UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PROGRAMAÇÃO LINEAR: UMA POSSÍVEL ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO

GUTEMBERG LEÃO BRASIL

MANAUS
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

GUTEMBERG LEÃO BRASIL

PROGRAMAÇÃO LINEAR: UMA POSSÍVEL ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Cristóvão Mesquita Silva

MANAUS
2018

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

B823p

Brasil, Gutemberg Leão
Programação Linear: uma possível abordagem no ensino médio / Gutemberg Leão Brasil. 2018
74 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Roberto Cristóvão Mesquita Silva
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Programação linear. 2. Ensino médio. 3. Geogebra. 4. OR simplex. 5. Contextualização. I. Silva, Roberto Cristóvão Mesquita II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Gutemberg Leão Brasil

PROGRAMAÇÃO LINEAR: UMA POSSÍVEL ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em. 30 de novembro de 2018

BANCA EXAMINADORA

....
Prof. Dr Roberto Cristóvão Mesquita Silva (Orientador)
Universidade Federal do Amazonas – UFAM

....
Prof. Dr Roberto Antônio Cordeiro Prata (Membro)
Universidade Federal do Amazonas – UFAM

....
Profa. Dra. Jeanne Moreira de Souza (Membro Externo)
Instituto Federal do Amazonas – IFAM

AGRADECIMENTOS

A minha mãe Dona Maria Salomé Pantoja Leão que cuidou de mim e me deu todo o amor que um filho poderia querer .

A meu pai Manoel Leão que também cuidou e me deu um exemplo de como ser um ótimo pai.

Aos meus familiares Dani Leão, seu Lourival Araujo dos santos, Hoffmam Leão e Pedro Leão que são, assim como meu pai e minha mãe mencionados acima, a minha verdadeira familia para todo o sempre.

A minha parceira de vida Maêyssa Mikaela pelo apoio me dado, pelo nosso futuro filho e pelo incentivo de sempre.

A todas as pessoas que me acompanharam e incentivaram na minha caminhada até aqui, especialmente aos meus colegas de turma do curso.

Ao meu orientador que sempre me motivou desde o início do trabalho sempre fazendo as correções precisas para que o trabalho seguisse fluindo.

Aos orgãos públicos que disponibilizam este programa de mestrado, o qual eu tiver a oportunidade de participar e que se constituiu de um engradecimento pessoal e profissional para mim.

RESUMO

Este trabalho fala sobre programação linear (PL), discutindo e expondo seus conceitos básicos, os métodos de resolução de um problema em PL (especificamente o método gráfico e o método simplex), propondo o uso dos programas Geogebra e OR Simplex, como ferramentas de auxilio para a resolução de problemas. De modo geral, este trabalho busca relacionar a PL com a contextualização do ensino de matemática, com a técnica de estudo dirigido e ainda com, a modelagem matemática, para assim propor alguns questionamentos e pontos importantes a respeito de uma possível abordagem da mesma no ensino médio, com o objetivo de enriquecer as alternativas possíveis que o professor de matemática possui para trabalhar com uma matemática mais contextualizada, interdisciplinar e diversificada.

Palavras-chave: Programação Linear, Ensino médio, Geogebra, OR Simplex, Contextualização.

ABSTRACT

This work talks about linear programming, discussing and exposing their basic concepts, methods of solving a problem in PL (specifically the graphical method and the simplex method) proposing the use of the programs Geogebra and OR Simplex, as a tool to help to solve these problems. In general, this study seeks to relate the PL the contextualization of teaching mathematics, the technique of study directed and even with the mathematical modeling, thus to propose some questions and important points regarding a possible approach to PL for secondary education with the aim of enriching the possible alternatives that the mathematics teacher has to work with a mathematics more contextualized, interdisciplinary and diverse.

Keywords: Linear Programming, secondary education, Geogebra, OR Simplex, Contextualization.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^n$	Conjunto das n-uplas (ênuplas) ordenadas de números reais.
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$\equiv$	Congruente.
$\cong$	Aproximado.
$\sim$	Semelhante.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\cap$	Interseção.
$\cup$	União.
$\in$	Pertence.
$\notin$	Não pertence.
//	Paralelo.
$\perp$	Perpendicular.
$\overline{AB}$	Segmento AB.
AB	Medida do segmento AB.
$\square$	Indica o fim de uma demonstração.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A programação linear (PL), que faz parte de um campo maior de pesquisa, que é a pesquisa operacional, foi desenvolvida durante a segunda guerra mundial com o objetivo de resolver diversos problemas operacionais militares na época. É uma área de pesquisa fascinante e que abrange não somente a matemática, mas diversas outras áreas de conhecimento assim como diversos problemas reais e de contextos bastante variados.

Tendo em vista o contexto que envolve a programação linear e ainda seu relacionamento direto com o conteúdo de sistemas lineares, este trabalho tem como objetivo levantar questionamentos e pontos importantes a serem levados em consideração no desenvolvimento de uma possível abordagem em sala de aula. Para isso, buscou-se explorar a programação linear e seus conceitos teóricos básicos assim como algumas de suas aplicações em alguns problemas, relacionando essa área de pesquisa com a contextualizacao do ensino de matemática, com tecnica de estudo dirigido e ainda com a modelagem matemática.

De modo geral, o trabalho conta com um levantamento bibliográfico a respeito de cada um dos tópicos mais importantes citados acima, assim como, um breve historico e desenvolvimento da teoria matemática sobre a programação linear visando explorar os método gráfico e o método simplex que são métodos mais conhecidos de resolução de problemas em PL. Além disso, serão introduzidos os programas geogebra e o OR Simplex, como ferramentas que auxiliarão na resolução dos problemas em programação linear trabalhados durante o decorrer dos capítulos.

Em relação a estrutura deste trabalho, o mesmo está dividido em cinco capítulos mais as considerações finais, os quais são; capítulo 1: diz respeito ao ensino de matemática com tópicos de educação que estão relacionados com a Programação Linear (PL); capítulo 2: é um levantamento histórico a respeito da programação linear; capítulo 3: aborda, além dos conceitos matemáticos fundamentais para o desenvolvimento da PL, os dois mais conhecidos métodos de resolução de problemas em programação linear: o método gráfico e o metodo simplex, onde ainda será introduzido os recursos Geogebra e o OR Simplex como ferramentas para auxiliar na resolução dos problemas em PL; O capítulo 4: busca fazer uma aplicação em alguns problemas dos métodos gráficos e simplex descritos e discutidos no capítulo anteior e também propor utilização dos recursos Geogebra e OR Simplex durante a resolução desses problemas. o capítulo 5: discorre a respeito de possíveis situações; relevantes a serem levadas em consideração ao desenvolver uma abordagem para trabalhar a programação linear no ensino médio; E por fim, as considerações finais apresentam uma visão final a respeito dos objetivos e conteúdos discutidos neste trabalho assim como uma discussão a sobre a possíveil abordagem da Programação Linear no ensino médio.

Capítulo 1

Ensino de Matemática

1.1 Contextualização do ensino de matemática

É fato que no atual cenário brasileiro grande parte do professores buscam os diversos meios e as mais variadas estratégias para atrair e envolver os alunos nas disciplinas do curriculo escolar, principalmente quando a disciplina em questão é a de matemática, onde ensina-la é um desafio cada vez maior. Tendo isso em vista, buscar, promover e ainda incentivar os mais diversos meios e estratégias que possam tornar o processo de ensino-aprendizagem o mais eficiente possível, se constitui como uma contribuição importante para esse atual cenário brasileiro.

Segundo Veiga [20] o exercício da profissão do professor configura simultaneamente procedimentos, ensino de conteúdos e estratégias para desenvolver um processo de ensino e aprendizagem que facilite ao educando avançar nos conhecimentos. Além disso, segundo o que consta nos Paramentros Curriculares Nacionais (PCN) [12] a matemática deve estar ao alcance de todos, cuja democratização do seu ensino deve ser uma meta prioritária a ser alcancada pelo professor, devendo-se ainda ser destacado dois aspectos básicos para a mesma: relacionar observações do mundo real com representações e relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos.

Diante disso, pode-se observar a ideia de que são necessárias estratégias para o ensino de matemática, e ainda, a busca pela sua contextualização com o intuito de promove-las. Tendo isso em vista, os domínios de estratégias de ensino e a contextualização do ensino, bem como a modelagem matemática, podem oportunizar ao professor o desenvolvimento de um processo de ensino-aprendizagem mais produtivo e viável para seus alunos e consequentemente também mais proveitoso para si.

É importante entender que não há um único caminho para o ensino-aprendizagem de matemática ou de qualquer outra disciplina, e dentro das várias discussões existentes, segundo o PCN [12], a contextualização é um dos caminhos que vêm sendo apontados como funcional e eficiente em seus resultados.

Buscando então ideias acerca desse tema, pode-se dizer que, segundo Santos e Oliveira [17], a contextualização é compreendida como uma forma de transformar a matemática em um instrumento útil à realidade de cada aluno, não no sentido de trabalhar apenas os conteúdos que fazem parte da vida dos educandos, mas sim de utilizá-los como exemplificações desde que sejam aplicáveis a seus contextos, e nesse sentido o PCN [12] explicita que o conhecimento só é pleno se for mobilizado em situações diferentes daquelas que serviram apenas para lhe dar origem. Dito isso, pode-se dizer então que a contextualização não se restringe apenas a trabalhar os conteúdos que podem ou não estar presentes na do dia a dia dos alunos, mas também em possibilitar que a matemática transite em diversos contextos que busquem contribuir na aquisição de saberes do aluno.

Para concluir esta discussão, os PCN [12] evidenciam diversos pontos a respeito do uso da contextualização em sala de aula, cujos principais são: a relação do aluno com o objeto estudado e sua participação na construção dos saberes, onde o mesmo deixa de ser um ouvinte e começa a fazer parte dessa construção, em outras palavras, o discente deixa de se tornar um memorizador de conhecimentos, onde ainda é motivado e instigado a compreender o sentido dos conteúdos de sua aprendizagem e a enxergar o vínculo entre as demais áreas de estudo, e também a relação dos conteúdos com a sua realidade sociocultural.

1.2 A técnica de estudo dirigido

Ao iniciar a discussão a respeito de algumas noções sobre o estudo dirigido é necessário antes definir o que seria uma estratégia de ensino. Segundo Mascaretti [11], estratégia é toda organização e condução de ações e ideias, para se alcançar um objetivo a partir de uma situação dada. Nesse sentido todos os procedimentos de ensino e aprendizagem podem ser considerados como estratégias, tais como elaboração de conteúdo, metodologia utilizada, avaliação proposta, etc.

Corroborando com pensamento acima, Okane e Takahashi [14] afirmam ainda que as "estratégias de ensino são ações pedagógicas intencionais para que se possa obter melhores resultados no processo de ensino aprendizado". Alem disso, é possível complementar essas ideias com a definição de ação didática e métodos de ensino. Segundo Nereci [13], ação didática seria a disposição e a maneira de utilização de métodos e técnicas de ensino, a fim de tornar o ensino e a consequente aprendizagem mais eficientes ao alcance dos objetivos visados. Métodos de ensino, segundo Libaneo [9] é quando os professores utilizam, intencionalmente, um conjunto de ações, passos, condições externas e procedimentos, para dirigirem e estimularem o processo de ensino em função da aprendizagem dos alunos, Portanto, pode-se concluir que estratégias de ensino são ações que visam estimular o ensino-aprendizado procurando melhores resultados nesse processo, objetivando torna-lo cada vez mais produtivo.

Com isso, um professor, em posse de boas estratégias de ensino, pode possibilitar ao aluno um melhor desenvolvimento de suas características pessoais, pois segundo Bordenave e Pereira [4], as intervenções realizadas pelo educador que usa boas estratégias de ensino podem contribuir na mudança de aspectos motores, afetivos e intelectuais. Tendo isso em vista, o professor deve conhecer o leque de possibilidades das diversas estrategias de ensino existentes.

De acordo com Anastasiou [1], existem diversas estratégias de ensino, tais como: Estudo dirigido, estudo de texto, portfólio, mapa conceitual, soluções de problemas, dramatização, seminário, estudo de caso, entre outros, e dentre todas essas potenciais estrategias de ensino, este trabalho irá objetivar o uso do estudo dirigido. Para tanto, é necessario conhecer melhor tal estratégia de ensino.

Segundo Oliskovicz e Piva [15] "O estudo dirigido surgiu da necessidade em transferir para o aluno técnicas de estudo, isto é, de ensina-los a estudar". além disso, Okane e Takahashi [14] afirmam que essa estratégia de ensino "não é um fato educativo isolado, mas parte de uma concepção pedagógica, uma continuidade de ações de todo o processo educacional"e como Libaneo [9] aponta, é um primeiro método ou técnica para tornar o educando independente, tendo em vista que, é, segungo esse mesmo autor, "uma estratégia que aplica métodos ativos de ensino, estimula a atividade mental dos alunos e o exercício do pensamento por meio do aprender pensando naquilo que se faz"segundo Okane e Takahashi [14]. Tem-se então que o estudo dirigido é uma estratégia que incentiva o aluno a ser um sujeito ativo dentro do processo de ensino aprendizagem, pois ainda desenvolve um aluno livre, confiante e ainda responsável pelo seu próprio processo de ensino-aprendizagem.

Segundo Libaneo [9] "o estudo dirigido possui duas funções principais que são a consolidação de conhecimentos por meio de uma combinação da explicação do professor com exercícios e a busca de soluções por meio de questões que os alunos possam resolver criativamente e de forma independente". Nessa perspectiva, essa estratégia de ensino, ainda segundo o autor citado, procura:

- Desenvolver habilidade e hábitos de trabalho de forma independente e criativo;
- Sistematizar e consolidar conhecimentos, habilidades e hábitos;
- Possibilitar a cada aluno, individualmente, resolver problemas, vencer dificuldades e desenvolver métodos próprios de aprendizagem;
- Possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de trabalhar, de forma livre e criativa, com os conhecimentos adquiridos, aplicando-os a situações novas, referentes a problemas cotidianos da sua vivencia e a problemas mais amplos da vida social;
- Possibilitar ao professor a observação de cada aluno em suas dificuldades e progressos, bem como a verificação da eficácia do seu próprio trabalho na condução do ensino.

Pode-se dizer ainda que o estudo dirigido fornece, segundo Nereci [13], "um ' balizamento didático' para que o aluno possa efetivar sua aprendizagem, de tal modo que simultaneamente vai conferindo ao aluno técnicas e consciência de como estudar". Segundo [6], para aplicar essa estratégia de ensino é necessário que o professor designe uma tarefa para o aluno e forneça para o mesmo as instruções necessárias para a realização dessa atividade. Os autores Oliskovicz e Piva [15] falam que o estudo dirigido "consiste em fazer o aluno estudar um assunto a partir de um roteiro elaborado pelo professor. E este roteiro, estabelece a extensão e a profundidade do estudo". Pode-se dizer então que o professor elabora uma atividade que com um deteminado objetivo a ser alcançado com o desenvolvimento das atividades que se da através de uma serie de instruções, cuja as quais o aluno deve seguir para serem realizadas.

Ainda segundo Oliskovicz e Piva [15] existem diversas modalidades de estudos dirigidos, sendo que elaboração do roteiro para a execução do estudo dirigido fica a critério do professor e dos objetivos a serem alcançados. Entre eles pode-se citar a leitura de um texto e depois a resolução de perguntas propostas, a manipulação de materiais ou a construção de objetos para se chegar a certas conclusões, a observação de objetos, fatos ou fenômenos, fazer anotações, realizar experiências e fazer relatórios para se chegar a certas generalizações.

Como isso pode ser percebida as vantagens e também a diversidade de possibilidades que o estudo dirigido pode abranger, desde uma simples lista de exercícios à análise de situações para se obter algum tipo de generalização, tudo isso, partindo do principio que o aluno é um dos principais agentes da sua própria aprendizagem, com possibilidades de fazer o aluno aprender a estudar de maneira mais autónoma e independente.

1.3 Modelagem matemática

A programação linear é uma técnica que modela situações reais e que surgiu de situações em que se desejava maximizar lucros ou minimizar perdas, visto isso, é fundamental levantar alguns conceitos sobre o que de fato é a modelagem matemática.

Segundo Bassanezi [2], a modelagem matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos, sendo ainda, uma forma de abstração e generalização, com a finalidade de prever resultados, consistindo em capturar situações reais e transforma-las em problemas matemáticos onde as suas soluções devem ser interpretadas de acordo com a linguagem usual. Ainda sobre o que seria a modelagem matemática, Carminati [5] afirma que tal conceito se refere a um modelo que tenta descrever matematicamente um fenômeno real para a tentativa de compreendê-lo e estudá-lo, criando hipóteses e reflexões sobre tais fenômenos. Abaixo segue uma figura das atividades intelectuais a serem seguidas para a busca de modelos matemáticos referentes a uma determinada situação.

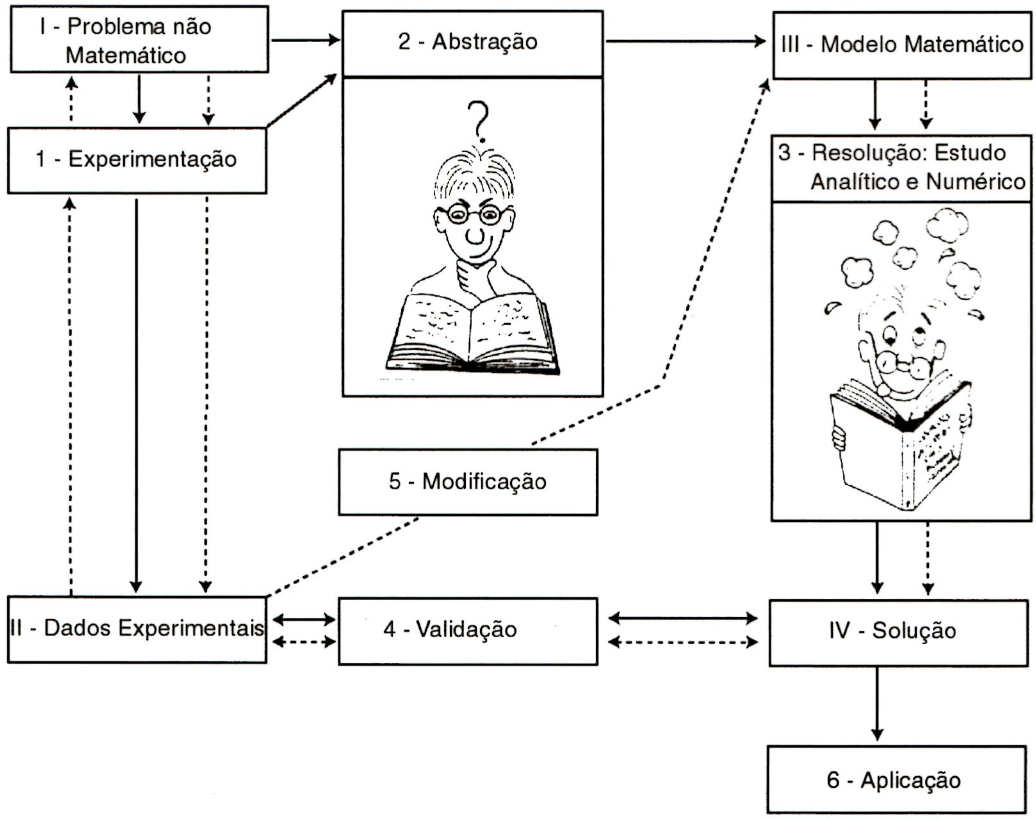

Figura 1.1: processo de modelagem matemática. fonte: Bassanevi [2]

Na figura 1.1, as setas indicam a primeira aproximação do modelo e as setas pontilhadas remontam a dinamicidade do modelo procurado onde busca-se cada melhorar cada vez mais tal modelo. A respeito dos item citados na imagem, Bassnezi [2] afirma que: abstração é o procedimento que deve levar a formulação dos modelos matemáticos; a resolução é referente ao momento que se substitui a linguagem natural das hipóteses trabalhadas por uma linguagem coerente, que como em um dicionário, a linguagem matemática assume sinônimos que traduzem diferentes graus de sofisticação da linguagem natural; a validação seria o processo de aceitação ou não do modelo criado e por fim; a modificação como o próprio nome diz, se trata de modificar o modelo existente atendendo a novas ou as mesmas exigências, tendo em vista que nenhum modelo pode ser considerado definitivo.

Além do exposto, conforme Carminati [5], a Modelagem Matemática é uma metodologia que pode ser usada para o ensino de Matemática, tanto para o ensino fundamental quanto para o Ensino Médio, onde, a partir de conceitos gerais, procura-se mostrar a importância da matemática para o conhecimento e compreensão da realidade onde se vive. Nesse sentido Lyra et al. [10] defende que uma abordagem a ser seguida pelo professor deve consistir em apresentar o problema dentro de um contexto simples e objetivo para que o aluno possa sempre iniciar seu estudo por problemas que envolvam modelos com duas variáveis para, então, abordar problemas com três ou mais variáveis.

Para saber mais a respeito da modelagem matemaática recomendamos a leitura da obra [2].

Observa-se ainda que o estudo dirigido, a contextualização do ensino de matemática e a modelagem matemática se complementam em muitos sentidos dentro do processo de ensino aprendizagem, no sentido de poder reforçar/complementar ao outro, podendo isso convergir para um processo de ensino aprendizado mais consistente, útil e completo para o professor que busca utiliza-las em conjunto.

1.4 Motivações e métodos de trabalho

A programação linear é um assunto dentro do campo da "pesquisa operacional"que surgiu na década de 40 durante a segunda guerra mundial, cujo objetivo foi a resolução de problemas militares que exigiam a otimização de diversos recursos dependendo das condições imposta. Basicamente, um determinado problema vai ser modelado matematicamente gerando um modelo final que será uma função objetivo cujas variáveis estarão sob algumas condições, onde à partir disso, usando técnicas já desenvolvidas pode-se chegar a uma solução ótima. Além disso, desde o seu surgimento aos dias atuais, a programação linear foi objeto de estudo de vários pesquisadores devido a sua grande aplicação em problema reais, principalmente no que se diz respeito ao setor industrial. Devido a isso, tal assunto pode ser muito interessante para o ensino de matemática pois propõe soluções para diversos problemas reais que podem ser discutidos em sala de aula sem tantas dificuldades, desde que o foco esteja em apresentar aos alunos as aplicabilidades dos conhecimentos estudados.

Pensando nisso, surge o questionamento de como o estudo desse tema pode ser trabalhado em sala de aula a respeito de quais pontos devem ser levados em consideração no desenvolvimento de uma proposta de abordagem através de estudo dirigido para se trabalhar com a programação linear no ensino médio. Mas antes, para dar seguimento a busca da resposta desse questionamento, são estabelecidas algumas restrições: trabalhar apenas com problemas cujos modelos matemáticos são funções objetivos de até três variáveis, onde suas resoluções podem ser obtidas através de um método gráfico utilizando o software Geogebra, para o caso de funções objetivo de duas variáveis, ou através do método simplex, com o auxiliio do recurso OR Simplex, para o caso de funções com três variáveis.

Capítulo 2

Breve Histórico da Programação Linear

A programação linear (PL), faz parte de um campo maior de estudo denominado Pesquisa operacional que tem por objetivo fornecer ferramentas quantitativas que auxiliam no processo de tomada de decisões.

2.1 Pesquisa Operacional

De maneira geral e resumida, este campo de estudo se constitui na descrição de um sistema organizado que por sua vez é representado por um modelo matemático que é utilizado para determinar a melhor solução para operar tal sistema. Esse termo "pesquisa operacional"segundo Silva et al. [18] foi usado pela primeira vez em 1939 com o objetivo de englobar diversas técnicas já existentes ou as que ainda poderiam ser criadas onde visassem o objetivo já citado, se apoiando principalmente em estatística, economia, matemática e informática. Geralmente, segundo Silva et al. [19], um estudo em Pesquisa Operacional envolve seis fases:

- **Formulação do problema:** Nessa primeira fase, o administrador do sistema juntamente com o responsável pelo estudo em pesquisa operacional deverá discutir o problema em questão de maneira clara e objetiva, para que sejam definidos os objetivos e quais os caminhos possíveis para alcançá-los, verificando ainda as limitações do sistema e as relações desses sistemas com outros já existentes no ambientes em que estão trabalhando ou em ambientes externos, com o intuito de criticar a validade das próprias possíveis soluções;

- **Construção do modelo do sistema:** os modelos em pesquisa operacional são modelos matemáticos, ou seja, aqueles constituídos de equações e/ou inequações, onde tal o modelo possui uma equação de eficiência ou como será mais comumente chamada aqui de função objetivo, e ainda outras equações e/ou inequações que comporão restrições técnicas do sistema. Nesse modelo, as varáveis podem ser classificadas em variáveis controladas ou de decisão e variáveis não controladas. As variáveis controladas ou de decisão são aquelas que estão sob controle do administrador do sistema, onde o mesmo pode decidir valores a serem atribuídos a mesma, um exemplo seria em uma programação de produção onde pode ser definido a quantidade de um determinado produto a ser produzido. Variáveis não controladas são variáveis arbitradas pelo sistema fora do controle do administrador, exemplo, seriam custos de produção, demanda de produtos e preços de mercado.

- **Cálculo da solução através do modelo:** Esta etapa é feita a partir de técnicas matemáticas específicas que buscam, como o próprio nome sugere, soluções, levando em consideração o sistema criado, onde o mesmo deve levar em consideração a disponibilidade das técnicas matemáticas existentes para o cálculo da solução;

- **Teste do modelo e da solução:** Esta etapa é realizada através de dados empíricos já existentes que podem ser comparados ao sistema modelo criado, caso haja uma divergência muito grande nas comparações ou não aceitável, o modelo criado pode ser inevitavelmente abandonado, cabendo a procura de uma reformulação ou a busca por um outro modelo para alcançar os objetivos almejados;

- **Estabelecimento de controles da solução:** A construção e a experimentação do sistema sugerem parâmetros fundamentais para a busca de soluções do sistema, e quaisquer mudanças nesses parâmetros deve ser controlado para garantir a validade da solução adotada, e, caso a mudança nesses paramentos não sejam compatíveis com a variação permitida, uma nova solução ou até mesmo a reformulação do modelo deve ser adotado;

- **Implantação e acompanhamento:** Nessa fase os resultados devem ser comunicados ao administrador do sistema onde deve evitar-se a linguagem técnica, optando pela linguagem usual, a partir de onde a medida resultante de todo esse processo poderá ser aplicada, salvo que algum ajuste ainda poderá ser requerido.

Percebe-se então toda uma sistematização para a implementação de um estudo em pesquisa operacional e quais os principais passos a serem seguidos para desenvolver e aplicar um estudo desse tipo.

2.2 Aspectos históricos da Programação Linear e Exemplos

Segundo Silva et al. [19], a Programação Linear é uma técnica que foi criada em 1946 e, cujos objetivos era, de modo geral, a maximização de recursos ou minimização de perdas em uma determinada situação, ou como Prado [16] explica, é uma técnica que permite estabelecer a "mistura"ótima de diversas variáveis segundo uma função linear de efetividade que pode ser denominada também como função objetivo, satisfazendo a um conjunto de restrições lineares para estas variáveis. Essa técnica tem sido implementada em diversas áreas do conhecimento, tais como: formulação de alimentos, rações e adubos; problemas de dietas, blindagem de ligas metálicas, na área petrolífera; na área de transportes e logística; na localização industrial e alocação de recursos, carteira de ações (Investimentos), dosagens (mistura, receita ou blending), designação, compras, fluxo de redes entre outros.

Um fato curioso a comentar a respeito do surgimento da programação linear é sobre um problema inusitado, onde foi publicado no jornal the new York times, de acordo com Prado [16], que propunha a seguinte questão: qual a alimentação mais econômica, levando-se em conta que o organismo humano necessita de uma quantidade mínima de certos nutrientes, alguns deles: proteínas, vitaminas, etc, que devem ser obtidos de alimentos que possuem preços e composição de nutrientes diferentes. Esse problema, que foi conhecido pelo nome "problema da dieta"e foi solucionado por George Stigler em 1945, cuja solução ótima foi uma dieta com custo anual de US$ 59,88 sendo composta de farinha de trigo, repolho e fígado de porco. Stigler partiu de uma diversidade de 77 alimentos levando em consideração 09 nutrientes em cada uma chegando a tal solução.

Os aspectos importantes a serem notados nessa situação foi que Stigler não levou em consideração gostos ou quaisquer outros aspectos dos alimentos, considerando apenas o aspecto econômico da mesma. Tendo isso em vista e que ninguém iria conseguir manter tal dieta, esse problema foi alvo de chacota, porém, logo percebeu-se que essa técnica poderia ser utilizada perfeitamente em outras situações de áreas do conhecimento com problemas semelhantes, como alimentação de animais ou carga de um alto-forno em siderurgia, ou a problemas referentes as áreas já citadas anteriormente. Este fato impulsionou ainda mais os estudos em programação linear, porém, a técnica de Stigler era cansativa, tediosa, dispendia de tempo, suscetível a erros e nem sempre se conseguia solução ótima procurada.

Segundo Prado [16] "Do ponto de vista histórico, é importante saber que o assunto foi inicialmente analisado em 1936 por Wassily Leontieff que criou um modelo constituído por um conjunto de equações lineares"e isto foi considerado como um dos primeiros passos para se estabelecer técnicas em programação linear. Além disso, ainda de acordo com o autor, o matemático Leonid Kantorovich, publicou em 1939 um trabalho a respeito de Programação linear, o qual trazia dentre diversas abordagens o uso de inequações lineares.

De acordo ainda com Prado [16] esse método de tomada de decisão (programação linear), se consolidou de fato no ano de 1947, através do matemático George Dantzig que desenvolveu o método simplex, capaz de resolver qualquer problema em PL, enquanto o mesmo trabalhava no *Scientific Computation of Optimal* no pentágono, que era um projeto que tinha como objetivo apoiar a tomada de decisões de operações na forca aérea americana, cujos os coordenadores do projeto eram o economista Marshall Wood e o próprio matemático George Dantzig. Inicialmente o método simplex se constituía de cálculos manuais e bastante cansativos, porém, em 1951 com a invenção de computador, a programação linear encontrou seu aliado natural que fez com que essa área tivesse uma grande expansão na época.

A programação linear segundo Prado [16] "É uma técnica de planejamento considerada como uma das mais poderosas e capazes de produzir resultados expressivos em quase todo ramo da atividade humana"cujo benefício principal pode ser considerado àqueles procurados por qualquer empresa: a diminuição de custos e aumento de lucros, cujo o problema geral pode ser definido como: a busca por maximizar ou minimizar determinados valores, que podem ser lucros, ou perdas, respectivamente, a partir de uma função linear que chama-se de função objetivo e que está sujeita a uma série de equações ou inequações lineares, que são denominadas de restrições. Portanto, esta técnica se constitui de um modelo especial de otimização, cujos problemas possam ser modelados em programação linear, e devem possuir, segundo Golbarg e Luna [8] as seguintes características: **proporcionalidade:** onde a quantidade de recursos consumidos deve ser proporcional ao objetivo dessa atividade dentro da solução do problema; **não - negatividade:** qualquer proporção de um dado recurso deve sempre poder ser utilizado, e, qualquer atividade deve se desenvolver dentro de qualquer nível não - negativo; **aditividade:** o custo total deve ser a soma total das parcelas associadas a cada atividade; **separabilidade:** deve poder-se identificar separadamente o consumo de recurso ou custo total especifico de cada uma das operações de cada atividade.

Na programação linear, segundo Silva et al. [19], "a construção do modelo matemático, no caso um modelo linear, é a parte mais complicada do nosso estudo"e como não há uma regra fixa para essa construção pode ser adotado um roteiro para auxiliar a construção dos modelos de PL. Portanto, segue abaixo o roteiro sugerido pelo autor citado acima:

- **Passo I:** Quais as variáveis de decisão: O trabalho nesta etapa é explicitar as decisões que devem ser tomadas e representa-las em através de variáveis de decisão;
- **Passo II:** Qual a função objetivo: Como o próprio nome já diz, deve-se nesta etapa identificar objetivo da tomada de decisão, os quais aparecem muitas vezes na forma de maximização de resultados ou minimização de custos e/ou perdas;
- **Passo III:** Identificar o conjunto de restrições: Nesta etapa as restrições devem ser identificadas e representadas como uma relação linear de igualdade ou desigualdade montadas com as variáveis de decisão.

Além disso, como já foi comentado a respeito da programação linear e a sua grande possibilidade de aplicações em diversas áreas do conhecimento, segue abaixo alguns exemplos de problemas onde pode ser aplicada tal técnica:

Em alimentação: Um problema que pode ser citado consiste em determinar quais as quantidades ideais de alimentos e nutrientes necessários para alimentar uma quantidade específica de pessoas, ou animais para que se tenha um custo mínimo, podendo ainda considerar nessa situação vários aspectos da alimentação como gosto e qualidade dos alimentos, etc.

Em agricultura: um problema seria: quais alimentos devem ser plantados de modo que o lucro seja máximo onde ainda deve ser respeitado as características do solo, dos vegetais que serão produzidos, o mercado comprador e ainda os equipamentos disponíveis dentre outros aspectos que podem ser envolvidos nesse processo.

Rotas de transporte: Um problema que pode ser também um problema de logística seria a busca por qual a melhor rota para se entregar todas as mercadorias com o objetivo de minimizar os custos desse transporte e consequentemente aumentar o lucro da empresa.

Na área petrolífera: Nesta área pode ser citado o problema de enviar uma mistura ideal de petróleo para uma torre de craqueamento para a extração de seus derivados como gasolina, querosene entre outros a um custo mínimo, cuja mistura possui petróleo de diferentes procedências.

Em localização industrial: o problema aqui é referente a qual localização deve ser a ideal das fábricas e depósitos de uma nova empresa para que os custos de entrega aos seus compradores sejam mínimos.

Problemas de carteira de investimentos: um problema nesse cenário poderia consistir em compor uma carteira de investimentos de modo que o lucro seja máximo e sejam respeitadas as previsões de lucratividade e as restrições governamentais.

Capítulo 3

Conceitos Fundamentais

3.1 Espaço vetorial

Definição 3.1. *Um espaco vetorial real é um conjunto V, não vazio, com duas operações: soma. $V \times V \xrightarrow{+} V$, e multiplicação por escalar, $R \times V \xrightarrow{*} V$ tais que, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$ as propriedades abaixo de **i)** a **viii)** são satisfeitas.*

i) $(u + v) + w = u + (v + w)$
ii) $u + v = v + u$
iii) $\exists\, 0 \in V$ tal que $u + 0 = u$
iv) $\exists -u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$
v) $a(u + v) = au + av$
vi) $(a + b)v = av + bv$
vii) $(ab)v = a(bv)$
viii) $1u = u$

Os elementos de um espaço vetorial são denominados de vetores e podem ser escritos nas formas de colunas ou de linhas.

Combinação linear de vetores

Dado um grupo de vetores de um espaço vetorial é possivel multiplicar cada um deles por um número real qualquer e em seguida fazer a soma dos resultados. O resultado dessa operação é um vetor e é denominado combinação linear dos vetores desse grupo. Em outras palavras:

Definição 3.2. *Sejam V um espaço vetorial real, $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ e $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Então o vetor :*

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$$

é um elemento de V que é denominado de combinação linear de $v_1, v_2, ..., v_n$

Exemplo 3.1. *Dados dos vetores* $(2,3)$ *e* $(3,1)$ *do* $\mathbb{R}$*. Multiplicando o primeiro vetor por 3, o segundo por 5 e somando esses dois resultado obtem-se:* $3(2,3)+5(3,1)=(6,9)+(15,5)=(21,14)$*, onde o vetor resultante* $(21,14)\in\mathbb{R}$ *é dito um combinação linear dos vetores iniciais.*

Base de um espaço vetorial

É perfeitamente possível ultilizar um número finito de vetores de um espaço vetorial V para gerar o próprio espaço vetorial V. Então esse conjunto é dito uma base de V. Para isso:

Definição 3.3. *Sejam V um espaço vetorial,* $v_1,...,v_n\in V$ *e* $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$*. É dito que o conjunto* $\{v_1,...,v_n\}$ *é linearmente independente (LI), ou que os vetores* $v_1,...,v_n$ *são LI, se a equação:*

$$a_1v_1+...+a_nv_n=0$$

implica em $a_1=a_2=...=a_n=0$*. Caso contrário, existindo algum* $a_i\in\{a_1,...,a_n\}$ *tal que* $a_i\neq 0$*, o conjunto* $\{v_1,...,v_n\}$ *é dito Linearmente Dependente (LD), ou que os vetores* $v_1,...v_n$ *são LD.*

A base de um espaço vetorial V pode ser definida como sendo:

Definição 3.4. *Um conjunto de vetores* $\{v_1,...,v_n\}\in V$ *tal que:*
i) $\{v_1,...,v_n\}$ *é LI*
ii) $[v_1,...,v_n]=V$

Exemplo: Os vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ podem gerar qualquer vetor do $\mathbb{R}^2$ à partir de combinações lineares, logo, o conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

3.2 Sistemas Lineares e Matrizes

Definição 3.5. *Um sistema linear de* m *equações e* n *icognitas é um conjunto de equações do tipo:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Com $a_{ij}, 1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n$*, números reais.*

Uma solução desse sistema é uma n-uplâ de números $(x_1,x_2,...,x_n)$ que satisfaçam simultaneamente a estas m equações. Além disso, dois sistemas são ditos equivalentes se, e somente se, toda solução de qualquer um dos sistemas também é solução do outro.

Um sistemal linear, além da sua definição acima, pode ser também definido e representado através de uma forma matricial, conforme abaixo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ou $A.X = B$, onde: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes, $B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é a matriz das icognitas e, por fim, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ é a matriz dos termos idependentes.

Além das matrizes acima, é possivel associar uma outra matriz ao sistema que é chamada de matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Onde cada linha dessa matriz é simplesmente uma representação abreviada da equação do sistema.

Matriz elementar

Em uma determinada matriz é possivel realizar três distintas operações elementares, cujas são:

- Permuta da i- ésima e j-ésima linhas que é denotado por $(L_i \longleftrightarrow L_j)$.
- Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k, denotada por $(L_1 \longrightarrow kL_1)$.
- Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais k vezes a j-ésima linha, o que é denotado por $(L_i \longrightarrow L_i + kL_j)$.

Além disso, se A e B são matrizes $m \times n$, B é linha é equivalente a A se B é obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A. Tal relação pode ser denotada por $(A \longrightarrow B)$.

Forma escada de uma matriz

Definição 3.6. *Uma matriz $m \times n$ é dita linha reduzida escada se, atende às seguintes condições:*

- *O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é igual a 1;*
- *Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;*
- *Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;*
- *Se as linhas $1, ..., r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_1, então $k_1 < k_2 ... < k_r$.*

Exemplo 3.2. *Matrix de ordem 3×5 na forma escada:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Claramente, esse exemplo de matriz atende a todas as condições anteiormente propostas.

Um ponto relevante a ser comentado a título de emsabamento para este trabalho é o teorema que afirma que toda matriz A de ordem $m \times n$ é linha equivalente a uma única matriz linha reduzida na forma escada. A demonstração desse teorema pode ser consultada na obra [3].

Posto e nulidade de uma Matriz

Os conceitos de posto e nulidade de uma matriz são de fundamental importancia para se discutir as possiveis soluções de um sistema linear qualquer. De modo geral estes conceitos estão relacionados com a real quantidade de equações do sistema e seu respectivo número de soluções.

Definição 3.7. *Dada uma matriz $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$ sua matriz linha equivalente reduzida a forma escada, o posto de A , denotado por p, é o número de linhas não nulas de B. A nulidade de A é obtida pela diferença entre número n e o posto p.*

Observa-se então que para encontrar o posto de uma determinada matriz, necessita-se primeiro encontrar sua matriz linha equivalente reduzida a forma escada e depois contar a quantidade de linhas não nulas que essa matriz possui . E para encontrar a sua nulidade, basta fazer a diferença entre o número de colunas e seu posto.

Solução de um Sistema Linear

Considerando um sistema linear de acordo com a **definição 3.5**, isto é, com m equações e n icognitas $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Cujos coeficientes a_{ij} e termos independentes b_i sao números reais (ou complexos), podem ocorrer três situações:

- O sistema tem uma única tsolução;
- O sistema tem infiinitas soluções; ou
- Pode ter nenhuma solução.

No primeiro caso diz-se que o sistema é possível (compatível) e determinado, no segundo caso, o sistema é possivel e indeterminado e por fim, no terceiro caso, o sistema é dito impossível.

Para identificar em qual dessas três situações um sistema qualquer se encaixa é necessário uma comparação entre o posto da matriz de coeficientes do sistema, o posto da sua matriz aumentada e a sua quantidade variáveis n, conforme abaixo:

- Um sistema de m equações admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes;
- Se as duas matrizes tem o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única;
- Se as duas matrizes tem o mesmo posto e $p < n$, é possível escolher $n - p$ incogógnitas, e as outras p incogógnitas serão dadas em função destas.

Cabe ressaltar que o ultimo o número $n - p$ é chamado de grau de liberdade do sistema.

3.3 Conjuntos Convexos

De acordo com Boldrini et. al. [3] a programação é uma tecnica simples e eficiente que pode ser aplicada a diversos problema do cotidiano que possam ser traduzidos em como maximizar ou minimizar funções lineares cujas condições são desigualdades lineares que, como será visto mais a frente, nada mais são que regiões poliedrais convexas. Ademais, os conceitos discorridos neste tópico tem como objetivo a caracterização de regiões convexas especiais que se relacionam diretamente com o conteudo de PL.

Definição 3.8. *Um subconjunto A de um espaço vetorial V é uma variedade linear de V se existe um subespaço W de V e um vetor v_0 de V, tal que:*

$$A = \{v \in V; v = v_0 + w \, para \, w \in W\}$$

Onde a notação $A = v_0 + W$ é usada para indicar a variedade linear. É possivel observer que se $v_0 \neq 0$ então A não é um subespaço. Além disso, por dimensão de A entende-se a dimensão de W.

Exemplo 3.3. *alguns exemplos de variedade linear:*

- *Uma reta que passa ou não pela origem é uma variedade linear de dimensão* 1 *do* $\mathbb{R}^2$.
- *Todo subespaço vetorial é em particular uma variedade linear, para isso basta* $v_0 = 0$.
- *Em todo sistema linear compatível o seu conjunto solução é uma variedade linear de dimensão igual ao grau liberdade do sistema.*

No último exemplo acima, considerando um caso particular em que tem-se apenas uma equação linear compondo o sistema, esta equação define o que é chamado de hiperplano. De modo geral, um hiperplano divide o espaço vetorial em que está contido em dois semi-espaços.

Exemplo 3.4. *O hiperplano em* $\mathbb{R}^3$ *descrito pela equação* $2x + 3y + 3z - 2 = 0$ *divide* $\mathbb{R}^3$ *em dois semi-espaços vetoriais, como pode ser visto abaixo.*

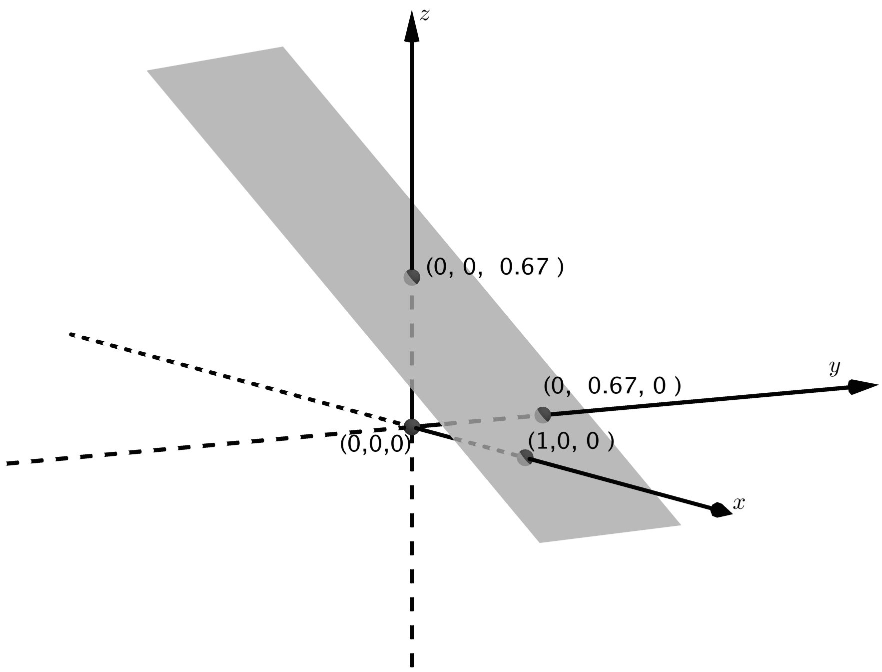

Figura 3.1: Hiperplano descrito por $2x + 3y + 3z - 2 = 0$

Nesta figura, o hiperplano $2x + 3y + 3z - 2 = 0$ aparece hachurado e divindo o espaço $\mathbb{R}^3$ em dois, onde $2x+3y+3z-2 \leq 0$ é semi-espaço que contém o ponto $(0,0,0)$ e o semi-espaço $2x + 3y + 3z - 2 \geq 0$ é o que não o contém.

Nesse sentido, um problema importante referente aos hiperplanos consiste em identificar o hiperplano em si e os respectivos semi-espaços que o mesmo origina.

Exemplo 3.5. *Seja o hiperplano $x + y - 1 = 0$ em $\mathbb{R}^2$, qual dos semi-espacos originados por esse hiperplano é descrito pela equação $x + y - 1 \leq 0$?*

Para resolver este problema após traçado o hiperplano escolhe-se um ponto do espaço vetorial em questão, que neste caso é o $\mathbb{R}^2$ e verifica-se se o mesmo satisfaz ou não a desigualdade que se quer verificar. Caso o ponto escolhido satisfaça-a, este semi-espaço procurado então é o que contém o ponto escolhido, caso contrário, esse semi-espço é então aquele que não contém o ponto escolhido. Para este exemplo, escolhendo-se o ponto $(0,0)$ implica em $0 + 0 - 1 \leq 0$ o que não satifaz a desigualdade, logo o semi-espaço descrito por $x + y - 1 \leq 0$ é aquele que não contém o ponto $(0,0)$. Abaixo segue o gráfico dessa situação.

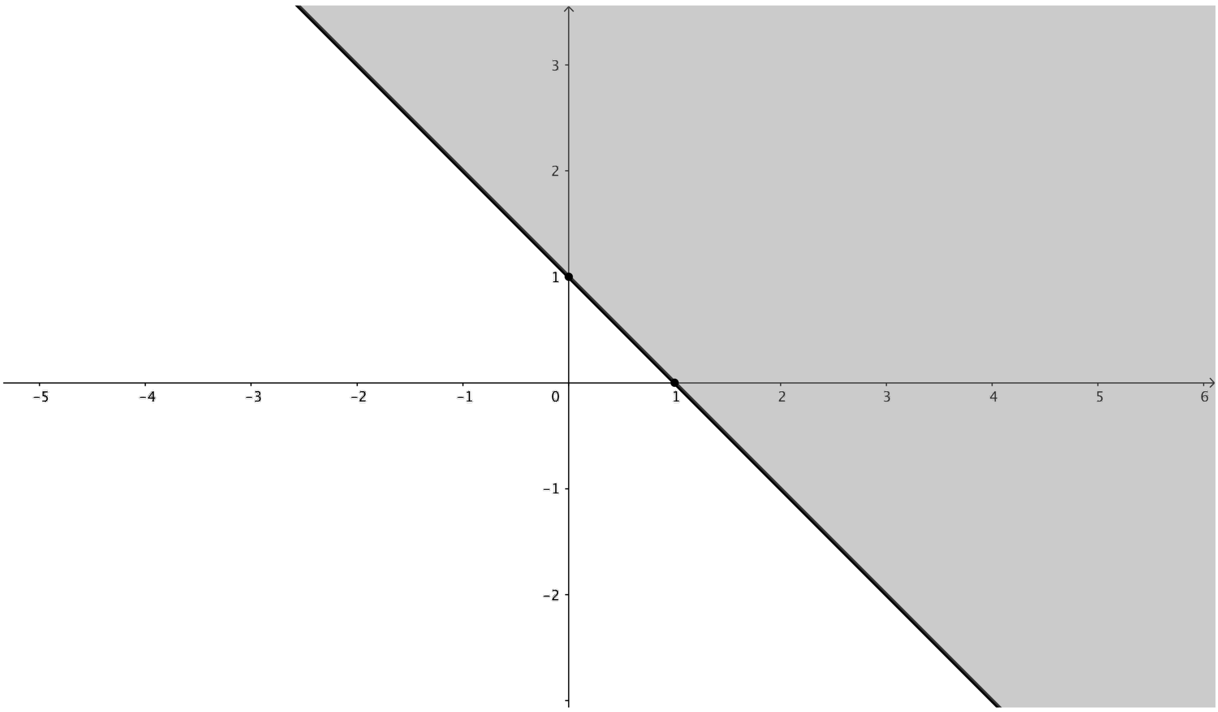

Figura 3.2: Semi-espaço $x + y - 1 \leq 0$ definido pelo hiperplano $x + y - 1 = 0$

Quando um semi-espaço contém o hiperplano diz-se que este semi-espaço é fechado e se não contiver, diz-se semi-espaço aberto.

É importante perceber que para equações com mais de três variáveis não é possível obter uma representação geometrica como nos casos anteiores, toda via, esses casos são abordados de maneira análoga. Por tanto, de maneira geral dado o hiperplano:

$$H = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

Este é uma variedade linear de dimensão $n-1$ que divide o $\mathbb{R}^n$ em dois subespaços fechados descritos abaixo como H^+ e H^-:

$$H^+ = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b$$

$$H^- = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq b$$

Além do discorrido acima, mais a frente será possível constatar que as soluções de problemas de PL, todas as possíveis (isto é, não somente as ótimas), estarão restritas a uma região resultante de uma interseção de semi-espaços gerados pelos seus respectivos hiperplanos referente às restrições do problema. Para tanto, os conceitos abaixo são indispensáveis para a resolução de problemas em programação linear.

Definição 3.9. *Sejam A e B dois pontos do $\mathbb{R}^n$, o seguimento de extremos A e B é o conjunto $\overline{AB}$ de pontos $\mathbb{R}^n$, dado por:*

$$\overline{AB} = \{(1-t)A + tB;\ 0 \leq t \leq 1\}$$

Definição 3.10. *Um subconjunto S do $\mathbb{R}^n$é chamado de convexo se para quaisquer dois pontos de A e B de S o segmento AB está inteiramente contido em S.*

Exemplo 3.6. *Alguns exemplos de subconjunos convexos no $\mathbb{R}^2$:*

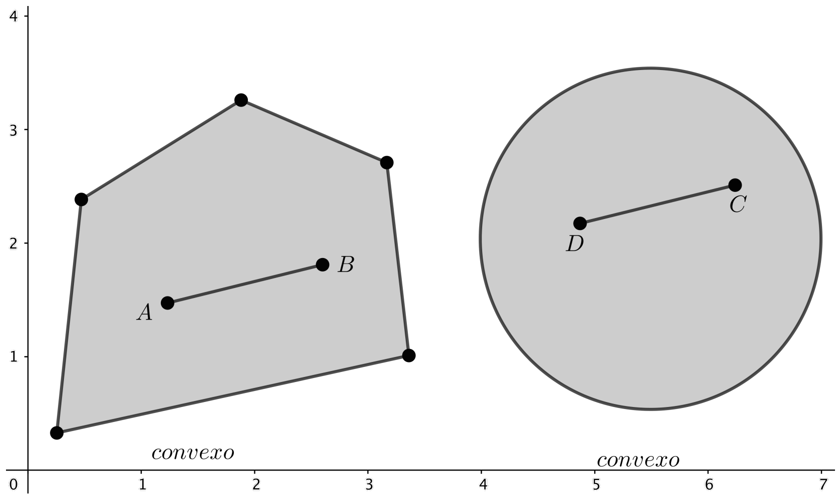

Figura 3.3: Exemplo de subconjuntos convexos em $\mathbb{R}^2$

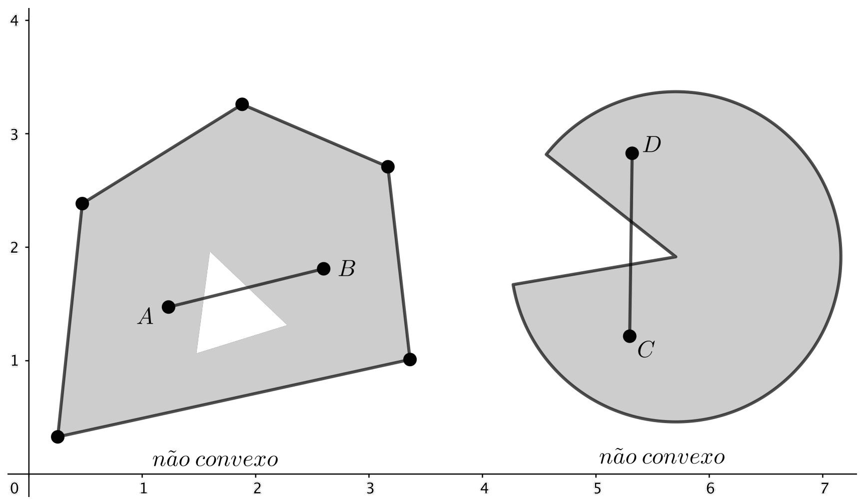

Figura 3.4: Exemplo de subconjuntos não convexos em $\mathbb{R}^2$

Teorema 3.1. *Um semi-espaço fechado é convexo.*

Demonstração teorema 3.1. A demonstração aqui é referente ao caso de um semi-espaço no $\mathbb{R}^2$, os outros casos são feitos utiliando-se dos mesmos argumentos. Para o $\mathbb{R}^2$, um semi-espaço é constituido de pontos (x, y) tais que satisfaçam uma equação do tipo $ax + by + c \leq 0$. Para essa demonstração é preciso mostrar que quaisquer dois pontos do semi-espaço em questão, o segmento que une estes dois pontos está contido também neste semi-espaço. Seja então $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$ dois pontos quaisquer do $\mathbb{R}^2$ e seja P de $\overline{AB}$, existe então $t_1 \in \mathbb{R}$, com $0 \leq t_1 \leq 1$ tal que:

$$P = (1 - t_1)(x_0, y_0) + t_1(x_1, y_1) =$$
$$= ((1 - t_1)x_0 + t_1x_1, (1 - t_1)y_0 + t_1y_1))$$

É necessário então verificar se:

$$a[(1 - t_1)x_0 + t_1x_1] + b[(1 - t_1)y_0 + t_1y_1)] + c \leq 0 \tag{3.1}$$

que é justamente a condição para que P esteja no semi-espaço. Porém:

$$a[(1 - t_1)x_0 + t_1x_1] + b[(1 - t_1)y_0 + t_1y_1)] + c = 0$$
$$= a(1 - t_1)x_0 + at_1x_1 + b(1 - t_1)y_0 + bt_1y_1 + c = 0$$
$$= (1 - t_1)[ax_0 + by_0 + c] + t_1[ax_1 + by_1 + c] \, ,$$

e como $ax_0 + by_0 + c \leq 0$ e $ax_1 + by_1 + c \leq 0$, pois A e B estão no semi-espaço e $1 - t_1 \geq 0$ e $t_1 \geq 0$, por conta de $0 \leq t_1 \leq 1$, a condição 3.1 é satisfeita. Para finalizar, assim como P está no semi-espaço e era arbitrário contido em $\overline{AB}$, conclui-se que $\overline{AB}$ está contido nesse semi-espaço. $\square$

Teorema 3.2. *A interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo.*

Demonstração teorema 3.2. Sejam S_1 e S_2 dois conjuntos convexos. Para esta demonstração é suficiente mostrar que se A e B são dois pontos quaisquer de $S_1 \cap S_2$, então $\overline{AB} \subset S_1 \cap S_2$. Como A e B pertecem a $S_1 \cap S_2$, então A e B pertecem a S_1 e como S_1 é convexo, isso implica que $\overline{AB} \in S_1$. Análogamente conclui-se que $\overline{AB} \in S_2$. Logo, $\overline{AB} \in S_1 \cap S_2$, implicando então que $S_1 \cap S_2$ é convexo. $\square$

Definição 3.11. *Uma região polieadral convexa fechada em $\mathbb{R}^n$ é uma interseção de uma quantidade finita de semi-espaços fechados do $\mathbb{R}^n$.*

Pelos teoremas anteriores 3.1 e 3.2 uma região poliedral convexa é um conjunto convexo.

Definição 3.12. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado se existem constantes $k_i, i = 1, ..., n$ tais que, se $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ então $x_i \leq k_i$.*

Nota-se que pela maneira que foi definida, uma região poliedral fechada convexa é sempre obtida por um sistema de desigualdades, onde cada uma das desigualdades é referente a um dos determinados semi-espaços que compõe a região. Além disso, os vertices de uma região poliedral fechada convexa são pontos importantes a serem identificados.

Definição 3.13. *Uma região poliedral convexa fechada no $\mathbb{R}^n$ com foi definida, seus vertices são os pontos que satisfazem um dos possiveis sistemas de n equações lineares independentes, que são obtidas substituindo-as por igualdades.*

Obs.: Após a resolução de um sistema, afim de verificar se o ponto está na região, é necessário testar o ponto encontrado e observar se o mesmo satisfaz a todas as desigualdades

Caracterização Geométrica do Vértices

Os vértices até aqui definidos, referentes a uma região poliedral convexa, foram definidos apenas algébricamente. Com respeito à sua caracterização geométrica os vértices podem ser defindos como pontos extremos de uma região poliedral convexa, isto é, são pontos da região que não estão contidos em nenhum segmento contido nessa região.

3.4 Problema Geral da PL e Resultados Importantes

Segundo Boldrini et. al. [3] o problema de programação linear na sua forma geral pode ser representado conforme o que consta abaixo:

Otimizar:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b \tag{3.2}$$

Sujeita a um subconjunto A poliedral convexo de $\mathbb{R}^n$.

Esta região A de maneira específica para este trabalho será sempre será obtida à partir de um conjunto de inequações que comporão as restrições do problema em PL. Diz-se ainda nos termos de Programação Linear que f é a função objetivo e A é a região factível.

Como a região poliedral convexa é o que restringe os possiveis valores da função a ser maximizada, é imprescindível saber quais são os possiveis tipos de região poliedral que existem e que consequentemente podem surgir durante o processo de busca de uma solucção ótima para o problema em programação linear.

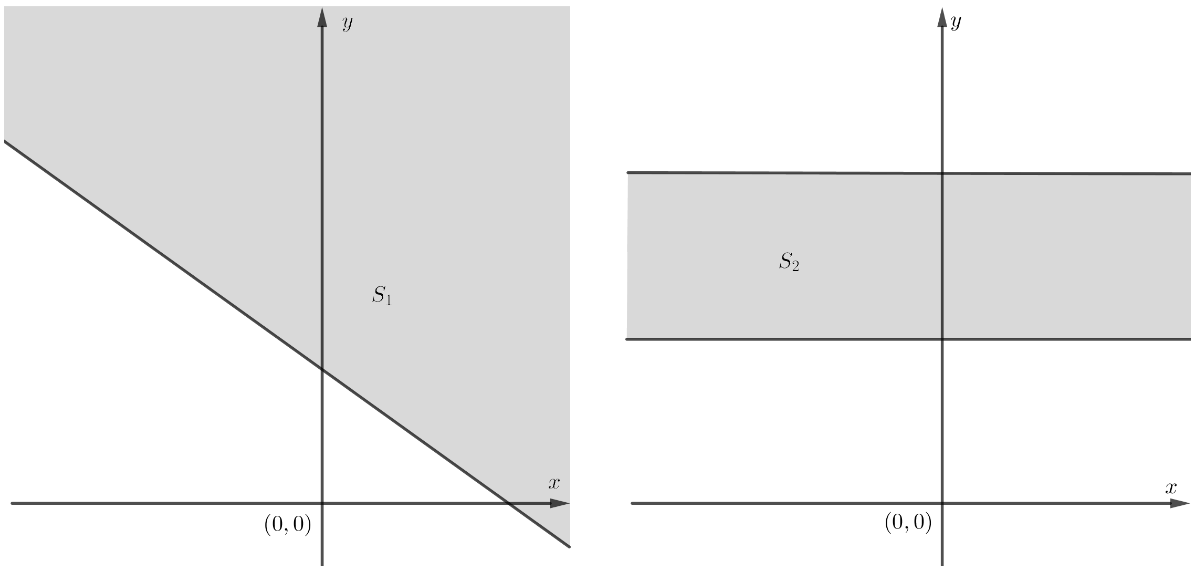

Figura 3.5: Região ilimitada sem vértices

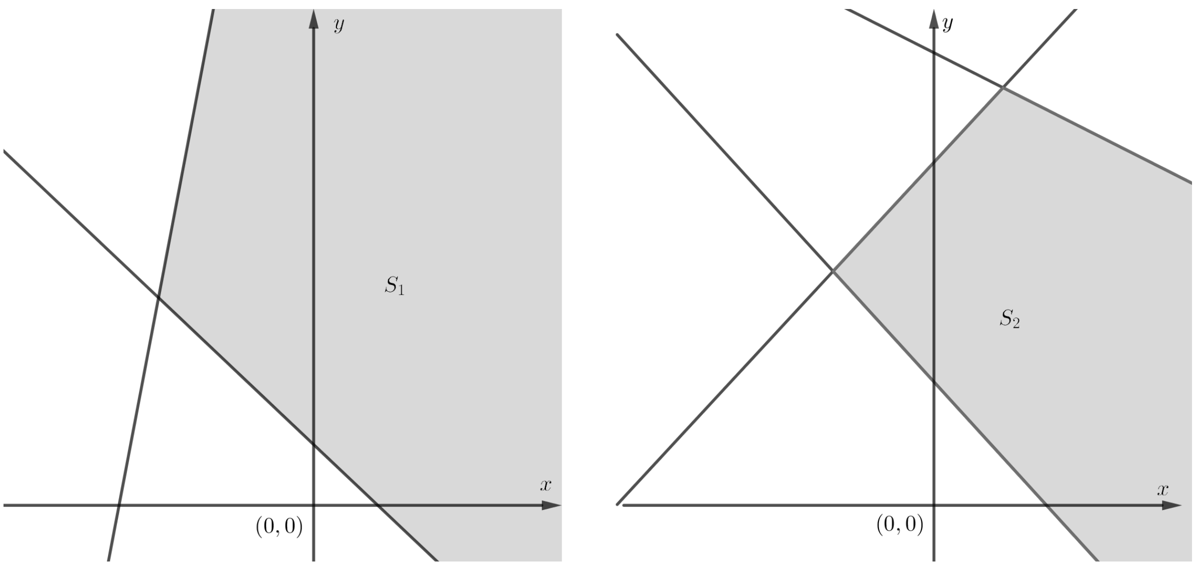

Figura 3.6: Região ilimitada com vértices

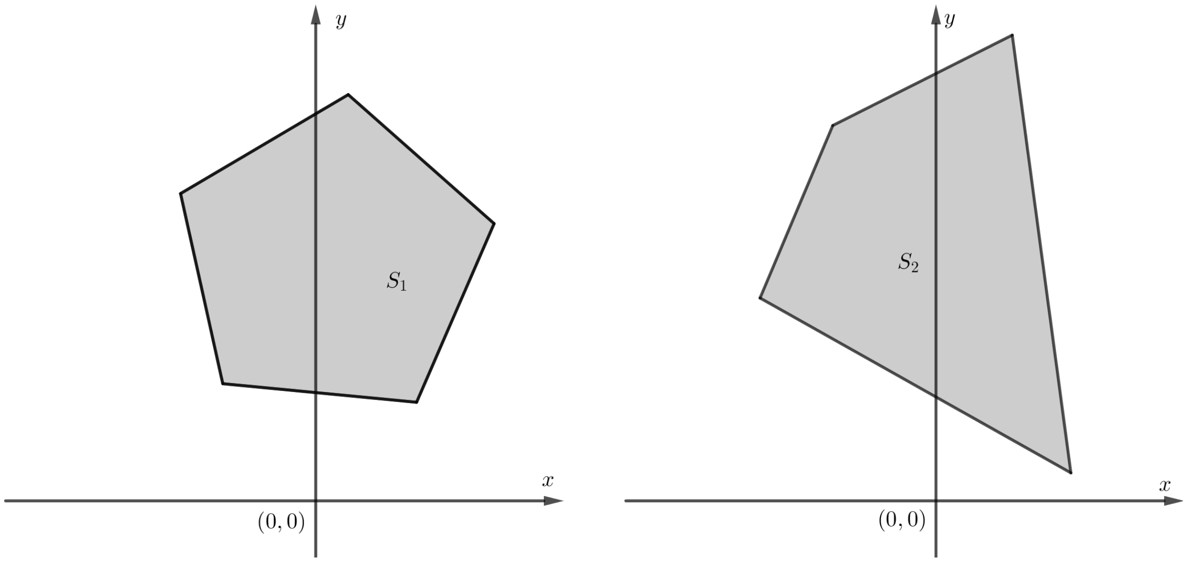

Figura 3.7: Região limitada

Além dessas possibilidades, existem ainda os casos ditos degenerados, onde a região poliedral pode ser uma reta, uma semireta, um segmento de reta ou até mesmo um ponto.

Para dar conitinuidade a teoria sobre Programação linear, abaixo segue algumas definições que apontaram para alguns resultandos bastantes importantes para a resolução de problemas em PL. Considerando, então um sistema linear dado pela **definição 3.5** na sua forma matricial $AX = B$, supondo que o posto de A seja igual a m e que $n < m$, tem-se para tal sistema as seguintes definições.

Definição 3.14 (Solução básica). *Se C é qualquer submatriz $m \times m$ não singular composta por m colunas independentes de A e seja D a submatriz $m \times (n - m)$ formada pelas $n - m$ colunas restantes de A, $AX = B$ pode ser reescrito da seguinte forma:*

$$CX_C + DX_D = B \tag{3.3}$$

Onde X_C é o vetor de m componentes formados pelas variáveis associadas a matriz C e X_D é o vetor de $(n - m)$ componentes composto pelas variáveis associadas a matriz D.

Dito isso, se todos os componentes de X_D forem iguais a zero, a solução para o sistema $CX_C = B$ é dita solução básica de $AX = B$ em relaąão a base C, onde as variáveis X_C serão chamadas de variáveis básicas e as variáveis de X_D de variáveis não básicas.

Definição 3.15 (Solução básica degenerada). *Se dentre as variáveis da solução básica existir uma ou mais que sejam iguais a zero, essa solução básica é dita solução básica degenerada.*

Definição 3.16 (Solução factível). *Um vetor que satisfaz à todas as restricções de um problema em PL é dito solução factível. Além disso, uma solução básica que também é factível é chamada de solução básica factível e se essa solução básica factvél for degenerada, diz-se solução básica factível degenerada.*

Definição 3.17 (**Solução Básica Factível Ótima**). *A solução básica fatcível ótima é a que dentre todas as outras soluções básicas fatv́eis maiximiza o valor da função objetivo.*

Abaixo segue um exemplo a respeito do que foi exposto sobre os tipos de solução de um sistema linear.

Exemplo 3.7. *Dado o sistema:*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

Reescrevendo-o na sua forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Fazendo uma rápida análise, percebe-se que o posto da matriz de coeficientes desse sistema é igual a 2, logo uma possível forma para se reescrever este sistema de acordo com a **equação 3.3** é a seguinte.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Como pode ser notado a partir da forma matricial do sistema inicial, a nulidade de sua matriz de coeficientes é 2 o que indica que esses sistema possui uma quantidade de duas variáveis livres (conhecido também como grau de liberdade do sistema), ou seja, variáveis que podem assumir qualquer valor independente das outras. Fazendo então x_3 e x_4 iguais a zero, tem-se como resultado o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Cuja solução é $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$.

De acordo com o que foi discorrido, x_1 e x_2 são as variáveis básicas que formam a solução básica do sistema inicial do exemplo em relação a base $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, enquanto x_3 e x_4 são ditas as variáveis não básicas. É interessante notar que uma outra submatriz (desde de que fosse de ordem 2×2) de $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ poderia ser adotada como base no lugar de $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, gerando assim uma outra solução básica para o sistema inicial do exemplo acima.

Um fato importante é que dado um problema em Programção Linear, transformando suas retrições em um sistema linear, a busca pelas soluções básicas desse sistema, estão ligadas diretamente aos vertices da região poliedral convexa resultante das retrições do problema. Para possibilitar uma melhor compreensão do que foi dito, segue o exemplo abaixo:

Exemplo 3.8. *Dado um problema em programação linear com duas variáveis na sua forma padrão é possível transformar todas as inequações que compõe o conjunto de restrições do sistema em equações, bastando para isso apenas adicionar às inequações as variáveis de folga relativas a cada uma das inequações. Primeiramente, caso o problema em questão seja:*

Maximizar $Z = 2x_1 + 3x_2$ sujeito às seguintes restrições abaixo.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Onde a região poliedral convexa fechada equivalente ás restrições do sistema está representada abaixo:

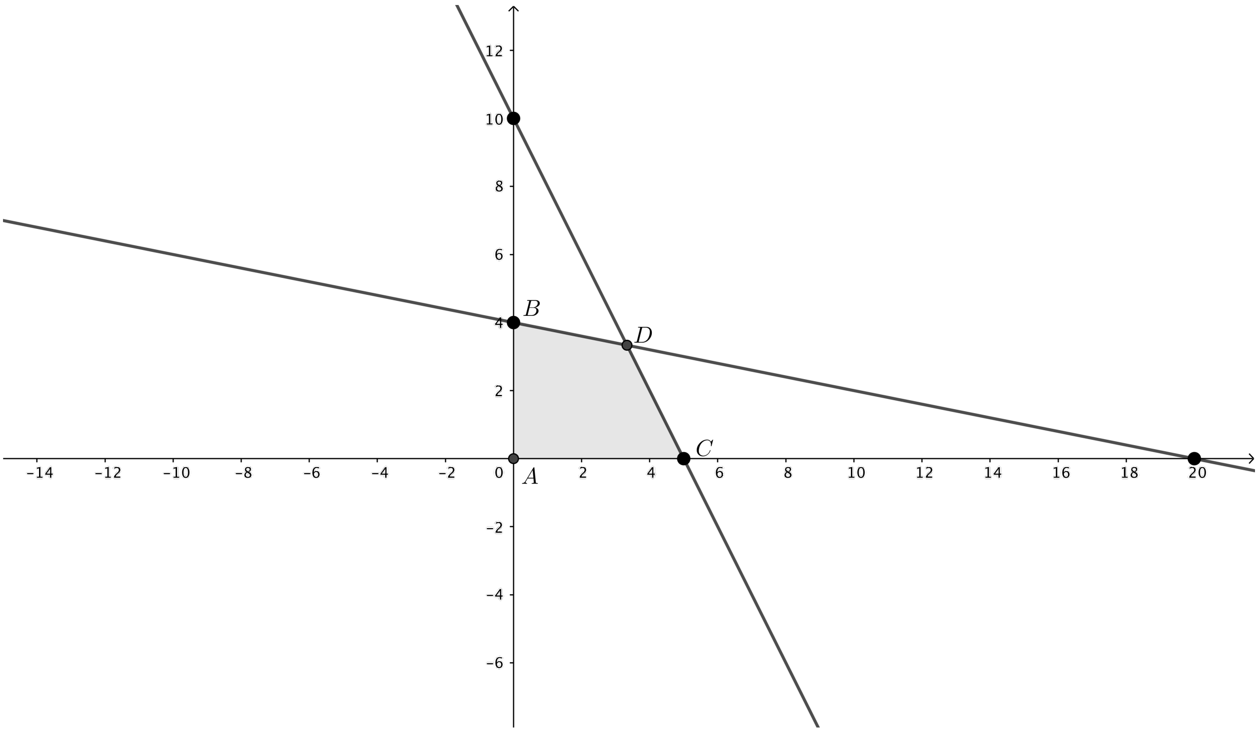

Figura 3.8: Região de soluções

Para transformar o sistema de inequações em um sistema de equações acrescenta-se em cada uma das inequações as variáveis F_1 e F_2, que representam as folgas de cada uma das inequações, que é a diferença entre o segundo e o primeiro membro de cada uma delas. Observe abaixo:

Sendo a primeira inequação $x_1 + 5x_2 \leq 20$, então $F_1 = 20 - x - 5x_2$;

E sendo a segunda inequação $2x_1 + x_2 \leq 10$, então $F_2 = 10 - 2x_1 - x_2$.

É possível perceber que as variáveis de folgas nunca serão negativas pois foram obtidas através de uma diferença em que o primeiro termo nunca é maior que o segundo, o que resulta no seguinte sistema de variáveis não negativas:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + F_1 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + F_2 = 10 \end{cases}$$

Tal que sua forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

é possivel verificar facilmente que o posto da matriz de coeficientes do sistema é 2, o que permite tomar como base do sistema as seguintes submatrizes de ordem 2×2 da matriz de coeficientes do sistema:

- Tomando como base a submatriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e reescrevendo a forma matricial do sistema na forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ F_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

  Como a matriz de coeficientes do sistema inicial possui posto 2 a nulidade da mesma é 2 o que aponta que este sistema possui duas variáveis livres. Assumindo então que sejam x_2 e F_2 e ainda que sejam iguais a zero, o sistema na forma matricial acima, assume a forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

  Que possui solução $x_1 = 5$ e $F_1 = 15$, que é uma solução básica do sistema inicial referente à base $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Perceba que $x_1 = 5$ e $x_2 = 0$ na verdade é o ponto C na região poliedral convexa (região factível) representada na **figura 3.8**.

- Tomando agora como base a submatriz $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e reescrevendo a forma matricial do sistema na forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Da mesma forma e pelo mesmo motivo que no item anterior existe duas variáveis livres para o sistema. Assumindo então que sejam F_1 e F_2 e ainda que sejam iguais a zero, o sistema na forma matricial acima, assume a forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Que possui solução $x_1 = x_2 = \frac{10}{3}$, que é uma solução básica do sistema inicial referente à base $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Essa solução básica representa o ponto D na região região factível na **figura 3.8**.

Procedendo de maneira análoga para as demais restantes submatrizes de ordem 2×2 da matriz de coeficientes do sistema, tem-se então para:

- A submatriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ a solução do sistema é dada por: $x_1 = 20, x_2 = 0, F_1 = 0$ e $F_2 = -30$, onde x_1 eF_2 compõe a solução básica do sistema para essa base. Além disso, nessa solução x_1 e x_2 indicam um ponto foram da região factível, portanto não interessa para a solução o problema.
- A submatriz $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a solução do sistema é dada por: $x_1 = 0, x_2 = 10, F_1 = -30$ e $F_2 = 0$, onde x_2 eF_1 compõe a solução básica do sistema para essa base. Além disso, nessa solução x_1 e x_2 indicam também um ponto foram da região factível, portanto também não interessa para a solução o problema.
- A submatriz $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ a solução do sistema é dada por: $x_1 = 0, x_2 = 4, F_1 = 0$ e $F_2 = 6$, onde x_2 eF_2 compõe a solução básica do sistema para essa base. Essa solução x_1 e x_2 indicam o ponto B da região factível.
- Por fim, tomando a submatriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ com base, a solução do sistema é dada por: $x_1 = 0, x_2 = 0, F_1 = 20$ e $F_2 = 10$, onde F_1 e F_2 compõe a solução básica do sistema para essa base. Nessa solução x_1 e x_2 indicam o ponto A da região factível.

O ponto importante nesse exemplo é perceber que os vértices do polígono de soluções do problema, correspondem a uma determinada solução básica do sistema correspondente ao problema. Segundo Silva et al. [19], essa conclusão sugere um novo método para resolver problemas em programação linear que pode ser expandido para problemas com mais variáveis, onde não é mais possível a solução gráfica do problema, onde os candidatos a soluções ótimas do modelo são dados pelas soluções básicas do sistema de equações que podem ser calculados independente do numero de variáveis envolvidas.

Nesse sentido, Boldrini [3] expõe duas ideias intuitivas obtidas á partir de situações simillares a do exemplo acima, onde comenta:

i) Uma função objetivo atinge um valor máximo e um valor mínimo quando a região poliedral convexa for limitada.

ii) Os vértices da região polieadral convexa assumem papeis importantes na procura de maximos e minimos da função objetivo.

Onde o segundo item leva ao importantíssimo **"Teorema Fundamental da Programação Linear"**.

Lema 3.1. *Seja $f(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n + b$ e seja P um ponto interior a um segmento $\overline{AB}$ do $\mathbb{R}^n$, isto é, $P = \lambda A + (1-\lambda)B$, então $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$ ou $f(B) \leq f(P) \leq f(A)$.*

Demonstração lema 3.1. Como $P = \lambda A + (1 - \lambda)B$ e f é uma transformção afim, $f(x) = L(x) + b$ onde $L(x) = L(x_1, ..., x_n) = a_1x_1, ..., a_nx_n$ é linear, assim sendo, $f(P) = L(P) + b = L(\lambda A + (1 - \lambda)B) + b = \lambda L(A) + (1 - \lambda)L(B) + b$.

Supondo $f(A) \leq f(B) \rightarrow L(A) \leq L(B)$ e como $f(P) = \lambda L(A) + (1 - \lambda)L(B) + b$ tem-se então, $\lambda L(A) + (1 - \lambda)L(A) + b \leq f(P) \leq \lambda L(B) + (1 - \lambda)L(B) + b$, de onde: $L(A) + b \leq f(P) \leq L(B) + b$. Portanto:

$$f(A) \leq f(P) \leq f(B)$$

Para $f(B) \leq f(A)$, a prova para demonstrar que $f(B) \leq f(P) \leq f(A)$ é análoga ao caso anteior.

□

Esse resultado tem como consequência o seguinte lema.

Lema 3.2. *Seja $f(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n + b$. Se dentre os valores que f assumir num segmento $\overline{AB}$ do $\mathbb{R}^n$ o valor máximo, ou mínimo, for assumido num ponto P interior a este segmento, então f será constante nesse segmento $\overline{AB}$.*

Demonstração lema 3.2. Supondo $f(A) \leq f(B)$, implica em $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$ pelo **Lema 3.1**. Caso $f(P)$ seja máximo, então $f(B) \leq f(P)$, portanto por essas duas ultimas desigualdades, $f(P) = f(B)$. Em especial para $P = A$, tem-se que $f(P) = f(A)$ e como P é arbitrário, conclui-se que f é constante em $\overline{AB}$.

Caso $f(P)$ seja mínimo tem-se $f(P) \leq f(A)$ e como $f(A) \leq f(P) \leq f(B)$, logo $f(P) = f(A)$. Em especial para $P = B$, tem-se que $f(P) = f(B)$ e como P é arbitrário, conclui-se que f é constante em $\overline{AB}$. Em ambos os casos, f é constante em $\overline{AB}$. Para o caso de $f(B) \leq f(A)$, a demonstração é análoga. □

Teorema 3.3 (***Teorema Fundamental da Programação Linear***)**.** *Seja $f(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n + b$ definida em uma região poliedral convexa A do $\mathbb{R}^n$. Suponha que f assuma valor* *máximo (mínimo) em A. Então se A possui vértice(s), então esse valor máximo (mínimo) será assumido num vértice.*

Observado o objettivo proposto para este trabalho, segue a demonstração para o caso em que $A \subset \mathbb{R}^2$.

Demonstração teorema 3.3. Visto que f assuma um valor máximo (mínimo) em um ponto P de A, as possibilidades são:

i) P é um vértice, logo o teorema está provado;

ii) P está em uma aresta de A, mas pelo ***Lema 3.2***, todos os pontos desta aresta assumirão o valor $f(P)$ e como A possui vertice, esta aresta obrigatoriamente conterá um vertice V, logo $f(P) = f(V)$;

iii) P é ponto interior de A. Nesse caso, f será constante em toda região A. Para a prova disso, seja Q um outro ponto interior dessa região, e como esta é poliedral convexa, o segmento $\overline{QP}$ ainda está contido em A, podendo ainda ser prologado até um ponto Q', onde $\overline{QQ'}$ também estará contido em A, pois P é interior à mesma, o que implica em $f(P) = f(Q)$. □

A prova deste teorema para o caso em $\mathbb{R}^n$ exigirá a análise de uma quantidade muito maior de possibilidades para P, observar quando:

i) P é um vértice;

ii) P está numa aresta que é resutado da solução de $n-1$ equações, onde o valor máximo (mínimo) será assumido em toda a aresta que é um subconjunto de dimensão 1;

iii) P está em uma face que é resutado da solução de $n-2$ equações, onde o valor máximo (mínimo) será assumido em toda a face que é um subconjunto de dimensão 2;

$\vdots$

iv) P é ponto interior onde a função f assumirá valor constante em toda região A.

Segundo Boldrini et al. [3] uma situação em que uma função objetivo sempre possui, necessáriamente um máximo e mínimo é quando a mesma está restrita uma região poliedral convexa limitada o que premite reescrever o Teorema fundamental da Programção linear como:

Teorema 3.4 (***Teorema Fundamental da Programação Linear***)**.** *Seja $f(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n + b$ definida em uma região poliedral convexa limitada A do $\mathbb{R}^n$. então f assume valores máximos e mínimos nos vértices de A.*

Com todos os conceitos e resultados essenciais devidamente discutidos até aqui é possivel agora discutir o método gráfico e o método simplex para a resolução de problemas em programação Linear.

Capítulo 4

Métodos de Resolução de Problemas em Programação Linear

Este capítulo tem o proposito de discutir os dois principais métodos de resolução de problemas em PL, os quais são o método gráfico e o método simplex. Cabe ressaltar aqui, que existem outros métodos e ou até mesmo variações do pr'oprio método simplex que são aplicados a situações específicas, porem, os mesmos não serão abordados aqui, visto que não conferem ao escopo deste trabalho.

4.1 Método gráfico

O método gráfico é uma técnica utilizada para resolver principalmente problemas em programação linear cujas função objetivo possui duas variáveis, mas que pode ser também utilizado problemas com funções de três variáveis:

De modo geral, esta técnica consiste em dois passos:

i) Construção da região Factível: Construir em um sistema de eixos ortogonais uma região de soluções (região de solucões factível) que é, na verdade, uma região poliedral convexa cujos pontos são os que satisfazem as condições impostas pelas restrições referente ao problema, e;

ii) Análise do Desempenho da Função Objetivo: Fazer a análise do desempenho da funcão. Em geral, se esta região factível for limitada, pelo teorema 3.4, seu valor ótimo será assumido em algum dos vertices dessa região. Caso não seja uma região poliedral convexa limitada, se possuir vértice e a se a função objetivo possua um valor ótimo, então, este valor é assumido em algum dos vértices. Por fim, se for uma região poliedral convexa ilimitada, a função não assumirá um valor oíimo.

Segundo Silva et al. [19] como este método apresenta visualmente o conjunto das muitas soluções do problema, este método se torna vantajoso para o aluno no sentido de um melhor entendimento, inclusive quando o aluno se depara com uma situação em que a construção gráfica não é mais possível. Para fazer a descrição deste método utilizou-se aqui as indicações que constam em Silva et al. [19] e em Prado [16].

4.1.1 Construção da Região Factível

Considerando que o modelo matemático já esteja devidamente construído, é preciso agora encontrar a região de soluções que é gerada pelas restrições do problema. Para isso é necessário apenas construir ou mesmo esboçar os semiplanos (no caso de inequações) de cada uma das restrições do problema e identificar a região de interseção entre todas essas regiões, a região resultante será então a região factível do problema. Abaixo segue um exemplo:

Exemplo 4.1. ***Exemplo:*** *Construir a região poligonal convexa formada pelo sistema de inequações abaixo, cujas incógnitas são não-negativas.*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ -x_1 + 4x_2 \geq 4 \end{cases}$$

Para o que se pede é necessário representar as inequações $x_1 + 2x_2 \leq 8$ e $-x_1 + 4x_2 \geq 4$ graficamente, para encontrar então a região de intersecação procurada.

Representando primeiramente a inequeção $x_1 + 2x_2 \leq 8$, é necessário construir a reta correspondente a equação $x_1 + 2x_2 = 8$. Para isso, se $x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 4$ e se $x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 8$, o que gera a reta abaixo.

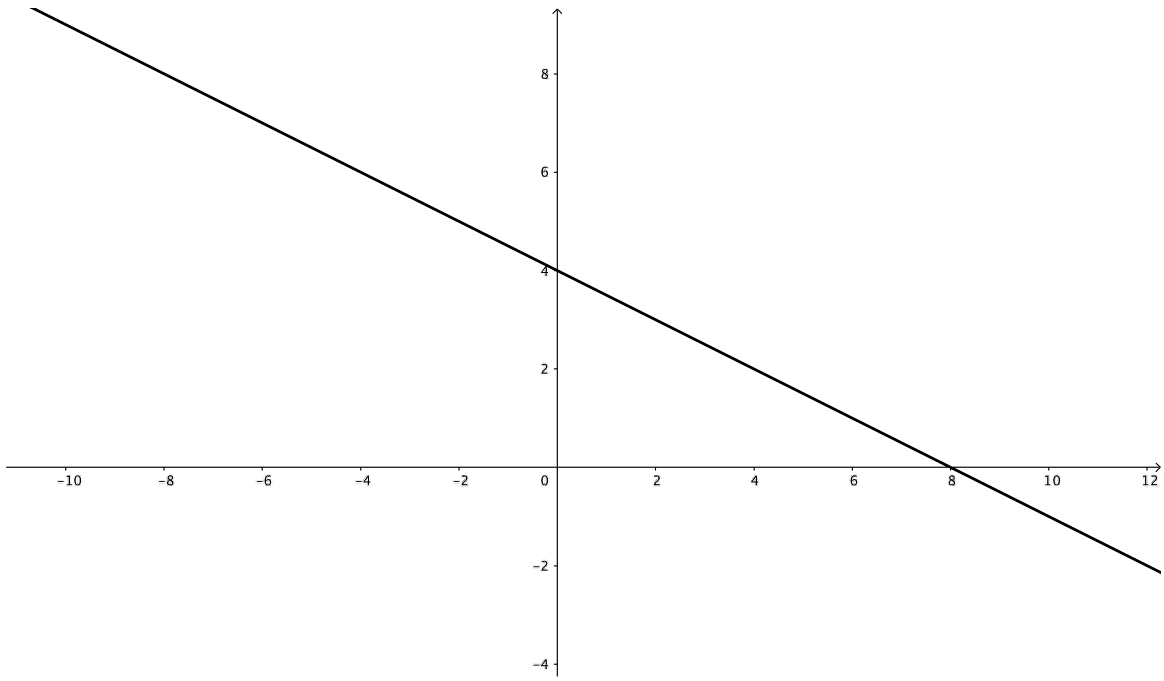

Figura 4.1: gráfico da reta $x_1 + 2x_2 = 8$

Para verificar agora quais dos dois semiplano que foram definidos representa $x_1 + 2x_2 \leq 8$, deve-se tomar um ponto qualquer de uma das regiões limitadas pela reta e substituir tais valores na inequação e analisar o resultado. Caso a substituição resulte numa sentença verdadeira o semiplano que corresponde às soluções da inequação em questão é o semiplano que contem o ponto escolhido, caso contrário o semiplano procurado é o que não contem o ponto que foi escolhido. Neste caso, escolhendo o ponto $(0, 0)$ para ser substituído na inequação, tem-se como resultado: $0 + 2 \times 0 \leq 8$ o que claramente é verdadeiro, portanto, a região de soluções dessa inequação é justamente o semi-plano que contém o ponto que foi escolhido. Porém, como as variáveis são não negativas, a região referente a esta inequeção ficará restrita aos pontos do primeiro quadrante. Tal região está representada por S_1 na figura abaixo.

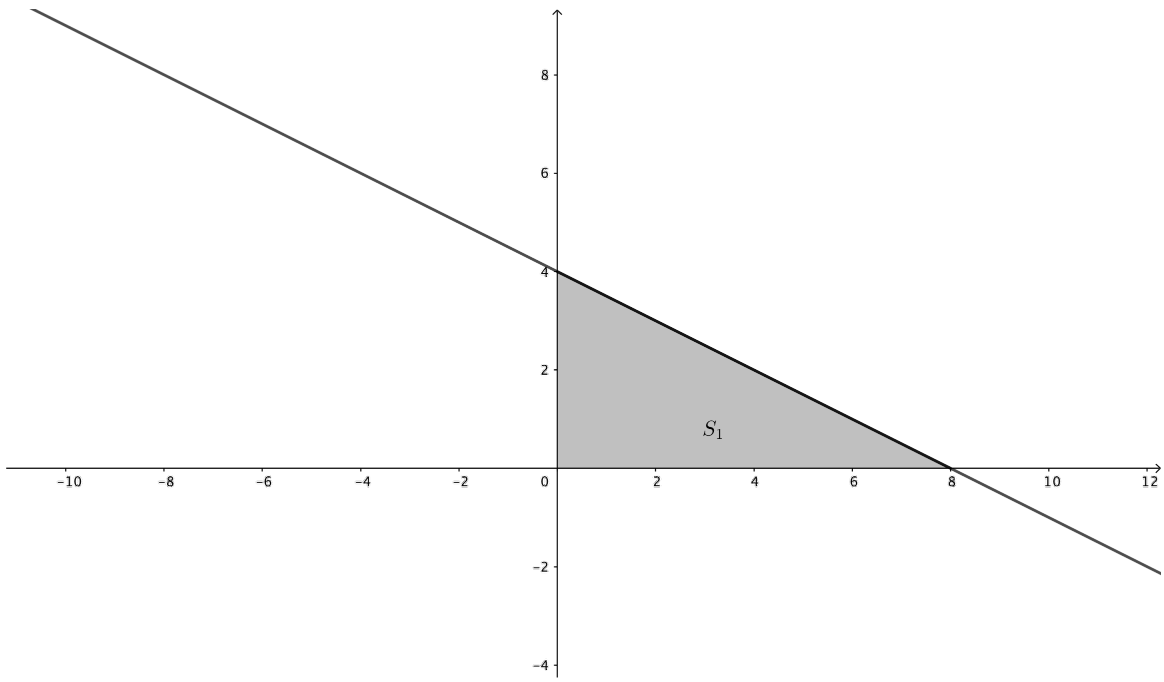

Figura 4.2: Semiplano definido pela inequação $x_1 + 2x_2 \leq 8$

Perceba que o processo que foi usado para encontrar o semi-plano referente a inequeção em questão já foi discutido e exemplificado no tópico de **Conjuntos Convexos.**

Sendo assim, de maneira análoga, a inequação $-x_1 + 4x_2 \geq 4$, está representada pela região S_2.

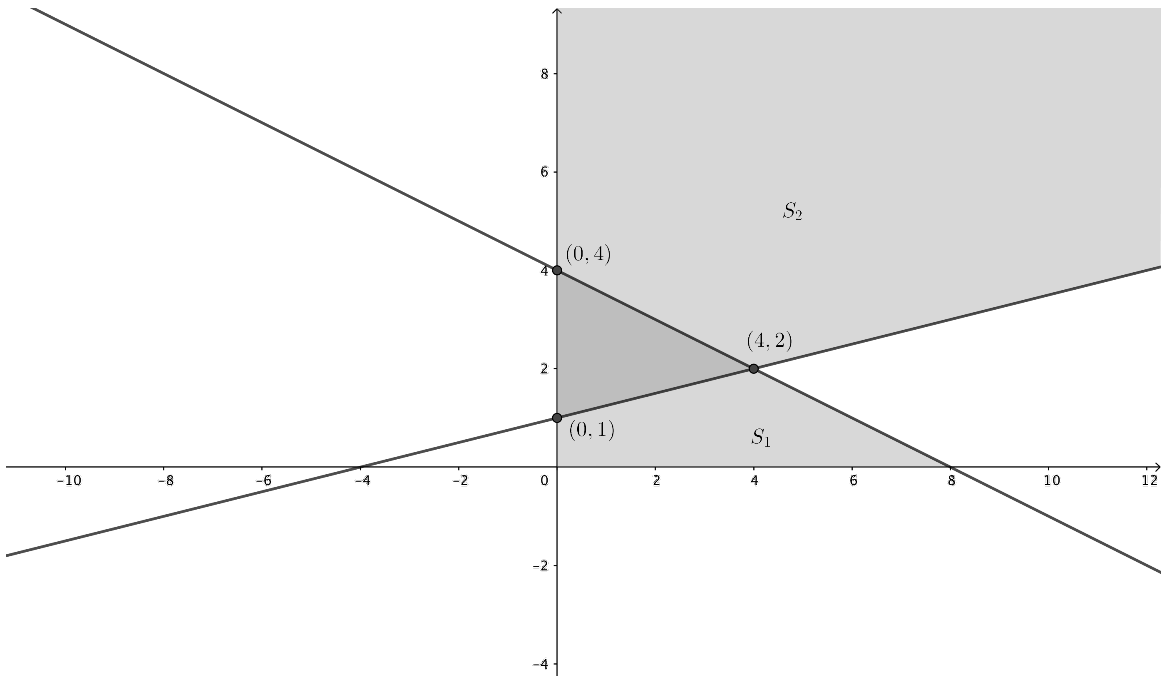

Figura 4.3: grafico das inequacoes $2x_1 + x_2 \leq 10$ e $x_1 + 2x_2 \geq 10$

Portanto, a região factível procurada, resultante da interseção entre S_1 e S_2 é a região S_3 indicada na figura abaixo:

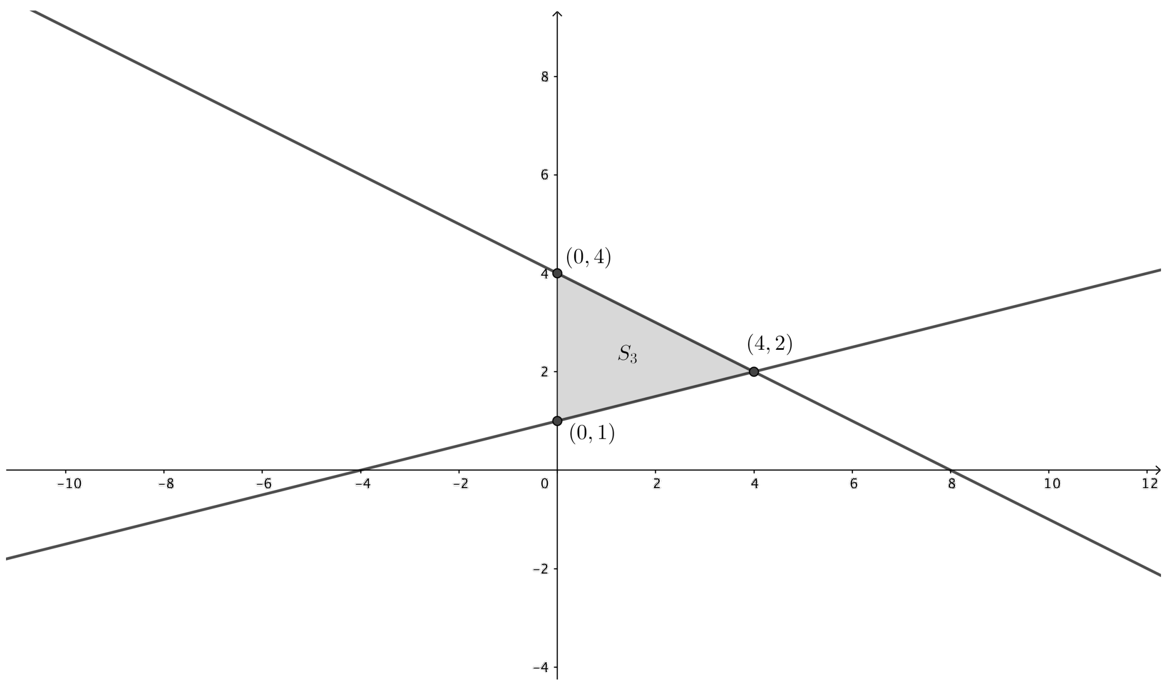

Figura 4.4: região poligonal de soluções das inequacoes $2x_1 + x_2 \leq 10$ e $x_1 + 2x_2 \geq 10$

4.1.2 Análise do Desempenho da Função Objetivo:

Após obtida a região factível de soluções de um problema em programação linear é necessária a busca pela solução ótima do problema, ou seja, analizar o desempenho da função objetivo restrita à região factível encontrada. Para isso deve-se verificar qual o tipo de região é essa região factível, de acordo com item ***ii)*** do inicio deste capíulo, e realizar a análise de acordo com o caso em questão.

Exemplo 4.2. *Dada a região factível referente ao sistema de inequações do* ***exemplo 4.1****, encontrada na* ***figura 4.4****, maximizar a função $Z = 2x_1 + 3x_2$ restrista a essa região.*

Como é uma região poliedral convexa limitada, imediantamte sabe-se que essa função assume seu valor ótimo nos vértices dessa região. Portanto, testando cada um dos três vertices da região na função objetivo, tem-se:

- Para $(0, 1) \rightarrow Z = 2 \times 0 + 3 \times 1 \rightarrow Z = 3$;
- Para $(4, 2) \rightarrow Z = 2 \times 4 + 3 \times 2 \rightarrow Z = 14$ e;
- Para $(0, 4) \rightarrow Z = 2 \times 0 + 3 \times 4 \rightarrow Z = 12$

Conclui-se então que o valor ótimo que Z assume é $Z = 14$ para $x_1 = 4$ e $x_2 = 2$.

Dependendo do tipo de região factível encontrada e qual for o tipo de otimização (maximizar ou minimizar), uma análise especfica deve ser feita para obter a solução ótima do problema. De maneira geral, para regiões factíveis ilimitadas sem vertice e/ou com vértices, pode ser feita a seguinte análise que se aplica de maneira análoga a qualquer uma desses tipos regiões mencionadas e para problemas tanto de maximização ou minimização.

Exemplo 4.3. *Suponha o mesmo problema do* ***exemplo 4.2*** *porém com a região factível sendo a região S_1 da figura abaixo:*

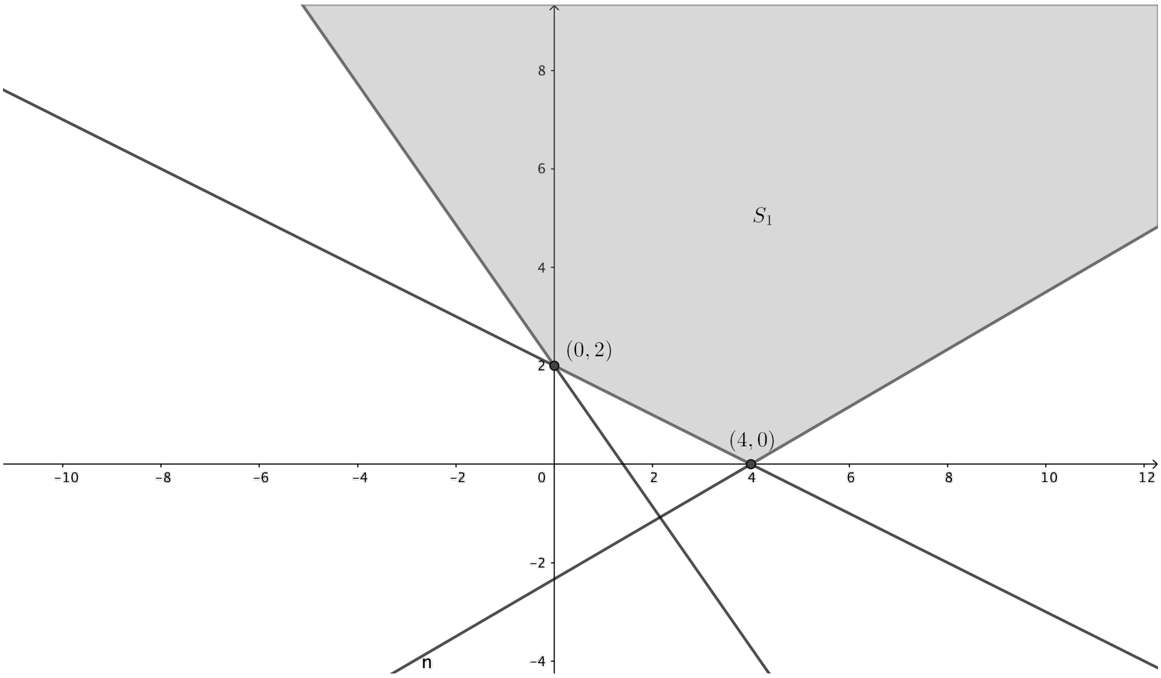

Figura 4.5: região poliedral convexa ilimitada S_1

Atribui-se um valor qualquer para Z e traca-se a reta resultante dessa escolha. Por exemplo, para $Z = 15$, a função objetivo resulta na reta $15 = 2x_1 + 3x_2$, cuja representação é linha tracejada na figura abaixo:

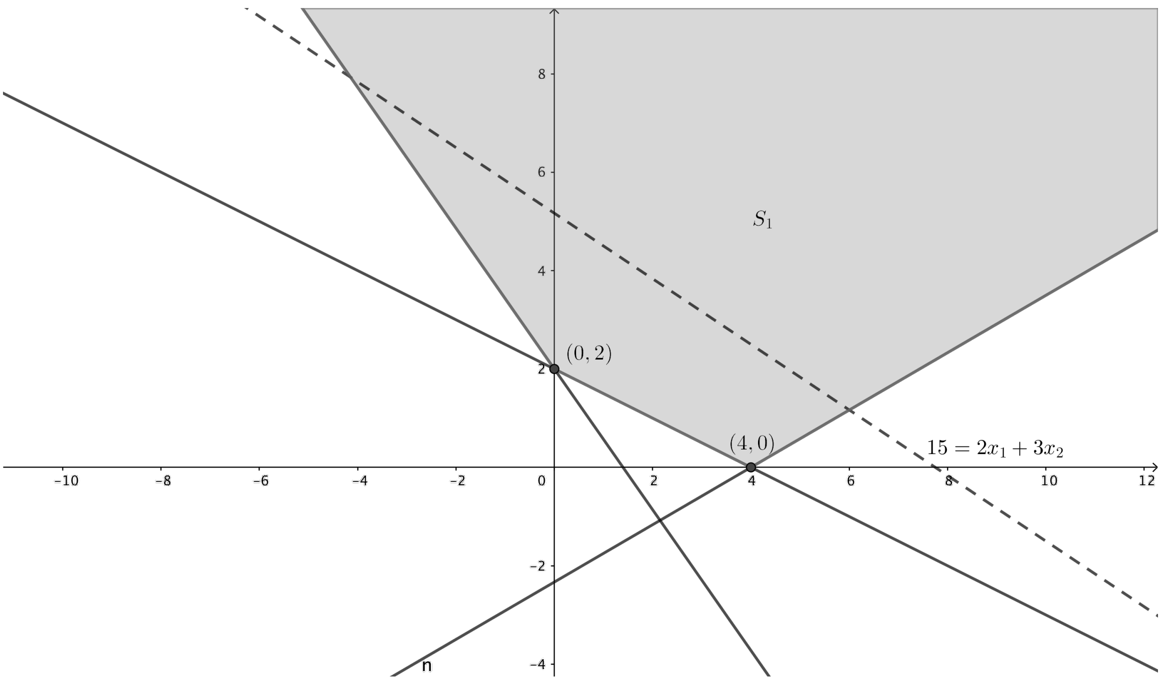

Figura 4.6: Gráfico da reta $15 = 2x_1 + 3x_2$

Aumentando um pouco o valor de Z, o resultado é uma reta paralela a reta onde $Z = 15$.

Por exemplo, fazendo $Z = 20$, tem-se a segunda reta representada da forma tracejada abaixo:

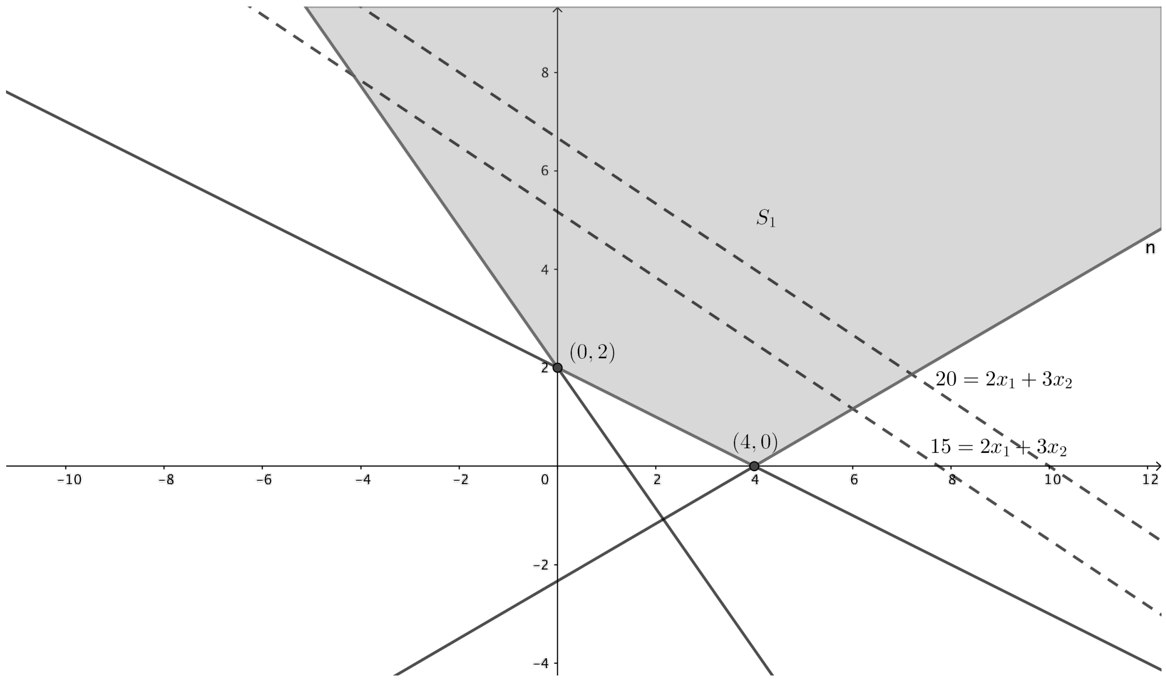

Figura 4.7: Gráfico da reta $20 = 2x_1 + 3x_2$

Perceba que a cada vez que escolhe-se um valor para Z o resultado sempre serão restas paralelas à essas já obtidas na imagem acima. E quanto maior o valor de Z essas retas estarão cada vez mais longe da origem e, o mais importante fato, sempre vai existir valores de x_1 e x_2 dentro dessa região factível. Isso implica que Z restrita a S_1 não possui um valor máximo.

De maneira análoga, quanto menor for o valor atribuido a Z mais perto da origem essas retas paralelas chegariam e depois de um determinado valor começariam a se afastar da origem no sentido oposto ao caso anteior. Porém, teria um momento que para um determinado valor de Z a reta obtida não vai conter mais nenhum valor de x_1 e x_2 dentro da região factível, o que leva a conclusão de que existe um valor mínimo de Z para que ainda exista x_1 e x_2 dentro da região factvel e que também satisfaça a equação $z = 2x_1 + 3x_2$. É possivel perceber ainda que esse valor de Z é o que vai resultar na reta que passa pelo ponto $(0, 2)$, pois qualquer valor de Z menor que esse, gera uma reta a paralela a essa que não possui nenhum ponto dentro da região factível, conforme pode ser visto abaixo.

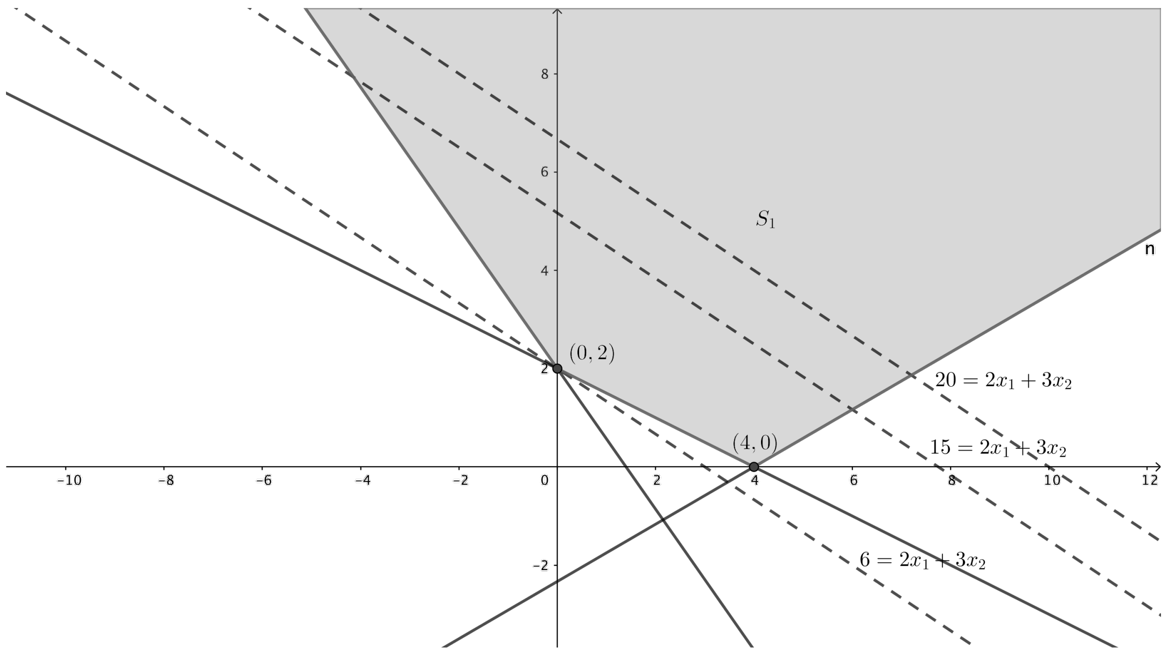

Figura 4.8: Gráfico da reta $6 = 2x_1 + 3x_2$

Portanto, nesse ponto $(0, 2)$, Z assume o valor mínimo de $Z = 6$.

Para concluir, uma outro fato que poderia ter sido usado para encontrar esse valor mínimo, seria a constatação de que essa função possuia um valor mínimo, o que imediatamente, pelo **Teorema Fundamental da Programação Linear**, indicaria que a essa função assumiria tal valor nos vértices da região factvel, testava-se então dois únicos vértices e o menor valor encontrado seria o seu valor mínimo.

À partir dessas discussões propostas aqui, qualquer problema de programação linear cuja função objetivo possua duas variáveis pode ser resolvido similarmente.

4.2 Método simplex

O método simplex é um método muito poderoso e foi depois do desenvolvimento dele que a Programação Linar se expandiu como área de pesquisa. O método serve para resolver problemas de PL idependente da quantidade de variáveis da função objetivo através de passos simples até se obter a solução ótima procurada.

4.2.1 Apresentação do método Simplex

É fato que os modelos de programação linear se mostraram ser ferramentas poderosas na busca de procedimentos que otimizassem determinados sistemas, porem, dependendo do numero de variáveis atribuídas aos modelos matemáticos o trabalho de alcançar a solução desejada se torna muito trabalhosa. Surge então o método SIMPLEX que reduz a quantidade de cálculos necessários para a resolução desses problemas e que ainda pode ser programado em um computador.

De modo geral, segundo Silva et al. [19] e Boldrini [3] esse método é formado por um grupo de critérios para a escolha de soluções básicas que melhoram o desempenho do modelo matemático em questão. De modo geral, este é um método de busca, ou seja, este método começa em um vertice da região factível e vai percorrendo os demais vértices da região até solução ótima ser encontrada. Este método foi desenvolvido em 1947 por Geroge B. Datzing e logo após o seu desenvolvimento houve um crescimento espantoso da Programação linear, que até então era desconhecida e pouco utilizada devido seus problemas demandarem de um grande esforço computacional.Após essa barreira ser quebrada a então a Programção linear cresceu bastante sendo alvo de muitos estudos que geraram muitos artigos e livros relacionados a essa área.

A descrição dos passos desse método será baseada principalmente em Silva et al. [19].

Antes de mais nada, para aplicar o método primeiramente, é preciso cácular uma solução básica inicial, onde à partir dessa solução, novas soluções básicas subsequentes que serão calculadas através da troca de variáveis básicas por variáveis não básicas otimizando cada vez mais o valor da função até a solução ótima do problema ser encontrada. Porém, segundo Silva et al. [19], para aplicar tal método, as seguintes situações devem ser atendidas:

- O problema deve ser de maximização;
- Todas as inequações que constituem a restrição do problema devem ser do tipo $(\leq)$; e
- Todas as variáveis devem ser não-negativas;

Quando um problema de Programação liner atende às restrições acima, diz-se que o mesmo está na sua forma padrão. Tais condições podem ser expressas da seguine maneira:

Otimizar:

$$Z = AX \tag{4.1}$$

Sujeito a:

$$\begin{cases} BX = C \\ X \geq 0 \end{cases}$$

onde $BX = C$ equivale a um sistema de equações lineares que representam as restrições do problema após todas as inequações que compõe essas retrições terem sido transformadas em equações à partir a inserção da variável de folga referente em cada uma das inequações.

Para problemas que não respeitem essas restrições, outros métodos devem ser aplicados, ou ate mesmo, se for o caso, as variações existentes do método simplex, as quais não serão abordadas neste trabalho.

4.2.2 Descrição do Método

Este método é basicamente dividido em duas partes:

i) A Busca por Soluções Factíveis: Neste passo, calcula-se diversas soluções básicas factíveis que podem ser ótimas ou não. A cada uma solução fatível encontrada faz-se imediatamente o teste de otimaliadade para a mesma.

ii) Teste de Otimalidade de Solução: A cada uma das soluções factíveis encontradas no passo acima verifica-se se a solução é oótima ou não.

Para o pleno entendimento destes passos, segue o exemplo, cujo o roteiro de resolução pode ser seguido de maneira análoga para a resolução de outros problemas em PL desde que sejam observadas as restrições já comentadas mais acima:

Exemplo 4.4. *Maximizar a função $Z = 3x_1 + 5x_2$, sujeita a:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ 6x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 - x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Antes dos passos ***i)*** e ***ii)*** serem realizados é necessário transformar o sistema de inequações em um sistema de equações, acrescentando as variáveis folga em cada uma das inequações do sistema, o que resulta em:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + F_1 = 10 \\ 6x_1 + x_2 + F_2 = 20 \\ x_1 - x_2 + F_3 = 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, Z_1 \geq 0, Z_2 \geq 0, Z_3 \geq 0 \end{cases}$$

Feito isso, pode-se então dar inicio ***à busca por soluções factíveis:***.

À partir dos passos já discutidos em tópicos anteriores, uma solução básica inicial para esse sistema são podem ser os valores $x_1 = 0, x_2 = 0, F_1 = 10, F_2 = 20$ e $F_3 = 30$.

Com essa primeira solução básica, é preciso reescrever Z na forma $Z - 3x_1 + 5x_2 = 0$ e montar o que é conhecido como o ***tableau simplex*** do método, que pode ser conferido abaixo.

Base	Z	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
F_1	0	2	4	1	0	0	10
F_2	0	6	1	0	1	0	20
F_3	0	1	-1	0	0	1	30

Tabela 4.1: Tabela1

Nessa tabela, pode ser destacado alguns pontos importantes de seu funcionamento:

- A primeira coluna se refere às variáveis que compõe a base do sistema para a respectiva solução básica inicial que foi encontrada.

- As colunas entre a primeira e a ultima coluna são os valores dos coeficientes das variáveis de cada uma das equações do sistema, onde a variável em questão de cada um dos coeficientepode ser conferida no topo do tableau.

- A útima coluna, na primeira linha é o valor atual da função objetivo, que para essa solução básica inicial é 0, e os restantes são os valores atuais das variáveis que compõe a base.

- Os valores da primeira linha que se refere aos valores da função objetivo excetuando-se á ultima coluna é chamado de custo reduzido nas terminologias de programação linear. O restante das linhas se referem às restrições do problema

O funcionamento do ***tableau simplex*** descrito acima é análogo para qualquer outro ***tableau simplex*** de algum outro problema de PL, nos termos discutido até aqui.

Com a solução básica inicial em mãos e o ***tableau simplex*** devidamente estruturado, é preciso verificar se essa solução inicial faz a funccão objetivo assumir seu valor ótimo, ou seja, é necessário fazer o ***teste de otimalidade de solução***. Para isso, segundo Silva et al. [19], basta verificar se no tableau, os coeficientes das variáveis não básicas da função objetivo são todos não negativos. Caso isso ocorra, diz-se que essa solução é a solução ótima, caso contrário, faz-se necessário buscar uma nova solução básica e fazer novamente o teste de otimalidade da solução até que a solução ótima seja encontrada.

Conclui-se então, que por conta de existirem coeficientes negativos associados às variáveis não básicas x_1 e x_2 na função objetivo, quais são -3 e -5, respectivamentes, essa solução inicial básica que foi encontrada não é a solução ótima para esse problema. Portanto é necessário a busca de uma nova solução.

Para tal os passos abaixo devem ser seguidos.

De maneira geral, é preciso escolher uma variável não básica para se tornar uma variável básica, logo fala-se que essa variável é a variáve que vai entrar na base. Além disso, como uma variável vai entrar na base, uma variável da base vai ter que sair, ou seja, deve-se escolher uma variável para sair da base. Apesar de existirem diversas maneira de escolher quais as variáveis que entram e as que saem, segue o critério abaixo, proposto resumidamente por Silva et al. [19].

- **Variável que entra na base:** As variáveis que concorrem a entrar na base são x_1 e x_2 pois são as variáveis não básicas. Para escolher qual delas vai entrar, verifca-se a que possui coeficiente negativo com o maior valor absoluto na função objetivo. Nesse caso, é a variável x_2.

- **Variável que sai da base:** As variáveis que fazem parte da base são F_1, F_2 e F_3, e uma delas deverá ser escolhida para sair da base. Essa escolha deve ser feita dividindo-se os termos independentes das equações, pelos coeficientes positivos da variável que esta entrando na base referente à sua própria equação. O menor valor encontrado aponta a variável básica que deverá sair. Esse processo pode ser conferido abaixo:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + F_1 = 10 \longrightarrow 10/4 = 2,5 \\ 6x_1 + x_2 + F_2 = 20 \longrightarrow 20/1 = 20 \\ x_1 - x_2 + F_3 = 30 \longrightarrow 30/-1 = -30 \end{cases}$$

Portanto o menor valor nas divisões efetuadas é referente a variável F_1 , logo esta é a variável que irá sair da base.

Obs.: A ultima divisão cujo resultado é -30 não deve ser considerada, pois como já dito e segundo Silva et al. [19], essas divisões só devem ser efetuadas pelos coeficientes positivos.

Para concluir a busca por uma nova solução é preciso reescrever o tableou à partir de alguns critérios, o que vai gerar uma nova solução básica. Esse processo é conhecido como **pivoteamento**.

Para fazer esse pivoteamento, primeiro identifica-se no ***tableau simplex*** a **linha pivô**, que é a linha da variável que sai, a **coluna pivô**, que é a coluna da variável que entra na base e o **elemento pivô**, que é o elemento que está na linha pivô e na coluna pivô simultaneamente. Segue abaixo, destacados em azul, cada um esses itens.

Base	Z	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	b
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
F_1	0	2	4	1	0	0	10
F_2	0	6	1	0	1	0	20
F_3	0	1	-1	0	0	1	30

Tabela 4.2: Tabela2

A principal ideia do pivoteamento é reescrever um novo tableou referente a uma nova solucção básica fazendo o elemento pivo se tornar igual a 1 enquanto os outros elementos da coluna pivo se tornem zero. Para isso, primeiramene troca-se, no tableou, a variável que sai da base pela variável que entra na base na primeira coluna e então aplica-se as operações elementares discutidas na seção sobre matrizes. O simples algorítimo abaixo pode ser sempre utilizado em qualquer tableou simplex para conseguir esse objetivo rapidamente.

Para a Linha pivô: dividir todos os coeficientes da linha pivô pelo elemento pivô, gerando assim, uma **nova linha pivô**. Então:

Nova linha pivô:

Linha Pivô	0	2	4	1	0	0	10
$\div 4$	0	$0,5$	1	$0,25$	0	0	$2,5 \longrightarrow$ nova linha pivô

Para Todas as outras linhas: Para obter as novas outras linhas do novo tableou deve-se proceder da seguinte maneira:

- Multiplicar os elementos da nova linha pivô pelo coeficiente, com o sinal trocado, da variável que entra da linha a ser reescrita;

- Somar termo a termo o resultado anterior com a linha a ser reescrita, sendo esse resultado a nova linha da tabela.

Logo:

Nova primeira linha:

nova linha pivô:	0	$0,5$	1	$0,25$	0	0	$2,5$
$\times 5$ =	0	$2,5$	5	$1,25$	0	0	$12,5$
$+$ primeira linha:	1	-3	-5	0	0	0	0
Nova primeira linha $=$	1	$-0,5$	0	$1,25$	0	0	$12,5$

Nova terceira linha:

nova linha pivô:	0	$0,5$	1	$0,25$	0	0	$2,5$
$\times(-1)$ =	0	$-0,5$	-1	$-0,25$	0	0	$-2,5$
$+$ terceira linha:	0	6	1	0	1	0	20
Nova terceira linha $=$	0	$5,5$	0	$-0,25$	1	0	$17,5$

Nova quarta linha:

nova linha pivô:	0	$0,5$	1	$0,25$	0	0	$2,5$
$\times(1)$ =	0	$0,5$	1	$0,25$	0	0	$2,5$
$+$ quarta linha:	0	1	-1	0	0	1	30
Nova quarta linha $=$	0	$1,5$	0	$0,25$	0	1	$32,5$

O que resulta na nova tableau:

Base	Z	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	b
Z	1	$-0,5$	0	$1,25$	0	0	$12,5$
x_2	0	$0,5$	1	$0,25$	0	0	$2,5$
F_2	0	$5,5$	0	$-0,25$	1	0	$17,5$
F_3	0	$1,5$	0	$0,25$	0	1	$32,5$

Tabela 4.3: Tabela3

Cuja nova solucão básica é dada por:

Variáveis básicas	Variáveis não básicas	Valor de L
$x_2 = 2,5$	$x_1 = 0$	$Z = 12,5$
$F_2 = 17,5$	$F_1 = 0$	
$F_3 = 32,5$		

Percebe-se que Z passou a ser $Z = 12,5$, o que é um resultado melhor que o valor dessa variável referente a solução básica inicial, que era $Z = 0$. É necessário agora verificar se essa solução é otima, para isso, faz-se novamente o teste de otimalidade para essa nova solução.

Como os coeficientes das variáveis não basicas referente a função objetivo nesse novo tableou ainda não são todas não negativas isso implica que esta ainda não é a solução que otimiza a função. Portanto, os passos anteiores devem ser repetidos até a solução ótima ser encontrada. Portanto:

- **Variável que entra na base:** Para esse novo caso a variável que irá entrar na base é x_1, pois é a variável que possui o coeficiente de valor negativo com o maior valor absoluto na função objetivo.

- **Variável que sai da base:** Fazendo o processo já descrito neste tópico referente a escolha da variável que sai da base tem-se os seguintes resultados:

$$\begin{cases} 0,5x_1 + x_2 + 0,25F_1 = 2,5 \longrightarrow 2,5/0,5 = 5 \\ 5,5x_1 + -0,5F_1 + F_2 = 17,5 \longrightarrow 17,5/5,5 \simeq 3,18 \\ 1,5x_1 + 0,25F_1 + F_3 = 32,5 \longrightarrow 32,5/1,5 \simeq 21,67 \end{cases}$$

Que indicam, portanto, que a variável que sai da base é a variável F_2. Logo no tableou da tabela 4.4 a linha pivô, a coluna pivô e o elemento pivô seguem em destaque abaixo:

Base	Z	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	b
Z	1	$-0,5$	0	$1,25$	0	0	$12,5$
x_2	0	$0,5$	1	$0,25$	0	0	$2,5$
F_2	0	$5,5$	0	$-0,25$	1	0	$17,5$
F_3	0	$1,5$	0	$0,25$	0	1	$32,5$

Tabela 4.4: Tabela3

Realizando-se então mais uma vez as operações descritas mais acima, tem-se o novo trableou:

Base	Z	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	b
Z	1	0	0	$1,227$	$0,09$	0	$14,09$
x_2	0	0	1	$0,272$	$-0,09$	0	$0,91$
x_1	0	1	0	$-0,045$	$0,18$	0	$3,18$
F_3	0	0	0	$0,317$	$-0,27$	1	$27,73$

Tabela 4.5: Tabela4

Cuja respectiva solução básica:

Variáveis básicas	Variáveis não básicas	Valor de L
$x_1 = 3,18$	$F_1 = 0$	$Z = 14,09$
$x_2 = 0,91$	$F_2 = 0$	
$F_3 = 27,73$		

Como nessa solução básica os coeficientes da função objetivo são todos não negativos, conclui-se que essa solução é a solução ótima para o problema com $Z = 14,09$.

4.3 O Recurso Computacional: OR Simplex

Uma alternativa bastante interessante para abordar os problemas de programação linear, principalmente dos que necessitam da utililzação do método simplex, seria focar na modelagem do problema nos conformes de um problema em PL e utilizar recursos computacionais para efetuar os cálculos necessários para obter a solução ótima do problema, minizando o desgaste e o esforço em se trabalhar com esses problemas, principalmente quando a função objetivo apresentar muitas variáveis. Um sistema automático e programável que realize as operações elementares necessárias, de maneira independente visando a busca da solução do problema foi exatamente o que impulsinou o campo da pesquisa operacional e dos problemas em PL, portanto, nada mais interessante que fazer uso, desde que consciente, de um sistema do tipo neste trabalho. Nesse sentido, o aplicativo ***OR Simplex***, será utilizado como alternativa para encontrar ou simplesmente auxiliar na busca pelas soluções ótimas de problemas em PL.

O ***OR Simplex*** é um aplicativo para celulares com o sistema androide e pode servir como uma ferramenta alternativa de auxilio na busca por soluções de programas em PL dos problemas que tratam sobre o método Simplex. Por ser um aplicativo grátis, de uso simples e intuitivo além de estar disponível em uma plataforma de grande uso no mundo, pode ser facilmente obtido e utilizado por qualquer um que possua um celular em mãos. De modo geral, a interface do aplicativo é bastante intuitiva e de fácil uso, sendo necessário para ultiliza-lo apenas um simples aparelho celular com o sistema androide com o app devidamente instalado, disponível para download na Google Play Store. Com isso e com o modelo matemático que se deseja otimizar em mãos, basta inserir, basicamente, as variáveis, a função objetivo do problema e qual o tipo de problema (maximizar ou minimizar) dentro dos campos destinado a cada desses elementos dentro do aplicativo e então verificar o resultado. Abaixo segue algumas de suas telas principais e breves intruções para o seu uso:

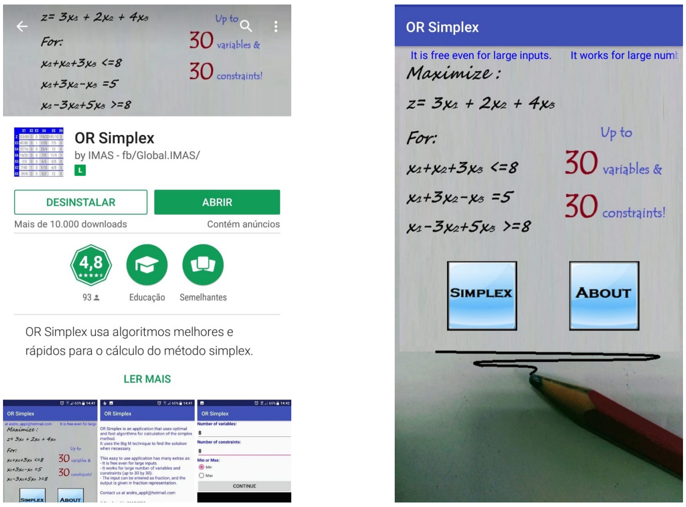

Figura 4.9: Telas iniciais do OR Simplex

Na figura 4.9 a tela da esquerda é a tela de download do OR Simplex na Play Store e a tela à direita é a tela inicial do aplicativo após instalado e em seguida aberto. Logo quando o aplicativo é aberto em sua tela inicial é exposto algumas informções básicas a respeito do mesmo e o "botão"escrito "simplex", que é a opção que deverá ser clicada para abrir a próxima tela, que servirá para a inserção dos dados do problema que se quer resolver:

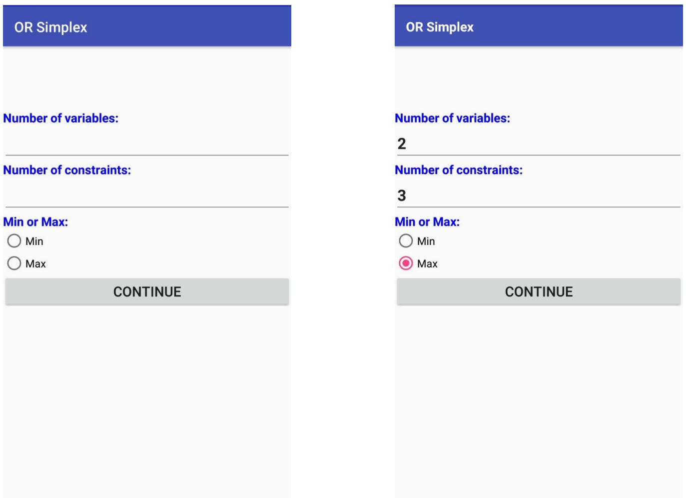

Figura 4.10: Telas para inserção de dados

A tela da a esquerda da figura 4.10 é a tela onde deverá ser inserido todos os dados problema, ou seja, se o problema é de maximização ou minimização, quantas variáveis (Number of variables) a funcção objetivo possui e o número de restrições do problema (Number of constraints). O "botãocontinue"deve ser clicado logo após o preenchimento de todos esses dados para resolver o problema. Na tela á direita pode ser visto um exemplo de como deve ser preenchido os campos descritos. No caso, esses dados foram extraidos do modelo matemático referente ao problema do exemplo 4.4. Com os dados inseridos, clica-se em "continue"o que irá gerar a próxima tela do aplicativo onde é solicitado do usuário inserir os coeficientes da função objetivo e das restrições do problema, como pode ser visto abaixo:

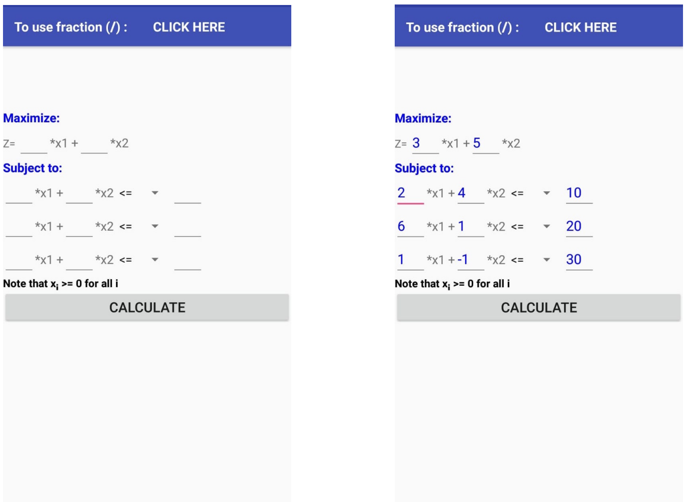

Figura 4.11: Telas para inserção dos coeficientes

A tela da esquerda mostra os campos a serem preenchidos conforme estipulado na tela anteior, função objetivo de duas variáveis, e três restrições para o problema. Na tela à direita mostra esses campos já preenchidos com os dados do exemplo 4.4.

Clicando-se em "CALCULATE"o programa resolve o problema gerando as seguintes telas:

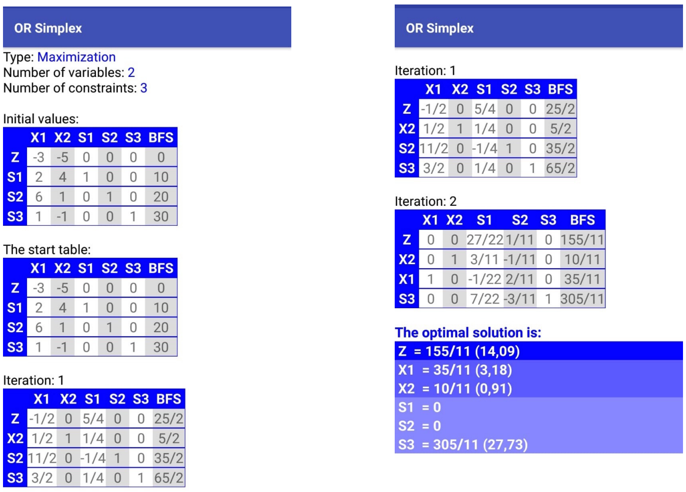

Figura 4.12: Telas de tableaou simplex e solução ótima

O interessante é que nas telas acima, é possível ainda ver quantas iterações foram feitas à partir da solução inicial dada pelo próprio programa. Nota-se ainda que os tableoux simplex gerados para este exemplo de utilização do OR Simplex são basicamente os mesmo obtidos manualmente no exemplo 4.4, assim como também a solução ótima dada pelo aplicativo.

Capítulo 5

Aplicações

Este capítulo terá o propósito de aplicar o que foi discutido nos capítulos anteriores a quatro problemas especificos em PL. Optou-se ainda, em se trabalhar com problemas restritos a funções objetivos de duas até três variáveis, como comentado anteriormente, visto que o objetivo deste trabalho foca em promover os conceitos básicos dessa área de estudo (PL) dentro das perpectivas do ensino médio regular.

Os dois primeiros problemas iniciais tratam sobre maximização e serão resolvidos à partir do método gráfico, enquanto que para os outros dois, problemas também de maximização, será utilizado o método Simplex. Além disso, para auxiliar na resolução desses problemas o programa Geogebra (disponível em https://www.geogebra.org/download) e o aplicativo para celular ***OR Simplex*** (disponível para dowlnload na Google Play Store), serão utilizados nesse capítulo.

Com relação à esse programas, o Geogebra é amplamente dinfundido entre a comunidade academica e é notável por ter uma interface de comandos intuitivos, o que o torna acessivel a todos os níveis de ensino. Suas versões estão disponíveis para desktops, notebooks e atualmente para celuláres, é possível construir com quase nenhuma dificuldade todos gráficos e regiões factível vistas nos Problemas 1 e 2 usando um notebook ou um simples celular. Já com relação ao ***OR Simplex*** este será introduzido neste capítulo e servirá como ferramenta alternativa de auxilio na busca por soluções de programas em PL dos problemas 3 e 4 que tratam sobre o método Simplex.

5.1 Problema 1 - Alocação de Pessoas Em Uma Fábrica

Considerando uma fábrica de móveis que possui duas linhas de produção para suas cadeiras de madeira: **Cadeiras simples** e **Cadeiras premium**. Em relação a cada uma das linhas de produção, tem-se as segintes informações:

Cadeiras Simples:

- A linha da produção comporta no máximo 12 empregados;

- Cada cadeira consome 2 empregados/dia para ser produzida;
- Cada cadeira fornece um lucro de 15,00 reais.

Cadeiras premium:

- A linha da produção comporta no máximo 24 empregados;
- Cada cadeira consome 3 empregados/dia para ser produzido;
- Cada cadeiras fornece um lucro de 25,00 reais.

Além disso a empresa dispões de um total de 30 empregados para serem alocados nessas duas linhas de produção. O objetivo ent ao do proprietário da empresa é maximizar o lucro diário da empresa tendo em vista a mão de obra e os recursos disponíveis para as suas duas linhas de produção. Este é um clássico problema de PL que se encaixa na categoria "alocação de recursos.

Para iniciar a resolução desse problema, é necessário primeiramente a construção do modelo matemático que representa essa situação da empresa. Seguindo então o roteiro proposto por Silva et al. [19] deve-se:

i) Definir as variáveis de decisão:

- A variável a ser otimizada é o lucro L;
- A quantidade a otimizar de "cadeiras simples"a ser produzidos será representada por x_1; e
- A quantidade a otimizar de "cadeiras premium"a serem produzidas será representada por x_2.

ii) Definir a função objetivo:

$$L = 15x_1 + 25x_2$$

iii) Definir o conjunto de restrições:

- Visto que é possível colocar somente 12 empregados na linha de produção de cadeiras simples e como cada cadeira dessa linha gasta 2 homem/dia para ser produzido, a produção máxima diária desta linha é de 6 cadeiras, logo:

$$x_1 \leq 6$$

- Visto que é possível colocar somente 24 pessoas na linha de produção das cadeiras premium e como cada cadeira dessa linha gasta 3 empregados/dia para ser produzido, a produção máxima diária desta linha é de 8 cadeiras, portanto:

$$x_2 \leq 8$$

- Como a fábrica possue apenas 30 operários destinados a essa duas linhas de produção, a mão-de-obra usada pra produção desses dois tipos de cadeiras deve estar dentro desse limite. E como a linha de cadeiras simples produzirá x_1 rádios por dia gastando somente 2 empregados nesse dia em questão, enquanto que a linha de cadeiras premium produzirá x_2 caderias por dia gastando 3 operários, conclui-se que:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 30$$

Logo o modelo matemático obtido para esse problema é:
Maximizar:

$$L = 15x_1 + 25x_2$$

Restrita a:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Com o modelo matemático em mãos, basta agora traçar a região factível referente às restrições do problema, conforme ja discutido nos capítulos anteriores, o que resultará na região S_1 abaixo:

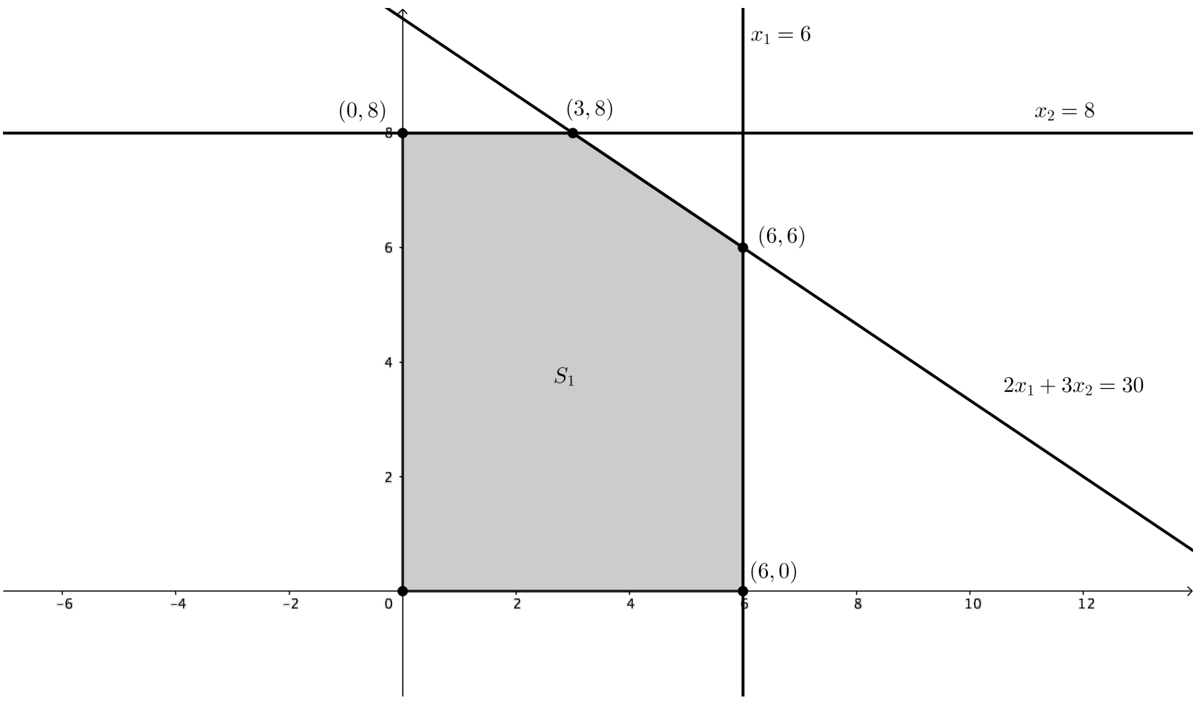

Figura 5.1: Região factível S_1 referente ao modelo matemático do Problema de alocação de Pessoas

Como essa região factível é limitada, pelo **Teorema fundamental da Programação Linear** a função objetivo assume seu máximo em um dos seus vértices, portanto:

- Para $(0, 0) \to L = 15.0 + 25.0 \to L = 0$;
- Para $(6, 0) \to L = 15.6 + 25.0 \to L = 90$;
- Para $(6, 6) \to L = 15.6 + 25.6 \to L = 240$;
- Para $(3, 8) \to L = 15.3 + 25.8 \to L = 245$; e por fim,
- Para $(0, 8) \to L = 15.0 + 25.8 \to L = 200$.

Logo, conclui-se que a solução ótima para esse problema é quando $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$, onde L assume o valor de $L = 245$. Ou seja, é necessário que sejam produzidos 3 cadeirs simples e 8 cadeiras premium para que a empresa obtenha um lucro máximo de 245 reais por dia, em relação a essas duas linhas de produção.

5.2 Problema 2 - A Produção de uma Artesã

Uma artesã faz 4 bonecas de pano por hora, se fizer apenas bonecas e faz 8 bonecos por hora se fizer apenas bonecos, onde essa diferença se dá pelo fato dos bonecos produzidos possuirem menos detalhes que as bonecas. Ela gasta 4 metros quadrados de pano para fabricar uma boneca e 3 metros quadrados de pano para fabricar um boneco. Sabendo-se que o total disponível de pano é de 20 metros quadrados e que o lucro unitário da boneca é de 10 reais e o dos bonecos é de 6 reais, qual a quantidade de bonecos e de bonecos que a artesã deverá produzir por hora para que seu lucro seja maximizado?

De maneira análoga ao caso anterior, segue a resolução do problema dessa artesã:

i) Definindo as variáveis de decisão:

- A variável a ser otimizada é o lucro L;
- A quantidade de bonecas produzidas a otimizar será x_1; e
- A quantidade bonecos produzidos a otimizar será x_2.

ii) Definir a função objetivo:

$$L = 10x_1 + 6x_2$$

iii) Definir o conjunto de restrições:

- Visto que a artesã gasta 4 m^2 de pano para produzir uma boneca, sendo que será produzida uma quantidade x_1 desse produto e como para produzir um boneco gasta-se 3 m^2 de pano, sabendo que o total de pano disponível é de 20 m^2, conclui-se que:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 20$$

- Como a artesã fabrica 4 bonecas/hora e 8 bonecos/hora, trabalhando de maneira independente em cada um dos produtos, isso implica, que cada boneca leva $\frac{1}{4}$ horas para ser produzido e $\frac{1}{8}$ horas para produzir cada boneco. Como serão produzidos x_1 bonecas e x_2 bonecos, isso implica em:

$$x_1\frac{1}{4} + x_2\frac{1}{8} \leq 1 \rightarrow 2x_1 + x_2 \leq 8$$

Logo o modelo matemático obtido para esse problema é:
Maximizar:

$$L = 10x_1 + 6x_2$$

Sujeito a:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Contruindo a região factvel, tem-se a região S_2 na figura abaixo como resultado:

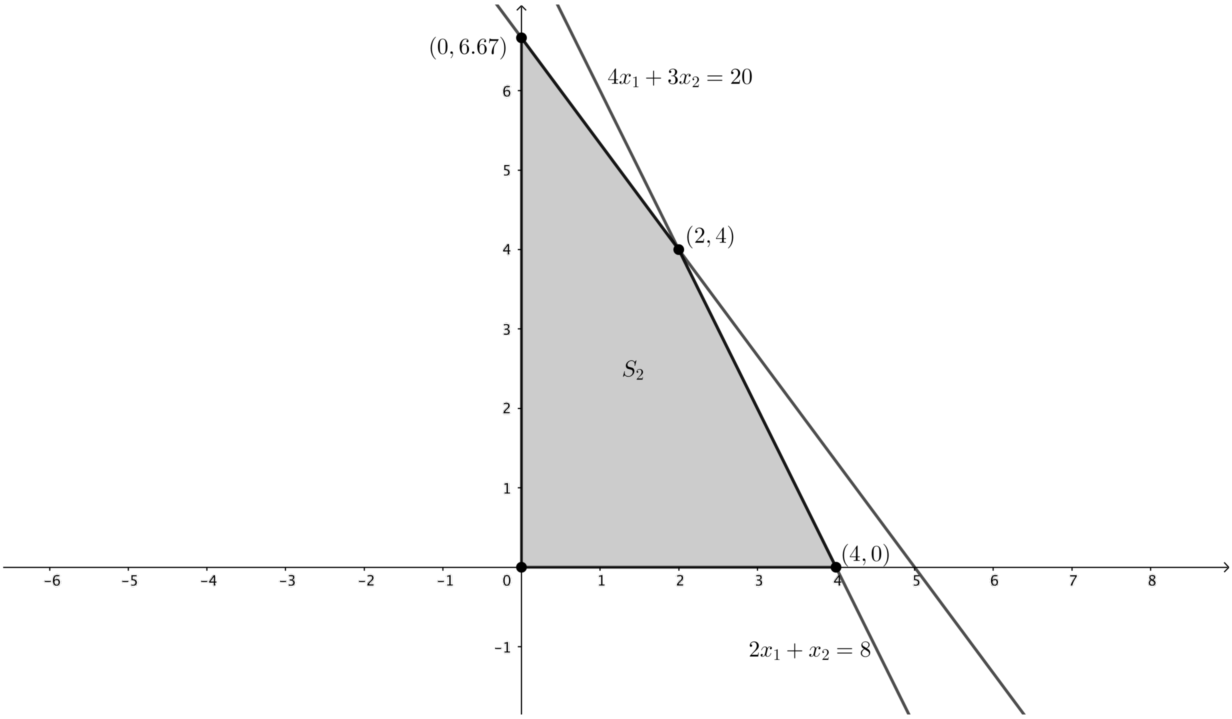

Figura 5.2: Região factível S_2 referente ao modelo matemático do Problema da Artesã

Como essa região factível é também é limitada, pelo **Teorema fundamental da Programação Linear** a função objetivo assume seu máximo em um dos seus vértices, portanto:

- Para $(0, 0) \rightarrow L = 10.0 + 6.0 \rightarrow L = 0$;
- Para $(4, 0) \rightarrow L = 10.4 + 6.0 \rightarrow L = 40$;
- Para $(2, 4) \rightarrow L = 10.2 + 6.4 \rightarrow L = 44$; e
- Para $(0, 6.67) \rightarrow L = 10.0 + 6.(6.67) \rightarrow L = 40.02$;

Pode ser concluido enttão que a solução ótima para o problema da artesã é quando $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$, onde L assume o valor de $L = 44$. Ou seja, a artesã obtem o lucro máximo de 44 reais por hora confeccionando duas bonecas e quatro bonecos.

5.3 Problema 3 - Problema do Fazendeiro

Um fazendeiro está estudando a divisão de sua propriedade nas seguintes atividades produtivas:

A (Arrendamento): Destinar certa quantidade de alqueires para a plantação de cana-de-açúcar, a uma usina local, que se encarrega da atividade e de pagar \$ 300 por alqueire pelo aluguel da terra ao ano.

P (Pecuária): usar outra parte para a criação de gado de corte. A recuperação das pastagens reqyer adubação (100 kg/Alq) e irrigação (100.000 L de água/ Alq) por ano. O lucro estimado nessa atividade é de $ 400 por alqueire ao ano.

S (Plantio de Soja): Usar uma terceira parte para o plantio de soja. Essa cultura requer 200 kg por alqueire de adubos e 200.000L de água/Alq para irrigação por ano. O lucro estimado é de $ 500/Alq ao ano.

O fazendeiro dispões dos seguintes recursos:

12.750.000 L de água;

14.000 kg de adubo; e

100 alqueires de terra

O problema do fazendeiro é dividir seu terreno entre essas três atividades para que possa obter o máximo de lucro.

Como nos casos anteiores, é necessário modelar o problema, logo:

i) Definindo as variáveis de decisão:

- A variável a ser otimizada é o lucro L;
- A quantidade de alqueires destinada ao Arredamento será x_1;
- A quantidade de alqueires destinada à Percuária será x_2; e
- A quantidade de alqueires destinada ao Plantio de soja será x_3;

ii) Definindo a função objetivo:

$$L = 300x_1 + 400x_2 + 500x_3$$

iii) Definindo o conjunto de restrições:

- A quantidade alqueires total é de 100, logo, a divisão entre as três atividades não deve ultrapassar esse total, quando somadas, portanto:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$$

- Para destinar x_2 alqueires para a pecuária o fazendeiro tem que gastar $100x_2$ kg de adubo. De maneira análoga, irá gastar $200x_3$ kg de adubo para a quantidade alqueire destinados ao plantio de soja. Como o fazendiro possue o total de 14.000 kg de adubo, a soma dessas quantias não deve ultrapassar esse limite, logo:

$$100x_2 + 200x_3 \leq 14.000$$

- Em relação a água que irá gastar, o fazendeiro utilizará $100.000x_2$ L de água para os alqueires destinados à pecuária e $200.000x_3$ L para o plantio da soja, como possui um total de $12.750.000$ L, a soma das quantias de água destindas a cada uma dessas atividades não deve ultrapassar os $12.750.000$, então:

$$100.000x_2 + 200.000x_3 \leq 12.750.000$$

Portanto o problema fica modelado na seguinte forma:
Maximizar:

$$L = 300x_1 + 400x_2 + 500x_3$$

Sujeito a:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \\ 100x_2 + 200x_3 \leq 14.000 \\ 100.000x_2 + 200.000x_3 \leq 12.750.000 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Com o problema devidamente modelado, reescreve-se L na forma:

$$L - 300x_1 - 400x_2 - 500x_3 = 0$$

Adiciona as variáveis de folga F_1, F_2 e F_3 às inequações, para tranforma-las em equações, trasnformando o sistema de inequações do problema no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + F_1 = 100 \\ 100x_2 + 200x_3 + F_2 = 14.000 \\ 100.000x_2 + 200.000x_3 + F_3 = 12.750.000 \\ x_1, x_2, x_3, F_1, F_2, F_3 \geq 0 \end{cases}$$

E então calcula-se uma solução básica para o sistema acima. Fazendo os devidos cálculos, é possivel obter a seguinte solução básica: $x_1 = x_2 = x_3 = 0, F_1 = 100, F_2 = 14.000$ e $F_3 = 12.750.000$.

Com o modelo do problema na forma padrão dos problemas em PL e com a solução básica inicial em mãos, monta-se o tableou simplex correspondente a essa solução básica.

Base	L	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	b
L	1	-300	-400	-500	0	0	0	0
F_1	0	1	1	1	1	0	0	100
F_2	0	0	100	200	0	1	0	14.000
F_3	0	0	100.000	200.000	0	0	1	12.750.000

Tabela 5.1: Tableau I do Problema do Fazendeiro

O tableou indica que para essa solução básica inicial $L = 0$, além disso, como os coeficientes das variáveis não básicas referentes à função objeivo são negativas, conclui-se que essa $L = 0$ não é o valor ótimo para o problema. É necessàrio então a busca por uma nova solução.

Como a varivél x_3 é a que possui coeficiente com valor negativo de maior valor absoluto função objetivo, x_3 é a variável que vai compor a nova base. Efetuando-se as operações discutidas ateriormente, é possivel concluir que F_3 é a variável que sairá da base, o que identifica no tableou os elementos pivôs destacados abaixo:

Base	L	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	b
L	1	-300	-400	-500	0	0	0	0
F_1	0	1	1	1	1	0	0	100
F_2	0	0	100	200	0	1	0	14.000
F_3	0	0	100.000	200.000	0	0	1	12.750.000

Tabela 5.2: Tableau I do Problema do Fazendeiro

Faz-se agora o cálculo das novas linhas que comporão o novo tableou.

Nova linha pivô:

Linha Pivô	0	0	10000	200000	0	0	1	12.750.000	
$\div$200000	0	0	$0,5$	1	0	0	$0,000005$	63.75	$\longrightarrow$ nova linha pivô

Nova primeira linha:

nova linha pivô:	0	0	0.5	1	0	0	$0,000005$	$63,75$
$\times 500 =$	0	0	250	500	0	0	$0,0025$	31875
+ primeira linha:	1	-300	-400	-500	0	0	0	0
Nova primeira linha =	1	-300	-150	0	0	0	$0,0025$	31875

Nova segunda linha:

nova linha pivô:	0	0	0.5	1	0	0	$0,000005$	$63,75$
$\times(-1) =$	0	0	$-0,5$	-1	0	0	$-0,00005$	$-63,75$
+ segunda linha:	0	1	1	1	1	0	0	10
Nova segunda linha =	0	1	$0,5$	0	1	0	$-0,000005$	$36,25$

Nova terceira linha:

nova linha pivô:	0	0	0.5	1	0	0	$0,000005$	$63,75$
$\times(-200) =$	0	0	-100	-200	0	0	$-0,001$	-12750
+ terceira linha:	0	0	100	200	0	1	0	14000
Nova terceira linha =	0	0	0	0	0	1	$-0,001$	1250

Resultando no novo tableau abaixo:

Base	L	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	b
L	1	-300	-150	0	0	0	$0,0025$	31875
F_1	0	1	$0,5$	0	1	0	$-0,000005$	$36,25$
F_2	0	0	0	0	0	1	$-0,001$	1250
x_3	0	0	$0,5$	1	0	0	$0,000005$	$63,75$

Tabela 5.3: Tableau II do Problema do Fazendeiro

Cuja nova solução básica é:

Variáveis básicas	Variáveis não básicas	Valor de L
$F_1 = 36,25$	$x_1 = 0$	$L = 31875$
$F_2 = 1250$	$x_2 = 0$	
$x_3 = 63,75$	$F_3 = 0$	

Perceba que o valor de L para essa nova solução básica melhorou em relação a solução basica inicial, passou de $L = 0$ para $L = 31875$, porém, essa ainda não é a solução ótima para o problema, pois ainda existem coeficientes negativos associados ás variáveis não básicas da função objetivo no novo tableou. É preciso iterar mais uma vez o processo acima.

Para essa nova situação a variável que vai entrar na base é a varável x_1 e a que irá sair será a F_1. Tais variáveis identificam no tableaou os elementos pivôs que podem ser conferidos destacados em azul:

Base	L	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	b
L	1	-300	-150	0	0	0	$0,0025$	31875
F_1	0	1	$0,5$	0	1	0	$-0,000005$	$36,25$
F_2	0	0	0	0	0	1	$-0,001$	1250
x_3	0	0	$0,5$	1	0	0	$0,000005$	$63,75$

Tabela 5.4: Tableau II do Problema do Fazendeiro

Fazendo novamente os cálculos das novas linhas desse outro novo tableou, tem-se:

Nova linha pivô:

Linha Pivô	0	1	$0,5$	0	1	0	$-0,000005$	$36,25$
$\div 1$	0	1	$0,5$	0	1	0	$-0,000005$	$36,25 \longrightarrow$ nova linha pivô

Nova primeira linha:

nova linha pivô:	0	1	0.5	0	1	0	$-0,000005$	$36,25$
$\times 300 =$	0	300	150	0	300	0	$-0,0015$	10875
$+$ primeira linha:	1	-300	-150	0	0	0	$0,0025$	31875
Nova primeira linha $=$	1	0	0	0	0	0	$0,001$	42750

Nova terceira linha:

nova linha pivô:	0	1	0.5	0	1	0	$-0,000005$	$36,25$
$\times 0 =$	0	0	0	0	0	0	0	0
$+$ terceira linha:	0	0	0	0	0	1	$-0,001$	1250
Nova terceira linha $=$	0	0	0	0	0	1	$-0,001$	1250

Nova quarta linha:

nova linha pivô:	0	1	0.5	0	1	0	$-0,000005$	$36,25$
$\times 0 =$	0	0	0	0	0	0	0	0
$+$ quarta linha:	0	0	$0,5$	1	0	0	$0,000005$	$63,75$
Nova quarta linha $=$	0	0	$0,5$	1	0	0	$0,000005$	$63,75$

Que resulta em:

Base	L	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	b
L	1	0	0	0	0	0	$0,001$	42750
x_1	0	1	$0,5$	0	1	0	$-0,000005$	$36,25$
F_2	0	0	0	0	0	1	$-0,001$	1250
x_3	0	0	$0,5$	1	0	0	$0,000005$	$63,75$

Tabela 5.5: Tableau III do Problema do Fazendeiro

Cuja respectiva solução básica é dada por:

Variáveis básicas	Variáveis não básicas	Valor de L
$x_1 = 36,25$	$F_1 = 0$	$L = 42750$
$F_2 = 1250$	$x_2 = 0$	
$x_3 = 63,75$	$F_3 = 0$	

Por esse novo tableau, como a função objetivo não possui nenhum coneficiente negativo, pode se concluir que esta é, enfim, a solução ótima para o problema, onde o fazendeiro deve dividir seu terremo em $36,25$ alqueires para arredamento, $64,75$ para o plantio de soja e nenhuma porção para a pecuária, para obter lucro máximo de \$ 42750.

Como alternativa para esse problema, poderia ser poupado tempo e cálculos dispendiosos através do uso do aplicativo OR Simplex, para se chegar chegar a mesma solução do problema. Abaixo segue o uso desse rescurso alternativo para o problema do fazendeiro.

Introduzindo a quantidade de variáveis e restrições do problema e os coeficientes da função objetivo e de cada uma das restrições no aplicativo:

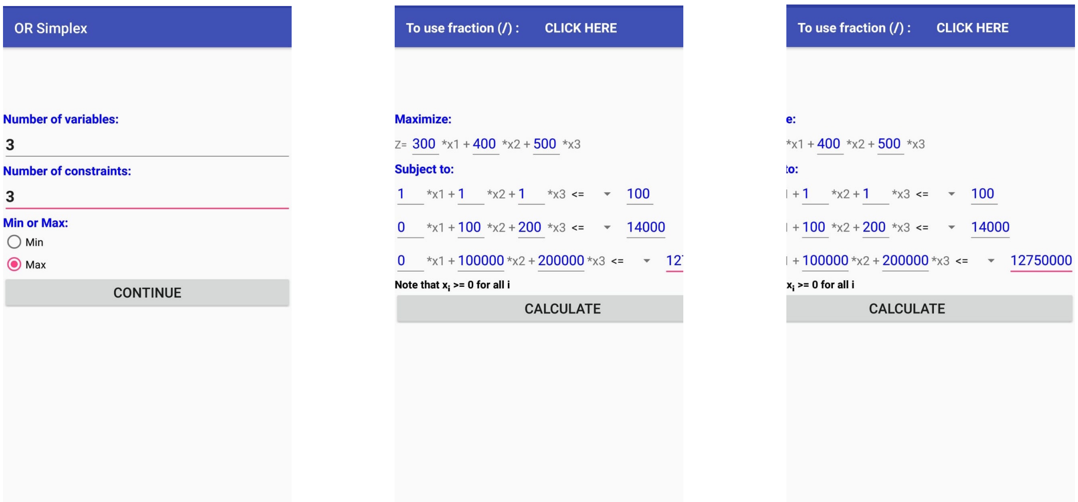

Figura 5.3: Telas de inserção de dados do Problema do Fazendeiro

E clicando em "CALCULATE", o aplicativo gera as seguintes telas de resolução do problema:

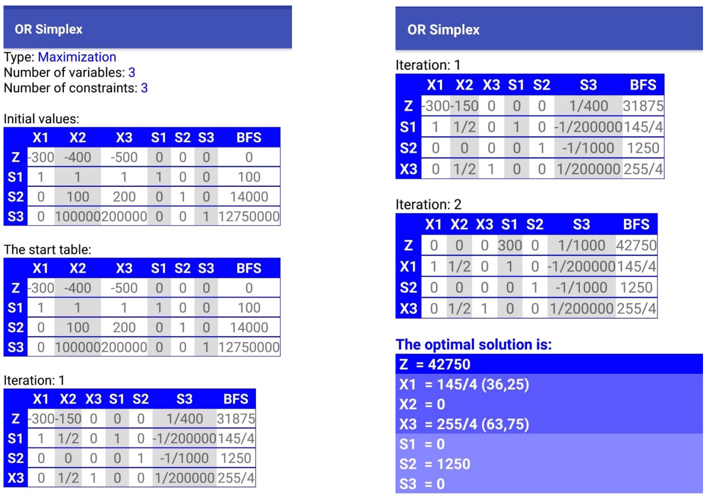

Figura 5.4: Telas de tableaous e de solução Problema do Fazendeiro

Que confirmam a solução encontrada do problema do fazendeiro.

5.4 Problema 4 - Esquema das Flores

O dono de uma estufa pretende traçar um plano ideal para a distriuição de flores para os parques de sua cidade. Nesse plano, o proprietário da estufa vai usar tulipas, narcisos e um tipo de arbusto florido em três tipos de esquema.

O esquema do tipo 1 utiliza 30 tulipas, 20 narcisos e 4 arbustos floridos;

No esquema do tipo 2 são utilizadas 10 tulipas, 40 narcisos e 3 arbustos floridos; e

No esquema do tipo 3 são utilizadas 20 tulipas, 50 narcisos e 2 arbustos floridos.

O lucro líquido é de 50 reais para cada esquema do tipo 1, 30 reais para cada esquema do tipo 2 e 60 reais para cada esquema do tipo 3. O proprietário da estufa dispõe de 1000 tulipas, 800 narcisos e 100 arbustos floridos.

Nesse problema é necessàrio descobrir a quantidade ótima de cada um dos três tipos de esquema disponíveis para o dono da estufa possa obter lucro máximo.

i) Definindo as variáveis de decisão:

- A variável a ser otimizada é o lucro L;
- A quantidade de esquemas do tipo 1 a ser utilizada seraá x_1;
- A quantidade de esquemas do tipo 2 a ser utilizada será x_2; e
- A quantidade de esquemas do tipo 1 a ser utilizada será x_3;

ii) Definindo a função objetivo:

$$L = 50x + 30x_2 + 60x_3$$

iii) Definindo o conjunto de restições:

- Como cada esquema do tipo 1 gasta 30 tulipas, cada esquema do tipo 2 gasta 10 tulipas, cada esquema do tipo 3 gasta 20 tulipas e como o proprietário dispões apenas de 1000 dessas flores, conlui-se que o gasto total de tulipas não pode ultrapassar esse limite, logo:

$$30x_1 + 10x_2 + 20x_3 \leq 1000$$

- Fazendo uma análise similar para o número de narcisos conclui-se que:

$$20x_1 + 40x_2 + 50x_3 \leq 800$$

- E para o número de arbustos floridos, tem-se:

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 100$$

Portanto, o modelo do problema é dado por:

Maximizar:

$$L = 50x + 30x_2 + 60x_3$$

Sujeito a:

$$\begin{cases} 30x_1 + 10x_2 + 20x_3 \leq 1000 \\ 20x_1 + 40x_2 + 50x_3 \leq 800 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 100 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Reescrevendo Z, resulta em:

$$Z - 50x_1 - 30x_2 - 60x_3 = 0$$

Adicionando as variáveis de folga F_1, F_2 e F_3, obtem-se o sistema:

$$\begin{cases} 30x_1 + 10x_2 + 20x_3 + F_1 = 1000 \\ 20x_1 + 40x_2 + 50x_3 + F_2 = 800 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + F_3 = 100 \\ x_1, x_2, x_3, F_1, F_2, F_3 \geq 0 \end{cases}$$

De onde pode ser obtido a seguinue solução básica inicial:

Variáveis básicas	Variáveis não básicas	Valor de L
$F_1 = 36,25$	$x_1 = 0$	$L = 0$
$F_2 = 1250$	$x_2 = 0$	
$F_3 = 63,75$	$x_3 = 0$	

Correspondente ao seguinte tableau simplex:

Base	L	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	b
L	1	-50	-30	-60	0	0	0	0
F_1	0	30	10	20	1	0	0	1000
F_2	0	20	40	50	0	1	0	800
F_3	0	4	3	2	0	0	1	100

Tabela 5.6: Tableau I do Esquema das Flores

Para essa solução básica, $L = 0$. Como a função objetivo possui coeficientes negativos no tableou, esta ainda não é a solução ótima, portanto, segue o cáculo de uma nova solução:

A variável que entra na base é x_3 e que sai da base é F_2, que identificam os seguintes elementos pivôs destacados em azul:

Base	L	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	b
L	1	-50	-30	-60	0	0	0	0
F_1	0	30	10	20	1	0	0	1000
F_2	0	20	40	50	0	1	0	800
F_3	0	4	3	2	0	0	1	100

Tabela 5.7: Tableau I do Esquema das Flores

Nova linha pivô:

Linha Pivô	0	20	40	50	0	1	0	800	
$\div 50$	0	$0,4$	$0,8$	1	0	$0,02$	0	16	$\longrightarrow$ nova linha pivô

Nova primeira linha:

nova linha pivô:	0	$0,4$	$0,8$	1	0	$0,02$	0	16
$\times 60 =$	0	24	48	60	0	$1,2$	0	960
$+$ primeira linha:	1	-50	-30	-60	0	0	0	0
Nova primeira linha $=$	1	-26	18	0	0	$1,2$	0	960

Nova segunda linha:

nova linha pivô:	0	$0,4$	$0,8$	1	0	$0,02$	0	16
$\times(-20) =$	0	-8	-16	-20	0	$-0,4$	0	-320
$+$ segunda linha:	0	30	10	20	1	0	0	1000
Nova segunda linha $=$	0	22	-6	0	1	$-0,4$	0	680

Nova quarta linha:

nova linha pivô:	0	$0,4$	$0,8$	1	0	$0,02$	0	16
$\times(-2) =$	0	$-0,8$	$-1,6$	-2	0	$-0,04$	0	-32
$+$ quarta linha:	0	4	3	2	0	0	1	100
Nova quarta linha $=$	0	$3,2$	$1,4$	0	0	$-0,04$	1	68

Essas novas linhas resultam no novo tableau simplex abaixo:

Base	L	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	b
L	1	-26	18	0	0	$1,2$	0	960
F_1	0	22	-6	0	1	$-0,4$	0	680
x_3	0	$0,4$	$0,8$	1	0	$0,02$	0	16
F_3	0	$3,2$	$1,4$	0	0	$-0,04$	1	68

Tabela 5.8: Tableau II do Esquema das Flores

Cuja solução básica é:

Variáveis básicas	Variáveis não básicas	Valor de L
$F_1 = 36,25$	$x_1 = 0$	$L = 960$
$x_3 = 1250$	$x_2 = 0$	
$F_3 = 63,75$	$F_2 = 0$	

Para essa nova solução $L = 960$, porém, por ainda existirem coeficientes negativos referentes a função objetivo essa solução ainda não é a solução oítima para o problema. Faz-se necessário uma nova iteração das operações acima.

Para esta nova solução a variável que entra na base é x_1 e a variável que sairá da base é F_3, que idenficam os elementos pivôs destacados abaixo:

Base	L	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	b
L	1	-26	18	0	0	$1,2$	0	960
F_1	0	22	-6	0	1	$-0,4$	0	680
x_3	0	$0,4$	$0,8$	1	0	$0,02$	0	16
F_3	0	$3,2$	$1,4$	0	0	$-0,04$	1	68

Tabela 5.9: Tableau II do Esquema das Flores

De onde:

Nova linha pivô:

Linha Pivô	0	$3,2$	$1,4$	0	0	$-0,04$	1	68	
$\div 3,2$	0	1	$0,4375$	0	0	$-0,0125$	$0,3125$	$21,25$	$\longrightarrow$ nova linha pivô

Nova primeira linha:

nova linha pivô:	0	1	$0,4375$	0	0	$-0,0125$	$0,3125$	$21,25$
$\times(26) =$	0	26	$11,375$	0	0	$-0,325$	$8,125$	$552,5$
$+$ primeira linha:	1	-26	18	0	0	$1,2$	0	960
Nova primeira linha $=$	1	0	$29,375$	0	0	$0,875$	$8,125$	$1512,5$

Nova segunda linha:

nova linha pivô:	0	1	$0,4375$	0	0	$-0,0125$	$0,3125$	$21,25$
$\times(-22) =$	0	-22	$-9,625$	0	0	$0,275$	-6875	$-467,5$
+ segunda linha:	0	22	-6	0	1	$-0,4$	0	680
Nova segunda linha $=$	0	0	$-15,625$	0	1	$-0,125$	-6875	$212,5$

Nova terceira linha:

nova linha pivô:	0	1	$0,4375$	0	0	$-0,0125$	$0,3125$	$21,25$
$\times(-0,4) =$	0	$-0,4$	$-0,175$	0	0	$0,005$	$-0,125$	$-8,5$
+ terceira linha:	0	$0,4$	$0,8$	1	0	$0,02$	0	16
Nova terceira linha $=$	0	0	$0,625$	1	0	$0,025$	$-0,125$	$7,5$

Tais resultados geram o seguinte tableaou:

Base	L	x_1	x_2	x_3	F_1	F_2	F_3	b
L	1	0	$29,375$	0	0	$0,875$	$8,125$	$1512,5$
F_1	0	0	$-15,625$	0	1	$-0,125$	-6875	$212,5$
x_3	0	0	$0,625$	1	0	$0,025$	$-0,125$	$7,5$
x_1	0	1	$0,4375$	0	0	$-0,0125$	$0,3125$	$21,25$

Tabela 5.10: Tableau III do Esquema das Flores

Para essa nova configuração, tem-se a seguinte solução básica:

Variáveis básicas	Variáveis não básicas	Valor de L
$F_1 = 212,5$	$x_2 = 0$	$L = 1512,5$
$x_1 = 21,25$	$F_2 = 0$	
$x_3 = 7,5$	$F_2 = 0$	

Por fim, perceba que esta é a solução ótima para o problema, de acordo com o critério inúmeras vezes comentados neste trabalho, onde a função objetivo assume valor máximo $L = 1512,5$. Portanto, o proprietário da estufa deve utilizar de $21,25$ esquemas do tipo 1 e $7,5$ esquemas do tipo 3 para que lucre ao máximo.

Usando agora o OR Simplex, tem-se:

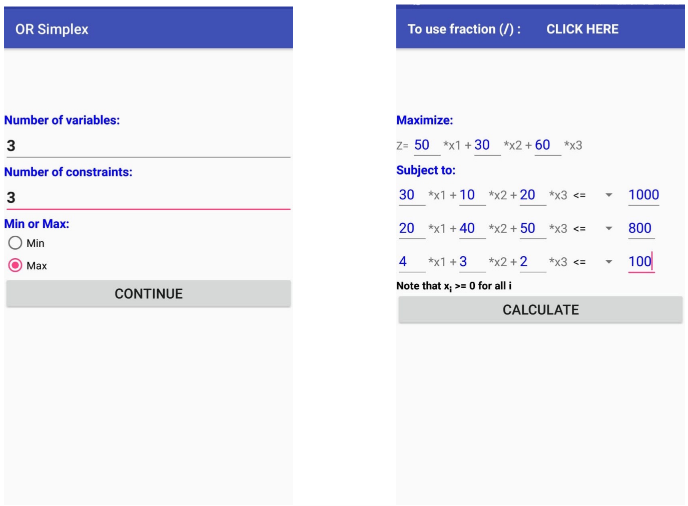

Figura 5.5: Telas de inserção de dados do Esquema das Flores

Que resulta nas seguintes telas:

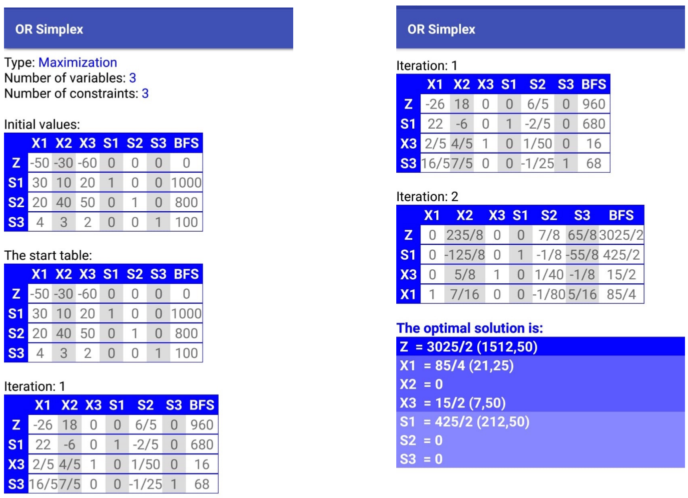

Figura 5.6: Telas tableaou e solução do Esquema das Flores

Que confirmam a solução encontrada manualmente.

Capítulo 6

Sobre uma possível Abordagem da PL no Ensino Médio

De acordo com os PCNs e com a proposta curricular da Secretária de Educação do Estado do Amazonas (SEDUC-AM), na disciplina de matemática, o conteúdo sobre sistemas de equações lineares faz parte obrigatória do currículo escolar das escolas públicas. Tendo isso em vista, e por tudo que ja foi comentado até aqui, pode-se entender a programação linear no ensino médio como uma alternativa de complementar e de enrriquecer o conteúdo de sistemas lineares, pois, além de poder possibilitar ao aluno um aprofudamento de seus conhecimentos básicos em matemática, o aluno pode trabalhar com a modelagem matemática, com problemas extraídos de contextos reais e diversos e ainda aliar diversos recursos tecnológios em seu estudo. Nesse sentido é possivel encontrar na internet propostas de ensino de PL voltadas para o ensino médio de diversos autores em vários trabalhos, assim como tópicos de introdução a programação linear presentes em livros didáticos voltados para o ensino médio, como pode ser visto em Dante [7]. Então pensando nisso e buscando uma forma de contribuir com esse cenário, este capítulo traz uma discussão sobre a forma de abordar a programação linear na perspectiva do ensino médio.

É importante ressaltar que uma abordagem desse conteúdo é variável e dependerá da criatividade e intencionalidade do professor em sala de aula, porém, baseado em tudo que foi verificado até o presente momento, existe alguns pontos importantes que podem ser cruciais antes do professor começar a trabalhar com a programação linear com os seus alunos.

O primeiro ponto a ser ressaltado seria trabalhar a programação linear ao final do conteúdo de sistemas lineares, como um aprofundamento da teoria. O segundo ponto importante seria trabalhar esse conteúdo com dois focos diferentes, porém não disjuntos durante as aulas: o primeiro foco seria trabalhar a programação linear objetivando a modelagem dos problemas em si, visto que modelar os problemas dessa área por si só se constituem de uma grande desafio, e o outro foco seria visar na resolução dos problemas modelados, isto é, no cálculo da solução ótima do problema. Além disso, pode-se dizer ainda que, o professor não necessariamente precisa deixar claro ao aluno que o mesmo tenha que "modelar"um determinado problema ou mesmo que tenha que "aplicar os conhecimentos de PL"para resolver "esses ou aqueles problemas", é importante que a naturalidade e apresentação dessas novas situações ao aluno sejam naturais e que, o mais importante, esteja ao alcance do mesmo. Respeitando o que foi dito, abaixo segue ideias de como um estudo dirigido de duas possíveis abordagens desse conteúdo, para a alunos que ja tenha estudado os conceitos de sistemas lineares, podem ser desenvolvidos.

6.1 A respeito da Modelagem de Problemas

O professor, como falado anteriomente, pode focar em duas situações dentro da programação linear, a modelagem de problemas ou resolução propriamente dita dos problemas modelados. Visando trabalhar com o primeiro ponto e em um primeiro contato dos alunos com a PL, o professor pode seguir as orientações abaixo para direcionar a sua elaboração para um estudo dirigido que abranja esse foco:

i) Propor algumas situações problema aos alunos;

ii) dividir em dois o processo de modelagem dos problemas: obter a função a otimizar e obter as restrições do problema. Cada uma dessas atividades pode ser passada ao aluno como forma de atividades individuais.

Como a modegalem é um ponto crucial da resolução em PL, fazer o aluno se habituar a compreender os problemas e abstraí-los é de fundamental importância para se trabalhar com esse conteúdo. Portanto, esse sendo o foco, o professor, sem mesmo expor os conteúdos sobre a PL, pode muito bem passar estudos dirigidos com base nessas duas ideias a seus alunos, usando-o ainda para introduzir o assunto aos alunos, um pouco da historia da PL, ou qualquer outro conteúdo que o professor possa compreender como necessário e de valor aos alunos.

Nesses primeiros estudos dirigido o professor pode muito bem trabalhar com problemas variados e com funções objetivos que possuam duas ou mesmo três variáveis, pois o foco dessa ideia de estudo dirigido seria estimular os alunos a modelar o problema, constatar a aplicação dos conteúdos já estudados em circustâncias um pouco distintas e ainda perceber que os conteúdos estudados podem não resolver certos problemas similares aos já estudados.

Um exemplo de estudo dirigido seria propor aos alunos o problema trabalhado no tópico anterior, o **Problema da Alocação de Pessoas em uma fábrica**, onde o professor, pode propor aos alunos a resolução em grupo, ou mesmo, individual. Dito isso, após a devida leitura e compreensão do problema feita pelos próprios alunos, as seguintes questões podem ser propostas:

a) Qual a equação que representa o lucro do proprietário em função da quantidade de cada um dos tipos de cadeiras produzidas?

b) Sabendo que é possível colocar somente 12 pessoas na linha de cadeira simples e como cada cadeira gasta o recurso de 2 empregados/dia, expresse a inequação que representa o limite de cadeiras produzidas por dia nesta fábrica. Da mesma forma, faça a análise da linha de producção de cadeiras premium.

c) Como a fábrica possui 30 operários, e como a linha de rádios standard ultiliza dois empregados por dia e a linha de cadeiras premium ultiliza 3 empregados por dia, logo a mão de obra em função da quantidade de cadeiras de cada tipo produzidas não deve passar de 30. Expresse uma fórmula matemática para esta situação.

Fazendo esses questionamentos aos alunos como atividades avaliativas ou não o professor pode, portanto, conduzir uma discussão com o objetijo de verificar que a função lucro encontrada esteja restrita às outras inequações encontradas e, enfim, falar que esse conjunto de equações e inequações é um modelo matemático que representa a situação problema do dono da fábrica, onde a solução procurada deve atender a todas as restrições do problema e ainda satisfazer a função objetivo.

É importante ainda ter em mente que o professor caso perceba que os alunos não esteja conseguindo responder aos questionamentos da atividade pode conduzir a turma a argumentaos que possam fazer com que os mesmo compreendam como realizar as tarefas e obter as respostas das questões.

6.2 Sobre a Resolução dos Problemas em PL

Com o foco agora sendo a resolução de fato em problemas de PL, ou seja, sendo a busca da solução ótima para um determinado modelo matemático nos termos da PL, o professor pode introduzir em sala de aula o programa geogebra e o aplicativo OR Simplex como ferramenta auxiliar de estudo.

Nesse novo foco de abordagem o professor pode iniciar trabalhando com problemas com funções objetivo de duas variáveis e com o esboco das regiões que cada inequação do problema representa no plano cartesiano, similarmente à resolução de sistemas lineares pelo método gráfico. Nesse ponto, o professor pode propor aos alunos fazerem os esbocos desses gráficos manualmente ou através do auxilio programa geogebra, lembrando que é importante o aluno entender a construção do gráfico e não somente inserir os dados no programa para o gráfico ser gerado. Dito isso, o professor pode optar por um dos problemas já modelados em um estudo dirigido feito pelos alunos anteiormente e iniciar essa nova atividade com a preocupação em apenas desenvolver com os alunos o método gráfico de resolução do problemas de PL envovendo duas variáveis.

Dado então o problema previamente modelado, de preferência pelos próprios alunos, o professor pode dividir o seu estudo dirigido aos alunos em atividades que visem separadamente as seguintes situações:

i) Esboçar os gráficos de cada uma das inequações do problema;

ii) Encontrar a região de interseção de todas as regiões encontradas;

iii) Propor aos alunos alguns valores da função objetivo e traçar as retas geradas correspondentes a cada um dos valores atribuidos para a função objetivo; e por fim

iv) Analisar o comportamento das retas geradas para cada um dos valores atribuidos à função objetivo e verificar como se comportam tais retas, análogamente ao que foi feito no tópico sobre avaliação do desempenho da função objetivo visto no capítulo sobre métodos de resolução.

Durante a realização das atividades pelos alunos o professor deverá conversar com os alunos e ressaltar pontos cruciais do porque de cada um dos passos que foram feitos devem ser executados para que se resolva o problema. Como os alunos já estarão habituados a resolver sistemas lineares através do método gráfico a construção das regiões de soluções das inequações do problema, assim como a região de soluções não deverá ser uma novidade para os alunos.

O professor após verificar o desenvolimento da turma pode ainda posteriormente comentar sobre o Teorema Fundamental da Programação linear, mas não no sentido de faze-los decorar ou mesmo entende-lo completamente, mas com o objetivo aplicar o resultado desse teorema dentro das regiões de soluções encontradas durante as resoluções dos problemas propostos.

Tratando agora de funções que possuam três variáveis, o professor pode trabalhar com o método simplex com os alunos de uma forma mais intecionada a faze-los conhecerem o método do que com o objetivo de faze-los o utilizar constantemente para a resolução de problemas manualmente, visto a quantidade de caĺculos necessários para executá-lo. Nessa perspectiva, para alunos do ensimo médio é muito mais vantajoso utilzar o aplicativo OR Simplex para resolver os problema desse tipo, visando comtenplar a praticidade e a capacidade de modelar os problemas do que efetuar cáculos extensos e que possívelmente podem desistimular os alunos.

Considerações Finais

Este trabalho apresentou os conceitos iniciais de programação linear e ainda uma discussão a respeito das possibilidades de aplicação desse conteúdo voltado para o ensino médio regular, tendo em vista que este conteúdo abrange de maneira natural a interdisciplinaridade, a contextualizacao, a modelagem matemática e ainda a possibilidade dos alunos aprofundarem seus conhecimentos básicos em matemática trabalhados durante o ensino médio, possibilitando ao professor ter um leque ainda maior de estraégias de ensino e possibilidades para promover o ensino de matemática.

Foi possível perceber ainda que o método de resolução gráfica de um problema em PL pode possibilitar ao aluno explorar ainda mais suas habilidades de construir e interpretar gráficos, porém, de uma forma atrelada a um determinado contexto, necessitando o aluno interpretar cada elemento do problema algébricamente e graficamente sem se distanciar dos conteúdos abordados em seu dia-a-dia da sala de aula. Além disso, é possível ainda vincular ao ensino desse método diversos softwares que auxiliem na construção dos gráficos e na busca da região de soluções do problema, como o Geogebra, que foi sugerido no decorrer deste trabalho, por se tratar de um software de interface simples e intuitiva, o que favorece alunos e professores para utilizarem tal recurso para a realização de suas atitivades.

Quanto ao método simplex, que na verdade se traduz em um caminho mais simples para encontrar soluções para os problemas de programação linear e que possibilitou um grande avanço nas pesquisas dessa área, aborda conceitos de álgebra linear como vetores, soluções básicas de sistemas lineares, operações elementares de matrizes, entre outros, podendo ser uma boa oportunidade para os alunos constatarem a aplicação de diversos conceitos estudados no ensino médio encaixados em um algoritmo que pode resolver diversos problemas e em diversas áreas de conhecimento. Contudo, dependendo do número de variáveis que um problema pode ter, a tarefa de se usar esse método pode ser bastante desgastante, portanto, é sugerível que o aluno tente compreender a lógica do método, modelar os problemas e utilizar de recursos tecnológicos, como o OR Simplex, para auxliar na resolução desses problemas.

Além disso, os recursos tecnológicos, o GeoGebra e o OR Simplex, podem se constituir de ferramentas bastante poderosas no estudo sobre a PL, pois, tendo em vista que tanto o Geogebra quanto o OR Simplex, assim como outros recursos disponíveis mas não introduzidos neste trabalho, quando aliados aos métodos de resolução gráfica e ao método simplex, podem fornecer ao aluno e ao professor um verdadeiro laborário portátil de programação linear que pode caber, literalmente, na palma da mão.

Para concluir, espera-se que os pontos discutidos no último capítulo, sobre uma possível abordagem da PL no ensino médio, assim como os outros pontos discutidos nos capítulos anteiores, forneca uma alternativa e uma possibilidade de enriquecer o ensino do matemática por parte dos professores que busquem uma forma mais diversificada, interdisciplinar e contextualizada para promover o ensino de matemática.

Referências Bibliográficas

[1] ANASTASIOU, L. G. C., ET AL. Estratégias de ensinagem. *Processos de ensinagem na universidade. Pressupostos para as estratégias de trabalho em aula 3* (2004), 67–100.

[2] BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Editora Contexto, 2002.

[3] BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I., FIGUEREDO, V., AND WETZLER, H. G. *Álgebra linear*. Harper & Row, 1980.

[4] BORDENAVE, J., AND PEREIRA, A. M. Estratégias de ensino-aprendizagem. rio de janeiro: Editora vozes, 2000. Tech. rep., ISBN 85-326-0154-5.

[5] CARMINATI, N. L. *Modelagem matemática: uma proposta de ensino possiível na escola pública*. Universidade de Tecnológica Federal do Paraná, 2008.

[6] CINEL, N. C. B. Estudo dirigido. *Revista do Professor. 19 (73): 31-35, Jan./mar.* (2003).

[7] DANTE, L. R. *Matemática: volume único*. Ática, 2009.

[8] GOLBARG, M. C., AND LUNA, H. P. L. Otimização combinatória e programação linear. *Rio de Janeiro: Campus* (2000).

[9] LIBÂNEO, J. C. Didática/josé carlos libâneo. *São Paulo Ed: Cortez* (1994).

[10] LYRA, M. S., ET AL. *Uma proposta do ensino de programação linear no ensino médio*. Universidade Federal de Goiás, 2014.

[11] MASCARETTI, L. A. S. Estratégias de ensino: considerações gerais. *Marcondes E, Gonçalves EL. Educação médica. São Paulo: Sarvier* (1998), 187–8.

[12] NACIONAIS, P. C. matemática. *Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF* (1998).

[13] NERECI, I. G. Didática geral dinâmica. *11ª ed. São Paulo: Atlas* (1992).

[14] OKANE, H., ELIANA, S., AND REGINA, T. T. O estudo dirigido como estratégia de ensino na educação profissional em enfermagem. *Revista da Escola de Enfermagem da USP 40*, 2 (2006).

[15] OLISKOVICZ, K., AND CARLA, D. P. As estratégias didáticas no ensino superior: quando é o momento certo para se usar as estratégias didáticas no ensino superior?. *Revista de Educação 15*, 19 (2015).

[16] PRADO, D. *Programação linear*, vol. 1. Editora de Desenvolvimento Gerencial, 2012.

[17] SANTOS, A. O., AND OLIVEIRA, G. S. Contextualização no ensino aprendizagem da matemática: princípios e práticas. *ojs. cesuca. edu. br 2* (2016).

[18] SILVA, A. B. *O método simplex e o método gráfico na resolução de problemas de otimização*. Universidade Federal de Goiás, 2016.

[19] SILVA, E. M., ET AL. *Pesquisa operacional: programação linear, simulação*, vol. 184. 2017.

[20] SIMÃO, A. M. V. Integrar os princípios da aprendizagem estratégica no processo formativo dos professores. *Seminário de Modelos e Práticas de Formação Inicial de Professores* (2001), 13.