UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Ana Gabriela Rodrigues Cardoso

Problemas de Contagem e o Princípio da Inclusão e Exclusão

São Luís - MA

2018

Ana Gabriela Rodrigues Cardoso

Problemas de Contagem e o Princípio da Inclusão e Exclusão

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Josenildo de Souza Chaves

Doutor em Estatística

Coorientador: Prof. Me. Anselmo Baganha Raposo Júnior

Mestre em Matemática

São Luís - MA

2018

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Rodrigues Cardoso, Ana Gabriela.
Problemas de Contagem e o Princípio da Inclusão e Exclusão / Ana Gabriela Rodrigues Cardoso. - 2018.
57 f.

Coorientador(a): Anselmo Baganha Raposo Júnior.
Orientador(a): Josenildo de Souza Chaves.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2018.

1. Análise Combinatória. 2. Contagem. 3. Princípio da Inclusão e Exclusão. 4. Probabilidade. 5. Teorema Binomial. I. Baganha Raposo Júnior, Anselmo. II. de Souza Chaves, Josenildo. III. Título.

Ana Gabriela Rodrigues Cardoso

Problemas de Contagem e o Princípio da Inclusão e Exclusão

Dissertação apresentada ao PROFMAT/ Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 29/11/2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Josenildo de Souza Chaves
Doutor em Estatística

Prof. Me. Anselmo Baganha Raposo Júnior
Mestre em Matemática

Profa. Dra. Valeska de Souza Martins
Doutora em Matemática

Prof. Dr. Adecarlos Costa Carvalho
Doutor em Matemática

À Natanael e Anselmo...

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus por ter me dado força para persistir até aqui.

Aos meus filhos Ricardo e Liandra, por serem meu maior motivo para seguir.

A minha família, mas principalmente a minha mãe por todo apoio, educação e criação que me deste.

Aos meus amigos do PROFMAT Aldivam, Alvimar, Lenildo, Laércio, Anacleto, Arnaldo e Wallace por todas as questões discutidas, horas de estudos, momentos compartilhados, brincadeiras e apoio, em especial a Denison e Clenilton, pois hoje são meus irmãos .

Aos meus amigos Natanael, Alison e Adauto por sempre terem tido paciência com todas as minhas reclamações e por nunca desistirem de mim.

Aos amigos Wellery, Victor Hugo e Fernando por toda ajuda que me deram neste trabalho e pelo apoio em todas as minhas dúvidas.

A Lívia, por toda paciência e dedicação nas aulas que me ofertou de inglês.

A Mauro, por cada palavra de consolo nos momentos de desespero.

Aos meus amigos José Antônio, César e Ícaro por cada palavra de incentivo.

Aos meus amigos da Casa Rosa, Neto Souza e Daniel Tabosa pela amizade, pelo apoio e ensinamentos.

Ao coordenador do PROFMAT, Professor Antônio José, por tudo o que fez pelo melhor andamento do curso e por todo o apoio prestado a mim e meus colegas.

Ao meu orientador Josenildo Chaves pelos momentos de orientação e dedicação.

Aos professores do Profmat por todo o conhecimento repassado e em especial ao professor Anselmo B. Raposo Júnior pela coorientação excepcional, dedicação, comprometimento, companheirismo, didática e entusiasmo prestados no decorrer de todo o curso.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo explanar de uma forma mais abrangente as principais técnicas de contagem e o Binômio de Newton através de suas demonstrações, propriedades e exemplificações, que contemplam cada um dos métodos abordados no trabalho. Ao se considerar tal objetivo de estudo, motivou-se um capítulo destinado a aplicações em algumas áreas da matemática, com foco principal na teoria das probabilidades, onde a Análise Combinatória é ferramenta fundamental para a resolução de problemas probabilísticos, mostrando assim sua importância e aplicabilidade, pois contagem não é somente um jogo de fórmulas complicadas.

Palavras-chave: Contagem, Análise Combinatória, Teorema Binomial, Princípio da Inclusão e Exclusão e Probabilidade.

ABSTRACT

This work aims to explain more comprehensively the main counting techniques and Newton's binomial through its demonstrations, properties and examples, that contemplate each one of the methods approached in the work. Considering such study objective, one of the chapters is driven to the applications in some areas of mathematics, with a main focus on probability theory, where Combinatorial Analysis is a fundamental tool for solving probabilistic problems, thus showing its importance and applicability, since counting is not only a set of complicated formulas.

Keywords: Counting, Combinatorial Analysis, Binomial Theorem , Principle of Inclusion and Exclusion, Probability .

SUMÁRIO

1 Introdução

A Análise Combinatória é bem mais que apenas o estudo das técnicas de contagem como: arranjos, permutações e combinações. Entretanto, esta não é a resposta da maioria dos alunos de ensino médio para a pergunta :"O que é Combinatória?", pois é um assunto que na maioria das vezes é abordado em sala de aula com a aplicação de fórmulas e resolução de problemas com raciocínios repetitivos. Longe disso, esta temática trata de muitos outros tipos de problemas que podem ser resolvidos para contribuir no desenvolvimento da criatividade e do raciocínio lógico.

Apesar de termos como principal ferramenta de resolução de problemas de contagem, os Princípios Básicos de Contagem, outras técnicas de contagem utilizadas são de extrema importância em situações específicas. Estas técnicas permitem resolver de forma mais simples problemas de outras áreas, como a Probabilidade, Teoria dos Números, Geometria, entre outras. O modo de resolução dos problemas de combinatória deve ser feito de forma criteriosa, sendo recomendado que o primeiro passo seja dado, sempre com a possibilidade do uso direto do Princípio Multiplicativo.

Segundo Morgado (2012), devemos usar alguns mecanismos para a resolução dos problemas de contagem, fazendo com que a compreensão e desenvolvimento do problema sejam facilitados. *i*) Postura: Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões tomar. *ii*) Divisão: Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão. A ordem em que as decisões são tomadas pode ser extremamente importante para a simplicidade do processo de resolução. *iii*) Não adiar dificuldades: Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é apresentar as definições e aplicações de algumas técnicas de contagem para a resolução de problemas, dando ênfase para aqueles que envolvem Probabilidade e Teoria dos Números.

- De acordo com Morgado (2012), demonstrar a relação de Stifel e os teoremas das Linhas, Colunas e Diagonais e o Teorema Binomial.

- Segundo de Oliveira Santos, Mello e Murari (2007), apresentar o Princípio da Inclusão e Exclusão e as Permutações caóticas;

- Aplicar a metodologia em problemas de contagem e em Probabilidade de espaços amostrais finitos.

1.2 Apresentação dos Capítulos

Esta dissertação está organizada em 5 capítulos. Os Capítulos 2 e 3 apresentam a fundamentação teórica através das demonstrações, definições, propriedades e exemplificações dos principais métodos de contagem e do Binômio de Newton. Os exemplos abordados são resolvidos e detalhados conforme os mecanismos de solução de MORGADO (2012). O Capítulo 4 apresenta importantes aplicações nas áreas de Probabilidade, Geometria, Teoria Elementar dos Números, baseadas em Hefez(2016) e Progressões. Tendo como principal objetivo mostrar ao aluno a importância da aplicabilidade da Análise Combinatória, sendo este um conteúdo fundamental e auxiliar em diversas áreas da matemática e de grande encantamento por trabalhar com problemas que exigem compreensão plena, engenhosidade e criatividade. O Capítulo 5 apresenta as considerações finais.

2 O Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton

A Análise Combinatória pode contribuir em soluções de problemas de diversas áreas como Linguística, Probabilidade, Aritmética, Teoria dos Conjuntos, Topologia, entre outras.

Neste capítulo apresentamos os principais métodos de contagem usados no Ensino Médio: Arranjos, Permutações, Combinações e os Teorema Binomial, que são a base para a formação do Triângulo de Pascal juntamente com as suas propriedades que auxiliam para o desenvolvimento do Binômio de Newton, afim de que auxilie nas aplicações do Capítulo 4.

2.1 Princípios Básicos de Contagem

Sejam A e B dois conjuntos finitos e disjuntos. Se $\#(A)$ é a quantidade de elementos de A e $\#(B)$ é a quantidade de elementos de B, então

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B).$$

Este fato é conhecido como **Princípio Aditivo**

Teorema 2.1.1. (Princípio Multiplicativo) *Sejam X e Y conjuntos finitos e não-vazios, de cardinalidade m e n, respectivamente. Então,*

$$\#\left(X \times Y\right) = m \times n.$$

Prova: Sejam $X = \{1, \ldots, m\}$ e $Y = \{1, \ldots, n\}$. Fazendo-se

$$X_k = \{(k, 1), \ldots, (k, n)\}, 1 \leq k \leq m,$$

temos que estes conjuntos são dois a dois disjuntos, possuem n elementos e, além disso,

$$X \times Y = X_1 \cup \cdots \cup X_n.$$

O resultado segue então do Princípio Aditivo. ■

Corolário 2.1. *Sejam $X_1, \ldots, X_k$ conjuntos finitos e não-vazios, cujas respectivas cardinalidades são representadas por $n_1, \ldots, n_k$. Então,*

$$\#\left(X_1 \times \cdots \times X_k\right) = n_1 \times \cdots \times n_k.$$

Prova: Basta aplicar o resultado anterior $k-1$ vezes. ■

Utilizado na solução de diversos problemas envolvendo combinatória em áreas como a probabilidade o objeto principal para o desenvolvimento deste trabalho é o princípio fundamental da contagem. "Se um experimento pode levar a qualquer um de m possíveis resultados e se outro experimento pode resultar em qualquer um dos n resultados possíveis, então os dois experimentos possuem mn resultados possíveis."(ROSS, 2010, p.16).

Exemplo 2.1. *O código Morse usa duas letras, ponto e traço, e as palavras têm de* 1 *a* 4 *letras. Quantas são as palavras do código Morse?*

Solução: Há duas palavras de uma letra. Há $2 \times 2 = 4$ palavras de duas letras, pois há dois modos de escolher a primeira letra e dois de escolher a segunda letra; analogamente há $2 \times 2 \times 2 = 8$ palavras de três letras e $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ palavras de quatro letras. Pelo princípio aditivo o número total de palavras é $2 + 4 + 8 + 16 = 30$. □

O Exemplo 2.1 trata dos dois princípios abordados, o aditivo e o multiplicativo. Podemos considerar como subconjuntos $A_1 =$ palavras com uma letra, $A_2 =$ palavras com duas letras, $A_3 =$ palavras com três letras e $A_4 =$ palavras com quatro letras. Cada subconjunto teve a contagem de seus elementos feita através do princípio multiplicativo, tendo como etapas a escolha de cada letra que formará a palavra final e para as opções de cada etapa duas letras. Portanto, para se chegar ao resultado esperado foi necessário efetuar a soma dos números dos elementos presentes em cada subconjunto, o que determina o princípio aditivo.

2.2 Permutação

Permutação simples. Suponha n objetos distintos. Cada grupo ordenado formado por estes n elementos é uma permutação simples. O número de permutações pode ser calculada utilizando o mesmo raciocínio do princípio multiplicativo, pois o primeiro objeto desse conjunto ordenado poderá ser escolhido de n formas, o segundo de $n-1$ modos até se chegar ao último elemento do grupo que será a única opção para completar o agrupamento, o que mostra que há $n \times (n-1) \times (n-2) \cdots 3 \times 2 \times 1 = n!$. Fica estabelecido, assim, que o número de permutações de n objetos distintos é igual a $n!$. De outra modo, por indução matemática, temos que para $n = 1$, há uma única permutação e, como $1! = 1$, o resultado verifica. Suponha que o número de permutações de n objetos distintos seja $n!$. Considere um conjunto X com n+1 elementos, uma permutação dos $n+1$ elementos de X é uma $(n+1) - upla$ cujas entradas são os elementos de $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ e não há repetições. Separando no conjunto X os n primeiros elementos, consideremos uma n - upla $X = \{x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}\}$ formada com estes elementos. A partir dela temos as seguintes $(n+1)$ - uplas

$$\begin{gathered}(x_{n+1}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_n})\\(x_{k_1}, x_{n+1}, \ldots, x_{k_n})\\\vdots\\(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}, x_{n+1}).\end{gathered}$$

Cada n - upla corresponde a $n+1$ $(n+1)$ - uplas. Da hipótese de indução e do princípio multiplicativo, temos que o total de permutações em X é $(n+1)n! = (n+1)!$. O resultado é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Exemplo 2.2. *De quantos modos é possível colocar n pessoas em uma fila de modo que duas dessas pessoas, Ricardo e Beatriz, permanençam juntas e duas outras, Victor e Charles não fiquem juntas?*

Solução: O número de filas nas quais duas pessoas ficam juntas (neste caso Ricardo e Beatriz) é $(n-1)!2!$, pois o casal se torna um único elemento, mas pode se permutar entre si. O número de filas, agora com as duas duplas juntas, é calculado de modo análogo, $(n-2)!2!2!$. Portanto, o número de filas onde Ricardo e Beatriz ficam juntos, mas Victor e Charles não, é $(n-1)!2! - (n-2)!2!2! = 2(n-2)!(n-3)$. □

Permutação circular. Consideremos o seguinte problema:
"De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, se considerarmos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação?"

Nas permutações simples o lugar em que um objeto ocupará é relevante. Porém, como proceder quando o que importa é apenas a posição relativa dos objetos entre si? Observamos que a coincidência por rotação induz uma relação de equivalência no conjunto das permutações de n elementos e, portanto, consideremos o conjunto das classes de equivalência gerado por essa relação. Cada classe de equivalência é denominada **permutação circular**.Se disposições que são coincidentes por rotação não fossem consideradas equivalentes, teríamos $n!$ ordenações. Mas considerando que cada permutação circular é composta por n ordenações, temos que o número de classes de equivalência ou **número de permutações circulares de n elementos**, que denotaremos por $(PC)_n$, é

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

Exemplo 2.3. *De quantos modos n casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado de sua mulher?*

Solução: Há $(PC)_n = (n-1)!$ modos de formar uma roda com os n casais. Depois disso, cada casal poderá se permutar entre si de $2!$ modos. Portanto, a resposta é $(n-1)!(2!)^n$.
□

Permutação com repetição. Quando ordenamos elementos e entre eles existem objetos repetidos, algumas permutações se repetem, e precisam ser excluídas da contagem total. Suponha a existência de uma sequência finita

$$X = (A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m, C_1, C_2, \ldots, C_p).$$

Se fizermos todas as permutações possíveis dos elementos da sequência X teremos $(n+m+p)!$ ordenações, porém todos os elementos que representam a letra A são indistinguíveis, da mesma forma que as letras B e C, logo as permutações que acontecem entre si desses elementos devem ser descartadas. Assim,

$$P_{n+m+p}^{n,m,p} = \frac{(n+m+p)!}{n!m!p!}.$$

Portanto, o mesmo raciocínio mostra que há

$$\frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_r)!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$$

permutações diferentes de $(k_1 + k_2 + \cdots + k_r)!$ objetos, dos quais k_1 são indestinguíveis e da mesma forma $k_2, \ldots, k_r$. ■

Exemplo 2.4. *Um time de futebol disputou em um campeonato nacional* 10 *jogos, atingindo* 17 *pontos. Cada vitória vale* 3 *pontos, cada empate* 1 *ponto e cada derrota* 0 *ponto. Sabendo que o número de vitórias foi máximo, de quantos modos isto pode ocorrer?*

Solução: Como teremos um número máximo de vitórias, iremos dividir 17 por 3, obtendo 5 vitórias. O restante dos pontos são referentes a 2 empates e, consequentemente, ocorreram 3 derrotas. O número de formas de ocorrer os resultados pode ser calculado usando a ideia das permutações com repetição. Assim, o valor desejado é

$$P_{10}^{5,2,3} = \frac{10!}{5!2!3!}.$$

□

2.3 Arranjos

Arranjo simples. Se para a solução de um problema de contagem o método utilizado for o princípio multiplicativo, com todas as escolhas possíveis sendo feitas de um mesmo conjunto e a cada escolha feita a anterior sendo descartada, dizemos que o agrupamento **ordenado** encontrado é um arranjo.

Definição 2.1. "Seja A um conjunto com n elementos e $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n$. Um arranjo simples dos n elementos de A, tomados k a k, é uma sequência de k elementos distintos de A. Arranjos simples, são chamados, simplismente, de arranjos". (CERIOLI & VIANA, 2012, p.72)

O número de arranjos dos n elementos de A, tomados k a k, são sequências de k termos, dois a dois distintos e pertencentes a A. Considerando X o conjunto de todos os possíveis arranjos formados pelos elementos de A, podemos fazer k escolhas, $1 \leq k \leq n$. A primeira escolha pode ser feita de n maneiras. Após se realizar a primeira escolha, haverão $n-1$ opções para a segunda, pois um dos elementos do conjunto A já terá sido fixado na primeira escolha. Depois da segunda escolha efetuada haverão $n-2$ opções para a terceira escolha, pois já teriam dois elementos fixados respectivamente na primeira e na segunda escolha, e assim sucessivamente até a escolha k que pode ser feita de $n-(k-1)$ formas, pois $k-1$ elementos do conjunto A já teriam sido escolhidos. Assim, pelo Princípio multiplicativo,

$$\#(X) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1),$$

com exatamente k fatores. O número de arranjos dos n elementos de A, tomados k a k, é dado pela expressão

$$A_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Desta forma, podemos concluir que a fórmula e a definição usadas para a determinação do número de arranjos dos elementos de um conjunto não são extremamente essenciais para resolvermos problemas de contagem, pois podemos determinar o número de *arranjos* através da aplicação direta do princípio multiplicativo.

Arranjo completo. "Quando, para resolver um problema de contagem, podemos aplicar o princípio multiplicativo de modo que todas as escolhas envolvidas são feitas em um mesmo conjunto e, para cada escolha, todos os elementos do conjunto estão disponíveis, dizemos que a configuração que estamos contando é um arranjo completo."(CERIOLI & VIANA, 2012, p.71)

Definição 2.2. Seja A um conjunto com n elementos e $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n$. Um arranjo completo dos n elementos de A, tomados k a k é uma sequência com possíveis repetições de k elementos de A.

O número X de arranjos completos dos n elementos de A, tomados k a k, tal que $1 \leq k \leq n$, pode ser determinado da mesma forma que o número de arranjos simples, porém podendo haver repetição nas opções de cada etapa de escolha. Assim na primeira escolha teremos n opções de elementos, na segunda escolha também haverá n opções de elementos, pois como pode haver repetições de elementos não haverá o descarte de nenhum objeto e assim sucessivamente até a escolha de número k. Assim pelo Princípio multiplicativo temos

$$X = \underbrace{n \times n \cdots \times n}_{k \text{ vezes}}$$

O número de arranjos completos dos n elementos de A, tomados k a k, é dado pela fórmula

$$AC(n,k) = n^k.$$

De fato, a contagem de **Arranjos Completos** é dada pelo **Princípio Multiplicativo**.

Note que as permutações são arranjos de n elementos tomados n a n, ou seja, $P_n = A_{n,n}$.

2.4 Combinação

Combinação simples. "Para contarmos o número de maneiras em que ocorre um evento comum, deve-se multiplicar junto o número de escolhas para cada subevento. Para corrigir a contagem excessiva, divide-se pelo fator de sobrecontagem."(ZEITZ, 1998, p.190.)

Definição 2.3. O número de grupos diferentes com m elementos que podem ser formados a partir de um conjunto de n objetos é o que define o número de combinações de um determinado conjunto.

O número de diferentes formas pelas quais um grupo de p elementos pode ser selecionado a partir de um conjunto de n elementos, quando a forma de selecionar os objetos é relevante é, em geral $n(n-1)\cdots(n-(p-1))$. Porém se tratando de conjuntos a disposição dos elementos em sua representação é irrelevante. Assim, cada coleção de p elementos será contada $p!$ vezes ($p!$ representa o número de permutações de p elementos). Portanto, o número de subconjuntos com p elementos que podem ser formados a partir de um conjunto com n elementos é

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-(p-1))}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

<u>**Notação e Terminologia**</u>

Definimos $\binom{n}{p}$, para $p \leq n$ como

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Dizemos que $\binom{n}{p}$ representa o número de combinações possíveis de n elementos em um grupo de p elementos de cada vez. Por convenção, define-se $0! = 1$, com isso

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Assume-se, ainda, que $\binom{n}{i} = 0$ quando $i < 0$ e $i > n$.

Exemplo 2.5. *O conjunto A possui $n+1$ elementos e o conjunto B possui n elementos. Determine o número de funções $f\colon A \to B$ que são sobrejetoras.*

Solução: Seja A um conjunto com $n + 1$ elementos. Dois destes terão uma mesma imagem em B. A correspondência entre os demais $n-1$ elementos de A e os demais $n-1$ elementos de B será bijetiva. Há $\binom{n+1}{2}$ modos de escolher os dois elementos de A que terão a mesma imagem, n modos de escolher a imagem deles em B e $(n-1)!$ modos de construir uma correspondência bijetiva entre os elementos restantes. Assim, fazendo uso do princípio multiplicativo, o número de funções é dado por

$$\binom{n+1}{2} \times n \times (n-1)! = \frac{n(n+1)}{2}\cdot$$

□

Combinação completa. De modo geral, $C_n^p = \binom{n}{p}$ é o número de subconjuntos de p elementos de um conjunto de n elementos. O número de modos de escolher p objetos distintos ou não entre n objetos distintos dados é denotado por CR_n^p e chamado de combinação completa de classe p de n objetos. Outra forma de se interpretar a CR_n^p é o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$. O esquema bola-traço é uma alternativa para a resolução de problemas que envolvem combinações completas. As p bolas e os $n-1$ traços são dispostos em fila e permutados. Como as bolas e os traços são indistinguíveis divide-se a permutação de $n + p - 1$ objetos pela permutação simples das p bolas e dos $n-1$ traços. Por exemplo, tendo $p = 4$ e $n = 3$, uma possibilidade é:

Figura 2.1: Esquema bola-traço.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 \\ 2 & & 1 & & 1 \\ \bullet\bullet & | & \bullet & | & \bullet \end{array}$$

Portanto,

$$P_{p+n-1}^{p,n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C_{n+p-1}^{p} = \binom{n+p-1}{p} = CR_n^p.$$

Exemplo 2.6. *Quantas são as soluções inteiras não negativas de* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$ *nas quais exatamente 3 incógnitas são nulas?*

Solução: Inicialmente devemos escolher as incógnitas que assumirão o valor zero. Isso pode ser feito de $\binom{6}{3} = 20$ modos. Fixadas essas incógnitas que serão nulas, a equação transforma-se em uma equação do tipo $x + y + z = 20$, só que agora nenhuma incógnita pode ser nula. Então, faremos $(x = a + 1, y = b + 1, z = c + 1)$, e assim obtemos $a + b + c = 17$, com a, b, c inteiros não negativos. O número de soluções dessa equação é $CR_3^{19} = \binom{19}{17} = 171$. Portanto, a resposta é $20 \times 171 = 3.420$. $\square$

2.5 Coeficientes Multinomiais

Definição 2.4. "O número de divisões possíveis de n objetos distintos em r grupos distintos de tamanhos $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r$ é dado pelo número de soluções da equação $n_1+n_2+n_3+\ldots+n_r = n$, assim é definido como $\binom{n}{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_r!}$." (ROSS, 2010, p.24)

Para a escolha dos elementos que formarão o primeiro grupo de n_1 elementos, temos $\binom{n}{n_1}$ formas de escolha, para o número de escolhas do segundo $\binom{n-n_1}{n_2}$ possibilidades, em relação ao terceiro grupo $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ possíveis escolhas, e assim por diante. Assim, generalizando através do princípio multiplicativo, temos

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-n_3-\cdots-n_{r-1}}{n_r} =$$
$$= \frac{n!}{(n-n_1)!n_1!} \times \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!} \times \cdots \times \frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})!}{0!n_r!}$$
$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_r!}.$$

OBSERVAÇÃO. Para o uso de um valor de n extremamente "grande"para o fatorial, é ideal que se use a fórmula de Stirling, que estabele uma aproximação assintótica. Sua forma mais usal é

$$n! \cong \sqrt{2\pi n}(\tfrac{n}{e})^n, \text{ onde } e = 2{,}718.$$

Assim,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1\cdot$$

Exemplo 2.7. (ROSS, 2010). *Na primeira rodada de um torneio de mata-mata envolvendo 8 jogadores os jogadores são divididos em pares, com cada um desses pares jogando uma partida. Os perdedores das partidas são eliminados e os vencedores disputam a próxima rodada, onde o processo é repetido até que apenas um jogador permaneça. Quantos resultados possíveis existem para a rodada inicial?*

Solução: Uma maneira de determinar o número de resultados possíveis para a rodada inicial é primeiramente determinar o número de pares possíveis para essa rodada. Para isso, note que o número de maneiras de dividir os 8 jogadores em um primeiro par, um segundo par, um terceiro par e um quarto par é $\binom{8}{2,2,2,2} = \frac{8!}{2^4}$. Há $\binom{8}{4}$ escolhas possíveis dos 4 vencedores e, para cada uma dessas escolhas, há 4! maneiras de se formar pares entre os 4 vencedores e os 4 perdedores, o que mostra que há $\frac{8!}{4!}$ resultados possíveis para a primeira rodada. Similarmente, para cada resultado da primeira rodada, há $\frac{4!}{2!}$ resultados possíveis para a segunda rodada, e para cada um dos resultados das primeiras duas rodadas há $\frac{2!}{1!}$ resultados possíveis para a terceira rodada. Consequentemente, pela versão generalizada do princípio básico da contagem, o torneio tem $\frac{8!4!2!}{4!2!1!} = 8!$ resultados possíveis. □

2.6 O Triângulo de Pascal

Quando se determina combinações simples entre elementos de um conjunto, a ordem em que esses elementos serão ordenados não importa, e o total de combinações formadas é simbolizado por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$, assim temos

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ com } p \leq n\cdot$$

Com os *números binomiais* podemos organizar uma estrutura triangular, com algumas propriedades e particularidades. Esta estrutura é conhecida por Triângulo de Pascal ou simplismente Triângulo Combinatório ou Triângulo Aritmético. O triângulo é disposto em n linhas com o mesmo numerador do número ou coeficiente binomial e em p colunas, no qual a coluna é representada pelo denominador, onde linhas e colunas iniciam por 0.

O triângulo de Pascal esconde diversas relações que facilitam a construção das linhas formadas e muitas delas foram encontradas por Pascal. A soma de dois elementos

Figura 2.2: Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{cccccc}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

adjacentes de uma mesma linha gera um elemento da próxima coluna (Relação se Stifel). Somando elementos de uma mesma coluna e fazendo uma volta de 90 graus chega-se ao binômio que representa o valor desta soma. Se observarmos o triângulo pela diagonal encontraremos PA's de primeira e segunda ordens. A soma de cada linha tem como resultado uma potência de base 2. Observando os elementos da esquerda para a direita em linhas alternada encontraremos nesta soma a sequência de Fibonacci. A soma de elementos de uma mesma coluna gera um elemento das próximas linha e coluna. O triângulo é simétrico e infinito e no início e fim de cada linha o coeficiente binomial destas posições é sempre igual a 1 e cada linha seguinte sempre terá um elemento a mais que a anterior. Algumas destas propriedades serão demonstradas a seguir.

Teorema 2.6.1. (Relação de Stifel) *A soma de dois números binomiais de uma mesma linha, consecutivos, resulta no elemento situado abaixo da última parcela, ou seja,*

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}. \tag{2.1}$$

Figura 2.3: Relação de Stifel

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & \swarrow & & \searrow & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & \swarrow & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \searrow & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Existem diferentes formas de se demonstrar esta relação, algumas serão apresentadas aqui. A primeira demonstração será feita com o uso dos coeficientes binomiais e uma simples noção de conjuntos.

Prova: Consideremos o conjunto A formado por 1 elemento e o conjunto B por n elementos, sendo A e B disjuntos. A quantidade de maneiras distintas de selecionar um grupo formado pelos elementos de $A \cup B$ com $p+1$ elementos é $\binom{n+1}{p+1}$. Caso o grupo só fosse formado por elementos do conjunto B teríamos $\binom{n}{p+1}$ formas. E os grupos formados pelo elemento do conjunto A e os outros p elementos de B teríamos $\binom{n}{p} \times 1$. Neste problema, temos que a quantidade de subconjuntos formados por elementos de $A \cup B$ é a soma do número de subconjuntos com o elemento de A e sem o mesmo. Logo, temos

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

$\blacksquare$

A segunda demonstração da *Relação de Stifel* será realizada através da indução matemática. Faremos indução em n, onde n é o número da linha em que a relação será aplicada, e provaremos que a relação é válida para $n+1$.

Prova: Façamos indução em n. Para $n = 1$, devemos ter $p = 0$ e, neste caso,

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = \binom{2}{1} = \binom{n+1}{p+1},$$

ou seja, o resultado é verdadeiro para o passo base, onde $n = 1$. Supondo sua validade para um certo $n \in \mathbb{N}$, mostremos sua validade para $n+1$. Assim,

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} = 1 + (n+1) = n + 2 = \binom{n+2}{1}$$

e

$$\binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} = (n+1) + 1 = n + 2 = \binom{n+2}{n+1}.$$

Se $1 \leq p \leq n-1$,

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{p} + \binom{n+1}{p+1} &= \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} + \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} \\
&= \frac{n!}{(p-1)!\,(n-p+1)!} + 2\frac{n!}{p!\,(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!} \\
&= \frac{n!\,[p\,(p+1)] + n!\,[2\,(p+1)\,(n-p+1)] + n!\,[(n-p)\,(n-p+1)]}{(p+1)!\,(n-p+1)!} \\
&= \frac{n!\,(p^2+p+2pn-2p^2+2n+2+n^2-pn+n-pn+p^2-p)}{(p+1)\,[(n+2)-(p+1)]!} \\
&= \frac{n!\,(n^2+3n+2)}{(p+1)\,[(n+2)-(p+1)]!} \\
&= \frac{(n+2)\,(n+1)\,n!}{(p+1)\,[(n+2)-(p+1)]!} \\
&= \frac{(n+2)!}{(p+1)\,[(n+2)-(p+1)]!} \\
&= \binom{n+2}{p+1}
\end{aligned}$$

e o resultado é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Combinações complementares. Cada linha do triângulo de Pascal inicia com um coeficiente binomial de denominador 0 e encerra com um de denominador de valor igual a linha em destaque. Os elementos da linha n equidistantes dos extremos, serão chamados de *Combinações Complementares*. Note que

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)!]} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}.$$

isto é, combinações complementares assumem o mesmo valor.

2.7 O Binômio de Newton

Ao expandir um binômio do tipo $(a+b)^n$ fazemos uso dos coeficientes que formam as linhas e colunas do triângulo de Pascal. A expansão do binômio faz uso da linha do triângulo de Pascal referente ao seu expoente, por este motivo se torna conveniente iniciarmos a construção do triângulo de Pascal pela linha *zero*. A medida em que o binômio vai se expandindo, os termos da soma passam a ter seus expoentes modificados, um deles de forma crescente e o outro de forma decrescente. Apesar de cansativa, a forma mais didática de se convencer da validade de tais afirmações é desenvolver expansões de binômios com expoentes menores para que se chegue ao padrão esperado.

Seja

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= 1a+1b\\
(a+b)^2 &= 1a^2+2ab+1b^2\\
(a+b)^3 &= 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3\\
(a+b)^4 &= 1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4.
\end{aligned}$$

Observe que os coeficientes das linhas do triângulo de Pascal foram encontrados nos desenvolvimentos acima, o que nos induz a fazer a seguinte conclusão:

$$\binom{n}{0}a^nb^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n}a^0b^n.$$

Sendo

$$(a+b)^n=\underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ vezes}}.$$

Prova: Cada termo do produto é obtido escolhendo-se em cada parêntese um a ou um b e multiplicando-se os escolhidos. Para cada valor de k, $0 \le k \le n$, se escolhermos b em k dos parênteses, a será escolhido em $n-k$ dos parênteses e o produto será igual a $b^ka^{n-k}(0 \le k \le n)$. Isso pode ser feito de $\binom{n}{k}$ modos. Então $(a+b)^n$ é uma soma onde há, para cada $k \in 0,1,2,\cdots,n$, $\binom{n}{k}$ parcelas iguais a $a^{n-k}b^k$, isto é,

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^ka^{n-k}.$$

■

Usando o Binômio de Newton iremos concluir outras propriedades do Triângulo de Pascal.

Teorema 2.7.1. (Teorema das Linhas) *A soma dos elementos da linha n vale 2^n.*

Prova: Considere o desenvolvimento de $(x+a)^n$:

$$(x+a)^n=\binom{n}{0}x^na^0+\binom{n}{1}x^{n-1}a^1+\binom{n}{2}x^{n-2}a^2+\ldots+\binom{n}{n}x^0a^n. \tag{2.2}$$

Fazendo $x = a = 1$, temos

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}1^n1^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}1^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}1^2 + \ldots + \binom{n}{n}1^01^n \tag{2.3}$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}. \tag{2.4}$$

■

Teorema 2.7.2. (Teorema das Colunas) *"A soma dos elementos de uma coluna do triângulo(começando no primeiro elemento da coluna) é igual ao elemento que está avançado uma linha e uma coluna sobre a última parcela da soma."* (MORGADO, 2016, p.86) *Dito de outro modo,*

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \ldots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}. \tag{2.5}$$

Prova: Considere a soma geométrica de razão $q = 1 + x$,

$$x(1+x)^n + x(1+x)^{n+1} + x(1+x)^{n+2} + \cdots + x(1+x)^{n+p}$$

A soma dos n primeiros termos de uma PG é

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{a_{n+1} - a_1}{q-1},$$

então a soma geométrica acima vale

$$\begin{aligned} x(1+x)^n + x(1+x)^{n+1} + x(1+x)^{n+2} + \cdots + x(1+x)^{n+p} &= \frac{x(1+x)^{n+p+1} - x(1+x)^n}{1+x-1} \\ &= (1+x)^{n+p+1} - (1+x)^n. \end{aligned}$$

Determinando, no primeiro e no último membro desta última igualdade, o coeficiente do termox^{n+1}, temos

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

■

Teorema 2.7.3. (Teorema das Diagonais) *"A soma formada pelos elementos começada pelo primeiro elemento de uma diagonal do triângulo de Pascal é igual ao elemento que está imediatamente abaixo da última parcela."* (MORGADO, 2016, p.86)

Prova: Fazendo a soma dos elementos da diagonal, temos

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}.$$

Fazendo uso das combinações complementares dos binômios acima, temos a seguinte igualdade

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+p}{p} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{n+p}{n}. \tag{2.6}$$

Aplicando o Teorema das Colunas no segundo membro da igualdade (2.6), temos

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

Fazendo novamente o uso das combinações complementares,

$$\binom{n+p+1}{n+1} = \binom{n+p+1}{p}.$$

$\blacksquare$

3 Outros Métodos de Contagem

3.1 Introdução

Neste capítulo, estamos interessados na análise, aplicação e demonstração do Princípio da Inclusão e Exclusão. Apresentamos um resultado que fornece o número de elementos da união de uma quantidade finita de conjuntos.

Iniciamos através de exemplos com dois conjuntos, três e com o caso geral. Em seguida fazemos uso do Princípio da Inclusão e Exclusão para chegarmos ao número de Permutações Caóticas .

Iremos inferir os Lemas que fornecem a cardinalidade dos conjuntos com uma quantidade finita de elementos que não sejam consecutivos, os Lemas de Kaplansky, e apresentaremos outro método de contagem diferenciado e de grande utilidade, o Princípio das Gavetas.

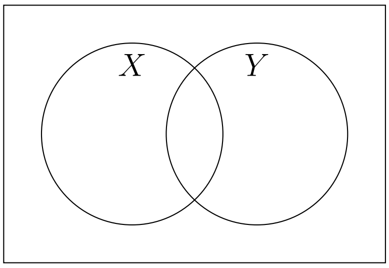
3.1.1 Cardinalidade da União de Dois Conjuntos

Exemplo 3.1. *Em uma sala de* 2^o *ano do ensino médio com exatamente* 30 *alunos foi feita uma pesquisa na disciplina de matemática para saber se eles gostaram mais de análise combinatória ou probabilidade. Foi verificado que* 16 *optaram por análise combinatória,* 8 *por probabilidade e* 4 *assumiram gostar das duas. Quantos alunos gostam de pelo menos um dos assuntos?*

Solução: Seja X o conjunto dos alunos que gostam de análise combinatória e seja Y o conjunto de alunos que preferem probabilidade. Desejamos determinar o número de estudantes que gostem de pelo menos um dos conteúdos abordados, ou seja, queremos determinar $\#(X \cup Y)$. Podemos observar que há 4 elementos comuns aos dois conjuntos X e Y. Além disso há $(16-4)$ elementos que pertencem somente ao conjunto X e $(8-4)$ elementos que pertencem somente ao conjunto Y. Logo,

$$\#(X \cup Y) = (16-4) + (8-4) + 4 = 12 + 4 + 4 = 20 \text{ alunos.}$$

Figura 3.1: Reunião dos conjuntos X e Y.



Assim,

$$\#(X \cup Y) = \#X + \#Y - \#(X \cap Y)\cdot \tag{3.1}$$

□

Para justificar a Expressão (3.1) suponhamos que haja a elementos que pertençam a X e Y ao mesmo tempo, x elementos que pertençam a X, mas não a Y e y elementos que pertençam a Y, mas não a X. Observamos que

$$X \cup Y = (X - Y) \cup (Y - X) \cup (X \cap Y)$$

sendo esta reunião disjunta. Assim, do Princípio Aditivo,

$$\#(X \cup Y) = x + y + a = (x + a) + (y + a) - a = \#X + \#Y - \#(X \cap Y).$$

3.1.2 Cardinalidade da União de Três Conjuntos

Exemplo 3.2. *Quantos inteiros entre* 1 *e* 300*, inclusive, são divisíveis por* 2*,* 3 *ou* 5*?*

Solução. Sejam A, B e C os conjuntos dos inteiros que são divisíveis por, respectivamente, 2, 3 e 5, respectivamente. Então,

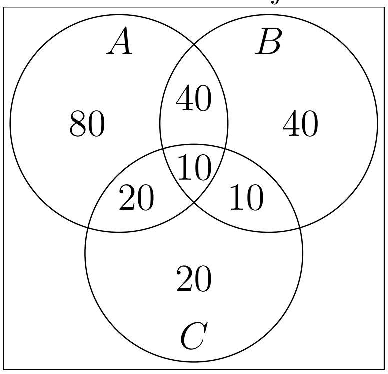
$$\begin{aligned}
\#A &= \left\lfloor \frac{300}{2} \right\rfloor = 150,\\
\#B &= \left\lfloor \frac{300}{3} \right\rfloor = 100,\\
\#C &= \left\lfloor \frac{300}{5} \right\rfloor = 60,\\
\#(A \cap B) &= \left\lfloor \frac{300}{6} \right\rfloor = 50,
\end{aligned}$$

$$\#(A \cap C) = \left\lfloor \frac{300}{10} \right\rfloor = 30,$$

$$\#(B \cap C) = \left\lfloor \frac{300}{15} \right\rfloor = 20,$$

$$\#(A \cap B \cap C) = \left\lfloor \frac{300}{30} \right\rfloor = 10.$$

Figura 3.2: Reunião dos conjuntos A, B e C.



Podemos observar pelo diagrama da Figura 3.1.2 que

$$\begin{aligned}\#(A \cup B \cup C) &= 80 + 40 + 20 + 40 + 20 + 10 + 10 \\ &= 150 + 100 + 60 - 50 - 30 - 20 + 10 \\ &= 220\cdot\end{aligned}$$

Cada elemento representado em $(A \cup B \cup C)$ pode pertencer a apenas um dos conjuntos, a exatamente dois ou até mesmo aos três conjuntos ao mesmo tempo. Se o elemento x , onde $x \in (A \cup B \cup C)$, pertence a exatamente um dos conjuntos dessa união este será considerado uma única vez, não sendo contado de forma repetida pelas interseções apresentadas. No caso do elemento x pertencer a dois conjuntos este será considerado de forma positiva duas vezes, logo deverá ser retirado da interseção entre os conjuntos ao qual ele pertence. Na última situação, a que ele pertença aos três conjuntos, serão três contribuições positivas, neste caso ele pertencerá as três interseções formadas, o que também representa mais três contribuições que deverão ser retiradas para evitar repetições, porém ao retirá-las, o elemento deixa de ser contabilizado, o que nos leva a mais uma contribuição positiva referente a interseção entre os três conjuntos.

$$
\begin{aligned}
\#(A \cup B \cup C) &= \#[A \cup (B \cup C)] \\
&= \#A + \#(B \cup C) - \#A \cap (B \cup C) \\
&= \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - \#[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\
&= \#A + \#B + \#C - \#(B \cap C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) \\
&+ \#[(A \cap B) \cap (A \cap C)] \\
&= \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) \\
&+ \#(A \cap B \cap A \cap C) \\
&= \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) \\
&+ \#(A \cap B \cap C). \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Assim, verificamos que nas duas situações apresentadas as expressões (3.1) e (3.2) são verídicas. A seguir, iremos verificar a cardinalidade da união de n conjuntos finitos, generalizando o problema através do Princípio da Inclusão e Exclusão.

3.2 O Princípio da Inclusão e Exclusão

Teorema 3.2.1. (Princípio da Inclusão e Exclusão.) *O número de elementos na união de n conjuntos finitos, $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ é dado pela expressão*

$$
\begin{aligned}
\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n) = &\sum_{i=1}^{n} \#(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(A_i \cap A_j) \\
&+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) \\
&- \sum_{1 \leq i < j < k < p \leq n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p) + ... \\
&+ (-1)^{n-1} \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n).
\end{aligned}
$$

Prova: Precisamos mostrar que um elemento que pertença a p, para $p = 1, 2, 3, ..., n$, dos conjuntos A_i's é contado pelo Teorema (3.2.1) exatamente uma vez. Considere um elemento pertencente a exatamente p conjuntos, digamos $A_{i_1}, ..., A_{i_p}$. Este elemento será contado p vezes em

$$\sum_{i=1}^{n} \#(A_i).$$

Em

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} \#(A_i \cap A_j)$$

será contado $\binom{p}{2}$, em

$$\sum_{1\leq i<j<k\leq n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$\binom{p}{3}$, e assim sucessivamente até o termo $\#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_p})$, que será contado uma única vez. É claro que a interseção de mais do que p conjuntos não fornecerá nenhuma contribuição.

Somando todas estas contribuições teremos:

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} + ... + (-1)^{p-1}\binom{p}{p} \tag{3.3}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}\binom{p}{0} - \left[\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \cdots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p}\right] &= \binom{p}{0} + \binom{p}{1}(-1)^1(1)^{p-1} \\ &+ \binom{p}{2}(-1)^2(1)^{p-2} + \cdots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p} \\ &= (1-1)^p = 0.\end{aligned}$$

Isto implica que a soma em (3.3) é igual a 1, uma vez que $\binom{p}{0} = 1$, o que conclui a demonstração. ∎

Exemplo 3.3. *De quantas maneiras n casais podem sentar-se ao redor de uma mesa circular de tal forma que marido e mulher não fiquem juntos?*

Solução. Consideramos os casais C_i para $i = 1, 2, 3, ..., n$, definimos os n seguintes conjuntos:

A_i = conjunto das permutações circulares das $2n$ pessoas nas quais os componentes do *i-ésimo* casal estejam juntos para $i = 1, 2, 3, ..., n$.

Assim, a solução do problema proposto será encontrar o complementar da união destes n

conjuntos. Como

$$\begin{aligned}
\#(A_1) &= 2(2n-2)! \\
\#(A_1 \cap A_2) &= 4(2n-3)! \\
\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= 8(2n-4)! \\
\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= 16(2n-5)! \\
&\ \vdots \\
\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n) &= (2!)^n[2n-(n+1)]! \\
&= (2!)^n(n-1)!,
\end{aligned}$$

temos pelo Princípio da Inclusão e Exclusão que o número procurado é dado por:

$$\begin{aligned}
(2n-1)! - \Bigg[\binom{n}{1}[2\,(2n-2)!] - \binom{n}{2}[4\,(2n-3)!] + \binom{n}{3}[8\,(2n-4)!] \\
-\binom{n}{4}[16\,(2n-5)!] + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}[(2!)^n\,(n-1)!]\Bigg] = \\
(2n-1)! + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\,(2)^i\,[2n-(i+1)]! = \\
(2n-1)! + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-2)^i\,(2n-i-1)!.
\end{aligned}$$

3.3 Permutações Caóticas

As permutações caóticas ou desarranjos contabilizam todas as reordenações de n elementos, com $n \in \mathbb{N}$, onde nenhum deles ocupe a sua posição original.

Exemplo 3.4. (PROFMAT - ENQ 2017.1) *Uma permutação de* n *elementos é dita caótica quando nenhum elemento está na posição original. Por exemplo* $(2,1,4,5,3)$ *e* $(3,4,5,2,1)$ *são permutações caóticas de* $(1,2,3,4,5)$*, mas* $(3,2,4,5,1)$*, não é, pois* 2 *está no lugar original. O número de permutações caóticas de* n *elementos é denotado por* D_n*.*

a) Determine D_4 *listando todas as permutações caóticas de* $(1,2,3,4)$*.*

Solução: Iniciaremos a resolução determinando todas as possíveis permutações do conjunto $P = \{1,2,3,4\}$, portanto

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ permutações.}$$

Sejam os conjuntos:

$A = \{$todas as permutações que o algarismo 1 ocupa a 1ª posição$\}$

$B = \{$todas as permutações que o algarismo 2 ocupa a 2ª posição$\}$

$C = \{$todas as permutações que o algarismo 3 ocupa a 3ª posição$\}$

$D = \{$todas as permutações que o algarismo 4 ocupa a 4ª posição$\}$.

Fazendo uso do Princípio Multiplicativo temos que, o número de elementos do conjunto A é $1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$, o conjunto B tem $3 \times 1 \times 2 \times 1 = 6$ elementos, o conjunto C com $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ elementos e o conjunto D formado por $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$. Assim, listaremos todos os 24 elementos do conjunto A, B, C e D:

$$\begin{array}{llll}
(1,2,3,4), & (1,2,3,4), & (1,2,3,4), & (1,2,3,4) \\
(1,2,4,3), & (1,2,4,3), & (1,4,3,2), & (1,3,2,4) \\
(1,3,2,4), & (3,2,1,4), & (2,1,3,4), & (2,1,3,4) \\
(1,3,4,2), & (3,2,4,1), & (2,4,3,1), & (2,3,1,4) \\
(1,4,2,3), & (4,2,1,3), & (4,1,3,2), & (3,1,2,4) \\
(1,4,3,2), & (4,2,3,1), & (4,2,3,1), & (3,2,1,4)
\end{array}$$

Podemos observar que a quantidade de elementos listados é a mesma do conjunto formado por todas as permutações dos algarismos $(1, 2, 3, 4)$, e isso acontece pelo fato de haver repetições nesta listagem, como é o caso da sequência $(1, 2, 3, 4)$ que surge 4 vezes. Como a solução do problema é determinar somente as permutações caóticas, devemos iniciar a contagem subtraindo das permutações totais todas as sequências onde cada um dos algarismos ocupam sua posição de origem, logo $24 - 24$ permutações, porém as sequências pertencentes as interseções entre os conjuntos A e B, A e C, A e D, B e C, B e D, C e D foram subtraídas duas vezes. O número de elementos do conjunto $(A \cup B) = 1 \times 1 \times 2 \times 1 = 2$, o mesmo ocorre para todas outras interseções restantes formando um total de 12 sequências. Até o momento temos $24 - 24 + 12$ permutações. Nas sequências formadas pelas interseções de dois conjuntos estamos considerando as que tem pelo menos dois elementos em sua posição original, o que faz com que as sequências formadas por três elementos em sua posição original tenham sido contadas duas vezes, assim devemos subtraí-las. Os conjuntos $(A \cap B \cap C)$, $(A \cap C \cap D)$, $(A \cap B \cap D)$ e $(B \cap C \cap D)$ têm, cada um, exatamente 1 elemento, totalizando 4, e assim ficando $24 - 24 + 12 - 4$ permutações, o que ainda não contabiliza o número de permutações caóticas procurado, pois a sequência onde os quatro dígitos estão em sua posição original foi dobrada na contagem, precisando ser retirada. Portanto, $D_4 = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9$ permutações caóticas. As nove permutações caóticas são:

$$\begin{array}{ccc} (2,1,4,3), & (3,1,4,2), & (4,1,2,3) \\ (2,3,4,1), & (3,4,1,2), & (4,3,1,2) \\ (2,4,1,3), & (3,4,2,1), & (4,3,2,1) \end{array}$$

□

b) Quantas são as permutações de $(1,2,3,4,5,6,7)$ *que têm exatamente três números em sua posição original?*

Solução: Primeiro escolhemos três números que ficam entre 1 e 7 para ocuparem suas posições originais, o que pode ser feito de $\binom{7}{3} = 35$ maneiras. Devemos fazer uma permutação caótica com as demais 4 posições, e isso pode ser feito de $D_4 = 9$ maneiras. Portanto, temos um total de $\binom{7}{3} \times D_4 = 315$ permutações de $(1,2,3,4,5,6,7)$ que têm extamente três números em suas posições originais. □

Exemplo 3.5. *Sendo o conjunto* $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ *formado por* n *elementos distintos, quantas permutações caóticas ou desarranjos esse conjunto terá?*

Solução: Dentro de um conjunto com n elementos distintos temos exatamente $n!$ permutações ao todo, pertencendo a ele as permutações caóticas e as não caóticas. Fazendo uso dos conhecimentos do Princípio da inclusão e exclusão e separando as permutações originais em conjuntos os quais seus elementos permaneçam em sua posição de origem, chegaremos ao total de permutações caóticas procuradas pelo problema. Considerando n conjuntos, onde em cada um deles teremos a quantidade de permutações em que cada um de seus elementos estará em sua posição original. O conjunto A_1 é formado por todas as permutações em que o primeiro elemento ocupa o seu lugar de origem, o conjunto A_2 é formado por todas as permutações onde o segundo elemento ocupa a segunda posição e assim por diante até o conjunto A_n que é formado por todos as permutações em que o último elemento ocupa a n-ésima posição. A cardinalidade dos conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ é calculada fixando um elemento em sua posição de origem e permutando os $n-1$ elementos restantes, resultando em $1 \times (n-1)! = (n-1)!$ permutações por conjunto. Sendo n a quantidade de conjuntos com a mesma característica teremos $(n-1)! \times n = n!$ permutações onde cada um dos elementos do conjunto X estão em pelo menos uma de suas posições de origem.

As permutações procuradas são as caóticas, logo o número encontrado de permutações onde pelo menos um elemento se mantém em seu lugar de origem deverá ser retirado do total $n!$ de permutações, ficando $n! - n!$. Da mesma forma iremos calcular a quantidade de permutações onde pelo menos dois elementos do conjunto X ocupam o seu lugar de origem. Neste caso devemos escolher dentre um dos n elementos quais dois irão se fixar, e isso pode ser feito de $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{(n-2)!2!}$ maneiras. Em seguida, determinamos através do princípio multiplicativo a quantidade de permutações com dois elementos fixados, que será de $\dfrac{n!}{(n-2)!2!}(n-2)! = \dfrac{n!}{2}$. Estas permutações foram todas subtraídas em dobro da contagem inicial. Sendo assim, agora devem ser acrescentadas novamente, totalizando até o momento $n! - n! + \dfrac{n!}{2!}$ permutações. Esta contagem ainda não nos mostra a quantidade total de permutações caóticas procuradas. Devemos retirar da expressão $n! - n! + \dfrac{n!}{2!}$ a quantidade de permutações que têm pelo menos três elementos em sua posição de origem, o que nos dá o número $n! - n! + \dfrac{n!}{2!} - \binom{n}{3}(n-3)! = n! - n! + \dfrac{n!}{2!} - \dfrac{n!}{3}$. Usando o mesmo raciocínio através do Princípio da inclusão e exclusão, devemos prosseguir somando a cardinalidade do conjunto que tem pelo menos 4 elementos fixos, em seguida subtrair a cardinalidade do conjunto que tem pelo menos 5 elementos fixos até chegar ao conjunto que terá todos os seus elementos em sua posição de origem. Em relação ao último conjunto, que sabidamente possui um único elemento, tem-se que a sua cardinalidade será acrescida ou retirada dependendo da paridade do n. Assim, iremos reescrever a expressão que fornece o número de permutações caóticas utilizando as potências do número (-1):

$$
\begin{aligned}
D_n &= (-1)^0\frac{n!}{0!} - (-1)^1\frac{n!}{1!} + (-1)^2\frac{n!}{2!} + (-1)^3\frac{n}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{n!} \\
&= \frac{n!}{0!} - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \frac{n}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{n!} \\
&= n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
D_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}.
$$

$\square$

É interessante observarmos que D_n é aproximadamente igual a $\dfrac{n!}{e}$; mais precisamente, D_n é o inteiro mais próximo de $\dfrac{n!}{e}$.

n	D_n	$\dfrac{n!}{e}$
1	0	$0,33\ldots$
2	1	$0,7\ldots$
3	2	$2,2\ldots$
4	9	$8,8\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Observe que a nossa afirmação é verdadeira para $n = 1$ e para $n = 2$. Vamos prová-la para $n > 2$. Com efeito sabemos que

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

e portanto que

$$e^{-1} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots$$

Ora, D_n é inteiro e

$$\begin{aligned}
\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| &= \left|n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) - n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots\right)\right| \\
&= n!\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots\right| \\
&\leq n!\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\
&\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots \\
&= \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{1}{n} < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\left|D_n - \frac{n!}{e}\right| < \frac{1}{2}$$

se $n > 2$. Logo, para $n > 2$, D_n é um inteiro situado a uma distância menor que $\dfrac{1}{2}$ do número $\dfrac{n!}{e}$. Assim, D_n é o inteiro mais próximo de $\dfrac{n!}{e}$, se $n > 2$.

3.4 Os Lemas de Kaplansky

3.4.1 Primeiro Lema de Kaplansky

Lema 3.4.1. (Primeiro Lema de Kaplansky) *O número de* p *subconjuntos de* $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ *nos quais não há números consecutivos é* $f(n, p) = \dbinom{n-p+1}{p}$.

Prova: Para inferir o Primeiro Lema de Kaplansky iremos considerar os símbolos " $+$ " para representar os elementos que fazem parte das sequências de números desejadas e os símbolos "$-$"para representar os elementos que não farão parte de tais sequências. Como desejamos sequências de p elementos, utilizaremos p sinais de " $+$ " e $n - p$ sinais "$-$", assim teremos

$$- + - + + - - + \cdots - + - + + - - +$$

Sendo assim, usaremos n sinais, com p deles positivos, de tal forma que os p sinais de "$+$" estejam intercalados, ou seja, que entre quaisquer sinal de positivo tenha pelo menos um negativo. Fixando os sinais de "$-$", teremos:

$$\bigcirc - \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc - \cdots - \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc.$$

Os espaços vazios são os locais que devem ser alocados pelo menos um sinal de $+$ em cada, e isso pode ser feito de $\dbinom{n-p+1}{p}$ formas. ■

Exemplo 3.6. *Quantos são os anagramas da palavra* ***araraquara*** *que não possuem duas letras a consecutivas?*

Solução: A palavra tem 10 letras, onde 5 são a. Logo, temos $n = 10$ e $p = 5$. usando o primeiro Lema de Kaplansky encontraremos $f(10, 5) = \dbinom{10-5+1}{5} = \dbinom{6}{5} = 6$ modos de escolher onde colocar as letras a.

Agora iremos organizar as letras restantes (3 letras r, 1 letra q e 1 letra u) nos cinco espaços restantes, o que pode ser feito de $P_5^3 = \dfrac{5!}{3!} = 20$. Temos, portanto, $6 \times 20 = 120$ modos. □

3.4.2 Segundo Lema de Kaplansky

O Segundo Lema de Kaplansky se diferencia do Primeiro Lema de Kaplansky pelo fato de que o primeiro e o último elemento são considerados consecutivos.

Lema 3.4.2. (Segundo Lema de Kaplansky) *O número de subconjuntos de p elementos de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é, considerando* 1 *e* n *como consecutivos, igual a* $g(n,p) = \dfrac{n}{n-p}\dbinom{n-p}{p}$.

Prova: Para inferir o Segundo Lema de Kaplansky iremos separar o problema em dois casos, onde iremos fixar um dos elementos: o elemento n.

1º caso: n pertence a lista.

Escolhendo o elemento n como um dos p elementos escolhidos para a sequência de números não consecutivos, teremos $n-3$ opções restantes para formarmos o conjunto de p elementos proposto. Fazendo uso do Primeiro Lema de Kaplansky, temos a seguinte situação:

$$\begin{aligned} f(n-3, p-1) &= \binom{(n-3)-(p-1)+1}{p-1} \\ &= \binom{n-p-1}{p-1} \\ &= \frac{(n-p-1)!}{(n-2p)!(p-1)!}. \end{aligned}$$

2º caso: n não pertence a lista.

Excluindo o elemento n das escolhas possíveis, teremos uma "fila" de $n-1$ elementos onde serão selecionados p elementos para formar as sequências de números não consecutivos. Fazendo uso do Primeiro Lema de Kaplansky, temos a seguinte situação:

$$\begin{aligned} f(n-1, p) &= \binom{(n-1)-p+1}{p} \\ &= \binom{n-p}{p} \\ &= \frac{(n-p)!}{(n-2p)!p!}. \end{aligned}$$

A solução do problema é dada pela soma entre as soluções dos dois casos abordados.

$$
\begin{aligned}
\frac{(n-p-1)!}{(n-2p)!(p-1)!}+\frac{(n-p)!}{(n-2p)!p!} &= \frac{p(n-p-1)!+(n-p)!}{(n-2p)!p(p-1)!} \\
&= \frac{p(n-p-1)!+(n-p)(n-p-1)!}{(n-2p)!p(p-1)!} \\
&= \frac{n(n-p-1)!}{(n-2p)!p!}\times\frac{(n-p}{n-p} \\
&= \frac{n}{n-p}\times\frac{(n-p)!}{(n-2p)!p!} \\
&= \frac{n}{n-p}\times\binom{n-p}{p}.
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 3.7. *Em uma mesa redonda estão sentadas* 10 *crianças com idades consecutivas de* 1 *a* 10 *anos. Pretende-se formar um grupo de* 4 *crianças para uma apresentação escolar, com a restrição de que não haja crianças de lugares consecutivos. De quantas formas se pode formar este grupo?*

Solução: Para chegarmos a solução do problema acima usaremos o Segundo Lema de Kaplansky.

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p} &= \frac{10}{10-4}\times\binom{10-4}{4} \\
&= \frac{10}{6}\times\binom{6}{4} \\
&= \frac{5}{3}\times\frac{6!}{2!4!} \\
&= \frac{5}{3}\times 15 \\
&= 25.
\end{aligned}
$$

□

3.5 Princípio das Gavetas de Dirichlet ou Princípio da Casa dos Pombos

A Análise Combinatória divide-se em dois tipos de problemas: problemas de contagem e problemas que determinam a existência ou não de conjuntos de elementos com determinadas propriedades. As técnicas exibidas anteriormente mostravam como resolver problemas de contagem, nesta seção iremos apresentar uma ferramenta simples para a resolução de problemas de existência, o Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas. Na sua forma mais simples o Princípio das Gavetas de Dirichlet pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 3.5.1. (Princípio das Gavetas) *"Se n objetos forem colocados em no máximo, $n-1$ gavetas então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos."*(MORGADO, 2016, p.76)

Prova: É fácil ver que, se nenhuma gaveta contiver 2 ou mais objetos, ou seja, se cada gaveta contiver no máximo 1 objeto, teremos distribuído apenas $n-1$ objetos, o que é uma contradição. ■

O Princípio das Gavetas de Dirichlet pode ser generalizado da seguinte forma:

Teorema 3.5.2. *Se n gavetas são ocupadas por $np+1$ objetos, então pelo menos uma gaveta deverá conter pelo menos $p+1$ objetos.*

Prova: Se cada gaveta contiver no máximo p objetos, como são n gavetas, no máximo np objetos terão sido distribuídos, o que é uma contradição. ■

Exemplo 3.8. *Em um aquário há 7 peixes azuis, 10 peixes verdes, 15 peixes laranjas e 9 peixes amarelos. O aquário deve ser limpo a cada 15 dias. Felipe resolveu brincar com seus filhos no momento em que foi fazer a limpeza do aquário e fez a seguinte pergunta: "Qual o menor número de peixes que devemos retirar (sem olhar) do aquário para que tenhamos certeza de ter tirado ao menos 4 peixes de uma mesma cor?"*

Solução: Para solucionarmos a pergunta feita por Felipe iremos fazer uso do Teorema 3.6.1. Considerando as 4 cores diferentes do problema como sendo gavetas, e tomando $p=3$, temos $4\times 3+1=13$ como resposta. □

Exemplo 3.9. *Prove que todo natural n tem um múltiplo cuja representação decimal contém somente algarismos 0 e 1.*

Solução: Seja n um inteiro positivo. Consideremos a lista dos $n+1$ números:

$$1, 11, 111, 1111, \ldots, \underbrace{1111\ldots111}_{n+1 \text{ vezes}}$$

Na divisão por n temos n possibilidades para o resto. Logo, pelo Princípio das Gavetas, pelo menos dois destes números terão o mesmo resto. Sejam, dois destes números:

$$\underbrace{1111\ldots111}_{j \text{ vezes}} \text{ e } \underbrace{1111\ldots111}_{i \text{ vezes}}, \text{ com j } > \text{ i }.$$

Além disso, a diferença entre eles é divisível por n.

$$\underbrace{1111\ldots111}_{j \text{ vezes}} - \underbrace{1111\ldots111}_{i \text{ vezes}} = \underbrace{11\ldots11}_{j-i \text{ vezes}}\underbrace{00\ldots00}_{i \text{ vezes}}.$$

□

Exemplo 3.10. *Se a e n são números naturais primos entre si, então pelo menos um dos números $a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ deixa resto 1 quando dividido por n.*

Solução: Sendo os números a e n primos entre si, a divisão de qualquer potência de a por n não deixará resto 0. Assim, na divisão por n, teremos $n-1$ restos. Iremos supor que as divisões das potências de a por n não deixem resto 1. Assim, teremos $n-1$ divisões e $n-2$ restos e pelo Princípio das Gavetas, podemos garantir que há pelo menos dois números que deixam o mesmo resto. Sejam os números a^k e a^i, com $k > i$, dois números que na divisão por n deixam o mesmo resto. Logo,

$$a^k - a^i = nq$$
$$a^i(a^{k-i} - 1) = nq.$$

Assim,

$$n \mid a^{k-i} - 1,$$

então,

$$a^{k-i} \equiv 1 \bmod n.$$

Absurdo, pois $a^{k-i} \equiv 1 \bmod n$ é claramente um número da lista acima. □

4 Aplicações

Neste capítulo, abordamos algumas aplicações da Análise Combinatória com ênfase em Probabilidade e Teoria dos números. As aplicações utilizam a metodologia apresentada nos Capítulos 2 e 3.

4.1 Probabilidade

Nesta seção apresentamos alguns exemplos com o uso dos métodos de contagem em Probabilidade. Especificamente em Probalilidade com espaços amostrais finitos, um dos assuntos da Matemática que mais utiliza a Análise Combinatória.

Exemplo 4.1. *Suponhamos que de n objetos escolhemos r ao acaso com reposição. Qual é a probabilidade de que nenhum objeto seja escolhido mais de uma vez?*

Solução: Seja,

$$\begin{aligned}
\#(A) &= \text{número de modos de escolher } r \text{ objetos dentre } n \text{ sem reposição} \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1)). \\
\#(\Omega) &= \text{número de modos de escolher } r \text{ objetos dentre os } n \text{ com reposição} \\
&= n^r.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} \\
P(A) &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-1))}{n^r} \\
P(A) &= \frac{n}{n} \times \frac{(n-1)}{n} \times \frac{(n-2)}{n} \times \cdots \times \frac{(n-(r-1))}{n} \\
P(A) &= 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{(r-1)}{n}\right).
\end{aligned}$$

Note que,

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} P(A) = 1.$

$$(ii) P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{\dfrac{n!}{(n-r)!}}{n^r} = \frac{n!}{(n-r)!n^r}.$$

Isto significa que as extrações dos r objetos com ou sem reposição são procedimentos equivalentes. □

Exemplo 4.2. *Qual é a probabilidade de uma permutação dos números* $(1, 2, 3, \ldots, n)$, *com* $k < n$, *ter exatamente* k *elementos no seu lugar primitivo?*

Solução: Devemos escolher os k elementos que ficarão em seus lugares originais e isso pode ser feito de $\binom{n}{k}$ modos e terão apenas 1 modo de se posicionarem em seus lugares de origem. Os $n - k$ números restantes se acomodarão de D_{n-k} modos. Assim, a probabilidade pedida é de:

$$\frac{\binom{n}{k} \times 1 \times D_{n-k}}{n!},$$

onde $n!$ é o total de permutações entre o conjunto dado. Uma vez que

$$D_{n-k} = (n-k)! \left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right]$$

temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{n}{k} \times 1 \times D_{n-k}}{n!} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \times (n-k)! \times \left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right] \times \frac{1}{n!} \\
&= \frac{1}{k!} \times \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right].
\end{aligned}$$

□

Exemplo 4.3. *Um mágico fará em uma de suas apresentações um número com* n *bolas de cores distintas e as distribuirá em* p *chapéus. Qual a probabilidade de que todos os chapéus terminem o número com pelo menos* 1 *bola?*

Solução: Se $n < p$, segue do Princípio das Gavetas que ao menos um chapéu ficará vazio e portanto a probabilidade desejada é nula. Se $n \geq p$, através do princípio multiplicativo o número de casos possíveis é

$$\#(\Omega) = \underbrace{p \times p \times \cdots \times p}_{n \text{ vezes}} = p^n.$$

Separemos o número de casos favoráveis em conjuntos, onde X_1 é o conjunto que representa todas as distribuições de bolas que deixam o primeiro chapéu vazio, X_2 o conjunto que representa as distribuições onde o segundo chapéu estará vazio e assim sucessivamente até o conjunto X_p que representa as distribuições onde o chapéu p ficará vazio. Assim

$$\begin{gathered}
\#(X_1) = \#(X_2) = \cdots = \#(X_p) = (p-1)^n \\
\#(X_1 \cap X_2) = \#(X_1 \cap X_3) = \cdots = \#(X_{p-1} \cap X_p) = (p-2)^n \\
\vdots \\
\#(X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_p) = 0\cdot
\end{gathered}$$

Portanto, pelo Princípio da Inclusão e Exclusão,

$$\#(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_p) = \binom{p}{1}(p-1)^n - \binom{p}{2}(p-2)^n + \cdots + \binom{p}{p-1}(1)^n(-1)^{p-1}$$

$$P[\#(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_p)] = \frac{\binom{p}{1}(p-1)^n - \binom{p}{2}(p-2)^n + \cdots + \binom{p}{p-1}(1)^n(-1)^{p-1}}{p^n}$$

$$P[\#(X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_p)]^c = 1 - \frac{\binom{p}{1}(p-1)^n - \binom{p}{2}(p-2)^n + \cdots + \binom{p}{p-1}(1)^n(-1)^{p-1}}{p^n}.$$

□

Exemplo 4.4. *Em uma roda são colocadas n pessoas. Qual a probabilidade de duas dessas pessoas ficarem juntas?*

Solução: Iniciaremos calculando o número de formas dessas n pessoas se posicionarem na roda e isso pode ser feito de $(n-1)!$ modos.

Para calcular os casos favoráveis teremos $(n-2)!2!$ modos de posicioná-las com o casal estando junto. Assim a probabilidade pedida é

$$\frac{(n-2)!2!}{(n-1)!} = \frac{2}{n-1}.$$

$\square$

Exemplo 4.5. *Há* 8 *carros estacionados em* 12 *vagas em fila. Determine a probabilidade:*

a) *das vagas vazias serem consecutivas.*

Solução: Ao todo existem $\binom{12}{4} = 495$ modos de escolhermos as vagas que irão ficar vazias.

Para o total de casos favoráveis há 9 possibilidades $(1,2,3,4), (2,3,4,5), (3,4,5,6), (4,5,6,7),$ $(5,6,7,8), (6,7,8,9), (7,8,9,10), (8,9,10,11), (9,10,11,12)$.

Assim, a probabilidade procurada é

$$\frac{9}{495} = \frac{1}{55}.$$

$\square$

b) *de não haver duas vagas vazias adjacentes.*

Solução: Para evitar as vagas vazias adjacentes devemos inicialmente posicionar os carros e escolher as vagas vazias entre os espaços formados entre os dois carros, onde os círculos representam as vagas ocupadas pelos carros.

$$- \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc -$$

A escolha dos espaços vazios pode ser feitas de $\binom{9}{4} = 126$ modos.

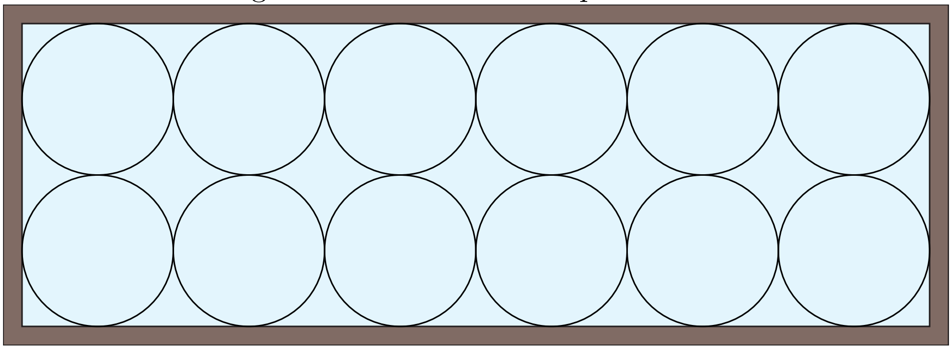
Portanto a probabilidade pedida é

$$\frac{126}{495} = \frac{14}{55}.$$

$\square$

Exemplo 4.6. *Um aluno desenhou no quadro retangular de sua sala* 12 *círculos adjacentes de mesmo raio* r*, conforme o desenho abaixo.*

Figura 4.1: Desenho feito pelo aluno.



A professora ao entrar na sala e ver a imagem resolve fazer os seguintes desafios a turma:

a) *Quantos triângulos com vértices no centro do círculo podem ser formados?*

Solução: Para formar um triângulo precisamos fazer a escolha de três vértices. Como os círculos são tangentes e alinhados em duas filas devemos ter um vértice escolhido na fila superior e dois vértices escolhidos na fila inferior ou dois na fila superior e um na fila inferior.

Assim o número de triângulos formados é dado por

$$\binom{6}{1}\binom{6}{2} + \binom{6}{2}\binom{6}{1} = 6 \times 15 \times 2 = 180.$$

□

b) *Qual a probabilidade de ao se escolher um desses triângulos, por acaso, um deles seja retângulo?*

Solução: Se fixarmos como vértice, o qual será o referencial para o ângulo reto, um dos círculos extremos o próximo vértice que formará um dos catetos do triângulo já estará definido como sendo o círculo imediatamente acima ou abaixo do círculo escolhido inicialmente. Para o próximo e último vértice teremos 5 escolhas de círculos, neste caso como há $\binom{4}{1}$ formas de se escolher o círculo extremo temos $\binom{4}{1} \times 5 = 20$ triângulos na primeira situação. O mesmo acontecerá com o segundo círculo da fila, este formará $\binom{4}{1} \times 4 = 16$ triângulos, o terceiro $\binom{4}{1} \times 3 = 12$ triângulos, o quarto $\binom{4}{1} \times 2 = 8$ triângulos e o quinto $\binom{4}{1} \times 1 = 4$ triângulos, gerando um total de $20+16+12+8+4 = 60$ triângulos retângulos. Assim, a probabilidade buscada é dada por $\frac{60}{180} = \frac{1}{3}$. □

c) *Qual a probabilidade de o triângulo escolhido ter área máxima?*

Solução: Para que a área do triângulo escolhido seja máxima é necessário que o centro dos círculos extremos de uma mesma linha façam parte dele e isso pode ser feito de $\binom{2}{1}$ formas. Tendo a base fixadas sobram $\binom{6}{1}$ escolhas para o último vértice, pois dessa forma todos os triângulos selecionados teriam mesma altura e mesma base de tamanho máximo. Portanto $\binom{2}{1}\binom{6}{1} = 12$ triângulos de área máxima, o que nos fornece como probabilidade pedida $\frac{12}{180} = \frac{1}{15}$. □

4.2 Geometria

A Geometria divide-se em várias subáreas e estuda a parte da matemática relacionada a formas, figuras, espaços, dimensões, construções e tamanho. Por isso a geometria, além de ser umas das áreas mais antigas da matemática, é uma área tão importante em todos os ciclos de estudo, do ensino básico ao superior. A Análise Combinatória também auxilia a Geometria em algumas de suas demonstrações, veremos nos exemplos que seguem.

Exemplo 4.7. *Mostre que o número de diagonais de um polígono de n lados é* $\frac{n(n-3)}{2}\cdot$

Solução I: Diagonais de um polígono são segmentos de reta traçados no interior de um polígono convexo e com extremidades em dois vértices. Num polígono de n lados, temos n vértices. Para confirmar a afirmação feita devemos calcular o número de segmentos que ligam dois vértices de um polígono, isto pode ser feito de $\binom{n}{2}$ formas $\cdot$ Porém dentro desta contagem estão os segmentos que representamos lados do polígono.
Daí, o número de diagonais é dado por:

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{2} - n =& \frac{n!}{(n-2)!2!} - n \\
=& \frac{n(n-1)}{2} - n \\
=& \frac{n^2 - n - 2n}{2} \\
=& \frac{n^2 - 3n}{2} \\
d_n =& \frac{n(n-3)}{2}\cdot
\end{aligned}
$$

□

Outra forma de solução para este problema é fazendo uso do Princípio Multiplicativo.

Solução II: Num polígono de n lados, temos n vértices e para calcular o número de diagonais formadas, devemos calcular o número de segmentos que ligam dois vértices desse polígono, excluindo a ligação feita entre vértices consecutivos. Desta forma, fazendo uso do Princípio Multiplicativo, o número de diagonais formadas é

$$n \times (n-3).$$

Como a ordem em que os vértices que formam as diagonais encontradas é irrelevante, elas são contadas duas vezes. Assim,

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

□

4.3 Teoria Elementar dos Números

A Teoria Elementar dos Números é uma área que aborda assuntos recorrentes em olimpíadas matemáticas. Temas como: propriedades de números inteiros, indução matemática, divisibilidade, números primos, congruências, entre outros. Nesta seção iremos abordar aplicações na área da divisibilidade, congruência e números primos que usem a Análise Combinatória como ferramenta para a demonstração de teoremas ou resolução de problemas.

Pierre de Fermat, no século XVII, resolveu generalizar um fato descoberto por chineses 500 a.C. Os chineses descobriram que se p é primo, então p divide $2^p - 2$. Para a demonstração do Pequeno Teorema de Fermat, usaremos o lema a seguir:

Lema 4.3.1. *seja p um número primo. Os números $\binom{p}{i}$, onde $0 < i < p$, são todos números divisíveis por p.*

Prova: O resultado é obviamente válido para $i = 1$. Iremos supor $1 < i < p$. Assim,

$$\begin{aligned}\binom{p}{i} &= \frac{p!}{(p-i)!i!} \\ &= \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-i+1)(p-i)!}{(p-i)!i!} \\ &= \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-i+1)}{i!}.\end{aligned}$$

Como $(i!, p) = 1$ (onde $(i!, p)$ é o máximo divisor comum entre $i!$ e p) e $i!$ divide $p(p-1)(p-2)\cdots(p-i+1)$, então, $i!$ divide $(p-1)(p-2)\cdots(p-i+1)$. Assim, existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que $(p-1)(p-2)\cdots(p-i+1) = k \cdot i!$. Daqui,

$$\begin{aligned}\binom{p}{i} &= \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-i+1)}{i!}\\ &= \frac{p(k \times i!)}{i!}\\ &= p \times k\end{aligned}$$

e o resultado segue. ■

Teorema 4.3.1. (Pequeno Teorema de Fermat) *Dado um número primo p, tem-se que p divide o número $a^p - a$, para todo $a \in \mathbb{Z}\cdot$*

Prova: Para $p = 2$ o resultado é óbvio, pois $a^2 - a = a(a-1)$ que é um número par. Supondo $p \neq 2$ e primo, a prova é feita por indução em a. Note que para $a = 0$, o resultado é imediato, pois $0^p - 0 = 0$ e p divide 0. Suponhamos o resultado válido para a, devemos provar sua validade para $a + 1$. Assim,

$$\begin{aligned}(a+1)^p - (a+1) =& \binom{p}{0}a^p1^0 + \binom{p}{1}a^{p-1}1^1 + \binom{p}{2}a^{p-2}1^2 + \cdots\\ &+ \binom{p}{p-1}a^1 1^{p-1} + \binom{p}{p}a^0 1^p - a - 1\\ =& a^p - a + \binom{p}{1}a^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}a\cdot\end{aligned}$$

Como pela hipótese de indução p divide $a^p - a$ e pelo Lema 4.3.1 p divide $\binom{p}{1}a^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}a$, o resultado segue. ■

Teorema 4.3.2. (Eduard Lucas) *Seja p um número primo e sejam $m = m_0 + m_1p + m_2p^2 + \cdots en = n_0 + n_1p + n_2p^2 + \cdots$ dois números naturais representados relativamente à base p. Tem-se que*

$$\binom{m}{n} \equiv \binom{m_0}{n_0}\binom{m_1}{m_2}\binom{m_2}{n_2}\cdots \ mod\ p$$

A demonstração faz-se por indução e fazendo-se uso do lema a seguir.

Lema 4.3.2. *Seja $m, n, p \in \mathbb{N}$, com p primo e $n \leq m$ e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, com $\alpha, \beta < p$. Tem-se que*

$(i)\binom{mp}{np} \equiv \binom{m}{n}$ *mod p*

$(ii)\binom{mp+\alpha}{np+\beta} \equiv \binom{m}{n}\binom{\alpha}{\beta}$ *mod p.*

Prova do Teorema de Eduard Lucas: Façamos indução em k. Para $m = m_0$ e $n = n_0$ o resultado é óbvio, pois $\binom{m_0}{n_0} \equiv \binom{m_0}{n_0}$ mod p. Para $m = m_0 + m_1p$ e $n = n_0 + n_1p$, aplicando (i), temos

$$\binom{m_1}{n_1} \equiv \binom{m_1p}{n_1p} \text{mod } p.$$

Multiplicando as congruêcias $\binom{m_0}{n_0} \equiv \binom{m_0}{n_0}$ mod p e $\binom{m_1}{n_1} \equiv \binom{m_1p}{n_1p}$ mod p, teremos:

$$\binom{m_0}{n_0}\binom{m1}{n1} \equiv \binom{m_0}{n_0}\binom{m_1p}{n_1p} \text{mod } p.$$

Aplicando (ii)

$$\binom{m_0}{n_0}\binom{m1}{n1} \equiv \binom{m_0}{n_0}\binom{m_1p}{n_1p} \equiv \binom{m_1p+m_0}{n_1p+n_0} \equiv \binom{m}{n} \text{mod } p.$$

Assim, fica válido o caso base da indução. Fazendo $m = m_0+m_1p+\cdots+m_kp^k+m_{k+1}p^{k+1}$ e $n = n_0 + n_1p + \cdots + n_kp^k + n_{k+1}p^{k+1}$, pela hipótese de indução, temos

$$\binom{m_0}{n_0}\binom{m_1}{n_1}\cdots\binom{m_k}{n_k} \equiv \binom{m_0+m_1p+\cdots+m_kp^k+m_{k+1}p^{k+1}}{n_0+n_1p+\cdots+n_kp^k+n_{k+1}p^{k+1}} \text{mod } p.$$

Assim,

$$\binom{m_0}{n_0}\binom{m_1}{n_1}\cdots\binom{m_k}{n_k}\binom{m_{k+1}}{n_k+1} \equiv \binom{m_0}{n_0}\binom{m_1+m_2p+\cdots+m_{k+1}p^k}{n_1+n_2p+\cdots+n_{k+1}p^k} \text{mod } p.$$

Aplicando (i), temos

$$\binom{m_0}{n_0}\binom{m_1p+m_2p^2+\cdots+m_{k+1}p^{k+1}}{n_1p+n_2p^2+\cdots+n_{k+1}p^{k+1}} \text{mod } p.$$

Aplicando (ii), temos

$$\binom{m_0}{n_0}\binom{m_1p+m_2p^2+\cdots+m_{k+1}p^{k+1}}{n_1p+n_2p^2+\cdots+n_{k+1}p^{k+1}} \equiv \binom{m_0+m_1p+\cdots+m_kp^k+m_{k+1}p^{k+1}}{n_0+n_1p+\cdots+n_kp^k+n_{k+1}p^{k+1}}$$
$$\equiv \binom{m}{n} \text{mod } p.$$

■

Exemplo 4.8. *Ache o resto da divisão por 7 de* $\binom{2300}{1044}$.

Solução. A resolução deste exemplo se dará fazendo uso do Teorema de Eduard Lucas. Para isso iremos colocar os números 2300 e 1044 na base 7. Assim,

$$\begin{aligned}
2300 &= 328 \times 7 + 4 \\
&= [(46 \times 7) + 6] \times 7 + 4 \\
&= 46 \times 7^2 + 6 \times 7 + 4 \\
&= [(7 \times 6) + 4] \times 7^2 + 6 \times 7 + 4 \\
&= 7^3 \times 6 + 7^2 \times 4 + 7^1 \times 6 + 7^0 \times 4\cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1044 &= 149 \times 7 + 1 \\
&= [(21 \times 7) + 2] \times 7 + 1 \\
&= 7^2 \times 21 + 7 \times 2 + 1 \\
&= 7^2 \times (7 \times 3) + 7 \times 2 + 1 \\
&= 7^3 \times 3 + 7^2 \times 0 + 7^1 \times 2 + 7^0 \times 1.
\end{aligned}$$

Aplicando a fatoração dos números 2300 e 1044 no Teorema de Eduard Lucas, temos

$$\binom{2300}{1044} \equiv \binom{4}{1}\binom{6}{2}\binom{4}{0}\binom{6}{3} = 4 \times 15 \times 1 \times 20 = 1200 \equiv 3 \text{mod } 7.$$

Logo, deixa resto 3.

Exemplo 4.9. *Mostre, para todo $n \in \mathbb{N}$, que n^2 divide $(n+1)^n - 1$.*

Solução: Desenvolvendo o binômio $(n+1)^n$, temos:

$$\begin{aligned}
(n+1)^n &= \binom{n}{0}n^n n^1 + \binom{n}{1}n^{n-1}1^1 + \binom{n}{2}n^{n-2}1^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}n^1 1^{n-1} + \binom{n}{n}n^0 1^n \\
&= \left(n^n + \binom{n}{1}n^{n-1} + \binom{n}{2}n^{n-2} + \cdots + n^2 + 1\right) - 1 \\
&= n^n + \binom{n}{1}n^{n-1} + \binom{n}{2}n^{n-2} + \cdots + n^2\cdot
\end{aligned}$$

Logo divisível por n^2. □

4.4 Progressões

Exemplo 4.10. *Mostre que a soma dos n termos de uma Progressão Aritmética* (PA) *finita é* $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Solução I: Seja a PA dada por:

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n) = (a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \cdots, a_1 + (n-1)r).$$

Temos que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

ou, equivalentemente,

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1$$

Somando-se estas igualdades membro a membro, obtemos,

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_1 + r + a_{n-1}) + (a_1 + 2r + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) \\ &= \frac{(a_1 + a_n)}{2} n. \end{aligned}$$

□

Esta é a demonstração mais usual utilizada para a prova da soma dos n termos de uma P.A. finita.

Podemos ter a demonstração desta soma dos n termos de uma PA finita da seguinte forma:

Solução II: Seja,

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \cdots + [a_1 + (n-1)r]. \tag{4.1}$$

Então,

$$S_n = a_1 n + [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]r \tag{4.2}$$

A soma $[1+2+3+\cdots+(n-1)]$ pode ser escrita como o número de elementos (N) acima ou abaixo da diagonal principal de uma matriz quadrada $(A_{n\times n})$.

$$A = (a_{i,j})_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Fazendo a contagem dos elementos da diagonal principal da matriz A, temos na primeira linha $n-1$ elementos, na segunda linha $n-2$ elementos, e assim, sucessivamente até a última linha com 1 elemento. Assim $N=[1+2+3+\cdot+(n-1)]$. Temos que

$$n^2 = 2N + n$$

de onde extraímos

$$\begin{aligned} N &= \frac{n^2-n}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

De (4.2),

$$S_n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} r.$$

Note que

$$S_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} r, \forall n \geqslant 1.$$

Observe que do termo geral $a_n = a_1 + (n-1)r$, temos que $r = \dfrac{a_n - a_1}{n-1}$. Assim,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2a_1 n}{2} + \frac{a_n - a_1}{n-1} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{2a_1 n + (a_n - a_1)n}{2} \\ &= \frac{a_1 n + a_n n}{2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

□

5 Considerações Finais

Neste trabalho mostramos aplicações dos métodos de contagem em Teoria Elementar dos números, Geometria, Progressões e mais especificamente em Probabilidade. A Análise Combinatória é vista por alunos e professores como um assunto complicado e mecanizado. Isto é devido ao fato de ser repassado ao estudante a ideia de que problemas de contagem são meras aplicações de fórmulas, o que não é verdade. A falta de contextualização e de estratégias alternativas de resolução dos problemas produzem este cenário.

Sem dúvida, o Princípio da Inclusão e Exclusão, que usa a teoria dos conjuntos e se estende às Permutações Caóticas, o Princípio das Gavetas, e os Lemas de Kaplansky, geralmente cobrados em vestibulares para acesso ao Ensino Superior e em olimpíadas de matemática de âmbito nacional, são assuntos que não devem ser desprezados. Acreditamos que os exemplos de aplicações do Capítulo 4 são relevantes para motivar a introdução desses métodos de contagem no currículo do Ensino Médio.

Finalmente, destacamos a importância dos métodos de contagem abordados, em outros ramos da Matemática. Obviamente, a utilização de técnicas de contagem mais sofisticadas devem ser recomendadas após o Princípio Multiplicativo estar bem sedimentado para o estudante.

Referências

CERIOLI, Márcia R.; VIANA, Petrucio. Minicurso de Combinatória de Contagem. II COLÓQUIO DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUL, v. 2, 2012.

DE OLIVEIRA SANTOS, José Plínio; MELLO, Margarida Pinheiro; MURARI, Idani Theresinha Calzolari. Introdução à análise combinatória. Ed. Ciência Moderna, 2007.

HEFEZ, Abramo. Aritmética. 2ª Edição. Rio de Janeiro: SBM (Coleção PROFMAT), 2016.

MORGADO, Augusto César et al. Temas e Problemas Elementares. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2005.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Matemática discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MORGADO, Augusto César Oliveira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; CARVALHO, João Bosco Pitombeira; FERNANDEZ, Pedro. 10ª Edição. Análise Combinatória e Probabilidade, SBM, 2016.

ROSS, Sheldon. Probabilidade: um curso moderno com aplicações. Bookman Editora, 2010.

ZEITZ, Paul. The art and craft of problem solving. New York: John Wiley, 1999.