UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

JONATHAS RAPOSO SOARES VICTÓRIO

ABORDAGENS DO ORIGAMI E DOBRADURAS NO ENSINO DE GEOMETRIA

Rio de Janeiro – RJ
Agosto de 2018

JONATHAS RAPOSO SOARES VICTÓRIO

ABORDAGENS DO ORIGAMI E DOBRADURAS NO ENSINO DE GEOMETRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio de Janeiro como requisito final para obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Nedir do Espirito Santo.

Rio de Janeiro
2018

Rio de Janeiro - RJ
2018

CIP - Catalogação na Publicação

V646a

Victório, Jonathas Raposo Soares
Abordagens do Origami e Dobraduras no Ensino de Geometria / Jonathas Raposo Soares Victório. -- Rio de Janeiro, 2018.
60 f.

Orientador: Nedir do Espírito Santo.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2018.

1. Matemática - Estudo e ensino - Teses. 2. Origami. I. Espírito Santo, Nedir do, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

ABORDAGENS DO ORIGAMI E DOBRADURAS NO ENSINO DE GEOMETRIA

JONATHAS RAPOSO SOARES VICTORIO

ORIENTADORA: NEDIR DO ESPÍRITO SANTO

Dissertação submetida ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –PROFMAT- da universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ – como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Aprovado por:

Nedir do Espírito Santo

Nedir do Espírito Santo – IM/UFRJ (orientadora)

MMLeal

Marisa Beatriz Bezerra Leal – IM/UFRJ

Aline Maurício Barbosa

Aline Maurício Barbosa - UFRRJ

DEDICATÓRIA

É com imenso prazer que dedico este trabalho à minha família: Minha esposa Janaina de Oliveira Victório, minha mãe Adélia Raposo Soares Victório, meu pai João Machado Victório, que quando ainda presente nesta vida fora também professor e mostrou-me o amor que devemos ter pela profissão que abraçamos e em especial ao grande amor de minha vida, meu filho Cauã, fonte de motivação para que eu pensasse em levar até o professor da Educação Básica a exploração de dobraduras e Origami no ensino de Geometria.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha professora orientadora Nedir do Espírito Santo, por ter me forçado a fazer um trabalho criativo e fugindo das mesmices, pelas sugestões apresentadas e por me passar calma em momentos de desânimo, pois sem a sua orientação, o trabalho não teria o toque inovador e fruto de uma larga pesquisa na área das dobraduras, Geometria e no campo da teoria de Ensino Aprendizagem.

RESUMO

Neste trabalho abordamos o Origami no processo de ensino-aprendizagem de propriedades da geometria, explorando os fundamentos das construções das dobraduras tendo como objetivo contribuir para o enriquecimento da formação do professor da Educação Básica na prática em sala de aula. Apresentamos propostas de atividades fundamentadas no modelo de ensino de geometria de Van Hiele, na teoria de ensino-aprendizagem de Vigotsky, que aborda principalmente a interação e mediação no processo do ensino-aprendizagem, e considerações de Glen Doman sobre o desenvolvimento lógico da criança antes da idade escolar.

Palavras-Chave: Origami. Lúdico. Ensino-aprendizagem de Geometria. Sala de aula.

ABSTRACT

In this work we approach Origami in the teaching-learning process of geometry properties, exploring the fundamentals of the folding constructions with the objective of contributing to the enrichment of the teacher training of Basic Education in classroom practice. We present proposals for activities based on the Van Hiele geometry teaching model in Vygotsky's teaching-learning theory, which mainly addresses interaction and mediation in the teaching-learning process, and Glen Doman's considerations on the child's prior development of school age.

Keywords: Origami. Ludic. Teaching- Geometry learning. Classroom.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O que esperar do origami inserido na escola? Vários trabalhos estão disponíveis na mídia sobre a aplicação do origami no ensino de matemática evidenciando que já faz muito tempo que deixou de ser apenas uma forma de distrair as crianças mais inquietas e fazer barquinhos, aviões e animais de papel. Destacamos como exemplos as seguintes obras: Explorando Geometria com Origami, CAVACAMI, FURUYA (2017) , Explorando o Ensino de Geometria, DRUCK (2009) e Vendo e Entendendo Poliedros, KALEFF (2003), as quais trabalham dobraduras e Origami voltados para o ensino de Geometria. Nos indagamos sobre o momento adequado para introdução do origami nas atividades da criança com a família e/ou na escola: de que forma pais e escolas podem contribuir, num trabalho conjunto, para o desenvolvimento da matemática nas crianças? Na medida do possível, as perguntas acima serão respondidas não por nós, mas por autoridades na área.

Neste trabalho apresentamos propostas de atividades com origami que propiciem ao educador explorar as vivências das crianças, em cada nível de aprendizado, embasadas em três pilares teóricos: o modelo de ensino de geometria de Van Hiele que é uma forma de construção de resultados geométricos passando por níveis de pensamento do mais simples ao mais complexo; a teoria de ensino-aprendizagem de Vigotsky que aborda principalmente a interação e mediação nos processo do ensino-aprendizagem; e os estudos de Glen Doman, em que, para haver um resultado satisfatório, faz-se imprescindível que o cérebro grave o que foi ensinado e, para tanto, é necessário o estímulo auditivo e visual adequado.

A proposta pedagógica da utilização de dobraduras tem como objetivo o ensino de Matemática, em particular o de Geometria, de forma lúdica e educativa, com recortes e dobras nas folhas de ofício ou papel Color Set, explorando conceitos da geometria plana e espacial.

O princípio básico do trabalho está na teoria de Vigotsky (VIGOTSKY, 1991) em que o desenvolvimento humano não acontece por fatores isolados e sim é o resultado de sua interação e trocas com o meio durante sua vida, como nos ensina Vygotsky "... aprendizado das crianças começa muito antes delas frequentarem a escola." (VIGOTSKY, 1991, p.56).

De acordo com Vigotsky (1991) qualquer situação de aprendizado com a qual a criança se defronta na escola tem sempre uma história prévia. Ele nos dá exemplo de crianças que começam a estudar aritmética na escola, mas muito antes já tiveram alguma experiência com quantidades e aprenderam a lidar com operações de divisão, adição, subtração, e determinação de tamanho em fase pré-escolar. Conclui então que as crianças têm sua própria aritmética.

Quanto ao modelo de Van Hiele nele são considerados níveis de desenvolvimento do pensamento para o aprendizado da geometria e muitas vezes, o fracasso no processo de ensino-aprendizagem é consequência do pulo de uma ou mais níveis no processo. Em (VAN HIELE,1957) é discutido, dentre outros, o processo de avaliação do aprendizado. Em geral, o aluno não atinge o nível de compreensão que o torne capaz para resolver novos problemas e as avaliações medem apenas o que o aluno não sabe sem aferir o nível de compreensão do conteúdo que o aluno atingiu. Destacamos o que nos diz o próprio Van Hiele sobre testes ou provas comumente aplicadas em instituições de ensino.

> El resultado es que tanto exámenes como tests escritos tienden a empujar a los alumnos hacia comprensión algorítmica en vez de guiarlos hacia las mucho más valiosas formas superiores de pensamiento(VAN HIELE, 1957, p.145).

Que traduzimos

> O resultado é que, tanto provas como os testes escritos, tendem a conduzir os alunos para compreensão algorítmica em vez de orientá-los para as formas superiores muito mais valiosas de pensando (VAN HIELE, 1957, p.145).

Uma alternativa para que os testes ou provas cumpram um papel pedagógico é que os mesmos abordem todos os tópicos dados pelo professor no bimestre e o aluno resolva o maior numero possível de questões, sem a preocupação com a pontuação e o problema de deixar questões em branco. Desta forma o teste servirá como parâmetro para medir o nivel de pensamento em que se encontra o aluno e teoricamente servirá de apoio ao professor para elaboração das atividades posteriores.Tal maneira de trabalhar apresenta alguns incoveinientes: os alunos tendem a não fazer com seriedade um teste que não valha nota, querem fazer tudo, mesmo que de qualquer maneira e não deixar nada em branco, mascarando assim o que sabem, alguns ainda pensam em colar, sem contar com o maior dos inconvenientes que é a correção por parte do professor de provas diferentes, pois cada qual fez ou deveria fazer apenas o que sabe.Por tudo isto, ainda vimos com vantagem a aplicação de atividades elaboradas seguindo o modelo de Van Hiele e as discussões em grupos de trabalho, onde os alunos são levados a interagir por meio de perguntas devidamente elaboradas pelo professor.

Os caminhos entre os níveis de pensamento do concreto ao abstrato devem ser percorridos sem saltar de um nível ao outro e desta forma o aluno será capaz de em qualquer momento de reverter o processo, indo do abstrato ao concreto.

> Esta sucessão de eventos é o que precisamente necessitamos na geometria, como a rede de relacionamentos é, realmente, o objetivo para o qual estamos nos dirigindo em nosso programa. No entanto, como professores, devemos sempre lembrar que esta rede de relacionamentos deve aparecer durante o processo de aprendizagem e de situações concretas. Só então podemos esperar pelo desenvolvimento de uma estrutura reversível, isto é, uma estrutura na qual as crianças façam seu caminho de volta de relacionamentos abstratos para situações concretas. Isto é o que precisamos se nosso objetivo é uma aplicação produtiva do conhecimento (VAN HIELE, 1957, p.144).

As propostas de atividades de geometria com recurso da dobradura, utilizando a técnica de Origami, seguem os axiomas desenvolvidos por Huzita-Hatori, que são regras básicas que norteiam qualquer construção feita no papel e são exatamente sete. Uma discussão sobre a completude e a prova de que são apenas sete axiomas é feita pelo Físico Lang (LANG, 2018).

Consideramos também os seguintes componentes básicos para o ensino de Matemática, segundo (LIMA, 1999): manipulação, conceituação e aplicação, norteadores do último capítulo destinado aos exercícios propostos, buscando um caminho construtivo, junto com raciocínio indutivo, fortalecendo assim o campo das conjecturas feitas pelos alunos. Quanto a esses três componentes, eles estão adaptados ao universo do origami como segue.

Manipulação: os alunos são levados a todo instante a manipular o material (folha fornecida com dobras já feitas). Dobram e desdobram o papel e criam hábitos mecânicos como o de achar o ponto médio de um segmento, marcar a sua mediatriz, fazer a bissetriz de um ângulo, perpendiculares e paralelas a retas dadas e muitas outras dobras memorizadas, que fazem com que os alunos encurtem o tempo. Estas manipulações são tão importantes quanto aos conceitos básicos da Matemática: domínio das 4 operações básicas; adição, subtração, multiplicação e divisão.

> A manipulação, de caráter principalmente (mas não exclusivamente) algébrico, está para o ensino e aprendizado de matemática assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a música ou mesmo com o repetido treinamento dos chamados fundamentos está para certos esportes como o tênis e o voleibol". (LIMA, 2002, p.140).

Conceituação: ao realizar os exercícios propostos em sua maioria, os alunos necessitam de alguns pré-requisitos (conhecimentos prévios de definições e resultados matemáticos). Desta forma, são levados por meio de perguntas a percorrer o vasto caminho da matemática dedutiva.

> A conceituação compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões são sempre provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e fatos sob diferentes formas e termos (LIMA, 2002, p.140).

Aplicação: a dobradura é vista, dentro da área de matemática, como um recurso a mais para o professor tornar as aulas significativas.

Ressaltamos que esta forma de trabalhar com a manipulação do material concreto foi motivada pelas aulas que o autor, enquanto aluno,teve na Universidade Federal Fluminense com a professora Ana Kallef e também as brincadeiras educativas com o filho, quando o mesmo tinha apenas 3 anos. Este trabalho visa auxiliar o professor na tarefa do ensino de geometria em sala de aula. Para alcançar este objetivo, sugerimos ao professor trabalhar utilizando o modelo de ensino de geometria de Van Hiele, mediar a manipulação de dobraduras e construir juntamente com o aluno os alicerces matemáticos para o entendimento de resultados importantes na área de geometria.

Em relação às crianças, estudamos o método de Glen Doman, o qual utiliza o recurso dos chamados Flash Cards (cartões plastificados com palavras escritas em letras vermelhas e grandes) que devem ser lidas em voz alta pelo adulto para estimular o cognitivo dos recém-nascidos ou crianças. Na realidade, segundo Doman o cérebro grava qualquer informação com facilidade, desde que o objeto de estudo chame atenção. Segundo ele, a fase de zero a 6 anos é a melhor para que a criança aprenda mais de uma língua, iniciando inclusive os estudos de Matemática, o que vai ao encontro da teoria de ensino-aprendizagem de Vigotsky.

Baseados neste fato, propomos aos educadores da Educação Infantil estimularem de forma eficiente o cérebro de bebês por meio de móbiles geométricos, que serão elaborados pela técnica do Origami. No Brasil, uma grande defensora de Glen Doman é Kátia Xavier de Azevedo, que criou o chamado Aletramento Materno (adaptação do método Doman para a área de educação).

> Se você ensinar seu bebê a ler, lhe der conhecimento enciclopédico e ensinar-lhe Matemática enquanto bem novinho, você o terá presenteado com o amor pela Matemática que ele vai continuar a alimentar pelo resto da vida; uma vantagem em

dominar assuntos relacionados;uma inteligência e capacidades maiores e aumento de seu crescimento cerebral.(DOMAN,G.;DOMAN,J, 1994, p. 52)

Segundo Glen e Janet Doman(1994), subestima-se demais a capacidade de aprendizagem que uma criança bem nova, ainda fora da pretensa idade escolar, tem para formar estruturas lógicas, mesmo que ainda informais. Na maioria das vezes somos levados a concluir, apressadamente, que ela é apenas uma mera memorizadora. Nada mais errado e insensato, pois se isto fosse verdade, nenhuma estrutura lógica deveria haver no pensamento dela, mas os fatos ocorridos e observados no dia a dia nos mostram o contrário. Mesmo cometendo um erro do ponto de vista da língua portuguesa, os pequenos acertam quando utilizam o raciocínio lógico e observam uma lei de formação para muitas palavras em Português. Este erro fantástico deveria ser observado melhor por professores e educadores. Vejamos, então, a que erro estamos nos referindo:

> Uma criança de três anos olha para fora da janela e diz “Aí vem o correieiro”. Quem? Nós perguntamos. O correieiro. Nós olhamos para fora e vemos o carteiro. Nós achamos graça do erro da criança e dizemos para ela que ele não se chama correieiro, mas sim carteiro. E esquecemos o assunto. Suponhamos que ao invés disso, nós perguntássemos onde foi que essa criança arrumou a palavra correieiro? Certamente nenhum adulto lhe ensinou a dizer correieiro. Onde foi então que ela a encontrou? Eu tenho pensado nisso há 25 anos e estou convencido de que só há uma possibilidade. Este garotinho de três anos deve ter revisto seu idioma e chegado à conclusão de que existem certas palavras como cabelo, costura, verdura, etc, que quando acrescido do sufixo eiro, tornam-se cabeleireiro, costureiro, verdureiro e assim por diante.(Doman,G.;Doma**n,** J,1994 p.53)

Explorando essas observações sobre o desenvolvimento lógico da criança, propomos a realização de atividades com o origami na Educação Infantil, atendendo as recomendações quando à adequação do ambiente para a realização de atividades, conforme nos orienta Doman

> Proporcione um ambiente livre de distrações visuais, auditivas e táteis. A maioria dos lares não é um lugar quieto. No entanto, é possível diminuir o nível de caos na sua casa e para o bem do bebê é prudente fazê-lo. Desligue a televisão, o rádio, e a vitrola quando estiver ensinando. Crie um local livre da confusão dos brinquedos, roupas e outras coisas da casa. Este cantinho será a sua principal área de ensino.(DOMAN,G.; DOMAN, J , 1994, p.105)

Ainda, segundo Glen e Janet Doman(1994), o ensino de Matemática deve ser realizado pelo que há de fato: quando um pai fala em alto e bom som *dois*, por exemplo, o adulto pensa no símbolo 2, mas uma criança vê com facilidade a realidade que pode ser dois bonecos ou dois objetos quaisquer que a criança esteja manipulando. No caso de nossa proposta dois objetos feitos com a técnica do origami.

Por exemplo, no primeiro momento apresentaremos dois cubos e apenas falaremos dois, depois mostramos dois tetraedros e falamos dois. Em um segundo momento mostraremos os cubos e falamos dois cubos, o mesmo acontecendo para os tetraedros. Tomamos como exemplo a quantidade dois, mas é claro que isso deve prosseguir de maneira gradativa, conforme for verificando a hora de avançar com 3, 4 e assim por diante. Desta forma a criança começa a reconhecer quantidades e aprende, desde cedo, o nome das formas geométricas. Chamamos esta fase em nosso trabalho de Origami em casa. Sugerimos que uma semana antes de entrar na creche com idade mínima de um ano, a instituição dê uma oficina explicando para os pais interessados como podem brincar com seus filhos em casa de forma a auxiliar no ensino que será oferecido pela creche e com isto tornarem-se em verdadeiros parceiros da escola.

Elaboramos este trabalho com os seguintes objetivos:

Objetivo geral.

Contribuir para a formação do aluno da Licenciatura em Matemática no que concerne à prática como componente curricular.

Objetivos específicos.

Apresentar ao futuro professor da Educação Básica

- elementos sobre a importância do lúdico no processo de ensino aprendizagem, segundo Vygotsky;
- elementos sobre as etapas de desenvolvimento do aluno no aprendizado da Geometria, segundo teoria de Van Hielle;
- atividades com dobraduras como recurso para o ensino de conceitos e propriedades da Geometria Euclidiana na Educação Básica, seguindo etapas de acordo com a Teoria de Van Hiele;
- os fundamentos das construções de origamis e propostas de utilização destes como recurso lúdico para fixação de conceitos da Geometria Euclidiana.

Apresentamos o trabalho em seis capítulos, sendo o primeiro esta introdução. No segundo apresentamos elementos básicos do Origami e seus axiomas. No terceiro e quarto capítulos apresentamos fundamentos para as atividades propostas, contento, resumidamente, elementos da teoria de Van Hiele e Vygotsky respectivamente. O quinto capítulo contém as propostas de atividades com dobraduras e construção de Origamis na escola. No sexto capítulo abordamos alguns pontos da teoria de Glenn Doman e proposta de utilização de Origamis para desenvolvimento do potencial humano, segundo Glenn Doman. Continuamos com a apresentação das considerações finais, referências e anexamos ao trabalho um conjunto de mestres do Origami.

2. ORIGAMI

Neste capítulo apresentamos um breve histórico do origami, sua possível origem, seu desenvolvimento e o momento a partir do qual ele foi introduzido na área educacional. As informações históricas contidas nele são baseadas em Kanega e Imamura(2002) e também de sites que tratam da cultura japonesa: http://mundo-nipo.com e http://www.kamiarte.com.br.

2.1 BREVE HISTÓRIA

A palavra "origami" surgiu a partir da junção do verbo "Oru" (dobrar) com o substantivo "Kami" (papel), sendo conhecida como "arte de dobrar o papel". Apesar de a palavra ter origem Japonesa, Kanega e Imamura(2002) afirmam que suas técnicas foram introduzidas no Japão, aproximadamente, no século VI d. C, quando um Monge Budista Chinês levou o método de fabricação do papel ao país.

Dentre os objetos produzidos com a técnica do Origami destaca-se o Tsuru, conhecido como o representante do Origami Japonês.

Figura 1: Tsuru ou Grou
Fonte:http://mundo-nipo.com/cultura-japonesa/mitos-e-lendas/02/10/2012/tsuru-a-ave-sagrada-da-longevidade/<acesso em 07/10/2018>

Segundo o site http://mundo-nipo.com/cultura-japonesa/mitos-e-lendas/02/10/2012/tsuru-a-ave-sagrada-da-longevidade/<acesso em 07/10/2018> Tsuru é o origami mais famoso que existe. É muito difícil uma pessoa que conheça pouquíssimo de origami e nunca tenha ouvido falar do Tsuru. O que poucos sabem é que ele é uma ave chamada Grou (Figura 1). A beleza deste pássaro é considerada sagrada pelos japoneses e há a crença de que represente a longevidade, pois sua expectativa de vida segundo a mitologia japonesa e de 1000 anos. Talvez venha daí a crença de que um doente pode se curar ao dobrar 1000 Tsurus ou alguém fazer isto por ele com muita fé.

Até pouco tempo atrás era comum pendurar vários desses Grous no teto para distrair os bebês ou nos templos religiosos para os pedidos se realizarem-se.

Com o passar do tempo, a dimensão da arte não se limitou ao Japão e muito menos à China, o seu provável país de origem. A cultura de dobrar papel foi disseminada em diversos lugares e nos dias de hoje não está limitada apenas à parte artística e vem sendo estudada por cientistas. Atualmente, uma das grandes autoridades no assunto é o Físico Robert Lang.

Figura 2: Móbile de Tsurus em templo religioso

Fonte: http://mundo-nipo.com/cultura-japonesa/mitos-e-lendas/02/10/2012/tsuru-a-ave-sagrada-da-longevidade/<acesso em 07/10/2018>

Já na área educacional, o educador alemão Friedrich Froebel(1782-1852), foi responsável pelo início do uso das dobraduras no ensino, introduzindo estas técnicas nas atividades pré-escolares em 1837. Todas as informações a respeito do educador e o modo como descreve as dobras em estágios foram extraídas da seguinte fonte: https://froebel-museum.de/pages/en/friedrich-froebel.php?lang=EM - acesso 07/10/18.

Figura 3. Friedrich Froebel (1782-1852)
Fonte: https:/froebel-museum.de/pages/em/Friedrich-froebel.php?

Esse educador descreveu as dobras, dividindo-se em três estágios:

1) Dobras de verdade. Neste estágio as crianças exploram o papel de modo autônomo e descobrem por meio de dobras aspectos da geometria Euclidiana.

2) Dobras da vida. Este estágio valoriza a memorização de dobras tradicionais e dá relevância à construção de animais e plantas.

3) Dobras de beleza. Neste estágio o objetivo é incentivar a criatividade das crianças e relacioná-la com a arte. É pedido às crianças que criem sua própria obra de arte por meio de dobras originais, isto é, serão inventadas as dobraduras por elas.

Ficam caracterizadas claramente duas correntes de origami: a Oriental e a Ocidental. Apesar de por volta de 1958 já haver esta divisão, ela só ficou mais clara nos anos 80 quando o computador fica mais presente no mundo.

> Lá, em 1958, Lilian Oppenheimer, uma grande entusiasta do origami fundou o The Origami Center New York e podemos dizer que duas vertentes de origamistas surgiram: a da escola oriental mais voltada para o exercício artístico e a escola ocidental, praticada por matemáticos, arquitetos e engenheiros que usam o origami como uma ferramenta de trabalho acadêmico. Esses origamistas perseguem a exatidão anatômica da forma e das proporções recorrendo a processos matemáticos, técnicas geométricas de desenho e recursos computacionais.(HAYASAKA; NICHIDA, 2018)

Oriental: caracteriza-se pela utilização de poucas dobras e não há preocupação quanto a cálculo exato e perfeição. Filósofos e artistas adotaram esta corrente.

Ocidental: em contraste à primeira corrente, aqui se valorizam cálculos e proporções exatas, técnicas geométricas e busca-se a perfeição das dobras. Para tanto, é utilizado o computador como ferramenta quase que indispensável. Foi adotada, principalmente, por matemáticos, físicos e engenheiros.

De 24 de outubro de 1970 a 5 de abril de 1971, a profª. Koda deu aulas de Origami na TV Cultura, canal 2.

Figura 4: aula da professora Yachio Koda
Fonte: <http://www.kamiarte.com.br/> acessado em 07/10/2018

No Brasil, na década de 60, a figura marcante que utilizou o origami no ensino fundamental foi professora Yachiyo Koda.(Vide Figura 4)

2.2 TIPOS DE ORIGAMI

O origami é dito tradicional quando o papel a ser dobrado é um quadrado e não é admitido em momento algum seu corte e uso de cola. Ao dobrarmos, no final, podemos obter tanto figuras planas como figuras tridimensionais (em geral são tridimensionais). Nos dias de hoje, com o desenvolvimento da arte da dobradura e sua finalidade, passamos a ter variações do origami tradicional.

Na Figura 5 consta um exemplo de Origami Tradicional simples, o famoso barquinho.

Figura 5 - Barquinho
Fonte: http://artesanatobrasil.net/barquinho-de-papel-porta-bombom-doces-pipocas-festa-junina/<acessado em 07/10/2018>

O origami é dito modular quando é feito por módulos ou peças. Na Figura 6 mostramos o Cubo de Senobe, formado pelo encaixe de seis peças em que, cada peça, é formada de dobraduras do quadrado básico.

Figura 6: Cubo Sonobe – origami modular de 6 peças.
Fonte:https://www.youtube.com/watch?v=WasvUFXmACk

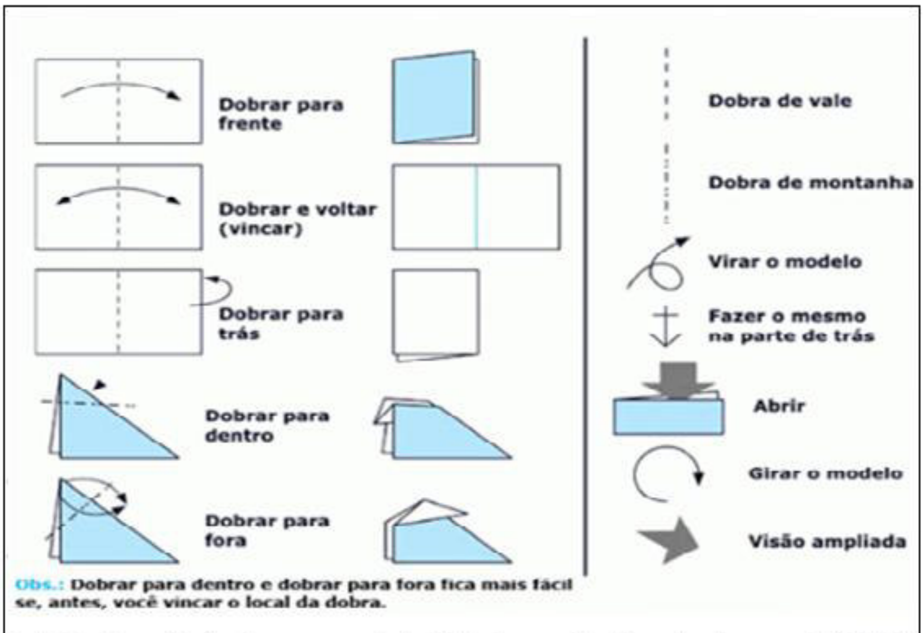
Figura 7: Buque de flores - origami composto.
Fonte: https://www.elo7.com.br/mini-buque-flores-de-trevo-20-flores/dp/3B2A49

O origami é dito composto quando é modular e admite uso de cola. Nesse caso é feito, com vários módulos e permite o uso da cola (Figura 7).

2.3 SÍMBOLOS UNIVERSAIS DO ORIGAMI

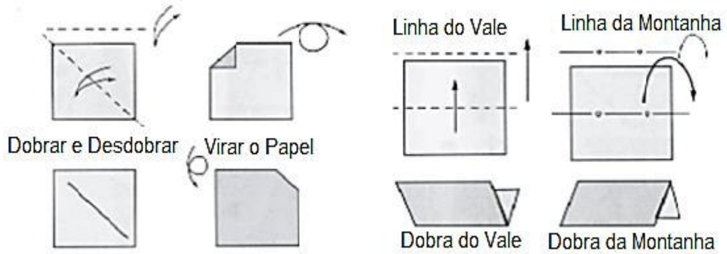
Para realizarmos as dobraduras no origami precisamos seguir instruções. Estas por sua vez seguem símbolos universais como vemos nas tabelas 1, 2, 3 e 4.

Tabela 1 – Símbolos do Origami (I)



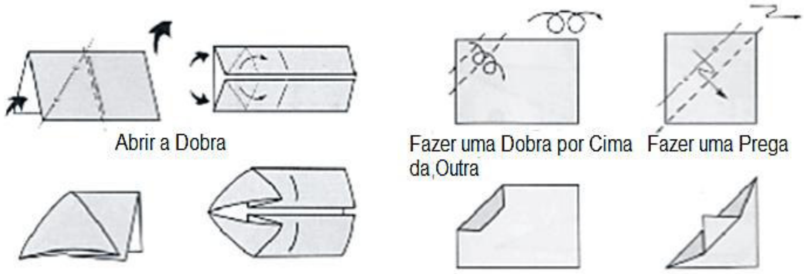
Fonte:http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_ufpr_edespecial_pdp_joelma_trindade_de_lima.pdf.< Acessado em 24/06/2018>

Tabela 2 – Símbolos do Origami (II)



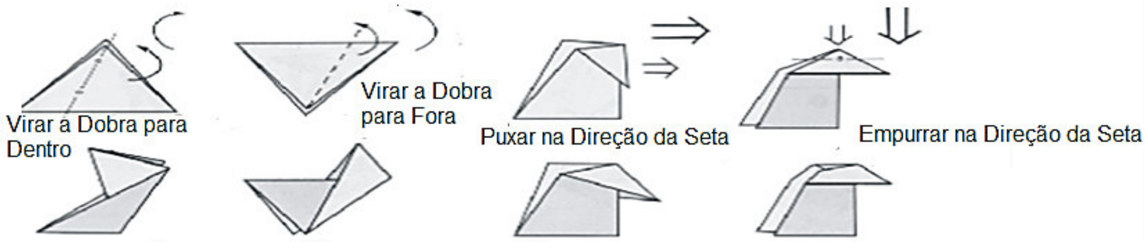
Fonte:
http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_ufpr_edespecial_pdp_joelma_trindade_de_lima.pdf<acessado em 24/06/2018

Tabela 3 – Símbolos do Origami (III)



Fonte:
http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_ufpr_edespecial_pdp_joelma_trindade_de_lima.pdf<acessado em 24/06/2018

Tabela 4 – Símbolos do Origami (IV)



Fonte:
http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_ufpr_edespecial_pdp_joelma_trindade_de_lima.pdf<acessado em 24/06/2018

2.4. A MATEMÁTICA E O ORIGAMI

Nos anos 80, ficou nítida uma corrente de origami que o relaciona com a matemática, mas apesar disso, historiadores apontam que foi entre os Mouros que o origami foi relacionado com a Geometria, bem antes da referida data. Vejamos algumas informações a seguir.

O artigo *Pequena História sobre Origami*, de Hayasaka e Nichida, nos conta que

> Os mouros (que já conheciam a produção de papel) eram exímios dobradores de papel e influenciaram fortemente a cultura espanhola. Eles faziam apenas figuras geométricas, pois a religião muçulmana não permitia que os animais fossem representados e essas dobraduras fascinaram o filósofo Miguel de Unamuno, reitor da Universidade de Salamanca(HAYASAKA;NICHIDA, 2017, p.1). http://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm. Acesso em 14 de dezembro de 2017.

Em 1721 foi lançado um livro japonês "Wakoku Chiyekurabe" (Competições matemáticas) de Kan Chu Sem, contendo um conjunto de dobras e cortes abordando problemas que estimulavam e contribuíam para o desenvolvimento do raciocínio lógico do leitor.

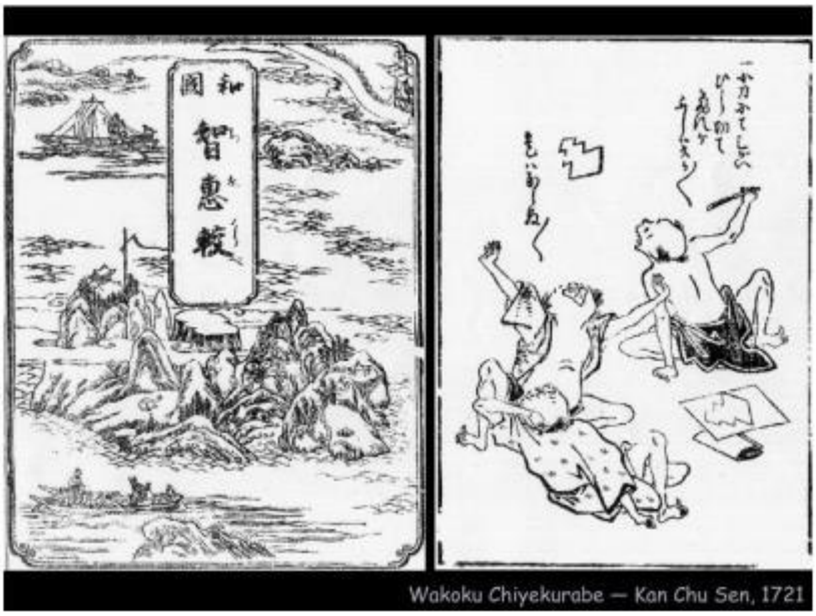


Figura 8: Imagens do livro Wakoku Chiyekurab
Fonte: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/25833/25833_4.PDF, acessado em 24/06/2018.

Em 1797, foi publicado no Japão o livro "Hiden Senbazuru Orikata" ("Secret to Folding One-thousand Cranes"), conhecido como um dos mais antigos de origami, segundo a British Origami Society Sociedade Britânica de Origami), que traduzimos como Segredo para dobradura de mil grous (aves da família dos gruídeos). Disponível em http://www.britishorigami.info/

Na Índia, em 1893, foi publicado o livro "T. Sundara Row's Geometric Exercises in Paper Folding" (Exercícios de Geometria em dobradura de papel), de Tandalam Sundara Rao, que trabalha a geometria por meio de origami.

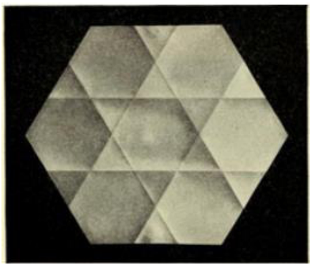


Figura 9. Hexágono Regular.
Fonte: "Row Geometric Exercises in paper folding" (Sundara, 1897, capa)

2.4.1 Os Axiomas de Huzita-Hatori

Os trabalhos em origami são, em geral, pensados apenas como dobraduras de papel que seriam cópias de animais e flores, isto é, belas obras de arte no papel. Perguntas sobre a matemática que está por trás das dobraduras vieram à tona ou ganharam notoriedade na década de 70.

Questão: será que podemos tratar as dobraduras a partir de uma axiomática que caracterize os tipos de dobras? resposta é positiva e segundo o físico Robert J. Lang (2004) o primeiro a fazer isto foi Humiaki Huzita, em 1989. Ele descreveu 6 combinações possíveis ou operações básicas feitas por meio de uma única dobra. Desta forma foi feita a conexão da geometria com o origami e a dobradura tornou-se objeto de interesse não só artístico como científico. Ainda em 1989, o matemático francês Jacques Justim publicou um artigo e descreveu sete combinações possíveis de dobras que são feitas no papel, sendo que seis já haviam sido descritas por Humiaki Huzita e a sétima, Justim não formalizou. Esta sétima operação foi formalizada apenas em 2001 pelo matemático Koshiro Hatori. Uma pergunta que pode surgir ao leitor é: esta lista de axiomas (operações básicas) está completa ou haveria outros ainda a serem descobertos? Quem resolveu esta questão foi o físico Robert J.Lang (2004) ao publicar o artigo "Origami and Geometric Constructions" (Origami e construções geométricas), no qual demonstrou que a lista dos sete axiomas está completa.

Seguem abaixo os sete axiomas chamados de axiomas de Huzita-Hatori, que são consequências de propriedades da Geometria Euclidiana Plana.

Axioma 1: Por dois pontos distintos P_1e P_2, realizamos uma única dobra.

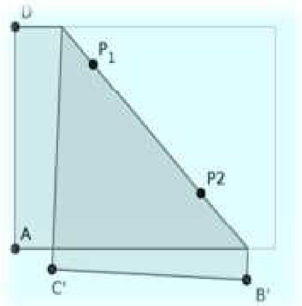


Figura 10 – Axioma de Huzita
Fonte: (CAVACAMI; FURUYA, 2010, p.4)

Axioma 2: Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, realizamos uma única dobra de modo que estes pontos coincidam.

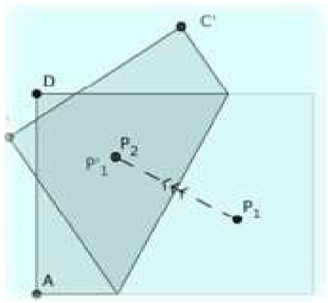


Figura 11 – Axioma de Huzita
Fonte: (CAVACAMI; FURUYA, 2010, p.4)

Axioma 3: Dadas as retas r_1 e r_2, existem no máximo duas dobras que podemos realizar para que r_1 esteja sobre r_2. Se as retas tem ponto de intersecção fora da folha, a dobra só pode ser feita de uma maneira, caso contrário há duas maneiras.

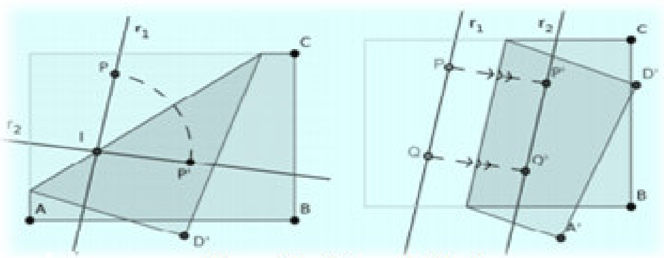


Figura 12 - Axioma de Huzita
Fonte: CAVACAMI; FURUYA, 2010, p.4)

Axioma 4: Dados um ponto P e uma reta r, há uma única dobra perpendicular a r que passa por P.

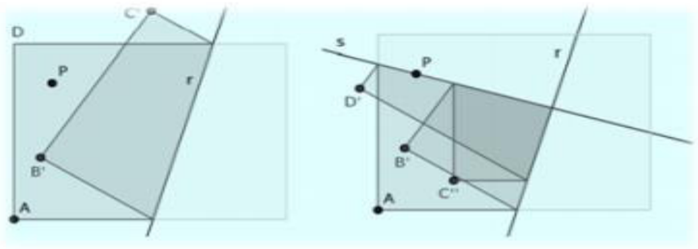


Figura 13 – Axioma de Huzita
Fonte: (CAVACAMI; FURUYA, 2010, p.5)

Axioma 5: Dados dois pontos P_1, P_2 e uma reta r, com a distância de P_1 a r sendo igual a de P_2 a r, existe uma única dobra que coloca P_1 sobre r e que passa por P_2. Caso a distância de P_1 a r seja diferente da de P_2 a r, haverá duas dobras possíveis que fazem P_1 incidir com r e que passam por P_2.

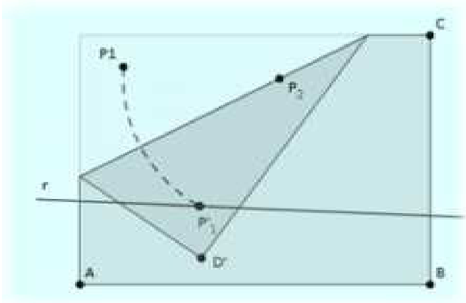


Figura 14 – Axioma de Huzita
Fonte: (CAVACAMI; FURUYA, 2010, p.5)

Axioma 6: Dados dois pontos P_1, P_2 e duas retas não paralelas r_1 e r_2, existe uma dobra que leva simultaneamente P_1 sobre r_1 e P_2 sobre r_2. No caso das retas serem paralelas, a distância entre as mesmas não deve exceder a distância entre os pontos.

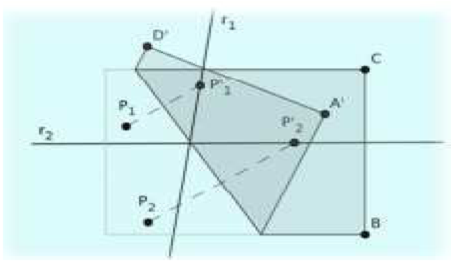


Figura 15 – Axioma de Huzita
Fonte: (CAVACAMI; FURUYA, 2010, p.6)

Axioma 7: Dadas duas retas r_1 e r_2 não paralelas e um ponto P fora de r_1, há uma dobra que faz P incidir sobre r_1. Esta dobra é perpendicular a r_2.

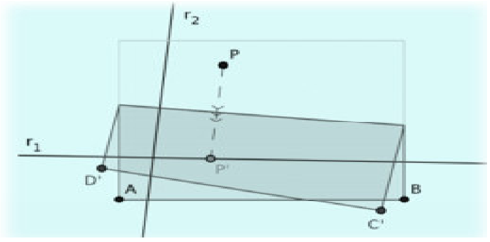


Figura 16 – Axioma de Hatori
Fonte: (CAVACAMI; FURUYA, 2010, p.6)

3. TEORIA DE VAN HIELE

Neste capítulo apresentamos, de forma resumida, uma teoria construtivista da geometria desenvolvida pelo casal Van Hiele, teoria esta baseada em níveis de pensamentos geométricos. As informações deste capítulo estão de acordo com NASSER (1990).

A teoria de Van Hiele é assim chamada devido aos seus autores, um casal de Holandeses: o casal Van Hiele. Esta teoria tem origem em 1957, nos trabalhos de doutorado de Dina Van Hiele Gedolf e Pierre Van Hiele na universidade de Utrechecht, nos Países Baixos. A teoria por eles apresentada é também chamada modelo de Van Hiele e constitui uma teoria de ensino e da aprendizagem da geometria.

CONCEITOS BÁSICOS E NÍVEIS

Os conceitos básicos da teoria da aprendizagem se fazem passando por níveis graduais de pensamento. É importante ressaltar que estes níveis não têm relação com idade, mas cada nível e a relação entre níveis têm as seguintes características:

- Não se pode alcançar um nível sem haver passado pelo nível imediatamente anterior, isto é, não podemos "queimar níveis".
- Em cada nível de pensamento, o que não era conhecido, no nível seguinte passa a ser conhecido.
- Cada nível tem seu símbolo próprio e a respectiva significância dos conteúdos (conexão destes símbolos com algum significado).
- Dois estudantes que estejam em níveis diferentes não têm como se entenderem.

Os níveis de Van Hiele são em número de cinco, geralmente nomeados com números de 0 a 4, mas também há a notação de 1 a 5.

- Nível 0: Visualização ou reconhecimento

Neste nível o aluno reconhece visualmente e nomeia as figuras. Tomaremos como exemplo clássico, o caso de uma folha de papel quadrada. O aluno olha para essa figura e sabe que seu nome é quadrado, apesar de não haver analisado as suas propriedades.

- Nível 1: Análise

Neste nível inicia-se a análise de propriedades. Por exemplo, o aluno já sabe que o nome da figura é quadrado, mas já percebe algo a mais: essa figura tem quatro lados iguais e quatro ângulos retos (propriedades do quadrado).

- Nível: Ordenação ou classificação

Neste nível o aluno sabe o nome da figura, suas propriedades e já começa uma argumentação lógica, porém ainda informalmente. Já classifica o quadrado como um paralelogramo, isto é, informalmente verifica que os quadrados estão inclusos na ordem dos paralelogramos, mas a recíproca não é verdadeira.

- Nível 3: Dedução formal

Neste nível aluno domina tudo que foi aprendido dos níveis anteriores e inicia-se uma argumentação lógica e formal.

- Nível 4: Rigor

Neste nível, há domínio total de todos os níveis anteriores, sendo que agora o indivíduo é capaz de entender qualquer demonstração.

As atividades por nós propostas por meio de dobraduras seguem o modelo construtivista (veremos no próximo capítulo), no qual os alunos são orientados, por meio de perguntas devidamente elaboradas, na realização das etapas das dobraduras até chegarem ao produto final. Em um primeiro momento, propomos um grande apelo para o aspecto visual (nível zero de Van Hiele).

4. A TEORIA DE APRENDIZAGEM DE VIGOTSKY

Neste capítulo apresentamos um resumo da Teoria de Aprendizagem de Vigotsky, que tem como princípios a mediação, a interação e os caminhos percorridos pela mente no processo de aquisição de conhecimento e capacidade para resolução de problemas, que Vigotsky denomina zonas de desenvolvimento.

4.1. BIOGRAFIA RESUMIDA DE VIGOTSKY

Figura17: Vigotsky
Fonte: https://novaescola.org.br/conteudo/382/lev-vygotsky-o-teorico-do-ensino-como-processo-social

De acordo com M.Ferrari(2008, p.1) no site da revista Nova Escola Lev Semenovitch Vygotsky nasceu em 1896 em Orsha, pequena cidade perto de Minsk, a capital da Bielo-Rússia, região então dominada pela Rússia (e que só se tornou independente em 1991, com a desintegração da União Soviética, adotando o nome de Belarus). Seus pais eram de uma família judaica culta e com boas condições econômicas, o que permitiu a Vygotsky uma formação sólida desde criança. Ele teve um tutor particular até entrar no curso secundário e se dedicou desde cedo a muitas leituras. Aos 18 anos, matriculou-se no curso de medicina em Moscou, mas acabou cursando a faculdade de Direito Formado, voltou a Gomel, na Bielo-Rússia, em 1917, ano da revolução bolchevique, que ele apoiou. Lecionou literatura, estética e história da arte e fundou um laboratório de psicologia - área em que rapidamente ganhou destaque, graças a sua cultura enciclopédica, seu pensamento inovador e sua intensa atividade, tendo produzido mais de 200 trabalhos científicos. Em 1925, já sofrendo da tuberculose, que o mataria em 1934, publicou A Psicologia da Arte, um estudo sobre Hamlet, de William Shakespeare, cuja origem é sua tese de mestrado.

4.2. MEDIAÇÕES DO CONHECIMENTO

O contato do indivíduo com o meio faz com que ele obtenha algum conhecimento. Em nosso caso, em particular, da maneira como são sugeridas as atividades (alunos reunidos em equipes ou grupos) a interação social faz com que haja um primeiro aprendizado, mesmo que de forma ainda não satisfatória. O que fazer então para o aprendizado ser plenamente satisfatório? Um desenvolvimento satisfatório pode ser conseguido quando há uma mediação bem feita. Em nosso trabalho, o professor é esse mediador de aprendizagens pois todas as atividades propostas nesta dissertação fazem o aluno percorrer o caminho natural do descobrimento: o homem questiona diante do novo e ao questionar surgem respostas não definitivas, mais ou menos corretas de acordo com o nível de conhecimento em dado momento.

Ao iniciar a infância, toda criança explora o mundo ao redor, este é um recurso eficiente que a criança tem ou deveria ter para o processo de aprendizagem, pois há pais que limitam demais ou subestimam as crianças e com isso acabam dificultando esta aquisição dos primeiros conhecimentos. A criança aprende o que é som em contato com a voz humana e instrumentos musicais; a maciez, apertando um travesseiro, explorando muitos outros objetos que estão à sua volta.

Pode-se com isso, ter a falsa impressão de que para adquirir conhecimento, basta deixar a criança em contato com os objetos. Não é bem assim , pois em quase todas as atividades que realiza, há um intermediário: para rabiscar, utiliza lápis ou caneta e caso um objeto de sua predileção esteja muito alto, longe do alcance, sobe em uma cadeira. Ao tentar fazer algo perigoso, acaba não o realizando, pois a mãe ou pai alerta para o perigo. Desta forma, na maior parte das vezes há um intermediário entre o indivíduo e os afazeres do mundo, intermediário que pode ser um objeto ou outro indivíduo, como no exemplo do pai ou mãe. Esta teoria do mecanismo psicológico de desenvolvimento mental é muito mais abrangente e não se limita apenas a crianças, estende-se ao longo processo de ensino-aprendizagem e todas as matérias abordadas por nós professores.

Figura18. Vygotsky -Arquivo de família
Fonte: https://vygotsky.hse.ru/en/persdevel/ Acesso em 23/06/2018.

De acordo com Vygotsky(1987, p.101)O aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer.

Para Vygotsky, a presença de um adulto capaz de planejar as etapas do aprendizado é fundamental para a criança obter conhecimentos da coletividade da qual faz parte.

4.3. ELEMENTOS DE MEDIAÇÃO

Existem dois tipos de elementos mediadores propostos por Vygotsky: o instrumento e o signo (MONROE, 2018). Atuam entre o homem e o mundo. A faca, por exemplo, serve para cortar de modo mais eficaz os alimentos e uma garrafa serve para armazenamento de líquido. Alguns animais, utilizam, eventualmente destes instrumentos, porém é o homem que concebe um uso mais detalhado: guarda instrumentos para o futuro, cria novos e deixa instruções para que outros indivíduos os fabriquem.

No caso desta dissertação, o material concreto de dobraduras já devidamente elaborado é um dos elementos mediadores (instrumento) que levará os alunos até a aquisição dos conhecimentos (Teoremas Fundamentais da Geometria). O professor também é outro elemento mediador (com perguntas feitas nas atividades) e, independentemente do tema abordado, outro elemento mediador são os signos que são as diversas representações que utilizamos na formação dos conceitos.

Segundo o dicionário Houaiss signo é “qualquer objeto, forma ou fenômeno que representa algo diferente de si mesmo.” (MONROE, 2018).

4.4. INTERAÇÃO

Ao longo de qualquer atividade por nós proposta haverá a interação entre alunos ou entre professor e alunos. A forma de construção do conhecimento, utilizando modelo construtivista para trabalhar na realização de atividades com material concreto, no caso, as dobraduras, propicia constante diálogo dos alunos com o professor (mediador) e os colegas de turma. O objetivo é que o processo faça com que os alunos saltem de um nível de conhecimento para outro, estimulando a interação entre todos os atores: professores e alunos.

Conforme Vygotsky(1987) haverá alguém para fazer a mediação do objeto até a criança e esta figura mediadora é o professor.

4.5. ZONAS DE DESENVOLVIMENTO

O professor, teoricamente, enfrenta enormes dificuldades no ensino- aprendizagem dos alunos, pois um é diferente do outro em comportamento, temperamento e principalmente conteúdo adquirido. Desta forma, o grande desafio é fazer com que alunos em graus tão heterogêneos aprendam, e para isto as diferenças de aprendizado podem ser um trunfo. Cabe ao professor avaliar o que o aluno já sabe para mensurar o potencial a que se quer chegar. O desenvolvimento de cada um irá ditar o quanto a criança pode e deve aprender.Após esta avaliação, podemos adotar como estratégia: colocar os alunos que já sabem mais para auxiliarem aqueles que sabem menos, auxiliando estes a percorrer o caminho do aprendizado, que na teoria de Vygotsky recebe o nome de zona de desenvolvimento proximal, da qual falaremos mais adiante.

> Os problemas encontrados na análise psicológica do ensino não podem ser corretamente resolvidos ou mesmo formulados sem nos referirmos à relação entre o aprendizado e o desenvolvimento em crianças em idade escolar. Este ainda é o mais obscuro de todos os problemas básicos necessários à aplicação de teorias do desenvolvimento da criança aos processos educacionais.(VYGOTSKY, 1991, p.53).

As zonas de desenvolvimento das quais nos fala Vygotsky são de suma importância para a prática docente, pois a partir do conhecimento delas é que serão elaboradas e organizadas as atividades, acontecendo desta forma o aprendizado adequado. São classificadas em zonas de desenvolvimento Real, Proximal e Potencial (Paganotti, 2011) <https://novaescola.org.br/conteudo/1972/vygotsky-e-o-conceito-de-zona-de-desenvolvimento-proximal, acessado em 05/102018>

1) Zona de Desenvolvimento Real: é o local psicológico em que se encontram organizados e desenvolvidos tudo que já foi aprendido, isto é, aquilo que já sabemos fazer independente da ajuda de outra pessoa.
   Observação: O professor, por meio de avaliações, descobrirá a zona de desenvolvimento Real da criança e desta forma irá elaborar as atividades adequadas ao amadurecimento de cada um.

2) Zona de Desenvolvimento Proximal: é o local psicológico definido como

a distância entre a zona de desenvolvimento Real e a Potencial. Observação: Nesta zona é que se dará a mediação.

3) Zona de Desenvolvimento Potencial: é o local psicológico, aonde se quer chegar após mediação correta realizada por aluno (criança) ou professor.
   Observação: O professor deve mensurar o potencial do aluno após avaliação individual adequada, isto é, voltada para descobrir o que o aluno já sabe. Em cima disto, irá propor uma atividade alcançável. É muito importante este tipo de análise, pois do contrário, corre-se o risco de elaborarmos atividades não atingíveis para o momento.

5. ORIGAMI E DOBRADURAS NA ESCOLA

Neste capítulo que segue apresentamos sugestões do trabalho com origami e dobraduras na escola. São trabalhadas construções básicas como mediatriz de segmento, bissetriz de ângulo, retas paralelas e retas perpendiculares, sem a utilização de régua e compasso. Abordamos a interdisciplinaridade sugerindo a parceria entre professores das áreas de Matemática e Educação Artística. Ao final são realizadas algumas atividades que visam construir o conhecimento matemático norteadas pela da Teoria de Van Hiele.

5.1. CONSTRUINDO O CONHECIMENTO COM ORIGAMI

Normalmente, ao ensinar Matemática, seguimos a seguinte ordem: definições, axiomas, teoremas e demonstrações respectivamente. Cabe ressaltar, que, no caso das demonstrações, na maioria das vezes, no Ensino Médio ou Fundamental, elas não são feitas: o resultado é apenas enunciado e ilustrado com exemplos. A atitude de não demonstrar, evidencia duas coisas: ou o professor realmente não sabe, ou a turma tem dificuldades de acompanhar a demonstração. Claro está que isso traz sérios problemas para o ensino-aprendizagem de matemática. Os dois caminhos, não demonstrar ou demonstrar tudo, são caminhos didaticamente ruins. Pensando nisso, desenvolvemos nosso trabalho pensando no equilíbrio de demonstrações que acreditamos ser o melhor caminho e o mais natural.

O desenvolvimento de toda Matemática que nos chegou até hoje, passou primeiro por observações, muitas vezes visuais, que nos levam às primeiras conjecturas. O empirismo (método experimental), passando pela indução, não confundir com o Princípio da Indução, é tão importante quanto o método dedutivo e nos aguça a curiosidade matemática que nos leva a pensar. Nos diz a professora Ana Maria Kallef

> "A visualização, a análise e a organização informal (síntese) das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito" (KALEFF,2003, p.14)

O termo visualização nesta obra não é o mesmo que enxergar. Visualizar é a capacidade de formar a imagem na tela mental, é uma consequência do enxergar. Vamos dar um exemplo para que isso fique bem claro. Uma pessoa que acaba de enxergar uma folha de papel azul quadrada e fecha os olhos visualiza a folha azul quadrada em sua tela mental. Note que esta capacidade (visualização) é de suma importância para o ser humano. Quando você pede para uma criança desenhar uma bola, sem colocar este objeto a sua frente, ela apenas esboçará tal desenho, caso já tenha visto o objeto em algum momento na vida, isto é, irá visualizar em sua tela mental antes do possível esboço.

> Especificamente no contexto geométrico, a habilidade de visualização assume importância fundamental. Ao visualizar objetos geométricos, o indivíduo passa a ter o controle sobre o conjunto de operações mentais básicas exigidas no trato da geometria (KALEFF, 2003, p.16).

O origami em questão servirá para que aluno não só construa o conhecimento, mas também possa adquirir a capacidade de visualização de uma situação ou figura geométrica. As primeiras conjecturas surgem da exploração inicial do material, isto é, a análise de uma situação particular que nos leva a desconfiar do resultado geral.

5.2 CONSTRUÇÕES BÁSICAS COM DOBRADURAS

5.2.1 Mediatriz de um Segmento

É dada uma folha de papel ofício e nela está desenhado um segmento AB. Façamos uma dobra de modo que o ponto A coincida com o ponto B. Esta dobra intersecta o segmento AB no ponto O. Tome um ponto C qualquer nesta dobra. Note que os triângulos COA e COB são congruentes (LAL), pois CO é comum aos triângulos, OA e OB são congruentes por construção e além disso, também pelo mesmo motivo, os ângulos COA e COB são congruentes. Como med(COA)+ med(COB) =180°, segue que COA e COB são ângulos retos. Portanto os segmentos CA e CB têm a mesma medida e a reta OC chama-se mediatriz do segmento AB (lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e B).

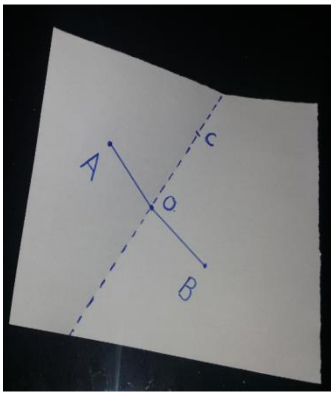


Figura 20

Figura 21

Etapas na construção da mediatriz de um segmento
Fonte: o Autor

5.2.2 Bissetriz de um Ângulo

É dada uma folha de ofício com o ângulo BAC desenhado. Façamos uma dobra de modo que as semirretas BA e AC coincidam. Marquemos sobre esta dobra um ponto O. Desta forma, por construção, os ângulos BAO e CAO também coincidem, isto é, são congruentes. Como a medida do ângulo BAC é a soma dos ângulos BAO e CAO que são congruentes, segue que a reta AO é a bissetriz do ângulo BAC (reta que divide o ângulo BAC ao meio, isto é, em dois ângulos de mesma medida).

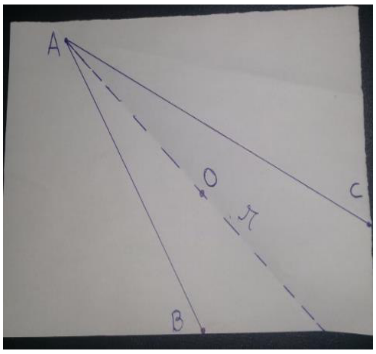


Figura 22

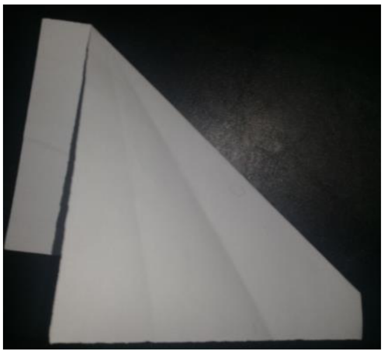


Figura 23

Etapas na construção da mediatriz de um segmento.

Fonte: o Autor

5.2.3 Reta Perpendicular a uma Reta Dada

Temos três possíveis situações geométricas: perpendicular passando por qualquer ponto da reta dada; perpendicular passando por um determinado ponto da reta; e perpendicular passando por um ponto dado, exterior à reta dada.

No primeiro caso, o aluno escolhe dois pontos da reta e faz procedimento análogo à construção da mediatriz (Figura 20), em que, neste caso, A e B são pontos da reta; no segundo caso, o papel deve ser dobrado sobrepondo semirretas da reta dada e ter a atenção para que na linha de dobra esteja o ponto dado; e no terceiro caso, o procedimento é análogo ao segundo. Observamos que, para a realização das dobraduras mostradas, é conveniente o uso de papel que tenha um pouco de transparência e que os traços das linhas de referência e pontos, sejam marcados com traços fortes.

5.2.4 Reta Paralela a uma Reta Dada

É dada uma folha de papel ofício com uma reta desenhada. Observação: devemos colocar o desenho da reta em região do papel (que representa o plano) de forma que haja espaço para o aluno realizar a atividade. Tomando dois pontos A e B distintos nesta reta, vamos construir a mediatriz do segmento AB. Desdobre ou não o papel e escolha dois pontos distintos da mediatriz. Sejam C e D estes pontos. Repita o processo da construção da mediatriz, mas agora para o segmento CD.Esta mediatriz, que iremos chamar de r é uma paralela a reta AB, pois a mediatriz de AB também é perpendicular a r.

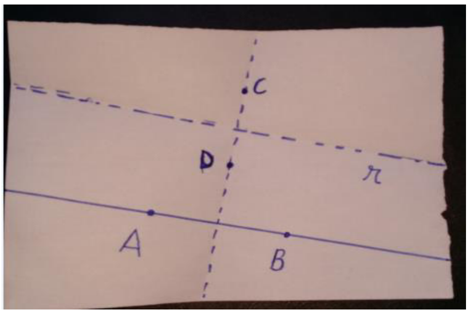


Figura 24: Construindo reta paralela

Fonte: o Autor

5.3 POLÍGONOS EQUIDECOMPONÍVEIS

Nesta seção propomos o uso de as dobraduras e recortes para mostrarmos propriedade de equidecomponibilidade entre polígonos, abordando triângulos e quadriláteros. Aplicamos esses conceitos para áreas e verificação do Teorema de Pitágoras.

Sugerimos que, na atividade com os alunos, o professor inicie instigando os alunos com a seguinte pergunta: é possível repartir um triângulo e reagrupar todos os pedaços e obtermos um retângulo com os mesmos pedaços?

Dizemos que dois polígonos são equidecomponíveis quando ambos podem ser divididos em um mesmo conjunto de polígonos congruentes (LIMA, 2011).

Mostramos triângulos e retângulos equidecomponíveis e consideramos triângulos acutângulos, retângulos e obtusângulos, evidenciando particularidades nas dobraduras, dependendo dos lados dos triângulos escolhidos para a construção das dobras.

Em uma folha de papel ofício com o triângulo acutângulo ABC desenhado, façamos a dobra mediatriz de AB. Ela intersecta AB em um ponto que chamaremos de M (ponto médio de AB). Procedendo de modo análogo com o segmento AC, marcaremos N (ponto médio de AC). Agora, marcaremos a dobra que passa por A e é perpendicular à reta MN e à reta BC. Ela intersecta MN em O e BC em P. Corte os triângulos AMO, ANO e os trapézios AMOP e PONC. Reagrupe estas figuras recortadas e observe que a nova figura é um retângulo.

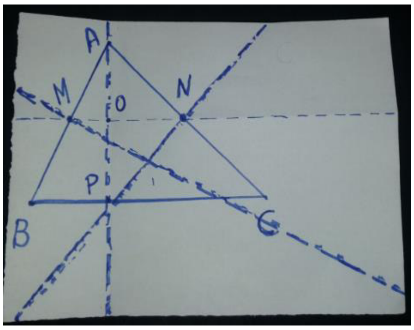


Figura 25. Triângulo acutângulo Construção da dobradura para mostrar a equidecomponibilidade.

Fonte: o Autor

Na Figura 26, os triângulos de áreas (1) e (2) são congruentes e os de áreas (3) e (4) também, pois os pares são congruentes pelo caso LAA_o.

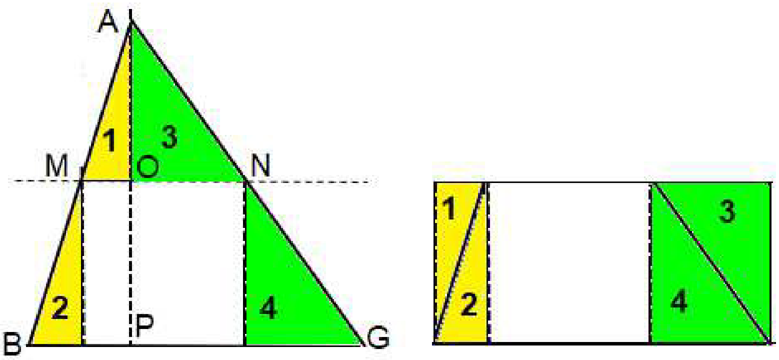


Figura 26.
Triângulo e retângulo equidecomponíveis (I).
Fonte: o Autor

Quando o triângulo é retângulo basta apenas um corte passando pelo ponto médio da altura e pelo ponto médio da hipotenusa para remontar a figura em um retângulo.

Dobramos a folha de ofício de modo que J coincida com H e após isso recortamos o triângulo JKL e o trapézio HKLI é recortados como no caso anterior (figuras 28 e 29).

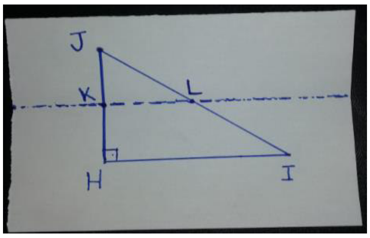


Figura 27. Triângulo retângulo
Construção da dobradura para mostrar a equdecomponibilidade.
Fonte: o Autor

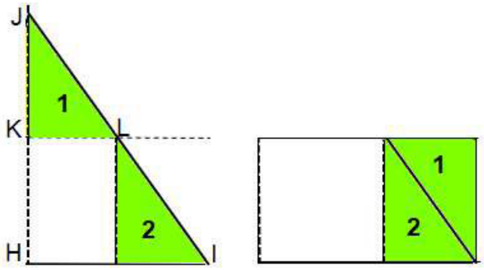


Figura 28.
Triângulo e retângulo equidecomponíveis (II).
Fonte: o Autor

No caso de triângulo obtusângulo, tomando para base um dos lados adjacentes ao ângulo obtuso, no caso, o lado FG (Figura 29), dobramos a folha de modo que F coincida com E e assim achamos o ponto médio de FE. Desdobramos e fazemos analogamente para o segmento EG e encontramos o ponto N médio de EG. Pelo ponto M obtemos a perpendicular a FG passando por M (já visto a construção de perpendicular passando por um ponto dado) e, analogamente, construímos a perpendiculares à reta que contem FG, passando pelos pontos E e G. Na Figura 30, por argumentos descritos nos caso anteriores, vemos que: o triângulo que limita a região da união das áreas (2) e (3) é congruente ao triângulo de área (1); e o triângulo de área (4) é congruente ao triângulo de área (3). Rearranjando os triângulos obtemos um retângulo.

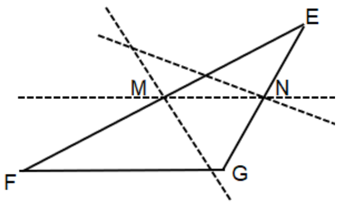


Figura 29. Triângulo obtusângulo
Construção da dobradura para obter pontos médios.
Fonte: o Autor

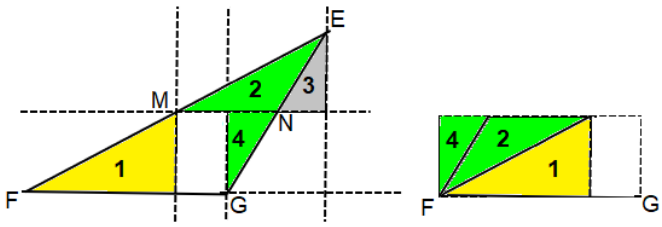


Figura 30.
Triângulo e retângulo equidecomponíveis (III).
Fonte: o Autor

Observação. No caso do triângulo acutângulo vimos que a altura relativa ao lado FG (Figura 29) é exterior ao triângulo. Podemos declinar da dobradura mostrada na Figura 30 e escolher como base do triângulo o lado oposto ao ângulo obtuso (EF) e assim obter a altura interior ao triângulo e fazemos as dobras mostradas nas figuras 25 e 26.

Note que pela equidecomponibilidade entre triângulos e retângulos podemos deduzir a forma para o cálculo da área do triângulo conhecendo a fórmula da área do retângulo. Se um triângulo tem base de medida *b* e altura h, então ao ser remontado em um retângulo, este terá mesma medida de base que o triângulo e sua altura será *h/2*. Logo a área do triângulo será *(bh)/2*.

Ao leitor que desejar estudar elementos da teoria e equidecomponibilidade sugerimos Lima (2002) e Lima (2011).

A seguir apresentamos alguns exemplos de equidecomponibilidade com dobraduras e recortes. As figuras apresentadas são, em maioria, reproduções de ilustração de Lima (2011).

Exemplo 1. Equicomponibilidade que utilizamos para obter a expressão da área do paralelogramo e de trapézios. (Figura 31).

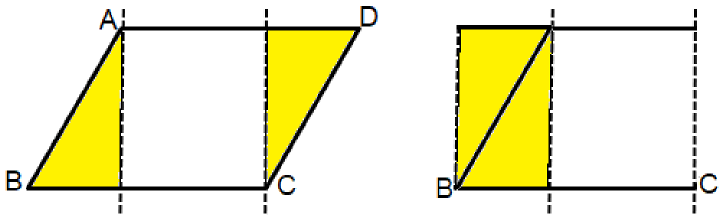


Figura 31. Paralelogramo e retângulo equidecomponíveis (I).
Fonte: o Autor

Exemplo 2. Outra forma de dobradura do paralelogramo e reagrupar obtendo retângulo com ilustração de Elon (2011) (Figura 31).

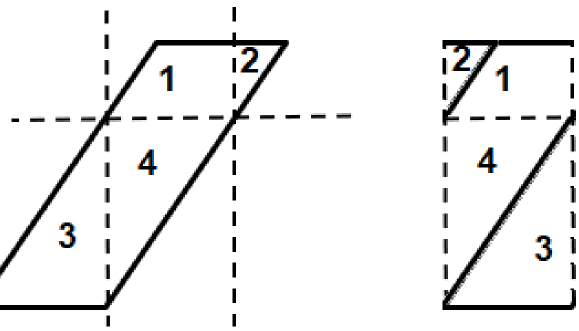


Figura 32 – Paralelograma e retângulo equidecomponíveis (II).
Fonte:o Autor

Exemplo 3. Neste exemplo consideramos um retângulo e um quadrado de áreas iguais e mostramos como dobramos para recortarmos o primeiro e rearranjamos as partes para obter o segundo.

Sejam ABCD retângulo com os lados AB e CD de comprimento a e AD e BC de comprimento b (a > b), MNOP quadrado com lado de comprimento c e tais que suas áreas são iguais, isto é, $ab = c^2$.

Como a > b e $ab = c^2$ então $b > c > a.$

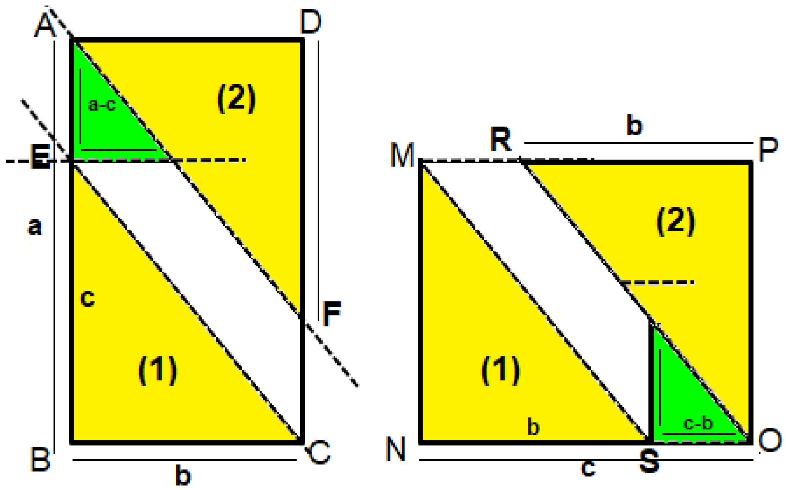


Figura 33. Dobraduras do retângulo e do quadrado.

Fonte: Autor

Marcando os pontos E em AB e F em DC com comprimento dos segmentos BE e DF igual a c, obtemos triângulos congruentes ADF e CBE, indicados com área (1) e (2) na Figura 33. Analogamente, marcamos pontos R em MP, com PR de comprimento b, e S em NO com NS de comprimento b. Então os quatro triângulos, ADF, CBE, RPO e SNM, são congruentes (caso *LAL* de congruência de triângulos). Observemos que a região do retângulo, excluindo as regiões dos triângulos, é o paralelogramo AECF e que a região do quadrado, excluindo as regiões dos triângulos, é o paralelogramo MSOR.

Observemos que esses paralelogramos têm áreas iguais (o quadrado e o retângulo tem áreas iguais e os triângulos ADF, CBE, RPO e SNM têm áreas iguais). Segue também da congruência desses triângulos que os lados AF, EC, MS, RO tem comprimentos iguais. Observemos que AE e FC medem a-c e SO e MR medem c-b (Figura 33).

No retângulo, sejam T o ponto obtido da interseção de AF com a reta paralela a BC que passa por E e V ponto obtido da interseção da reta que contem BC com a reta que contem AF (Figura 34). Deixamos para o leitor verificar que os triângulos AET e FCV são congruentes. Então os paralelogramos AECF e ECVT têm áreas iguais.

No quadrado, seja W o ponto obtido da interseção de RO com a reta paralela a NM.

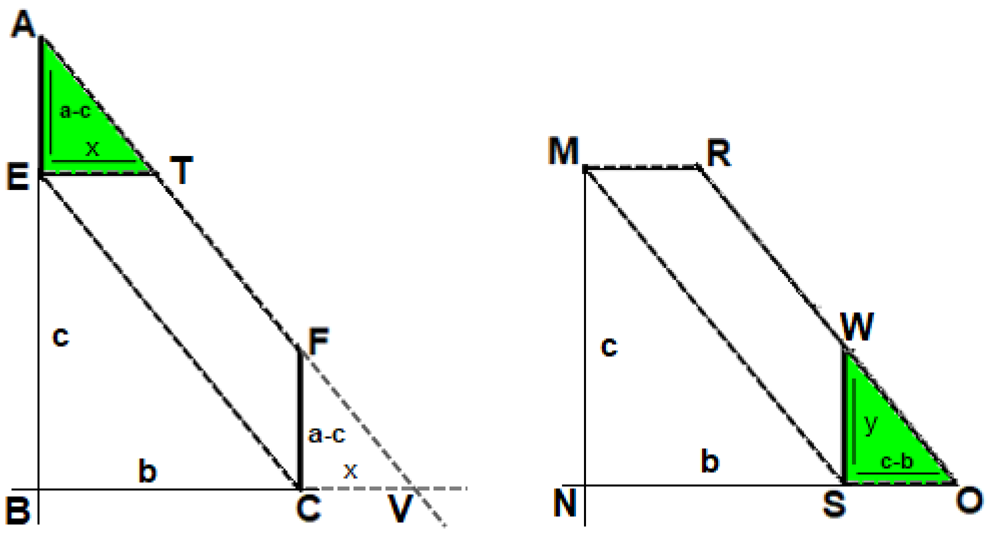


Figura 34. Congruência dos triângulos AET, FCV e WSO.

Fonte: Autor

Mostremos que os triângulos FCV e WSO são congruentes.

Como o paralelismo garante a semelhança entre EBC e FCV. Analogamente, MNS e WSO são semelhantes. Como EBC e MNS são congruentes, segue da transitividade, FCV e WSO são semelhantes. Então, sendo x o comprimento de CV e y o comprimento de WS, obtemos da primeira, segunda e terceira semelhanças , respectivamente,

$$\frac{x}{a-c} = \frac{b}{c} \Rightarrow x = \frac{b(a-c)}{c},$$

$$\frac{c-b}{y} = \frac{b}{c} \quad \text{e}$$

$$\frac{x}{a-c} = \frac{c-b}{y} \Rightarrow y = \frac{(a-c)(c-b)}{x}.$$

Substituindo na expressão de y a expressão de x obtido na primeira relação e usando o fato que $ab = c^2$ obtemos

$$y = (a-c)(c-b)\frac{c}{b(a-c)} = \frac{c^2 - bc}{b} = \frac{ab - bc}{b} = a - c.$$

Então os triângulos AET e WSO são congruentes e obtemos a equidecomponalidade do retângulo e quadrado de áreas iguais.

O exemplo 3, a decomposição de um retângulo em um quadrado e vice-versa, nos traz um dos entendimentos do teorema de Pitágoras. Podemos interpretá-lo da seguinte maneira: a área do quadrado que tem como lado a hipotenusa do triângulo retângulo é a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Observemos as figuras 35 e 36. Elas ilustram uma das demonstrações do teorema de Pitágoras que foi feita por Euclides usando congruência de triângulos e traz a ideia de equidecomponibilidade de quadrados em retângulos.

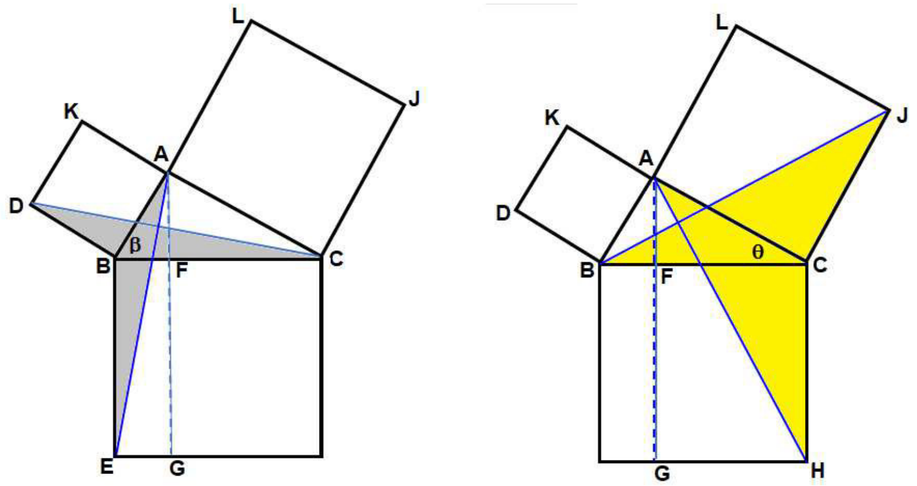


Figura 35 – Teorema de Pitágoras
Fonte: LIMA (2011), adaptado

Na Figura 35: ABC é um triângulo retângulo e os demais quadriláteros são os quadrados de lados de comprimentos iguais aso catetos; o segmento AG contem a altura de ABC relativa a hipotenusa; β e θ são os ângulos agudos.

Notemos que os triângulos DBC e ABE são congruentes por *LAL*, pois AB e DB são congruentes (lados de quadrado); BC e BE são congruentes (lados de um quadrado); e os ângulos $D\hat{B}C$ e $A\hat{B}E$ são congruentes, pois cada mede 90º+β. Logo têm áreas iguais.

Observemos que: no triângulo ABE, BF é altura relativa ao lado BE, portanto a área desse triângulo é igual a metade da área do retângulo BEFG; no triângulo DBC, AB é altura relativa ao lado DB, o que implica na área de DBC ser igual a metade da área do quadrado DBAK. Como DBC e ABE tem áreas iguais então as metades das áreas de BEFG e DBAK são iguais, logo esses quadriláteros têm áreas iguais.

Analogamente, notemos que os triângulos BCJ e HCA são congruentes por *LAL*, pois BC e HC são congruentes (lados de quadrado); CJ e CA são congruentes (lados de um quadrado); e os ângulos $B\hat{C}J$ e $H\hat{C}A$ são congruentes, pois cada mede 90º+θ. Logo têm áreas iguais. Além disso, no triângulo BCJ, AC é altura relativa ao lado CJ, portanto a área desse triângulo é igual a metade da área do quadrado ACJL; no triângulo HCA, CF é altura relativa ao lado CH, o que implica na área de HCA ser igual a metade da área do retângulo FGHC. Então ACJL e FGHC têm áreas iguais. Na Figura 36 indicamos com cores iguais os quadriláteros de áreas iguais.

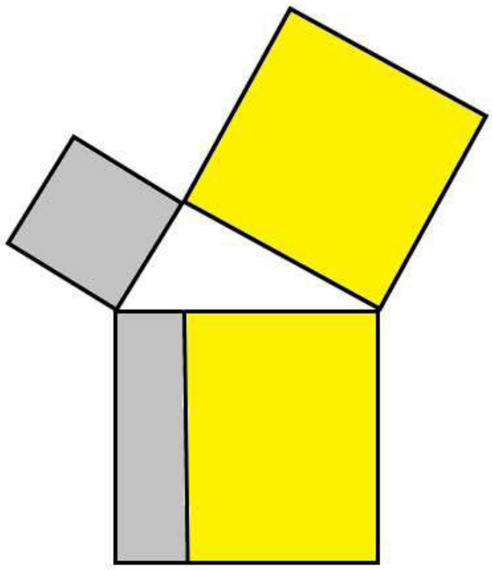


Figura 36 – Teorema de Pitágoras
Fonte: LIMA (2011), adaptado

5.4. ATIVIDADES

Todas as atividades desenvolvidas seguirão o modelo de perguntas que estão ordenadas, isto é, o professor deve orientar as construções fazendo as perguntas, pois pretendemos, desta forma, fazer com que os alunos construam passo a passo o conhecimento e vivenciem os chamados níveis de Van Hiele, participando assim da verdadeira beleza do descobrimento matemático.

Para um melhor aproveitamento disciplinar, artístico e matemático, sugerimos, quando em sala de aula houver 30 ou mais alunos, trabalhar com equipes em sistema de gincana, em substituição ao modelo de grupos, mas isso deve ser decidido nas reuniões interdisciplinares. Caso seja decidido por trabalhar em gincana, tomemos como exemplo o caso de 30 alunos em uma turma. Sendo assim, poderíamos dividir os alunos em cinco pares do lado esquerdo, cinco pares no centro e cinco pares na esquerda. As três equipes iriam disputar um torneio de origami em que poderá ser julgada a rapidez na fabricação do material e estética no caso de educação Artística e na área de matemática percepção visual no primeiro momento e exatidão das respostas em um segundo momento. Para cada atividade proposta, um par de cada equipe de cada equipe resolveria. Ganha o para que resolver mais rápido e corretamente.

Quanto ao sistema de pontos, o mesmo deverá ser feito individualmente e por equipe a fim de estimular a participação de todos os membros. À parte disciplinar deve ser dada a maior importância para que o sistema de gincana funcione. Possíveis brigas deverão ser punidas, perdendo para a equipe ganhadora e individualmente para os alunos que mais se destacaram. Ao final, sugerimos que seja feita uma pequena confraternização entre professores e alunos para que seja fortalecido o evento e não somente restringir aos ganhadores.

Observação. as linhas pontilhadas nas figuras que aparecerão ao longo das mais diversas atividades são as dobras feitas no papel dado aos alunos.

5.4.1. Comparação entre os comprimentos dos lados do triângulo retângulo.

Material utilizado: cartolina já cortada em forma de triângulo retângulo com as linhas de dobra sendo as bissetrizes dos ângulos internos agudos.

Requisito: Conhecimento de ângulo e de triângulos.

Público Alvo: alunos do sexto ao nono ano do ensino fundamental

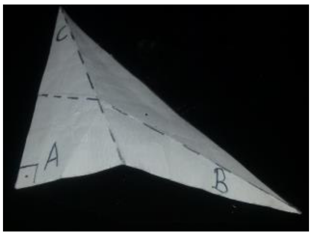


Figura 45

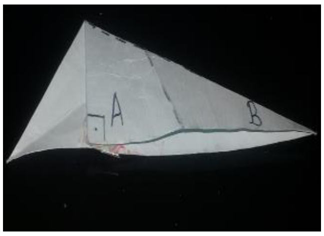


Figura46

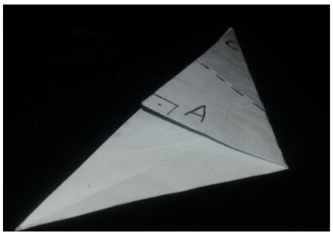


Figura47

Figuras 45, 46 e 47, Fonte: o Autor

Perguntas e instruções.

a) Numa primeira visualização discuta com seus colegas se o lado BC é o maior lado do triângulo retângulo.

b) Faça agora a dobra já marcada no papel que passa por B. Após a dobra, pode-se dizer que o ponto A está entre B e C? O que se pode concluir do segmento BA em relação a BC.

c) Utilize agora a dobra que passa por C. Após realizada esta dobra, pode-se dizer que A está entre B e C? O que se pode concluir do segmento CA em relação ao segmento CB?

d) Como comparar os comprimentos dos lados AB e AC?

Argumentação Geométrica da atividade 5.4.1

Ao fazermos a dobra passando por B temos que BA e BC fazem parte da mesma reta, com A entre C e B. Logo, med(BC) > med(BA). Por raciocínio análogo, utilizando a dobra que passa por C chegamos que me(BC) > med(CA).

Observações. Após a pergunta c), o professor da ênfase a propriedade observada de que o lado oposto ao ângulo reto é o maior lado. Na última pergunta desejamos avaliar se o aluno toma a iniciativa de realizar uma dobra não marcada, ou seja, ele cria a linha de dobra para a comparação.

5.4.2. Identificação de Relações Geométricas

Material utilizado: Folha de ofício já com dobras feitas nas linhas pontilhadas.

Público alvo: Alunos do nono ano do ensino fundamental

Requisitos: Conceitos de semelhança, congruência, triângulo equilátero, isósceles, escaleno e conhecimento da medida da soma dos ângulos internos de um triângulo.

A partir de uma folha com dobraduras marcadas e alguns elementos dados, identificar propriedades geométricas.

Considere os seguintes dados: ABCD é uma folha retangular; M e N pontos médios de AB e CD, respectivamente; J é ponto médio de AE; BE e BA são congruentes; E ponto de interseção de 4 dobras; e L é ponto de interseção de 3 dobras (Figura 37).

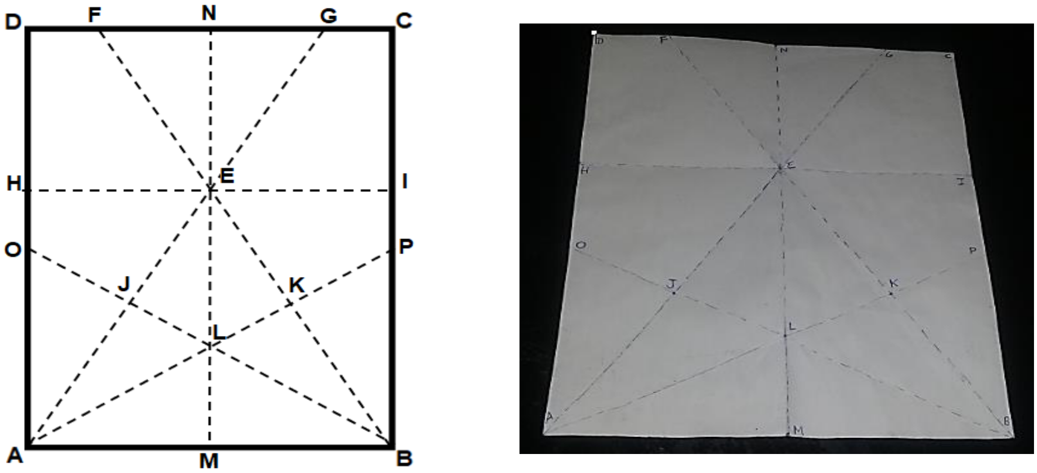


Figura37. Dobraduras da Atividade 1.
Fonte: o Autor

A partir desses dados, o professor faz, gradualmente, as seguintes perguntas aos alunos e para respondê-las eles devem manipular as dobras e averiguar propriedade angulares e métricas.

Perguntas:

a) Os triângulos FEG e AEB são semelhantes?
b) Quantos aos lados, o triângulo FEG é equilátero, isósceles ou escaleno?
c) Quais figuras são congruentes e quais são semelhantes?
d) Qual a relação entre os ângulos FEG e AEB? Conjecture uma relação entre ângulos opostos pelo vértice.
e) As figuras DFEH e HEJO são respectivamente um trapézio e um trapezoide e ambos são quadriláteros. Você seria capaz de dar uma definição para ambos observando no papel a diferença entre eles?
f) Que nome ou nomes tem os segmentos EM, AK e BJ em relação ao triângulo AEB?
g) Note que o ponto L é o "ponto de encontro" dos segmentos EM, AK e BJ. Conjecture um resultado sobre mediatrizes e bissetrizes de um triângulo.
h) Ache a medida de todos os ângulos relativa aos vértices marcados no papel. Os valores dos ângulos devem ser achados sem ajuda de instrumento de medição.
i) A figura EALB é uma "asa delta" e há uma relação entre os ângulos ALB os três ângulos AEB, EAL e EBL.Conjecture uma relação.

J) Notando a construção do triângulo EAB, descreva a construção de um triângulo equilátero passo a passo.

Argumentação Geométrica da Atividade 5.4.2

ME é mediatriz de AB, pois a dobra ME faz com que MA coincida com MB, os ângulos EMB e EMA coincidam e EM é segmento comum aos triângulos EAM e EMB. Portanto, pelo caso LAL, os triângulos EAM e EBM são congruentes. Segue daí que med(EA)=med(EB) e os ângulos BEM e EMA são retos.Por construção, BA é congruente a AE. Logo, med(EA)=med(EB)=med(BA). Concluímos com isso que o triângulo EAB é equilátero e os seus ângulos internos medem 60 graus.

Ao realizar a dobra HI notamos que os ângulos AEB e FEG são congruentes (ângulos opostos pelo vértice) e como FG é paralelo a AB, os triângulos FEG e AEB são semelhantes e, consequentemente, equiláteros, pois AEB o é. Os trapézios são congruentes, basta fazer a dobra NE e verificar que eles se sobrepõem, o mesmo acontecendo com os trapezoides.Os segmentos EM, AK e BJ são as chamadas mediatrizes, mas que no caso de triângulos equiláteros também são bissetrizes e medianas.Desta forma, teremos que os ângulos AEL, BEL medem 30° e ângulo AEB mede 60°.Os triângulos LMB e LMA são congruentes de modo que os ângulos BLM e ALM medem ambos 60°.Logo med(ALB)=120°=med(EAL)+med(EBL)+med(AEB).

5.4.3. Teorema de Pitágoras

Material utilizado: uma folha quadrada com linhas de dobras marcadas

Público Alvo: alunos do nono ano

Requisitos: conhecimento da fórmula do cálculo de áreas de triângulo e quadrado, conceito de semelhança e congruência de triângulos e conhecimento da medida da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Distribuímos para os alunos folhas com as seguintes informações: a folha é quadrada; as linhas de dobra determinam 4 triângulos (Figura 380; os comprimentos dos lados do triângulo são *a, b, c*, com $a > b > c$.

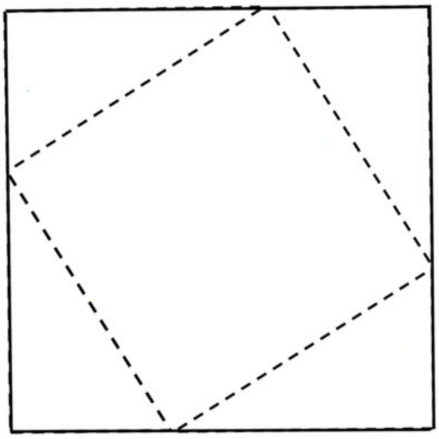


Figura 38. Dobradura preparada para provar o Teorema de Pitágoras.

Fonte: o Autor

Nas figuras 39 a 43 mostramos as etapas das dobras realizadas.

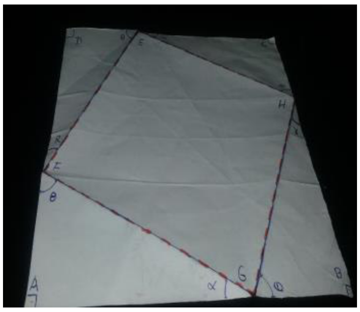


Figura 39

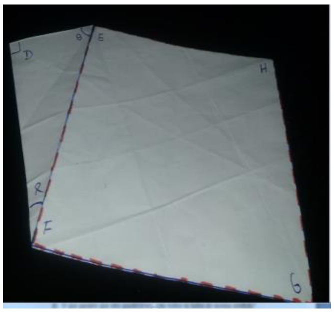


Figura 40

Figura 41

Figura 42

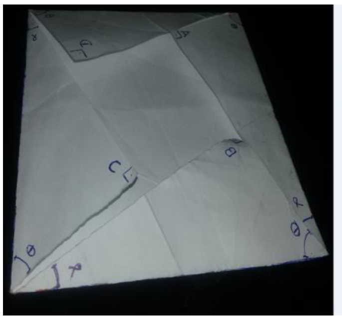


Figura 43

Dobras para verificação do teorema de Pitágoras

Fonte: o Autor

Desenho depois de realizar todas as dobras (com as medidas assinaladas).

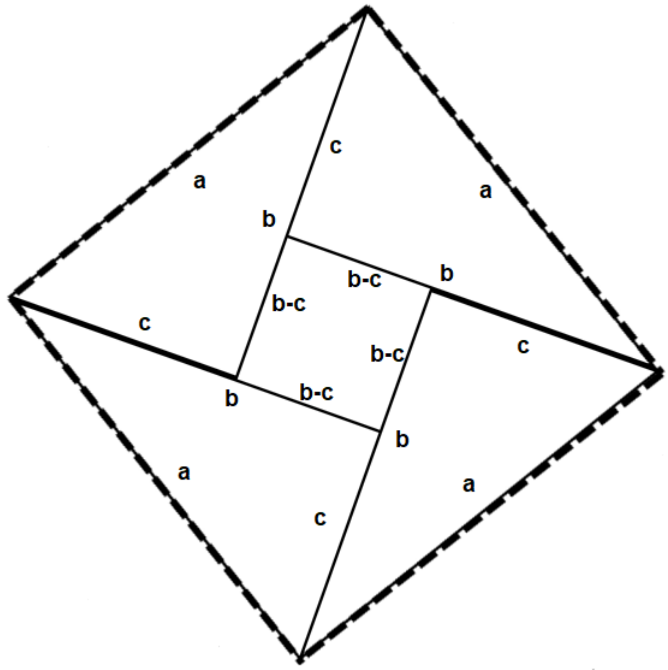


Figura 44. Dobradura finalizada para prova do Teorema de Pitágoras
Fonte: o Autor

Perguntas norteadoras:

a) Designe os ângulos de um desses triângulos retângulos: α (oposto a hipotenusa), β (oposto ao cateto b) e □□(oposto ao cateto c);
b) Faça as dobras assinaladas. Conjecture agora as formas dos quadriláteros obtidos (o quadrilátero maior, cujos lados são os segmentos de dobra, e o quadrilátero menor, interior);
c) O que garante que o quadrilátero menor tem todos os lados de mesma medida?
d) O que garante que os quatro ângulos internos deste quadrilátero sejam retos?
e) Escreva a área do triângulo menor.
f) Escreva a área do quadrado maior em função de seus lados e escreva a área desse quadrado em como soma das áreas das formas geométricas formadas.

Argumentações geométricas da Atividade 5.4.3

Área de cada triângulo retângulo é $(bc)/2$.

Área do quadrado interior $(b\text{-}c)^2$.

Área do quadrado maior é a^2 e expressa como soma das áreas obtemos

$$4(bc)/2 + (b\text{-}c)2 = 2bc + b^2 + 2bc + c = b^2 + c^2$$

O professor enuncia o *Teorema de Pitágoras*. *Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos seus catetos*.

5.4.4. Soma dos ângulos internos de um triângulo.

Material utilizado: uma folha de papel vegetal retangular com desenho de um triângulo.

Requisito: conhecimento da construção de dobra para obter ponto médio de segmentos (seção 5.2).

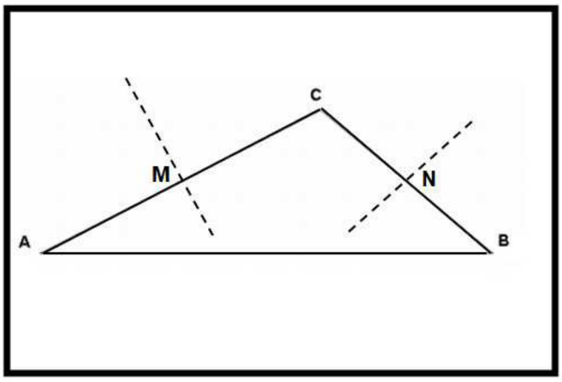


Figura 45: Dobras

Fonte: o Autor

Instruções

a) Determinar as mediatrizes de AC e BC.
b) Determinar dobra paralela a AB passando pelos pontos médios de AC e BC. Os denomine M e N respectivamente (Figura 45).
c) Determinar dobras perpendiculares a AB passando pelos pontos médios citados e por C (Figura 46). Denomine H o ponto obtido da interseção da perpendicular passando por C e AB.
d) Nomeie α, β e θ os ângulos internos do triângulo nos vértices A, B e C, respectivamente.
e) Recorte o triângulo (Figura 47).
f) Realize as dobras marcadas e observe as posições dos vértices do triângulo (Figura 48).
g) O que você pode afirmar sobre a soma dos ângulos internos do triângulo?

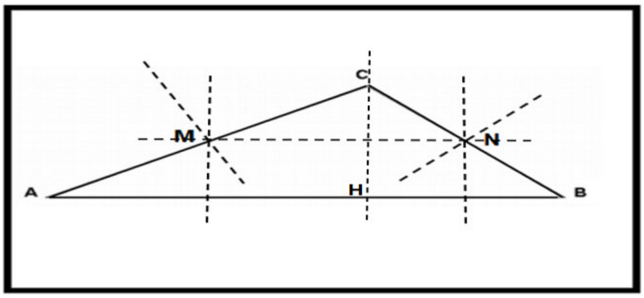


Figura 46. Produzindo as dobras perpendiculares ao lado AB.

Fonte: o Autor

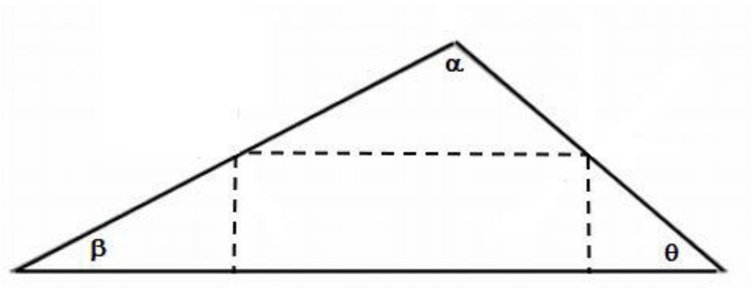


Figura 47. Triângulo recortado com dobras marcadas.

Fonte: o Autor

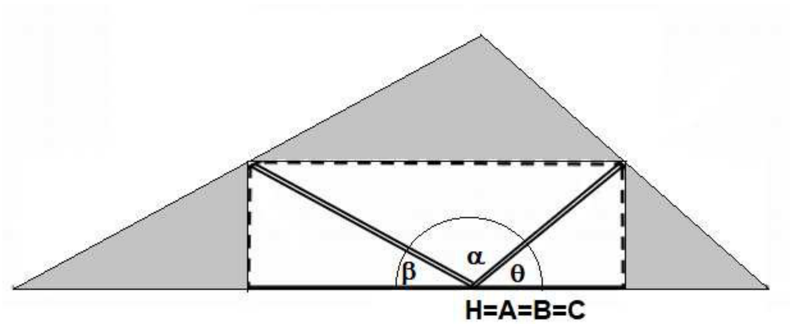


Figura 48. Mostrando que a soma dos ângulos internos é 180 graus.

Fonte: o Autor

5.4.5 Soma de Frações

Material utilizado: Uma folha de papel com dobras (pontilhado) e linhas.

Requisito: conhecimento de frações equivalentes.

Público alvo: alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.

Com a realização de dobras em um quadrado (figuras 52 a 55) podemos mostrar várias representações fracionárias equivalente a 1/2: em dois triângulos retângulos tomando um; em quatro triângulos tomando dois; em oito tomando quatro; por último em dezesseis tomando oito; etc.

Na atividade que segue abaixo, os alunos devem pensar em figuras congruentes que dividem os retângulos e que não sejam necessariamente outros retângulos ou triângulos

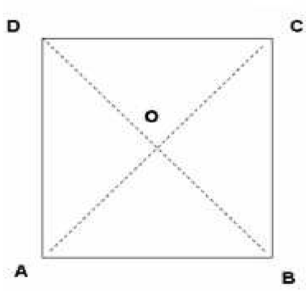


Figura 52

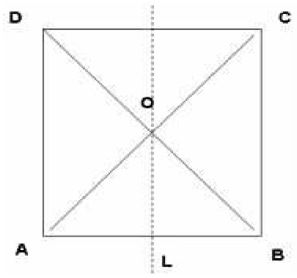


Figura 53

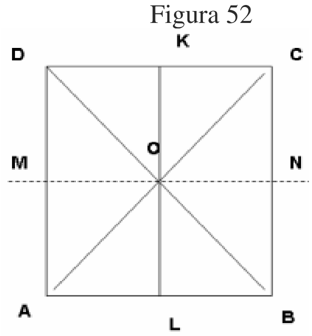


Figura 54

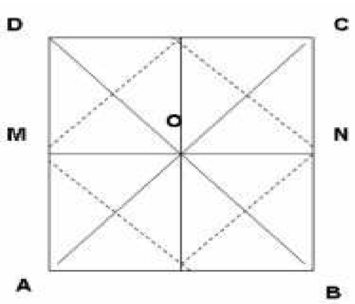


Figura 55

Fontes das figuras 52 a 54: o Autor

Distribuímos para os alunos folha retangular com traços de linhas de dobras (pontilhadas) detrminando 3 retângulos congruentes e outras linhas. Desejamos que os alnos descubram que há vários triângulos congruentes. Nesse nível de ensino, menos formal, utilizamos a palavra iguais para figuras que soprepostas coincidam.

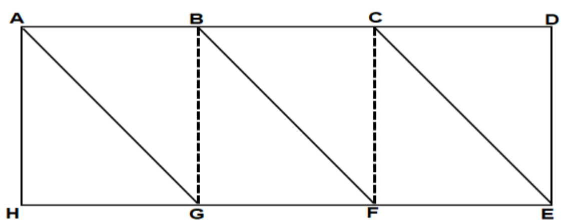


Figura 56: Retângulo com vários retângulos congruentes.
Fonte: o Autor

Perguntas e instruções.

a) Faça as dobras marcadas e conjetura sobre a relação entre os três quadriláteros.
b) Conjeture com seus colegas sobre os triângulos da figura.
c) Podemos dizer que o retângulo ADEH é formado por 6 triângulos retângulos “iguais”? Discuta com seus colegas.
d) Os trapézios ABFH e BDEF são iquais (congruentes)? Discuta com seus colegas. (O Objetivo é que o aluno, intuitivamente desenvolva a noção de equidecomponibilidade entre esses polígonos são divididos em triângulos congruentes.
e) Pinte o trapézio ABFH. Ele representa que fração do retângulo ADEH?
f) Pinte o quadrilátero CDEF. Ele representa que fração do retângulo ADEH?
g) Some $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, sem usar MMC, mas apenas usando a figura.

Argumentação Geométrica da Atividade 5.4.5

O retângulo ADEH é dividido em dois trapézios congruentes, ambos tem a mesma altura e base maior medindo 2 unidades e base menor medindo 1 unidade. Logo pintar um desses trapézios é pintar $\frac{1}{2}$ do retângulo e o outro retângulo CDEF pintado é $\frac{1}{3}$ do retângulo ADEH. Segue que tudo que foi pintado dá $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Note agora que podemos olhar o retângulo ADEH dividido em 6 triângulos retângulos congruentes (a congruência deles vêm do caso LAL). Desta forma, teremos 5 triângulos pintados de um total de 6. Cada triângulo é isto é $\frac{1}{6}$ do todo. Portanto, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

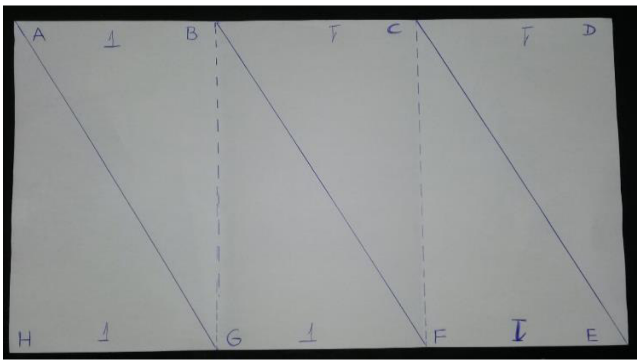


Figura 57: Retângulo com dobras realizadas.
Fonte: o Autor

5.4.6 Construção da Parábola

Material utilizado: uma folha de papel vegetal com o desenho com os traços dos seguintes elementos: a reta que será a diretriz; conjunto de retas perpendiculares à diretriz; e o ponto que será o foco.

Pré-requisito: conhecimento da definição de parábola (lugar geométrico dos pontos que equidistam a uma reta data e a um ponto dado).

Público Alvo: Alunos do nono ano do fundamental ou primeiro ano do ensino médio.

Utilizamos, sem conhecimento dos alunos, que dada uma reta, para diretriz da parábola, e dado o ponto F, seu foco, podemos obter pontos da parábola da seguinte forma: escolhemos um ponto A da diretriz, traçamos o segmento AF, traçamos a mediatriz de AF (denotemos M o ponto médio de AF) e traçamos a reta perpendicular a diretriz passando por A. Denotamos B o ponto obtido da interseção das duas retas traçadas (Figura 49). Então o triângulo ABF é isósceles de base AF, pois os triângulos ABM e FMB são congruentes (caso LAL). Logo B é ponto da parábola.

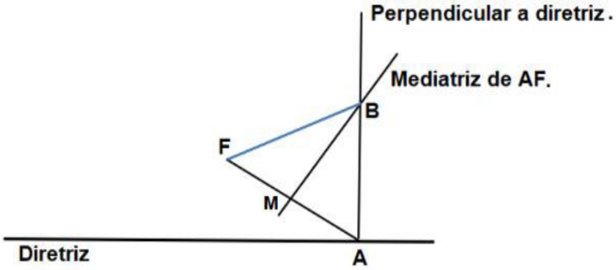


Figura 49. Determinando pontos da parábola
Fonte: o Autor

Instruções e perguntas.

a) Sobreponha os pontos O e F fazendo a dobra e marque X no ponto obtido da interseção da dobra com a reta que contem OF.
b) Sobreponha os pontos A e F fazendo a dobra e marque X no ponto obtido da interseção da dobra com a reta paralela a OF e que contem A.
c) Repita o processo para os pontos assinalados na reta que contem AO, marcando com X os pontos (Figura 50).
d) Que tipo de curva devemos obter se tomarmos grande número de pontos na reta que contem OA? Conjecture com seus colegas o nome da curva que aparece.

e) Explorando as dobras feitas, você e seus colegas são capazes de explicar porque os segmentos AJ e FJ são congruentes? Quais pares de segmentos são congruentes, além desses?

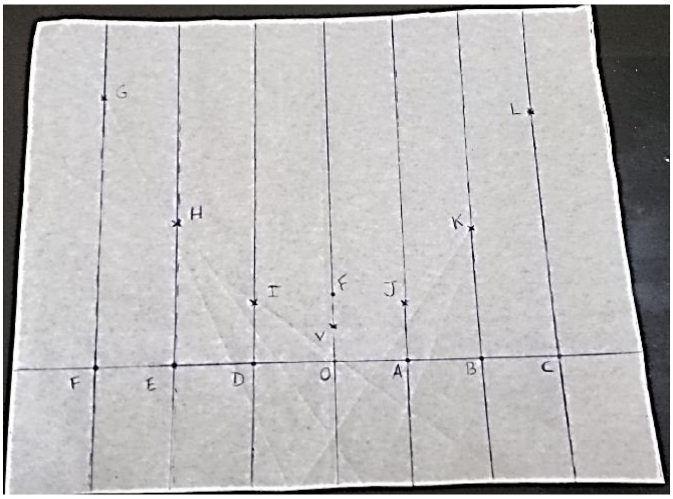


Figura 50. Folha com os pontos de interseção das dobras com as perpendiculares à diretriz.
Fonte: o Autor

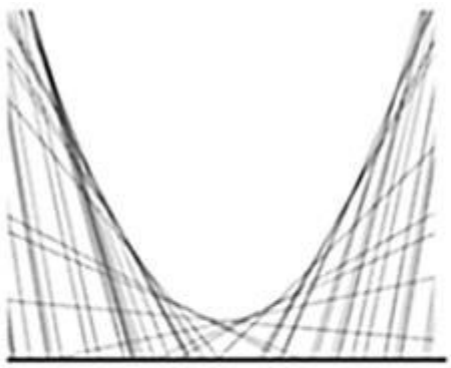


Figura 51: Visão das dobras e do esboço da parábola.
Fonte: o Autor

Nas próximas seções deste capítulo propomos a aplicação dos conceitos geométricos estudados na construção de poliedros.

5.4.7 Construção do cubo

Material utilizado: seis folhas (espessura ofício, A4 ou color set) em forma de quadrado.

Observação: A folha deve ser de uma cor viva ou branca e ser pintada de canetinha com uma cor forte, tudo feito a fim de chamar a atenção do bebê. Sugere-se trabalhar com quadrados 16cmx16cm.

Passos:

1- Dobre o quadrado ao meio.
2- Desdobre.
3- Sobreponha os lados paralelos do quadrado a dobra que dividiu o quadrado ao meio
4- Vire a figura de modo a ver um retângulo
5- Faça uma dobra de modo a levar o vértice superior esquerdo do retângulo até o ponto médio do lado inferior do retângulo.
6- Sobreponha o triângulo branco restante de forma a obter um trapézio.
7- Leve o vértice inferior direito da base maior do trapézio até o vértice superior esquerdo da base menor do trapézio, restando o triângulo branco que deve ser sobreposto até obtermos um paralelogramo.
8- O paralelogramo em questão é composto de dois triângulos isósceles e cada um destes deve ser dobrado pela sua altura de modo a obter um quadrado.
9- Desfaça as dobras do passo 8
10- Note que o paralelogramo sobre a mesa tem apenas um recorte que fica à vista.

O processo deve ser repetido com os outros cinco quadrados e ao final teremos seis quadrados, cada qual com uma entrada encaixante e duas partes encaixantes (abas). Ao final depois de encaixadas as seis peças teremos um belo cubo como na figura acima em caso de optarmos por usarmos folhas de várias cores color set.

A confecção do cubo está disponível na mídia. Indicamos, por exemplo https://www.youtube.com/watch?v=WasvUFXmACk

5.4.8 Construção do tetraedro regular

Para a construção do tetraedro regular seguiremos algumas etapas iniciando com uma construção básica.

Construção de Retângulos Especiais

Usamos na confecção do tetraedro regular o retângulo de dimensão especial: $\sqrt{3}$ de comprimento por 1 de largura. Utilizamos dois retângulos destes. Os passos para a confecção dos retângulos especiais são os seguintes:

1- Iniciamos com uma folha quadrada ADCB e a dobramos ao meio. Desdobramos. Chamamos EF esta dobra, em que E pertence ao lado AD e F pertencente ao lado BC.

2- Seja BC um dos lados do quadrado que é perpendicular a esta dobra criada no passo anterior. Fixemos B e levemos o vértice C até que o mesmo coincida com um ponto da dobra feita no passo anterior. Seja J esse ponto. Marquemo-lo. Façamos uma dobra que passa por J e é paralela ao lado AD e cortemos o papel nesta dobra.

3- Cortemos agora o papel pela dobra EF. Temos então nossos retângulos especiais.

As fotos dos passos 60, 61 e 62 ilustram os passos descritos (Fonte: Druck (2009).

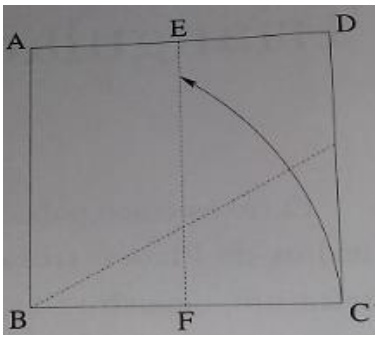


Figura 60

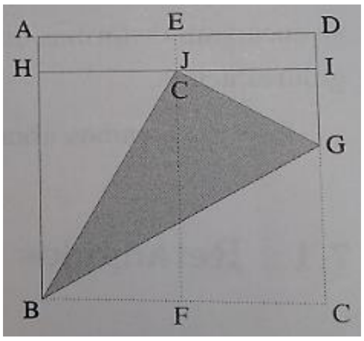


Figura 61

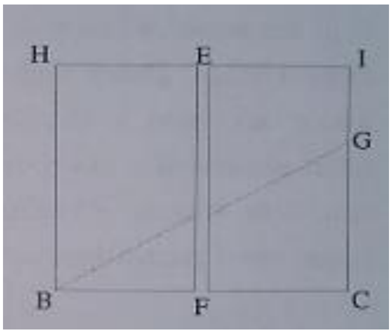


Figura 62

Observação. Notemos que podemos pensar que o lado do quadrado mede 2 unidades quaisquer. Já o triângulo BJC é equilátero, por construção. Desta forma sua altura também é mediatriz. Logo, divide o lado de medida 2 ao meio. Tendo assim altura medindo $\sqrt{3}$, resultado a que chegaremos aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo JFC ou JFB. Portanto, a razão entre JF e FC é a mesma que entre JF e FB (a razão será $\sqrt{3}$).

Com os retângulos criados, construímos, a seguir, as duas peças necessárias para a confecção do tetraedro: chamaremos uma peça de unidade X e a outra de unidade Y.

Construção da Unidade X

1- Seja ADCB um retângulo especial com med(AB) = med(DC) = $\sqrt{3}$ e med(AD) = med (AC) = 1. Façamos uma dobra de modo a levar o vértice inferior esquerdo B até o vértice superior direito D.

2- Chamemos esta dobra de EF tal que E pertence ao lado AB e F pertence ao lado DC.

3- Leve ED sobre EF. Notemos que ED e EF irão coincidir após esta dobra, isto é, são congruentes. Observemos que aparecerá um triângulo de lado BC que está mostrado em cinza no desenho e a nova dobra é paralela a AD.

4- Dobremos este triângulo para cima (ele fica sobre o triângulo maior).

5- Viramos o papel de modo que o triângulo retângulo menor do passo anterior fique no lado inferior esquerdo.

6- Levemos DF sobre FE e notemos que eles coincidem (congruentes). Aparece um triângulo retângulo de lado AE que está em cinza no desenho.

7- Dobre-o para cima. Este triângulo estará agora por cima de um triângulo retângulo como aconteceu no passo 2.

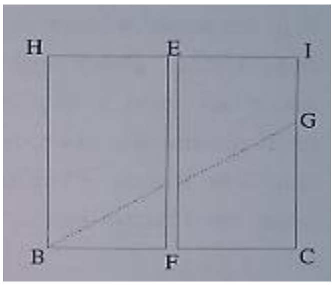
8- Desdobre e vire o papel de modo a obtermos um paralelogramo com diagonal DF(ver figura).

9- Atenção às retas paralelas do paralelogramo: a que passa por F e aquela que passa por E. Leve o vértice superior direito do paralelogramo sobre a reta que passa por E e é paralela à reta que passa por F.Analogamente, leve o vértice inferior esquerdo sobre a reta que passa por F e é paralela à reta que passa por E.(veja figura)

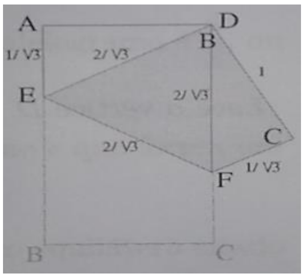
10- Ao final teremos um losango com vértice superior esquerdo F e vértice inferior esquerdo E.

Observação: Depois do passo 10, juntemos os dois triângulos equiláteros do losango, levando o vértice superior esquerdo a coincidir com o inferior direito e desdobre voltando ao losango do passo 10.

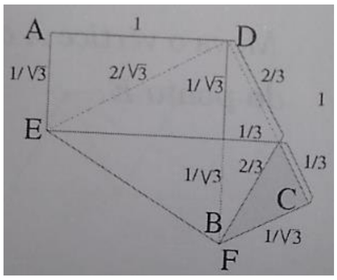
Veja as fotos abaixo que nos mostram todos os passos ordenadamente (Fonte: Druck (2009).



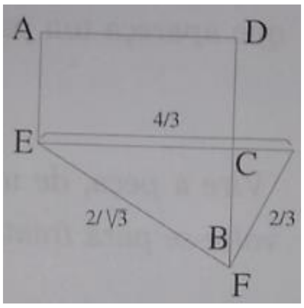
63: 1º passo



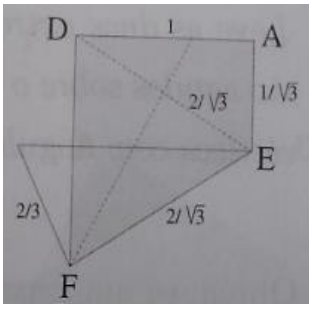
64: 2º passo



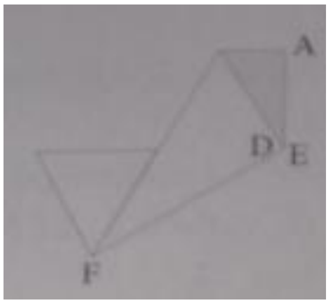
65: 3º passo



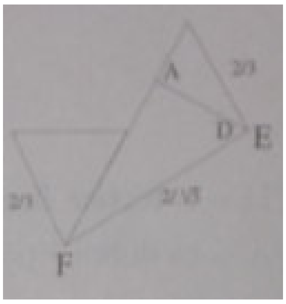
66: 4º passo



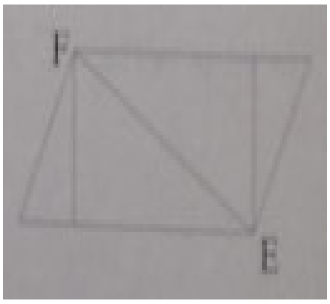
67: 5º passo



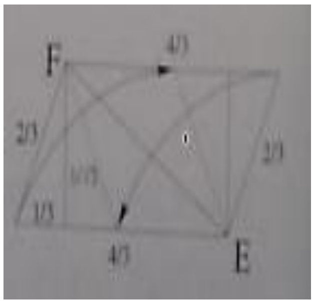
68: 6º passo



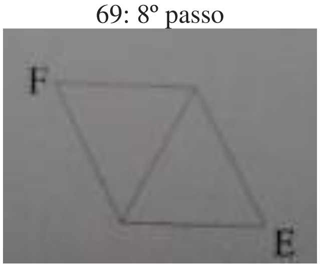
69: 7º passo



69: 8º passo



70: 9º passo



71: 10º passo

Construção da unidade Y

É feita de modo análogo a confecção da unidade X, sendo a diferença que em iniciamos levando o vértice inferior direito até o vértice superior esquerdo e fazendo todos os demais passos como na confecção da unidade X até obtermos ao final também e depois dois triângulos equiláteros que irão se sobrepor e depois iremos desfazer a última dobra para voltarmos ao paralelogramo. Vejamos, na Figura 72, o início. Depois fazemos análogo a unidade X.

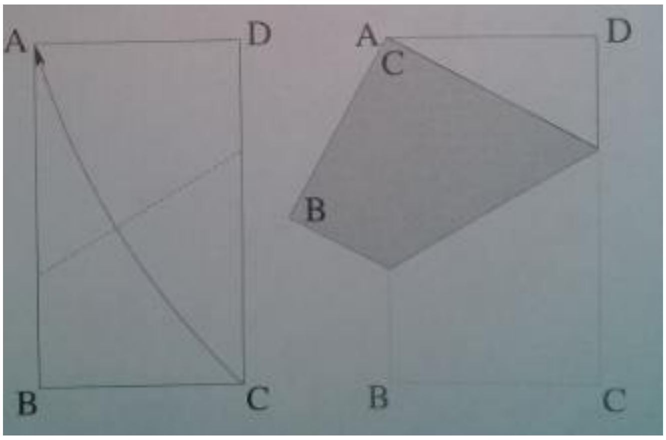


Figura 72 Fonte: Passo inicial para construir a unidade Y
Fonte: Druck (2009).

Encaixe das peças do tetraedro

As duas peças do tetraedro prontas devem ter, cada, a forma um paralelogramo decomposto em quatro triângulos equiláteros (Figura 73).

Notemos que cada peça já fechada dá um tetraedro. Na realidade, precisaremos de duas peças, pois não iremos usar fita adesiva e queremos uma maior rigidez.

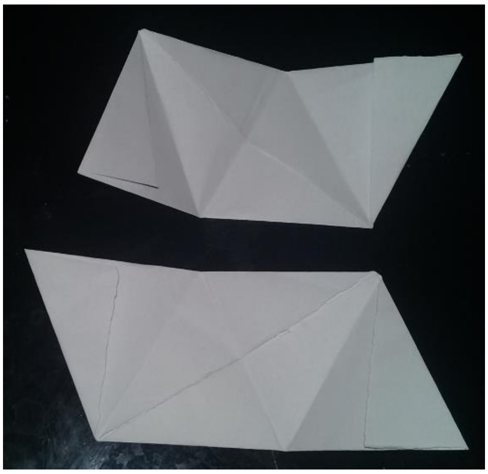


Figura 73. Dois tetraedros decompostos.
Fonte: o Autor

Segue, nas figuras 74 e 75, como deve ser feito o encaixe. Depois fechamos sem preocupação com abas que devem ser encaixadas. Ao final vemos as abas que deverão ser usadas dependendo de como for realizado o fechamento.

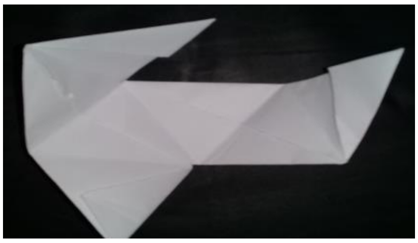


Figura 74: Encaixe de peças X e Y
Fonte: o Autor

Figura 75: Tetraedro obtido de encaixes
Fonte: o Autor

6. ORIGAMI NA EDUCAÇÃO INFANTIL E EM CASA

Neste capítulo apresentamos uma proposta de atividade com origami na Educação Infantil e, consequentemente, mostramos que o origami pode começar em casa e que os primeiros mestres de tal prática devem ser o pai e mãe, pois em se tratando de ensino a afetividade é fundamental para eficiência e não há pessoas melhores que os pais para dar esta afetividade. Apresentaremos a prática do origami desenvolvida no nível zero de Van Hiele no momento em que os bebês saem da maternidade. Todas as informações dadas neste capítulo estão baseadas no livro Aletramento Materno de Kátia Xavier

6.1. GLENN DOMAN

Nesta seção escrevemos sobre Glenn Doman, seu método, sua instituição nos Estados Unidos, trabalho e como este fisioterapeuta influenciou a área educacional, sendo que aqui no Brasil, uma das adaptações de seu método ganhou o nome de Aletramento Materno, método educacional criado e desenvolvido no Brasil pela psicopedagoga Kátia Xavier.

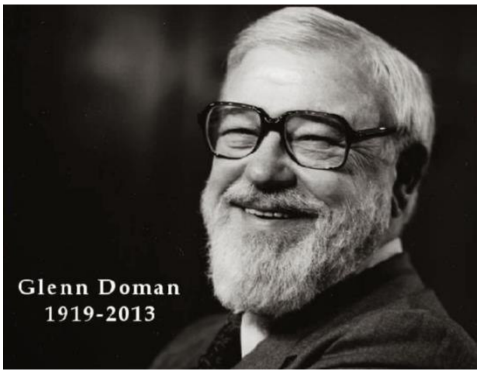


Figura 19: Foto de Glenn Doman
Fonte: http://www.veras.org.br/<acessado em 14/10/2018>

Glenn Doman foi um fisioterapeuta norte americano(informação do site do Institutos Véras) que muito influenciou na área educacional. Apesar de jamais ter sido pedagogo foi responsável por uma revolução na educação infantil, ou como ele gostava de chamar, uma "suave revolução". Iniciou os trabalhos em 1950 em conjunto com uma equipe de médicos, fisioterapeutas, fonoaudiólogos, pedagogos e enfermeiros para tratar de crianças com sérios problemas de lesão cerebral no Instituto fundado por ele: Instituto de Desenvolvimento do Potencial Humano. Nesta época, tratamentos multidisciplinares eram raros e qualquer fisioterapia para voltar a ter movimentos era apenas motora. O método cirúrgico era o indicado para muitos casos de crianças com lesão cerebral. A equipe de Doman, porém, pensava em estimular o cognitivo, pois o cérebro é o responsável por vários movimentos, em teoria, evitando com isso a cirurgia. A tese que sua equipe defendia era a de reproduzir os padrões neurológicos de crescimento de uma criança normal na criança com cérebro lesionado.

No Brasil uma grande defensora de Doman é Kátia Xavier, que criou na área educacional o chamado *Aletramento Materno* que segundo a própria Kátia Xavier (2008) é uma adaptação do trabalho do fisioterapeuta norte-americano para a área de pedagogia e o nome é devido ao próprio ato de amamentar (aleitamento) logo após o nascimento do bebê, só que ao invés do leite, as palavras são o alimento do recém-nascido.Este ato de alimentar acontece quando a criança é apresentada a cartões plastificados com palavras digitadas em letra preta e grande e o adulto lê em voz alta para o bebê o cartão mostrado.

A principal obra de Glenn Doman é o livro "Como Ensinar seu Bebê a Ler". Nesta obra está cabalmente demonstrado que o cérebro humano faz maravilhas desde que estimulado de forma adequada, contínua e organizada. Este livro surgiu muito mais pela iniciativa dos pais que tiveram filhos com algum comprometimento cerebral e jamais desistiram. No instituto fundado por Glenn Doman aconteceram fatos extraordinários não só para aquela época(1950-1960) como para os dias de hoje: crianças e bebês não só melhoraram e alguns voltaram a obter os movimentos, mas começam a ler com 2 ou 3 anos de idade. Os depoimentos e casos são muitos e a pedido dos pais, Glen Doman escreve o livro "Como Ensinar seu Bebê a Ler" a fim de ajudar outras pessoas que possam ter filhos com comprometimento cerebral e não saibam como agir. O Método de Glenn Doman baseia-se em duas coisas: ver e ouvir.No caso dos cartões plastificados, as letras são grandes e vermelhas para estímulo visual e o adulto faz a leitura em bom som para haver o estímulo auditivo e o resto é o cérebro da criança ou bebê que faz. Assim bebês aprenderam a ler mesmo sem querer, havendo inicialmente até uma descrença dos profissionais que trabalhavam no instituto. Eles achavam inicialmente que não passava de estória de pais que supervalorizavam os filhos, mas com o passar do tempo os depoimentos coincidiram e vieram em avalanche, o que os levou a não mais negarem que bebês poderiam ler.

6.2 PRIMEIROS MESTRES: PAI E MÃE

Conforme Kátia Xavier (2008) antes da escola formal, a educação era realizada pelos escribas (aquele que na antiguidade dominava a escrita e a usava). Não havia ainda a figura do professor formado em uma universidade e apto a dar aula em uma determinada instituição de ensino (escola). Desta forma, aquelas famílias mais abastardadas, contratavam este “professor” da época ou era o próprio pai que ensinava ao filho e, tradicionalmente, a educação ficava quase que restrita aos homens. Apenas eles aprendiam e poderiam ensinar. Os preceptores (escribas, pais e em raríssimos casos mães) “especializavam-se” em ensinar a ler e outros, a escrever. Colocamos aspas para indicar que a especialização se dava de passagem de conhecimento e experiências de uns para os outros. Lembrando de que estamos a nos referir ao que acontecia não em toda sociedade antiga, mas na maior parte dessa sociedade, pois em alguns agrupamentos etnológicos como os Essênios, por exemplo, valorizou-se a figura da mulher e as mesmas foram grandes preceptoras nestas comunidades e louváveis mestras, daí afirmarmos que em raríssimos casos a mãe foi um preceptor.

Ainda segundo Kátia Xavier (2008), uma nova era do ensino inicia-se a partir do século dezenove com marco no ano de 1789 e vigora até os dias de hoje, século vinte e um. Governos ditam as novas regras do ensino e extingue-se a figura do “especialista”, dos pais e mães que ensinavam nos lares. É criada a instituição de fato chamada Escola e a ela cabe a educação formal. O ensino passa a ficar a cargo de um novo especialista: o professor formado em uma universidade (Escola de Ensino Superior), que teoricamente o torna apto à prática do ensino na Escola que inicia o trabalho com crianças a partir de seis ou sete anos de idade.

Atualmente, na maioria das famílias, pais e mães se ausentam de casa por várias horas para trabalharem e, dificilmente, há outras alternativas que deixar seus filhos em instituições especializada em Educação Infantil quando vão trabalhar. Nesse contexto apresentamos nossa proposta.

6.3 LEITURAS DO MUNDO POR MEIO DE OBJETOS

A primeira leitura que a criança faz do mundo ao redor, dá-se por meio de objetos que a cercam. Aprende a palavra mãe e quem é vendo e ouvindo. Na realidade, quando fala a primeira palavra propriamente dita, já existe muitas palavras e significações no cérebro e o que ela faz é exteriorizar uma das inúmeras destas já arquivadas. Há uma subestimação das capacidades e potencialidades infantis, mas aos poucos com novos avanços da neurociência este problema vai sendo dirimido.

O pesquisador e neurocientista Glenn Doman, em meados do século vinte, desenvolveu uma pesquisa muito séria a respeito das potencialidades e capacidades das crianças em tenra idade e descobriu que mesmo aquelas com deficiência cerebral, auditiva e visual, eram capazes de ler, e mais, o processo inicia-se com 2 a 3 meses de vida. Ressaltamos aqui que ler em tenra idade não quer dizer juntar sílabas para depois falar em bom som a palavra. As palavras são apresentadas em cartão com letras grandes e vermelhas e o adulto lê em voz alta e mostra ao bebê a palavra como um todo.

No âmbito do origami, esta leitura funcionará da seguinte maneira: os pais farão dobraduras de cubo, quadrados, pirâmides, triângulo, esferas, círculos e muitas outras formas geométricas. Em um primeiro momento o adulto mostra a forma e diz o seu nome em voz alta. Já em momento posterior, depois de já haver percebido no dia-a-dia da brincadeira que precisa mudar, recomenda-se que misture todas as formas geométricas no chão e comece a pedir para a criança pegar uma determinada forma geométrica e caso a criança acerte, abra um sorriso, dê um beijo e a elogie, mas caso a criança erre, também abra um sorriso, dê um beijo. Note que ao fazer isso, estamos trabalhando geometria com bebês no primeiro nível de Van Hiele. O mais interessante é que muitas vezes, o adulto envolve-se de tal forma que ele mesmo sente a necessidade de aprender novos tipos de origami para trazer e apresentar aos pequenos.

6.4 DESDE O BERÇO

Ao sair da maternidade o bebê pode e deve ser apresentado ao mundo da geometria de modo didático e eficiente. Os seus pais devem, sempre que possível, estimulá-lo nos horários em que está alimentado e calmo, pois nessa fase é muito comum a criança chorar e ficar irritada quando está como fome. Sugerimos que o pai ajude a mãe não só levando água para que beba e produza mais leite para o pequeno, como também alimente seu filho com Geometria por meio dos móbiles.

O método é muito simples e divertido: os adultos irão elaborar por meio do origami um móbile com formas geométricas como, por exemplo, quadrados, cubos, pirâmides, triângulos, círculos e esferas. Notemos que algumas são bidimensionais e outras tridimensionais. Em alto e bom som o adulto fala o nome quadrado e o balança para a criança; neste momento dá um belo sorriso para o bebê. Deverá fazer o mesmo com o cubo. Repare que ao fazer isto em várias sessões de cinco minutos diários não irá irritar a criança, pelo contrário, o pequeno irá ter um vínculo grande também com o pai e não só com a mãe que o amamenta e desde cedo começa pelo nível zero de Van Hiele a fazer diferença entre cubo e quadrado, pirâmide e triângulo, esfera e círculo.

6.5 CONTEXTOS DE TRANSFORMAÇÃO POLÍTICO E SOCIAL

Trabalhar origami em casa pode ser visto como uma ação cidadã de pais que tem uma visão crítica da sociedade em que vivem. Vamos nos valer um pouco da história da educação até o século dezoito do Brasil colonial e da segunda metade do século dezenove para entendermos melhor a afirmação feita acima.

Segundo Kátia Xavier de Azevedo, em seu livro Aletramento Materno, até o século dezoito, a família era a maior responsável pela educação dos filhos e foi na segunda metade do século dezoito que surge uma nova proposta de educação e responsabilidade vinda do Estado.

“A nova família nuclear deveria se coadunar a uma dupla exigência do Estado: a formação de indivíduos submissos ao Estado e o desenvolvimento de sentimento de Pátria ou Nação, pouco presente no Estado colonial.” (XAVIER, 2011, p.27).

Vê-se desta forma que educação como dever do Estado e a ideia difundida da incapacidade da família educar e a transferência quase que total nos dias de hoje para instituição escolar pública tem suas origens num passado colonial não tão longe em que a finalidade seria formar uma massa acrítica e “patriótica”.

> Neste período (século dezenove), os médicos higienistas são chamados para desempenhar um papel fundamental. Em nome da saúde, estabeleceram aliança com as crianças e as mulheres, visando fragmentar o poder patriarcal. valendo-se da elevada taxa de mortalidade infantil, os médicos sanitaristas e pedagogos leigos defendiam o afastamento da família no cuidado com as crianças(XAVIER, 2011, p.27)

6.6 GEOMETRIA PARA BEBÊS: MÓBILES GEOMÉTRICOS

Figura 58

Figura 59

Fonte: http://emef-luigi.blogspot.com/2017/07/mobile-com-solidos-geometricos.html

Fonte: http://emef-luigi.blogspot.com/2017/07/mobile-com-solidos-geometricos.html

Os móbiles geométricos servem para iniciar os bebês no ensino de geometria. Recomendamos que as figuras geométricas sejam de cores vivas, isto é que chamem bastante a atenção dos bebês. Ver e ouvir são fundamentais para o aprendizado, isto é a base do método de Glen Doman.

O adulto pode se quiser fechar as figuras geométricas com fitas adesivas, após preencher o seu interior com pedrinhas. Tudo deve ser muito bem vedado para que ao balançar a figura geométrica no móbile, as pedrinhas não caiam sobre os bebês e o adulto consiga chamar a atenção da criança com o som produzido. Exemplificando: um pai ou mãe balança o cubo e diz o seu nome em voz alta e ao lado do cubo sugerimos estar um quadrado que também deve ser balançado posteriormente (este não precisa de som), pois a criança já deve estar olhando devido ao procedimento feito com o cubo, apenas deve ser dito o seu nome em alto e bom som da mesma forma que procedemos com o cubo. Passaremos abaixo um tutorial da confecção de algumas figuras geométricas para o adulto construir o móbile. Quanto ao resto, basta usar linha e varetas de pipa ou até apenas linha, tudo de acordo com a criatividade do adulto.

‘’’’7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscamos neste trabalho minimizar as dificuldades do aprendizado de Geometria na Educação Básica e sugerir uma nova forma de trabalhar com as dobraduras que, no início, eram apenas belos objetos de artes: flores, pássaros, animais etc. Aqui, elas são ferramentas para o aluno observar, analisar, verificar e concluir propriedades geométricas. A sua utilização no ensino possibilita, segundo a teoria de ensino aprendizagem de Vygotsky, a visualização de objetos matemáticos sem a necessidade do mesmo estar presente no espaço e tempo em questão.

Acreditamos que as atividades propostas sejam capazes de gerar no aluno um estado de aprendizagem real, isto é, entendem e internalizam o que entenderam dando-lhes capacidade para solucionar novos problemas. A maneira com que é abordada a geometria neste trabalho, embasada no Modelo de Van Hiele e na teoria de ensino aprendizagem de Vygotysky, facilitará o trabalho do professor como elemento de mediação em sala de aula e ao mesmo tempo deve fazer com que o aluno sinta como pode ser prazeroso e lúdico o caminho da descoberta matemática quando esta é mediada de forma correta utilizando-se de perguntas devidamente elaboradas.

Este trabalho visa fazer também motivar professores e instituições no repensar no processo ensino-aprendizagem. Cabe ressaltar que, em relação à Educação Infantil, já há escolas aqui mesmo no Brasil que trabalham com o método Doman de ensino e realizam oficinas de uma semana para pais que queiram estimular o bebê de forma eficaz e correta, um dos exemplos é a Escola AeD em Brasília.

Sabemos que há muito sobre o assunto abordado nesta dissertação e propor um novo questionamento ao professor, em particular o de Matemática, de que se há novos instrumentos para o ensino de Geometria, estes nem sempre dependem de uma tecnologia avançada (computadores), porém passam pela motivação do professor que ensina e do papel que tudo aceita, que em nosso trabalho é chamado de dobradura.

Ciente estamos, de que o objetivo geral auxiliar o professor no ensino de Geometria em sala de aula , pode acontecer parcialmente, pois as turmas são sempre muito heterogêneas e em muitos casos as salas lotadas não permitem o bom desenvolvimento do Trabalho, mesmo assim acreditamos que este trabalho sirva para que futuramente a geometria seja pensada e trabalhada de forma construtiva por meio da exploração de dobraduras e como desdobramento do mesmo, vislumbramos a matemática iniciando em casa , os pais como parceiros da escola, e estas oferecendo oficinas de dobraduras e origami, o que poderia ser feito desde a Educação Infantil .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARVALHO, Paulo Cesar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto Cesar. **A Matemática do Ensino Médio Vol 2**. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kioko Saito. **Explorando Geometria com Origami**. Universidade Federal de São Carlos, 2009. Disponível em https://www.dm.ufscar.br/~yolanda/origami/origami.pdf. Acesso em 14 de Dezembro de 2017.

DRUCK, Sueli. **Explorando o Ensino de Geometria**. Atividades vol 2. Brasília: OBMEP, 2009.

FRIEDRICH Frobel. Disponível em: <http://froebel-museum.de/pages/de/friedrich-froebel.php>. Acesso em 14 de Dezembro de 2017.

GARCIA, Simone dos Santos; KALEFF, Ana Maria M.R; REI, Dulce Monteiro. **Quebra-Cabeças Geométricos e Formas Planas**. Niterói: Ed. UFF, 2005.

HAYASAKA, Enio Yoshinori; NISHIDA, Silvia Mitiko. **Origami na Educação.** Disponível em: <http://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami_educacao.htm>. Acesso em 14 de dezembro de 2017.

HAYASAKA, Enio Yoshinori; NISHIDA, Silvia Mitiko. **Pequena História sobre Origami.** Disponível em http://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm. Acesso em 14 de dezembro de 2017.

HIELE, P. M. VAN. **El Problema de la Comprensión en Conexión con la Comprensión de los Escolares en el Aprendizaje de la Geometría** (De Problematiek van het inzicht Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof). Utrecht: Utrecht University, 1957. (Tradução Gutiérrez, Angel et all, 1990).
Disponível em https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf

KALEFF, Ana Maria M. R. **Vendo e Entendendo Poliedros**. Niterói-RJ: Ed UFF, 2003.

KANEGAE, Mari. **Breve histórico do origami no Brasil**. Disponível em: <http://www.kamiarte.com.br/breve_historico2.htm>. Acesso em 14 de dezembro de 2017.

LANG. Roberto J. **Axiomas de Huzita-Hatori.** Disponível em: <http://www.langorigami.com>. Acesso em 15 de dezembro de 2017.

LIMA, Elon Lages. **Conceituação, manipulação e aplicações**. Rio de Janeiro: SBM, RPM vol 41, p. 1-8, 1999.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria**, 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

MARISTAS, Irmãos. **Geometria Elementar**. Ceará: VestSeller, 2009.

MONROE, Camila. Revista Nova Escola, março de 2018.

https://novaescola.org.br/conteudo/274/vygotsky-e-o-conceito-de-aprendizagem-mediada acessado em 05/10/2018

NASSER, Lilian. **O Desenvolvimento do Pensamento em Geometria**. Boletim-GEPEM, Rio de Janeiro,n.27, p.93-99, 1990.

OLIVEIRA, Marcelo Rufino; PINHEIRO, Márcio Rodrigo da Rocha. Coleção **Elementos da Matemática 2 Geometria Plana**. Ceará: VestSeller, 2010.

PAGANOTTI, Ivan. Vygotsky e o conceito de zona de desenvolvimento proximal. **Revista Nova Escola** 01 de Maio de 2011 (Paganotti, 2011) <https://novaescola.org.br/conteudo/1972/vygotsky-e-o-conceito-de-zona-de-desenvolvimento-proximal, acessado em 05/102018>

VYGOTSKY, L. S. **A Formação Social da Mente**. São Paulo: Martins Fonseca Editora, 1991.

XAVIER, Kátia. **Aletramento Materno**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2011.