Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Construções Geométricas e os Problemas de Apolônio

Mariana Araújo Vieira

Goiânia

2013

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Mariana Araújo Vieira					
E-mail:	avieira.mari@gmail.com					
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não						
Vínculo empregatício do autor		Professor				
Agência de fomento:		CAPES			Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:DF		CNPJ:	00889834/0001-08	
Título:	Mestre em Matemática					
Palavras-chave:	Construções Geométricas, Régua, Compasso, Problemas de Apolônio.					
Título em outra língua:	Geometric Construction and the Problem of Apolonius.					
Palavras-chave em outra língua:	Geometric Construction, Ruler, Compass, Apollonius' Problem.					
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico.					
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	22/03/2013					
Programa de Pós-Graduação:	Profmat					
Orientador (a):	José Yunier Bello Cruz					
E-mail:	yunier.bello@gmail.com					
Co-orientador(a):*						
E-mail:						

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Mariana Araújo Vieira

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 02 / 05 / 2013

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Mariana Araújo Vieira

Construções Geométricas e os Problemas de Apolônio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz

Goiânia

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

V658c

Vieira, Mariana Araújo.
Construções geométricas e os problemas de Apolônio [manuscrito] / Mariana Araújo Vieira. - 2013.
66 f. : figs.

Orientador: Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Construção geométrica. 2. Apolônio, Problemas de. I. Título.

CDU: 514.1:37.016

Mariana Araújo Vieira

Construções Geométricas e os Problemas de Apolônio

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 22 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Rui Seimetz
Universidade de Brasília-UnB

Profa. Dra. Ivonildes Ribeiro Martins
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Mariana Araújo Vieira graduou-se em Matemática na Universidade de Brasília – UnB; durante a graduação, participou do Serviço de Atendimento Matemático à Comunidade, foi congressista do 10^o Encontro Nacional de Educação Matemática – X ENEM, foi monitora das disciplinas Cálculo I e Cálculo III do Departamento de Matemática da UnB; atualmente, é professora de Educação Básica da Secretaria de Educação do DF e do Centro de Ensino SIGMA.

À minha família pelo incentivo e paciência.
À minha mãe, pai e avós, por serem responsáveis pela minha formação.
À Carol, por me apoiar em todos os momentos.

Agradecimentos

À minha família, pelo carinho e conselhos.

À minha sobrinha, Laura, pelo sorriso e tranquilidade transmitidas.

Aos amigos, Nat, Thi, Léo, Tê, Cleo, Bi, Lu, Mila, Tati e Jorge, pelas sugestões, conselhos, orientações e apoio constante na elaboração desse trabalho.

À Carol, pela frequente ajuda com o LATEX e a compreensão da minha pouca disponibilidade.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz, pela ajuda constante e paciência que demonstrou.

Aos professores, Maria Terezinha Gaspar, Rui Seimetz, Lineu Neto e Mauro Rabelo que, durante a minha graduação, sempre me incentivaram à pesquisa e me motivaram a buscar novos conhecimentos à cada dia.

Ao professor e coordenador do Centro de Ensino SIGMA, Prof. Carlos Sérgio, pelo apoio conferido para a capacitação dos professores.

À professora e coordenadora de desenho geométrico do Colégio Militar de Brasília, Cleonilda, pela revisão e sugestões nesse trabalho.

A todos os professores do PROFMAT, pela dedicação.

"*In most sciences one generation tears down what another has built and what one has established another undoes. In mathematics alone each generation adds a new story to the old structure.*"[1]

Hermann Hankel

[1]"Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que a outra estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura."

Resumo

Vieira, M. A.. Construções Geométricas e os Problemas de Apolônio, 2013. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar os dez problemas de Apôlonio. Os problemas de Apôlonio encontram-se como citações nos trabalhos de Pappus da seguinte forma: Dados três elementos, cada um dos quais pode ser pontos, retas ou circunferências, construir uma circunferência que passa pelo(s) ponto(s) e seja tangente a cada uma das linhas dadas. Todas as construções são realizadas com o recurso computacional da Geometria Dinâmica, Geogebra. Esse trabalho combina elementos históricos do problema de Apolônio e o desenvolvimento de vários conceitos matemáticos importantes para a compreensão deste. Neste estudo indica-se a importância da resolução de problemas para o ensino da Geometria como uma metodologia que estimule a linha de pensamento, a criatividade, a argumentação, a construção e a prática das demonstrações.

Palavras-chave

<Construções Geométricas, Régua, Compasso, Problemas de Apolônio>

Abstract

Vieira, M. A.. Geometric Construction and the Problem of Apollonius, 2013. Masters Dissertation. Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

This paper aims to present the ten main problems of Apollonius. The problems of Apollonius are as citations in the work of Pappus as follows: three data elements, each of which may be points, lines or circles, construct a circle passing through the point and being tangent to each given line. All constructions are made with the computational resource of Dynamic Geometry, Geogebra. This work combines historical elements of the Apollonius' problems and the development of a range of mathematical concepts important to understand it. This study indicates the importance of problem solving for teaching geometry as a methodology that fosters line of thought, creativity, reasoning, construction and practical demonstrations.

Keywords

<Geometric Constructions, Ruler, Compass, Apollonius' Problems>

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

A palavra "geometria" vem do grego "geometrien" onde "geo" significa terra e "metrien" medida. A Geometria surgiu com a necessidade do homem de efetuar medições da terra; ver [1].

Atualmente o interesse dos professores pela geometria tem aumentado. Existe um consenso coletivo sobre a importância dessa área para a formação acadêmica dos alunos. Entretanto em vários momentos o estudo da geometria é renegado ou mesmo deixado apenas para o final do ano letivo no ensino básico.

O ensino tradicional da geometria deixa lacunas no conhecimento, pois esse ensino é dado basicamente em aulas expositivas com conceitos e fórmulas. As aulas causam ainda alguns problemas conceituais, como por exemplo, um quadrado desenhado no quadro de forma rotacionada deixa de ser quadrado e passa a se chamar losango para a maioria dos alunos. Essas confusões conceituais são ocasionadas por muitos motivos, entre eles pelos livros didáticos, pois abordam os temas com figuras sempre nas mesmas posições. Além disso, raramente trazem exemplificações com construções geométricas.

Algumas correntes da educação matemática afirmam a grande importância da utilização da resolução de problemas como forma de ensino no campo da geometria. Para tais resoluções convencionou-se o uso de construções com régua e compasso. Essa metodologia proporciona que o aluno se habitue a criar uma linha de raciocínio para cada problema, contendo a interpretação, a resolução, a análise, a justificativa e a verificação do número de soluções. Além disso, um problema matemático é, por si só, desafiador e proporciona uma curiosidade natural dos alunos para solucioná-lo.

Analisando os problemas existentes sobre construções geométricas historicamente, os problemas de Apôlonio foram escolhidos como questão central desse trabalho. Abordar esse conjunto clássico de problemas permite explorar uma grande riqueza de conceitos matemáticos e uma diversidade de construções.

As construções geométricas já aparecem na Grécia antiga. Os filósofos gregos já tinham fascínio por resolver problemas de geometria por meio de construções geométricas. Desde a escola pitagórica encontram-se problemas que envolvem régua e compasso, como por exemplo, a construção do pentagrama ou pentágono estrelado e dos polígonos regulares; ver [2]. Na época de Euclides, as grandezas passaram a ser associadas a segmentos de retas, nasce então à álgebra geométrica onde a palavra resolver era sinônimo de construir; ver [4]. Para os gregos as construções são realizadas com régua e compasso, a régua era capaz de traçar uma reta e o compasso para construir uma circunferência com centro e raio dados.

Os três problemas clássicos da antiguidade são a quadratura da circunferência, duplicação do cubo e a trissecção do ângulo. Mais de 2200 anos depois seria provado que todos os três problemas são impossíveis de serem construídos com régua e compasso. Entretanto, a maior parte da matemática grega e muito da matemática posterior, foi motivada por essas construções; ver [2].

Pode-se verificar a não construtibilidade da trissecção do ângulo na referência [3].

Manaecmus, discípulo de Eudoxo, buscou curvas que pudessem satisfazer a duplicação do cubo. Ele deparou-se com curvas que mais tarde receberiam os nomes de elipse, parábola e hipérbole.

Apolônio de Perga, nasceu em Perga uma cidade no sul da Ásia menor. Devido suas obras sobre as cônicas e tangências e trabalhos de outros matemáticos, o período de 300 a.C. à 200 a.C. foi denominado idade áurea da matemática grega. Os livros de Apolônio sobre as cônicas são comparados aos Elementos de Euclides por serem as melhores obras em seus campos. Outro trabalho importante é o tratado sobre tangências que hoje é conhecido como O Problema de Apolônio, supostamente esse estudo perdeu-se, felizmente foi traduzido por Pappus.

O problema de Apolônio é definido como dados três elementos entre pontos, retas ou circunferências traçar circunferências tangentes a esses elementos. O problema é subdividido em 10 casos, entre eles têm-se construções fáceis como construir uma circunferência que passe por três pontos dados, até construções difíceis como construir uma circunferência tangente a três dadas. Os problemas ficaram esquecedidos até que no período do renascimento Vieté em 1600 publicou o trabalho L' Apollonius Français que contém soluções para os dez problemas de Apolônio. A construção do caso mais difícil dadas três circunferências foi uma das mais belas contribuições de Viète para a matemática. Outros matemáticos como Rene Decartes e Issac Newton também estudaram este problema.

Devido a grande importância dos problemas de Apolônio para o desenvolvimento da geometria, com este trabalho espero contribuir com a valorização do ensino de Desenho Geométrico.

O objetivo desse trabalho é refazer os dez problemas de Apolônio, usando apenas régua e compasso. Como são problemas de tangência usamos um programa de geométria Dinâmica, Geogebra[1], para fazer todas as construções, o que impossibilita falhas nas construções. Todos esses problemas são resolvidos e demonstrados no Capítulo 4. O capítulo 4 foi organizado da seguinte forma : problema - construção - justificativa.

Como esses problemas exigem um conhecimento matemático prévio para o pleno entendimento de todas as justificativas, então os capítulos anteriores são dedicados a esses conhecimentos.

O terceiro capítulo contem definições, proposições e as respectivas provas dos temas como homotetia, potência de um ponto e eixo radical. Esses conceitos são fundamentais para as construções dos cinco dos dez problemas de Apolônio.

No Capítulo 2 apresentam-se construções fundamentais utilizadas ao longo do estudo. Depois de um grande estudo sobre Apolônio e seus trabalhos, não podia deixar de citar o seu célebre trabalho sobre as cônicas, assim o Capítulo 5 será dedicado as construções aproximas dessas curvas. E no último capítulo são apresentadas às conclusões desse trabalho e os possíveis estudos futuros decorrentes desse.

[1] `http://www.geogebra.org`

Uma aplicação direta para os problemas de tangência são as engrenagens tão usadas na física. Alguns tipos de engrenagens são: engrenagens de cremalheira e de dentes retos. As engrenagens tipo cremalheira podem envolver tangência entre reta e circunferência; ver Figura 1.1. Os portões eletrônicos são uma aplicação comum desse tipo de engrenagem, como exemplificado na Figura 1.2.

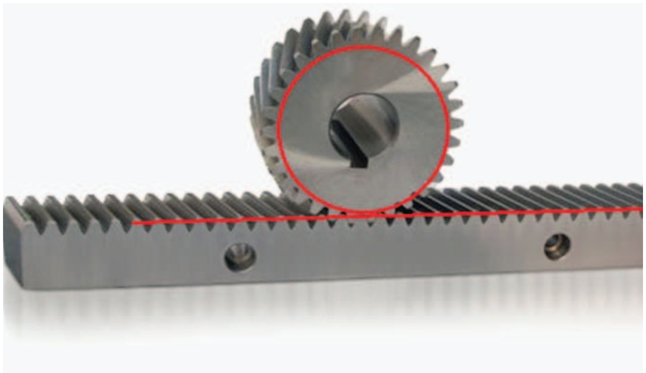

Figura 1.1: Aplicação de tangência entre reta e circunferência.

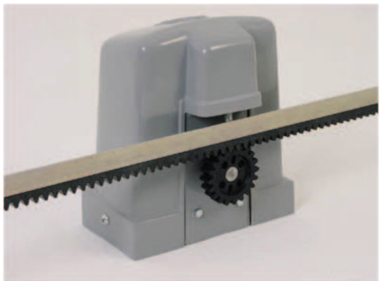

Figura 1.2: Engrenagem tipo cremalheira em portão eletrônico.

As engrenagens tipo de dentes retos, ver Figura 1.3, pode envolver tangência entre duas ou mais circunferências. Encontra-se engrenagem de dente reto no funcionamento de um relógio; ver Figura 1.4.

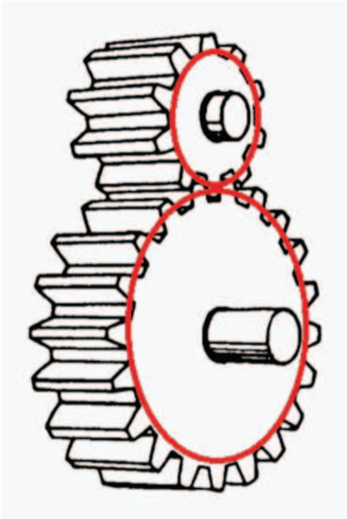

Figura 1.3: Aplicação de tangência entre duas circunferências.

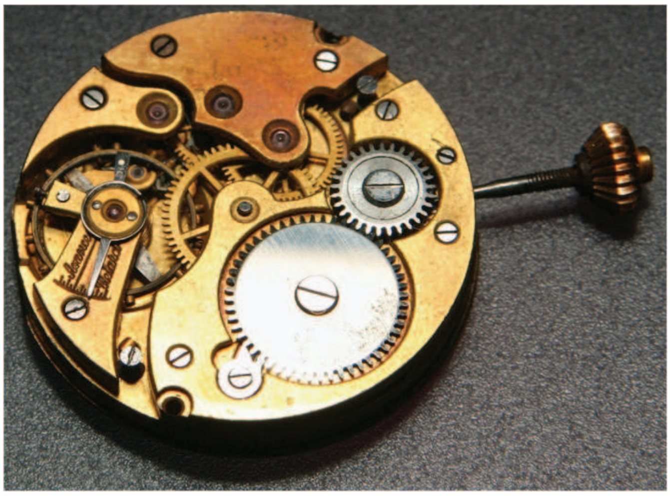

Figura 1.4: Engrenagem tipo dente reto em relógio.

Capítulo 2

Construções Elementares

As construções com régua e compasso apareceram na época dos pitagóricos na antiga Grécia, no século V a.C., e com grande prestígio no desenvolvimento da matemática grega. Havia dificuldades nas medidas das grandezas, já que só se contava com números inteiros. A noção de número real estava ainda muito longe de ser concebida, mas, no período de Euclides, 300 a.C., as grandezas passaram a ser associadas a segmentos de reta e, então eram construídas, no lugar de serem calculadas ou medidas.

As construções geométricas que seguem tratam da resolução gráfica de problemas que envolvem a geometria plana elementar. Nas construções serão usados como instrumento a régua e o compasso. Para as construções serem possíveis, ou seja, construtíveis, utilizando apenas esses dois instrumentos serão permitidos:

- Traçar uma reta, conhecendo dois de seus pontos;
- Traçar uma circunferência, conhecendo o seu centro e um ponto dela;
- Determinar as interseções de retas ou circunferências com retas ou circunferências já construídas.

2.1 Métodos para as Construções Geométricas

Alguns problemas de construções são aplicações diretas de proposições conhecidas e suas soluções são imediatas como, por exemplo, a construção de um triângulo equilátero.

Se a solução de um problema é mais sofisticada, mas a solução é conhecida, ela pode ser representada iniciando por uma operação que sabemos como realizar, seguida por uma série de operações desse tipo, até que a solução seja alcançada. Esse procedimento é chamado de **método sintético** de soluções de problemas. É usado para apresentar soluções de problemas em livros didáticos.

Entretanto, esse método não pode ser seguido quando enfrentamos um problema cuja solução não é aparente, uma vez que não oferece pista de qual primeiro passo deve ser desenvolvido e os possíveis primeiros passos são muito numerosos para serem tentados aleatoriamente. Por outro lado, sabe-se definitivamente qual é o problema, uma vez que a figura que se quer obter ao final do método é conhecida. Saber qual resultado se quer encontrar confere grande auxílio. Por um estudo cuidadoso e atento da figura que se deseja encontrar como resultado, um caminho pode ser encontrado e consequentemente levado à solução desejada.

Esse procedimento, conhecido como **método analítico** de solução de problemas consiste, em linhas gerais, dos seguintes passos, ver [5]:

Análise: Assumindo que um problema dado foi solucionado, construa uma figura que aproximadamente satisfaça as condições do problema e investigue com as partes dadas e as partes desconhecidas da figura relacionam-se umas com as outras, até que você descubra a relação que pode ser usada para a construção da figura requerida.

Construção: Utilizando a informação obtida na análise, desenvolva a construção.

Prova: Mostre que a figura construída satisfaz todos os requisitos do problema.

Discussão: Discuta o problema quanto as condições de possibilidades, ou seja, o número de soluções; ver [5].

2.2 Construções Fundamentais

Nesse tópico serão apresentadas e analisadas algumas construções básicas e elementares, essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

2.2.1 Transporte de segmentos

Transportar um segmento para uma reta dada consiste em construir um segmento congruente ao segmento dado; ver Figura 2.1.

Construção 1. Transporte o segmento $\overline{AB}$ para a reta r.

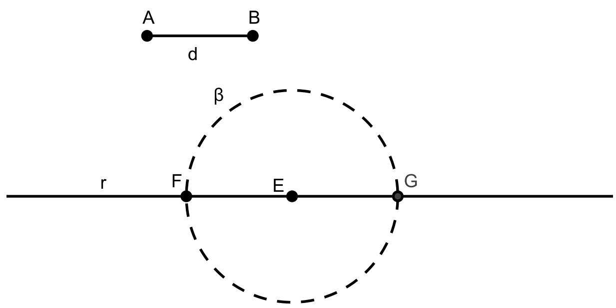

Figura 2.1: Transporte de segmentos

Para transportar o segmento $\overline{AB}$ para reta r, construa a circunferência β com centro E e raio igual a $\overline{AB}$. A interseção entre β e a reta r são os pontos F e G, portanto os segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{EG}$ são congruentes a $\overline{AB}$.

Para construção da figura anterior é conveniente traçar apenas um arco ao invés da circunferência β, para fins de melhor legibilidade da construção. Este procedimento será adotado para as próximas construções.

2.2.2 Transporte de ângulos

Transportar um ângulo para uma semirreta dada consiste em construir um ângulo congruente ao ângulo dado em um dos semiplanos determinados pela reta que contém tal semirreta, e tendo esta semirreta como um de seus lados; ver Figura 2.2.

Construção 2. Transporte o ângulo $A\hat{O}B$ para a semirreta $\overrightarrow{YZ}$.

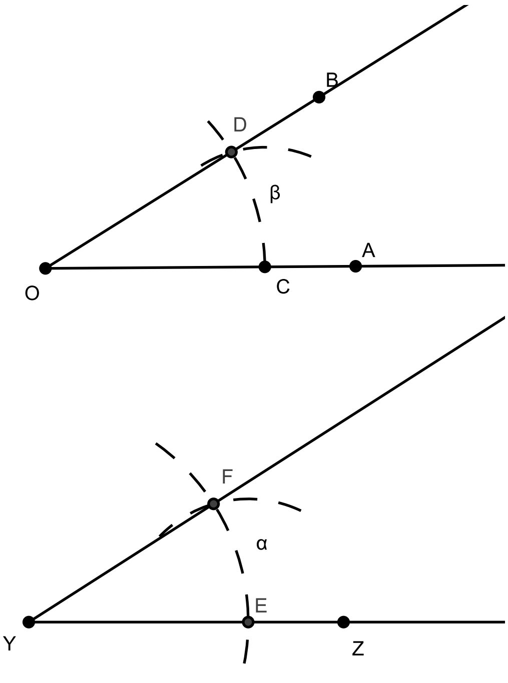

Figura 2.2: Transporte de ângulo

Trace uma circunferência β de centro O e raio r arbitrário, essa circunferência intercepta as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ nos pontos C e D, respectivamente. Com mesmo raio r, trace uma circunferência α de centro em Y, congruente a β, essa circunferência intercepta $\overrightarrow{YZ}$ no ponto E. Trace agora uma circunferência com centro em E e raio $\overline{CD}$, essa circunferência intercepta α nos pontos F e F'. Portanto, os ângulos $E\hat{Y}F$ e $E\hat{Y}F'$ são congruentes ao ângulo $A\hat{O}B$ dado.

Justificativa: Podemos verificar que $\overline{OC} \cong \overline{YE}$, $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ e $\overline{OD} \cong \overline{YF}$, logo os triângulos COD e EYF são congruentes, pelo critério L.L.L. de congruência de triângulos. Portanto, os ângulos $C\hat{O}D$ e $E\hat{Y}F$ são congruentes.

2.2.3 Mediatriz de um segmento

A mediatriz de $\overline{AB}$ é a reta perpendicular pelo seu ponto médio. Essa reta equidista de A e B; ver Figura 2.3.

Construção 3. Construa a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

Construa as circunferências α e β com raios iguais a x ($x > \frac{\overline{AB}}{2}$) e arbitrários, e centro nos pontos A e B, respectivamente. As circunferências se interceptam nos pontos C e D, portanto a mediatriz é a reta $\overline{CD}$.

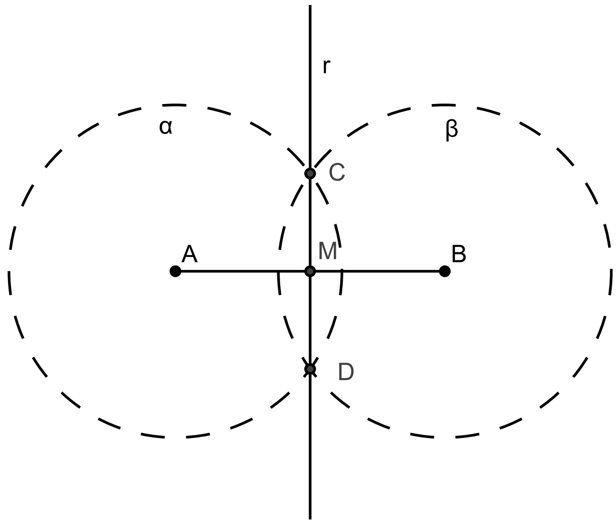

Figura 2.3: Mediatriz de um segmento

Justificativa: Podemos verificar que o quadrilátero $ACBD$ é um losango pois $\overline{AC} \cong \overline{AD} \cong \overline{DB} \cong \overline{BC}$. As diagonais $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são perpendiculares e encontram-se no seu ponto médio, portanto a mediatriz é perpendicular à $\overline{AB}$, pelo seu ponto médio.

2.2.4 Perpendicular a uma reta

Caso 1. Sejam uma reta r dada e um ponto P pertencente a ela; ver Figura 2.4.

Construção 4. Construa uma reta perpendicular a r que passe por P.

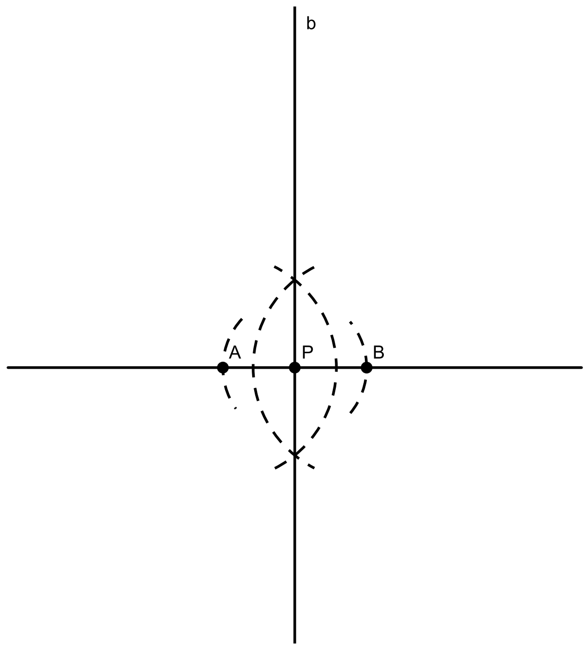

Figura 2.4: Perpendicular a uma reta - Caso 1

Determinar o segmento $\overline{AB}$ tal que P seja seu ponto médio. Em seguida trace a reta mediatriz de $\overline{AB}$. Essa reta é perpendicular a reta r dada.

Caso 2. Sejam uma reta r dada e um ponto P não pertencente a ela; ver Figura 2.5.

Construção 5. Construa uma reta perpendicular a r que passe por P.

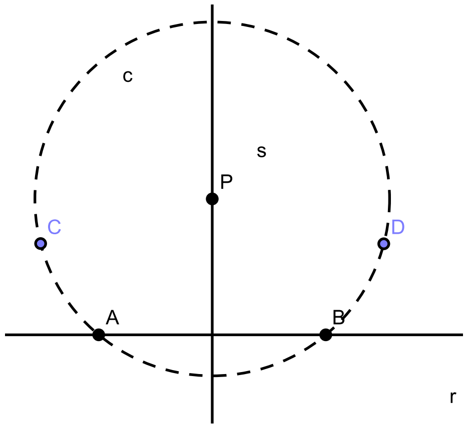

Figura 2.5: Perpendicular a uma reta - Caso 2

Traçamos uma circunferência com centro no ponto P que intercepta a reta r nos pontos A e B. Em seguida traçamos a mediatriz do segmento $\overline{AB}$. A reta r, mediatriz de $\overline{AB}$, é a reta perpendicular a r que passa por P o ponto dado.

Justificativa: O ponto P equidista de $\overline{AB}$.

2.2.5 Paralela a uma reta

Caso 1. Sejam uma reta r e a distância d entre as retas paralelas; ver Figura 2.6.

Construção 6. Construa uma reta paralela a r, a uma distância d.

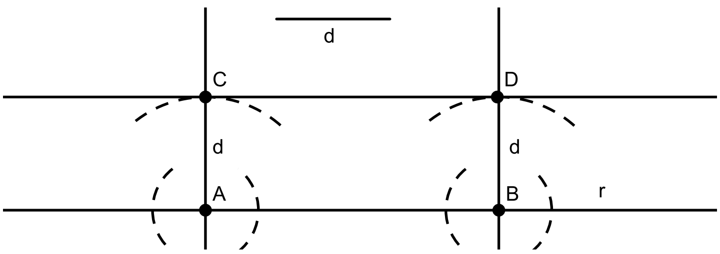

Figura 2.6: Paralela a uma reta - Caso 1

Marque os pontos A e B na reta r, arbitrariamente, e construa uma reta perpendicular a r passando por A. Faça o mesmo pelo ponto B. Em seguidam, transporte a medida d a partir de A sobre a reta perpendicular obtendo o ponto C. À partir de B obtemos o ponto D. A reta $\overleftrightarrow{CD}$ é a reta paralela à r desejada.

Caso 2. Seja uma reta r dada e um ponto P não pertencente a ela; ver Figura 2.7.

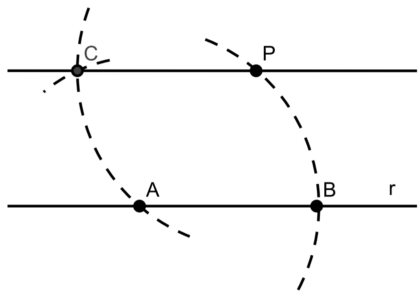

Figura 2.7: Paralela a uma reta - Caso 2

Construção 7. Construa uma reta perpendicular a r que passe por P.

Com centro em P, trace um arco de raio arbitrário de tal forma que intercepte r no ponto A. Com mesmo raio e centro em A trace outro arco, esse arco interceptará a reta r no ponto B. Com uma abertura igual a medida de $\overline{BP}$, trace um arco de centro em A, esse arco definirá o ponto C. A reta $\overleftrightarrow{CP}$ é a desejada.

Justificativa: O quadrilátero $ABPC$ é um paralelogramo, pois possui lados opostos congruentes e paralelos.

2.2.6 Média Geométrica ou Proporcional

A média geométrica de dois segmentos p e q dados é o segmento x, tal que $x^2 = p \cdot q$; ver Figura 2.8.

Análise. Dados dois segmentos de medidas p e q queremos determinar um terceiro segmento de tamanho $x^2 = p \cdot q$. Observando o resultado procurado pode-se fazer uma correlação com as relações métricas em um triângulo retângulo. Observe que $x^2 = p \cdot q$.

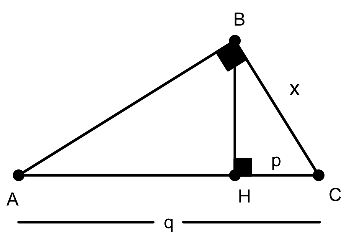

Figura 2.8: Média Geométrica

Construção 8. Vamos assumir que os segmentos q e p possuem tamanhos diferentes e q é o maior deles.

1. Construa o segmento $\overline{AC}$ de tamanho q
2. Construa o segmento $\overline{HC}$ de tamanho p.
3. Determine o ponto médio M de $\overline{AC}$.
4. Construir uma circunferência de centro M e raio $\overline{AM}$.
5. Construir uma perpendicular a $\overline{AC}$ por H.
6. Determine B interseção entre a circunferência e a perpendicular.
7. Construa o segmento $\overline{BC}$.

Portanto, o segmento $\overline{BC}$ é solução, pois $BC = x^2 = p \cdot q$; ver Figura 2.9.

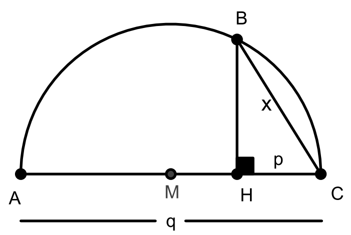

Figura 2.9: Média Geométrica ou Proporcional

2.3 Lugar Geométrico

Definição 1. Um conjunto de pontos constitui um lugar geométrico quando satisfaz uma determinada propriedade P com as seguintes condições:

a) Todo ponto que pertence ao lugar geométrico possui a propriedade P;

b) Todo ponto que possui a propriedade P pertence ao lugar geométrico.

Em muitos casos a solução de um problema geométrico depende de se encontrar um ponto que satisfaça certas condições, por exemplo, para construir uma circunferência que passa por três pontos dados, é necessário encontrar um ponto, o centro da circunferência, equidistante aos três pontos dados. Portanto, o conhecimento sobre os lugares geométricos, pode facilitar a resolução de um problema de geometria plana. Os principais lugares geométricos são apresentados nos tópicos a seguir.

2.3.1 Lugar Geométrico 1

O lugar geométrico dos pontos no plano a uma distância d conhecida do ponto O dado, é uma circunferência com centro nesse ponto e raio igual à distância fornecida; ver Figura 2.10. Todos os pontos da circunferência são equidistantes do seu centro.

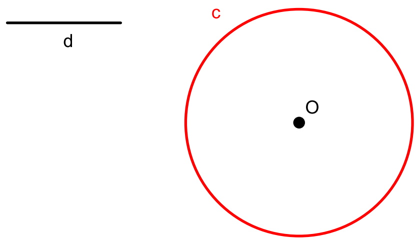

Figura 2.10: Lugar Geométrico 1

2.3.2 Lugar Geométrico 2

O lugar geométrico dos pontos tangentes a uma distância d dada de uma circunferência C' é uma circunferência C'' concêntrica a circunferência inicial; ver Figura 2.11.

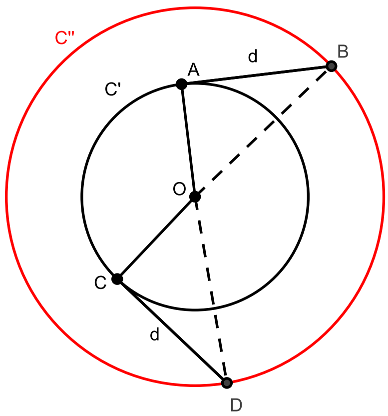

Figura 2.11: Lugar Geométrico 2

Construção 9. Dados um segmento de tamanho d e uma circunferência C', construa segmentos tangentes de tamanho d à circunferência C'.

Justificativa Os triângulos ABO e CDO são triângulos retângulos e observe que

$$\overline{CD} = \overline{AB} = d,$$

$$\hat{A} = \hat{C} = 90°.$$

Logo,

$$\overline{OD} = \overline{OB}.$$

Portanto, C'' é uma circunferência concêtrica à C'.

2.3.3 Lugar Geométrico 3

O lugar geométrico dos pontos equidistantes a dois pontos dados é uma reta perpendicular ao segmento determinado pelos dois pontos dados. Esse lugar geométrico é chamado de reta mediatriz. A mediatriz foi construída e justificada na seção 2.2.3 desse trabalho.

2.3.4 Lugar Geométrico 4

O lugar geométrico dos pontos do plano a uma distância d de uma reta r dada é um par de retas paralelas a r; ver Figura 2.12. O par de retas paralelas à r, s e t, foi construído e justificado na seção 2.2.5 desse trabalho.

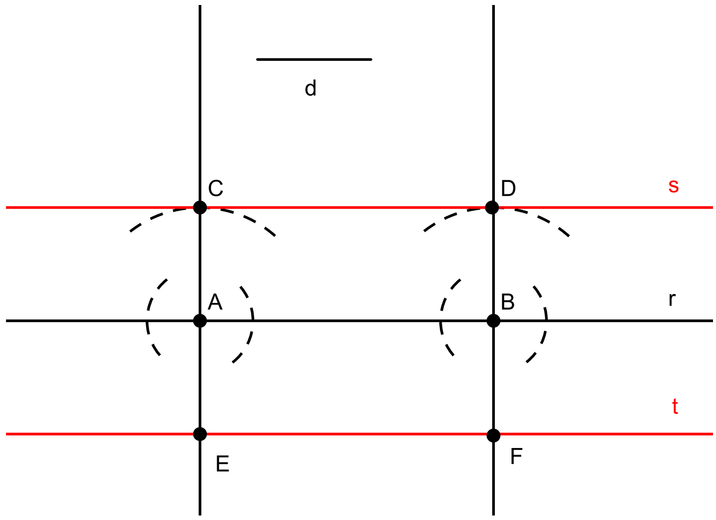

Figura 2.12: Lugar Geométrico 4

2.3.5 Lugar Geométrico 5

O lugar geométrico dos pontos equidistantes a duas retas concorrentes é o par de bissetrizes dos ângulos formados por essas retas; ver Figura 2.13. Dadas as retas r e s, o par de bissetrizes são as retas t e u.

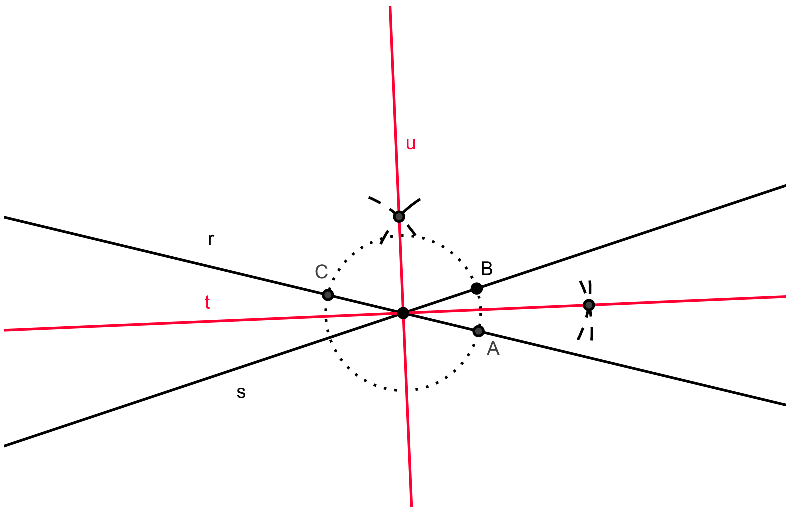

Figura 2.13: Lugar Geométrico 5

2.3.6 Lugar Geométrico 6

O lugar geométrico dos pontos em que a diferença dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos A e B é constante e é uma reta perpendicular a $\overline{AB}$.

Análise. Precisamos demonstrar que um ponto que satisfaz essa propriedade pertence a uma reta perpendicular a $\overline{AB}$. Em seguida, demonstrar que todo ponto pertencente a perpendicular satisfaz a propriedade.

Seja P um ponto que possua a propriedade enunciada, $PA^2 - PB^2 = k^2$, onde k é uma constante, e D a projeção ortogonal de P sobre $\overline{AB}$; ver Figura 2.14. Pelo teorema de Pitágoras, temos que

$$PA^2 = PD^2 + AD^2 \text{ e } PB^2 = PD^2 + DB^2.$$

Subtraindo as equações,

$$PA^2 - PB^2 = AD^2 - DB^2.$$

Por hipótese, $PA^2 - PB^2 = k^2$, e resolvendo o produto notável temos

$$(AD - DB)(AD + DB) = k^2. \qquad \textbf{(1)}$$

Seja, M ponto médio de $\overline{AB}$, escrevendo $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$ em função de M, temos

$$AD - DB = 2MD. \qquad \textbf{(2)}$$

Observe, que

$$AD + DB = AB. \qquad \textbf{(3)}$$

Substituindo **(2)** e **(3)** em **(1)**, temos

$$AB \cdot 2MD = k^2.$$

Logo, o segmento $\overline{MD}$ também é constante. Portanto, a reta desejada é perpendicular à $\overline{AB}$. Agora, para provarmos que todo ponto pertencente a perpendicular satisfaz essa propriedade, segue de imediato pelo uso do teorema de Pitágoras.

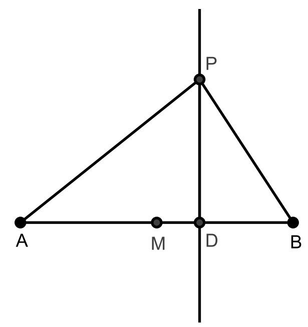

Figura 2.14: Análise do Lugar Geométrico 6

Construção 10. Dados os pontos A e B e um segmento de tamanho d, temos que

1. Construa um triângulo retângulo XYZ, com um dos catetos com medida igual a d.
2. Construa uma circunferência de centro em A e raio XZ.
3. Construa uma circunferência de centro em B e raio YZ.
4. Determine os pontos P e P' sendo a interseção das circunferências construídas.
5. Trace a reta r que passa por P e P'.
6. Portanto, a reta r é o lugar geométrico desejado; ver Figura 2.15.

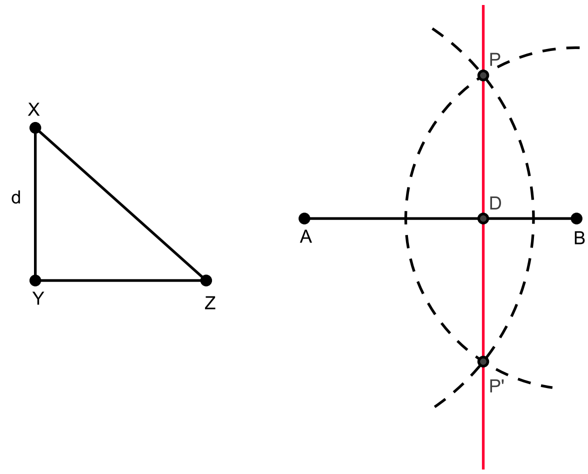

Figura 2.15: Lugar Geométrico 6

2.4 Elementos da circunferência

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo, chamado centro; ver Figura 2.16.

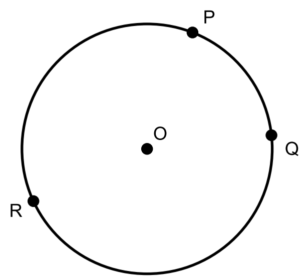

Figura 2.16: Circunferência

Considere um ponto O do plano. Todos os pontos P, Q e R deste mesmo plano situados a uma igual distância de O determinam uma curva fechada. Os elementos principais de uma circunferência são:

- O ponto O se denomina centro da curva, circunferência de centro O.
- Os segmentos congruentes $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ são raios dessa circunferência.
- Outros segmentos importantes são os que unem pontos quaisquer de uma circunferência, denominados cordas.
- As cordas que passam pelo centro recebem nome especial de diâmetro.
- Os pontos extremos de uma corda determinam duas porções excludentes do circunferência que denominam-se arcos.

Fixando um centro e o tamanho do raio pode-se facilmente construir uma circunferência. A construção a seguir pode ser encontrada no livro III dos Elementos de Euclides; ver [6].

Problema 1. Determinar o centro de um circunferência.

Construção 11. Seja C a circunferência dada, temos:

1. Trace uma corda $\overline{AB}$ qualquer.
2. Determine o ponto médio M de $\overline{AB}$.
3. Trace uma perpendicular por M. Essa reta intersecta a circunferência em P e Q.
4. O ponto médio de PQ é o centro desejado.

Essa construção é facilmente justificada pelas construções básicas justificadas no item 2.2.3.

2.4.1 Circunferências por dois ou mais pontos

Podemos observar que por dois pontos passam infinitas circunferências. Agora já por três pontos não colineares passa uma única circunferência, pois todo triângulo é inscritível em uma circunferência. Entretanto se esses três pontos forem colineares não existe circunferência que os contenha.

Proposição 2.4.1. *Todo triângulo é inscritível em uma circunferência.*

Demonstração.

Seja ABC um triângulo.

Para demonstramos essa proposição basta determinar um ponto que seja equidistante de A, B e C.

Seja a reta mediatriz r de $\overline{AB}$ e s a mediatriz de $\overline{BC}$ e P o ponto de interseção entre as retas r e s.

Como P é equidistante de A e B pela reta r, de B e C pela reta s e P pertence a ambas as retas então P é equidistante dos ponto A, B e C como queríamos demonstrar.

Portanto, P é equidistante de A, B e C; ver Figura 2.17 ∎

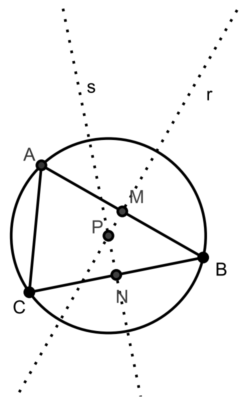

Figura 2.17: Triângulo inscrito em uma circunferência

A Proposição 2.4.1 também pode ser enunciada como a Proposição 2.4.2, sem perda de generalidade.

Proposição 2.4.2. *Três pontos não colineares determinam uma única circunferência.*

Por quatro pontos não colinerares apenas existirá uma circunferência que os contenha se esses pontos formam um quadrilátero circunscritível. Observe que para um quadrilátero seja circunscritível é necessário que a soma das medidas ângulos opostos seja igual 180°.

Proposição 2.4.3. *Se em um quadrilátero os pares de ângulos opostos são suplementares, então esse quadrilátero é inscritível.*

Demonstração.

Seja $ABCD$ um quadrilátero.

Como todo triângulo é inscritível, pela Proposição 2.4.2, então por ABC traçamos uma circunferência. Existem três localizações para o ponto D: exterior a circunferência, interior ou pertencente à circunferência. Assumindo que D não pertence à circunferência, precisamos analisar os outros dois casos.

Caso 1 Suponha que D pertence à região interior. Então o prolongamento de $\overline{AC}$ intercepta a circunferência em M; ver Figura 2.18.

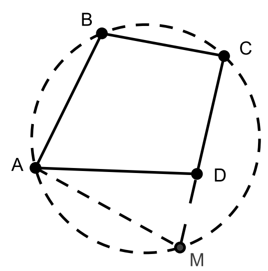

Figura 2.18: Proposição 2.4.3

No quadrilátero inscrito $ABCM$, temos $A\hat{B}C + C\hat{M}A = 180°$.

Por hipótese, $A\hat{B}C + C\hat{D}A = 180°$.

Logo, $C\hat{D}A = C\hat{M}A$ são congruentes. **(1)**

Pelo o triângulo AMD, temos que o ângulo externo $C\hat{D}A$ é maior que $C\hat{M}A$. **(2)**

Por **(1)** e **(2)** verificamos que o ponto D não pode estar no interior da circunferência.

Portanto, D pertence à circunferência.

Caso 2 De modo análogo podemos demonstrar que D não pode ser exterior.

Portanto, se a soma dos ângulos externos são suplementares então o quadrilátero é inscritível. ■

Caso o número de pontos não colineares seja maior do que quatro para que exista uma circunferência que os contenha é necessário que esses pontos formem um polígono regular.

Um Polígono regular é um polígono equiângulo e equilátero.

Proposição 2.4.4. *Todo polígono regular é inscritível em uma circunferência.*

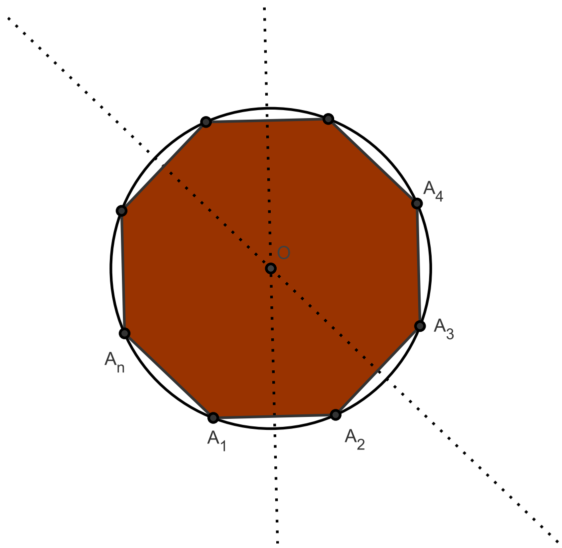

Figura 2.19: Proposição 2.4.4

Demonstração.

Seja A_1, A_2, A_3, A_4,...,A_n um polígono regular.

Trace a mediatriz de $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_2A_3}$, as quais se intersectam em O. Pela definição de mediatriz, $OA_1 = OA_2 = OA_3 = r$. Assim com centro em O e raio igual a r podemos traçar uma circunferência, que necessariamente passará pelos pontos A_1, A_2 e A_3. Se realizarmos o mesmo procedimento para mais três vértices consecutivos, pela natureza do polígono, esses pontos devem estar situados em relação ao ponto O como os vértices A_1, A_2 e A_3. Logo, todos os vértices são equidistantes do ponto O.

Portanto, todo polígono regular é inscritível em uma circunferência;ver Figura 2.19 ■

Problema 2. Construir um circunferência que passe por três pontos A, B, e C, não colineares, dados.

Construa a mediatriz de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. A interseção entre essas duas retas é o ponto O, o centro da circunferência; ver Figura 2.20. Basta agora construir uma circunferência centrada em O e raio $\overline{OA}$.

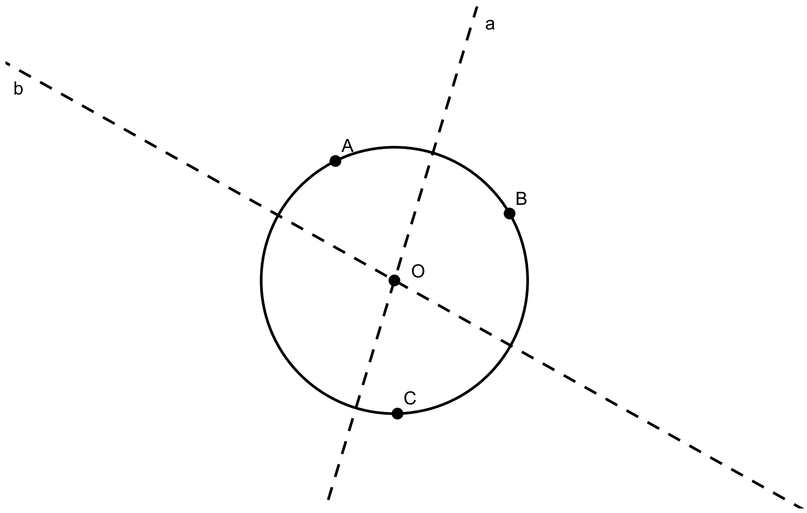

Figura 2.20: Problema 2

Observe que o ponto O é de fato o centro da circunferência, pois pertence à mediatriz de A e B, portanto $OA = OB$. E de modo análogo, o ponto O pertence à mediatriz de B e C, logo $OB = OC$. Assim, o ponto O é o centro da circunferência desejada.

2.5 Triângulos

Esse tópico é dedicado às construções de triângulos devido a grande importância no estudo do desenho geométrico. Entretanto, serão realizados poucos problemas, mas não poderíamos deixar de comentá-los. Construir um triângulo equivale a determinar três pontos.

Definição 2. Triângulo é um polígono com três lados.

Problema 3. Construir um triângulo dados seu perímetro $2p$ e as medidas de dois de seus ângulos; ver Figura 2.21.

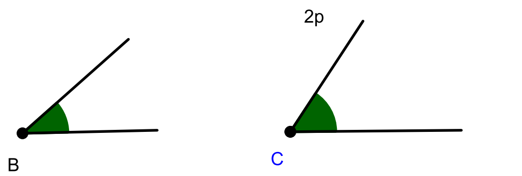

Figura 2.21: Perímetro $2p$ e as medidas de dois ângulos do triângulo

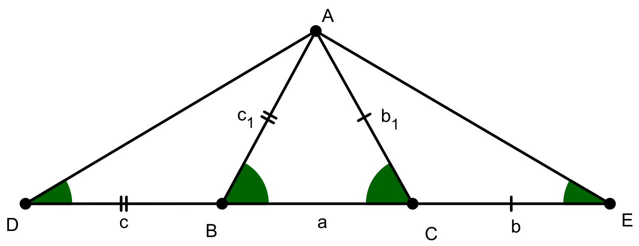

Figura 2.22: Triângulo com perímetro e dois ângulos dados

Construção 12. Seja ABC o triângulo desejado, de modo que $\overline{DE}$ é o perímetro dado e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ também de medidas conhecidas; ver Figura 2.22.

1. Construa o triângulo DAE de modo que $DE = 2p$, $\hat{D} = \frac{\hat{B}}{2}$ e $\hat{E} = \frac{\hat{C}}{2}$, para determinar os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{E}$ realize as bissetrizes de $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

2. Determine os pontos B e C sobre $\overline{DE}$, traçando as mediatrizes de $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$, respectivamente.

Justificativa: O vértice B do triângulo DAB foi determinado pela mediatriz então esse triângulo é isósceles com os ângulos da base medindo $\frac{\hat{B}}{2}$. Pelo teorema do ângulo externo, o ângulo $A\hat{B}C$ tem medida $\hat{B}$ dada. De modo análogo, temos para o ângulo $\hat{C}$ dado.

Logo,

$$AB + BC + AC = DB + BC + CE = 2p.$$

Portanto o triângulo ABC é o desejado.

Problema 4. Construa um triângulo dados seu perímetro, o ângulo oposto a base, e a altura relativa a base.

Análise. Precisamos, inicialmente, construir o triângulo DAE de modo que $DE = 2p$, $\overline{AH}$ seja a altura dada e o ângulo $D\hat{A}E$ seja de medida construtível, analisada posteriormente; ver Figura 2.23.

Sejam ABD e ACE triângulos isósceles tais que $\overline{AB} \cong \overline{BD}$ e $\overline{AC} \cong \overline{CE}$, observe que

$$\hat{D} = \tfrac{1}{2} \cdot A\hat{B}C \text{ e } \hat{E} = \tfrac{1}{2} \cdot A\hat{C}B.$$

Logo,

$$D\hat{A}E = \hat{D} + \hat{A} + \hat{E} = \frac{1}{2} \cdot \hat{B} + \hat{A} + \frac{1}{2} \cdot \hat{C} = \frac{1}{2} \cdot (\hat{B} + \hat{A} + \hat{C}) + \frac{1}{2} \cdot \hat{A} = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \hat{A}.$$

Portanto, o triângulo DAE pode ser construído, pois conhecemos a medida do ângulo $D\hat{A}E$, a medida do lado $\overline{DE}$ e a altura desse triângulo é congruente a do triângulo ABC dada.

Dessa maneira, o triângulo desejado é o triâgulo ABC.

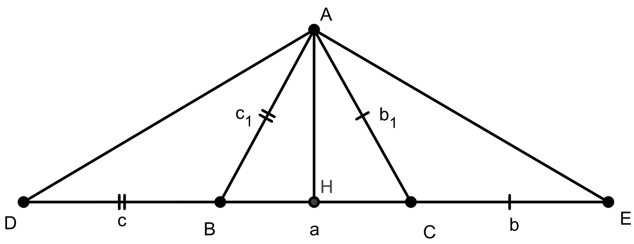

Figura 2.23: Dados o perímetro, o ângulo oposto à base, e a altura relativa à base de um triângulo

Construção 13. Dados o perímetro $2p$ e as medidas de dois de seus ângulos de um triângulo, temos

1. Construa um segmento $DE = 2p$ e o arco capaz do ângulo $90 + \frac{1}{2}\hat{A}$ sobre esse segmento; ver Figura 2.24.

2. Construa uma reta paralela à $\overline{DE}$ com a distância igual à altura dada, a interseção da reta paralela com o arco capaz determina dois pontos, esses dois pontos gera duas soluções simétricas para esse problema.

3. Trace a mediatriz de $\overline{AD}$, a interseção da mediatriz com $\overline{DE}$ é o ponto B. Faça transporte de ângulo dado a partir do segmento $\overline{AB}$, com isso determinamos o triângulo ABC desejado.

Portanto, o triângulo ABC é solução do problema.

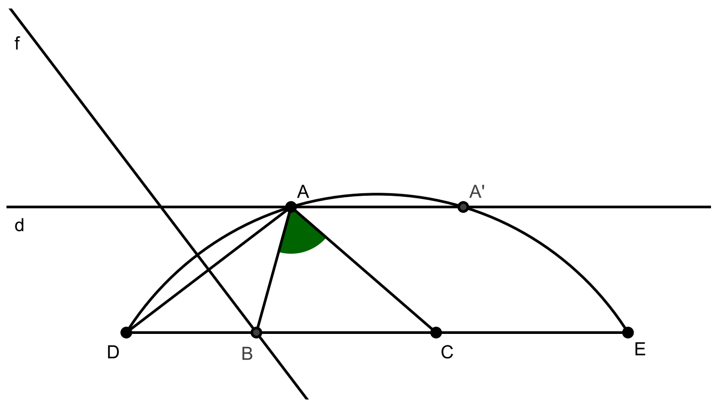

Figura 2.24: Triângulo dados o perímetro, o ângulo oposto à base, e a altura relativa à base

Para resolver o problema a seguir será necessário apresentar algumas definições importantes e uma proposição.

Definição 3. Ceviana é qualquer segmento de reta que une um vértice do triângulo com um ponto qualquer do lado oposto ou do seu prolongamento.

Definição 4. Mediana é a ceviana com uma extremidade no ponto médio de um lado. O encontro das medianas é chamado de baricentro.

Proposição 2.5.1. *O baricentro, ponto G, de um triângulo divide cada mediana na proporção de dois para um a partir do vértice.*

Demonstração. Seja $\overline{AE}$ e $\overline{CD}$ medianas do triângulo e G o baricentro; ver Figura 2.25.

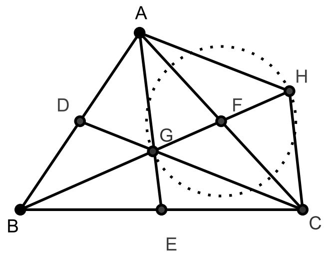

Figura 2.25: Propriedade da mediana

Como D e E são pontos médios então $BE = EC$ e $AD = DB$.

Construa o ponto H pertencente ao prolongamento de $\overline{BG}$ tal que $GF = FH$.

No triângulo ABH, como D e G são pontos médios, então os segmentos $\overline{DG}$ e $\overline{AH}$ são paralelos e $DG = \frac{AH}{2} = x$.

Da mesma forma, analisando o triângulo BCH, então os segmentos $\overline{GE}$ e $\overline{CH}$ são paralelos e $GE = \frac{HC}{2} = y$.

Observe que $\overline{AH}$ e $\overline{GC}$ são paralelos, da mesma forma que $\overline{AG}$ e $\overline{HC}$. Então $AGCH$ é um paralelogramo e as diagonais se interceptam no ponto médio.

Portanto, $\overline{BH}$ é mediana do triângulo ABC.

Assim, $CG = AH = 2x$ e $DG = AH = x$.

Logo,

$$\frac{CG}{DG} = 2.$$

Portanto, de modo análogo para as outras medianas,

$$\frac{CG}{GD} = \frac{AG}{GE} = \frac{BG}{GF} = 2.$$

■

Problema 5. Construa um triângulo dadas as três medianas.

Seja $AA' = m_a$, $BB' = m_b$ e $CC' = m_c$ as três medianas dadas. Queremos construir um triângulo ABC que possua essas três medianas; ver Figura 2.26.

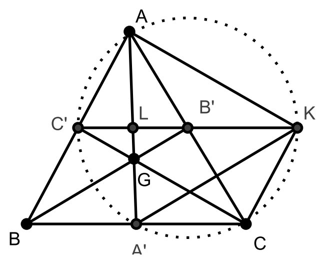

Figura 2.26: Triângulo com três medianas dadas

Análise. Construa um ponto K sobre a reta $\overleftrightarrow{C'B'}$ tal que $B'K = B'C'$.

Observe que $\overline{AC}$ e $\overline{C'K}$ se interceptam nos respectivos pontos médios, portanto, $AKCC'$ é um paralelopgramo.

Logo, $AK = CC' = m_c$.

Note que $A'BB'K$ também é um paralelogramo, pois $A'B = B'K$ e paralelo.

Assim, $A'K = B'B = m_b$.

Então, o triângulo $AA'K$ possui os três lados conhecidos sendo cada um deles uma mediana e é facilmente construído. Precisaremos construir esse triângulo auxiliar.

Para passar do triângulo auxiliar para o triângulo desejado, perceba que $C'B'K$ é interceptado por $\overline{AA'}$ em L. E L é o ponto médio de $\overline{AA'}$.

Logo, $\overline{KL}$ é mediana do triângulo $AA'K$ e, portanto conhecida.

Além disso,

$$C'L = LB' = \frac{1}{3}KL.$$

Então, B' é baricentro de $AA'K$.

Assim os pontos B' e C' podem ser determinados e o triângulo ABC construído.

Construção 14. Sejm $AA' = m_a$, $BB' = m_b$ e $CC' = m_c$ as três medianas dadas.

1. Construa o triângulo $AA'K$ sendo as medidas dos lados as medianas.
2. Determine o ponto médio de $\overline{AA'}$.
3. Construa as medianas e o baricentro de $AA'K$, o ponto B'.
4. Determine o ponto C' sobre a reta $\overleftrightarrow{LB'}$ tal que $C'L = LB'$.
5. Sobre a reta $\overleftrightarrow{AC'}$ determine um ponto B, tal que $AC' = C'B$.
6. Sobre a reta $\overleftrightarrow{AB'}$ determine um ponto C, tal que $AB' = B'C$.

Portanto, o triângulo ABC é solução do problema.

Capítulo 3

Circunferência

Nesse capítulo serão apresentadas definições e proposições importantes para as construções dos dez problemas de Apolônio realizadas no Capítulo 4.

3.1 Circunferência por três pontos não colineares

Sabe-se pela Proposição 2.4.1 que três pontos não colineares determinam uma única circunferência. Para construir uma circunferência que contenha três pontos dados, basta determinar a interseção entre as retas equidistantes desses pontos dois a dois, essas retas equidistantes são as mediatrizes. O ponto de interseção entre as mediatrizes é o centro da circunferência desejada. Portanto, se sabemos o centro e o seu raio a circunferência está determinada.

3.2 Homotetia

Definição 5. Homotetia com centro O e razão constante k, um número real e diferente de zero, é uma transformação que associa a cada ponto P do plano um ponto P' sobre a semirreta $\overrightarrow{OP}$, de origem O, tal que $OP' = k \cdot OP$.

O ponto P' é chamado de ponto homotético de P na homotetia com centro O e razão k. Existem dois tipos de homotetia, a direta e a inversa.

Definição 6. Homotetia direta é aquela em que k é um número positivo. Se $k > 1$ então P está entre O e P'. Se $0 < k < 1$ então P' está entre O e P.

Definição 7. Homotetia inversa é aquela em que k é um número negativo. Se $k < 0$ então O está entre P e P'.

Em uma homotetia, se $k = 1$, então o ponto homotético P' coincide com o ponto P.

Proposição 3.2.1. *Dois pares de pontos homólogos, A e A' ou B e B', determinam retas paralelas; ver Figura 3.1.*

Demonstração.

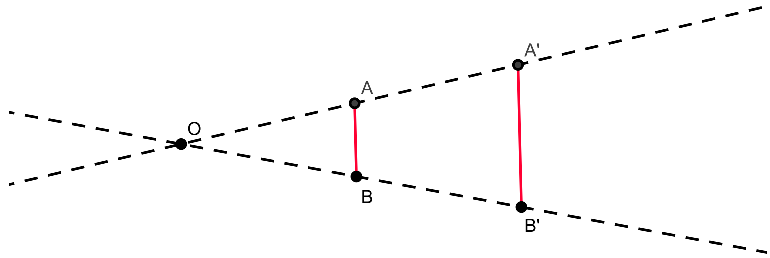

Figura 3.1: Pares de pontos homólogos.

Seja A' o homotético de A e B' o homotético de B com centro O.

Considere os triângulos AOB e $A'OB'$.

Temos que, $OA' = k \cdot OA$ e $OB' = k \cdot OB$.

Pelo critério $L.A.L$, o triângulo AOB é semelhante ao triângulo $A'OB'$.

Portanto, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são paralelos. ∎

Corolário 3.2.2. *Se A' é o homotético de A e B' de B com centro O então*

$$A'B' = k \cdot AB.$$

Segue dessa proposição e desse corolário, que duas circunferências são sempre homotéticas.

Problema 6. Construa os centros de homotetia direto e inverso de duas circunferências dadas.

Construção 15.

Dadas duas circunferências C, centro O, e C', centro O', temos

1. Construa uma reta que passe por O e O', pois o centro de homotetia e os pontos homotéticos são colineares por definição.

2. Construa um diâmetro $\overline{AB}$ em C.

3. Construa um diâmetro $\overline{CD}$ paralelo á $\overline{AB}$.

4. Construa as retas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

5. Determine a interseção H_d das retas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{OO'}$. O ponto H_d é centro da homotetia direta.

6. Determine a interseção H_i das retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{OO'}$. O ponto H_i é centro da homotetia inversa.

Portanto, H_d é o centro da homotetia direta e H_i da homotetia inversa; ver Figura 3.2.

Essa construção é importante, pois a homotetia entre circunferências facilita a resolução de problemas de tangência.

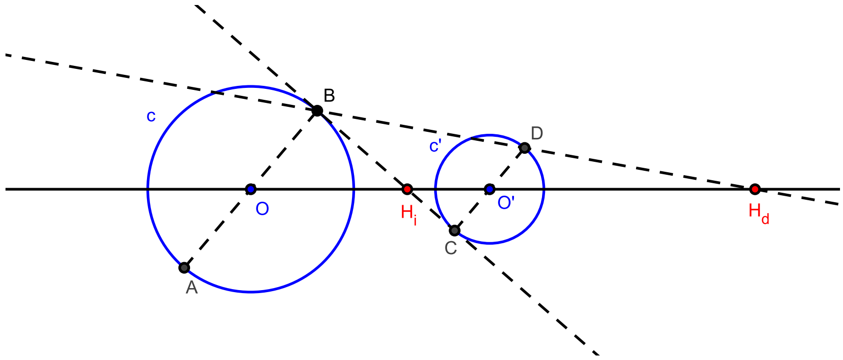

Figura 3.2: Centros de homotetia direto e inverso

Problema 7. Construa tangentes interiores e exteriores a duas circunferências dadas.

Construção 16.

Dadas duas circunferências C e C', temos que

1. Construa os centros de homotetia direta e inversa.
2. Determine o ponto médio M de $\overline{OH_i}$.
3. Construa a circunferência de centro em M e raio $\overline{MH_i}$. Essa circunferência intercepta C em T_1 e T_2. Os pontos T_1 e T_2 são pontos de tangência, pois os triângulos OT_1H_i e OT_2H_i são inscritos em uma semi circunferência.
4. Determine o ponto médio M' de $\overline{O'H_i}$.
5. Construa a circunferência de centro em M' e raio $\overline{M'H_i}$. Essa circunferência intercepta C' em T_3 e T_4. Os pontos T_3 e T_4 são pontos de tangência, pois os triângulos $O'T_3H_i$ e $O'T_4H_i$ são inscritos em uma semi circunferência.
6. Construa as retas $\overleftrightarrow{T_1T_4}$ e $\overleftrightarrow{T_2T_3}$.

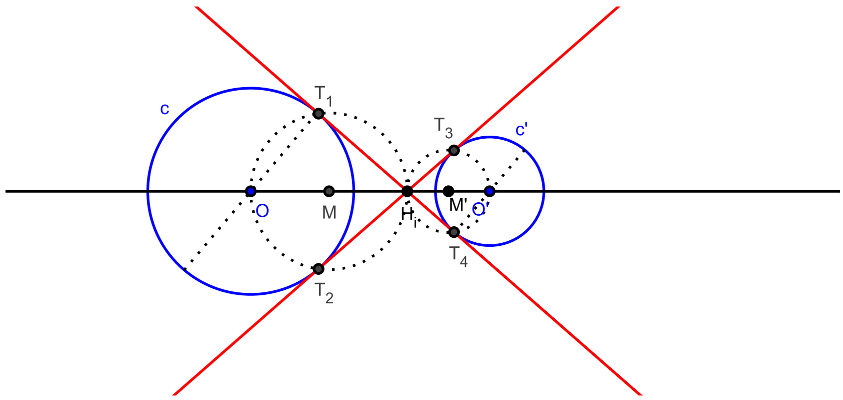

Figura 3.3: Tangentes interiores

Portanto, as retas $\overleftrightarrow{T_1T_4}$ e $\overleftrightarrow{T_2T_3}$ são tangentes internas as circunferências C e C'; ver Figura 3.3.

1. Determine o ponto médio M de $\overline{OH_d}$.

2. Construa a circunferência de centro em M e raio $\overline{MH_d}$. Essa circunferência intercepta C em T_1 e T_2. Os pontos T_1 e T_2 são pontos de tangência, pois os triângulos OT_1H_d e OT_2H_d são inscritos em uma semi-circunferência.

3. Determine o ponto médio M' de $\overline{O'H_d}$.

4. Construa a circunferência de centro em M' e raio $\overline{M'H_d}$. Essa circunferência intercepta C' em T_3 e T_4. Os pontos T_3 e T_4 são pontos de tangência, pois os triângulos $O'T_3H_d$ e $O'T_4H_d$ são inscritos em uma semi circunferência.

5. Construa as retas $\overleftrightarrow{T_1T_3}$ e $\overleftrightarrow{T_2T_4}$.

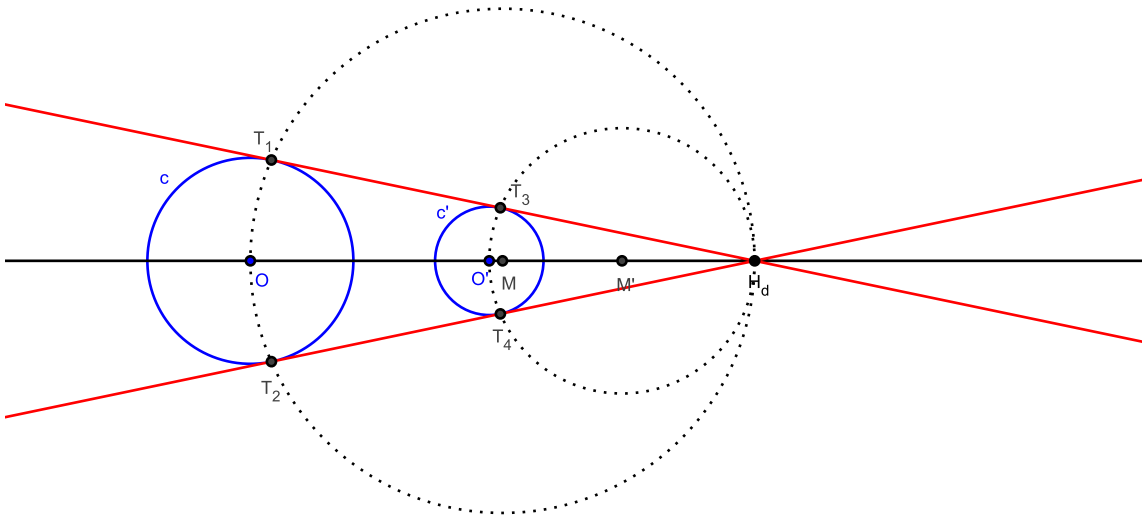

Figura 3.4: Tangentes exteriores

Portanto, as retas $\overleftrightarrow{T_1T_3}$ e $\overleftrightarrow{T_2T_4}$ são tangentes externas as circunferências C e C'; ver Figura 3.4.

Portanto, as retas $\overleftrightarrow{T_1T_4}$, $\overleftrightarrow{T_2T_3}$, $\overleftrightarrow{T_1T_3}$, $\overleftrightarrow{T_1T_3}$ e $\overleftrightarrow{T_2T_4}$ são tangentes às circunferências C e C'.

3.3 Potência e Eixo Radical

Os conceitos de potência e eixo radical facilitam bastante a resolução dos problemas de Apolônio. Antes de definir sobre potência de um ponto é necessário analisar algumas proposições sobre as relações métricas em uma circunferência e só assim formular um conceito sobre potência.

Proposição 3.3.1. *Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ duas cordas de uma circunferência que se intersectam no ponto P, então*

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD.$$

Demonstração.

Considere os triângulos PAC e PBD; ver Figura 3.5.

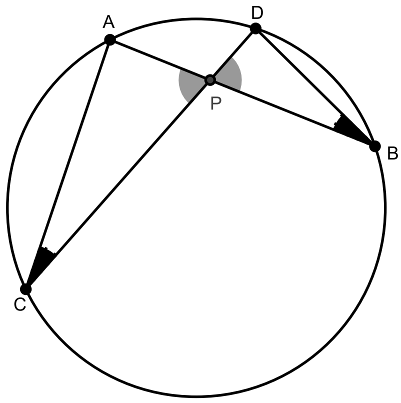

Figura 3.5: Cordas concorrentes

Observe que os ângulos $A\hat{P}C$ e $D\hat{P}B$ são opostos pelo vértice, então congruentes. E os ângulos $A\hat{C}P$ e $D\hat{P}B$ também são congruentes, pois são ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco.

Logo, os triângulos PAC e PBD são semelhantes.

Então,

$$\frac{AP}{PD} = \frac{CP}{PD}.$$

Portanto,

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD.$$

■

Proposição 3.3.2. *Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ duas retas secantes a uma circunferência que se intersectam no ponto P, então*

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD.$$

Demonstração.

Considere os triângulos PAD e PBC; ver Figura 3.6.

Observe que o ângulo $A\hat{P}C$ é comum a ambos os triângulos e os ângulos $C\hat{B}P$ e $A\hat{D}P$, ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco. Logo, os triângulos PAD e PBC são semelhantes.

Então,

$$\frac{CP}{AP} = \frac{PB}{PD}.$$

Portanto,

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD.$$

■

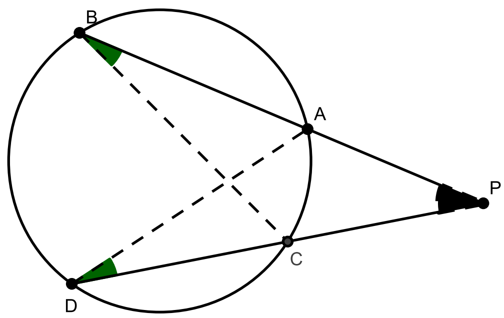

Figura 3.6: Retas secantes

Proposição 3.3.3. *Sejam $\overline{AP}$ tangente a uma circunferência e $\overline{BD}$ secante que se intersectam no ponto P, então*

$$AP^2 = PB \cdot PC.$$

Demonstração.

Considere os triângulos APB e ACP; ver Figura 3.7.

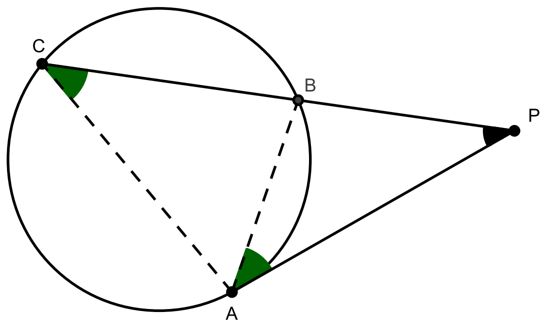

Figura 3.7: Interseção entre tangente e secante

Observe que o ângulo $A\hat{P}C$ é comum a ambos os triângulos e os ângulos $P\hat{A}B$ e $P\hat{A}C$, ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco. Logo, os triângulos ABP e ACP são semelhantes.

Então,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PA}.$$

Portanto,

$$PA^2 = PB \cdot PC.$$

■

Agora, podemos definir o conceito de potência de um ponto.

Definição 8. Sejam uma circunferência C, de centro O e raio r, e um ponto P, ambos contidos no mesmo plano então a potência de P em relação à C é

$$Pot(P) = (PO)^2 - r^2.$$

O valor da potência de um ponto depende de sua posição em relação à circunfeência.

Proposição 3.3.4. *A potência de um ponto P em relação à uma circunferência C é*

a) *Se P pertence à C, então*

$$Pot(P) = 0.$$

b) *Se P é interior à C e a reta conduzida por P intercepta C em A e B, então*

$$Pot(P) = -PA \cdot PB.$$

c) *Se P é exterior à C e a reta conduzida por P intercepta C em A e B, então*

$$Pot(P) = PA \cdot PB.$$

Demonstração.

a) Se P pertence à circunferência, então $PO = r$. Portanto,

$$Pot(P) = 0.$$

b) Se P pertence ao interior, então pela Proposição 3.3.1, temos

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD.$$

Logo,

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD = (r + PO)(r - PO) = r^2 - (PO)^2.$$

Portanto,

$$Pot(P) = -PA \cdot PB.$$

c) Se P pertence ao exterior, então pela Proposição 3.3.2, temos

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD.$$

Logo,

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD = (PO + r)(PO - r) = (PO)^2 - r^2.$$

Portanto,

$$Pot(P) = PA \cdot PB.$$

■

Corolário 3.3.5. *Se o ponto O é o centro da circunferência de raio r, então*

$$Pot(O) = -r^2.$$

Agora, pode-se definir eixo radical porque esse conceito está diretamente ligado ao de potência de um ponto.

Definição 9. Eixo radical é o lugar geométrico dos pontos que possuem a mesma potência com relação a duas circunferências não concêntricas, ou seja,

$$Pot_c(P) = Pot_{c'}(P).$$

Proposição 3.3.6. *O eixo radical de duas circunferências é uma reta perpendicular à reta conduzida pelos seus centros.*

Demonstração. Sejam as circunferências C de centro O e raio r e circunferência C' de centro O' e raio r'. Se X é um ponto do lugar geométrico tem-se, por definição:

$$(XO)^2 - r^2 = (XO')^2 - r'^2, \text{ ou } (XO)^2 - (XO')^2 = r^2 - r'^2 = constante.$$

Pela última igualdade, mostra que todo ponto P equipotente possui a diferença dos quadrados a O e O' constante, sendo o lugar geométrico 2.14. Logo, P pertence a uma reta perpendicular a reta $\overleftrightarrow{OO'}$. ■

Corolário 3.3.7. *As potências em relação as duas circunferências dadas, de um ponto comum a essas duas circunferências são iguais, pois ambas são zero.*

Pode-se concluir que o eixo radical de duas circunferências que se intercectam é a reta determinada por seus pontos de interseções.

Corolário 3.3.8. *O eixo radical de duas circunferências secantes é a reta que passa pelos seus pontos de interseções.*

Proposição 3.3.9. *Se de um ponto P qualquer do eixo radical de duas circunferências for traçadas tangentes as essas circunferências, então os segmentos tangentes possuem as mesmas medidas.*

Demonstração. Sejam as circunferências $C(O, r)$ e $C'(O', r')$ e um ponto Q do eixo radical; ver Figura 3.8.

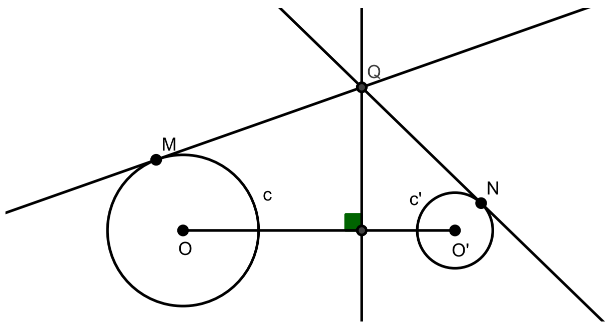

Figura 3.8: Segmentos tangentes

Considere o segmento $\overline{QM}$ tangente á circunferência C e $\overline{QN}$ tangente à C'.
Logo,

$$Pot_c(Q) = Pot_{c'}(Q).$$

Então,

$$(QM)^2 = (QN)^2.$$

Portanto,

$$QM = QN.$$

■

Problema 8. Construa o eixo radical de duas circunferências não concentricas.

a) Se as duas circunferências são secantes.

b) Se as duas circunferências são tangentes em T.

c) Se as duas circunferências são exteriores.

d) Se as circunferências são interiores.

Construção 17.

a) Se as duas circunferências são secantes, então o eixo radical é a reta que une seus pontos comuns.

b) Se as duas circunferências são tangentes em T, então o eixo radical é a reta tangente comum conduzida pelo ponto T. Lembre que o eixo radical é perpendicular à reta conduzida pelos centros.

c) Se as duas circunferências são exteriores, temos

1. Construa uma circunferência de centro e raio arbitrário que seja secante as circunferências $C(O, r)$ e $C'(O', r')$ dadas.
2. Determine os pontos A e B de interseção entre a circunferência arbitrária e C.
3. Determine os pontos C e D de interseção entre a circunferência arbitrária e C'.
4. Determine o ponto R de interseção entre as duas circunferências.
5. Construa a reta conduzida por $\overleftrightarrow{OO'}$.
6. Construa a reta r perpendicular a $\overleftrightarrow{OO'}$ passando por R.

Portanto, a reta r é o eixo radical; ver Figura 3.9.

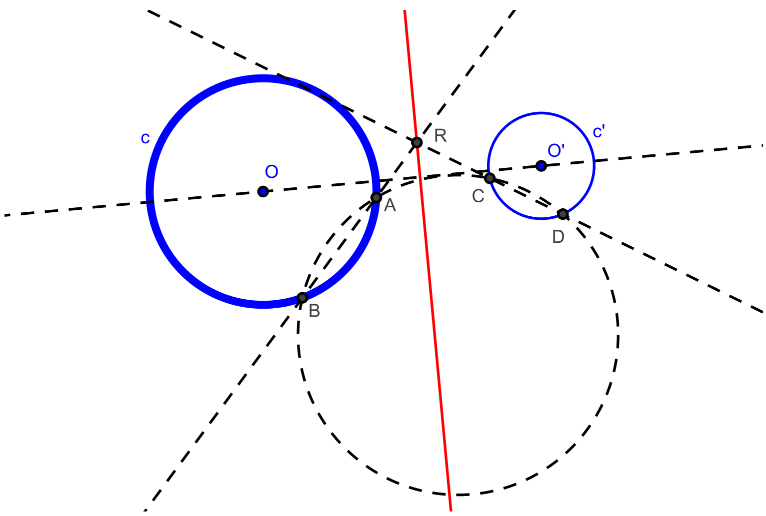

Figura 3.9: Eixo radical de duas circunferências exteriores

Justificativa Observe que o eixo radical é perpendicular a reta conduzida pelos pontos O e O', logo basta determinar um de seus pontos e por ele traçar a reta perpendicular à OO'. Analisando as potências dos pontos A, B, C e D em relação a circunferência arbitrária, temos

$$Pot(R) = RB \cdot RA = RD \cdot RC. \ \mathbf{(1)}$$

Entretanto,

$$Pot_c(R) = RB \cdot RA \text{ e } Pot_{c'}(R) = RD \cdot RC.$$

Por **(1)**,

$$Pot_c(R) = Pot_{c'}(R).$$

Logo, o ponto P pertence ao eixo radical. Portanto, a reta r é o eixo radical.

d) Se as duas circunferências são interiores então a construção é feita da mesma forma que para o caso das circunferências serem exteriores. E a justificativa é feita de modo análogo.

Capítulo 4

Os Problemas de Apolônio

Os problemas de tangências de Apolônio dividiram-se em dez casos determinados pela combinação de três elementos entre circunferências, retas e pontos. O conhecimento desses problemas encontram-se na introdução do livro II da obra Coleção Matemática escrita por Pappus, ver [7], essa obra cita alguns casos do tratado Tangências de Apolônio de Perga. Segundo Boyer, ver [2], os dois casos mais fáceis (três pontos ou três retas) aparecem em Os Elementos de Euclides e os outros seis no livro I e II de Tangências. Sabe-se que Apolônio construiu os noves primeiros e acredita-se que foi Newton o primeiro matemático a resolver o último usando apenas régua e compasso. Segundo Pappus, ver [7], os problemas apareciam com o seguinte enunciado: *Dados três elementos, cada um dos quais pode ser pontos, retas ou circunferências, construir uma circunferência que passa pelo(s) ponto(s) e ser tangente a cada uma das linhas dadas.*

Os dez casos são:

Problema 1: Construir uma circunferência que passe por três pontos dados (PPP);

Problema 2: Construir uma circunferência tangente a três retas dadas (RRR);

Problema 3: Construir uma circunferência que passe por dois pontos dados e tangente a uma reta dada (PPR);

Problema 4: Construir uma circunferência que passe por dois pontos dados e tangente a uma circunferência dada (PPC);

Problema 5: Construir uma circunferência que passe por um ponto dado e tangente a duas retas dadas (PRR);

Problema 6: Construir uma circunferência que passe por um ponto dado e tangente a duas circunferências dadas (PCC);

Problema 7: Construir uma circunferência tangente a duas retas dadas e a uma circunferência dada (CRR);

Problema 8: Construir uma circunferência que passe por um ponto e tangente a uma reta dada e uma circunferência dada (PRC);

Problema 9: Construir uma circunferência tangente a uma reta dada e a duas circunferências dadas (RCC);

Problema 10: Construir uma circunferência tangente a três circunferências dadas (CCC).

As soluções desses problemas exigem apenas o uso de régua e compasso.

4.1 Problema 1 (PPP)

O problema 1 consiste na construção de uma circunferência que passe por três pontos dados.

Construção 18. A construção é para pontos não colineares, pois caso os fossem não teria solução. Esse problema já foi resolvido no seção 2.1.1

4.2 Problema 2 (RRR)

Tem-se para esse problema cinco subcasos, são eles: as três retas serem paralelas, ou coincidentes, ou concorrentes duas a duas, ou concorrentes no mesmo ponto, ou duas paralelas e uma secante a ambas. Para o subcaso de serem ambas paralelas entre si ou concorrentes em um ùnico ponto não existe solução, entretanto caso sejam coincidentes teríamos infinitas soluções.

Agora para retas concorrentes duas a duas temos quatro soluções, uma circunferência C_1 inscrita ao triângulo formado pelos pontos de concorrência e as outras três C_2, C_3 e C_4 são externas a esse triângulo como ilustrado na Figura 4.1.

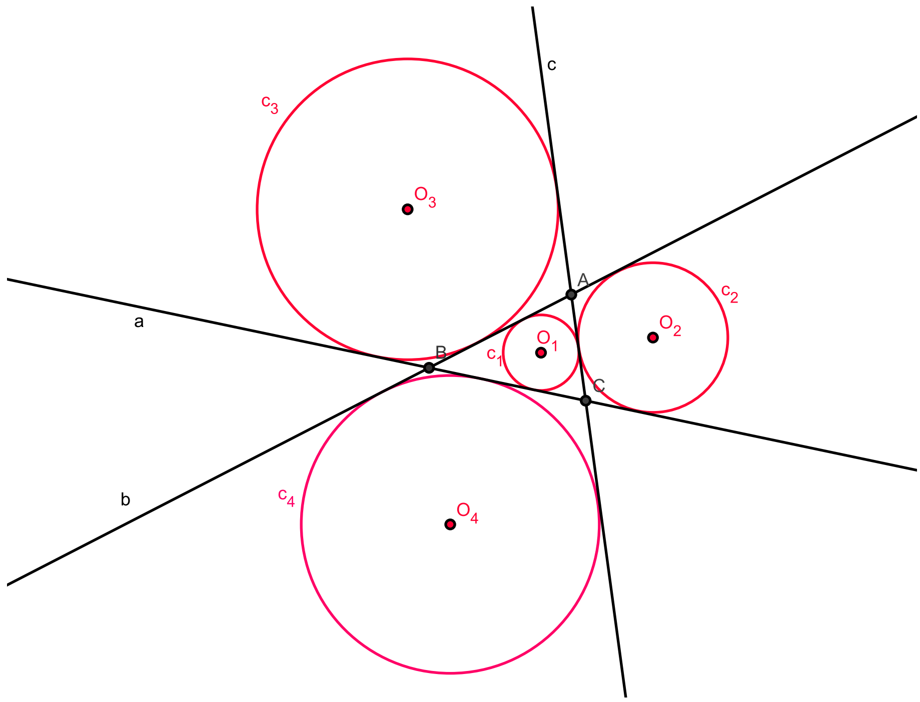

Figura 4.1: Problema 2: Duas retas concorrentes

Para construir C_1 basta construir a circunferência interna ao triângulo ABC, vamos analisar a construção de C_2 e de modo análogo temos as construções de C_3 e C_4. Para a construção de C_2 é necessário determinar seu centro, bissetrizes dos ângulos externos ao triângulo, e o raio, perpendicular a reta b passando por O_2; ver Figura 4.2.

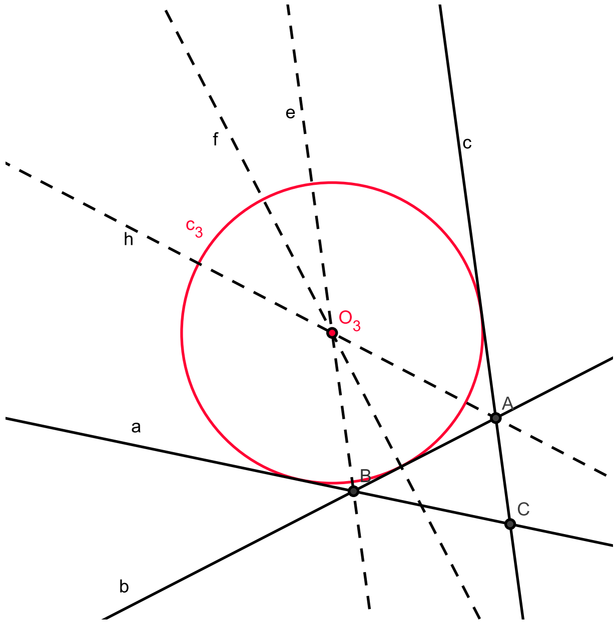

Figura 4.2: Problema 2: Solução externa ao triângulo.

O último subcaso sendo duas retas paralelas e uma terceira secante a ambas gera duas soluções as circunferências C_1 e C_2, ilustrada na Figura 4.2.

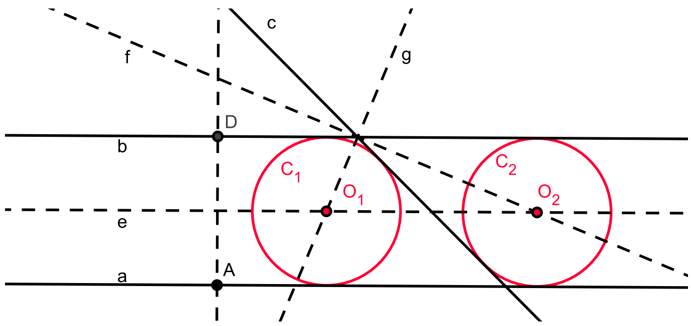

Figura 4.3: Problema 2: Duas retas paralelas.

Observe que o raciocínio para a construção das circunferências C_1 e C_2 são análogos, e para tal basta determinar o centro e o raio de ambas. O centro O_1 de C_1 é equidistante de ambas as retas dadas, logo, é o ponto de interseção entre a reta equidistante das duas retas paralelas a e b e entre a reta equidistante das duas retas concorrentes b e c, e o raio é a metade da distância entre as duas retas paralelas.

4.3 Problema 3 (PPR)

Tem-se para esse problema três subcasos, são eles: os pontos estão em semiplanos distintos da reta dada, os pontos pertencem ao mesmo semiplano ou pertencem à reta dada. Caso os pontos estejam em semiplanos distintos ou pertençam à reta dada não existe solução. Para o mesmo semiplano temos duas ou uma solução dependendo da posição dos dois pontos, como ilustrado a seguir:

Caso 1. Existe uma única solução, a circunferência C_1, se os pontos dados estão contidos em uma reta paralela à reta dada.

Construção 19. Faça a mediatriz, a reta d, de P e P', pois o centro da circunferência é equidistante de ambos os pontos. Essa reta intercepta a reta a dada no ponto T. Como o ponto T é outro ponto pertencente a circunferência, precisa-se construir uma circunferência que passe por três pontos P, P' e T, portanto a construção é feita pelo primeiro problema de Apolônio (PPP) resolvida anteriormente no problema 1 (Figura 4.4).

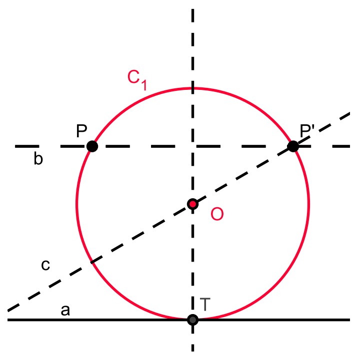

Figura 4.4: Problema 3: Os dois pontos dados colineares e paralelos a reta dada.

Caso 2. Têm-se duas soluções, as circunferências C_1, centro O_1, e C_2,centro O_2, quando os dois pontos não pertencem a uma reta paralela; ver Figura 4.5.

Construção 20. Dados os pontos P e P' e a reta a, temos

1. Construa uma reta por P e P', essa reta intercepta a reta a no ponto R.
2. Construa a média proporcional RX de $\overline{PP'}$ e $\overline{PR}$, pois,
$$Pot.(R, C_1) = (RT)^2 = RP \cdot RP',$$
$$Pot.(R, C_2) = (RT')^2 = RP \cdot RP'.$$
Logo, $RT = RT' = \sqrt{RP \cdot RP'} = RX$.
3. Construa uma circunferência de centro R e raio $\overline{RX}$, essa circunferência intercepta a reta a dada nos pontos T e T'.
4. Construa uma circunferência C_1 que contenha os pontos P, P' e T, esse procedimento é dado pelo problema 1 de Apolônio (PPP).
5. Construa uma circunferência C_2 que contenha os pontos P, P' e T', esse procedimento é dado pelo problema 1 de Apolônio (PPP).

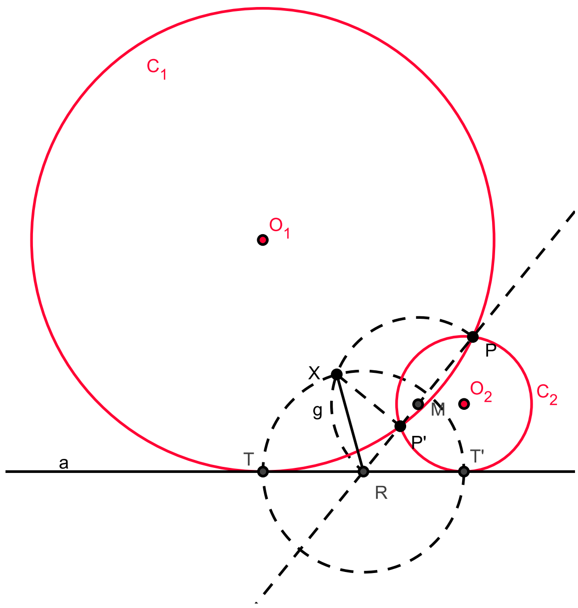

Figura 4.5: Problema 3: Os dois pontos dados não são paralelos a reta dada.

4.4 Problema 4 (PPC)

Tem-se para esse problema três subcasos, são eles: Os pontos dados P e Q estão em regiões distintas da circunferência dada, os pontos ambos no interior ou ambos no exterior. Se P e Q estejam em regiões distintas da circunferência não existe solução. Se ambos os pontos estão no exterior ou no interior têm-se duas soluções, as circunferências C_1 e C_2, ilustradas na Figura 4.6.

Construção 21. Dados os pontos P e Q e a circunferência c de centro C, temos

1. Construa a mediatriz b do segmento $\overline{PQ}$.
2. Escolha um ponto Y, sobre a mediatriz de $\overline{PQ}$ tal que a circunferência de centro Y contenha P e Q e seja secante a circunferência de centro c.
3. Construa uma circunferência de centro Y que passe por P e Q. Essa intercepta a circunferência dada nos pontos M e N. Observe que a reta $\overleftrightarrow{MN}$ é o eixo radical das circunferências de centro em Y e C.
4. Determine o ponto R como a interseção entre as retas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{PQ}$. Note que $Pot(R, C) = Pot(R, Y) = RP \cdot RQ$ e PQ é o eixo radical de qualquer circunferência solução, pois estas precisam conter P e Q.
5. Determine o ponto médio, M', do segmento $\overline{RC}$.
6. Construa uma circunferência de centro M' e raio $\overline{M'C}$. Essa intercepta a circunferência de centro C em E e E'. Esses pontos determinados são os pontos de tangências, pois $Pot(R, C) = RP \cdot RQ = RE^2 = RE'^2$.

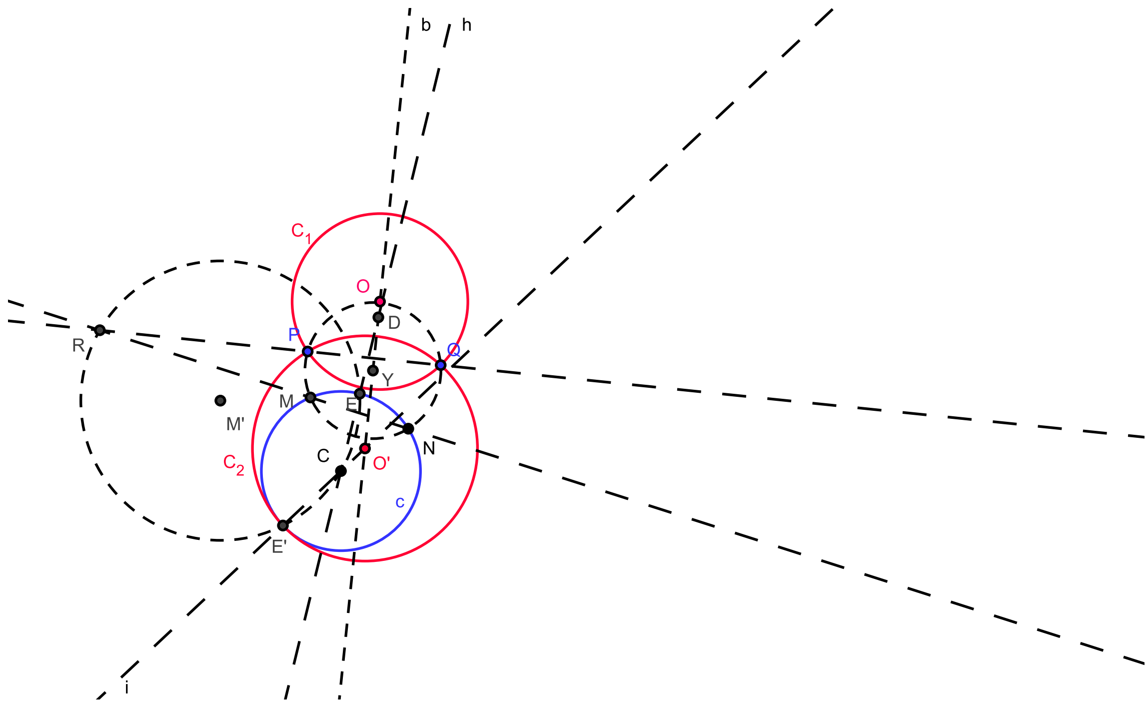

Figura 4.6: Problema 4: Os pontos são exteriores ou interiores à circunferência dada.

7. Construa as retas $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{CE'}$.

8. Determine a interseção O da reta $\overleftrightarrow{CE}$ com a mediatriz do segmento $\overline{PQ}$, pois O, C e E são colineares.

9. Determine a interseção O' da reta $\overleftrightarrow{CE'}$ com a mediatriz do segmento $\overline{PQ}$, pois O', C e E são colineares.

10. Construa as circunferências C_1 e C_2, centros em O e O', respectivamente, ambas contendo P e Q.

Portanto, C_1 e C_2 são soluções do problema; ver Figura 4.6.

4.5 Problema 5 (PRR)

Tem-se para esse problema cinco subcasos, são eles: duas retas paralelas e o ponto pertencem à região externa a ambas, duas retas paralelas e o ponto no interior a ambas, duas retas paralelas e o ponto pertence a uma delas, duas retas concorrentes e um ponto não pertencente a elas ou duas retas concorrentes e um ponto pertencente a uma delas. O problema é impossível quando o ponto pertence a uma região externa a ambas retas paralelas. Note que independente do subcaso o centro da circunferência, a solução, é equidistante as duas retas. Analisa-se a seguir o subcaso de duas retas concorrentes e um ponto não pertencente a elas, para tal existe duas soluções as circunferências C_1 e C_2, como ilustrado na Figura 4.7.

Construção 22. Dadas às retas a e b e o ponto P, temos,

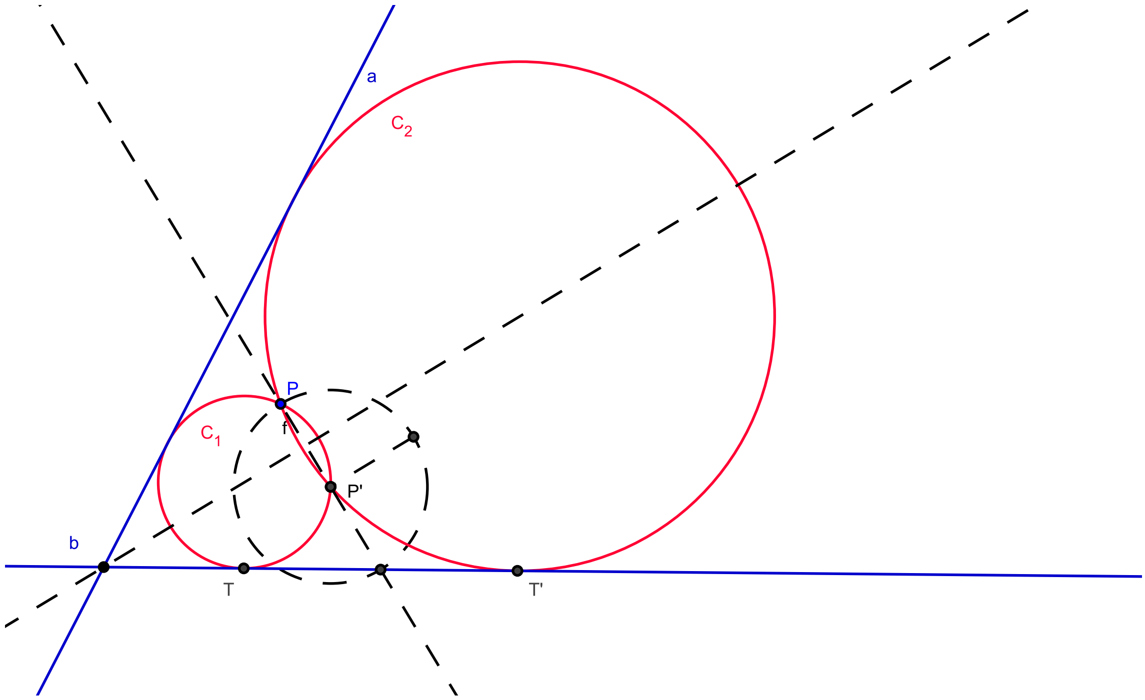

Figura 4.7: Problema 5: Duas retas concorrentes e um ponto não pertencente a ela.

1. Construa a bissetriz do ângulo formado pelas retas concorrentes.
2. Determine o simétrico P' de P com relação a bissetriz.
3. Construa a circunferência que passa por P, P' e tangente a reta a. Para essa construção deve-se fazer o problema de Apolônio (PPR). Assim, obtém-se duas soluções, as circunferências C_1 e C_2.

Os demais subcasos a seguir apresentam apenas uma exemplificação do número de soluções.

Sejam duas retas paralelas e um ponto no interior a ambas. Nesse contexto existem duas soluções, C_1 e C_2; ver Figura 4.8.

Para duas retas paralelas e um ponto pertencente a uma delas existe apenas uma solução, C_1; ver Figura 4.9.

Finaliza-se com o subcaso de duas retas concorrentes e um ponto pertencente a uma delas, nesse cenário, existem duas soluções C_1 e C_2; ver Figura 4.10.

Para os Problemas 6 à 10 apresenta-se apenas uma construção e suas respectivas justificativas, ou seja, não serão apresentas todas as situações possíveis.

4.6 Problema 6 (PCC)

Dados duas circunferências não secantes e um ponto P exterior a ambas, temos para tal situação quatro soluções, as circunferências, C_1, C_2, C_3 e C_4.

Construção 23. Sejam as circunferências de centros C e C' e o ponto P, temos

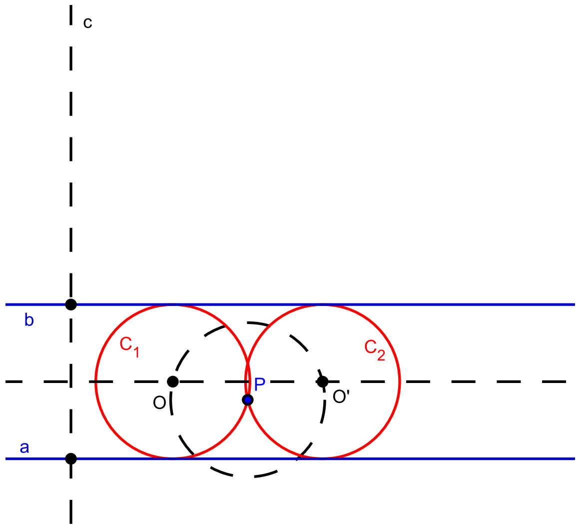

Figura 4.8: Problema 5: Duas retas paralelas e um ponto no interior a ambas.

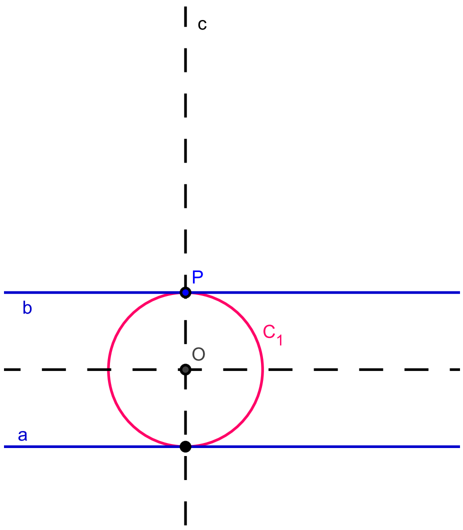

Figura 4.9: Problema 5: Duas retas paralelas e um ponto pertencente a uma delas.

1. Construa os centros de homotetia inversa e direta, os pontos H_i e H_d, respectivamente. Lembre que os centros de homotetia e os centros das circunferências dadas são colineares.

2. Construa a reta que passa por C e C'; ver Figura 4.11.

   Vamos dividir essa construção em duas etapas e em cada etapa encontram-se duas soluções, cada uma delas irá tomar um centro de homotetia.

   1ª Parte:

3. Determine as interseções M e N da reta $\overleftrightarrow{CC'}$ com as circunferências de centros C e C', respectivamente. Esses pontos são pontos inversos um do outro com relação ao ponto H_d e a potência é a mesma que a razão de homotetia de centro H_d.

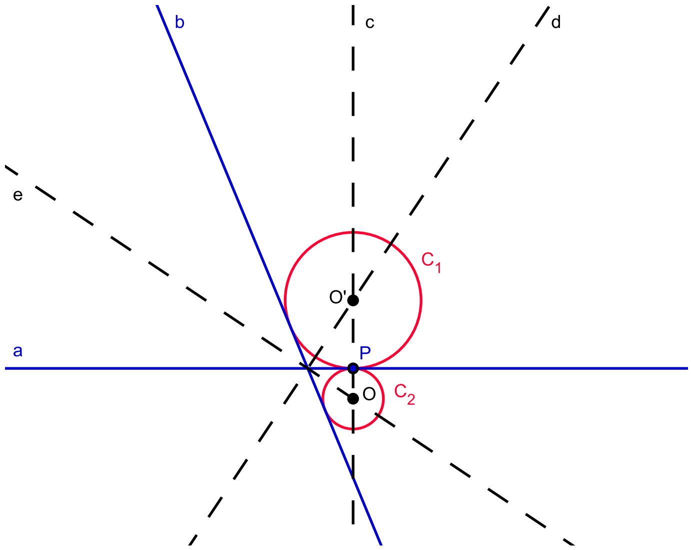

Figura 4.10: Problema 5: Duas retas concorrentes e um ponto pertencente a uma delas.

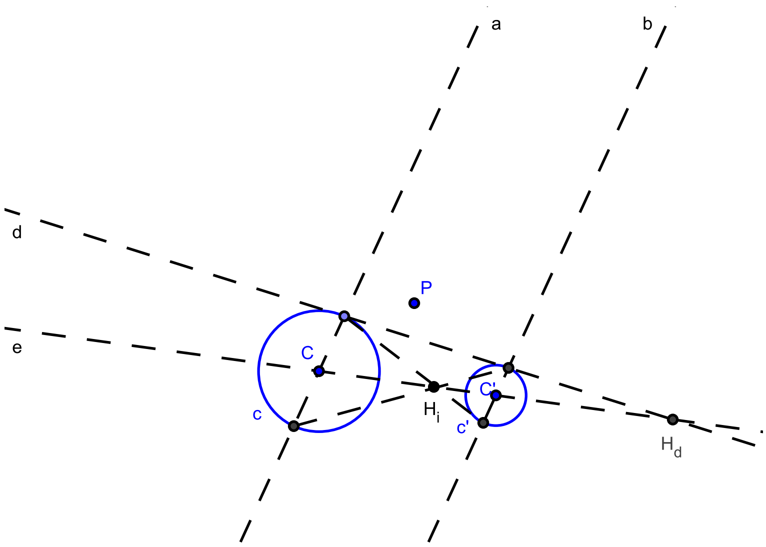

Figura 4.11: Problema 6: Centro de homotetia direto e inverso.

4. Construa uma circunferência que passa por P, M e N. Esta circunferência determina com as circunferências dadas os eixos radicais.

5. Determine o ponto P', esse ponto é dado pela interseção entre a reta $\overleftrightarrow{PH_d}$ e o eixo radical.

6. Determine os pontos de tangência T_1 e T_1', dados pela interseção entre circunferência de diâmetro C_1P' e a circunferência dada. Os pontos T_1 e T_1' são de tangência, pois
$$P'T_1^2 = P'M \cdot P'N.$$

7. Determine os pontos T_2 e $T_{2'}$, de modo análogo, pelo outro eixo radical.

8. Construa a circunferência c_1 que passe pelos pontos T_1, P e T_2. Essa construção é dada pelo caso (PPP).

9. Construa a circunferência c_2 que passe pelos pontos T_1', P e T_2'. Essa construção é dada pelo caso (PPP).

   Portanto, c_1 e c_2 são as duas primeiras soluções encontradas; ver Figura 4.12.

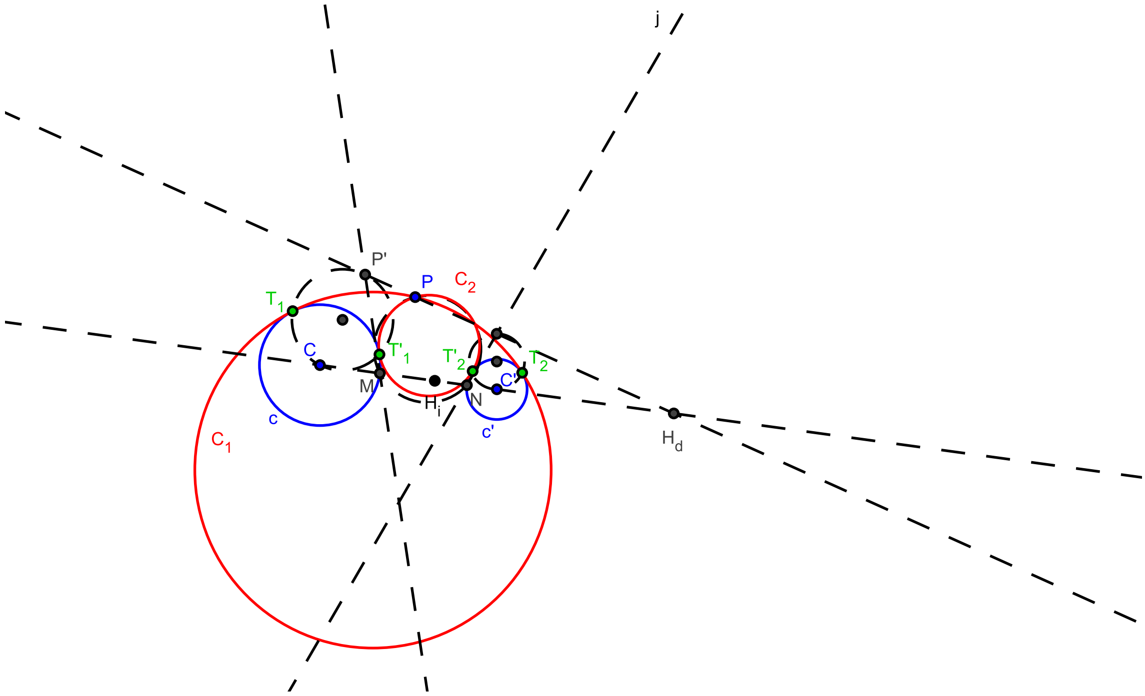

Figura 4.12: Problema 6: 1ª Parte.

2ª Parte:

10. Construa de forma semelhante, outras duas circunferências considerando como centro de homotetia inversa, o ponto H_i.

    Portanto, C_3 e C_4 também são soluções do problema; ver Figura 4.13.

Finalizando as duas etapas encontram-se 4 soluções C_1, C_2, C_3 e C_4; ver Figura 4.14.

Essas quatro soluções são as únicas, pois as soluções devem conter o ponto P', ou P'', e o ponto P, logo para cada centro de homotetia há apenas duas circunferências que são tangentes a circunferência dada.

4.7 Problema 7 (CRR)

Esse caso não possui solução se as retas são paralelas e exteriores à circunferência ou se uma das retas está entre a outra reta e a circunferência.

Analisa-se o subcaso em que as duas retas são concorrentes e exteriores à uma circunferência, temos para tal situação quatro soluções, as circunferências, C_1, C_2, C_3 e C_4. Como a solução desejada é tangente a duas retas concorrentes então seu centro é equidistante a ambas. Essa circunferência também é tangente à circunferência dada, logo a distância entre os centros é a soma ou a diferença entre os raios. Ao longo da construção iremos cair no caso (RRP).

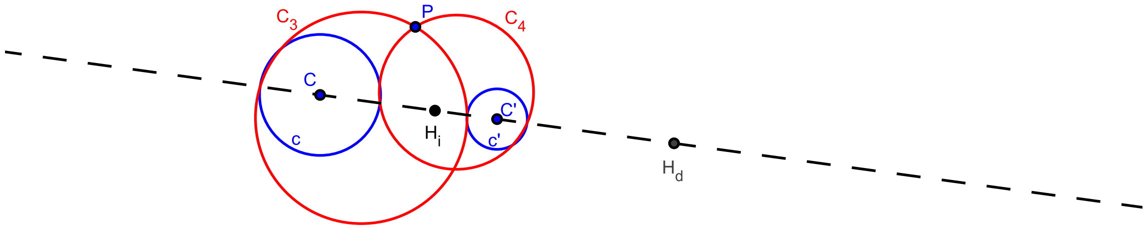

Figura 4.13: Problema 6: 2ª Parte.

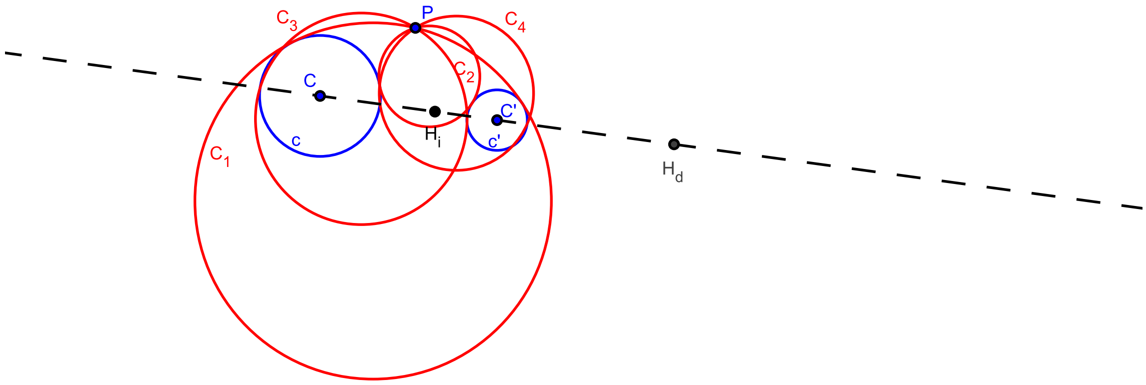

Figura 4.14: Problema 6: 1ª Parte e 2ª Parte.

Construção 24. Sejam duas retas concorrentes, t e t', e a circunferência de centro C, temos que

1. Construa a perpendicular t passando por C.

2. Determine o ponto D, interseção entre essa perpendicular e a circunferência de

centro C. Observe que o segmento $\overline{CD}$ é o raio da circunferência de centro C, tome $CD = r$.

3. Construa o par de retas paralelas a t a uma distância r. Essas retas são g e h.

4. Construa o par de retas paralelas a t' a uma distância r, essas retas são d e e. Observe que as quatro retas e, g, h e d formam dois pares de retas (e e g; d e h), tal que a distância entre elas é, respectivamente, igual a $x + r$ ou $x - r$; ver Figura 4.15.

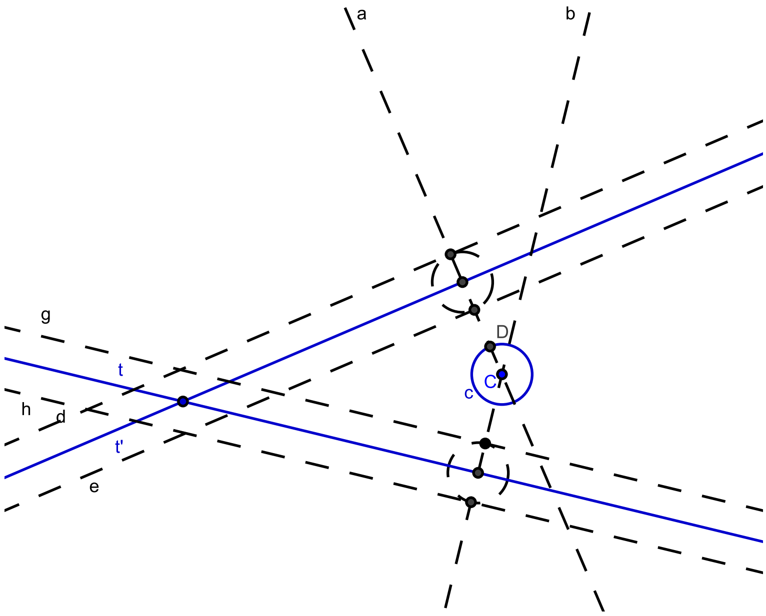

Figura 4.15: Problema 7: Retas auxiliares.

Vamos dividir essa construção em duas etapas e em cada etapa encontram-se duas soluções.

1ª Parte:

5. Construa circunferências auxiliares tangentes às retas d e h passando pelo ponto C, para tal construção recaímos ao caso (RRP).

6. Determine os centros das circunferências auxiliares, os pontos O e O'. Note que O e O' também são os centros das soluções desejadas, pois seu raio é r unidades menores.

7. Construa perpendiculares a t passando pelos pontos O e O'.

8. Determine as interseções F e F' das perpendiculares construídas, no passo anterior, com a reta.

9. Construa circunferências, C_1 e C_2, de centros O e O' passando, respectivamente, pelos pontos F e F'.

   Logo, C_1 e C_2 são soluções desse subcaso; ver Figura 4.16.

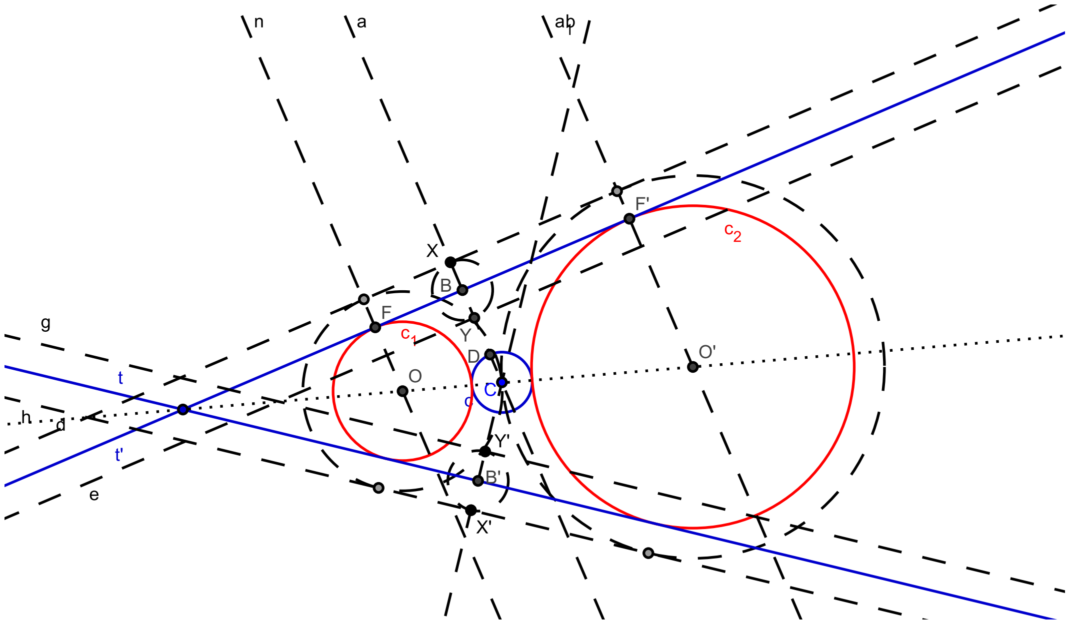

Figura 4.16: Problema 7: 1ª Parte.

2ª Parte:

10. Repita o mesmo procedimento para as retas g e e. Com isso existem mais duas soluções, as circunferências C_2 e C_3; ver Figura 4.17.

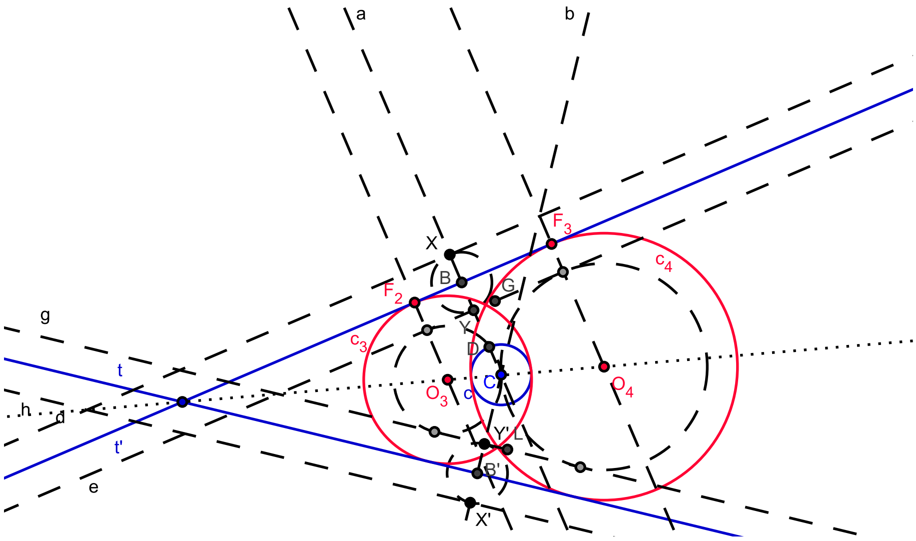

Figura 4.17: Problema 7: 2ª Parte.

Todas as soluções são C_1, C_2, C_3 ou C_4; ver Figura 4.18.

4.8 Problema 8 (PRC)

Esse problema possui vários subcasos e com isso varia o número de soluções. Se o ponto é comum à circunferência e a reta então existe infinitas soluções. Se o ponto pertence ao

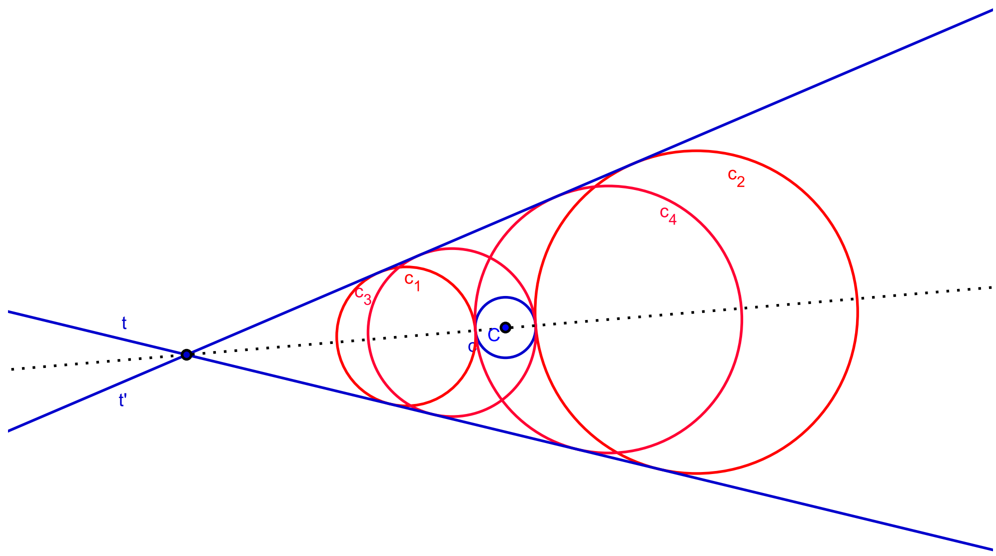

Figura 4.18: Problema 7: 1ª Parte e 2ª Parte.

interior da circunferência e a reta não é secante a ela logo não possui solução. No subcaso a ser analisado os três elementos não se interceptam.

Construção 25. Sejam um ponto P, uma circunferência de centro C e uma reta t, temos que

1. Construa a perpendicular a t passando por C.

2. Determine o ponto M, interseção entre a perpendicular e a reta t.

3. Determine as interseções H e K da perpendicular com a circunferência de centro C; ver Figura 4.19.

   Vamos dividir essa construção em duas etapas e cada etapa encontram-se duas soluções.

   1ª Parte:

4. Construa uma circunferência auxiliar que contenha os pontos K, M e P.

5. Construa a reta $\overleftrightarrow{HP}$.

6. Determine P' interseção da reta $\overleftrightarrow{HP}$ com a circunferência auxiliar. Observe que a potência de H com respeito a circunferência auxiliar é igual a qualquer potência que contenha os pontos P e P'.

7. Construa a circunferência que passe por P, P' e tangente a reta t. Para essa construção realize o caso (PPR).

   São duas soluções obtidas, as circunferências C_1 e C_2; ver Figura 4.20.

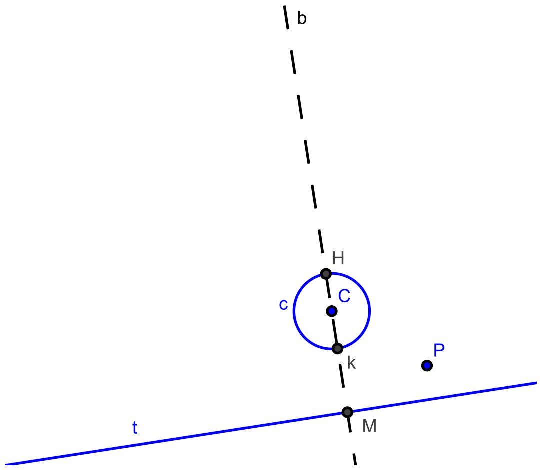

Figura 4.19: Problema 8.

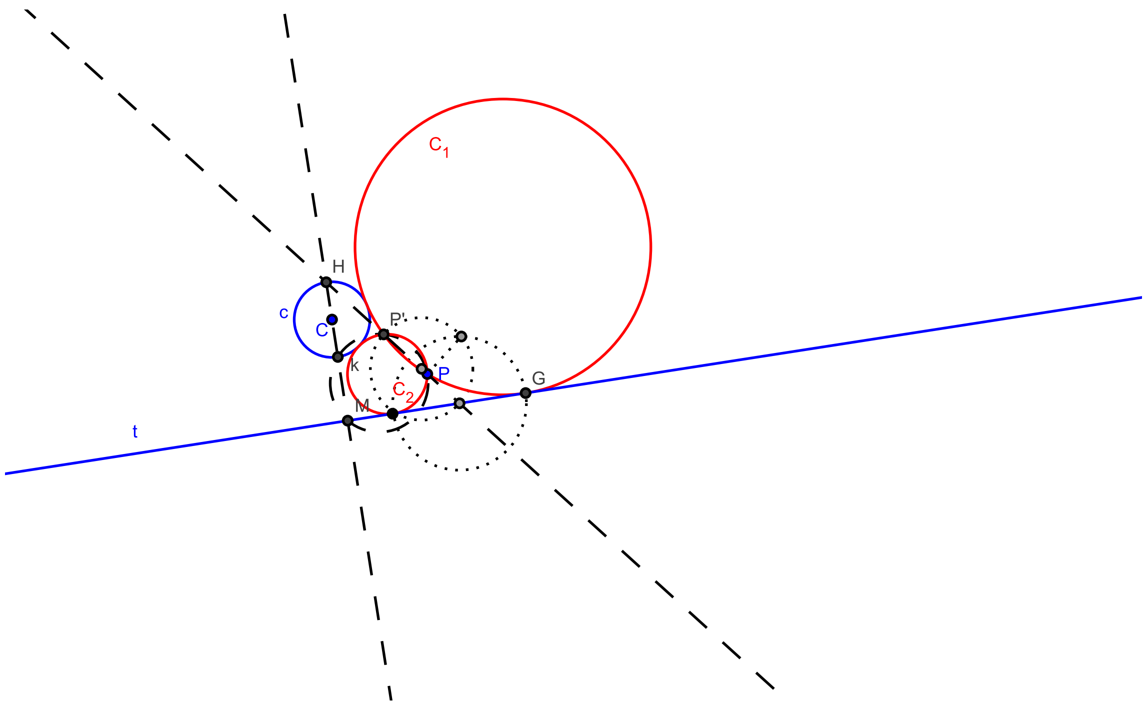

Figura 4.20: Problema 8: 1ª Parte.

2ª Parte:

8. Repita o mesmo procedimento desenvolvido na 1ª Parte substituindo o ponto H por K.

   Encontram-se duas soluções, as circunferências C_3 e C_4; ver Figura 4.21.

   Ao final das duas etapas temos as soluções C_1, C_2, C_3 e C_4; ver Figura 4.22.

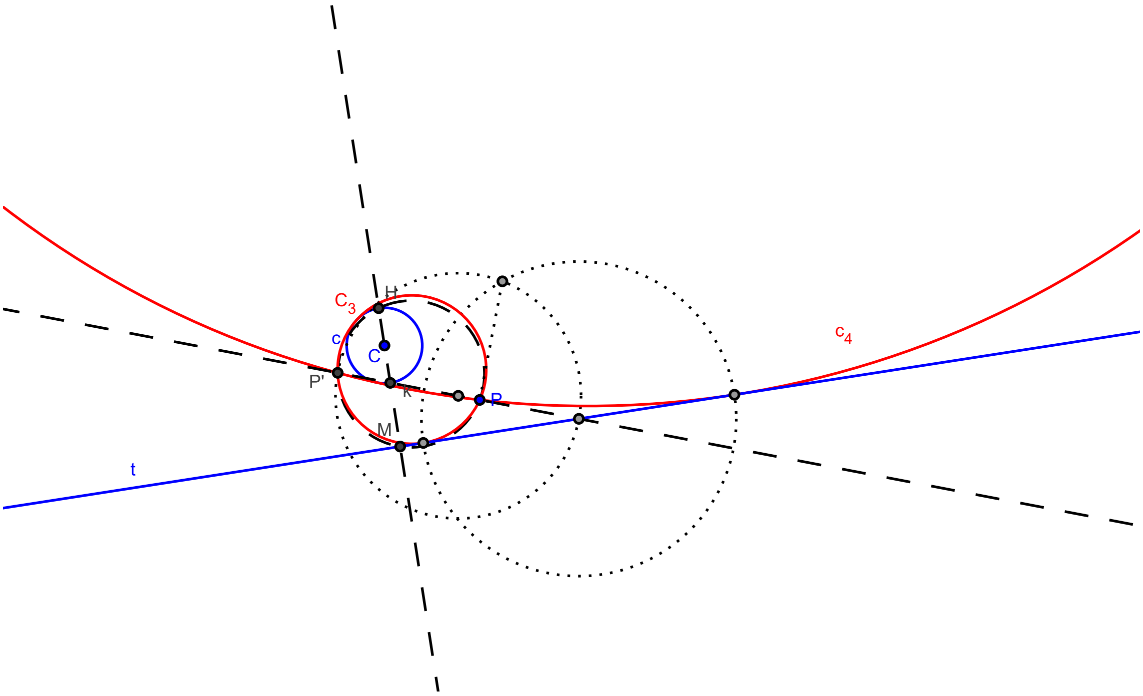

Figura 4.21: Problema 8: 2ª Parte.

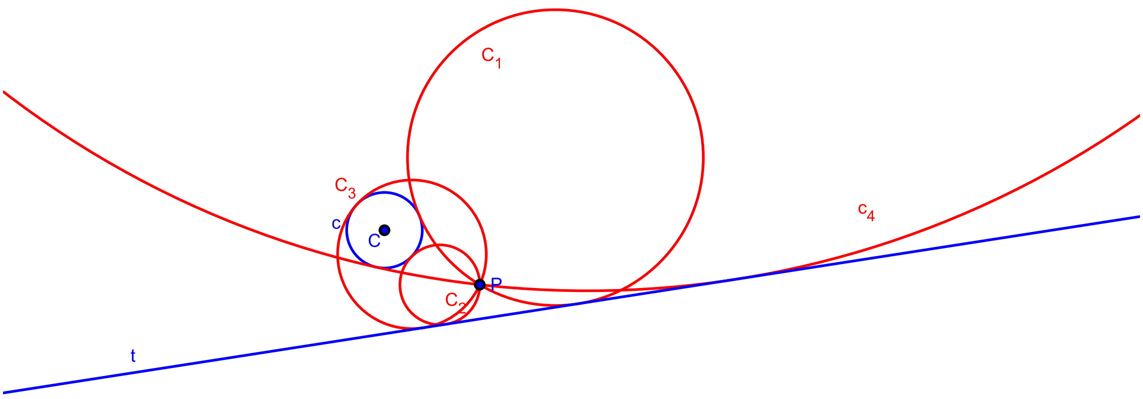

Figura 4.22: Problema 8: 1ª Parte e 2ª Parte.

4.9 Problema 9 (RCC)

Como nos casos anteriores o número de soluções varia com a posição dos três elementos. Não possui solução em dois subcasos, se as circunferências estão em semiplanos distintos em relação à reta ou se uma das circunferências é interior a outra e a reta é exterior a ambas. O subcaso em que duas circunferências disjuntas contidas em um mesmo semiplano possui oito soluções, o qual será objeto de estudo.

Construção 26. Sejam uma reta t e duas circunferências $c(C, m)$ e $c'(C', m')$, temos que

1. Construa um par de retas paralelas a t, b e d, com distância igual a m.
2. Construa a reta $\overleftrightarrow{CC'}$.
3. Construa uma circunferência W de centro C' e raio $r = m' - m$. Essa circunferência é auxiliar de forma que aumentamos ou contraímos seu raio obteremos as soluções desejadas e a coroa circular tem raio m.
4. Construa uma circunferência W' de centro C' e raio $r = m' + m$. Essa circunferência é auxiliar de forma que aumentamos ou contraímos seu raio obteremos as soluções desejadas; ver Figura 4.23.

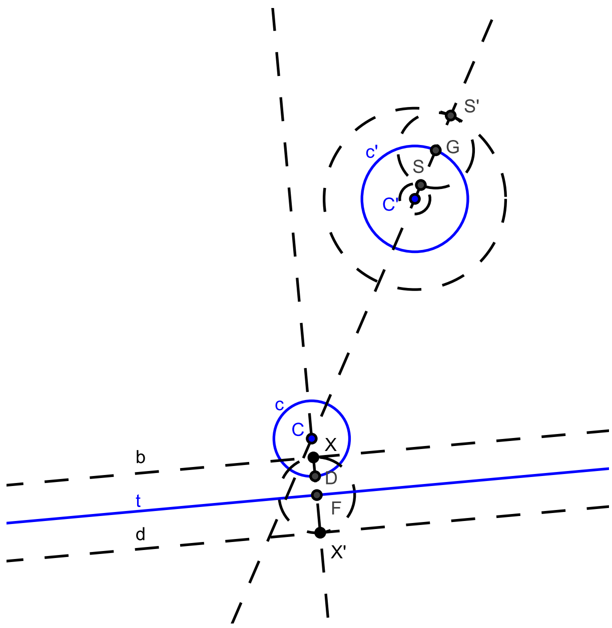

Figura 4.23: Problema 9: Circunferências auxiliares.

Essa construção será dividida em quatro etapas e cada uma terá duas soluções.

1ª Parte:

5. Construa circunferências auxiliares que contenham o ponto C, tangente a reta b e a circunferência W. Verifique que se deve realizar o procedimento (PRC).
6. Determine os centros O_1 e O_2 dessas circunferências.
7. Construir perpendiculares a t passando por O_1 e O_2.
8. Construir interseções E e E' destas perpendiculares com a reta t.
9. Construir circunferência c_1 de centro O_1 e raio $\overline{OE}$.

10. Construir circunferência c_2 de centro O_2 e raio $\overline{OE'}$.

    As circunferências c_1 e c_2 são de fato soluções do problema, pois, a reta b é paralela a t e $dist(O_1, t) = dist(O_1, b) + m$ e $dist(O_2, t) = dist(O_2, b) + m$. Em relação a circunferência c temos $dist(O_1, C) = x$, logo a circunferência c_1 de centro O_1 e raio $x + m$ é tangente à c, de modo análogo será tangente a c'. O mesmo raciocínio justifica a tangência das demais soluções encontradas; ver Figura 4.24.

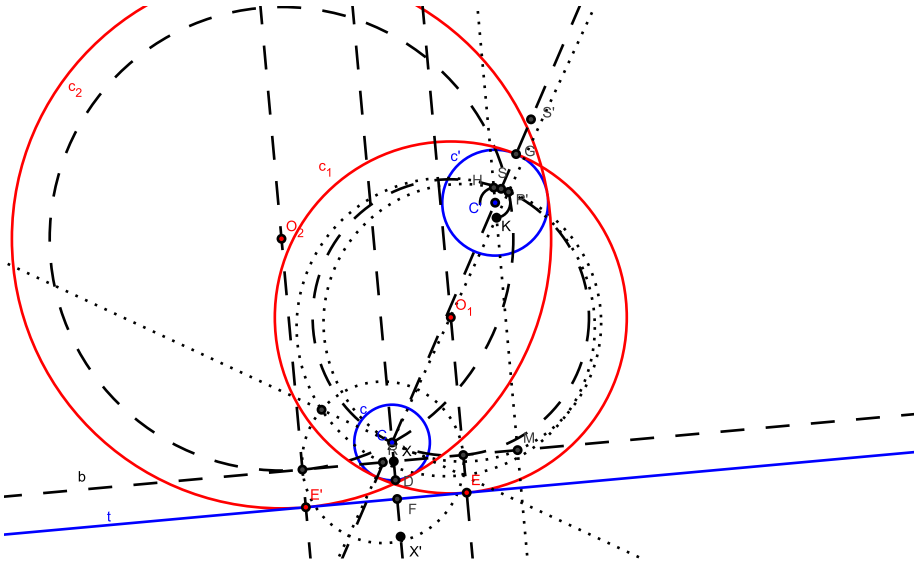

Figura 4.24: Problema 9: 1ª Parte.

2ª Parte:

11. Realize o mesmo procedimento na 1ª parte, trocando a reta b por d; ver Figura 4.25.

3ª Parte:

12. Faça a mesma construção da 2ª parte trocando a circunferência auxiliar por W'; ver Figura 4.26.

4ª Parte:

13. Faça a mesma construção da 1ª parte trocando a circunferência auxiliar por W'; ver Figura 4.27.

    Portanto, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7 e C_8 são soluções; ver Figura 4.28.

4.10 Problema 10 (CCC)

Atualmente, esse último caso, é conhecido como o problema de Apolônio. Existem vários métodos de solução para esse problema e o que os diferenciam é o número de interseções. Um importante trabalho foi realizado por MAFALDA em sua tese de doutorado

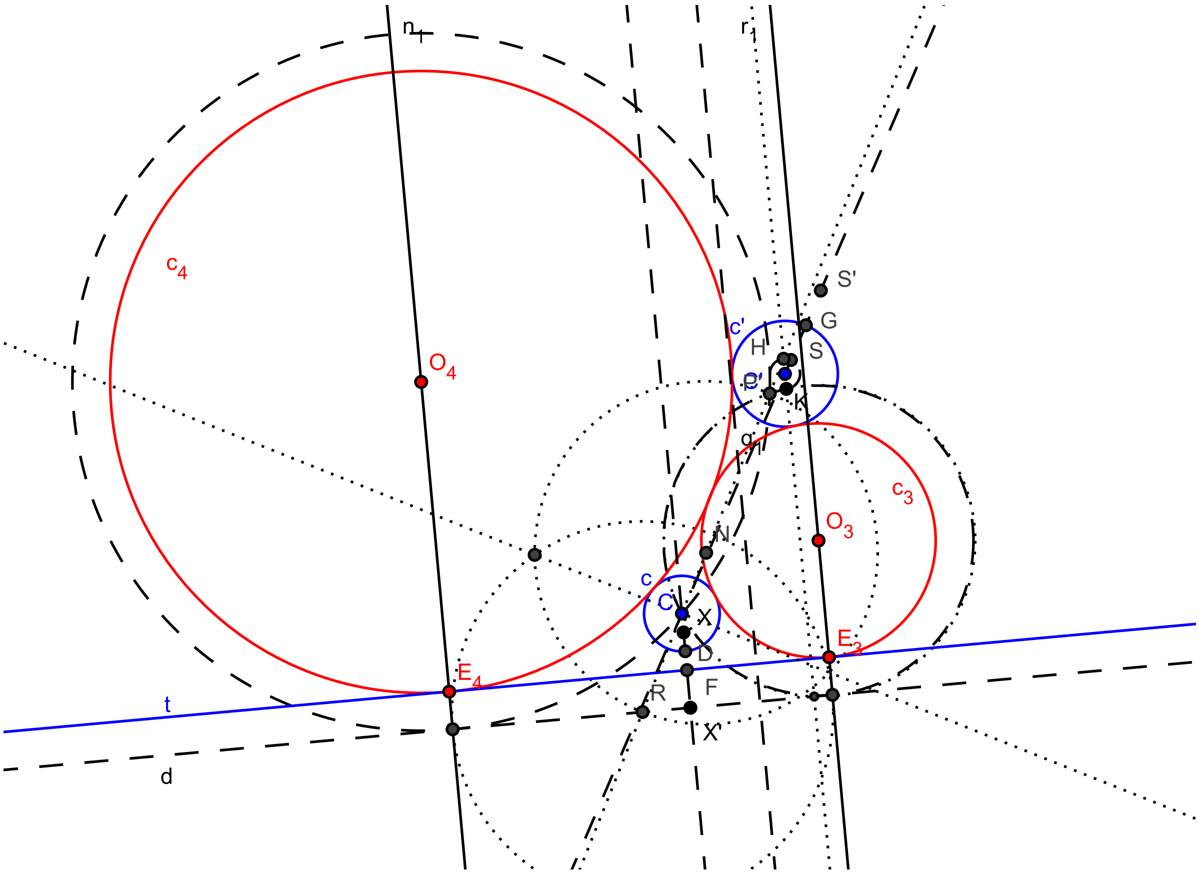

Figura 4.25: Problema 9: 2ª Parte.

em 2007 utilizando apenas feixes de circunferência e transformações geométricas de inversão. Esse método possui bastante aplicabilidade na engenharia. Essa solução não será analisada nesse trabalho, pois a qual não está voltada para o ensino básico.

Como nos casos anteriores o número de soluções varia com a posição dos elementos. Iremos analisar o subcaso em que as três circunferências $c_1(C_1, r_1)$, $c_2(C_2, r_2)$ e $c_3(C_3, r_3)$ são disjuntas e exteriores, para essa situação existem oito soluções. Para a construção serão utilizadas circunferências auxiliares concêntricas com duas circunferências dadas, sendo a coroa circular com raio igual a terceira e posteriormente realiza-se o caso (PCC') quatro vezes.

Construção 27. Sejam três circunferências $c_1(C_1, r_1)$, $c_2(C_2, r_2)$ e $c_3(C_3, r_3)$ disjuntas e exteriores, com raios diferentes e suponha r_1 o menor deles, temos

1. Construa as retas $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ e $\overleftrightarrow{C_1C_3}$.

2. Construa circunferências concêntricas a c_2, w_1 e w_2, com raios iguais a $r_2 + r_1$ e $r_2 - r_1$, respectivamente.

3. Construa circunferências concêntricas a c_3, w_3 e w_4, com raios iguais a $r_3 + r_1$ e $r_3 - r_1$, respectivamente; ver Figura 4.29.

   Este subcaso será dividido em quatro etapas, e para cada uma delas será determinado duas soluções.

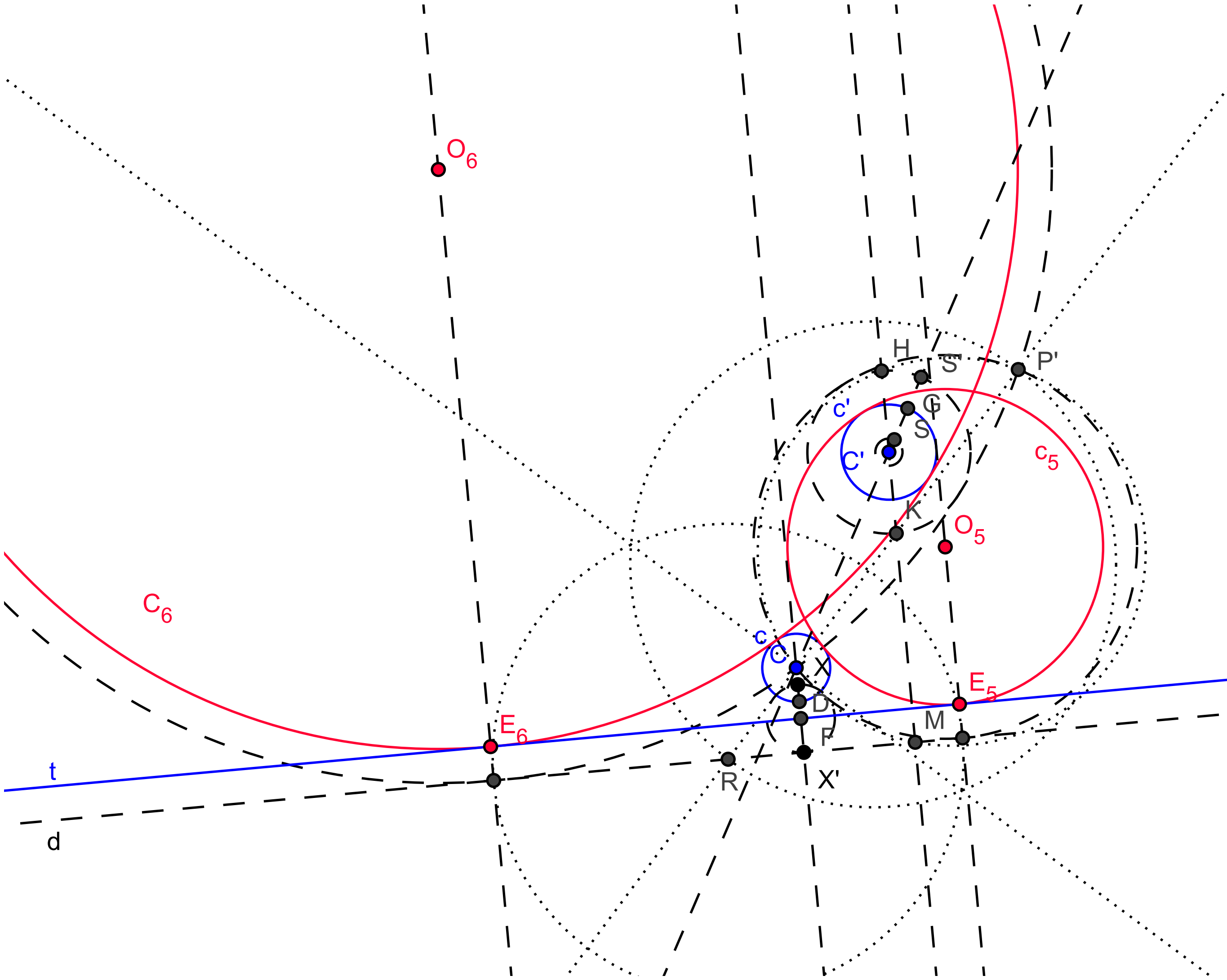

Figura 4.26: Problema 9: 3ª Parte.

1ª Parte:

4. Construa circunferências auxiliares, s_1' e s_2', que contenha o ponto C_1 e são tangentes às circunferências w_2 e w_4. Realize o caso (PCC), observe que essas circunferências são encontradas pela homotetia direta.

5. Determine os centros das circunferências auxiliares, O_1 e O_2.

6. Marque o ponto T, ponto de interseção entre a reta $\overleftrightarrow{O_1C_1}$ e a circunferência c_1.

7. Marque o ponto T', ponto de interseção entre a reta $\overleftrightarrow{O_2C_1}$ e a circunferência c_1.

8. Construa a circunferência s_1 de centro O_1 que passe por T.

9. Construa a circunferência s_2 de centro O_2 que passe por T'; ver Figura 4.30.

   As circunferências s_1 e s_2 são soluções do problema. Note que s_1 tem o mesmo centro de s_1' e raio menor r_1 unidades e s_1' é tangente a w_2 e w_4, por construção,

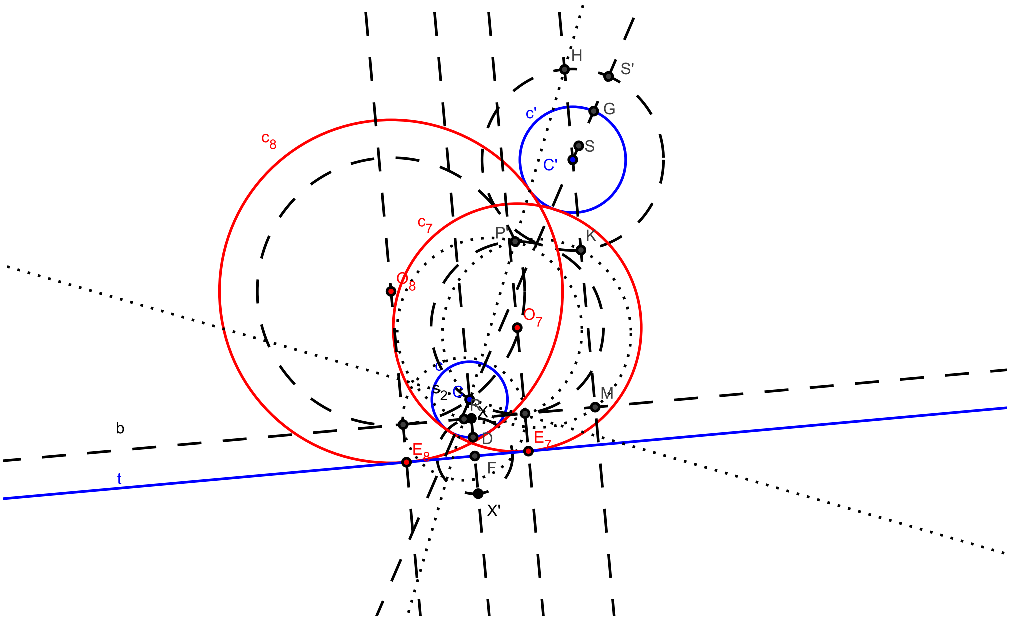

Figura 4.27: Problema 9: 4ª Parte.

então s_1 é tangente a w_2 e w_4. Como s_1' contém o centro C_1 então s_1 também é tangente a w_2. E para w_2, temos que ela possui mesmo centro de s_2' e raio maior r_1 unidades e s_2' é tangente a w_2 e w_4, por construção, então s_2 é tangente a w_2 e w_4. Como s_2' contém o centro C_2 então s_2 também é tangente a w_2.

2ª Parte:

10. Realize a mesma construção da 1ª parte, entretanto as circunferências auxiliares serão tangentes às circunferências w_1 e w_3. Realize o caso (PCC), observe que essas circunferências são encontradas pela homotetia direta.

    As soluções são as circunferências s_3 e s_4; ver Figura 4.31.

3ª Parte:

11. Realize a mesma construção da 1ª parte, entretanto as circunferências auxiliares serão tangentes às circunferências w_1 e w_4. Realize o caso (PCC), observe que essas circunferências são encontradas pela homotetia inversa.

    As soluções são as circunferências s_5 e s_6; ver Figura 4.32.

4ª Parte:

12. Realize a mesma construção da 1ª parte, entretanto as circunferências auxiliares serão tangentes às circunferências w_2 e w_3. Realize o caso (PCC), observe que essas circunferências são encontradas pela homotetia inversa.

    As soluções são as circunferências s_7 e s_8; ver Figura 4.33.

    Então, temos oito soluções s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7 e s_8; ver Figura 4.34.

Ao longo desse capítulo resolvemos os dez problemas de Apolônio.

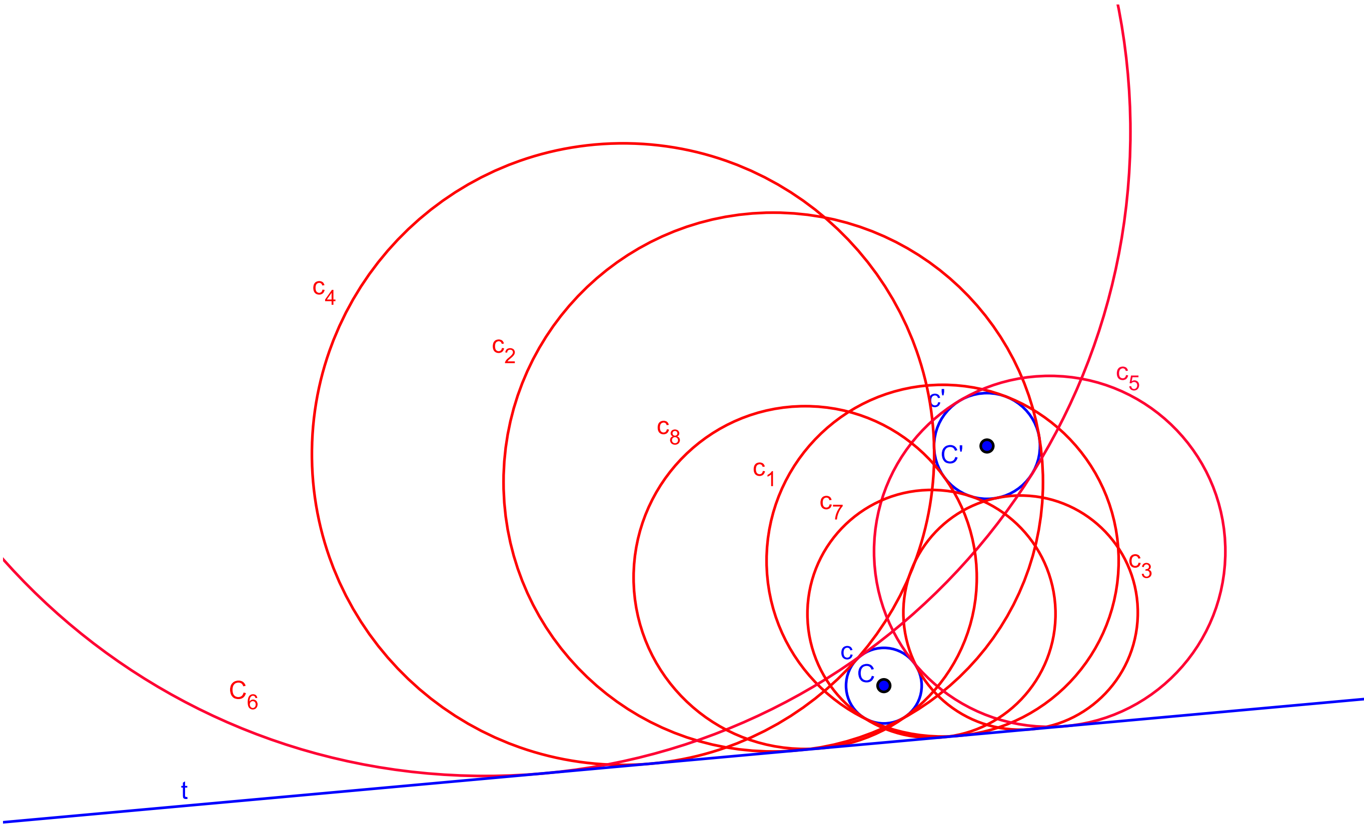

Figura 4.28: Problema 9: 1ª Parte, 2ª Parte, 3ª Parte e 4ª Parte.

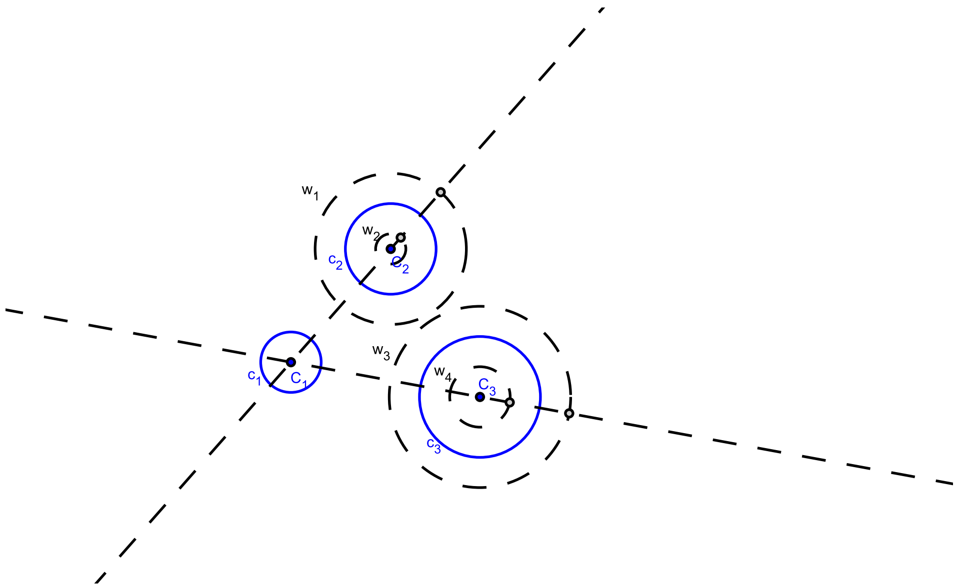

Figura 4.29: Problema 10: Circunferências auxiliares.

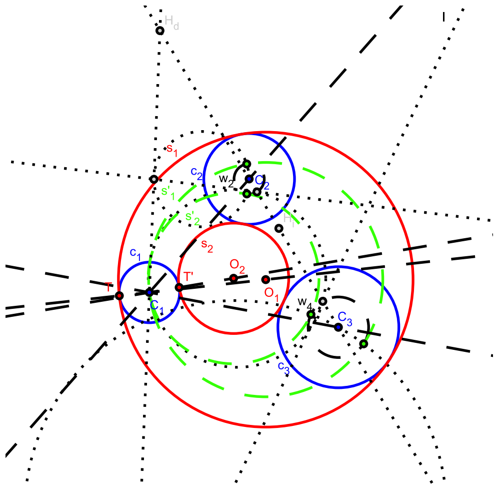

Figura 4.30: Problema 10: 1ª Parte.

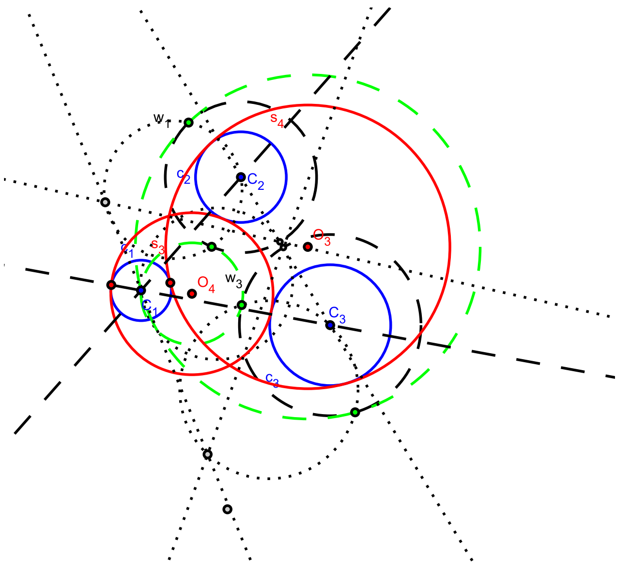

Figura 4.31: Problema 10: 2ª Parte.

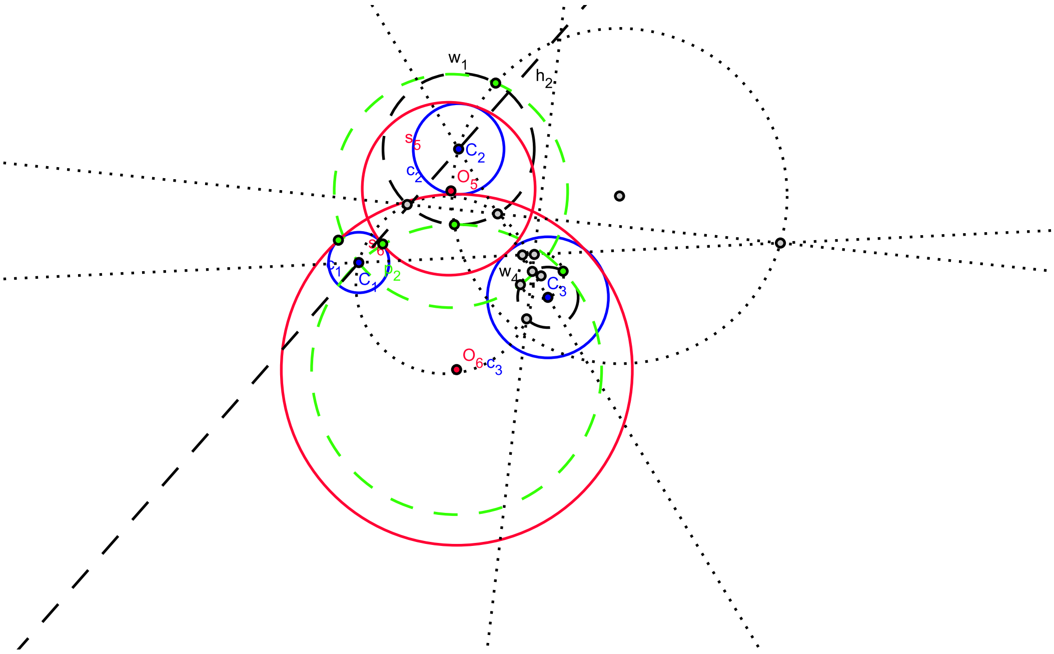

Figura 4.32: Problema 10: 3ª Parte.

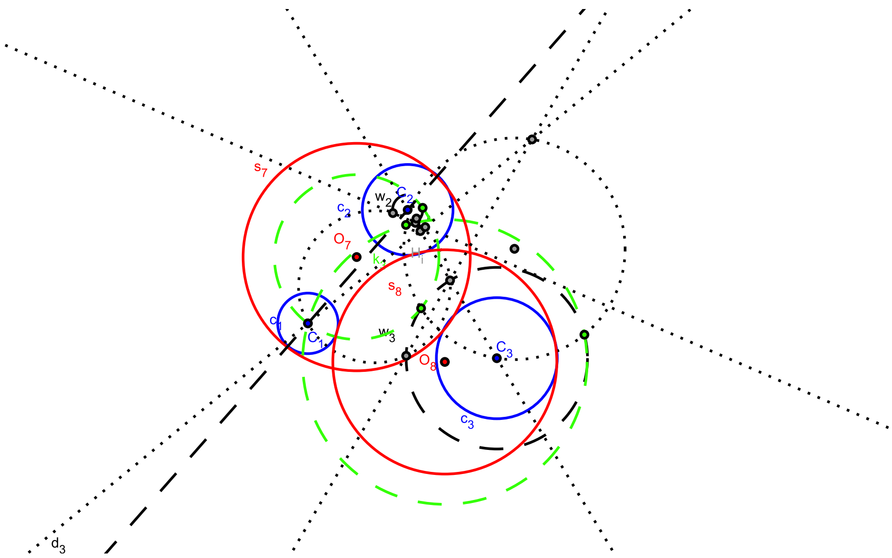

Figura 4.33: Problema 10: 4ª Parte.

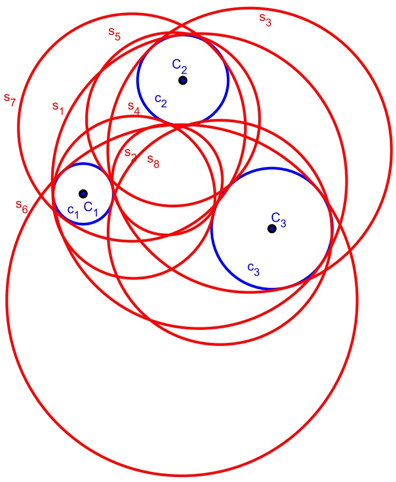

Figura 4.34: Problema 10: 1ª Parte, 2ª Parte, 3ª Parte e 4ª Parte.

Capítulo 5

Cônicas e Construções por pontos

Menaecmus, um filósofo grego discípulo de Eudoxo, há mais de dois mil anos, buscando uma solução para a duplicação do cubo, esbarrou em curvas com propriedades adequadas para esse problema, que mais tarde se chamariam elipse, parábola e hipérbole. O filósofo chegou a duas soluções com as cônicas: uma determinada pela interseção de uma hipérbole e uma parábola e a outra pela interseção de duas parábolas. Essas curvas eram seções de um cone circular reto.

Vários filósofos gregos, entre os quais Menaecmus e Euclides, haviam estudado e escrito exposições gerais sobre as cônicas, mas o tratado sobre Cônicas de Apolônio de Perga, em oito livros, substituiu todos os textos anteriores. O tratado de Apolônio é comparado pela sua importância e generalidade aos Elementos de Euclides, ambas as obras foram as melhores em seus campos.

Apolônio, aparentemente pela primeira vez, provou que as cônicas podem ser obtidas através de um cone de base circular qualquer, não necessariamente reto. Foi o filósofo que introduziu os nomes elipse, hipérbole e parábola entretanto esses nomes não foram inventados por ele, provavelmente inventados pelos pitagóricos, na solução de equações quadráticas por aplicação de áreas. Essas três condições eram designadas, "Ellipsis" - *falta*, "Hyperbota"- *excesso* e "Parábola" - *comparação*. Nota-se que os pitagóricos não usavam esses termos com referência a seções cônicas.

Essas curvas voltaram a ser estudas nos séculos XVII e XVIII, depois de um longo período esquecidas. Atualmente, apesar da grande importância do estudo das cônicas no estudo da física e suas aplicações, no ensino básico se estuda apenas o gráfico da função polinomial de grau dois. O objetivo a seguir é fazer algumas considerações básicas sobre as cônicas e construir por pontos essas curvas. Observe que existe diferença entre construir e traçar uma curva, o autor Carlos M. B. Marmo, ver [12], faz essa distinção no livro Curso de Desenho, vol. 4.

> "Traçar" é executar um traço continuo representando a cônica. É impossível "traçar" uma cônica com régua e compasso, todavia existem processos mecânicos para o traçado das cônicas. "Construir" é obter com régua e compasso ou só pontos , ou só tangentes ou ainda pontos e tangentes e a seguir a cônica é "traçada" à mão livre, passando pelos pontos e inscrita nas tangentes. Evidentemente, obtendo pontos e tangentes ao invés de só pontos ou só tangentes, a cônica resultará muito mais precisa e bem traçada.

Essas curvas serão tratadas e definidas como lugares geométricos, entretando, não estão contidas no Capítulo 2, lugares geométricos, pois não podem ser construídas com régua e compasso e sim uma construção aproxima determinando vários pontos pertencentes a cada curva.

5.1 Elipse

Elipse é o lugar geométrico dos pontos P de um plano, cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, os focos F_1 e F_2, é constante e igual a $2a$; ver Figura 5.1.

Todo o ponto P que satisfaz a condição $PF_1 + PF_2 = 2a$ pertence à elipse.

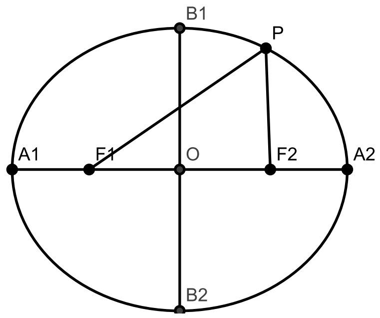

Figura 5.1: Elipse

Alguns elementos da elipse:

- Focos: F_1 e F_2.
- Distância focal: $F_1F_2 = 2c$.
- Diâmetro maior: o segmento $A_1A_2 = 2a$.
- Diâmetro menor: o segmento $B_1B_2 = 2b$.
- Centro: o ponto O, ponto médio de $\overline{F_1F_2}$.
- Vértices: São os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2, extremidades do diâmetro maior e menor.
- Eixo de simetria: os segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$.

Problema 9. Construir uma elipse por pontos, dados os focos e o diâmetro maior, ver Figura 5.2.

Construção 28. Sejam F_1 e F_2 os focos e $\overline{A_1A_2}$ o diâmetro maior dados.

1. Sobre uma reta arbitrária, transporte o segmento $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{F_1F_2}$.
2. Sobre o segmento $\overline{A_1A_2}$ determine um ponto arbitrário R_1, sejam $A_1R_1 = b_1$ e $A_2R_1 = c_1$.

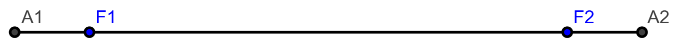

Figura 5.2: Focos e diâmetro maior de uma elipse

3. Construa circunferências com centros em F_1 e F_2 de raios b_1 e c_1. Determinam-se assim quatro pontos de interseção D, E, F e G. Observe que esses pontos determinados pertencem à elipse, pois

$$DF_1 + DF_2 = b_1 + c_1 = A_1R_1 + A_2R_1 = A_1A2 = 2a.$$

Repita o procedimento tomando os pontos R_2, R_3, R_4... sobre o segmento $\overline{A_1A_2}$, determinando o número de pontos da elipse que desejar; ver Figura 5.3.

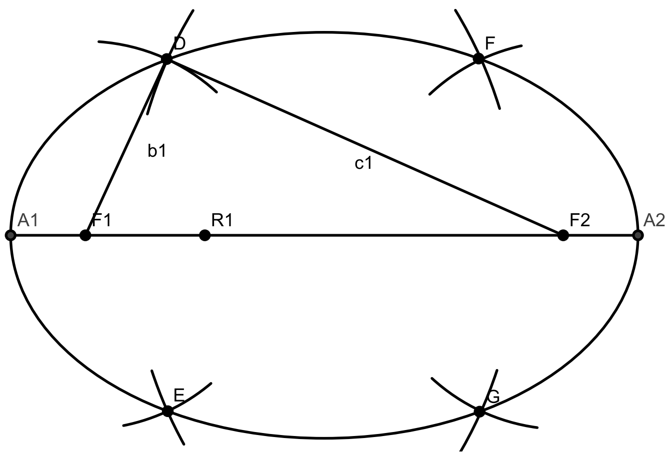

Figura 5.3: Elipse por pontos

5.2 Hipérbole

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P de um plano, cujo o módulo da diferença entre as distâncias a dois pontos fixos, os focos F_1 e F_2, é constante e igual a $2a$; ver Figura 5.4.

Todo o ponto P que satisfaz a condição $|PF_1 - PF_2| = 2a$ pertence à hipérbole.

Alguns elementos da hipérbole:

- Focos: F_1 e F_2.
- Distância focal: $F_1F_2 = 2c$.
- Diâmetro principal: o segmento $\overline{A_1A_2}$, seja $A_1A_2 = 2a$.

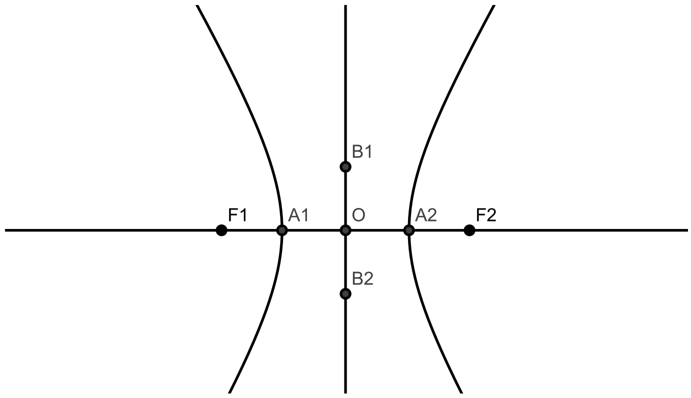

Figura 5.4: Hipérbole

- Diâmetro imaginário: o segmento $\overline{B_1B_2}$, seja $B_1B_2 = 2b$. Observe que esse segmento é a mediatriz de $\overline{F_1F_2}$.
- Centro: o ponto O, ponto médio de $\overline{F_1F_2}$.
- Vértices: São os pontos A_1 e A_2, extremidades do diâmetro principal.
- Eixo de simetria: os segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$.

Problema 10. Construir uma hipérbole por pontos, dados os focos e o diâmetro principal; ver Figura 5.5.

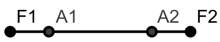

Figura 5.5: Focos e diâmetro principal de uma hipérbole

Construção 29. Sejam F_1 e F_2 os focos e $\overline{A_1A_2}$ o diâmetro principal dados.

1. Sobre uma reta arbitrária, transporte o segmento $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{F_1F_2}$.
2. Sobre o prolongamento do segmento $\overline{A_1A_2}$ determine um ponto arbitrário R_1, sejam $A_1R_1 = c_1$ e $A_2R_1 = b_1$.
3. Construa circunferências com centros em F_1 e F_2 de raios b_1 e c_1. Determinam-se assim quatro pontos de interseção D, E, F e G. Observe que esses pontos determinados pertencem à hipérbole, pois

$$|DF_1 - DF_2| = c_1 - b_1 = A_1R_1 - A_2R_1 = A_1A_2 = 2a.$$

Repita o procedimento tomando os pontos R_2, R_3, R_4... sobre o segmento $\overline{A_1A_2}$, determinando o número de pontos da hipérbole que desejar; ver Figura 5.6.

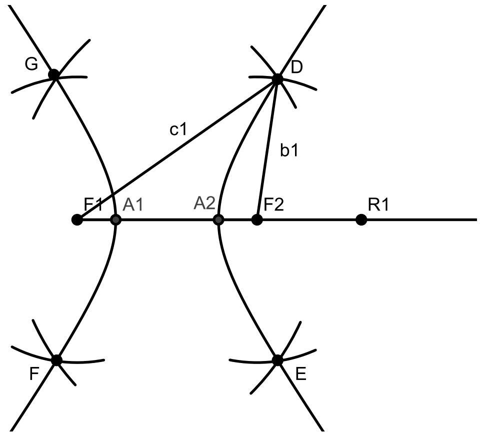

Figura 5.6: Hipérbole por pontos

5.3 Parábola

Parábola é o lugar geométrico dos pontos P de um plano equidistantes de uma reta d, diretriz, e de um ponto F, não pertencente a ela; ver Figura 5.7.

Todo o ponto P que satisfaz a condição $PF = d(P, d)$ pertence à parábola.

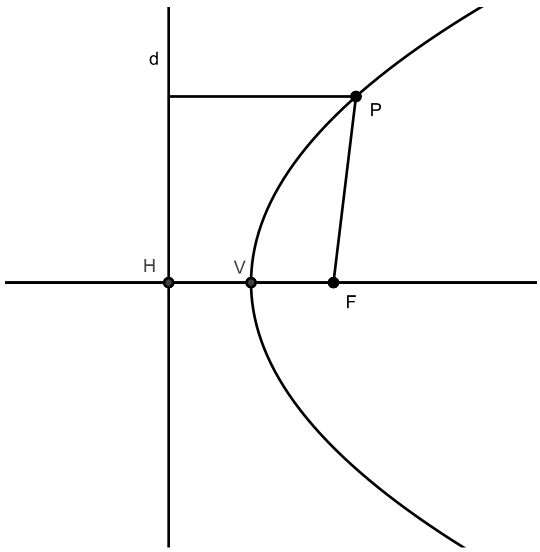

Figura 5.7: Parábola

Alguns elementos da parábola:

- Foco: Ponto F.
- Diretriz: Reta d.
- Vértice: Ponto V. Observe que V é ponto médio de $\overline{FH}$ por definição.
- Eixo: reta perpendicular d que passa pelo ponto F.
- Parâmetro: Distância entre o foco e à diretriz.

Problema 11. Construir uma parábola por pontos, dados os focos e a diretriz; ver Figura 5.8.

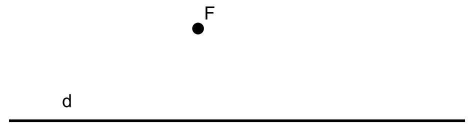

Figura 5.8: Focos e diretriz de uma parábola

Construção 30. Sejam F o foco e d a reta diretriz.

1. Construa a reta e perpendicular a d passando pelo ponto F. Seja H o ponto de interseção entre e e d.

2. Determine o vértice V. Lembre que V é ponto médio de $\overline{FH}$. Para isso bastar traçar a mediatriz desse segmento.

3. Trace uma reta a_1 paralela à diretriz d. Seja H_1 o ponto de interseção entre a_1 e e.

4. Construa uma circunferência com centro F e raio $\overline{HH_1}$. Sejam P e M os pontos de interseção entre essa circunferência e a reta a_1. Observe que esses pontos determinados pertencem à parábola, pois

$$PF = d(P, d).$$

Repita o procedimento tomando as retas a_2, a_3, a_4... paralelas à diretriz, determinando o número de pontos da parábola que desejar; ver Figura 5.9.

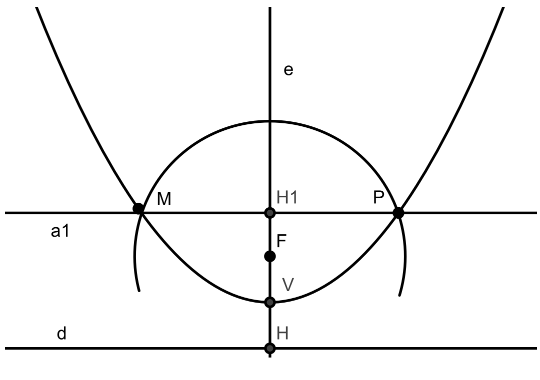

Figura 5.9: Parábola por pontos

Capítulo 6

Considerações Finais

Este trabalho foi de grande valia para minha prática em sala de aula, melhorando significativamente a minha docência. Permitiu-me fazer links sempre que necessário entre a geometria e as construções geométricas. Percebi claramente como o uso de problemas como prática metodológica melhora o raciocínio lógico-dedutivo dos alunos. Adotei depois desse trabalho as construções geométricas como recurso pedagógico nas aulas de geometria, contribuindo para facilitar o alcance dos objetivos dentro do currículo de matemática.

As construções geométricas auxiliam na observação, na compreensão, na criatividade, na formulação de estratégias de resolução de problemas, na análise das soluções e na formulação de propriedades geométricas, e principalmente com uma iniciação da prática de demonstrações matemáticas.

Neste trabalho foi proposto como objetivo principal refazer os dez problemas de Apolônio como uma metodologia que poderia ser aplicada em sala de aula. Esse objetivo foi devidamente cumprido, pois foram utilizados apenas conceitos que são aprendidos no ensino básico.

Todos os capítulos apresentam conhecimentos que podem ser aplicados no ensino de geométrica. No Capítulo 2, têm-se conceitos básicos e fundamentais para o entendimento da geometria, como por exemplo, paralelismo, perpendiculares, lugares geométricos. No Capítulo 3, são trabalhados conceitos como potência de um ponto, eixo radical e homotetia. E no Capítulo 5, apresenta-se as construções aproximadas das cônicas e suas principais características.

Como sugestão de trabalho a ser desenvolvido, sugere-se estender a metodologia da inserção das construções geométricas dentro do ensino de geometria e fazer análises dentro das salas e escolas do Distritito Federal. E também, fazer estudos para o melhor ensino e prática da geometria com o uso das construções geométricas e o uso de programas da geometria dinâmica.

Bibliografia

[1] Ferreira, A. B. H. **Aurélio século XXI**: o dicionário da Língua Portuguesa. 3. ed. rev. e ampl. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

[2] Boyer, C. B., **História da matemática**, trad. Gomide,E.F, São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

[3] Tao, T. **A geometric proof of the impossibility of angle trisection by straightedge and compass**. In: What's new, 2011.

[4] Wagner, E. **Construções Geométricas**, Rio de Janeir o: IMPA, 2007.

[5] Altshiller-Court, N. **College Geometry, An introduction to the modern geometry of triangle and the circle**. New York: Barnes e Noble, 1952.

[6] Heath, T. **The Elements of Euclides** 3 Vol(books III a IX). New York, Dover Publications Inc., 1956.

[7] Pappus D. **La Collection Mathematique** 2 Vol, trad. Eecke, P.V. Paris, Falbert Blanchard, 1982.

[8] Mafalda, R. **Resolução de problemas de tangências por inversões e aplicações à Engenharia**. Tese de Doutorado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo: São Paulo, 2007.

[9] Marmo, C. **Curso de desenho: Cônica** Livro 4, São Paulo: Nobel S.A., 1966.

[10] Rezende, E. Q. F; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**,Campinas: UNICAMP, 2000.

[11] Putnoki, J.C. **Elementos de Geometria e Desenho Geométrico**, São Paulo: Scipione, 1991.

[12] Marmo, C. **Desenho geométrico: livro II - métodos I**, São Paulo: Editora Hamburg, 1967.