos(t), (R + r)\sin(t))$. O ponto P é o centro da circunferência de raio r traçada através do comando circunferência com centro em P e raio r ;

(v) Para a marcação da curva, considera-se o ponto M , de coordenadas $M = (f(t), g(t))$. Após a marcação do ponto M , é necessário traçar o raio r da circunferência, criando assim o segmento de reta PM .

A Curva Epicicloide terá o aspecto conforme a Figura 2.15

Figura 2.15: Epicicloide construída.



Fonte: Elaborada pelo autor.

2.6.3 Construção da Hipocicloide

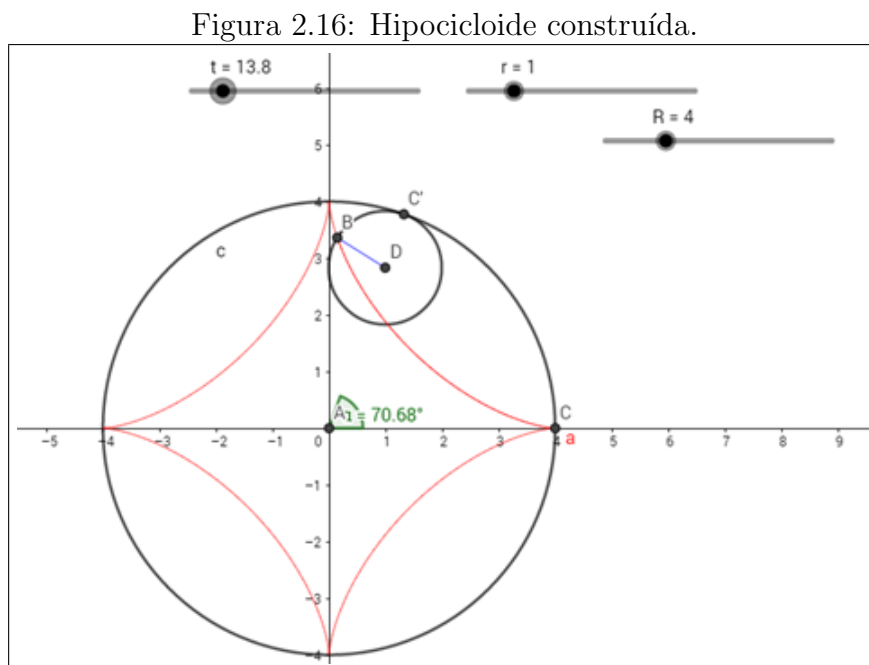
Para a construção da Hipocicloide, segue-se os seguintes passos:

- (i) Criar três controles deslizantes, um para o parâmetro t , um para o raio r da circunferência que rola e outro para o raio R do círculo diretor. Os valores para os controles deslizantes podem ser os mesmos sugeridos na modelagem da Epicicloide;
- (ii) Inserir as funções parametrizadas da Hipocicloide no campo “Entrada”. Os gráficos das funções formadas devem ficar ocultos, para isso, clicar com o botão direito do mouse sobre as curvas e selecionar exibir objeto. As funções parametrizadas podem ser, por exemplo, do tipo:

$$f(x) = (R - r)\cos x + r\cos\left(\left(\frac{R - r}{r}\right)x\right) \quad \text{e} \quad g(x) = (R - r)\sin x - r\sin\left(\left(\frac{R - r}{r}\right)x\right);$$

- (iii) Criar a circunferência diretora de raio R ;
- (iv) Inserir o comando curva no campo de “Entrada”. Neste comando devemos inserir as funções $f(s)$ e $g(s)$, juntamente com o parâmetro s fazendo-o variar de 0 até o parâmetro t .
- (v) Criar um ponto na curva, exemplo, $P = a(t)$;
- (vi) Criar um ponto $C = (R, 0)$;
- (vii) Criar ângulo de amplitude fixa em C e $A = (0, 0)$, (na janela colocar t), formase-a C' ;
- (viii) Criar uma circunferência de raio r de centro em C' ;
- (ix) Criar uma reta que passa em C' e A ;
- (x) Criar circunferência que gira de raio r . Seu centro fica em um ponto D (na parte interior da circunferência fixa);
- (xi) Ocultar a reta e a circunferência que tem parte fora da circunferência de raio R ;
- (xii) Formar um segmento que representa o raio r .

A Curva Hipocicloide construída terá o aspecto conforme a Figura 2.16.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Capítulo 3

Propriedades e Aplicações das Curvas Cicloidais

Neste Capítulo abordamos as propriedades e aplicações das Curvas Cicloidais. Tratamos dos problemas da Braquistócrona - do grego *brakhisto*(o mais curto) e *khronos*(tempo) e da Tautócrona - do grego *tauto*(mesmo) e *khronos*(tempo) caracterizada na Curva Cicloide. Além disso, apresentamos algumas relações de comprimento e área dessas curvas.

3.1 Curva Cicloide

A Curva Cicloide é um caso particular das trocoides (a curva é determinada por um ponto fixo de um círculo chamado geratriz , a mesma roda, tangencialmente, sem deslizar sobre uma reta chamada diretriz).

3.1.1 Problema da Braquistócrona

Em junho de 1696, Johann Bernoulli (Figura 3.1) desafiou as mentes mais brilhantes de sua época a resolver um problema que ele apresentou na revista científica *Acta Eruditorum* (revista dos eruditos), que foi uma revista científica mensal alemã publicada entre 1682 e 1782, mantida por Gottfried Wilhelm Leibniz, um problema que ele já havia resolvido. A motivação de Bernoulli aos cientistas foi:

“Eu, Johann Bernoulli, me dirijo aos matemáticos mais brilhantes do mundo. Nada é mais atraente às pessoas inteligentes do que um problema desafiador, honesto,

cujas soluções possíveis darão fama e permanecerão como um duradouro monumento. Seguindo o exemplo estabelecido por Pascal, Fermat, etc., espero ganhar a gratidão de toda a comunidade científica por apresentar diante dos melhores matemáticos de nosso tempo um problema que testará seus métodos e o poder de seus intelectos. Caso alguém me comunique a solução do problema proposto, eu o declararei publicamente merecedor de elogio". (Acta Eruditorum,1699.)

Figura 3.1: Johann Bernoulli (1667-1748).



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Bernoulli.

O desafio proposto por Bernoulli tratava-se de encontrar qual deveria ser a forma de uma rampa para que uma partícula, deslizando por ela a partir do repouso e sob a ação da gravidade, gaste o menor tempo possível para atingir outro ponto mais baixo da trajetória. Assim escreveu Johann Bernoulli:

“Dados dois pontos A e B em um plano vertical, fazer corresponder a uma partícula móvel M a trajetória AMB pela qual a partícula, descendo sobre o seu próprio peso, passa do ponto A para o ponto B no espaço de tempo mais curto”. (Acta Eruditorum, 1699.)

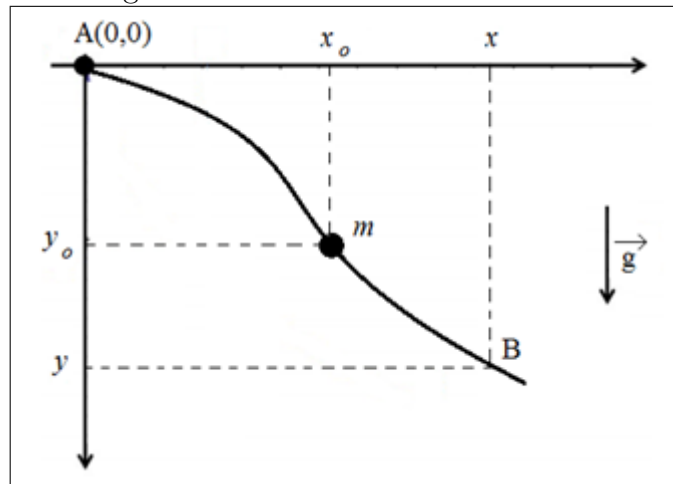
Esse desafio foi encaminhado às mentes mais brilhantes da época dando-lhes um prazo de seis meses, depois prorrogados por mais quatro meses para que o problema fosse solucionado. Além do próprio Johann Bernoulli, outros cinco matemáticos apresentaram soluções para o problema: Isaac Newton (1643 - 1727); Jacques Bernoulli (1654 - 1705); Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) e Guillaume de L'Hôpital (1661 - 1704) e Ehrenfried Walther Von Tschirnhaus (1651 - 1708). Todos esses matemáticos por meios diferentes chegaram à mesma resposta, que a curva de menor tempo ou Braquistócrona deveria ser uma Cicloide.

A demonstração matemática da curva de menor tempo se estabelece em torno de se encontrar uma curva que faça com que um objeto de massa m sujeito apenas à

aceleração gravitacional percorra a distância entre dois pontos distintos no menor tempo possível partindo do repouso.

Consideremos que o objeto m seja abandonado do ponto A e realize o percurso até atingir o ponto B mais rapidamente do que qualquer outro caminho, conforme o sistema de coordenadas a seguir (Figura 3.2):

Figura 3.2: Sistema de Coordenadas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A solução desse problema é encontrar o tempo que a partícula de massa m leva para se deslocar sobre uma curva qualquer entre dois pontos A e B e em seguida é procurar a curva, entre todas, que minimize o tempo de deslocamento entre esses pontos. Orientando y para baixo (para ficar no mesmo sentido da força da gravidade) e o ponto A será tomado na origem do sistema. Desprezando as forças dissipativas, a energia mecânica no ponto A é igual a energia mecânica no ponto B , então, $EM_A = EM_B$.

Então, podemos obter a velocidade de uma partícula em queda livre, a partir do repouso, a qualquer momento

$$mgy = \frac{mv^2}{2}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gy}.$$

Por outro lado, da definição de velocidade,

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{v} \frac{ds}{dx}$$

Substituindo v por $v = \sqrt{2gy}$ e $\frac{ds}{dx}$ por $\sqrt{1+y'^2}$ teremos a seguinte expressão para a derivada do tempo com relação ao deslocamento horizontal

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \sqrt{1+y'^2}.$$

Assim, integrando com relação a x pode-se determinar o tempo total para se deslocar de A para B

$$t = \int_0^x \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx.$$

Portanto, o tempo total gasto para tal deslocamento é

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^x \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx.$$

Queremos encontrar $y = f(x)$ tal que t seja mínimo. Ainda temos $y(0) = 0$ e $y(x) = y$, como condições de fronteira.

Segundo Tagliolato (2015), a descrição matemática de sistemas relacionados a leis da física comumente envolve máximos e mínimos e existe um conjunto de ferramentas desenvolvidas com o objetivo de solucionar problemas desse tipo. O cálculo variacional é uma ferramenta utilizada para resolver problemas de otimização, em especial, o problema da Braquistócrona. A diferença entre os cálculos variacional e diferencial é a natureza dos respectivos objetos a serem maximizados ou minimizados: enquanto o cálculo diferencial procura números que tenham a propriedade de otimizar, o cálculo variacional procura funções com tal propriedade.

De acordo com Júnior (2010, p. 13 apud Tagliolato, 2015, p. 27) suponha que exista uma função escalar $y(x)$ de classe C^1 , satisfazendo as condições de fronteira $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, e que seja um extremo para o funcional $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$, onde F é uma função de classe C^2 , tem-se que tal função extremal deve satisfazer a equação diferencial de segunda ordem dada por

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \tag{3.1}$$

denominada equação de Euler.

Em particular, F depende somente de y e y' , logo é possível reduzir a equação de Euler à identidade $F - y'F_{y'} = C$ proposta por Eugênio Beltrami (1835 - 1900) em 1868 e que leva seu sobrenome. A demonstração dessa identidade se encontra no Apêndice A.

Utilizaremos esta identidade na resolução do problema da Braquistócrona. Seja $F(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$, então $F_{y'}$ será dada por

$$F_{y'}(y, y') = \frac{\partial \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{1+y'^2} \right)}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{d \left(\sqrt{1+y'^2} \right)}{dy'}. \quad (3.2)$$

para encontrar o resultado desejado fazemos $u = 1 + y'^2$, logo $\frac{du}{dy'} = 2y'$. Assim,

$$F_{y'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{d\sqrt{u}}{du} \frac{du}{dy'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{u}} 2y' = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}. \quad (3.3)$$

Segue que

$$\begin{aligned} F - y'F_{y'} &= \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - y' \left(\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}} \right) \\ F - y'F_{y'} &= \frac{\left(\sqrt{1+y'^2} \right)^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \frac{1+y'^2 - y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} \\ F - y'F_{y'} &= \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ou seja, $F - y'F_{y'}$ é equivalente a $\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$, consequentemente temos pela identidade de Beltrami

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C, \quad (3.5)$$

que pode ser reescrita de forma mais simples, como

$$y(1+y'^2) = \frac{1}{C^2} = k, \quad \text{com } k > 0. \quad (3.6)$$

Assim, temos uma equação diferencial de primeira ordem não linear. Para resolvê-la, consideremos a substituição $y'(x(t)) = \cot g(t)$, tendo em vista a identidade $\text{cosec}^2(t) = 1 + \cot g^2(t)$. Temos

$$y = \frac{k}{1 + \cot g^2(t)} = \frac{k}{\text{cosec}^2(t)} = k \text{sen}^2(t). \quad (3.7)$$

Derivando y com relação a t ,

$$\frac{dy}{dt} = k 2 \text{sen}(t) \cos(t). \quad (3.8)$$

Como $y'(x) = \frac{dy}{dx}$, então $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'(x)}$, assim

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\cot g(t)} 2k \text{sen}(t) \cos(t) = 2k \text{sen}^2(t). \quad (3.9)$$

Integrando $\frac{dx}{dt} = 2k\text{sen}^2(t)$ obteremos uma expressão para $x(t)$. Para tal integração utilizamos a identidade $\text{sen}^2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$,

$$x(t) = \int 2k\text{sen}^2(t)dt = 2k \int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t) \right] dt = kt - \frac{k\text{sen}(2t)}{2}, \quad (3.10)$$

ou seja,

$$x(t) = \frac{k}{2}(2t - \text{sen}(2t)). \quad (3.11)$$

Conseqüentemente, pela expressão (3.7),

$$y(t) = \frac{k}{2}(1 - \text{sen}(2t)). \quad (3.12)$$

Assim, fazendo $2t = \theta$, obtemos

$$x = \frac{k}{2}(\theta - \text{sen}(\theta)) \quad (3.13)$$

e

$$y = \frac{k}{2}(1 - \cos(\theta)). \quad (3.14)$$

As equações (3.13) e (3.14) formam a solução de $y(1 + y'^2) = \frac{1}{C^2} = k$, com $k > 0$. Estas equações estão na forma paramétrica e seu gráfico é uma Cicloide.

3.1.2 Problema da Tautócrona

Em 1658, Christiaan Huygens (Figura 3.3) estava interessado em encontrar algum método para aprimorar seus relógios (Figura 3.5) de modo que estes não adiantassem ou atrasassem. No mesmo período, a Curva Cicloide estava em evidência devido ao desafio de Pascal, e Huygens, então, decidiu observar o que acontecia se usasse uma superfície cuja secção fosse um arco de Cicloide invertido. Ele Ficou satisfeito ao observar que, nesse caso, o objeto chegará ao ponto mais baixo no mesmo tempo, independente da altura na qual o objeto foi colocado. Tendo proposto um problema a si mesmo, Huygens provou que a Cicloide é Tautócrona, e ainda, verificou que se o pêndulo oscilar entre dois arcos cicloidais de mesmo tamanho, a trajetória percorrida pela haste, desde que essa seja do tamanho dos arcos cicloidais, é uma Tautócrona, ou seja, a Cicloide é isócrona.

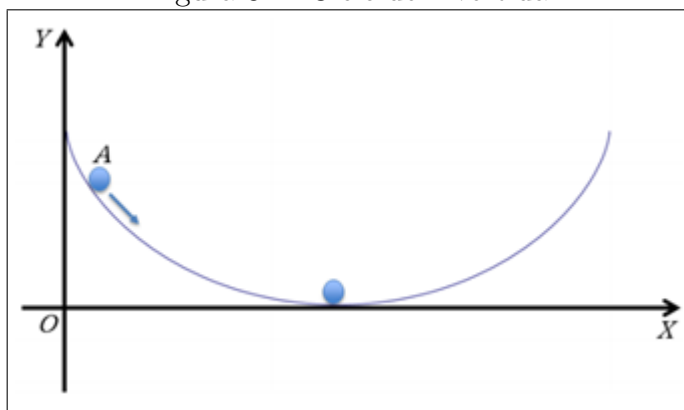
Figura 3.3: Christiaan Huygens (1629-1695).



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens.

Para mostrar que a Cicloide é Tautócrona, utilizaremos a demonstração elencada por Venceslau (2015). Consideremos uma Cicloide invertida, de modo que possa deslizar sobre a mesma, uma partícula de massa m , inicialmente em repouso, que parte de um ponto $A = (x(\theta_a), y(\theta_a))$ para o ponto mais baixo da curva, ponto B , com $\theta_a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, como ilustra a Figura 3.4.

Figura 3.4: Cicloide invertida.



Fonte: Venceslau (2015).

Desconsiderando as forças dissipativas e sabendo que a energia mecânica é constante em todos os pontos da curva, temos

$$E_{M_A} = E_{M_B}.$$

$$E_{\text{mecânica}} = E_{\text{potencial}} + E_{\text{cinética}}.$$

Desde que,

$$E_M = E_{\text{potencial}} + E_{\text{cinética}}.$$

Então,

$$\begin{aligned} E_{C_A} + E_{P_A} &= E_{C_B} + E_{P_B}, \\ mgh_A &= \frac{mv_B^2}{2}, \\ v_B^2 &= 2gh_A, \\ v_B &= \sqrt{2gh_A}. \end{aligned}$$

Sendo v_B a velocidade da partícula no ponto mais baixo da curva, $P = (x(\theta), y(\theta))$ um ponto genérico da curva de parâmetro θ , com $\theta \in [\theta_a, \pi]$ e $h_A = y(\theta) - y(\theta_a)$, segue que

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{2g(y(\theta) - y(\theta_a))} \\ v_B &= \sqrt{2g(r - r\cos(\theta) - r + r\cos(\theta_a))} \\ v_B &= \sqrt{2rg(\cos(\theta_a) - \cos(\theta))}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Sabemos que $\cos(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}} \Rightarrow \cos^2(\frac{\theta}{2}) = \frac{1 + \cos(\theta)}{2} \Rightarrow \cos(\theta) = 2\cos^2(\frac{\theta}{2}) - 1$, então utilizando a Equação (3.15), obtemos:

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{2gr \left(2\cos^2(\frac{\theta_a}{2}) - 1 - 2\cos^2(\frac{\theta}{2}) + 1 \right)} \\ v_B &= \sqrt{4gr \left(\cos^2(\frac{\theta_a}{2}) - \cos^2(\frac{\theta}{2}) \right)} \\ v_B &= 2\sqrt{gr \left(\cos^2(\frac{\theta_a}{2}) - \cos^2(\frac{\theta}{2}) \right)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, sendo L a função do arco percorrido pela partícula do ponto A para o ponto mais baixo da curva, então $v_B = \frac{dL}{dt}$. Vamos determinar a expressão que define dL . Sendo $L = 2r \int_0^t \text{sen}(\frac{\theta}{2})d\theta$, (ver Proposição 3.2, pág. 41), daí, temos:

$$\frac{dL}{d\theta} = 2r\text{sen}(\frac{\theta}{2}) \Leftrightarrow dL = 2r\text{sen}(\frac{\theta}{2})d\theta.$$

Como $v_B = \frac{dL}{dt} \Leftrightarrow dt = \frac{dL}{v_B}$, então obtemos:

$$dt = \frac{2r\text{sen}(\frac{\theta}{2})d\theta}{2\sqrt{gr \left(\cos^2(\frac{\theta_a}{2}) - \cos^2(\frac{\theta}{2}) \right)}}.$$

Integrando ambos os membros, segue:

$$t = \int_{\theta_a}^{\pi} \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta_a}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} d\theta$$

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\theta_a}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_a}{2}\right) \sqrt{1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta_a}{2}\right)}}} d\theta.$$

Fazendo uma mudança de variável na integral acima. Considere:

$$\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_a}{2}\right)} = u \Rightarrow \frac{-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_a}{2}\right)} d\theta = du \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = -2\cos\left(\frac{\theta_a}{2}\right) du.$$

Note que:

$$\theta = \theta_a \Rightarrow u = 1 \quad \text{e} \quad \theta = \pi \Rightarrow u = 0.$$

Então:

$$t = \int_1^0 \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{-2\cos\left(\frac{\theta_a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_a}{2}\right) \sqrt{1-u^2}} du$$

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \left| \operatorname{arcsen}(u) \right|_0^1$$

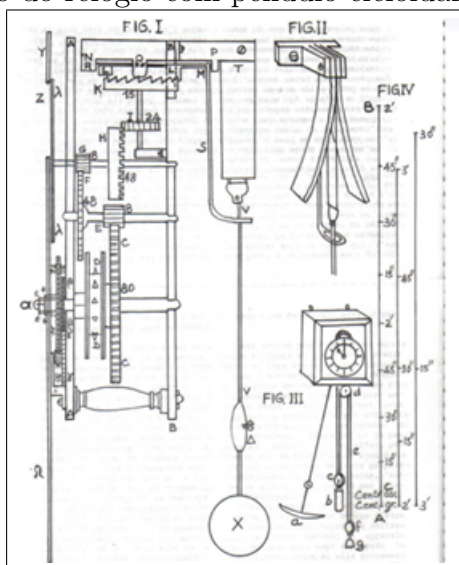
$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}} (\operatorname{arcsen}(1) - \operatorname{arcsen}(0))$$

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Portanto, o tempo que a partícula demora a deslocar-se do ponto A para o ponto mínimo da curva, com $\theta_a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, é constante, não dependendo do seu ponto de partida. Assim, a Cicloide é Tautócrona.

Figura 3.5: Esboço do relógio com pêndulo cicloidal feito por Huygens.



Fonte: Boyer (1996).

O estudo da Curva Cicloide é bastante interessante no que diz respeito às suas aplicações e propriedades no contexto do cotidiano. Verificaremos a seguir algumas situações:

Proposição 3.1. *A área sob um arco de Cicloide é três vezes a área do círculo gerador.*

Prova. Consideremos o arco traçado, desde a origem, quando a circunferência perfaz uma revolução completa. Uma vez que y é uma função de x , Figura 2.3, a área pode ser escrita da seguinte forma

$$A = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt.$$

Sabendo que $x = r(t - \text{sen}(t))$ e $y = r(1 - \text{cos}(t))$ são as equações paramétricas da Cicloide, e que $dx = (r - r\text{cos}(t))dt$, então

$$A = \int_0^{2\pi} r[1 - \text{cos}(t)][r - r\text{cos}(t)]dt$$

$$A = \int_0^{2\pi} r[1 - \text{cos}(t)]r[1 - \text{cos}(t)]dt$$

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} [1 - \text{cos}(t)][1 - \text{cos}(t)]dt$$

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} [1 - 2\text{cos}(t) + \text{cos}^2(t)]dt$$

$$\begin{aligned}
A &= r^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos(t) + \frac{1 + \cos(2t)}{2} \right] dt \\
A &= r^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos(t) + \frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2} \right] dt \\
A &= r^2 \left[t \Big|_0^{2\pi} - 2\operatorname{sen}(t) \Big|_0^{2\pi} + \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} \Big|_0^{2\pi} \right] \\
A &= 3\pi r^2.
\end{aligned}$$

Portanto, a área sob o arco da Cicloide é $3\pi r^2$.

Proposição 3.2. *O comprimento de um arco da Cicloide é quatro vezes o diâmetro do círculo gerador.*

Prova. Para o cálculo do comprimento de um arco de Cicloide, as equações da Cicloide

$$x(t) = r(t - \operatorname{sen}(t)) \quad \text{e} \quad y(t) = r(1 - \cos(t))$$

comportam-se como suas equações paramétricas, no parâmetro t , em que $0 \leq t \leq 2\pi$.

Logo, o comprimento de arco é dado por:

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(1 - \cos(t)))^2 + (r\operatorname{sen}(t))^2} dt \\
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2r^2(1 - \cos(t))} dt.
\end{aligned}$$

Usando a identidade $\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{2}}$, tem-se $1 - \cos(t) = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)$. Assim,

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2r^2 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \\
L &= \int_0^{2\pi} 2r\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt \\
L &= \left| -4r\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right|_0^{2\pi} = 8r.
\end{aligned}$$

Portanto, o comprimento do arco da Cicloide é $8r$.

Proposição 3.3. *A reta r tangente à Curva Cicloide em qualquer ponto $P = (x, y)$ passa pelo ponto mais alto, $(\alpha R, 2R)$, (Figura 3.6), da circunferência que rola.*

Prova. Sabendo que as equações paramétricas da Curva Cicloide em função do parâmetro α são:

$$x(\alpha) = \alpha R - R \operatorname{sen}(\alpha) \quad \text{e} \quad y(\alpha) = R - R \operatorname{cos}(\alpha).$$

Derivando as equações paramétricas em relação a α , temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\alpha}{dx/d\alpha} = \frac{-R(-\operatorname{sen}(\alpha))}{R - R \operatorname{cos}(\alpha)} = \frac{R \operatorname{sen}(\alpha)}{R(1 - \operatorname{cos}(\alpha))} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{1 - \operatorname{cos}(\alpha)}.$$

Esse resultado representa a inclinação da reta. A equação da reta tangente à Curva Cicloide no ponto $P = (x, y)$ é dada por: $y - y(\alpha) = m(x - x(\alpha))$, onde m é a inclinação da reta, então,

$$y - [R - R \operatorname{cos}(\alpha)] = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{1 - \operatorname{cos}(\alpha)} [x - (\alpha R - R \operatorname{sen}(\alpha))]. \quad (3.16)$$

Substituindo o ponto $(\alpha R, 2R)$ na equação (3.16), temos

$$2R - [R - R \operatorname{cos}(\alpha)] = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{1 - \operatorname{cos}(\alpha)} [\alpha R - (\alpha R - R \operatorname{sen}(\alpha))]$$

$$R + R \operatorname{cos}(\alpha) = \frac{R \operatorname{sen}^2(\alpha)}{1 - \operatorname{cos}(\alpha)}$$

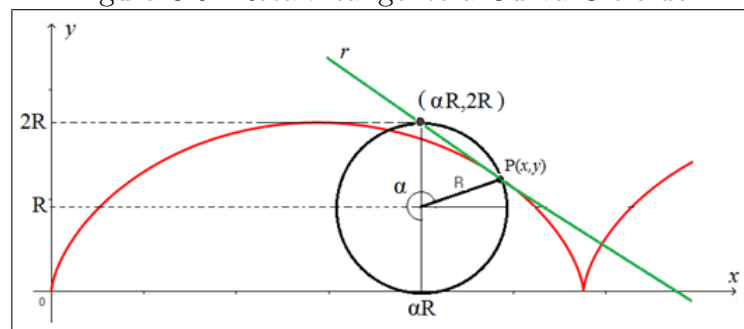
$$1 + \operatorname{cos}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{1 - \operatorname{cos}(\alpha)}$$

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - \operatorname{cos}^2(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \operatorname{cos}^2(\alpha) = 1.$$

Como chegamos a identidade trigonométrica fundamental, logo, a reta r tangente a Curva Cicloide passa pelo ponto mais alto da circunferência que rola.

Figura 3.6: Reta r tangente à Curva Cicloide.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma aplicação no cotidiano da Curva Cicloide é sua utilização como pista de skatistas. Segundo Venceslau (2015), nas provas verticais, os skatistas são avaliados pela

criatividade e grau de dificuldade das manobras, que devem ser executadas em um intervalo de tempo pré-estabelecido. Dessa forma, quanto menos tempo o skatista gasta percorrendo a extensão da rampa (Figura 3.7) de um lado para o outro, mais tempo lhe sobrar para executar as manobras aéreas verticais que contam pontos. Por isso a importância em fazer o percurso da rampa no menor tempo possível. Assim, para construir uma rampa com tempo mínimo de descida é necessário que os arcos que compõe a lateral sejam Cicloides. Também podemos encontrar essa curva nos tobogãs e nas montanhas russas.

Figura 3.7: Rampa de skatistas.



Fonte: <http://campeonatosdeskate.com.br/2013/09/26/skate-tem-seu-momento-mais-radical.html>

Outra utilização da Cicloide é na Arquitetura, podem ser observadas nas cúpulas do Museu de Arte Kimbell, Figuras 3.8, 3.9 e 3.10, localizado no Texas, na cidade de Fort Worth-EUA. As cúpulas refletem a luz natural com maior aproveitamento.

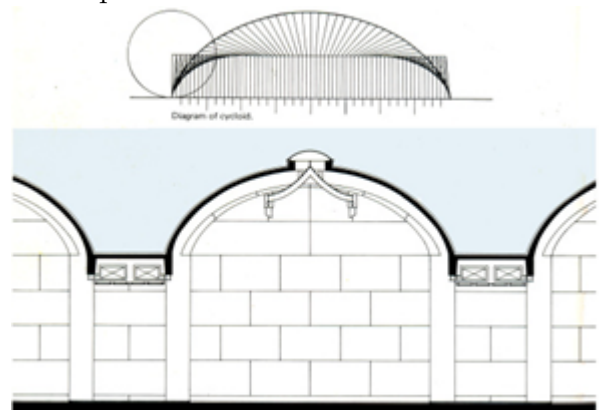
Figura 3.8: Museu de Arte Kimbell.



Fonte: <https://curvasearquitetura.wordpress.com/cicloide/>

<https://curvasearquitetura.wordpress.com/cicloide/>

Figura 3.9: Detalhe do corte desenhado da Arquitetura do museu.



Fonte: <https://curvasearquitetura.wordpress.com/cicloide/>

<https://curvasearquitetura.wordpress.com/cicloide/>

Figura 3.10: Parte interna do museu Kimbell.



Fonte: <https://curvasearquitetura.wordpress.com/cicloide/>

3.2 Curva Epicicloide

A Curva Epicicloide é um caso especial das epitrocoides (é uma rolete descrita por um ponto associado a um círculo de raio r que rola externamente ao redor de outro círculo fixo de raio R). Há dois casos especiais: a Cardioide e a Nefroide.

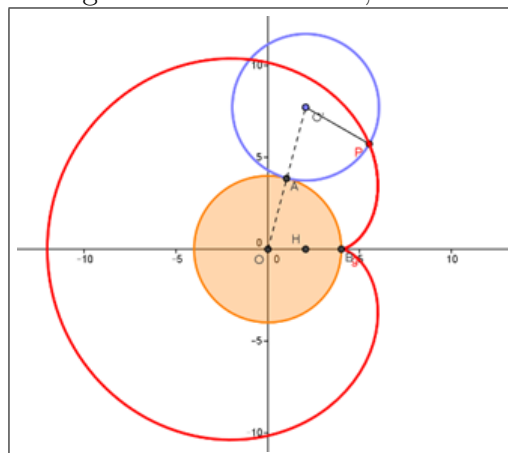
Johann Castillon (1708 - 1791), foi quem nomeou a Cardioide - por ter um formato de coração e Richard Anthony Proctor (1837 - 1888) foi quem nomeou a Nefroide - por ter um formato de um rim.

Uma aplicação da cardioide está nos microfones. Segundo Nunes (2015), os padrões de interferência e congruência das ondas que irradiam concentricamente de um ponto, ao fazê-lo, podem identificar as áreas de maior sensibilidade. Um microfone em forma de Cardioide é sensível ao som frontal e minimiza o som traseiro. Os microfones do tipo Cardioide são, basicamente, unidirecionais, e existem três variações: Cardioide, Hipercardioide e Supercardioide.

A Cardioide (Figura 3.11) tem como característica a relação entre os raios: $R = r$. Substituindo esta relação na equação (2.19), a Cardioide fica definida parametricamente como:

$$\begin{aligned}x &= (R + r)\cos(\theta) - r\cos\left[\frac{(R + r)}{r}\theta\right] \Rightarrow x = 2r\cos(\theta) - r\cos(2\theta) \\y &= (R + r)\sin(\theta) - r\sin\left[\frac{(R + r)}{r}\theta\right] \Rightarrow y = 2r\sin(\theta) - r\sin(2\theta)\end{aligned}$$

Figura 3.11: Cardioide, $R = r$.



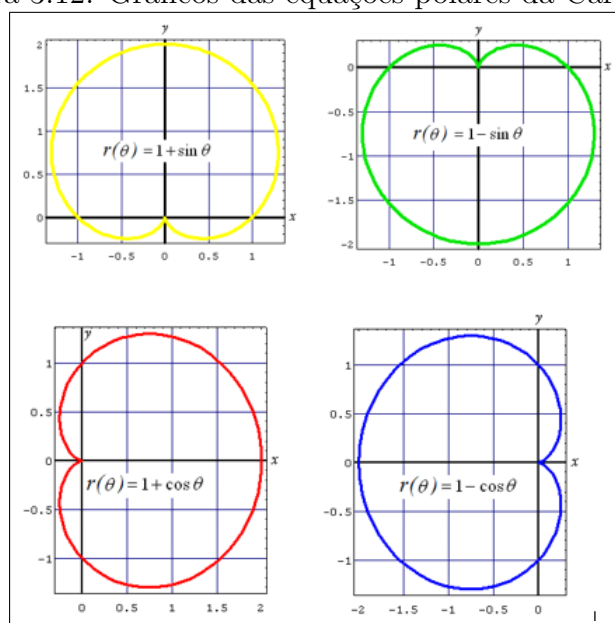
Fonte: <http://algumascurvasplanas.blogspot.com/>

O eixo de simetria de uma Cardioide é a reta que contém a cúspide e a divide em duas partes iguais. Se a cúspide se localizar num dos eixos coordenados, o eixo de simetria pode ser vertical ou horizontal. Com base nessa referência, as coordenadas polares da Cardioide podem ser definidas a partir das equações:

$$r(\theta) = a(1 \pm \cos(\theta)) \quad \text{e} \quad r(\theta) = a(1 \pm \sin(\theta)).$$

Considerando o parâmetro $a = 1$, os gráficos das equações polares da Cardioide terão a forma conforme a Figura 3.12.

Figura 3.12: Gráficos das equações polares da Cardioide.



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Cardioide>

Proposição 3.4. A área delimitada pela Cardioide é dada por $3\pi a^2/2$.

Prova. Considerando a equação polar $r(\theta) = a(1 - \cos(\theta))$ e sabendo que a área em coordenadas polares é $A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$, temos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos(\theta))^2 d\theta \\ A &= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) d\theta \\ A &= \frac{1}{2} a^2 \left(|\theta|_0^{2\pi} - 2|\text{sen}(\theta)|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta)) d\theta \right) \\ A &= \frac{1}{2} a^2 \left(2\pi + \frac{1}{2} |\theta|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} |\text{sen}(\theta)|_0^{2\pi} \right) \\ A &= \frac{3\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, a área delimitada pela Cardioide é $\frac{3\pi a^2}{2}$.

Proposição 3.5. O comprimento da Cardioide é dado por $8a$.

Prova. Considerando a equação polar $r(\theta) = a(1 - \cos(\theta))$ e restringindo o comprimento da cardioide ao primeiro e segundo quadrante, temos $dr(\theta)/d\theta = a\text{sen}(\theta)$ e sabendo que o comprimento do arco é $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right)^2} d\theta$, então,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi} \sqrt{[a(1 - \cos(\theta))]^2 + (a\text{sen}(\theta))^2} d\theta \\ L &= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos(\theta))^2 + a^2 \cdot \text{sen}^2(\theta)} d\theta \\ L &= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 - 2a^2\cos(\theta) + a^2\cos^2(\theta) + a^2\text{sen}^2(\theta)} d\theta \\ L &= \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 - 2a^2\cos(\theta) + a^2} d\theta \\ L &= \int_0^{\pi} \sqrt{2a^2(1 - \cos(\theta))} d\theta \\ L &= a\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos(\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Como $\text{sen}\frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}}$, então,

$$L = a\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{2}\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$L = 2a \int_0^\pi \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$L = 2a \left| -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|_0^\pi$$

$$L = 4a \left| -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|_0^\pi$$

$$L = 4a \left[-\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)\right) \right]$$

$$L = 4a.$$

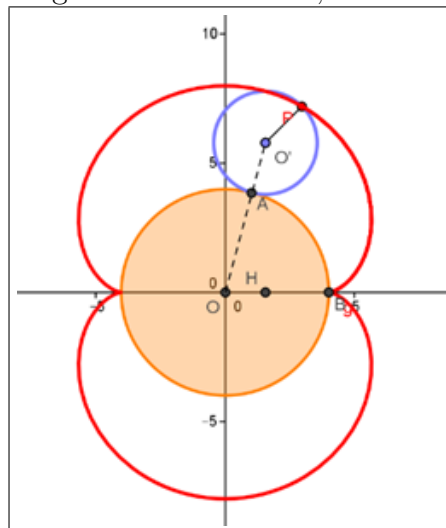
Logo, o comprimento total da Cardioide é $2 \cdot 4a$, ou seja, $8a$.

A Nefroide (Figura 3.13) tem como característica a relação entre os raios: $R = 2r$. Substituindo esse relação na equação (2.19), a Nefroide fica definida parametricamente como:

$$x = (R + r)\cos(\theta) - r\cos\left[\frac{(R + r)}{r}\theta\right] \Rightarrow x = 3r\cos(\theta) - r\cos(3\theta)$$

$$y = (R + r)\operatorname{sen}(\theta) - r\operatorname{sen}\left[\frac{(R + r)}{r}\theta\right] \Rightarrow y = 3r\operatorname{sen}(\theta) - r\operatorname{sen}(3\theta)$$

Figura 3.13: Nefroide, $R = 2r$.



Fonte: <http://algumascurvasplanas.blogspot.com/>

Proposição 3.6. *O comprimento do arco de Nefroide é $24r$.*

Prova. O comprimento de uma curva definida parametricamente por duas funções dependentes de um parâmetro é

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} d\theta. \quad (3.17)$$

A derivada da coordenada da Nefroide é:

$$x'(\theta) = -3r\text{sen}(\theta) + 3r\text{sen}(3\theta)$$

$$y'(\theta) = 3r\text{cos}(\theta) - 3r\text{cos}(3\theta)$$

Então, o comprimento do arco entre as duas primeiras cúspides, temos

$$L = \int_0^\pi \sqrt{[-3r[\text{sen}(\theta) - \text{sen}(3\theta)]]^2 + [3r[\text{cos}(\theta) - \text{cos}(3\theta)]]^2} d\theta$$

$$L = \int_0^\pi \sqrt{9r^2(2 - 2\text{cos}(2\theta))} d\theta$$

$$L = 3\sqrt{2}r \int_0^\pi \sqrt{1 - \text{cos}(2\theta)} d\theta$$

$$L = 3\sqrt{2}r \int_0^\pi \sqrt{1 - \text{cos}^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)} d\theta$$

$$L = 3\sqrt{2}r \int_0^\pi \sqrt{2\text{sen}^2(\theta)} d\theta$$

$$L = 3\sqrt{2}\sqrt{2}r \int_0^\pi \text{sen}(\theta) d\theta$$

$$L = 6r |-\text{cos}(\theta)|_0^\pi$$

$$L = 6r[-(-1 - 1)]$$

$$L = 12r.$$

Logo, o comprimento total da Nefroide é $2 \cdot 12r$, ou seja, $24r$.

Proposição 3.7. *A área da região delimitada por uma Nefroide é $12\pi r^2$.*

Prova. A área definida parametricamente por duas funções dependentes de um parâmetro é

$$A = \int_\alpha^\beta y(\theta)x'(\theta)d\theta.$$

Então,

$$x'(\theta) = -3r\text{sen}(\theta) + 3r\text{sen}(3\theta)$$

$$y(\theta) = 3r\text{sen}(\theta) - r\text{sen}(3\theta).$$

Temos,

$$A = \int_{2\pi}^0 [3r\text{sen}(\theta) - r\text{sen}(3\theta)][-3r\text{sen}(\theta) + 3r\text{sen}(3\theta)]d\theta$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_{2\pi}^0 [-9r^2 \text{sen}^2(\theta) + 12r^2 \text{sen}(\theta)\text{sen}(3\theta) - 3r^2 \text{sen}^2(3\theta)]d\theta \\
A &= \int_0^{2\pi} [9r^2 \text{sen}^2(\theta) - 12r^2 \text{sen}(\theta)\text{sen}(3\theta) + 3r^2 \text{sen}^2(3\theta)]d\theta \\
A &= 9r^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}(2\theta)}{4} \right]_0^{2\pi} - 12r^2 \int_0^{2\pi} [\text{sen}(\theta)\text{sen}(3\theta)]d\theta + 3r^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}(6\theta)}{12} \right]_0^{2\pi} \\
A &= 9r^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}(2\theta)}{4} \right]_0^{2\pi} - 12r^2 \left[-\frac{3}{8}\text{sen}(\theta)\cos(3\theta) + \frac{1}{8}\text{sen}(3\theta)\cos(\theta) \right]_0^{2\pi} + 3r^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}(6\theta)}{12} \right]_0^{2\pi} \\
A &= 9r^2\pi + 3r^2\pi \\
A &= 12\pi r^2.
\end{aligned}$$

Portanto, a região delimitada pela Nefroide é $12\pi r^2$.

3.3 Curva Hipocicloide

A Curva Hipocicloide é um caso especial das hipotrocoides (é uma rolete traçada por um ponto fixo de um círculo de raio r que rola dentro de um círculo de raio R fixo, onde o ponto está a uma distância d do centro ao círculo interno). As mais conhecidas das Hipocicloides são o par Tusi, a Deltoide e a Astroide.

Segundo Steinhaus (1999), o par Tusi é obtido por laminagem de um círculo de raio r dentro de um círculo de raio $2r$. O resultado é um segmento de linha (diâmetro do círculo maior), é uma Hipocicloide com duas cúspides.

A Deltoide foi estudada primeiramente por Leonhard Euler em 1745 e por Jacob Steiner em 1857, é também conhecida como curva Tricúspide.

Segundo Raposo (2013), a Curva Astroide foi descoberta em 1674 por Ole Romer quando o mesmo procurava qual a melhor forma que os dentes de engrenagens deveriam ter. Aos longos dos anos suscitou o interesse de muitos, dos quais se enumeram Johann Bernoulli em 1691, Gottfried Leibniz em 1715 e Jean Le Rond D'Alembert em 1748. Uma das propriedades mais importantes da Astroide, teorema da dupla geração, foi descoberta por Daniel Bernoulli, em 1725. Foram atribuídos vários nomes à curva como cubocicloide, paraciclo e curva tetracúspide, tendo o nome de astroide (do grego astér que significa estrela) aparecido pela primeira vez, em 1838, ao ser publicado num livro de Littrow.

O par Tusi, Figura 3.14, tem como característica a relação entre os raios: $R = 2r$. Substituindo essa relação na equação (2.30), o par Tusi fica definido parametricamente

como:

$$x = (R - r)\cos(\theta) + r\cos\left[\frac{(R - r)}{r}\theta\right] \Rightarrow x = 2r\cos(\theta)$$

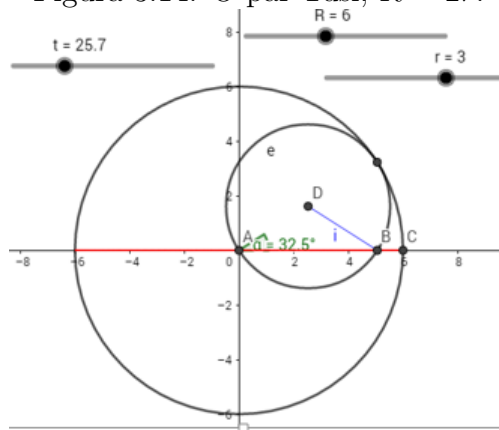
$$y = (R - r)\sin(\theta) - r\sin\left[\frac{(R - r)}{r}\theta\right] \Rightarrow y = 0.$$

A Deltoide ou Tricúspide, Figura 3.15, tem como característica a relação entre os raios: $R = 3r$. Substituindo essa relação na equação (2.30), a Deltoide fica definida parametricamente como:

$$x = (R - r)\cos(\theta) + r\cos\left[\frac{(R - r)}{r}\theta\right] \Rightarrow x = 2r\cos(\theta) + r\cos(2\theta)$$

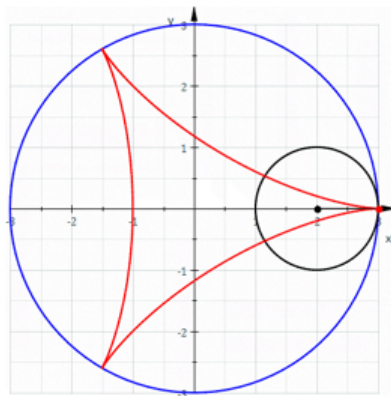
$$y = (R - r)\sin(\theta) - r\sin\left[\frac{(R - r)}{r}\theta\right] \Rightarrow y = 2r\sin(\theta) - r\sin(2\theta).$$

Figura 3.14: O par Tusi, $R = 2r$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3.15: Deltoide, $R = 3r$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Proposição 3.8. *O comprimento do arco de Deltoide é $S = 16r$.*

Prova. Tendo em conta as equações da Deltoide, e que a mesma tem três cúspides em $\theta = 0$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ e $\theta = \frac{4\pi}{3}$, calculamos o comprimento do arco da curva de $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ e multiplicamos por três. Temos $x'(\theta) = -2r\text{sen}(\theta) - 2r\text{sen}(2\theta)$ e $y'(\theta) = 2r\text{cos}(\theta) - 2r\text{cos}(2\theta)$

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{[-2r\text{sen}(\theta) - 2r\text{sen}(2\theta)]^2 + [2r\text{cos}(\theta) - 2r\text{cos}(2\theta)]^2} d\theta \\
 S_1 &= \sqrt{8}r \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1 - \text{cos}(3\theta)} d\theta \\
 S_1 &= \sqrt{8}r \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1 - \text{cos}^2\left(\frac{3}{2}\theta\right) + \text{sen}^2\left(\frac{3}{2}\theta\right)} d\theta \\
 S_1 &= \sqrt{8}\sqrt{2}r \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \text{sen}\left(\frac{3}{2}\theta\right) d\theta \\
 S_1 &= 4r \frac{2}{3} \left| -\text{cos}\left(\frac{3}{2}\theta\right) \right|_0^{\frac{2\pi}{3}} \\
 S_1 &= \frac{8}{3}r(-\text{cos}\pi + \text{cos}0) \\
 S_1 &= \frac{16r}{3}.
 \end{aligned}$$

Assim, $S = 3 \times S_1 = 16r$.

Proposição 3.9. *A área da região delimitada por uma Deltoide é $A = 2\pi r^2$.*

Prova. Como a Deltoide é simétrica em relação ao eixo das abscissas, calculamos a área da mesma acima do eixo x , com $\theta \in [0, \pi]$ e multiplicamos por dois.

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_{\pi}^0 [2r\text{sen}(\theta) - r\text{sen}(2\theta)][-2r\text{sen}(\theta) - 2r\text{sen}(2\theta)]d\theta \\
 A_1 &= - \int_0^{\pi} 2r^2[-2r\text{sen}(\theta) + \text{sen}(2\theta)][\text{sen}(\theta) + \text{sen}(2\theta)]d\theta \\
 A_1 &= -2r^2 \int_0^{\pi} [-2\text{sen}^2(\theta) - 2\text{sen}(\theta)\text{sen}(2\theta) + \text{sen}(\theta)\text{sen}(2\theta) + \text{sen}^2(2\theta)]d\theta \\
 A_1 &= 4r^2 \int_0^{\pi} \text{sen}^2(\theta)d\theta + 2r^2 \int_0^{\pi} \text{sen}(\theta)\text{sen}(2\theta)d\theta - 2r^2 \int_0^{\pi} \text{sen}^2(2\theta)d\theta \\
 A_1 &= 4r^2 \left| \frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}2\theta}{4} \right|_0^{\pi} + 2r^2 \left(\left| \frac{1}{2}\text{sen}(\theta) \right|_0^{\pi} - \left| \frac{1}{6}\text{sen}(3\theta) \right|_0^{\pi} \right) - 2r^2 \left| \frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}4\theta}{8} \right|_0^{\pi} \\
 A_1 &= 4r^2 \frac{\pi}{2} - 2r^2 \frac{\pi}{2} \\
 A_1 &= \pi r^2.
 \end{aligned}$$

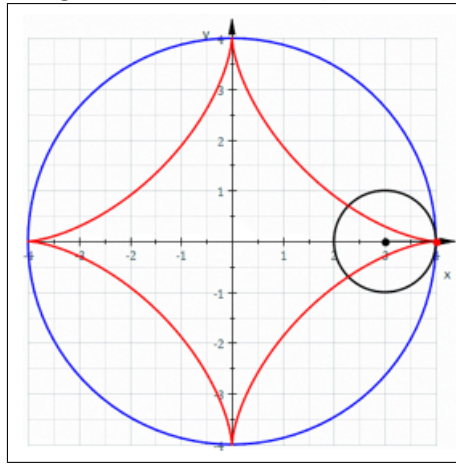
Assim, $A = 2 \times A_1 = 2\pi r^2$.

A Astroide ou Tetracúspide, Figura 3.16, tem como característica a relação entre os raios: $R = 4r$. Substituindo essa relação na equação (2.30), a Astroide fica definida parametricamente como:

$$x = (R - r)\cos(\theta) + r\cos\left[\frac{(R - r)}{r}\theta\right] \Rightarrow x = 3r\cos(\theta) + r\cos(3\theta)$$

$$y = (R - r)\sen(\theta) - r\sen\left[\frac{(R - r)}{r}\theta\right] \Rightarrow y = 3r\sen(\theta) - r\sen(3\theta).$$

Figura 3.16: Astroide, $R = 4r$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Proposição 3.10. *O perímetro da Astroide é $P = 6R = 24r$.*

Prova. Calculando o perímetro da curva no primeiro quadrante, pois a curva é simétrica em relação aos eixos coordenados. As equações paramétricas da Astroide são $x(\theta) = R\cos^3(\theta)$ e $y(\theta) = R\sen^3(\theta)$. Assim, para $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e tendo em conta que $x'(\theta) = -3R\cos^2(\theta)\sen(\theta)$ e $y'(\theta) = 3R\sen^2(\theta)\cos(\theta)$, temos:

$$\rho_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9R^2[(\cos^2(\theta)\sen(\theta))^2 + (\sen^2(\theta)\cos(\theta))^2]}d\theta$$

$$\rho_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9R^2(\cos^4(\theta)\sen^2(\theta) + \sen^4(\theta)\cos^2(\theta))}d\theta$$

$$\rho_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9R^2(\cos^2(\theta)\sen^2(\theta))(\cos^2(\theta) + \sen^2(\theta))}d\theta$$

$$\begin{aligned}\rho_1 &= 3R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(\theta)\text{sen}^2(\theta)}d\theta \\ \rho_1 &= 3R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\text{sen}(\theta)d\theta \\ \rho_1 &= 3R \left| \frac{\text{sen}^2(\theta)}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ \rho_1 &= 3R \times \frac{1}{2} = \frac{12r}{2} = 6r.\end{aligned}$$

Assim, o perímetro total da curva é $P = 4 \times \rho_1 = 4 \times 6r = 24r$.

Proposição 3.11. *A área da região delimitada por uma Astroide é $A = \frac{3}{8}\pi R^2 = 6\pi r^2$.*

Prova. Sendo $x(\theta) = R\cos^3(\theta)$ e $y(\theta) = R\text{sen}^3(\theta)$ as equações paramétricas da curva e $x'(\theta) = -3R\cos^2(\theta)\text{sen}(\theta)$, temos,

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} y(\theta)x'(\theta)d\theta.$$

Assim,

$$\begin{aligned}A_1 &= \int_{2\pi}^0 R\text{sen}^3(\theta) \cdot (-3R)\cos^2(\theta)\text{sen}(\theta)d\theta \\ A_1 &= 3R^2 \int_0^{2\pi} \text{sen}^4(\theta)\cos^2(\theta)d\theta \\ A_1 &= 3R^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right)^2 \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) d\theta \\ A_1 &= \frac{3R^2}{8} \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta))(1 + \cos(2\theta))d\theta \\ A_1 &= \frac{3R^2}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta) - 2\cos(2\theta) - 2\cos^2(2\theta) + \cos^2(2\theta) + \cos^3(2\theta))d\theta \\ A_1 &= \frac{3R^2}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2\theta) - \cos^2(2\theta) + \cos^3(2\theta))d\theta \\ A_1 &= \frac{3R^2}{8} \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos(2\theta) - \frac{1 + \cos(4\theta)}{2} + \cos^3(2\theta) \right) d\theta \\ A_1 &= \frac{3r^2}{8} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \cos(2\theta) - \frac{\cos(4\theta)}{2} + \cos^3(2\theta) \right) d\theta \\ A_1 &= \frac{3R^2}{8} \left(\left| \frac{\theta}{2} \right|_0^{2\pi} - \left| \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} \right|_0^{2\pi} - \left| \frac{\text{sen}(4\theta)}{8} \right|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} (1 - \text{sen}^2(2\theta)\cos(2\theta)) d\theta \right)\end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{3R^2}{8} \left(\pi + \left| \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} \right|_0^{2\pi} - \left| \frac{\text{sen}^3(2\theta)}{2} \right|_0^{2\pi} \right)$$

$$A_1 = \frac{3R^2\pi}{8}$$

$$A_1 = \frac{3 \times 16r^2\pi}{8}$$

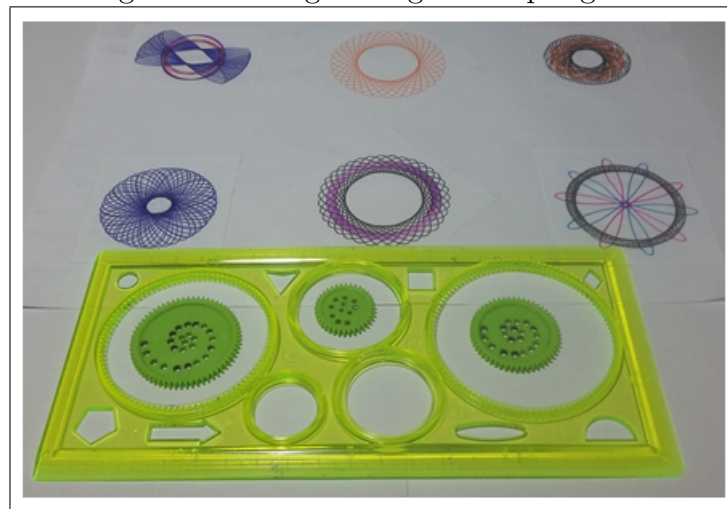
$$A_1 = 6\pi r^2.$$

Portanto, a área delimitada por uma Astroide é $6\pi r^2$.

Grande parte dos cálculos desenvolvidos neste Capítulo sobre áreas e comprimentos das curvas podem ser encontrados em Raposo (2015) e em Munem & Foulis (1982).

Para um estudo das Epicicloides e Hipocicloides no desenho geométrico, podemos utilizar uma régua chamada de *Régua Mágica ou Espirógrafo*, Figura 3.17, que facilita a descrição dessas curvas.

Figura 3.17: Régua Mágica - Espirógrafo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Capítulo 4

Curvas Cicloidais no Ensino Médio

4.1 Introdução

Ressignificar significa dar uma nova visão a acontecimentos na vida, é um elemento importante no processo de criação, onde as habilidades de atribuir nova importância a um acontecimento que se torna útil e proporciona satisfação às pessoas envolvidas nesse processo.

Em particular ao estudo da Matemática, dar essa significação é componente importante na construção da cidadania, do conhecimento científico e dos recursos tecnológicos, e seu ensino deve ser designo do trabalho do corpo docente desenvolvendo em seus discentes outras competências para compreender sua realidade e transformá-la. Mas, o que se percebe nos estabelecimentos de ensino tanto do Fundamental como do Médio, é o desgosto pela Matemática, tornando-a uma das disciplinas que desperta menos interesse e desta forma, transportando esse desgosto para outras disciplinas da área das Ciências da Natureza: Física, Química e Biologia.

O objetivo deste Capítulo é mostrar como trabalhar o estudo das Curvas Cicloidais na Educação Básica, mais especificamente no 3º Ano do Ensino Médio e assim, fazer com que os discentes possam compreender a beleza, as formas, as propriedades e as aplicações relacionados a essas curvas.

Destaca-se que retirando as demonstrações matemáticas, por métodos do uso de derivadas e integrais, que provam as propriedades das Curvas Cicloidais, podemos trabalhar com os alunos os conceitos, fatos históricos, construções das curvas com materiais do cotidiano e uso de software para despertar o interesse pelo estudo das Curvas Cicloidais.

4.2 Exposição em Sala de Aula

Os primeiros passos para a compreensão das Curvas Cicloidais foi fortalecer os conhecimentos prévios, tanto em Física como em Matemática. Conhecimentos que envolvem Trigonometria, Geometria Analítica, Movimento Uniforme, Movimento Uniformemente Variado, Movimento Circular, Força e Energia. Após essas abordagens, entramos no mundo das Curvas Cicloidais através dos conceitos e fatos históricos, conhecendo os trabalhos e o brilhantismo dos celebres matemáticos dos séculos XVI e XVII. Essa sequência teve como objetivo desvendar e incentivar o aprender da Matemática e da Física e não somente o intuito de aplicar fórmulas.

Com o regaste dos conteúdos da Matemática e da Física, partimos definitivamente para o estudo matemático das Curvas Cicloidais no que diz respeito a parametrização das curvas. Parametrizar uma curva é descrever essa curva em função de uma variável. Enfatizamos que conteúdos novos sempre causam estranheza e requer muita habilidade do professor para motivar e estreitar esses conhecimentos para os alunos, assim, com os recursos disponíveis na nossa escola, procuramos desmistificar a parametrização dessas curvas com clareza no trato matemático e com auxílio de imagens no computador para ilustração e facilitação das posições ocupadas pelos pontos que descrevem as curvas. A Figura 4.1 mostra um momento das aulas sobre a parametrização das curvas.

Figura 4.1: Aula sobre parametrização de curvas.



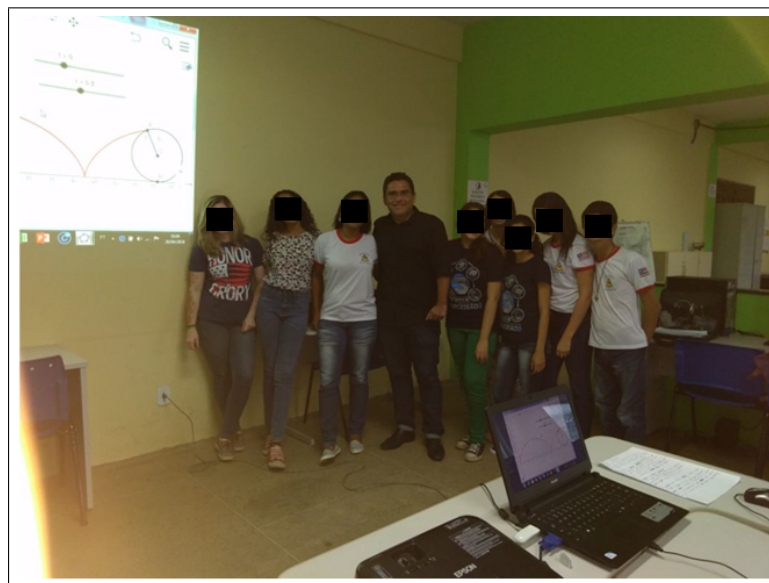
Fonte: Elaborada pelo autor.

Após o estudo da parametrização das curvas, passamos para a etapa de cons-

trução dessas curvas, utilizando, para isso, o software GeoGebra. O GeoGebra com suas riquíssimas ferramentas para facilitar a observação e o aprendizado em todos os níveis de ensino, contribuiu de forma substancial para criação e manipulação das variáveis que regulam as Curvas Cicloidais. Encaminhamos nossos alunos para o Laboratório de Informática e utilizamos a geometria dinâmica do GeoGebra e identificamos, primeiramente, seus comandos e inserção de funções matemáticas na forma algébrica para visualização de seus gráficos. Nesse momento, o uso do software GeoGebra teve papel fundamental na construção do conhecimento dessas curvas e suas visualizações foi um meio de acesso ao entendimento para a modelagem matemática.

A tecnologia disponível que temos hoje é uma aliada no processo de aprendizagem do educando, assim, trabalhar em ambientes de aprendizagem em que os alunos possam alinhar suas ideias é o que se espera na construção do conhecimento. Nesse ensejo, além de construírem as Curvas Cicloidais nos computadores, lançamos uma proposta, que também fizessem a construção dessas curvas nos seus celulares através do aplicativo GeoGebra. Como uma parte dos nossos alunos não dispunham de computadores desktops ou mesmo notebooks em suas residências, a utilização dos aparelhos celulares foi uma alternativa que os favoreceram. O uso desse aplicativo nos celulares contribuiu com nosso estudo, como também, impactou positivamente no processo de aprendizagem dessas curvas. A Figura 4.2 mostra um dos momentos das aulas no Laboratório de Informática na construção das Curvas Cicloidais.

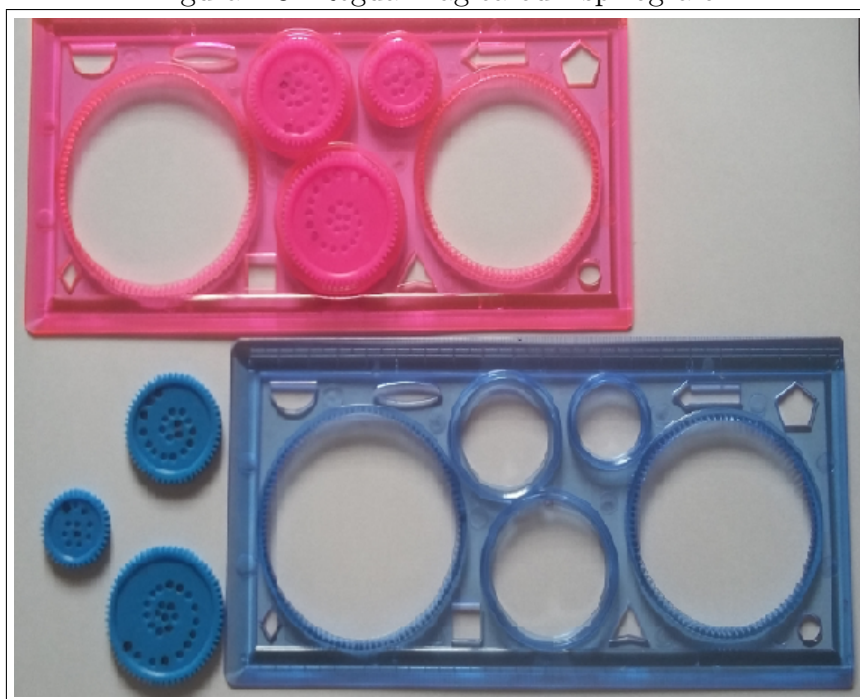
Figura 4.2: Aula sobre como construir as Curvas Cicloidais no GeoGebra.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A construção das Curvas Cicloidais nos computadores e nos celulares possibilitou a abertura para novas ideias. Nesses últimos anos, é comum observar que as tecnologias têm influenciado fortemente na diversão das crianças, adolescentes e adultos. No entanto, em décadas anteriores eram os dispositivos (brinquedos) manipuláveis que faziam a diversão de todos. Nessa perspectiva, procuramos incentivar a construção das curvas de forma lúdica, especialmente a Epicicloide e a Hipocicloide, com o auxílio de uma régua, chamada de Régua Mágica ou Espirógrafo, Figura 4.3. Essa régua, muito utilizada nas décadas de 70 e 80, permite construir figuras de formatos variados e que desperta a curiosidade pela beleza das formas encontradas. Uma ressalva importante de se fazer é que as curvas formadas por esta régua são chamadas de Epirocoide e Hipotrocoide.

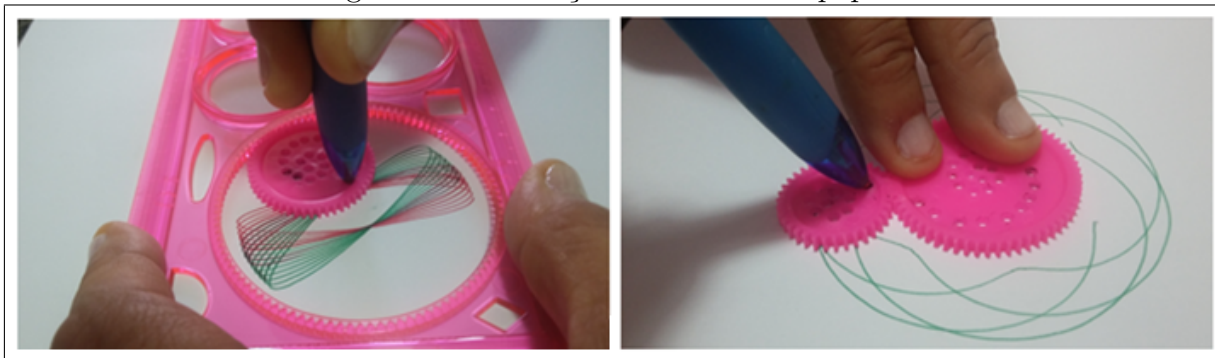
Figura 4.3: Régua Mágica ou Espirógrafo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Régua Mágica foi criada pelo engenheiro inglês Denys Fisher, que a exibiu em 1965 na Feira Internacional de Brinquedos de Nuremberg (Nuremberg International Toy Fair), na Alemanha. Os furos nos círculos dentados são para encaixar canetas ou lápis, então, fazendo os movimentos no sentido horário ou anti-horário, formam-se as curvas numa folha de papel, conforme a Figura 4.4.

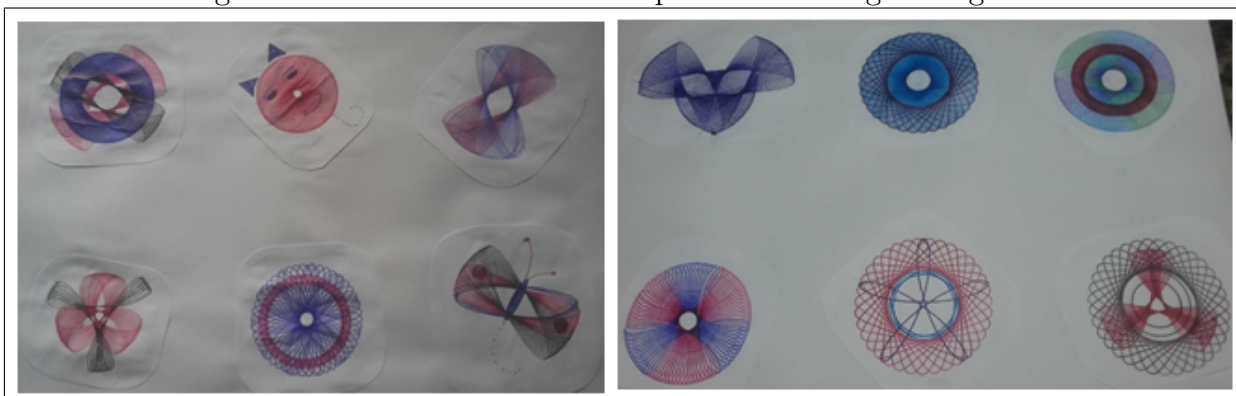
Figura 4.4: Formação das curvas no papel.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As curvas formadas apresentam uma beleza peculiar que podem ser chamadas de Mandalas. Mandala (em Sânscrito significa círculo) é uma representação geométrica da dinâmica relação entre o homem e o universo. A Figura 4.5 mostra algumas mandalas construídas com a Régua mágica.

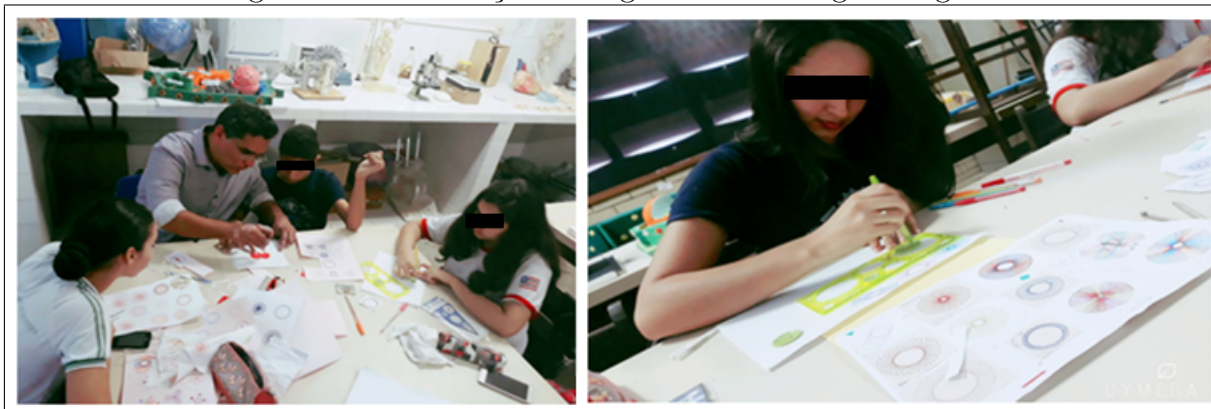
Figura 4.5: Mandalas construídas por meio da Régua Mágica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com a habilidade apurada para construir as figuras, começamos a mostrar para os alunos como utilizar a régua, manipular corretamente as engrenagens e, com muita paciência, chegar a formar as figuras observadas anteriormente. A Figura 4.6 mostra um dos momentos de como criar as figuras por meio da Régua Mágica no Laboratório de Ciências.

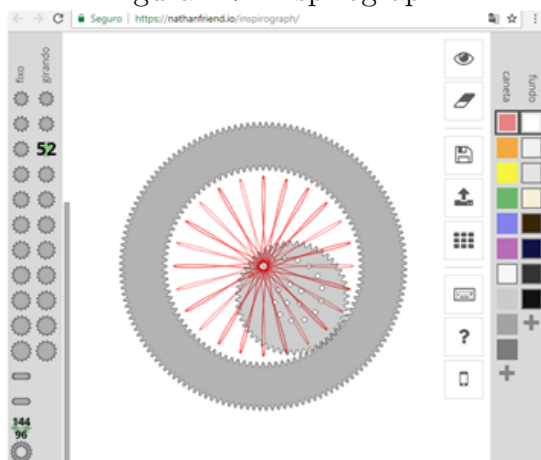
Figura 4.6: Construção das figuras com a Régua Mágica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A missão de ensinar como construir as figuras com a Régua Mágica foi bastante inovadora e satisfatória. Verificar a dedicação para chegar a um resultado que simbolize a aprendizagem e compreender as aplicações das Curvas Cicloidais é um elo que se enxerga a Matemática tão próxima do nosso cotidiano. E para se fazer as figuras com maior precisão, utilizamos, também, um recurso disponível na internet que é o Inspirograph, Figura 4.7, que pode ser encontrado no endereço: <https://universodavitoria.com.br/crie-mandalas-com-regua-magica-virtual/>. Com esse recurso, é possível escolher diferentes modelos de régua, cores das linhas e do fundo, resultando numa infinidade de possibilidades de figuras. A Figura 4.8 indica um dos momentos da utilização do Inspirograph no Laboratório de Informática.

Figura 4.7: Inspirograph.



Fonte: <https://universodavitoria.com.br/crie-mandalas-com-regua-magica-virtual/>.

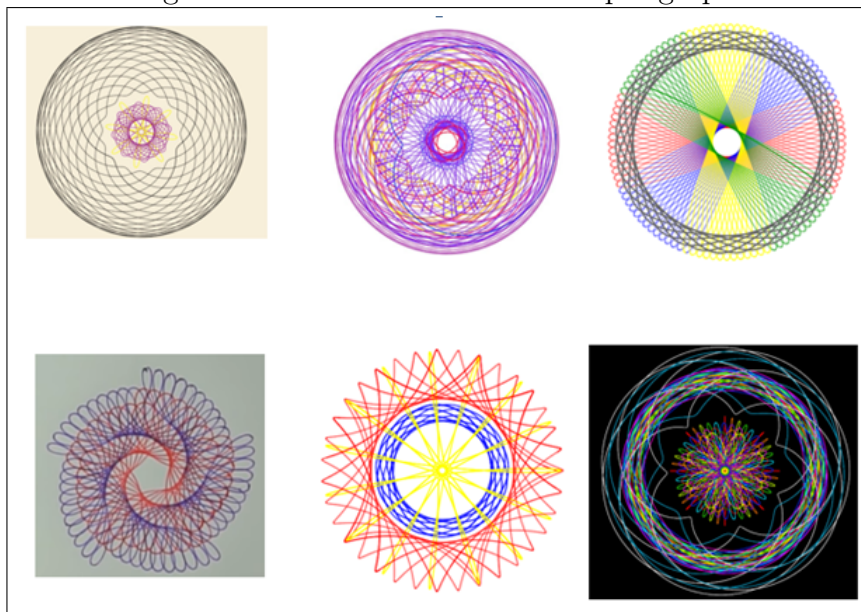
Figura 4.8: Utilizando o Inspirograph no Laboratório de Informática.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 4.9, destaca-se algumas figuras (Mandalas) feitas pelos alunos com os recursos do Inspirograph.

Figura 4.9: Mandalas feitas no Inspirograph.



Fonte: Elaborada pelo autor.

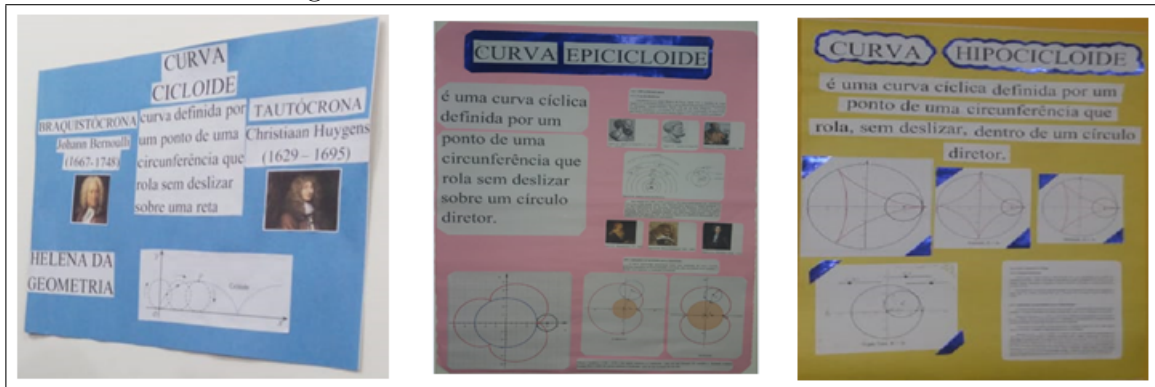
Todo esse processo, conhecer as Curvas Cicloidais, parametrizá-las, construí-las no GeoGebra, desenhá-las no papel utilizando a Régua Mágica e utilizando o Inspirograph para aprimorar as figuras, foi um trabalho desenvolvido em quatro meses. Planejamento, sequência didática, inspiração, entusiasmo, apoio da gestão escolar e de docentes, contribuíram para tornar o estudo das Curvas Cicloidais no Ensino Médio muito atrativo e despertar interesse dos nossos alunos.

Para que esse trabalho chegasse a todo o ambiente escolar, planejamos uma exposição para as Curvas Cicloidais, e que não ficasse exclusivamente voltado para os alunos do 3º Ano do Ensino Médio, por isso, a exposição foi aberta para todas as séries do Ensino médio. Mas para que isso fosse concretizado, houve uma seleção de alunos, principalmente daqueles que se destacaram no período do estudo das curvas, para divulgação e realização desse evento. Com essa visão, contamos com a participação de nove alunos que foram distribuídos em três equipes, cada equipe com a incumbência de desenvolver o trabalho de pesquisa, construção e apresentação das respectivas curvas.

Sob nossa orientação, cada grupo começou a fazer a busca da literatura sobre fatos históricos das Curvas Cicloidais, com o objetivo de aprofundar os conhecimentos adquiridos anteriormente e para, posteriormente, a confecção de cartazes descrevendo as

características das curvas. A situação interessante foi perceber a união entre as equipes, valendo-se do espírito colaborativo, os componentes começaram a fazer um estudo em conjunto para a realização da tarefa de elaboração de cartazes. A Figura 4.10 mostra alguns dos cartazes elaborados pelos alunos.

Figura 4.10: Cartazes das Curvas Cicloidais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalizada a etapa de pesquisa sobre os aspectos históricos das curvas, começaram a trabalhar na confecção da Curva Cicloide. Utilizando como referência a descrição proposta por Venceslau (2015), Curvas Parametrizadas, Cicloides, Experimentos e Aplicações, página 43, os alunos construíram a Curva Cicloide com materiais do cotidiano. A Figura 4.11 mostra a confecção da Curva Cicloide.

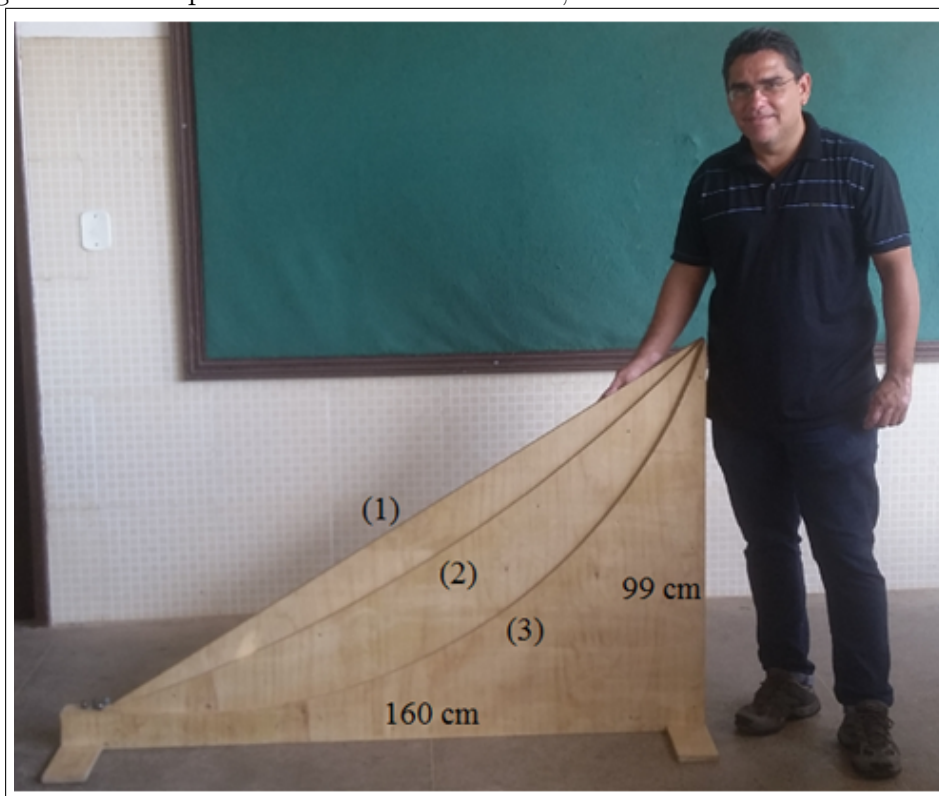
Figura 4.11: Construção da Curva Cicloide.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma contribuição particular que desenvolvemos para mostrar a Braquistócrona e a Tautócrona foi a construção, em madeira compensada, de três curvas. Unidas essas curvas, temos o dispositivo para descrever o trajeto das esferas e para observar essas duas propriedades que estão envolvidas na Curva Cicloide. O dispositivo é formado por uma reta (1), uma curva (2) e a Curva Cicloide (3), tem 99 cm de altura e 160 cm de comprimento, conforme observado na Figura 4.12.

Figura 4.12: Dispositivo contendo uma reta, uma curva e a Curva Cicloide.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O trabalho desenvolvido com a Régua Mágica para a construção das Mandalas teve relevância fundamental, o grupo de discentes começou a criar diversas Mandalas e organizá-las para a confecção de um mural. O objetivo do mural era mostrar os traços artísticos que a Matemática pode desenvolver em cada um e tentar despertar o interesse por seu estudo. O material utilizado para confecção do mural são todos de fácil obtenção e a criatividade dos alunos deu uma beleza no dia da exposição. A Figura 4.13 apresenta um dos momentos da construção de painéis com as Mandalas para fazer o mural para exposição.

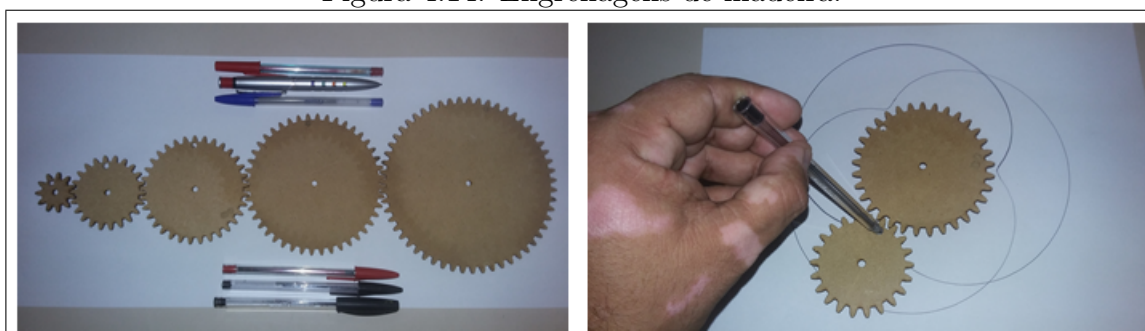
Figura 4.13: Confeção dos painéis de Mandalas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Outra forma de contribuir para a construção das Mandalas, especialmente a descrição das Epitrocoides, em maior escala, foi a obtenção de engrenagens maiores que as da Régua Mágica. Essas engrenagens feitas de madeira deram uma visão ampliada das figuras e, também, despertaram a curiosidade de criar outros tipos de engrenagens com materiais, tamanhos e formas diferentes. A Figura 4.14 mostra as engrenagens de madeira.

Figura 4.14: Engrenagens de madeira.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Todos os pontos destacados neste estudo sobre as Curvas Cicloidais tiveram sua culminância na apresentação dos materiais produzidos, na descrição das propriedades, nas aplicações que podemos verificar no cotidiano e incentivar o interesse pela Matemática. Desse modo, disponibilizamos de um espaço adequado para que fosse feita a exposição das Curvas Cicloidais e para mostrar como seu estudo é bastante fascinante, perpassando pelos fundamentos históricos, conhecendo os precursores do estudo das curvas, como trabalhar no GeoGebra, verificando suas propriedades, aplicações e, na prática, como criar suas figuras (Mandalas) com o uso da Régua Mágica e do Inspirograph.

Enfatizamos que o mais importante nesse trabalho não foi a apresentação em si, mas como o corpo discente assimilou o conteúdo e o aprendeu para que possam avançar em estudos posteriores e, se possível, tornando-os futuros cientistas na área da Matemática ou áreas afins.

Destaca-se que no dia da exposição das Curvas Cicloidais tentamos tornar o ambiente o mais agradável possível para que os outros alunos pudessem sentir uma grata satisfação de estarem assistindo um momento de como a Matemática pode ser estudada e explorada, desfazendo o mito que ela só se presta para realização de cálculos o que a torna desagradável para muitos.

A distribuição na sala para a exposição se estabeleceu de uma forma que os visitantes pudessem ter informações detalhadas e contato com os materiais expostos. Na primeira parte da exposição das Curvas Cicloidais foi descrito a definição, aspectos históricos, caracterização do dispositivo de madeira e das curvas feitas em isopor para descrever as propriedades Braquistócrona e Tautócrona e manipulação no computador do programa GeoGebra para analisar a Curva Cicloide. Na Figura 4.15 podemos observar alguns dos momentos da exposição da Curva Cicloide.

Figura 4.15: Exposição da Curva Cicloide.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A segunda parte se caracterizou pela descrição da Curva Epicicloide. Definição,

abordagem histórica, manipulação no GeoGebra e como criar as figuras utilizando as engrenagens de madeira e da Régua Mágica foram os aspectos explorados. A Figura 4.16 mostra alguns desses momentos.

Figura 4.16: Exposição da Curva Epicicloide.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A terceira parte da exposição foi a exploração da Curva Hipocicloide. Além da definição, aspectos históricos, manuseio da curva no GeoGebra e como utilizar a Régua Mágica para criar figuras, trabalhamos com o Inspirograph para que os alunos pudessem criar suas figuras no computador. A Figura 4.17 mostra um dos momentos da exposição da Curva Hipocicloide.

A parte final da exposição das curvas foi a visualização do mural de Mandalas confeccionados pelos alunos que nos auxiliaram nesse trabalho. As belezas da forma das figuras e a possibilidade de criar diversas formas, impressionaram a todos. Nesse aspecto, esperamos que tenham compreendido que o estudo da Matemática vai além de realização de cálculos e que motive o prazer de estudá-la. A Figura 4.18 mostra o mural de Mandalas.

Figura 4.17: Exposição da Curva Hipocicloide.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.18: Mural de Mandalas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Capítulo 5

Considerações Finais

Necessário se faz repensar o significado da Matemática em muitas atividades realizadas no cotidiano. Enfatiza-se que ela é um instrumento primordial para o desenvolvimento tecnológico. No seu ensino, longe da ideia de que deva ser estudada pelo fator de memorização e realização de amplas linhas de cálculos, sua contextualização e referências nas atividades desempenhadas no cotidiano tem motivado de forma bastante satisfatória a comunidade escolar. Podemos observar que determinados conteúdos podem ser usados para ampliar o desenvolvimento do raciocínio matemático com facilidade.

Destacamos que apresentar a parametrização das Curvas Cicloidais, construí-las e manipulá-las no software GeoGebra, compreender as propriedades e aplicações e construí-las utilizando materiais disponíveis no nosso dia-dia, foi uma experiência inovadora e geradora de grandiosa satisfação, que fez modificar nosso olhar para o ensino da Matemática e da Física.

Em relação à experiência em sala de aula apresentada no Capítulo 4, podemos verificar que foi motivado o interesse e a curiosidade pelo estudo da Matemática, mostrando que é uma ciência dinâmica, cheia de desafios. Esperamos que esse trabalho sirva de incentivo para quem possa utilizá-lo como fonte de pesquisa em novas práticas de como ensinar essa disciplina.

Este trabalho trilhou por um dos assuntos mais magníficos da área da Matemática, as Curvas Cicloidais. Apesar destas não fazerem parte da matriz curricular do Ensino Médio na Educação Básica buscamos adaptá-las em um projeto para que os alunos das turmas da 3ª série do Ensino Médio pudessem ter a oportunidade de conhecê-las. Conseqüentemente, ampliar sua visão e compreensão da importância das Curvas

Cicloidais. Acreditamos que aqueles que se interessarem em estudar as Curvas Cicloidais possam fazer a ampliação desse estudo, melhorando e buscando novos meios e técnicas para disseminar seu conhecimento.

Apêndice A

Demonstração da Identidade de Beltrami

Proposição A.1. *Se na equação de Euler $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$, F depende somente de y e y' , é possível reduzir esta equação à identidade $F - y'F_{y'} = C$ proposta por Eugênio Beltrami (1835-1900) em 1868 e que leva seu sobrenome.*

Prova. De fato, para verificar a validade desta identidade, multiplicaremos a equação de Euler por y'

$$y' \frac{\partial F}{\partial y} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Por outro lado, a derivada total nos fornece a seguinte relação

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'', \quad (\text{A.2})$$

ou ainda,

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' = \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y'} y''. \quad (\text{A.3})$$

Como F não depende da variável x , então $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$. Substituindo (A.3) em (3.1), teremos

$$\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Como, pela regra do produto, $\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}$, então

$$y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - y'' \frac{\partial F}{\partial y'}. \quad (\text{A.5})$$

Substituindo (A.5) em (A.4), teremos

$$\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (\text{A.6})$$

A igualdade A.6, fornece

$$\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad (\text{A.7})$$

que por integração, resulta na identidade de Beltrami:

$$F - y' F_{y'} = C. \quad (\text{A.8})$$

Apêndice B

Aspectos Históricos das Curvas Cicloidais

B.1 Curva Cicloide

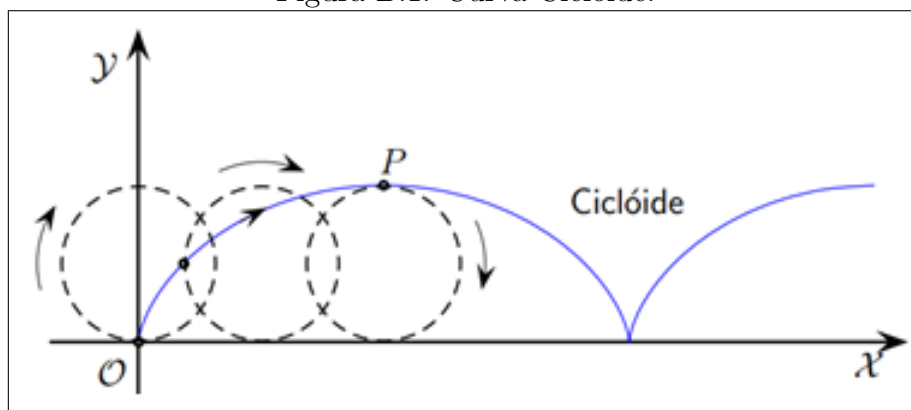
De acordo com as pesquisas bibliográficas efetivadas em relação à Curva Cicloide observa-se que esses estudos nos sinalizam para a ideia de que a Curva Cicloide tem como primeiros registros os gregos que já conheciam sua família, dado os registros a respeito dos epiciclos nos modelos de órbitas circulares. Em 1679 através de uma carta de John Wallis (1616 - 1703) registra que Nicolas Cusa (1401 - 1464) foi o primeiro a perceber essa curva, quando se dedicava a encontrar a área de um círculo - Quadratura da circunferência. Essa afirmação tem valor histórico, pois, atribui-se a descoberta dessa curva a Cusa em 1450. No início do século *XVII*, Charles de Bovelles (1475 - 1566) avançou no estudo da cicloide com base na descrição da Cicloide em sua obra *Introductio em Geometriam*, publicado em 1503. Segundo Whitman (1943), Bovelles identifica erroneamente o arco traçado por uma roda como parte de um círculo maior com um raio $1/5$ maior que a roda menor.

Em 1599, a Curva Cicloide foi nomeada por Galileu Galilei (1564 - 1642), ela foi traçada por um ponto sobre o bordo de uma roda quando esta rola sobre uma reta. Assim, Galileu tentando achar a sua área, concluiu que a área era aproximadamente igual a três vezes a área do círculo gerador, que, posteriormente, foi demonstrada por Gilles Persone de Roberval (1602 - 1675).

No século *XVII*, se concretizaram e desenvolveram o estudo sobre as propriedades da cicloide. A Curva Cicloide (Figura B.1) foi de grande importância no período

em que a Geometria Analítica de Fermat, Descartes e Roberval; o cálculo diferencial de Newton e Leibniz e os métodos dos indivisíveis de Cavalieri e Torricelli nasciam e consolidavam-se, aparecendo nos problemas e discussões propostos na Acta Eruditorum de Leipzig e nas correspondências do círculo de Mersenne. Sua ocorrência foi tão presente ao longo do século, e seu estudo trouxe controvérsias que a Cicloide foi chamada no fim do século por Johann Bernouilli, em 1699, na Acta Eruditorum, de “curva fatídica do século XVII”, além de ter recebido os nomes de “pomo da discórdia” e “a Helena dos geômetras”, segundo Bustillos & Sassine (2011).

Figura B.1: Curva Cicloide.



Fonte: Christiann Huygens, a Helena da Geometria - IF/UFRJ.

Marin Mersenne (Figura B.2) em 1628, apresentou a Curva Cicloide aos matemáticos do século *XVII*. Dentre eles, Gilles de Roberval dedicou-se ao estudo da curva, sendo o primeiro a realizar sua quadratura em 1634, utilizando o princípio dos indivisíveis de Cavalieri.

Figura B.2: Marin Mersenne (1588 - 1648).



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Marin_Mersenne.

Em 1638, surgem contestações referente à construção da tangente a um arco da Curva Cicloide, que envolveu Descartes, Roberval e Fermat. Cada um dos matemáticos apresentou uma solução diferente para o problema, a citar: Descartes apresentou uma solução puramente geométrica, Roberval utilizou para construir sua solução a interpretação mecânica do duplo movimento e Fermat solucionou esse problema aplicando os princípios de cálculo. Na discussão sobre a qualidade das soluções, o apoio de Roberval a Fermat, sobre sua demonstração, levou Descartes ridicularizar Roberval via carta a Marin Mersenne.

Mersenne envia os resultados obtidos pelos três cientistas a Galileu. Este repassa os trabalhos apresentados aos seus alunos, Vincenzo Viviani (1622 - 1703) e Evangelista Torricelli (1608 - 1647), sendo que o último se dedicou aos estudos de geometria a partir da ampliação do método de Cavalieri, inclusive para o caso da Curva Cicloide. Em sua obra de 1644, “Opera Geometrica”, Torricelli publica o primeiro trabalho sobre a Curva Cicloide, apresentando sua quadratura, tangente pela interpretação mecânica, centro de gravidade e volume do sólido de revolução. Esta publicação, fez Roberval acusar Torricelli de copiar seu trabalho.

Os desenvolvimentos dos estudos matemáticos sobre a Curva Cicloide foram construídos, principalmente aos trabalhos de Blaise Pascal (Figura B.3) sobre a curva. Histórias contadas posteriormente, relatam que Pascal teve uma dor de dente, para suportar essa dor, resolveu pensar em problemas sobre a Curva Cicloide que Mersenne lhe passara anteriormente. Pascal interpretou sua melhora como um sinal divino, assim, voltou-se aos estudos de geometria e descobriu várias propriedades da Cicloide que publicou, com Roberval, como problemas abertos à comunidade científica. A série de problemas mobilizou vários matemáticos de destaque e teve como resultado a publicação da retificação da curva por Christopher Wren (1632 - 1723), em 1658. Essa série de problemas mobilizou matemáticos como Wren, Huyghens, Wallis e Fermat, e assistiu o aprofundamento do conceito de indivisível e os primeiros ensaios para o conceito de integral. Em uma ocasião, Pascal escreveu:

“A Cicloide é uma curva tão usual e corrente que depois da reta e da circunferência nenhuma outra curva é tão comumente encontrada. É descrita tão frequentemente diante de nossos olhos que é surpreendente que não tenha sido considerada pelos antigos”.

Figura B.3: Blaise Pascal (1623 - 1662).



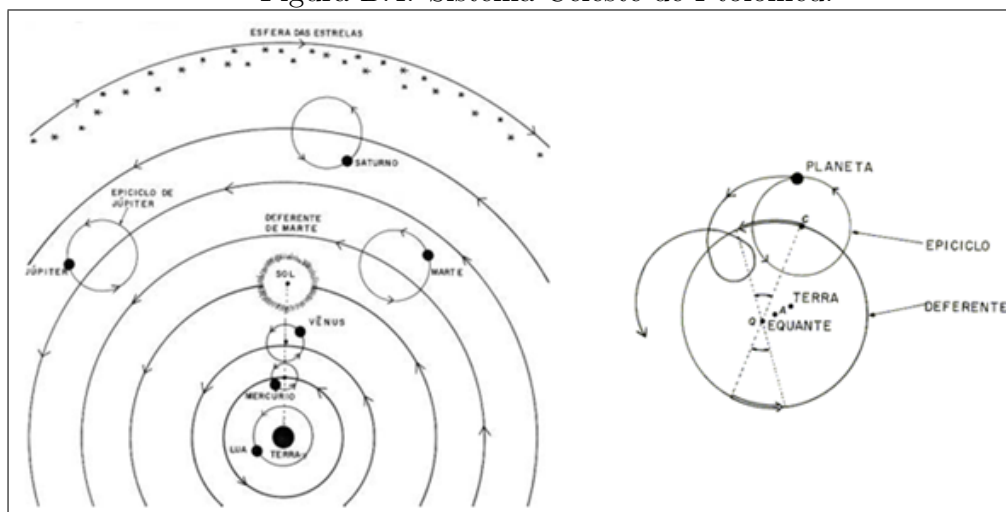
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal.

A segunda metade do século *XVII* viu a inserção da Curva Cicloide no campo das curvas de interesse físico, particularmente após a descoberta por Huyghens da propriedade do tautocronismo da Cicloide em seu relógio sobre relógios de pêndulo “Horologium Oscilatorium”, de 1673 e da aplicação da teoria das evolutas, criada por ele em 1659, para determinar o trilho superior necessário para o pêndulo descrever a trajetória cicloidal que ele descobriu ser a própria Cicloide. No fim do século, em 1696, Johann Bernouilli apresentou o problema da Braquistócrona na *Acta Eruditorum*, para o qual apresentou a Cicloide como solução, aplicando novos conceitos de máximos e mínimos, solução na qual foi acompanhado apenas por Leibniz, seu irmão Jakob Bernouilli, Newton e L’Hospital.

B.2 Curvas Epicicloide e Hipocicloide

Consideram-se os gregos Hiparco de Nicea (190 a.C. - 120 a.C.) e Apolônio de Perga (262 a.C. - 194 a.C.) os primeiros a caracterizar a Curva Epicicloide em suas teorias dos epiciclos na astronomia. Cláudio Ptolemeu (90 - 168) em sua obra *Almagesto* - O grande tratado de matemática e astronomia, do século II, usou combinações de Epicicloides para estimar as posições dos astros celestes (Figura B.4) seguia o modelo geocêntrico.

Figura B.4: Sistema Celeste de Ptolomeu.



Fonte: <https://sites.google.com/site/astrofiscamaluca/modelo-ptolomaico>

Nos séculos XV, XVI e XVII, podemos citar alguns personagens que trabalharam com a Curva Epicicloide. Dentre eles, Albrecht Dürer (1471 - 1528) artista norueguês, na sua obra *Underweysund der Messung* (Instruções em Medição), publicada em 1525, apresenta um método de desenho de linhas em caracol - estudo da Cardioide. Gerard Desargues (1591 - 1661) engenheiro francês, usou essa curva para projetar o sistema de abastecimento de água em Paris. Ole Romer (1644 - 1710) astrônomo dinamarquês, usou dessa curva nas construções de engrenagens.

Assim como a Epicicloide, a Hipocicloide teve sua importância nos estudos de Apolônio de Perga e entre os célebres matemáticos, entre os séculos XVI e XVIII, como Galileu, Dürer, Desargues, Huygens, Leibniz, Newton, L'Hôpital, os irmãos Bernoulli, La Hire e Euler.

No século XIX, uma das alternativas para a construção de pistões nas máquinas a vapor para um melhor desempenho, foi o desenho do movimento hipocicloidal dos pistões.

Referências

- [1] ACTA ERUDITORUM. **Revista dos Eruditos**. Leipzig, publicada entre 1682 e 1782, por Gottfried Wilhelm Leibniz.
- [2] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Blücher, 1996.
- [3] BUSTILLOS, Oscar Vega, SASSINE, André. **A Magia da Curva Cicloide: Braquistocrona e Tautocrona**. Editora: Scortecci, São Paulo, 2011.
- [4] CASTRO, Leonardo Miranda de. **O Cálculo Variacional e as Curvas Cicloidais**. 2014. 68f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Brasília, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Brasília.
- [5] CUTRIM, Raimundo José Pinto. **Curvas Planas Parametrizadas: um ensaio para o Ensino Médio**. 2015. 82f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Maranhão, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), São Luís.
- [6] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [7] DEMO, Pedro. **Educar pela pesquisa**. 7. ed. Campinas: Autores Associados, 2011.
- [8] FARINA, Carlos. **Huygens, a Helena da Geometria e o Aprisionamento do Tempo**. Universidade Federal do Rio de Janeiro (2013).
- [9] FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996. (Coleção Leitura).
- [10] HOHENWARTER, Markus; FUCHS, Karl. **Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra**. In: Computer algebra systems and dynamic geometry systems in mathematics teaching conference. 2004.

- [11] JÚNIOR, José Ribamar Alves de Sousa. **O cálculo variacional e o problema da bráquistócrona** Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista - UNESP,. 2010. In: TAGLIOLATO, Ana Luísa Sader. **Braquistócrona**. 2015. 54 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Estadual Paulista - Rio Claro.
- [12] MIYASAKI, Rodrigo. **Um Estudo de Curvas Planas Utilizando o GeoGebra**. 2017. 81f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Federal de Goiás, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Goiânia.
- [13] MUNEM, M. A.; FOULIS, D. J. **Cálculo**.(2 vols.). Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora, 1982.
- [14] RAPOSO, Cláudia Sofia Carrilho Morgado. **Curvas Famosas e não só: teoria, histórias e atividades**. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores). Universidade de Lisboa - 2013.
- [15] SANTOS, Walcy; ALENCAR, Hilário. **Geometria diferencial das curvas planas**. IMPA, 2003.
- [16] STEINHAUS, H. **Instantâneos Matemáticos**, 3.ed. Nova Iorque: Dover, 1999.
- [17] VENCESLAU, Allisson Wesley do Nascimento. **Curvas parametrizadas, cicloides, experimentos e aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). UFSE -2015.
- [18] WHITMAN, E. A. **Algumas anotações históricas sobre a Cicloide**. The American Mathematical Monthly 1943 309-315.
- Sites:
- [19] GONÇALVES, Vladimir Sicca. **Curvas, Superfícies e Arquitetura**. Disponível em: <https://curvasearquitetura.wordpress.com/cicloide/> - Acesso: 21/11/2017.
- [20] NUNES, Paulo. **Knoow net. Enciclopedia temática**. 2015. Disponível em: <http://knoow.net/cienciasexactas/matematica/cordioide/> - Acesso: 10/12/2017.
- [21] SANTOS, Adriano Fior dos. **Algumas curvas planas**. 2014. Disponível em: <http://algumascurvasplanas.blogspot.com/> - Acesso: 30/11/2017.

- [22] VITÓRIA, Cacilda. **Universo da Vitória**. Crie Mandalas com a Régua Mágica Virtual. Disponível em: <https://universodavitoria.com.br/crie-mandalas-com-regua-magica-virtual/> - Acesso: 16/01/2018