



UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL

Wenceslau José de Souza Leite

**Uma abordagem de problemas da geometria plana do ponto de
vista da geometria analítica**

São Luís

2018

Wenceslau José de Souza Leite

**Uma abordagem de problemas da geometria plana do ponto de
vista da geometria analítica**

Dissertação apresentado à Coordenação Acadêmica do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Maranhão, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jairo Santos da Silva

São Luís

2018

**Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a)
autor(a). Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA.**

Jose de souza Leite, Wenceslau.

Uma abordagem de problemas da geometria plana do ponto de vista da geometria analítica / Wenceslau Jose de souza Leite. - 2018.

58 p.

Orientador(a): Jairo Santos da Silva. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, UFMA, 2018.

1. O uso da geometria analítica em questões de olimpíadas de Matemática. 2. Uma abordagem analítica das questões de geometria plana. 3. Um pouco da história de René Descartes. I. Santos da Silva, Jairo. II. Título.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por tudo que acontece em minha vida, pela chance proporcionada, pela força dada para vencer todas as batalhas contra o tempo que muitas vezes era pouco para se dedicar aos estudos e ao trabalho ao mesmo tempo.

À minha esposa Ana Claudia Rodrigues, que nunca deixou eu desistir da luta, sempre me dando força.

Às minhas filhas por se mostrarem sempre orgulhosas e esperançosas pela conclusão do trabalho.

Aos meus colegas do mestrado que me mostraram muita força de vontade em toda sexta saírem das suas casas em outras cidades arriscando a vida e deixando seus familiares para se dedicarem a conclusão do mestrado sempre alegres e tornando as nossas sextas divertidas.

À UFMA e à SBM pela dedicação conjunta em fazer que tudo aconteça da melhor maneira possível.

Aos nossos professores que se dedicaram muito tentando dar sempre boas aulas, principalmente ao nosso querido professor Anselmo Raposo que sempre esteve ao nosso lado com sua capacidade de transmitir com facilidade e paciência os conteúdos.

Ao meu orientador, o professor Dr. Jairo Santos da Silva, pelas colaborações na realização deste trabalho. Espero que Deus me proporcione outros momentos como esse de trabalhar com pessoas tão dedicadas e felizes no que fazem.

RESUMO

Em geral, nas olimpíadas de matemática, os assuntos cobrados são organizados em quatro grandes grupos: álgebra, combinatória, teoria dos números e geometria plana. Esse último grupo, em particular, é fonte inesgotável de problemas interessantes. Resolver um problema olímpico de geometria é uma tarefa que exige um conhecimento sólido das proposições e teoremas relacionados ao mesmo. Em alguns casos, construções geométricas apropriadas devem ser consideradas com o objetivo de otimizar a busca por uma solução. Às vezes, recursos trigonométricos podem ser empregados para o mesmo fim. Ainda assim, mesmo considerando todo o aparato geométrico à disposição do estudante, muitos problemas parecem insolúveis, ao passo que a utilização de determinada técnica nem sempre é evidente. Em nosso trabalho, estudaremos alguns problemas geométricos extraídos de olimpíadas de matemática ao redor do mundo e os analisaremos por meio de duas abordagens distintas. Em primeiro lugar, exibiremos soluções puramente euclidianas, por assim dizer. Por outro lado, apresentaremos soluções algébricas, isto é, à base da geometria cartesiana. Em alguns casos, utilizaremos os métodos do Cálculo Diferencial e Integral, dada a sua estreita relação com a geometria de Descartes.

Palavras-chave: Geometria plana. Geometria analítica. Problemas.

ABSTRACT

In general, in mathematics olympiads, the subjects collected are organized into four major groups: algebra, combinatorics, number theory, and flat geometry. This last group, in particular, is an inexhaustible source of interesting problems. Solving an Olympic problem of geometry is a task that requires a solid knowledge of the propositions and theorems related to it. In some cases, appropriate geometric constructions must be considered in order to optimize the search for a solution. Sometimes trigonometric resources can be employed for the same purpose. Still, even considering all the geometric apparatus available to the student, many problems seem to be insoluble, whereas the use of a certain technique is not always evident. In our work, we will study geometric problems extracted from mathematical olympiads around the world and analyze them through two different approaches. In the first place, we will exhibit purely Euclidean solutions, so to speak. On the other hand, we will present algebraic solutions, that is, on the basis of Cartesian geometry. In some cases, we will use the methods of Differential and Integral Calculus, given its close relationship with Descartes geometry.

Key-words: Plane Geometry. Analytical Geometry. Problems.

Lista de Figuras

1.1	Teorema de Pitágoras.	11
1.2	Triângulo retângulo determinado pelos pontos A, B e C	12
1.3	O recíproco do teorema de Pitágoras.	13
1.4	O teorema da base média do triângulo.	13
1.5	$\overline{AB} \parallel Ox$	15
1.6	O segmento \overline{AB} é oblíquo ao eixo das abcissas.	15
1.7	Interseção de duas medianas do triângulo ABC	16
1.8	Distância de um ponto a uma reta perpendicular a Ox	19
1.9	O vértice B de ABC coincide com a origem do plano cartesiano.	24
1.10	O Teorema de Viviani.	26
1.11	O Teorema do Bico.	27
2.1	Problema 1.	29
2.2	Sistema de coordenadas cartesianas com origem em D	30
2.3	Problema 2.	31
2.4	Pontos de tangência.	31
2.5	Sistema de coordenadas cartesianas com origem em O	32
2.6	Problema 3.	33
2.7	Pontos de tangência da circunferência com os lados do retângulo.	33
2.8	Sistema de coordenadas cartesianas com origem em P	35
2.9	Problema 4.	36
2.10	Teorema da base média do triângulo, $MN \parallel AC$	36
2.11	Baixando perpendiculares sobre a reta suporte de DM	37
2.12	Todo triângulo isósceles tem duas medianas de mesmo comprimento.	39
2.13	Exemplo de uma construção geométrica bem sucedida.	40

2.14	Sistema de coordenadas cartesianas com origem em B	41
2.15	Problema 6.	42
2.16	Uma solução puramente geométrica para o item b.	43
2.17	A conjectura de Clough.	46
2.18	Problema 7.	47
2.19	Uma aplicação contundente do teorema de Viviani.	47
2.20	Os primeiros passos rumo à resolução de um problema desafiador.	48
2.21	Uma construção geométrica esclarecedora.	49
2.22	Sistema de coordenadas cartesianas com origem em D	50
2.23	Problema 9.	51
2.24	Solução clássica para o problema de Langley.	52
2.25	Uma solução analítica para o triângulo de Langley.	53

SUMÁRIO

Lista de Figuras	4
Introdução	8
1 Conceitos e Definições Preliminares	10
1.1 Teorema de Pitágoras	10
1.2 Distância Entre Dois Pontos	11
1.3 Recíproco do Teorema de Pitágoras	12
1.4 Teorema da Base Média do Triângulo	13
1.5 Coordenadas do Ponto Médio de um Segmento em Função das Coordenadas das Extremidades do Segmento	14
1.6 Coordenadas do Baricentro de um Triângulo	16
1.7 Distância de um Ponto a uma Reta	19
1.8 Área de um Triângulo em Função das Coordenadas dos Seus Vértices	21
1.9 Fórmula de Herão para o Cálculo da Área de um Triângulo	23
1.10 Relação Entre as Áreas de dois Triângulos Semelhantes	25
1.11 Teorema de Viviani	25
1.12 Teorema do Bico	27
2 Prolemas e Soluções	28
2.1 Problema 1 (OBM)	28
2.2 Problema 2	30
2.3 Problema 3 (Vestibular-Universidade Federal de Viçosa)	33
2.4 Problema 4 (Vestibular-Universidade Mackenzie)	36
2.5 Problema 5 (BAMO-Bay Area Mathematical Olympiad)	39
2.6 Problema 6 (Professor Isaac Luís)	41
2.7 Duas Aplicações do Teorema de Viviani	45

2.7.1	A Conjectura de Clough	45
2.7.2	Problema 7 (Olimpíada de Matemática da UNICAMP)	47
2.8	Problema 8 (Harvard-MIT mathematics tournament)	48
2.9	O triângulo de Langley	50
2.9.1	Problema 9	50
Considerações Finais		55
Referências		56

Introdução

Resolver um problema de matemática é algo extremamente gratificante. Quando um problema é desafiador, a jornada pela busca de uma solução pode ser árdua, mas é sempre possível colher bons frutos ao término da mesma. O famoso último teorema de Fermat, por exemplo, nem sempre foi um teorema. A princípio, Fermat conjecturou a não existência de soluções em inteiros para a equação

$$x^n + y^n = z^n, \quad n \geq 2,$$

alegando, inclusive, ter uma demonstração secreta para sua afirmação - que jamais foi encontrada, diga-se de passagem. Ao longo dos séculos, várias gerações de excelentes matemáticos foram incapazes de fornecer uma prova definitiva para a conjectura de Fermat. As abordagens tradicionais via teoria dos números revelaram-se insuficientes. Foi necessária uma revolucionária expansão do maquinário matemático para que a famosa conjectura, em 1995, finalmente viesse a ganhar o status de teorema.

O espírito deste trabalho é exatamente o mesmo que motivou a resolução do desafio fermatiano: a crença de que a busca por caminhos alternativos para solucionar problemas resulta, inevitavelmente, numa saudável expansão do conhecimento matemático. Nesse sentido, nosso objetivo aqui é preciso: atacar problemas geométricos segundo a perspectiva da geometria analítica; na verdade, exibiremos múltiplas soluções, isto é, solucionaremos os problemas apresentados fazendo uso das técnicas das geometrias euclidiana e cartesiana. Com isso pretendemos agregar novas abordagens e técnicas resolutivas ao espetacular universo dos problemas matemático.

Tendo em vista as considerações acima, a sequência lógica de apresentação do texto é feita como segue.

No Capítulo 1, faremos uma fundamentação teórica, na qual serão incluídos os conceitos e definições necessárias ao estudo das questões que trataremos neste trabalho.

Aqui, na medida do possível, e priorizando abordagens analíticas, daremos demonstrações para alguns teoremas clássicos da geometria plana.

O segundo e último capítulo desta dissertação consiste de uma coletânea de problemas extraídos de vestibulares, publicações especializadas e olimpíadas de matemática. Evidentemente, as soluções que exibiremos utilizarão as ideias e resultados obtidos no primeiro capítulo deste trabalho.

Capítulo 1

Conceitos e Definições Preliminares

Como mencionado anteriormente, neste capítulo, apresentamos de maneira sucinta os principais pré-requisitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Para mais detalhes sobre os resultados apresentados (do ponto de vista da geometria plana) ao longo das seções deste capítulo veja, por exemplo, Dolce e Pompeo (1993), Iezzi (1993) e Muniz Neto (2013).

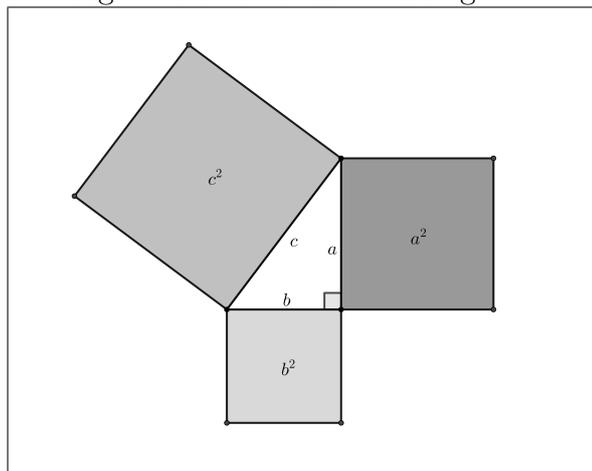
1.1 Teorema de Pitágoras

Esta seção é dedicada a um dos teoremas bem conhecidos na geometria, o chamado Teorema de Pitágoras que consiste em uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Da Geometria Euclidiana, temos que:

- (i) Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.
- (ii) A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto e os catetos são os dois lados que o formam.

O enunciado anterior relaciona comprimentos, mas o teorema também pode ser enunciado como uma relação entre as áreas, onde c representa o comprimento da hipotenusa, e a e b representam os comprimentos dos outros dois lados.

Figura 1.1: Teorema de Pitágoras.



Fonte: <https://www.wikipedia.org> (2018).

1.2 Distância Entre Dois Pontos

Um outro resultado que será bastante utilizado ao longo desse trabalho diz respeito a distância euclidiana entre dois pontos dada como segue.

Teorema 1.1. *Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pontos do plano cartesiano. A distância entre os pontos A e B , denotada por d_{AB} é dada por:*

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Demonstração: Se $A = B$, o resultado é imediato. Suponha, portanto, $A \neq B$. Seja r a reta determinada pelos pontos A e B . Temos três possibilidades:

1ª) r é perpendicular ao eixo das abscissas. Nesse caso, $x_A = x_B$. Além disso, $d_{AB} = |y_A - y_B|$. Consequentemente,

$$d_{AB} = |y_A - y_B| = \sqrt{(y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

2ª) r é paralela ao eixo das abscissas. Aqui, temos $y_A = y_B$, e o raciocínio é absolutamente análogo ao que fizemos acima.

3ª) r é oblíqua ao eixo das abscissas. Tracemos por A , a reta r_x paralela ao eixo x , e por B , a reta r_y paralela ao eixo y . Com isso, determinamos o triângulo retângulo ABC , dado na Figura 1.2, onde $C = r_x \cap r_y$. É claro que os catetos \overline{AC} e \overline{BC} medem, respectivamente, $|x_A - x_B|$ e $|y_A - y_B|$. Daí, aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos

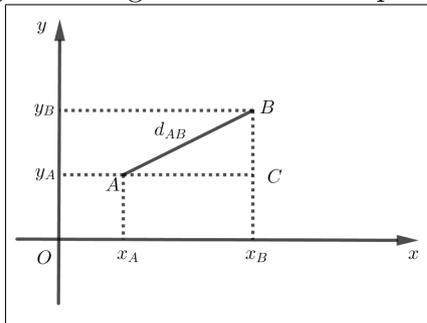
$$d_{AB}^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

implicando que

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

■

Figura 1.2: Triângulo retângulo determinado pelos pontos A , B e C .



Fonte: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br> (2018).

1.3 Recíproco do Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras também admite um recíproca dada pelo seguinte teorema:

Teorema 1.2. *Se, num triângulo T , o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então T é um triângulo retângulo.*

Demonstração: Sejam A , B e C os vértices de T , com

$$BC^2 = AB^2 + AC^2. \quad (1.1)$$

Fixemos um sistema de coordenadas cartesianas com origem em B , como indicado na Figura 1.3.

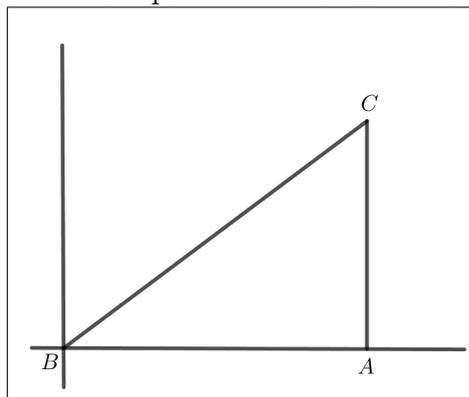
Escrevemos $A = (x_A, 0)$ e $C = (x_C, y_C)$. Mostremos que \hat{A} é reto. Para tanto, suponha o contrário, de modo que tenhamos $x_A \neq x_C$. Note que (1.1) equivale a $d_{BC}^2 = d_{AB}^2 + d_{AC}^2$. Daí, em virtude do Teorema 1.1, temos

$$x_C^2 + y_C^2 = x_A^2 + [(x_A - x_C)^2 + y_C^2] = 2x_A^2 - 2x_Ax_C + x_C^2 + y_C^2.$$

Consequentemente, $2x_A(x_A - x_C) = 0$ e, portanto, $x_A = 0$, o que é um absurdo. Logo, T é retângulo em \hat{A} .

■

Figura 1.3: O recíproco do teorema de Pitágoras.



Fonte: Própria.

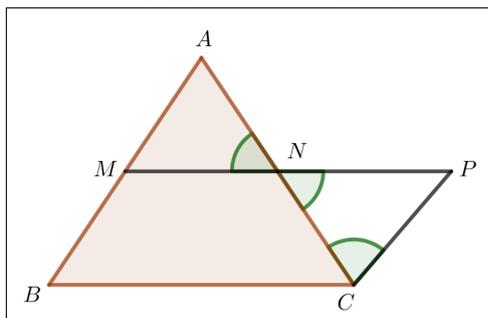
1.4 Teorema da Base Média do Triângulo

Teorema 1.3. *Uma base média de um triângulo é um segmento cujas extremidades são dois pontos médios de lados desse triângulo. Se M e N são os pontos médios dos lados \overline{AB} e \overline{AC} de um triângulo ABC , então a base média é paralela ao lado \overline{BC} e tal que*

$$MN = \frac{BC}{2}.$$

Demonstração: Tracemos por C a reta r paralela ao lado \overline{AB} e seja P tal que $P = r \cap \overrightarrow{MN}$, como indicado na Figura 1.4.

Figura 1.4: O teorema da base média do triângulo.



Fonte: <https://social.stoa.usp.br> (2018).

Em virtude da construção feita, temos $\widehat{MAN} \cong \widehat{PCN}$ (ângulos alternos internos). Além disso, $\widehat{ANM} \cong \widehat{CNP}$ (ângulos opostos pelo vértice em N), uma vez que esses ângulos são opostos pelo vértice N . Logo, como $AN = NC$, concluímos que os triângulos AMN e CNP são congruentes (caso ALA). Daí, temos

$$s : \begin{cases} CP = AM = MB \\ NP = MN \end{cases} . \quad (1.2)$$

Como consequência das igualdades em (1.2), concluímos que o quadrilátero $MBCP$ é um paralelogramo e, portanto, a base média \overline{MN} é paralela ao lado \overline{BC} . Ademais, podemos escrever

$$BC = MP = MN + NP = 2MN \Rightarrow MN = \frac{BC}{2}.$$

■

Agora, daremos uma demonstração para um corolário interessante do teorema que acabamos de provar. Para tanto, recorde que o postulado de Euclides afirma que, dados um ponto P e uma reta r , existe uma única reta paralela a r passando por P .

Corolário 1.4. *Seja M o ponto médio do lado \overline{AB} do triângulo ABC . A paralela r ao lado \overline{BC} , traçada por M , intersecta o lado \overline{AC} em seu ponto médio.*

Demonstração: *Seja N_1 o ponto tal que $r \cap \overline{AC} = N_1$. Se N é o ponto médio de \overline{AC} , temos $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, em função do Teorema 1.3. Como, $r = \overline{MN_1} \parallel \overline{BC}$, inferimos, pelo postulado de Euclides, que $r = \overline{MN}$. Como a interseção entre duas retas distintas é única, segue-se que $N_1 = N$, o que encerra a prova.*

■

1.5 Coordenadas do Ponto Médio de um Segmento em Função das Coordenadas das Extremidades do Segmento

O **ponto médio** é considerado o ponto de equilíbrio de um segmento de reta e podemos chamá-lo de ponto divisor, ponto este que divide o segmento de reta exatamente no meio tendo dois segmentos iguais.

Teorema 1.5. *Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pontos distintos do plano cartesiano, e M o ponto médio do segmento de extremos A e B . Então,*

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

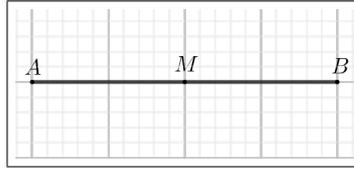
Demonstração: Façamos $M = (x_M, y_M)$. Analisaremos três situações:

1º caso: O segmento \overline{AB} é paralelo ao eixo das abcissas.

É evidente que $y_M = y_A = y_B$. Assim, temos

$$y_M = \frac{2y_A}{2} = \frac{y_A + y_A}{2} = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Figura 1.5: $\overline{AB} \parallel Ox$.



Fonte: Própria.

Agora, desde que $AM = MB$, obtemos

$$x_M - x_A = x_B - x_M,$$

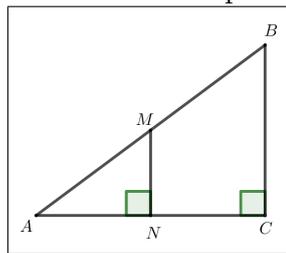
ou seja,

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

2º caso: O segmento \overline{AB} é perpendicular ao eixo das abcissas. É claro que, nesse caso, \overline{AB} é paralelo ao eixo das ordenadas, e a estratégia a ser empregada é similar à que foi apresentada no caso anterior.

3º caso: O segmento \overline{AB} é oblíquo ao eixo das abcissas. Tracemos por A , a reta r paralela ao eixo das abcissas, e por B , a reta s paralela ao eixo das ordenadas, sendo C o ponto tal que $C = r \cap s$. Além disso, tracemos por M a paralela ao lado \overline{BC} do triângulo retângulo ABC determinado, conforme Figura 1.6.

Figura 1.6: O segmento \overline{AB} é oblíquo ao eixo das abcissas.



Fonte: Própria.

Pelo Corolário 1.4, $N = (x_N, y_N)$ é o ponto médio do segmento \overline{AC} . Daí, em virtude do 1º caso, temos

$$N = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right).$$

Conseqüentemente, como $x_C = x_B$, obtemos

$$x_M = x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Para o que falta, lembremos que, conforme Corolário 1.4, $MN = BC/2$. Logo, podemos escrever

$$\frac{y_B - y_C}{2} = y_M - y_N = y_M - \left(\frac{y_A + y_C}{2} \right),$$

donde concluímos que $2y_M - (y_A + y_C) = y_B - y_C$ e, portanto, $y_M = (y_A + y_B)/2$. ■

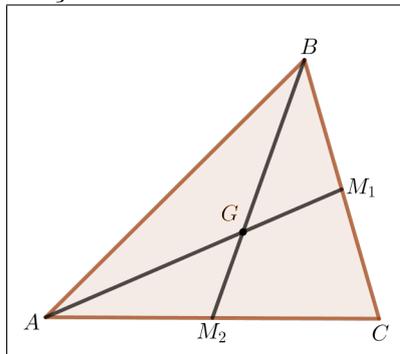
1.6 Coordenadas do Baricentro de um Triângulo

No que segue, faremos um estudo elaborado das propriedades do baricentro de um triângulo. Porém, a princípio, trabalharemos com um ponto G que, para os nossos propósitos, não será, de imediato, denominado baricentro. Dito isso, consideremos um triângulo ABC e tracemos as medianas $\overline{AM_1}$ e $\overline{BM_2}$, com G tal que $\overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} = \{G\}$, como ilustrado na Figura 1.7.

Mostremos que $AG = 2GM_1$. Repare que isso equivale a provar que a razão entre as áreas dos triângulos ABG e BGM_1 (denotadas, respectivamente, por A_{ABG} e A_{BGM_1}) é igual a 2. De fato, note que esses dois triângulos compartilham de uma mesma altura - basta considerar os lados \overline{AG} e $\overline{GM_1}$ como respectivas bases. Daí, representando por h a medida dessa altura, temos

$$\frac{A_{ABG}}{A_{BGM_1}} = \frac{\frac{AG \times h}{2}}{\frac{GM_1 \times h}{2}} = \frac{AG}{GM_1} = 2 \Leftrightarrow AG = 2GM_1. \quad (1.3)$$

Figura 1.7: Interseção de duas medianas do triângulo ABC .



Fonte: Própria.

Observe que

$$A_{ABG} + A_{AGM_2} = \frac{A_{ABC}}{2} = A_{ABG} + A_{BGM_1},$$

isto é,

$$A_{AGM_2} = A_{BGM_1}. \quad (1.4)$$

Utilizando (1.4) e traçando o segmento \overline{CG} na Figura 1.7, é fácil ver que

$$A_{CGM_2} = A_{AGM_2} = A_{BGM_1} = A_{CGM_1}. \quad (1.5)$$

Agora, como M_1 é o ponto médio de \overline{BC} , temos $A_{ABM_1} = A_{ACM_1}$. Consequentemente, utilizando (1.5), obtemos

$$A_{ABG} + A_{BGM_1} = A_{BGM_1} + A_{CGM_1} + A_{CGM_2} = 3A_{BGM_1}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{A_{ABG}}{A_{BGM_1}} = 2,$$

e o resultado segue da equivalência obtida em (1.3). ■

Nosso objetivo agora é determinar as coordenadas de G . Façamos $G = (x_G, y_G)$.

Seja M o ponto médio do segmento \overline{AG} . Como consequência do Teorema 1.5, temos

$$M = \left(\frac{x_A + x_G}{2}, \frac{y_A + y_G}{2} \right). \quad (1.6)$$

Além disso, como M_1 é o ponto médio de BC , temos

$$M_1 = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right). \quad (1.7)$$

Ademais, perceba que $GM_1 = AG/2 = MG$, de modo que G é o ponto médio de $\overline{MM_1}$.

Daí, usando (1.6) e (1.7),

$$x_G = \frac{\frac{x_A + x_G}{2} + \frac{x_B + x_C}{2}}{2},$$

isto é,

$$4x_G = x_G + (x_A + x_B + x_C),$$

ou, ainda,

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}. \quad (1.8)$$

De maneira análoga, encontramos

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}. \quad (1.9)$$

Agora, seja $M_3 = ((x_A + x_B)/2, (y_A + y_B)/2)$ o ponto médio do lado \overline{AB} . Mostraremos que G é ponto da mediana $\overline{CM_3}$. Se a reta $\overleftrightarrow{CM_3}$ for perpendicular ao eixo das abscissas, temos, em particular,

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_A + x_B = 2x_C.$$

Conseqüentemente, usando (1.8), obtemos

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2x_C + x_C}{3} = \frac{3x_C}{3} = x_C,$$

e o resultado segue claramente. Se a reta $\overleftrightarrow{CM_3}$ não for perpendicular ao eixo das abscissas, seu coeficiente angular m é tal que

$$m = \frac{y_C - \left(\frac{y_A + y_B}{2}\right)}{x_C - \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)} = \frac{2y_C - (y_A + y_B)}{2x_C - (x_A + x_B)}.$$

Assim, a equação de $\overleftrightarrow{CM_3}$ é

$$y = \left[\frac{2y_C - (y_A + y_B)}{2x_C - (x_A + x_B)} \right] (x - x_C) + y_C.$$

Daí, utilizando (1.8) e (1.9), temos

$$\begin{aligned} \left[\frac{2y_C - (y_A + y_B)}{2x_C - (x_A + x_B)} \right] (x_G - x_C) + y_C &= \left[\frac{2y_C - (y_A + y_B)}{2x_C - (x_A + x_B)} \right] \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} - x_C \right) + y_C \\ &= \left[\frac{2y_C - (y_A + y_B)}{2x_C - (x_A + x_B)} \right] \left(\frac{x_A + x_B - 2x_C}{3} \right) + y_C \\ &= \left[\frac{2y_C - (y_A + y_B)}{2x_C - (x_A + x_B)} \right] \left\{ -\frac{[2x_C - (x_A + x_B)]}{3} \right\} + y_C \\ &= \frac{y_A + y_B - 2y_C}{3} + y_C \\ &= \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ &= y_G, \end{aligned}$$

de onde concluímos que $G \in \overleftrightarrow{CM_3}$. Assim, as três medianas de ABC intersectam-se em G e esse ponto é denominado o baricentro de ABC . Com essa informação, é possível demonstrar, por meio da utilização de artifícios análogos àqueles que apresentamos no início desta seção, as seguintes igualdades:

$$BG = 2GM_2 \quad \text{e} \quad CG = 2GM_3.$$

Com isso, o baricentro de um triângulo divide cada mediana em duas partes, de maneira que, a parte que contém um vértice do triângulo é o dobro da outra.

1.7 Distância de um Ponto a uma Reta

Recordemos que toda reta do plano possui uma equação geral da forma $ax + by + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo a e b não ambos nulos. Nesta seção, mostraremos que a distância de um ponto $P = (x_o, y_o)$ a uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$, denotada por $d_{P,r}$, é dada pela fórmula

$$d_{P,r} = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

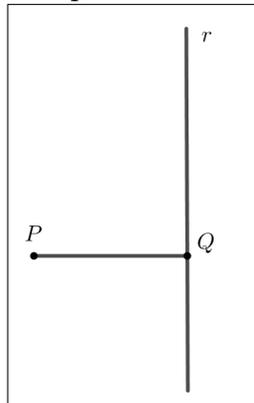
Com efeito, se $P \in r$, a conclusão é imediata, já que

$$\frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 = d_{P,r}.$$

Suponhamos, portanto, $P \notin r$. Temos três possibilidades a considerar:

1º caso) r é perpendicular ao eixo das abscissas. Seja $Q = (x_Q, y_Q)$ o pé da perpendicular baixada de P sobre r .

Figura 1.8: Distância de um ponto a uma reta perpendicular a Ox .



Fonte: Própria.

Evidentemente, a equação de r é $x = x_Q$, ou, equivalentemente, $x + 0y - x_Q = 0$. Daí, a expressão dada resulta em

$$\frac{|1 \cdot x_o - x_Q|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |x_o - x_Q|,$$

que é, de fato, a distância de P à reta r .

2º caso) r é paralela ao eixo das abscissas. Aqui, o raciocínio é similar ao que fizemos acima.

3º caso) r é oblíqua ao eixo das abscissas. Consideremos, mais uma vez, o ponto $Q = (x_Q, y_Q)$, pé da perpendicular baixada de P sobre r . Se m é o coeficiente angular de r ,

então, uma equação para r é

$$y - y_Q = m(x - x_Q)$$

e, da igualdade anterior, obtemos a seguinte equação geral para r :

$$mx - y + (y_Q - mx_Q) = 0.$$

Desse modo, estamos interessados em provar que

$$d_{P,r} = \frac{|mx_o - y_o + (y_Q - mx_Q)|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Note que a reta \overleftrightarrow{PQ} não é perpendicular ao eixo Ox , caso contrário, teríamos r paralela ao eixo Ox . Ademais, lembremos que duas retas não verticais são perpendiculares se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é -1 . Assim, como o coeficiente angular de r é m e a reta \overleftrightarrow{PQ} é perpendicular a reta r , então uma equação de \overleftrightarrow{PQ} é

$$y - y_o = \left(-\frac{1}{m}\right)(x - x_o),$$

ou, ainda,

$$m(y - y_o) = x_o - x. \quad (1.10)$$

Uma vez que $Q \in \overleftrightarrow{PQ}$, suas coordenadas devem satisfazer (1.10), isto é,

$$m(y_Q - y_o) = x_o - x_Q. \quad (1.11)$$

Agora, usando (1.11), podemos escrever

$$\begin{aligned} mx_o - y_o + (y_Q - mx_Q) &= m(x_o - x_Q) + (y_Q - y_o) \\ &= m^2(y_Q - y_o) + (y_Q - y_o) \\ &= (m^2 + 1)(y_Q - y_o). \end{aligned}$$

Ou, equivalentemente,

$$(y_Q - y_o)^2 = \frac{[mx_o - y_o + (y_Q - mx_Q)]^2}{(m^2 + 1)^2}. \quad (1.12)$$

Finalmente, de (1.11) e (1.12), obtemos

$$\begin{aligned} d_{P,r} = d_{PQ} &= \sqrt{(x_o - x_Q)^2 + (y_o - y_Q)^2} = \sqrt{m^2(y_Q - y_o)^2 + (y_Q - y_o)^2} \\ &= \sqrt{(m^2 + 1)(y_Q - y_o)^2} = \sqrt{(m^2 + 1) \frac{[mx_o - y_o + (y_Q - mx_Q)]^2}{(m^2 + 1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{[mx_o - y_o + (y_Q - mx_Q)]^2}{(m^2 + 1)}} = \frac{|mx_o - y_o + (y_Q - mx_Q)|}{\sqrt{m^2 + 1}}, \end{aligned}$$

exatamente como desejávamos. ■

1.8 Área de um Triângulo em Função das Coordenadas dos Seus Vértices

Sabemos que existem diversas formas de calcular a área de um triângulo, a geometria analítica também possui seus artifícios para o cálculo da área de um triângulo, nesse caso é necessário que saibamos as coordenadas de seus três vértices para que o triângulo possa ser representado em um plano cartesiano.

Proposição 1.6. *Sejam $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ os vértices de um triângulo. Então,*

$$A_{ABC} = \frac{|D|}{2},$$

onde

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Demonstração: Inicialmente, perceba que

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix},$$

aplicando a regra de Chió, temos

$$D = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A). \quad (1.13)$$

Se a reta \overleftrightarrow{AB} for perpendicular ao eixo das abscissas, temos $x_A = x_B$ e, de (1.13), vem

$$D = -(x_C - x_A)(y_B - y_A) \Rightarrow |D| = |y_B - y_A||x_C - x_A| = d_{AB} \times d_{C, \overleftrightarrow{AB}} = 2A_{ABC},$$

e o resultado segue. Agora, suponha que \overleftrightarrow{AB} não é paralela ao eixo Ox . Então, o coeficiente angular m de \overleftrightarrow{AB} é

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m(x_B - x_A) = (y_B - y_A). \quad (1.14)$$

Além disso, é fácil ver que uma equação geral para \overleftrightarrow{AB} é dada por

$$mx - y + (y_A - mx_A) = 0.$$

Conseqüentemente, em virtude do resultado obtido na Seção 1.7, temos:

$$d_{C, \overleftrightarrow{AB}} = \frac{|mx_C - y_C + (y_A - mx_A)|}{\sqrt{m^2 + 1}}. \quad (1.15)$$

Perceba também que

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + m^2(x_B - x_A)^2} \\ &= \sqrt{(m^2 + 1)(x_B - x_A)^2} \\ &= |x_A - x_B| \sqrt{m^2 + 1}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Agora, usando (1.13) e (1.14), podemos escrever

$$\begin{aligned} D &= (x_B - x_A)(y_C - y_A) - m(x_B - x_A)(x_C - x_A) \\ &= (x_B - x_A)[(y_C - y_A) - m(x_C - x_A)] \\ &= (x_A - x_B)[mx_C - y_C + (y_A - mx_A)]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Finalmente de (1.15), (1.16) e (1.17), obtemos

$$\begin{aligned} |D| &= |x_A - x_B| |mx_C - y_C + (y_A - mx_A)| \\ &= \frac{d_{AB}}{\sqrt{m^2 + 1}} \times \sqrt{m^2 + 1} \times d_{C, \overleftrightarrow{AB}} \\ &= d_{AB} \times d_{C, \overleftrightarrow{AB}} \\ &= 2A_{ABC}, \end{aligned}$$

e nada mais há a fazer. ■

Um corolário imediato do resultado acima estabelece uma condição necessária e suficiente para a colinearidade de três pontos do plano.

Corolário 1.7. *Sejam $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ pontos do plano. Então, A, B e C são colineares se, e somente se, $|D| = 0$.*

Demonstração: Suponha $D = 0$. Se A, B e C não fossem colineares, esses pontos determinariam um triângulo de área A_{ABC} tal que

$$A_{ABC} = \frac{|D|}{2} = 0,$$

o que claramente é um absurdo. Para o que falta, lembremos que, se uma matriz quadrada possui duas filas paralelas iguais, então seu determinante é nulo. Agora, suponha A, B

e C colineares. Se $A = B$, $A = C$ ou $B = C$, é fácil ver que $D = 0$, em função da observação supracitada. Assim, suponha A , B e C distintos dois a dois. Se r é a reta tal que $\{A, B, C\} \subset r$, há duas possibilidades:

1ª) r é perpendicular ao eixo das abscissas. Nesse caso, temos $x_A = x_B = x_C$. Daí,

$$D = (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A) = (x_A - x_A)(y_C - y_A) - (x_A - x_A)(y_B - y_A) = 0.$$

2ª) r não é perpendicular ao eixo das abscissas. Desse modo, o coeficiente angular m de r é tal que

$$m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow (x_B - x_A)(y_C - y_A) = (x_C - x_A)(y_B - y_A),$$

de onde se concluí que

$$D = (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A) = 0.$$

■

1.9 Fórmula de Herão para o Cálculo da Área de um Triângulo

Teorema 1.8. *Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo ABC , então*

$$A_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

onde p é o semiperímetro de ABC , isto é, $p = (a + b + c)/2$.

Demonstração: Fixemos um sistema de coordenadas cartesianas com origem no vértice B de ABC , e sejam $A = (x_A, y_A)$ e $C = (x_C, 0)$, conforme Figura 1.9.

Para começarmos, observe que

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2}. \tag{1.18}$$

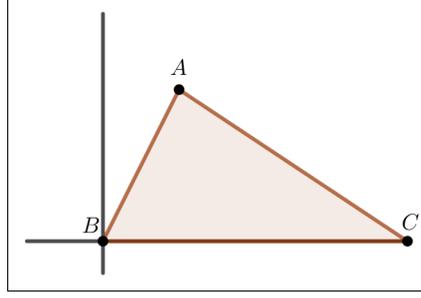
Além disso, temos

$$AB^2 = x_A^2 + y_A^2, \tag{1.19}$$

$$AC^2 = (x_A - x_C)^2 + y_A^2, \tag{1.20}$$

$$BC^2 = |x_C|^2 = x_C^2. \tag{1.21}$$

Figura 1.9: O vértice B de ABC coincide com a origem do plano cartesiano.



Fonte: Própria.

Subtraindo, membro a membro, (1.19) de (1.20) e usando (1.21), vem

$$AB^2 - AC^2 = 2x_A x_C - BC^2,$$

isto é,

$$x_A x_C = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2}. \quad (1.22)$$

Multiplicando (1.19) por $4x_C^2$, temos

$$4x_C^2 y_A^2 + 4(x_A x_C)^2 = 4AB^2 x_C^2.$$

Daí, usando (1.18), (1.21) e (1.22), obtemos

$$\begin{aligned} y_A^2 &= \frac{4AB^2 BC^2 - (AB^2 + BC^2 - AC^2)^2}{4BC^2} \\ &= \frac{(2ABBC)^2 - (AB^2 + BC^2 - AC^2)^2}{4BC^2} \\ &= \frac{[2ABBC + (AB^2 + BC^2 - AC^2)][2ABBC - (AB^2 + BC^2 - AC^2)]}{4BC^2} \\ &= \frac{[(AB^2 + BC^2 + 2ABBC) - AC^2][(AC^2 - (AB^2 + BC^2 - 2ABBC))]}{4BC^2} \\ &= \frac{[(AB + BC)^2 - AC^2][AC^2 - (AB - BC)^2]}{4BC^2} \\ &= \frac{[(AB + BC + AC)(AB + BC - AC)][(AC + AB - BC)(AC - AB + BC)]}{4BC^2} \\ &= \frac{2p \times [2(p - AC)] \times [2(p - BC)] \times [2(p - AB)]}{4BC^2} \\ &= \frac{4p(p - AB)(p - AC)(p - BC)}{BC^2}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Para terminarmos, usando a última igualdade em (1.23) para o valor de y_A^2 , basta notar que

$$A_{ABC} = \frac{|x_C||y_A|}{2} \Rightarrow A_{ABC}^2 = \frac{|x_C|^2|y_A|^2}{4} = \frac{1}{4} \times BC^2 \times \frac{4p(p - AB)(p - AC)(p - BC)}{BC^2}$$

ou, equivalentemente,

$$A_{ABC}^2 = p(p - AB)(p - AC)(p - BC),$$

e o resto é imediato. ■

1.10 Relação Entre as Áreas de dois Triângulos Semelhantes

Teorema 1.9. *Se dois triângulos T_1 e T_2 são semelhantes, e a razão de semelhança do primeiro para o segundo é k , então*

$$\frac{A_{T_1}}{A_{T_2}} = k^2.$$

Demonstração: Sejam a', b' e c' as medidas de T_1 ; a, b e c , respectivamente, as medidas dos lados homólogos em T_2 . Por hipótese, temos $a' = ak, b' = bk$ e $c' = ck$. Se p_1 e p_2 denotam, respectivamente, os semiperímetros de T_1 e T_2 , temos

$$p_1 = \frac{a' + b' + c'}{2} = \frac{ak + bk + ck}{2} = \frac{k(a + b + c)}{2} = kp_2.$$

Daí, em virtude da fórmula de Herão (dada no Teorema 1.8), obtemos

$$A_{T_1}^2 = kp_2(kp_2 - ak)(kp_2 - bk)(kp_2 - ck) = k^4 p_2(p_2 - a)(p_2 - b)(p_2 - c) = k^4 A_{T_2}^2,$$

o que implica

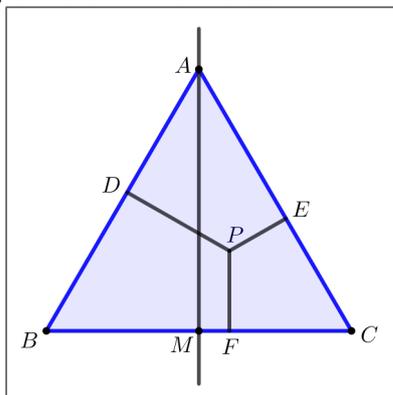
$$\left(\frac{A_{T_1}}{A_{T_2}}\right)^2 = \frac{A_{T_1}^2}{A_{T_2}^2} = k^4 \Rightarrow \frac{A_{T_1}}{A_{T_2}} = k^2. \quad \blacksquare$$

1.11 Teorema de Viviani

O teorema a seguir, descoberto pelo italiano Vincenzo Viviani (1622-1703), pode ser útil na resolução de problemas olímpicos, conforme veremos em breve.

Teorema 1.10. *Seja T um triângulo equilátero e P um ponto interior a esse triângulo. A soma das distâncias de P aos lados de T é igual à altura de T .*

Figura 1.10: O Teorema de Viviani.



Fonte: Própria.

Demonstração: Sejam A , B e C os vértices de T . Fixemos um sistema de coordenadas cartesianas com origem em M , ponto médio do lado BC .

Sejam l a medida do lado de T e $P = (x_P, y_P)$. Evidentemente, as coordenadas de A , B e C são, respectivamente, $(0, l\sqrt{3}/2)$, $(-l/2, 0)$ e $(l/2, 0)$. Utilizando as equações segmentárias, é fácil ver que as equações das retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{AC} são, respectivamente,

$$\frac{x}{\left(\frac{-l}{2}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{x}{\left(\frac{l}{2}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)} = 1.$$

Daí, em virtude do resultado fornecido na Seção 1.7, podemos escrever

$$PD = \frac{\left| \left(\frac{-2}{l}\right) x_P + \left(\frac{2}{l\sqrt{3}}\right) y_P - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{-2}{l}\right)^2 + \left(\frac{2}{l\sqrt{3}}\right)^2}} = \frac{l\sqrt{3}}{4} \left| \left(\frac{-2}{l}\right) x_P + \left(\frac{2}{l\sqrt{3}}\right) y_P - 1 \right|.$$

Agora, como P é interior a T , pode-se mostrar que

$$\left(\frac{-2}{l}\right) x_P + \left(\frac{2}{l\sqrt{3}}\right) y_P - 1 \leq 0.$$

Consequentemente,

$$PD = \frac{l\sqrt{3}}{4} \left[\left(\frac{2}{l}\right) x_P - \left(\frac{2}{l\sqrt{3}}\right) y_P + 1 \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} x_P - \frac{1}{2} y_P + \frac{l\sqrt{3}}{4}. \quad (1.24)$$

Analogamente, obtemos

$$PE = -\frac{\sqrt{3}}{2} x_P - \frac{1}{2} y_P + \frac{l\sqrt{3}}{4}. \quad (1.25)$$

Assim, usando (1.24), (1.25) e o fato que $PF = y_P$, temos

$$PD + PE + PF = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x_P - \frac{1}{2} y_P + \frac{l\sqrt{3}}{4} \right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} x_P - \frac{1}{2} y_P + \frac{l\sqrt{3}}{4} \right) + y_P = \frac{l\sqrt{3}}{2},$$

e nada mais há a fazer. É importante observar ainda que o argumento acima é válido também nos casos em que P é um ponto do triângulo, isto é, nos casos em que $P \in \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$. ■

1.12 Teorema do Bico

Encerraremos este capítulo com um teorema bem conhecido da geometria plana, chamado de Teorema do Bico.

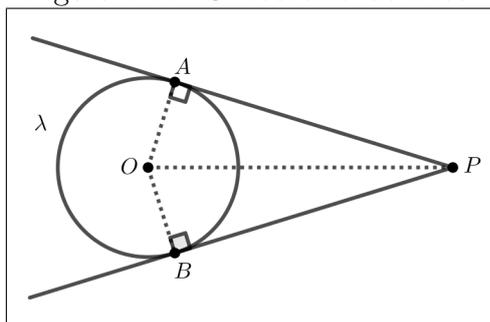
Teorema 1.11. *Seja P um ponto externo a uma circunferência λ de raio r . Se de P conduzirmos dois segmentos \overline{PA} e \overline{PB} , ambos tangentes a λ , então $PA = PB$.*

Demonstração: Observe a Figura 1.11. Recorde que, se uma reta é tangente a uma circunferência, então essa reta é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Tendo isso em mente, segue-se que $\text{med}(\widehat{OAP}) = \text{med}(\widehat{OBP}) = 90^\circ$. Além disso, $OA = OB = r$ e \overline{OP} é um lado comum aos triângulos AOP e BOP . Agora, por aplicações sucessivas do teorema de Pitágoras, podemos escrever

$$PA^2 + OA^2 = OP^2 = OB^2 + PB^2,$$

de onde segue que $PA^2 = PB^2$, ou seja, $PA = PB$. ■

Figura 1.11: O Teorema do Bico.



Fonte: Própria.

Capítulo 2

Problemas e Soluções

Neste capítulo, apresentaremos uma série de problemas interessantes extraídos de vestibulares, publicações especializadas e de algumas das mais difíceis olimpíadas de matemática do mundo. Em geral, as soluções que exibiremos estarão embasadas nos resultados obtidos no capítulo anterior e as principais referências aqui utilizadas são: BOULOS (1999), Muniz Neto (2013) e SHIRALI (2012).

2.1 Problema 1 (OBM)

Problema 2.1. (OBM (2009)) *Na Figura 2.1, $A E F G$ e $A B C D$ são quadrados e o ponto E está na reta $\overleftrightarrow{C D}$. Além disso, M é o ponto médio do segmento $\overline{C D}$ e C é o ponto médio do segmento $\overline{M E}$. Sabendo que o quadrado $A B C D$ possui lado 6, determine a razão entre as áreas do quadrilátero $C H A M$ e do quadrado $A E F G$ (denotadas, respectivamente, por $A_{C H A M}$ e $A_{A E F G}$).*

Solução 1. Inicialmente, observemos que $D M = M C = C E = 3$. Assim,

$$A_{A D E} = \frac{A D \times D E}{2} = \frac{6 \times 9}{2} = 27 \text{ ua (unidades de área).}$$

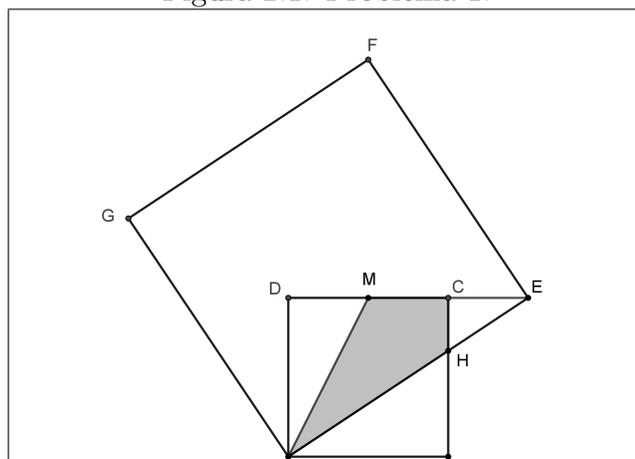
Uma vez que os triângulos $C E H$ e $A D E$ são semelhantes (pelo caso de semelhança AA), o Teorema 1.9 nos permite escrever

$$\frac{A_{C E H}}{A_{A D E}} = \left(\frac{3}{9}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Daí, como $A_{A D E} = 27$, concluímos que

$$A_{\Delta C E H} = \frac{27}{9} = 3 \text{ ua.}$$

Figura 2.1: Problema 1.



Fonte: www.obmep.org.br (2015).

Conseqüentemente, da Figura 2.1, temos

$$\begin{aligned}
 A_{CHAM} &= A_{ADE} - (A_{CEH} + A_{ADM}) \\
 &= 27 - \left(3 + \frac{6 \times 3}{2} \right) \\
 &= 15 \text{ ua.}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ademais, pelo teorema de Pitágoras, obtemos

$$\begin{aligned}
 A_{AEFG} &= AE^2 = AD^2 + DE^2 \\
 &= 6^2 + 9^2 = 117 \text{ ua.}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

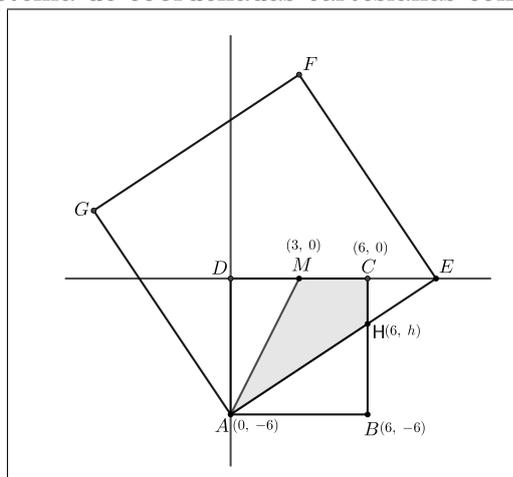
Finalmente, de (2.1) e(2.2), encontramos

$$\frac{A_{CHAM}}{A_{AEFG}} = \frac{15}{117} = \frac{5}{39}.$$

■

Solução 2. Aqui, utilizaremos uma técnica que, em virtude de sua eficiência, também será empregada em vários outros problemas deste capítulo: a introdução de um conveniente sistema de coordenadas cartesianas. Observe a Figura 2.2 a seguir:

Figura 2.2: Sistema de coordenadas cartesianas com origem em D .



Fonte: Própria.

Seja r a reta determinada pelos pontos A e E . O coeficiente angular m de r é tal que

$$m = \frac{0 - (-6)}{9 - 0} = \frac{2}{3}.$$

Daí, uma equação de r é

$$y = \frac{2}{3}(x - 9). \quad (2.3)$$

Como $H \in r$, suas coordenadas satisfazem a equação (2.3). Desse modo,

$$h = \frac{2}{3}(6 - 9) = -2.$$

Conseqüentemente, da Figura 2.2, temos

$$A_{CHAM} = A_{ACM} + A_{ACH} = \frac{|CM||DA|}{2} + \frac{|CH||AB|}{2} = \frac{3 \times 6}{2} + \frac{2 \times 6}{2} = 9 + 6 = 15.$$

Agora, empregando a fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos, obtemos

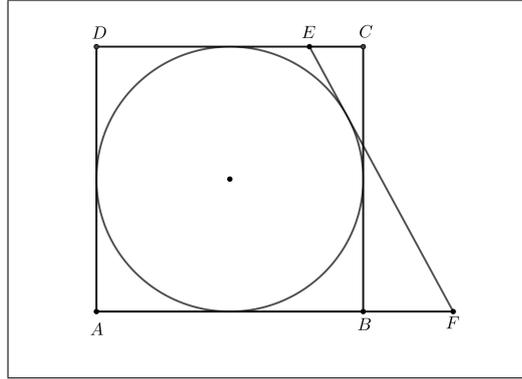
$$A_{AEFG} = AE^2 = (9 - 0)^2 + [0 - (-6)]^2 = 117,$$

e o resto é imediato. ■

2.2 Problema 2

Problema 2.2. Sendo $EC = 2$ e $BF = 3$, calcule o raio da circunferência inscrita no quadrado $ABCD$.

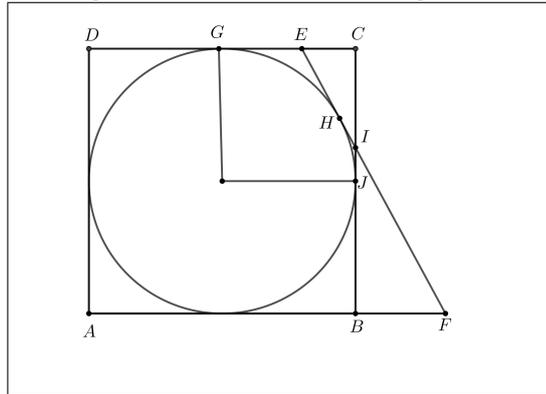
Figura 2.3: Problema 2.



Fonte: Própria.

Solução 1. Sejam G e J os pontos de tangência da circunferência com os lados \overline{CD} e \overline{AB} , respectivamente. Além disso, seja H o ponto de tangência da circunferência com a reta \overleftrightarrow{EF} e I o ponto de interseção das retas \overleftrightarrow{EF} e \overleftrightarrow{CB} . (Veja a Figura 2.4.)

Figura 2.4: Pontos de tangência.



Fonte: Própria.

Denotemos por r o raio da circunferência. É fácil ver que $CG = CJ = JB = r$. Ademais, pelo teorema do bico (Teorema 1.11), vem $EH = EG = CG - EC = r - 2$ e $HI = IJ$. Como os triângulos BFI e CEI são semelhantes (caso AA), temos

$$\frac{JB + IJ}{CJ - IJ} = \frac{BI}{CI} = \frac{BF}{EC} = \frac{3}{2},$$

de onde segue que

$$\frac{r + IJ}{r - IJ} = \frac{3}{2}.$$

Daí, $r = 5IJ$ e, portanto, como $EH = r - 2$, $HI = IJ$ e $CJ = r$, obtemos

$$\begin{cases} EI = EH + HI = (r - 2) + IJ = 6IJ - 2 \\ CI = CJ - IJ = 4IJ \end{cases}. \quad (2.4)$$

Agora, usando o sistema (2.4) e o fato que $r = 5IJ$, o teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo CEI nos fornece

$$(6IJ - 2)^2 = 2^2 + (4IJ)^2 \Rightarrow 4IJ(5IJ - 6) = 0.$$

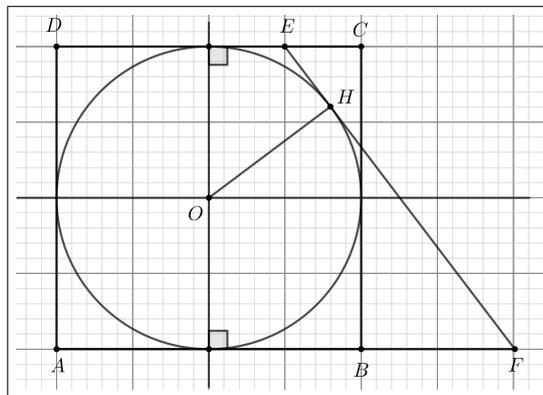
Conseqüentemente,

$$r = 5IJ = 6.$$

■

Solução 2. Seja O o centro da circunferência. Fixemos um sistema de coordenadas cartesianas com origem em O , como mostra a Figura 2.5.

Figura 2.5: Sistema de coordenadas cartesianas com origem em O .



Fonte: Própria.

Observe que as coordenadas dos pontos E e F , com respeito ao sistema de coordenadas fixado, são, respectivamente, $(r - 2, r)$ e $(r + 3, -r)$. Desse modo, o coeficiente angular da reta \overleftrightarrow{EF} é

$$\frac{(-r) - r}{(r + 3) - (r - 2)} = -\frac{2r}{5},$$

de modo que uma equação para \overleftrightarrow{EF} é

$$y - r = \left(-\frac{2r}{5}\right)[x - (r - 2)] \Leftrightarrow 5y - 5r = (-2r)(x - r + 2) = -2rx + 2r^2 - 4r,$$

ou, equivalentemente,

$$-2rx - 5y + 2r^2 + r = 0.$$

Agora, note que $r = OH = d_{O, \overleftrightarrow{EF}}$ e, portanto, o resultado estabelecido na Seção 1.7 nos fornece

$$r = \frac{|(-2r) \times 0 + (-5) \times 0 + 2r^2 + r|}{\sqrt{(-2r)^2 + (-5)^2}} = \frac{|r(2r + 1)|}{\sqrt{4r^2 + 25}} = \frac{r|2r + 1|}{\sqrt{4r^2 + 25}}.$$

Daí,

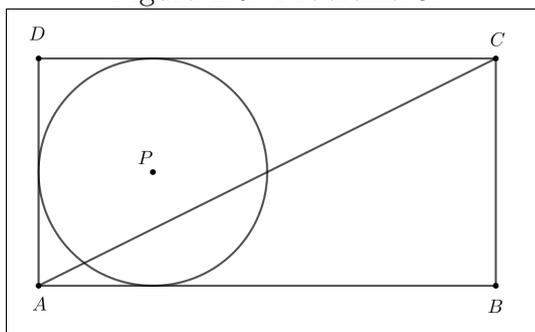
$$4r^2 + 25 = (2r + 1)^2 = 4r^2 + 4r + 1,$$

implicando que $4r = 24$, ou seja, $r = 6$. ■

2.3 Problema 3 (Vestibular-Universidade Federal de Viçosa)

Problema 2.3. Na Figura 2.6, a circunferência de centro P e raio 2 é tangente a três lados do retângulo $ABCD$ de área igual a 32. Determine a distância do ponto P à diagonal \overline{AC} .

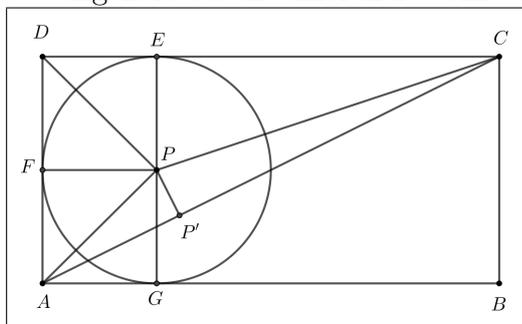
Figura 2.6: Problema 3.



Fonte: www.portal.ufv.br (2011).

Solução 1. Sejam E, F e G , respectivamente, os pontos de tangência da circunferência com os lados \overline{CD} , \overline{AD} e \overline{AB} , como indicado na Figura 2.7.

Figura 2.7: Pontos de tangência da circunferência com os lados do retângulo.



Fonte: Própria.

É claro que $AD = EG = 4$; daí, $CD = 32/4 = 8$, de modo que, aplicando o teorema de

Pitágoras no triângulo ABC , obtemos

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 8^2 + 4^2 = 80. \quad (2.5)$$

Seja P' o pé da perpendicular baixada de P sobre a diagonal \overline{AC} . Claramente, $A_{ACD} = 32/2 = 16$. Por outro lado, podemos escrever

$$A_{APD} + A_{CPD} + A_{ACP} = A_{ACD} = 16$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned} 16 &= \frac{AD \times FP}{2} + \frac{CD \times EP}{2} + \frac{AC \times PP'}{2} \\ &= \frac{4 \times 2}{2} + \frac{8 \times 2}{2} + \frac{AC \times PP'}{2} \\ &= 12 + \frac{AC \times PP'}{2}. \end{aligned}$$

Consequentemente, $AC \times PP' = 8$. Daí, usando a igualdade (2.5), concluímos que $PP'^2 = 64/80$, ou seja, $PP' = 2/\sqrt{5}$. ■

Solução 2. Note que $EC = CD - DE = 8 - 2 = 6$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo CPE , temos $CP^2 = EP^2 + EC^2 = 2^2 + 6^2 = 40$. Agora, observe que \overline{AP} é uma diagonal do quadrado $AGPF$, de maneira que $AP = 2\sqrt{2}$. Além disso, usando o fato que $CP^2 = 40$ e empregando novamente o teorema de Pitágoras nos triângulos APP' e CPP' , obtemos, respectivamente, as seguintes igualdades:

$$PP'^2 + AP'^2 = AP^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8 \quad (2.6)$$

$$PP'^2 + P'C^2 = CP^2 = 40 \quad (2.7)$$

Subtraindo, membro a membro, (2.6) de (2.7), vem

$$32 = P'C^2 - AP'^2 = (AP' + P'C)(P'C - AP') = AC(P'C - AP').$$

Mas, por (2.5), $AC = \sqrt{80}$. Logo,

$$P'C - AP' = \frac{32}{\sqrt{80}}. \quad (2.8)$$

Ademais, temos

$$P'C + AP' = AC = \sqrt{80}. \quad (2.9)$$

Somando, membro a membro, (2.8) e (2.9), resulta que

$$2P'C = \sqrt{80} + \frac{32}{\sqrt{80}} = \frac{112}{4\sqrt{5}}.$$

Daí, $P'C = 14/\sqrt{5}$. Finalmente, usando o valor de $P'C$, de (2.7), obtemos

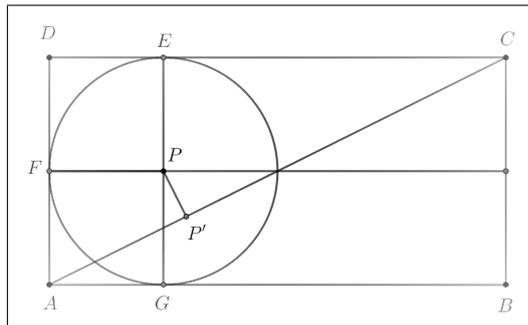
$$PP'^2 = 40 - \left(\frac{14}{\sqrt{5}}\right)^2 = 40 - \frac{196}{5} = \frac{4}{5},$$

de onde segue que $PP' = 2/\sqrt{5}$.

Agora, apresentamos uma outra solução que faz uso do resultado fornecido na Seção 1.7. ■

Solução 3. Estabeleça um sistema de coordenadas cartesianas com origem em P , como indicado na Figura 2.8.

Figura 2.8: Sistema de coordenadas cartesianas com origem em P .



Fonte: Própria.

Claramente, o coeficiente angular da reta \overleftrightarrow{AC} corresponde à

$$\operatorname{tg}(B\hat{A}C) = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Assim, uma equação de \overleftrightarrow{AC} é dada por

$$y + 2 = \frac{1}{2}(x + 2),$$

ou, equivalentemente, $x - 2y - 2 = 0$, já que, em particular, o ponto $A = (-2, -2)$ pertence a essa reta. Desse modo, temos

$$PP' = d_{P, \overleftrightarrow{AC}} = \frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

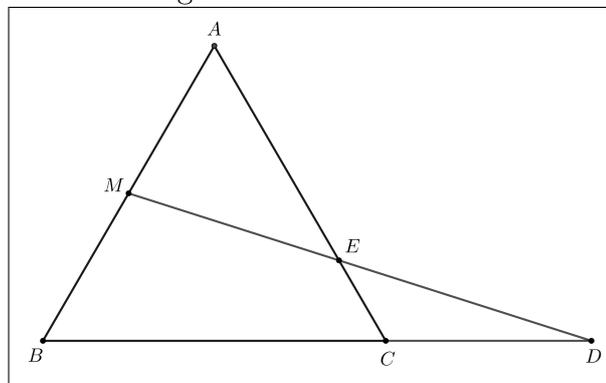
e nada mais há a fazer. ■

O artifício da introdução de um sistema de coordenadas num plano a fim de que possamos solucionar um problema também é viável em situações nas quais não dispomos de ângulos retos. Vejamos, inicialmente, duas soluções “não analíticas” para o problema seguinte e, depois, faremos também uma solução com o uso da geometria analítica.

2.4 Problema 4 (Vestibular-Universidade Mackenzie)

Problema 2.4. *O triângulo ABC da Figura 2.9 é equilátero. Sabe-se que $AM = MB = 5$ e $CD = 6$. Determine o valor de AE .*

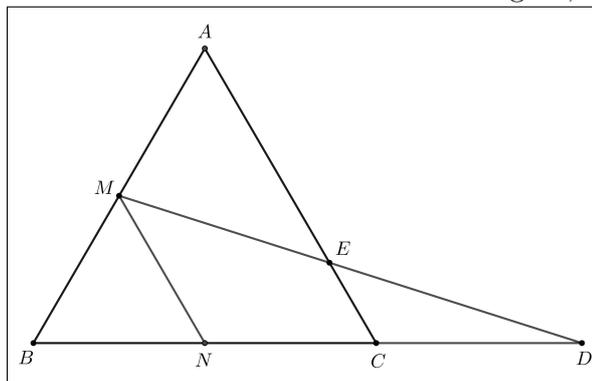
Figura 2.9: Problema 4.



Fonte: www.tutorbrasil.com.br (2015).

Solução 1. Seja N o ponto médio de \overline{BC} . Em virtude do Teorema 1.4, temos que o segmento \overline{MN} é paralelo ao segmento \overline{AC} ; daí, concluímos que os triângulos MND e ECD (da Figura 2.9) são semelhantes (pelo caso AA). Ademais, note que $MN = 5$, já que o triângulo BMN é equilátero.

Figura 2.10: Teorema da base média do triângulo, $MN \parallel AC$.



Fonte: Própria.

Da semelhança dos triângulos MND e ECD , temos

$$\frac{EC}{MN} = \frac{CD}{ND} \Rightarrow \frac{EC}{5} = \frac{6}{11} \Rightarrow EC = \frac{30}{11}.$$

Para o que falta, fazemos

$$AE = AC - EC = 10 - \frac{30}{11} = \frac{80}{11}.$$

■

Agora, utilizaremos um pouco de trigonometria para elaborarmos a próxima solução.

Solução 2. Começemos calculando a área do triângulo BDM :

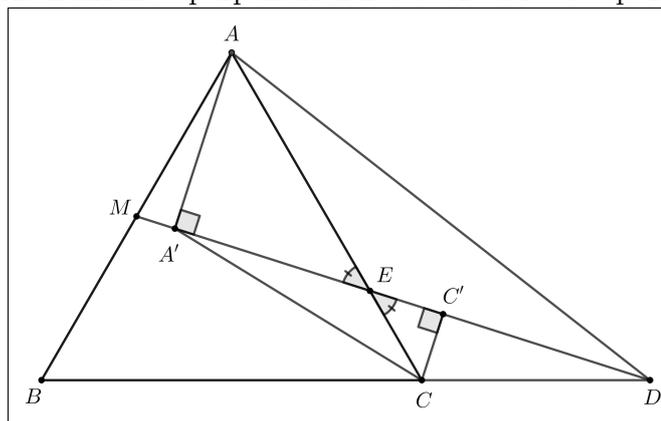
$$A_{BDM} = \frac{16 \times (5 \times \text{sen}60^\circ)}{2} = 20\sqrt{3}. \quad (2.10)$$

Evidentemente,

$$A_{CDM} = A_{BDM} - A_{BCM} = 20\sqrt{3} - \frac{10 \times (5 \times \text{sen}60^\circ)}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}. \quad (2.11)$$

Sejam A' e C' , respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de A e C sobre a reta \overleftrightarrow{DM} .

Figura 2.11: Baixando perpendiculares sobre a reta suporte de DM .



Fonte: Própria.

Uma vez que os triângulos AMD e BMD têm a mesma área (já que possuem bases e alturas, respectivamente, iguais), usando (2.10) e (2.11), temos

$$\frac{CC'}{AA'} = \frac{\frac{DM \times CC'}{2}}{\frac{DM \times AA'}{2}} = \frac{A_{CDM}}{A_{ADM}} = \frac{\frac{15\sqrt{3}}{2}}{20\sqrt{3}} = \frac{3}{8}. \quad (2.12)$$

Como os triângulos $AA'E$ e $CC'E$ são semelhantes (caso AA), usando (2.12), obtemos

$$\frac{EC}{AE} = \frac{CC'}{AA'} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{AE + EC}{AE} = \frac{3 + 8}{8} \Rightarrow \frac{10}{AE} = \frac{11}{8} \Rightarrow AE = \frac{80}{11}.$$

Agora, uma solução analítica será obtida com a introdução de um sistema de coordenadas cartesianas com origem em B , com \overline{BD} contido no semieixo positivo de Ox e com o triângulo BCA pertencendo ao semiplano determinado por Ox que contém o semieixo positivo de Oy . ■

Solução 3. Perceba que $A = (5, 5\sqrt{3})$, $C = (10, 0)$, $D = (16, 0)$ e $M = (5/2, 5\sqrt{3}/2)$. O coeficiente angular m de \overleftrightarrow{AC} é tal que $m = \text{tg}120^\circ = -\text{tg}60^\circ = -\sqrt{3}$. Daí, uma equação dessa reta é

$$y = \sqrt{3}(10 - x). \quad (2.13)$$

Por outro lado, o coeficiente angular de \overleftrightarrow{DM} é

$$\frac{0 - \frac{5\sqrt{3}}{2}}{16 - \frac{5}{2}} = -\frac{5\sqrt{3}}{27},$$

de maneira que uma equação de \overleftrightarrow{DM} é dada por

$$y = \frac{5\sqrt{3}}{27}(16 - x). \quad (2.14)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (2.13) e (2.14), vem

$$\sqrt{3}(10 - x) = \frac{5\sqrt{3}}{27}(16 - x) \Rightarrow \frac{16 - x}{10 - x} = \frac{27}{5},$$

de onde concluímos que $x = 95/11$. Agora, substituindo esse valor em (2.13), obtemos

$$y = \sqrt{3} \left(10 - \frac{95}{11} \right) = \frac{15\sqrt{3}}{11},$$

ou seja, $E = (95/11, 15\sqrt{3}/11)$. Finalmente, usando o Teorema 1.1, temos

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{\left(5 - \frac{95}{11}\right)^2 + \left(5\sqrt{3} - \frac{15\sqrt{3}}{11}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{40}{11}\right)^2 + \left(\frac{40\sqrt{3}}{11}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4 \times 40^2}{11^2}} \\ &= \frac{80}{11}. \end{aligned}$$

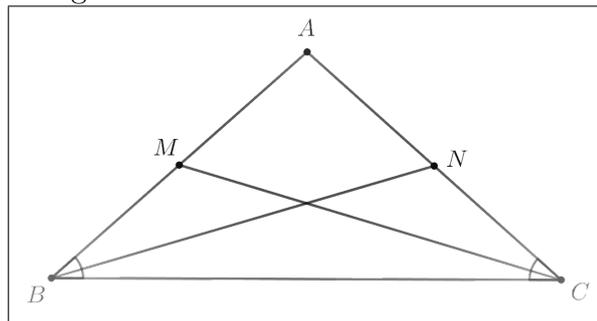
O próximo problema nos mostra que o não conhecimento de um teorema específico de geometria plana pode nos conduzir a soluções inventivas e um pouco mais elaboradas. No que segue, daremos três soluções para o seguinte.

2.5 Problema 5 (BAMO-Bay Area Mathematical Olympiad)

Problema 2.5. *Prove que, se duas medianas de um triângulo têm mesmo comprimento, então esse triângulo é isósceles.*

Antes de passarmos às soluções, ressaltamos que o recíproco do resultado acima também é verdadeiro, isto é, se um triângulo é isósceles, então ele possui duas medianas de mesmo comprimento. Com efeito, seja ABC um triângulo isósceles, com $AB = AC$.

Figura 2.12: Todo triângulo isósceles tem duas medianas de mesmo comprimento.



Fonte: www.bamo.org (2018).

Sejam \overline{BN} e \overline{CM} respectivamente, as medianas relativas aos lados \overline{AC} e \overline{AB} , como representado na Figura 2.12. É claro que $BM = CN$ e $med(\hat{A}BC) = med(\hat{A}CB)$. Assim, pelo caso de congruência LAL, concluímos que os triângulos BCN e CBM são congruentes e, em particular, temos $BN = CM$.

Solução 1. Suponha que as medianas \overline{BN} e \overline{CM} indicadas na Figura 2.12 tenham mesmo comprimento. Denotemos por G o baricentro de ABC . Note que, em virtude dos resultados estabelecidos na Seção 1.6,

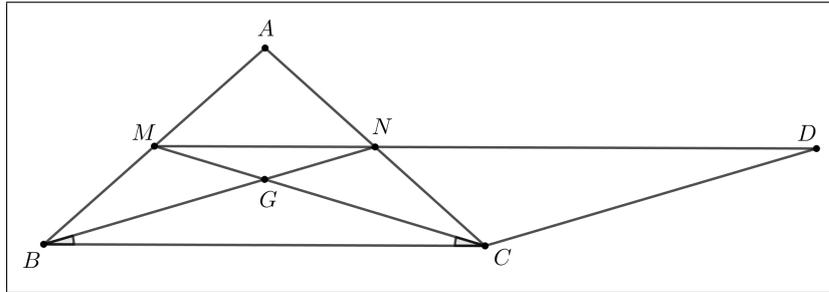
$$3GM = CM = BN = 3GN \Rightarrow GM = GN.$$

Com isso, também temos $BG = BN - GN = CM - GM = CG$. Daí, os triângulos BGM e CGN são congruentes (pelo caso LAL) e, em particular, $BM = CN$. Para o que falta, basta observar que $AB = 2BM = 2CN = AC$ e, portanto, ABC é isósceles. ■

Agora, vejamos uma solução criativa que não tira proveito dos resultados da Seção 1.6.

Solução 2. Inicialmente, trace por C a reta r paralela ao segmento \overline{BN} . Tome $D \in r$ tal que $BN = CD$, como mostra a Figura 2.13.

Figura 2.13: Exemplo de uma construção geométrica bem sucedida.



Fonte: Própria.

Evidentemente, $BCDN$ é um paralelogramo, já que \overline{BN} é paralelo a \overline{CD} e $BN = CD$. Ademais, os pontos M , N e D são colineares - aqui, a colinearidade é garantida pelo axioma das paralelas (mencionado na Seção 1.4), tendo em vista que os segmentos \overline{MN} e \overline{ND} são paralelos a \overline{BC} . Perceba também que $med(N\hat{B}C) = med(B\hat{N}M) = med(C\hat{D}N) = \alpha$. Além disso, $med(N\hat{M}C) = \alpha$, uma vez que o triângulo CDM é isósceles. Agora, é imediato que os triângulos MGN e BGC são ambos isósceles (onde G é o baricentro do triângulo ABC). Daí, decorre que os triângulos BGM e CGN são congruentes (pelo caso LAL), de modo que $BM = CN$. O resto é imediato. ■

O argumento exibido acima demandou certa engenhosidade - o que acontece, em geral, quando não dispomos de múltiplas ferramentas para atacarmos um problema. Para a próxima solução, utilizaremos “apenas” os Teoremas 1.1 e 1.5.

Solução 3. Fixemos um sistema de coordenadas cartesianas com origem em B , como mostra a Figura 2.14. Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $C = (x_C, 0)$.

Os pontos M e N são, respectivamente, tais que $M = (x_A/2, y_A/2)$ e $N = ((x_A + x_C)/2, y_A/2)$.

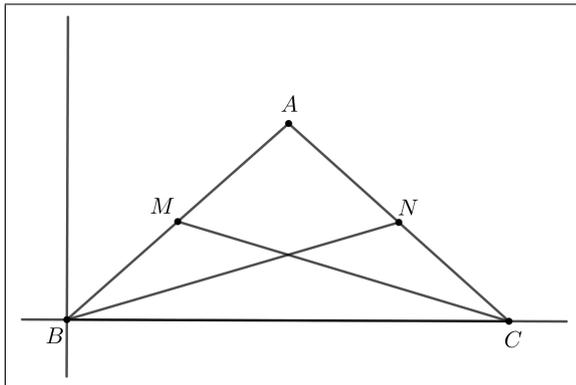
Como, por hipótese, $BN = CM$, temos

$$BN^2 = CM^2 \Rightarrow \left(\frac{x_A + x_C}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_A}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_A}{2} - x_C\right)^2 + \left(\frac{y_A}{2}\right)^2,$$

ou, equivalentemente,

$$0 = (x_A + x_C)^2 - (x_A - 2x_C)^2 = 3x_C(2x_A - x_C) \Rightarrow x_C = 2x_A.$$

Figura 2.14: Sistema de coordenadas cartesianas com origem em B .



Fonte: Própria.

Assim, podemos escrever

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (-y_A)^2} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = AB$$

e, portanto, ABC é isósceles. ■

Em face de nossa observação inicial e das soluções apresentadas, podemos dizer que um triângulo é isósceles se, e somente se, possui duas medianas de mesmo comprimento.

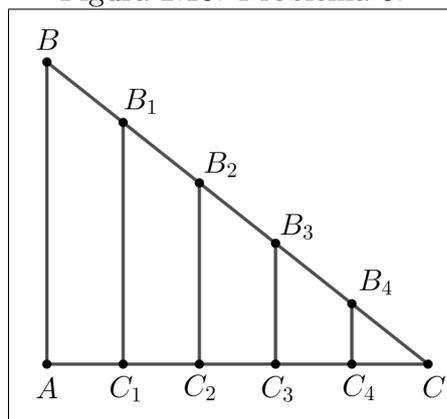
Os métodos do cálculo integral também podem ser eficazes na resolução de problemas elementares. Analisemos o seguinte.

2.6 Problema 6 (Professor Isaac Luís)

Problema 2.6. No triângulo retângulo ABC da Figura 2.15, reto em A , são traçados quatro segmentos paralelos ao lado \overline{AB} , de modo que o lado \overline{AC} é dividido em cinco segmentos congruentes. Pede-se:

- a) Determine a razão entre a área do trapézio $B_2C_2C_3B_3$ e a área do triângulo ABC .
- b) Mostre que os baricentros dos triângulos $ABC, B_1C_1C, B_2C_2C, B_3C_3C$ e B_4C_4C são colineares.

Figura 2.15: Problema 6.



Fonte: Professor Isaac Luís.

Solução 1. a) Denotemos por c o comprimento de cada um dos segmentos congruentes nos quais o lado \overline{AC} foi dividido. Claramente, os triângulos B_2C_2C e B_3C_3C são semelhantes ao triângulo ABC (pelo caso AA). Daí, o Teorema 1.9 nos fornece

$$\frac{A_{B_2C_2C}}{A_{ABC}} = \left(\frac{C_2C}{AC}\right)^2 = \left(\frac{3c}{5c}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2. \quad (2.15)$$

Analogamente, obtemos

$$\frac{A_{B_3C_3C}}{A_{ABC}} = \left(\frac{C_3C}{AC}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2. \quad (2.16)$$

De (2.15) e (2.16), vem

$$\frac{A_{B_2C_2C_3B_3}}{A_{ABC}} = \frac{A_{B_2C_2C} - A_{B_3C_3C}}{A_{ABC}} = \frac{A_{B_2C_2C}}{A_{ABC}} - \frac{A_{B_3C_3C}}{A_{ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{5},$$

e nada mais há a fazer.

Agora, vejamos como as estratégias do cálculo podem nos ajudar a resolver o mesmo problema. Para tanto, recorde que, de acordo com o segundo teorema fundamental do cálculo, se I é um intervalo, e f é uma função contínua em I , então, se F é uma primitiva de f em I , temos

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

quaisquer que sejam a e b em I . Além disso, se f é não negativa em $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx$ é a área sob o gráfico de f , de a até b (limitada pelo eixo Ox). Lembremos também que a notação

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

é comumente utilizada no tratamento das integrais definidas. ■

Solução 2. a) Fixemos um sistema de coordenadas com origem em A . Além disso, seja $b > 0$ a ordenada de B . A reta \overleftrightarrow{BC} tem equação segmentária $x/5c + y/b = 1$, ou, equivalentemente, $y = b - bx/5c$. A área do trapézio $B_2C_2C_3B_3$ corresponde à área sob o gráfico da função contínua $f(x) = b - bx/5c$, no intervalo $[2c, 3c]$, como

$$\int \left(b - \frac{b}{5c}x \right) dx = \int b dx - \int \left(\frac{b}{5c}x \right) dx = \left(bx - \frac{b}{10c}x^2 \right) + C,$$

segue-se, pelo segundo teorema fundamental do cálculo, que

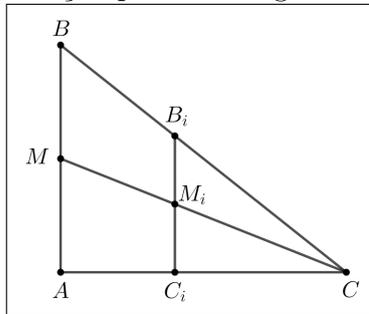
$$\begin{aligned} A_{B_2C_2C_3B_3} &= \int_{2c}^{3c} \left(b - \frac{b}{5c}x \right) dx = \left(bx - \frac{b}{10c}x^2 \right) \Big|_{2c}^{3c} \\ &= \left(3bc - \frac{9bc}{10} \right) - \left(2bc - \frac{4bc}{10} \right) \\ &= \frac{bc}{2} = \frac{AB \times \left(\frac{1}{5} \times AC \right)}{2} \\ &= \frac{1}{5} \times A_{ABC}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\frac{A_{B_2C_2C_3B_3}}{A_{ABC}} = \frac{1}{5}. \quad \blacksquare$$

Solução 1. b) Seja \overline{CM} a mediana relativa ao lado \overline{AB} do triângulo ABC . Além disso, denotemos por M_i , com $1 \leq i \leq 4$, o ponto de interseção das retas \overleftrightarrow{CM} e $\overleftrightarrow{B_iC_i}$ como indicado na Figura 2.16 (para o caso $i = 1$).

Figura 2.16: Uma solução puramente geométrica para o item b.



Fonte: Própria.

Mostremos que M_i é o ponto médio de $\overline{B_iC_i}$. Para tanto, notemos, inicialmente, que

$$\frac{B_iC}{BC} = \frac{C_iC}{AC}, \quad (2.17)$$

já que os triângulos B_iC_iC e ABC são semelhantes (pelo caso AA).

Agora, observe que os triângulos B_iM_iC e BMC também são semelhantes (também pelo caso AA) - e o mesmo ocorre com os triângulos M_iC_iC e MAC . Assim, usando estas semelhanças e a igualdade em (2.17), podemos escrever

$$\frac{B_iM_i}{BM} = \frac{B_iC}{BC} = \frac{C_iC}{AC} = \frac{M_iC_i}{MA} \Rightarrow B_iM_i = M_iC_i,$$

uma vez que M é o ponto médio de \overline{AB} . Logo, M_i é o ponto médio de $\overline{B_iC_i}$, como queríamos demonstrar - e, portanto, $\overline{CM_i}$ é mediana do triângulo B_iC_iC . Daí, se G é o baricentro de ABC , e G_i denota o baricentro do triângulo B_iC_iC , com $1 \leq i \leq 4$, temos que

$$\left(\{G\} \cup \bigcup_{i=1}^4 G_i \right) \subset \overleftrightarrow{CM},$$

o que encerra a prova. ■

Solução 2. b) Considere o sistema de coordenadas definido na Solução 2. a). Inicialmente, notemos que as coordenadas dos pontos C_i , com $1 \leq i \leq 4$, são da forma $(ic, 0)$. Ademais, como $B_i \in \overleftrightarrow{AC}$, a ordenada y_i do ponto B_i é tal que

$$\frac{ic}{5c} + \frac{y_i}{b} = 1 \Rightarrow y_i = b \left(1 - \frac{i}{5} \right).$$

Assim, o resultado estabelecido na Seção 1.6 nos garante que a abcissa do baricentro G_i do triângulo B_iC_iC é $2ic + 5c/3 = c(2i + 5)/3$; e, de modo análogo, concluímos que a ordenada de G_i é $b(1 - i/5)/3$. Observe também que o baricentro G do triângulo ABC é $G = (5c/3, b/3)$. Agora, é suficiente mostrarmos que os pontos G , G_j e G_k são colineares (com $1 \leq j < k \leq 4$). Como

$$\begin{vmatrix} \frac{5c}{3} & \frac{b}{3} & 1 \\ \frac{c(2j+5)}{3} & \frac{b}{3} \left(1 - \frac{j}{5} \right) & 1 \\ \frac{c(2k+5)}{3} & \frac{b}{3} \left(1 - \frac{k}{5} \right) & 1 \end{vmatrix} = \frac{b}{3} \cdot \frac{c}{3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2j+5 & 1 - \frac{j}{5} & 1 \\ 2k+5 & 1 - \frac{k}{5} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \frac{5c}{3} & \frac{b}{3} & 1 \\ \frac{c(2j+5)}{3} & \frac{b}{3} \left(1 - \frac{j}{5}\right) & 1 \\ \frac{c(2k+5)}{3} & \frac{b}{3} \left(1 - \frac{k}{5}\right) & 1 \end{vmatrix} &= \frac{bc}{9} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2j & -\frac{j}{5} & 0 \\ 2k & -\frac{k}{5} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{bc}{9jk} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2jk & 1 - \frac{jk}{5} & 0 \\ 2jk & 1 - \frac{jk}{5} & 0 \end{vmatrix} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

o resultado segue, em virtude do Corolário 1.7. ■

2.7 Duas Aplicações do Teorema de Viviani

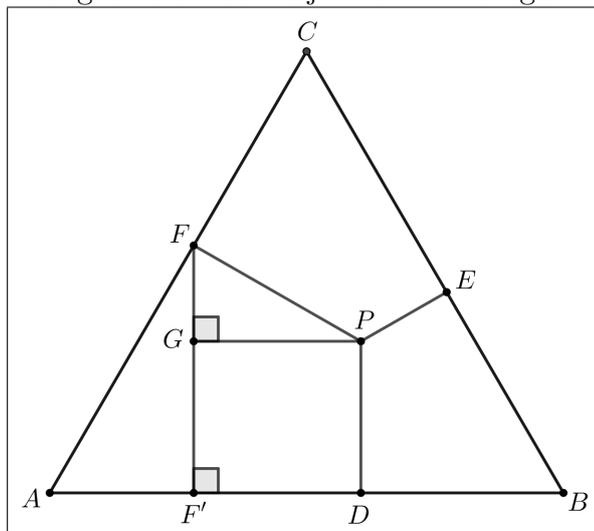
2.7.1 A Conjectura de Clough

O teorema de Viviani nos conduz a um corolário interessante - e há uma história ainda mais interessante por trás da descoberta desse corolário. Em 2003, durante uma aula de geometria, um estudante explorava o teorema de Viviani por meio da utilização de softwares matemáticos. Empiricamente, ele verificou que, se ABC é um triângulo equilátero, e P , um ponto em seu interior - e, além disso, D , E e F são os pés das perpendiculares baixadas de P sobre os lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente, então a soma $AD + BE + CF$ é constante. Na literatura especializada, o resultado acima é conhecido como conjectura de Clough. Evidentemente, existem várias demonstrações para essa “conjectura”, mas o nome atribuído à mesma é, provavelmente, uma consequência do insucesso do estudante na busca por uma justificativa rigorosa de sua afirmação. No que segue, apresentamos uma prova para esse resultado.

Corolário 2.7. (Conjectura de Clough) *Sejam ABC um triângulo equilátero de lado l e P , um ponto qualquer em seu interior. Se D, E e F são, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de P sobre os lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} , então $AD + BE + CF = \frac{3l}{2}$.*

Demonstração: Seja F' o pé da perpendicular baixada de F sobre o lado \overline{AB} . Trace por P a reta r paralela ao lado \overline{AB} , de modo que $r \cap \overline{FF'} = \{G\}$, como indicado na Figura 2.17.

Figura 2.17: A conjectura de Clough.



Fonte: Shirali (2012).

Note, inicialmente, que

$$\text{med}(\widehat{GFP}) = 180^\circ - [\text{med}(\widehat{AFF'}) + \text{med}(\widehat{PFC})] = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ.$$

Daí, nos triângulos GFP e AFF' , temos, respectivamente, $PG = PF \times \text{sen}60^\circ = PF\sqrt{3}/2$ e $AF' = AF \times \text{sen}30^\circ = (AF)/2 = (l - CF)/2$. Agora, podemos escrever

$$AD = AF' + F'D = AF' + PG = \frac{l - CF}{2} + \frac{PF\sqrt{3}}{2},$$

implicando que

$$2AD + CF = l + PF\sqrt{3}. \quad (2.18)$$

Utilizando construções geométricas análogas, obtemos as relações

$$2BE + AD = l + PD\sqrt{3} \quad (2.19)$$

$$2CF + BE = l + PE\sqrt{3} \quad (2.20)$$

Somando as igualdades (2.18), (2.19) e (2.20) membro a membro, e usando o Teorema de Viviani (Teorema 1.10), vem

$$3(AD + BE + CF) = 3l + \sqrt{3}(PD + PE + PF) = 3l + \sqrt{3} \times \frac{l\sqrt{3}}{2} = 3 \left(l + \frac{l}{2} \right),$$

o que nos fornece

$$AD + BE + CF = \frac{3l}{2},$$

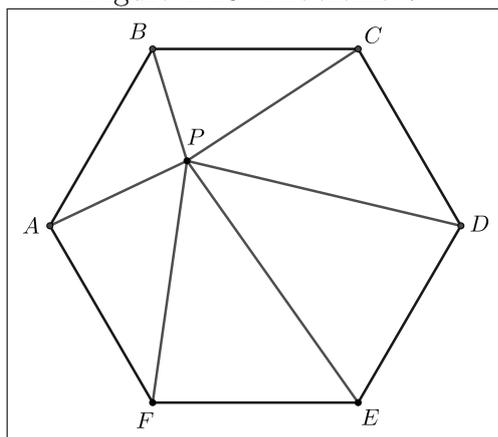
exatamente como queríamos. ■

Agora, vejamos um problema onde a utilização do Teorema 1.10 é decisiva.

2.7.2 Problema 7 (Olimpíada de Matemática da UNICAMP)

Problema 2.8. Na Figura 2.18, $ABCDEF$ é um hexágono regular e P , um ponto qualquer no interior desse hexágono. Mostre que a soma das áreas dos triângulos ABP , CDP e EFP é igual à soma das áreas dos triângulos BCP , DEP e AFP .

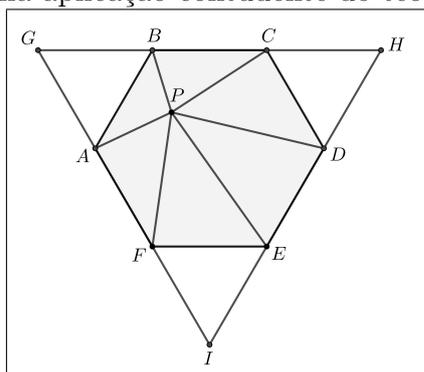
Figura 2.18: Problema 7.



Fonte: www.olimpiada.ime.unicamp.br (2010).

Solução. Sejam G, H e I , respectivamente, os pontos de interseção das retas suportes dos lados \overline{AF} , \overline{BC} e \overline{DE} , como indicado na Figura 2.19.

Figura 2.19: Uma aplicação contudente do teorema de Viviani.



Fonte: Própria.

Denotemos por l a medida do lado do hexágono. É fácil ver que o triângulo ABG é equilátero. De fato, $\widehat{med}(B\hat{A}G) = \widehat{med}(A\hat{B}G) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, e a conclusão é imediata. De modo similar, inferimos que os triângulos CDH e EFI também são equiláteros. Desse modo, o lado do triângulo equilátero GHI mede $3l$. Agora, sejam d_1, d_2 e d_3 , respectivamente, as distâncias de P aos lados \overline{GH} , \overline{HI} e \overline{GI} do triângulo GHI .

Pelo Teorema de Viviani, temos

$$d_1 + d_2 + d_3 = \frac{3l\sqrt{3}}{2}.$$

Por outro lado, a soma das áreas dos triângulos BCE , DEP e AFP corresponde a

$$\frac{ld_1}{2} + \frac{ld_2}{2} + \frac{ld_3}{2} = \frac{l}{2}(d_1 + d_2 + d_3) = 3 \times \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 3 \times \frac{1}{6} \times A_{ABCDEF},$$

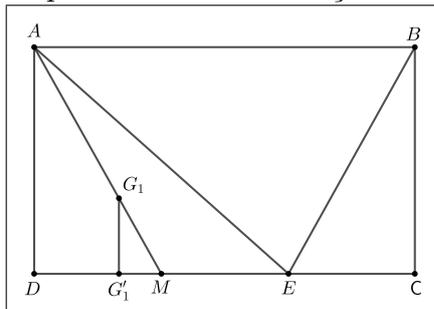
e a conclusão é imediata. ■

2.8 Problema 8 (Harvard-MIT mathematics tournament)

Problema 2.9. *Seja $ABCD$ um retângulo de área 1 e E um ponto sobre o lado CD . Qual é a área do triângulo formado pelos baricentros dos triângulos ABE , BCE e ADE ?*

Solução 1. Sejam G_1 , G_2 e G_3 , respectivamente, os baricentros dos triângulos ADE , BCE e ABE . Considere a Figura 2.20, na qual M e G'_1 representam, respectivamente, o ponto médio de \overline{DE} e a projeção de G_1 sobre \overline{CD} .

Figura 2.20: Os primeiros passos rumo à resolução de um problema desafiador.



Fonte: www.hmmt.co (2018).

Note que os triângulos $G_1G'_1M$ e ADM são semelhantes (pelo caso AA). Observe também que a razão de semelhança entre esses triângulos é

$$\frac{G_1M}{AM} = \frac{G_1M}{3G_1M} = \frac{1}{3}.$$

Daí, temos $G_1G'_1 = (AD)/3$ e $G'_1M = (DM)/3$. Além disso, segue-se que

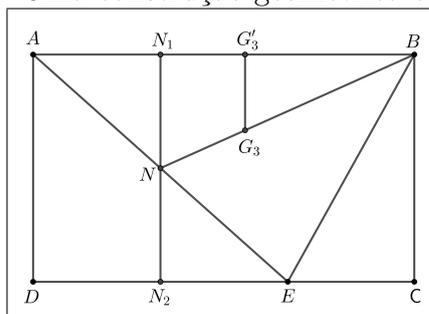
$$DG'_1 = DM - G'_1M = \frac{2}{3}DM = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times DE = \frac{1}{3}DE.$$

Agora, sendo R e G'_2 , respectivamente, o ponto médio de \overline{EC} e a projeção de G_2 sobre \overline{CD} , é possível deduzir, de modo absolutamente análogo ao que fizemos acima, que $G_2G'_2 = (AD)/3$ e $G'_2C = (EC)/3$. Uma vez que $\overline{G_1G'_1} // \overline{G_2G'_2}$ (pois ambos são perpendiculares ao segmento \overline{CD}) e $G_1G'_1 = (AD)/3 = G_2G'_2$, concluímos que $G_1G'_1G'_2G_2$ é um paralelogramo e, portanto, $\overline{G_1G_2}$ é paralelo a \overline{CD} . Além disso, como $DG'_1 = (DE)/3$ e $G'_2C = (EC)/3$, obtemos

$$G_1G_2 = CD - (DG'_1 + G'_2C) = CD - \frac{1}{3}(DE + EC) = CD - \frac{1}{3}CD = \frac{2}{3}CD. \quad (2.21)$$

Agora, sejam R e G'_3 , respectivamente o ponto médio de \overline{AE} e a projeção de G_3 sobre \overline{AB} . Tracemos por N uma paralela aos lados \overline{AD} e \overline{BC} do retângulo $ABCD$, obtendo a Figura 2.21.

Figura 2.21: Uma construção geométrica esclarecedora.



Fonte: Própria.

É fácil ver que, em virtude do Teorema 1.3 (veja também Corolário 1.4), $NN_2 = (AD)/2 = NN_1$. Conseqüentemente, como resultado da semelhança entre os triângulos $BG_3G'_3$ e BNN_1 (caso de semelhança AA),

$$G_3G'_3 = \frac{2}{3}NN_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times AD = \frac{1}{3}AD,$$

e assim, como $G_1G'_1 = (AD)/3$, inferimos que a altura h do triângulo $G_1G_2G_3$ é

$$h = AD - (G_1G'_1 + G_3G'_3) = AD - \frac{2}{3}AD = \frac{1}{3}AD. \quad (2.22)$$

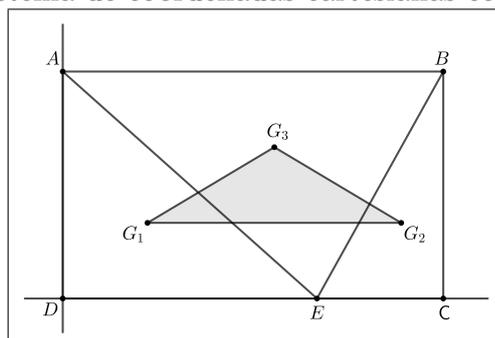
Finalmente, de (2.21) e (2.22), e do fato que $A_{ABCD} = 1$, obtemos

$$A_{G_1G_2G_3} = \frac{G_1G_2 \times h}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times (AD \times CD) = \frac{1}{9}.$$

■

Solução 2. Fixemos um sistema de coordenadas cartesianas com origem em D , como indicado na Figura 2.22.

Figura 2.22: Sistema de coordenadas cartesianas com origem em D .



Fonte: Própria.

Façamos $AB = CD = x_0$, $AD = BC = y_0$ e $E = (x_E, 0)$. Desse modo, $A = (0, y_0)$, $B = (x_0, y_0)$ e $C = (x_0, 0)$. Utilizando as coordenadas do baricentro (dada na Seção 1.6), a abcissa de G_1 é $x_E/3$; por outro lado, sua ordenada é $y_0/3$. De modo similar, concluímos que $G_2 = ((2x_0 + x_E)/3, y_0/3)$ e $G_3 = ((x_0 + x_E)/3, 2y_0/3)$. Calculando o determinante D , a seguir, temos

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} \frac{1}{3}x_E & \frac{1}{3}y_0 & 1 \\ \frac{1}{3}(2x_0 + x_E) & \frac{1}{3}y_0 & 1 \\ \frac{1}{3}(x_0 + x_E) & \frac{1}{3}2y_0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \begin{vmatrix} x_E & y_0 & 1 \\ 2x_0 + x_E & y_0 & 1 \\ x_0 + x_E & 2y_0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{9} \begin{vmatrix} x_E & y_0 & 1 \\ 2x_0 & 0 & 0 \\ x_0 & y_0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{9}x_0y_0 \\
 &= \frac{2}{9},
 \end{aligned}$$

já que $x_0y_0 = A_{ABCD} = 1$. Finalmente, usando a Proposição 1.6, concluímos que

$$A_{G_1G_2G_3} = \frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}.$$

■

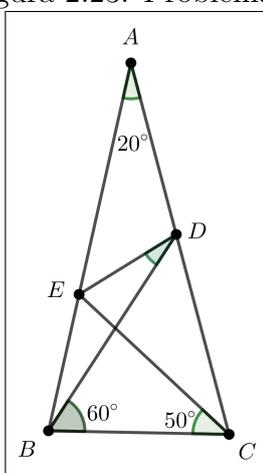
2.9 O triângulo de Langley

2.9.1 Problema 9

Problema 2.10. *O triângulo da Figura 2.23 é isósceles, com $AB = AC$ e tal que $\widehat{BAC} = 20^\circ$, $\widehat{DBC} = 60^\circ$ e $\widehat{ECB} = 50^\circ$. Determine a medida do ângulo \widehat{BDE} .*

Esse problema foi proposto pela primeira vez em 1922, numa publicação acadêmica britânica de educação matemática chamada *The mathematical gazette*. Trata-se de um problema bastante famoso, conhecido na literatura especializada como triângulo de Langley, em homenagem ao matemático inglês Edward Mann Langley. Daremos duas soluções para esse problema. A primeira delas, clássica, é devida ao matemático inglês James Mercer, e faz uso apenas de fatos geométricos elementares. Na segunda solução, empregaremos os métodos da geometria analítica em parceria com algumas fórmulas e identidades da trigonometria.

Figura 2.23: Problema 9.



Fonte: estudamelhor.blogspot.com (2015).

Solução 1. Tomemos o ponto F em \overline{AC} de modo que $med(\widehat{CBF}) = 20^\circ$. Em seguida, tracemos o segmento \overline{FE} , conforme indicado na Figura 2.24.

Note que o triângulo BCF é isósceles (de base \overline{CF}), já que $med(\widehat{BFC}) = med(\widehat{BCF}) = 80^\circ$. Daí, $BC = BF$. Por outro lado, o triângulo BCE também é isósceles (de base \overline{EC}), uma vez que $med(\widehat{BCE}) = med(\widehat{BEC}) = 50^\circ$. Portanto, $BE = BC = BF$, e o triângulo BEF é equilátero, pois $med(\widehat{EBF}) = 60^\circ$. Em particular, temos $EF = BF$. Como

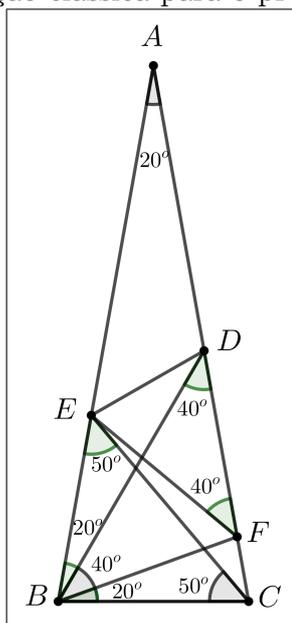
$$med(\widehat{BDC}) = 180^\circ - [med(\widehat{CBD}) + med(\widehat{BCD})] = 180^\circ - (60^\circ + 80^\circ) = 40^\circ,$$

concluimos que o triângulo BDF é isósceles (de base \overline{BD}) e, portanto, $FD = BF$. Agora, como $EF = BF$, segue que o triângulo DEF é isósceles (de base \overline{ED}), de maneira que

$$med(\widehat{BDE}) = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} - 40^\circ = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ.$$

■

Figura 2.24: Solução clássica para o problema de Langley.



Fonte: Própria.

Solução 2. Inicialmente, provaremos duas identidades trigonométricas:

$$\frac{\operatorname{tg}80^\circ}{\operatorname{tg}60^\circ + \operatorname{tg}80^\circ} = \cos40^\circ, \quad (2.23)$$

$$\frac{\sqrt{3}\cos40^\circ - \operatorname{sen}80^\circ}{\cos40^\circ - \cos80^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (2.24)$$

Note que

$$\frac{\operatorname{tg}80^\circ}{\operatorname{tg}60^\circ + \operatorname{tg}80^\circ} = \frac{\frac{\operatorname{sen}80^\circ}{\cos80^\circ}}{\frac{\operatorname{sen}60^\circ}{\cos60^\circ} + \frac{\operatorname{sen}80^\circ}{\cos80^\circ}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}80^\circ}{\cos80^\circ}}{\frac{\operatorname{sen}60^\circ\cos80^\circ + \operatorname{sen}80^\circ\cos60^\circ}{\cos60^\circ\cos80^\circ}}$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen}80^\circ}{\cos80^\circ}}{\frac{\operatorname{sen}(60^\circ + 80^\circ)}{\cos60^\circ\cos80^\circ}} = \frac{\operatorname{sen}80^\circ}{\cos80^\circ} \times \frac{\cos60^\circ\cos80^\circ}{\operatorname{sen}140^\circ}$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}40^\circ\cos40^\circ \times \frac{1}{2}}{\operatorname{sen}40^\circ}$$

$$= \cos40^\circ,$$

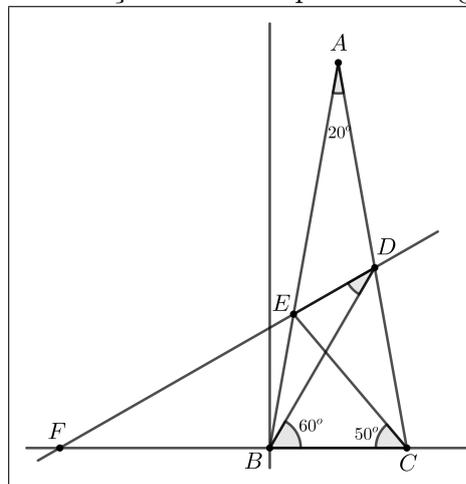
o que encerra a prova de (2.23). Para o que falta, perceba que podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{3}\cos 40^\circ - \operatorname{sen} 80^\circ}{\cos 40^\circ - \cos 80^\circ} &= \frac{2\operatorname{sen} 60^\circ \cos 40^\circ - 2\operatorname{sen} 40^\circ \cos 40^\circ}{-2\operatorname{sen} \left(\frac{40^\circ + 80^\circ}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{40^\circ - 80^\circ}{2} \right)} = \frac{2\cos 40^\circ (\operatorname{sen} 60^\circ - \operatorname{sen} 40^\circ)}{-2\operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen}(-20^\circ)} \\
 &= \frac{2\cos 40^\circ \left[2\operatorname{sen} \left(\frac{60^\circ - 40^\circ}{2} \right) \cos \left(\frac{60^\circ + 40^\circ}{2} \right) \right]}{2\operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 20^\circ} \\
 &= \frac{2\cos 40^\circ [2\operatorname{sen} 10^\circ \cos 50^\circ]}{2\operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{2\cos 40^\circ [2\cos 80^\circ \operatorname{sen} 40^\circ]}{2\operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 20^\circ} \\
 &= \frac{2\cos 80^\circ [2\operatorname{sen} 40^\circ \cos 40^\circ]}{2\operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{2\operatorname{sen} 80^\circ \cos 80^\circ}{2\operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 20^\circ} \\
 &= \frac{\operatorname{sen} 160^\circ}{\sqrt{3}\operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{\operatorname{sen} 20^\circ}{\sqrt{3}\operatorname{sen} 20^\circ} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3},
 \end{aligned}$$

o que prova (2.24).

Agora, fixemos um sistema de coordenadas cartesianas com origem em B , tal como na Figura 2.25. Além disso, seja F o ponto de interseção da reta \overleftrightarrow{DE} com os eixos das abscissas.

Figura 2.25: Uma solução analítica para o triângulo de Langley.



Fonte: Própria.

Sejam $(x_C, 0)$ as coordenadas de C no sistema de coordenadas fixado. Desde que o triângulo BCE é isósceles (de base \overline{EC}), temos $BE = BC = x_C$. Daí, é fácil ver que as coordenadas de E são

$$(x_C \cos 80^\circ, x_C \sin 80^\circ).$$

Também é evidente que uma equação para a reta \overleftrightarrow{BD} é

$$y = \operatorname{tg} 60^\circ x. \quad (2.25)$$

Agora, se α é o suplemento do ângulo $B\hat{C}A$, temos $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(B\hat{C}A) = -\operatorname{tg} 80^\circ$, de modo que uma equação para a reta \overleftrightarrow{AC} é

$$y = (-\operatorname{tg} 80^\circ)(x - x_C) = x_C \operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 80^\circ x. \quad (2.26)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (2.25) e (2.26), e usando (2.23), temos

$$\operatorname{tg} 60^\circ x = x_C \operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 80^\circ x \Rightarrow x = x_C \frac{\operatorname{tg} 80^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ} = x_C \cos 40^\circ.$$

Substituindo o valor de x encontrado acima em (2.25), obtemos $y = \operatorname{tg} 60^\circ (x_C \cos 40^\circ) = \sqrt{3} x_C \cos 40^\circ$ e, assim, as coordenadas de D são

$$(x_C \cos 40^\circ, \sqrt{3} x_C \cos 40^\circ).$$

Agora, note que o coeficiente angular m da reta \overleftrightarrow{DE} é $\operatorname{tg}(B\hat{F}D)$. Por outro lado, usando (2.24), temos

$$m = \frac{\sqrt{3} x_C \cos 40^\circ - x_C \sin 80^\circ}{x_C \cos 40^\circ - x_C \cos 80^\circ} = \frac{x_C (\sqrt{3} \cos 40^\circ - \sin 80^\circ)}{x_C (\cos 40^\circ - \cos 80^\circ)} = \frac{\sqrt{3} \cos 40^\circ - \sin 80^\circ}{\cos 40^\circ - \cos 80^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Assim, $\operatorname{tg}(B\hat{F}D) = \sqrt{3}/3$ e, conseqüentemente, $\operatorname{med}(B\hat{F}D) = 30^\circ$. Finalmente, o teorema do ângulo externo aplicado ao triângulo BFD nos fornece

$$\operatorname{med}(B\hat{D}E) = \operatorname{med}(C\hat{B}D) - \operatorname{med}(B\hat{F}D) = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

■

Considerações Finais

Atualmente, há uma (forçosa) tendência de se relacionar a matemática com o mundo real. Em tempos de ENEM, os materiais didáticos e, por conseguinte, o ambiente educacional, acabam seguindo essa tendência, de modo que o tempo dedicado à matemática pura em sala de aula é ínfimo - praticamente inexistente. As olimpíadas de matemática resgatam o rigor e a precisão que essa ciência exige. A aplicabilidade da mesma em situações do cotidiano é uma consequência natural de sua universalidade. Uma aula de matemática não é mais atrativa apenas por correlacionar teoremas com aplicações práticas. O mesmo resultado pode ser obtido, por exemplo, através da exploração do seu caráter multidisciplinar, isto é, por meio da exibição de problemas e suas múltiplas abordagens possíveis.

No presente trabalho tentamos resgatar o gosto pelo estudo da matemática pura, apresentando problemas de alto nível e suas respectivas soluções. As soluções exibidas, no entanto, são fundamentadas em ramos distintos da matemática, corroborando o aspecto multidisciplinar da mesma. Evidentemente, o material aqui contido objetiva, também, agregar novas abordagens e técnicas resolutivas ao espetacular universo das olimpíadas de matemática.

As ideias e teorias em matemática surgem de modo “natural”, isto é, quando um matemático trabalha em um problema, não há necessariamente um propósito em relacionar a situação estudada com o mundo real. A matemática é bela em si mesma e não carece de aplicações práticas para tornar-se mais interessante. Acreditamos que um estudo matemático rigoroso executado com dinamismo e criatividade desenvolve no estudante a fantástica habilidade de raciocinar logicamente, preparando-o para os desafios da vida, onde, cada vez mais, decisões catastróficas são tomadas fundamentadas apenas em critérios emocionais.

Referências

BAMO. Arquivo de problemas e soluções. Disponível em: <http://www.bamo.org/archives>. Acesso em: 25/05/2018.

BOULOS, P. **Cálculo Diferencial e Integral**, V. 1. São Paulo, Pearson Makron Books, 1999.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 7.ed. Vol. 9 - Geometria Plana. São Paulo: Atual, 1993.

HMMT (Harvard - MIT mathematics tournament). Problems. Disponível em: <https://www.hmmt.com>. Acesso em: 25/05/2018.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 7.ed. Vol. 7 - Geometria Analítica. São Paulo: Atual, 1993.

MUNIZ NETO, A.C. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

OBM, Sbm. Revista Eureka. Disponível em: <https://www.obm.org.br/revista-eureka/>. Acesso em: 20/05/2018.

PAIVA, Rui. Conversando sobre Matemática se estuda melhor. Disponível em: estuda-melhor.blogspot.com.br. Acesso em: 18/05/2018.

SHIRALI, S. **The fine art of Euclidean Geometry**: Viviani's theorem ... and a cousin. At right angles, V.1, N°. 2, December 2012.