UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMATICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

RADIVAL DA COSTA NERY JÚNIOR

IMAGENS CONCEITUAIS E CONFLITOS COGNITIVOS NO ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES

VITÓRIA DA CONQUISTA
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

RADIVAL DA COSTA NERY JÚNIOR

IMAGENS CONCEITUAIS E CONFLITOS COGNITIVOS NO ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede - PROFMAT como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática, pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Antônio de Andrade Bortoloti.

VITÓRIA DA CONQUISTA

2018

N369i Nery Júnior, Radival da Costa.

Imagens conceituais e conflitos cognitivos no estudo de sistemas lineares. / Radival da Costa Nery Junior, 2018.

69f. il.

Orientador (a): Dr. Marcio Antônio de Andrade Bortoloti.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2018.

Inclui referências. 68 - 69.

1. Estudos de matemática – Processos cognitivos. 2. Sistemas lineares – Imagem e definição conceitual. 3. Conflitos cognitivos. I. Bortoloti, Marcio Antônio de Andrade. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD: 512.5

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção- CRB 5/1890

UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

RADIVAL DA COSTA NERY JÚNIOR

IMAGENS CONCEITUAIS E CONFLITOS COGNITIVOS NO ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede - PROFMAT como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática, pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB.
Orientador: Prof. Dr. Marcio Antônio de Andrade Bortoloti.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcio Antônio de Andrade Bortoloti (Orientador)

Prof.ª Dr.ª Roberta D´Angela Menduni Bortoloti

Prof.ª Dr.ª Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

VITÓRIA DA CONQUISTA
2018

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Radival da Costa Nery e Sônia Maria Castro Públio Nery e meu irmão Thiago Castro Nery pelo apoio e complacência em cada passo da minha vida acadêmica.

À minha esposa Giane Karla Souza Oliveira Nery e minha filha Ana Katarina Oliveira Nery pelo companheirismo e compreensão nos momentos de ausência.

Agradecer aos professores do PROFMAT, em especial ao Professor Doutor Márcio Antônio de Andrade Bortoloti, pela atenção e rigor ao me orientar.

Aos meus colegas de mestrado, pela amizade e apoio sempre que necessário.

Aos amigos que sempre estavam próximos nos momentos mais turbulentos.

Enfim, a todos que de uma forma ou de outra contribuíram para que eu continuasse nesta caminhada.

RESUMO

O trabalho tem como base a teoria criada por David Tall e Shlomo Vinner, para investigação dos processos cognitivos inerentes ao estudo de matemática. Para tal, foi realizada uma pesquisa de campo exploratória, com estudantes de uma das turmas do segundo ano do ensino médio do Instituto Federal Baiano – Campus Guanambi, no ano de 2017, com o objetivo de identificar imagens conceituais sobre o conteúdo Sistemas Lineares, para entender como ocorre o processo cognitivo desses estudantes após estudarem o assunto pelos métodos convencionais e analisar os conflitos cognitivos gerados por elas. A participação da turma se deu por meio da realização de uma prova sobre o conteúdo, que serviu como instrumento de coleta de dados. Na análise dos dados as imagens conceituais evocadas foram listadas e discutidas, obtendo assim, um panorama que possibilitou apontar a relevância dessas imagens no aprendizado dos estudantes e a importância de que o professor as identifique e as utilize como elementos a serem considerados em seu planejamento para aumentar a eficácia do processo de aprendizagem ao evitar a ocorrência dos conflitos cognitivos.

Palavras – Chave: Imagem conceitual, Definição conceitual, Conflitos cognitivos e Sistemas Lineares.

ABSTRACT

The work is based on the theory created by David Tall and Shlomo Vinner, to investigate the cognitive processes inherent to the study of mathematics. To do this, an exploratory field research was carried out, with students from the second year high school class of the Instituto Federal Baiano - Campus Guanambi, who taught in the year 2017, with the objective of identifying conceptual images about the content linear systems to understand how the cognitive process of these students happens after studying the subject by conventional methods and analyzing the cognitive conflicts generated by them. The participation of the class took place through the accomplishment of a test on linear systems, that served as instrument of data collection. In the analysis of the data, a qualitative approach was used in which the conceptual images evoked were listed and discussed, thus obtaining a panorama that allowed to point out the relevance of the conceptual images in the students' learning and the importance of the teacher knowing them and using them as elements to be considered in their planning to increase the effectiveness of the learning process by avoiding the occurrence of cognitive conflicts.

Key Words: Conceptual Image, Conceptual Definition, Cognitive Conflicts and Linear Systems.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A precisão, o rigor lógico e a abstração são características da matemática que fazem com que as pessoas tenham que pensar em assuntos relacionados a ela de maneira diferente da que pensam em coisas do cotidiano.

Ao se pensar em uma árvore, por exemplo, não se busca na mente o seu conceito como descrito num dicionário (Vegetal lenhoso, em geral de porte alto, que apresenta um caule principal ereto, ou tronco, fixado no solo com raízes, e que se ramifica em galhos carregados de folhas que se constituem em copa; madeira.) (ÁRVORE, 2018). A nossa mente se utiliza de imagens mentais relacionadas às experiências como é salientado por Tall e Vinner (1981, p. 151)

> Muitos conceitos que usamos felizmente não são formalmente definidos em tudo, aprendemos a reconhecê-los pela experiência e sua utilização em contextos apropriados. Mais tarde, esses conceitos podem ser refinados em seu significado e interpretado com o aumento da sutileza com ou sem o luxo de uma definição precisa. (tradução nossa)[1]

Esse modo de se pensar é suficiente para a compreensão de várias informações transmitidas a respeito de temas cotidianos, porém, na matemática, os conceitos precisam ser trabalhados com maior rigor e precisão devido a sua natureza lógica.

Para exemplificar um caso em que as imagens mentais associadas podem ser insuficientes na matemática, pode ser usado o losango, que que é definido como um quadrilátero que possui todos os lados iguais. No entanto, ao se ouvir a palavra losango, provavelmente virão à mente imagens de losangos com ângulos diferentes de noventa graus e, em uma posição em que uma das diagonais fique na vertical, como os que aparecem na bandeira do Brasil e nas cartas de ouro do baralho.

Esse tipo de associação pode induzir os estudantes a erros como o de não considerar quadrados como losangos, ou até de pensar que, um losango que esteja com um par de lados na horizontal, não o seja, devido a posição que se costuma encontrá-lo no cotidiano. Conforme afirma Tall, “Pode ser que uma definição formal seja apresentada ao estudante no início de um curso de matemática, mas ser suas imagens conceituais

---

[1] Many concepts which we use happily are not formally defined at all, we learn to recognise them by experience and usage in appropriate contexts. Later these concepts may be refined in their meaning and interpreted with increasing subtlety with or without the luxury of a precise definition.

serem embasadas nos exemplos e exercício utilizados no curso" (TALL, 1980, p.73).[2] Se fazendo necessário a apresentação de exemplos e contraexemplos que evidenciem as mais diversas formas que um conceito pode ser representado ou trabalhado.

No decorrer da vida, aprendemos os conceitos a partir de exemplos e comparações para formarmos definições a respeito deles. Por exemplo, quando uma pessoa pergunta o que é uma casa, não se costuma ter a resposta (edifício de formatos e tamanhos variados, geminado de um ou dois andares, quase sempre destinado à habitação). Em geral, são dados exemplos de casa que o indivíduo possa conhecer, ou de características inerentes a uma casa.

Apesar da definição do dicionário estar muito bem constituída, caso a pessoa que receba essa informação e não conheça nenhum exemplo de casa, as imagens que ela formará poderão ser de algo diferente de uma casa. E, se além da definição, essa pessoa receber exemplos de casas que não abrangem determinadas características, como modelos que apresentam apenas um pavimento, pode acontecer dela não considerar um sobrado de dois pavimentos como casa, mesmo com a quantidade de pavimentos citada na definição, as imagens mentais que o indivíduo possui podem levá-lo a ignorar detalhes da definição.

Algo similar acontece no ensino de matemática, como citam Vinner e Dreyfus (1989),

> Muitas definições são introduzidas em estudantes de ensino médio ou universitário em um momento ou outro. O aluno, por outro lado, não usa necessariamente a definição ao decidir se um determinado objeto matemático é um exemplo ou um contraexemplo do conceito. Na maioria dos casos, ele ou ela decide com base em uma imagem conceitual, ou seja, o conjunto de todas as imagens mentais associadas na mente do aluno com o nome do conceito, juntamente com todas as propriedades que os caracterizam. (p.356, tradução nossa) [3]

De acordo com a teoria, quando um estudante se depara com um conceito o que vem à sua mente é considerada uma parte da imagem conceitual que o mesmo tem formada acerca do conceito em questão e, o natural, é que ele se utilize dela para

---

2 It may well happen that a formal definition is given early on in a mathematics course but the examples and work which follows creates quite a different concept image in the individual students.

3 Many of these definitions are introduced to high school or college students at one time or another. The student, on the other hand, does not necessarily use the definition when deciding whether a given mathematical object is na example or nonexample of the concept. In most cases, he or she decides on the basis of a concept image, that is, the set of all the mental pictures associated in the student's mind with the concept name, together with all the properties characterizing them.

elaborar suas conjecturas a respeito do conceito. Mas, não são raras as vezes em que essas imagens não se alinham corretamente com a definição formal do conceito, mesmo que o mesmo esteja bem definido teoricamente.

Na matemática, o esperado é que as definições sirvam de sustento para as conjecturas, diferente do que acontece no cotidiano. Essa variação é apontada por Tall e Vinner (1981) como uma das razões pelas quais estudantes sentem tanta dificuldade em aprender matemática.

Nesse sentido, em Vinner (1991) são citadas várias pesquisas realizadas com professores e estudantes realizadas com o intuito de analisar as imagens e definições conceituais, onde ele observa que “a maioria dos alunos não usam definições quando se trabalha em tarefas cognitivas em contextos matemáticos” (VINNER,1991, p.73). É a partir de suas imagens conceituais acerca do conceito que está sendo discutido que eles fazem as suas inferências e resolvem essas tarefas.

Isso aumenta a importância que o professor deve dar às imagens conceituais que os estudantes formarão ao se apresentar uma definição. De acordo com Vinner (1991, p. 80) “[...] deve-se fazer mais do que introduzir a definição. Deve-se apontar para os conflitos entre a imagem conceitual e a definição formal e discutir profundamente os exemplos excêntricos”.

Vinner e Dreyfuss (1989) ressaltam quão importante é identificar as imagens conceituais que os estudantes provavelmente criarão acerca do tema, principalmente as que forem equivocadas, para que o professor, com base nas mesmas, tenha condições de planejar atividades providas de contextos em que o conjunto de imagens conceituais do estudante seja formado por relações e propriedades corretas sobre o conteúdo.

Seguindo essa recomendação, a presente pesquisa foi realizada com o intuito de identificar imagens conceituais sobre o conteúdo sistemas lineares, para entender como acontece o processo cognitivo dos estudantes do ensino médio do Instituto Federal Baiano após estudarem o assunto pelos métodos convencionais e analisar os conflitos cognitivos gerados por elas.

Nos dois capítulos seguintes serão apresentados a teoria utilizada no trabalho, bem como, uma abordagem acerca do conteúdo sistemas lineares. Em seguida, serão descritos o processo de criação do instrumento de coleta de dados e a análise realizada acerca da coleta, finalizando com as considerações sobre a pesquisa.

1. REFERENCIAL TEÓRICO

A teoria que sobre Imagem conceitual e definição conceitual desenvolvida por David Tall e Shlomo Vinner proposta no artigo *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity* (TALL e VINNER, 1981), procura compreender como acontecem os processos cognitivos realizados na aprendizagem de matemática, com o intuito de identificar os caminhos que o cérebro humano percorre ao tentar entender determinado conteúdo.

Nela, entende-se que, ao conhecer os rumos que podem ser tomados pelo estudante para aprender determinado conteúdo, se torna mais fácil para o professor identificar os problemas no seu aprendizado e compreender suas causas.

De acordo com Vinner (1983) essas informações são de extrema importância para o professor, pois servem como orientação para escolha dos pontos que necessitam de uma mediação mais contundente durante as aulas, criando a possibilidade do professor mostrar, não só os caminhos a serem seguidos pelo estudante, como também, os que devem ser evitados através de exemplos e contraexemplos.

Ao longo da formação da teoria alguns termos foram criados para descrever seus componentes, como imagem conceitual e definição conceitual e outros reestruturados como imagem mental, todos eles são descritos no decorrer do capítulo para uma melhor compreensão da pesquisa.

1.1- Imagem conceitual

Em Vinner (1975) se dá o início a criação da definição do termo imagem conceitual nos moldes da teoria, por meio de uma descrição da imagem mental em um formato ainda não concebido anteriormente, pois ela é feita com foco no pensamento matemático. Vinner (1975, p.339) caracteriza a imagem mental da seguinte maneira: “Se um conceito for denotado por C e uma pessoa por P. Então, a imagem mental de P sobre C é o conjunto de todas as imagens que já foram associadas com C na mente de P”.

É em Tall e Vinner (1981) que a imagem conceitual é definida, sendo formada pelas imagens conceituais descritas em Vinner (1975) acrescidas de todos os processos e propriedades atribuídos ao tema pelo indivíduo. Segundo Tall e Vinner (1981, p.152), a Imagem Conceitual

> […] descreve toda a estrutura cognitiva que está associada ao conceito, inclui todas as imagens mentais, os processos e propriedades a elas associadas. É desenvolvida ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando tanto quando o indivíduo encontra novos estímulos, quanto quando ele se aperfeiçoa. (Tradução nossa).[4]

Eles ainda salientam que, a cada conceito podem ser atribuídas várias imagens conceituais podendo ser corretas ou não. Por exemplo, associadas ao conceito de função, podem existir imagens mentais, como as de diagramas de Venn, ligados por setas ou de gráficos, além de propriedades, como a exigência de que cada elemento do conjunto dos quais a setas saem (domínio) esteja relacionado com um único elemento do outro (contradomínio) e procedimentos como a construção de tabelas para ordenar os pontos para se traçar os gráficos.

De modo geral, ao interagir com um determinado conceito, tudo que vem à mente faz parte do conjunto de imagens conceituais que o indivíduo possui acerca desse conceito. Esse conjunto não é rígido, ele vai se moldando às experiencias que o indivíduo passa ao longo da vida, a cada estimulo as imagens conceituais podem surgir, desaparecer ou se adaptar.

E quando o cérebro é instigado a trabalhar com um tema que já possui um conjunto de imagens conceituais associadas a ele, e alguns de seus elementos são ativados, esse subconjunto das imagens conceituais que é ativado, Tall e Vinner (1981) classificam como imagem conceitual evocada. Ainda salientam que, em momentos distintos, diante de um mesmo estímulo, as imagens conceituais evocadas podem ser diferentes das evocadas anteriormente.

Caso o assunto em foco seja o conjunto dos números irracionais, podem surgir imagens de números representados por raízes com resultados não inteiros, ou dízimas não periódicas, ou irracionais como o pi (π) ou o número de Euler (e), podendo

---

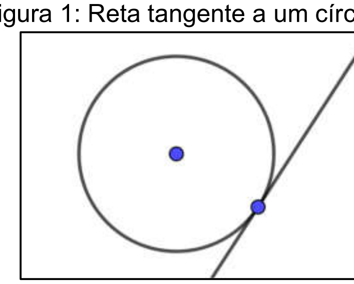
[4] describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures

existir também imagens que foram estabelecidas de forma incorreta como por exemplo uma raiz quadrada e um número negativo.

Em Vinner (1991), são apresentados resultados de pesquisas sobre imagens conceituais que mostram a forte influência que as experiências do indivíduo têm acerca dos caminhos tomados para se responder alguns questionamentos sobre determinado conteúdo. Um deles é a respeito da definição de reta tangente à curva nos cursos de cálculo.

Vinner (1991) destaca que, o primeiro contato do estudante com a noção de reta tangente acontece em geometria ao estudar as posições relativas entre uma reta e uma circunferência, até então a imagem conceitual predominante é a de uma reta que o 'toca' a circunferência em apenas um ponto, conforme figura 1. E que no curso de cálculo a inclinação da reta tangente à curva é definida para os alunos, porém, ainda assim, é comum que eles evoquem a imagem conceitual construída em geometria, para se trabalhar com a reta tangente a uma curva.

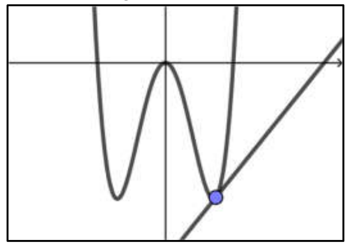
Figura 1: Reta tangente a um círculo



Fonte: Adaptado de Vinner (1991)

Em situações como a da figura 2 não fica nítido se o estudante utiliza a imagem conceitual adquirida na geometria plana ou a definição conceitual formal, pois as duas se adequam bem ao caso por haver apenas um ponto de intersecção entre a reta tangente e a curva, como no caso da reta tangente à circunferência, não afetando a adaptação da imagem conceitual utilizada na figura 1 para a figura 2.

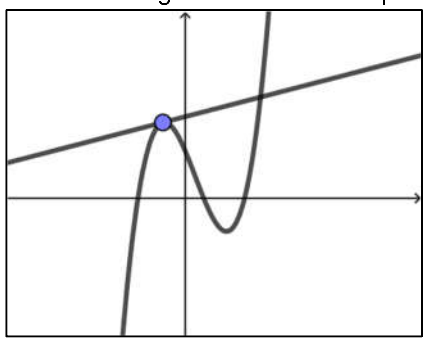
Figura 2: Reta tangente a uma curva qualquer



Fonte: Elaborada pelo autor

Mas, quando o estudante se vê perante situações em que é necessário traçar uma reta tangente a uma curva como a da figura 3, que intersecta a curva em mais de um ponto, ele pode acabar tentando forçar o gráfico a satisfazer a imagem conceitual inicial, deslocando a reta ou traçando apenas uma parte dela.

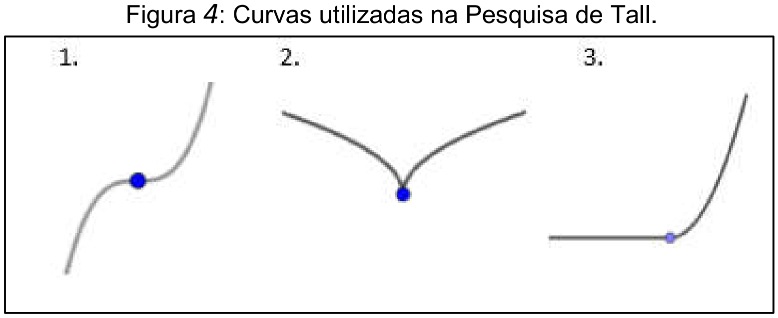
Figura 3: Reta tangente à uma curva qualquer



Fonte: Elaborada pelo autor

Essa e outras falhas causadas pela imagem conceitual obtida no estudo da geometria plana, são relatadas por Vinner (1991), ao apresentar os resultados da pesquisa realizada por David Tall, onde é solicitado aos sujeitos da pesquisa (estudantes universitários que tinham cursado cálculo) que traçassem uma reta tangente a cada curva apresentada no ponto dado.

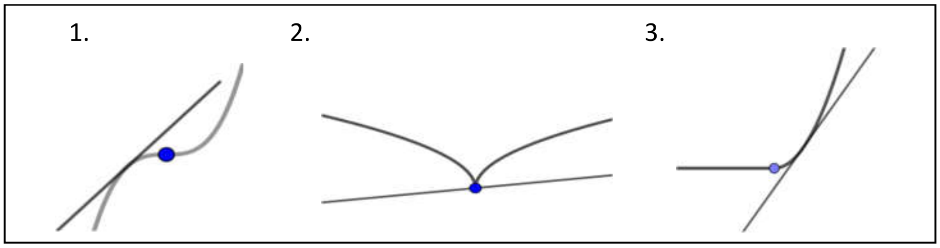
Figura *4*: Curvas utilizadas na Pesquisa de Tall.



Fonte: Adaptado de Vinner (1991)

Nos três casos, a maioria dos estudantes, ou não respondeu, ou traçou uma reta que tentava intersectar a reta em apenas um ponto como pode ser visto na figura 5. As respostas do tipo 1 e 3 Tall chamou de tangente genérica (generic tangent) e a do tipo 2 de tangente balança (balance tangent,

Figura 5: Respostas dadas por parte dos sujeitos da pesquisa de Tall



Fonte: Adaptado de Vinner (1991)

Essas respostas denotam influência da imagem conceitual da geometria no curso de cálculo, reforçando a ideia de que o estudante utiliza as imagens conceituais para resolução dos exercícios mesmo quando a definição é apresentada a ele.

1.2- Definição conceitual

De acordo com Tall e Vinner (1981, p.152) a definição conceitual é delineada e caracterizam como:

> [..] o modo que as palavras foram usadas para descrever o conceito. Ele pode ser aprendido pelo indivíduo de uma forma rotineira ou aprendido de forma mais significativa relacionado, em maior ou menor grau, com o conceito. Também pode ser uma reconstrução pessoal de uma definição formal (Tradução nossa).[5]

Para melhor compreensão do texto é necessário que fique claro que o termo definição conceitual pessoal faz referência à definição formada pelo indivíduo, embasada em suas imagens conceituais ou na definição conceitual formal, que é o termo que caracteriza a definição aceita pela comunidade científica.

As duas podem estar em acordo entre si ou não, a depender do processo de formação da definição conceitual pessoal. Se forem utilizadas imagens conceituais condizentes à definição conceitual formal, a pessoal pode chegar a ser bem próxima ou até igual à definição conceitual formal.

Tall e Vinner (1981) ressaltam ainda que a definição conceitual pessoal tem três formas diferentes de ser construída. Ela pode ter origem nas imagens conceituais

[5] form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition.

obtidas através da experimentação, ser apenas uma descrição da definição conceitual formal ou a união das anteriores.

No primeiro caso ela se dá de maneira mais significativa, pois parte de experiências vividas acerca do tema, contudo, ela pode não estar em concordância com a definição conceitual formal, pois essas experiencias podem não ser suficientes para obter todas as informações necessárias a uma boa elaboração da definição conceitual pessoal e, mesmo quando existem as informações necessárias, ainda há o risco de serem mal interpretadas gerando imagens conceituais erradas.

No segundo modo, há um grande risco de ser desprovida de imagens conceituais significativas para o estudante, pois ele pode estar apenas repetindo a informação que recebeu, sem compreender o sentido das palavras utilizadas, apesar de provavelmente estar correta.

A terceira forma é a ideal, uma vez que as experiencias vivenciadas darão um significado ao conceito que será validado, ou não, pela definição formal proporcionando a ele segurança na escolha das palavras a serem utilizadas.

De acordo com Giraldo (2004), nas pesquisas seguintes, David Tall e Shlomo Vinner passa a ter a noção de definição conceitual pessoal formulada com pequenas diferenças. Ele afirma que:

> Tall passa a considerar a definição de conceito como parte da imagem de conceito; enquanto Vinner trata definição de conceito e imagem de conceito como estruturas excludentes, ou seja, a imagem de conceito é, de acordo com a formulação de Vinner, a estrutura cognitiva que inclui todos os atributos associados ao conceito, exceto a própria definição de conceito. Entretanto, segundo os próprios autores (comunicação pessoal), tal distinção é de natureza meramente formal, não acarretando em quaisquer diferenças relevantes para a teoria em si. (GIRALDO, 2004, P. 9)

No texto será considerada a linha tomada por Tall considerando a definição conceitual pessoal como elemento do conjunto das imagens conceituais do sujeito.

1.3- Fatores de conflito cognitivo

No conjunto de imagens conceituais sobre um conteúdo podem existir algumas que estejam em desacordo entre si, ou até com a definição conceitual formal. Essas divergências são tomadas por Tall e Vinner (1981) como fator de conflito potencial.

O estudante não tem consciência da existência de fatores conflitantes até que duas ou mais das imagens conceituais incoerentes entre si sejam evocadas simultaneamente. Quando isso acontece, o fator de conflito deixa de ser potencial e passa a ser real. Também serão considerados fatores de conflitos reais, incoerências que surgem quando uma imagem conceitual evocada entra em atrito com as definições conceituais formal ou pessoal.

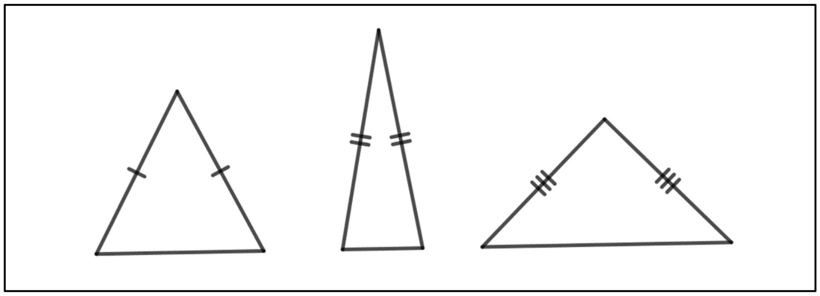
Tall (1980) ainda afirma que o indivíduo pode ativar fatores conflitantes sem perceber a origem do conflito, devido a sutileza da incoerência, nesses casos ele pode até sentir um certo desconforto, mas sem identificar sua razão. Casos como esse, são classificados por ele como fator de conflito subconsciente. Nos casos em que, ao perceber algo errado, o estudante determine a razão do conflito, o mesmo passará a ser consciente.

É importante que o professor tenha uma ideia de quais são as imagens conceituais conflitantes que podem surgir em cada conteúdo, para que, a partir delas, sejam escolhidos exemplos e contraexemplos que estimulem o estudante a evocar as imagens conceituais conflitantes. Ao fazer isso, o estudante terá consciência desses conflitos cognitivos, podendo confrontá-los conseguindo compreender e corrigir essas falhas no aprendizado, como afirmam Tall e Vinner “Quando o professor está consciente das imagens conceituais possíveis, pode ser possível para trazer imagens incorretas à tona e, por discussão, racionalizar o problema” (TALL; VINNER; 1981, p. 168).

Vinner (1983) cita alguns cenários em que os exemplos apresentados em livros didáticos podem levar o estudante a criar imagens conceituais que entrarão em conflito entre si, ou com a definição conceitual formal por não apresentarem características suficientes para que o estudante tenha consciência do conflito e o resolva.

Em um deles, Vinner relata como alguns livros didáticos apresentam a definição de triângulos isósceles, afirmando que estes são definidos como triângulos que possuem dois lados iguais e, em seguida uma série de exemplos é apresentada, mas todos posicionados com uma base horizontal e abaixo do vértice oposto como na figura 6.

Figura 6: Triângulos isóscele com base na horizontal



Fonte: Elaborada pelo autor

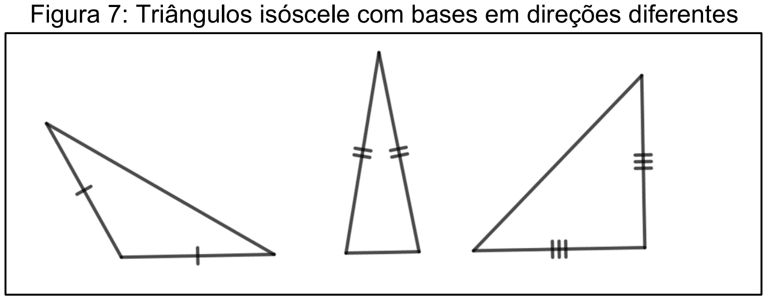
A suposição de Vinner (1991) é de que apenas a definição apresentada no livro aliada a exemplos limitados, como os da figura 6, leve o estudante a criar imagens conceituais que considerem que a posição da base como uma condição para que o triângulo seja classificado como isósceles, pois a imagem mental mais provável é a de triângulos que estejam na mesma posição dos exemplos compondo duas imagens conceituais:

(a) Os triângulos isósceles possuem dois lados iguais;

(b) A base dos triângulos isósceles fica na horizontal.

Em situações que o estudante se depare com triângulos posicionados como nos exemplos da figura 6, mesmo se evocar as imagens conceituais (a) e (b) a falha na imagem conceitual será imperceptível, compondo um fator de conflito potencial. Mas quando os triângulos estiverem com as bases em outras direções, como na figura 7, as imagens conceituais se as imagens (a) e (b) forem evocadas elas entraram em desacordo, fazendo que o conflito cognitivo deixe de ser potencial e passe a ser real, podendo fazer com que o estudante não reconheça os triângulos como isósceles, mesmo apresentando dois lados com mesma medida, devido à imagem mental associada ao conceito.

Figura 7: Triângulos isóscele com bases em direções diferentes



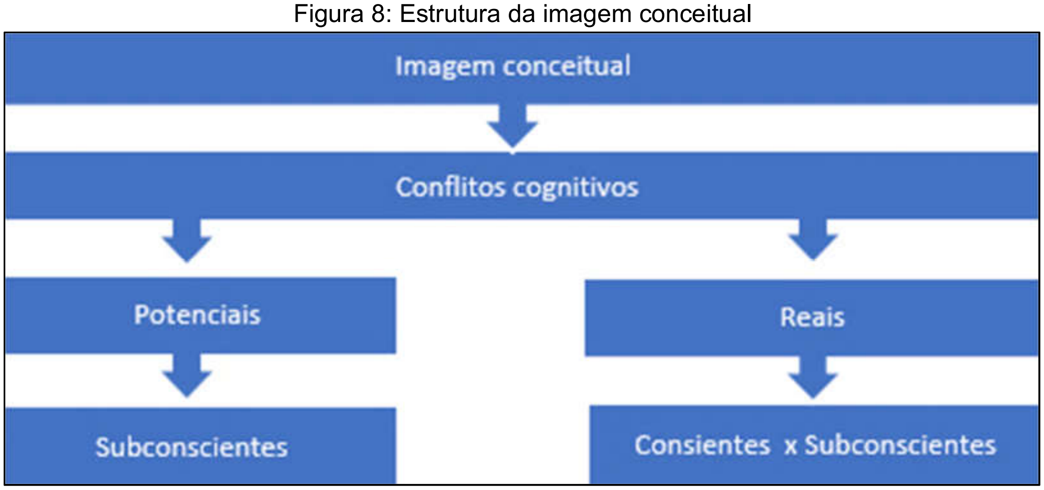
Fonte: Elaborada pelo autor

Esse tipo de situação reforça a opinião apresentada por Vinner (1991) de que o ideal seria que os estudantes tivessem, além da oportunidade de conhecer a definição formal, ter acesso a exemplos e contraexemplos que poderiam causar conflitos de modo que esses fatores possam guia-los no processo de formação de suas imagens conceituais da forma mais coesa possível para que possam ter um melhor entendimento e aproveitamento do conteúdo conseguindo assim descrever o conceito de forma significativa e coerente.

Então, a teoria pode ser organizada de acordo com esquema apresentado na figura 8 em que o contato do indivíduo com a matemática faz com que surjam imagens conceituais. Caso essas imagens não estejam de acordo com a definição conceitual formal, ou entre si, elas serão convertidas em conflitos cognitivos potenciais ou reais.

Os conflitos potenciais serão sempre subconscientes, já que o estudante não tem conhecimento de sua existência, enquanto os reais podem ser divididos em conscientes, quando o estudante tem percepção de sua presença, ou subconscientes, nos casos em que, mesmo ao evocar imagens conceituais conflitantes, ele não percebe o erro. Nesses casos, o máximo que pode ocorrer é uma sensação de que há algo incorreto, sem conseguir definir o que é.

Figura 8: Estrutura da imagem conceitual



Fonte: Elaborada pelo autor

A matemática é estruturada seguindo um diferente do descrito, partindo da definição conceitual formal como recurso que deve ser utilizado pelo estudante para validar suas conclusões.

Quando os estudantes são confrontados em um contexto do cotidiano, Vinner (1991) ressalta que, mesmo que o estudante conheça a definição conceitual formal, é mais comum que eles não a utilizem, dando atenção apenas a suas imagens conceituais. E ainda argumenta que, “é difícil treinar um sistema cognitivo a agir contra a sua natureza e forçá-lo a consultar definições, tanto ao formar uma imagem do conceito quanto ao se trabalhar em uma tarefa cognitiva” (Vinner, 1991, P. 73).

Mas, ressalta que a definição conceitual formal tem um papel muito importante no processo cognitivo, tanto para servir de fonte de validação do pensamento quanto na formação de imagens conceituais consistentes a serem utilizadas no processo, inclusive afirmando que para alguns conteúdos ela é necessária para implementação dos exemplos usados para o enriquecimento da imagem conceitual.

E sugere que o professor, sempre que possível, utilize exemplos e contraexemplos para introduzir um conteúdo, fazendo com que as definições conceituais pessoal e formal coincidam e sejam conclusões dos estudantes, obtidas a partir de suas imagens conceituais.

2. SISTEMAS LINEARES

2.1- Equações lineares

Antes de definir o sistema linear, é importante que fique claro o que é uma equação linear. Uma equação será dita linear se for do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \text{ com } n \in N \quad ,$$

em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$, são as incógnitas; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são os coeficientes reais das incógnitas; e b é o termo independente. São exemplos de equações lineares:

$$2x_1 + 3x_2 = 1 \tag{1}$$

$$3x_1 + 4x_2 - x_5 = 0 \tag{2}$$

$$\frac{-4x_4}{3} - 3x_1 + 0{,}4x_5 + \sqrt{7}x_3 = 2 \tag{3}$$

$$4x + 3y - z = -5 \tag{4}$$

$$2x_1 - x_3 = x_5 \tag{5}$$

De acordo com a estrutura em que a matemática é apresentada nos livros didáticos atualmente, ao apresentar a definição conceitual formal e alguns exemplos, espera-se que o estudante seja capaz de reconhecer ou citar exemplos de equações lineares, em contraponto a esse pensamento, a teoria de imagens conceituais defende que, apenas essa definição pode não ser suficiente para alguns indivíduos, devido a linguagem que se utiliza na definição e as limitações dos exemplos, razão pela qual algumas observações se fazem necessárias.

A primeira delas diz respeito à quantidade de termos de uma equação linear. Nos exemplos, pode ser notado que a quantidade de termos varia dado que na definição o termo com maior índice é denotado por x_n com n um número natual, mas o estudante pode entender que a quantidades n de termos é fixa caso os exemplos tenham todos a mesma quantidade.

Outra ponderação importante se refere a ordem dos termos. Na definição, os termos vêm ordenados de x_1 a x_n, apenas para aumentar a clareza com que os termos estão apresentados, nos exemplos pode ser observado que alguns termos deles estão desordenados, o que não faz com que deixem de ser equações lineares. Como a propriedade comutativa da adição pode ser utilizada, fica garantida a mesma solução independentemente da ordem empregada, mesmo que a equação apresente coeficientes negativos, pois os termos podem ser escritos na forma de adição, conforme pode ser observado ao reescrever a equação (2) da seguinte maneira $3x_1 + 4x_2 + (-x_5) = 0$.

O fato dos coeficientes serem números reais também deve ficar bem claro, não existindo problema algum em estar na forma decimal, fracionária ou qualquer outra representação de um número real, como os termos da equação (3).

Na equação (4) os termos x_i foram substituídos por **x**, **y** e **z** que é uma opção de representação geralmente utilizada com uma quantidade pequena de termos, pois se limita a 26 opções, diferente da forma apresentada na definição que não limita a quantidade máxima de termos que podem ser utilizados.

Quando o termo independente é nulo, a equação linear é chamada de equação homogênea. São exemplos desse tipo as equações (2) e (5), que no caso da equação (5) pode ser reescrita na forma

$$2x_1 - x_3 - x_5 = 0.$$

Tão importante quanto as considerações sobre os aspectos que tornam uma equação linear, são as que a fazem com que uma equação não seja linear, como por exemplo, os expoentes diferentes de um em alguma incógnita e a quantidade de incógnitas em cada termo, que deve ser apenas uma, como pode ser observado nos casos apresentados nas equações (6), (7) E (8).

$$6{x_1}^2 + 4x_2 - \sqrt{x_3} = 1 \tag{6}$$

$$\frac{2}{x_2} + 4x_1 - 5x_3 = 0 \tag{7}$$

$$6x_1 + 3x_2.x_3 + 5x_3 = 3 \tag{8}$$

Dois termos encontrados na equação (6) e um na equação (7) apresentam expoentes diferentes de um. Em (6) o termo $6{x_1}^2$ tem o expoente dois explicito, já o termo $-\sqrt{x_3}$, só tem o seu expoente revelado ao ser escrito na forma de potência, $-{x_3}^{\frac{1}{2}}$ e o termo $\frac{2}{x_2}$ de (7), quando escrito com a incógnita do numerador assume a forma $2{x_2}^{-1}$. Na equação (8) o problema é a existência do termo misto $3x_2.x_3$, que apresenta as incógnitas x_2 e x_3 sendo multiplicadas.

2.2- Solução de uma equação linear

A solução de uma equação linear é o conjunto formado pelas ênuplas de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ para os quais a substituição $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ garanta a veracidade da igualdade

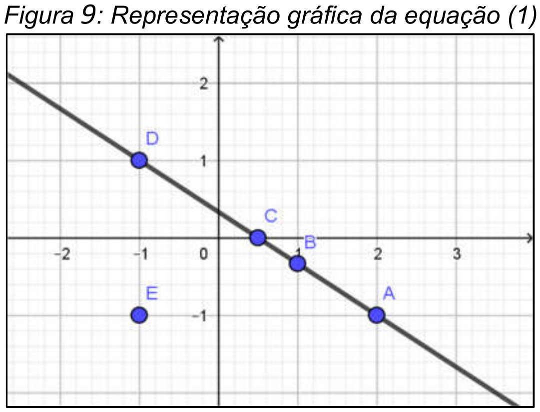
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

como exemplo, podemos verificar que a terna ordenada (2,1,10) é solução da equação $3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$ pois, ao substituir os valores da ênupla pelas incógnitas obtemos $3.2 + 4.1 - 10 = 6 + 4 - 10 = 0$ validando a equação.

No processo de substituição dos termos, é necessário que se dê ênfase à necessidade de substituir os termos respeitando a correspondência entre a ordem que os valores se apresentam na ênupla e os índices dos termos correspondentes, pois a ênupla (2,1,10) indica que $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 10$, independentemente da ordem que os termos apareçam na equação.

Esse é um momento oportuno para se apresentar as representações gráficas das equações com um número de incógnitas menor que quatro, como a equação $2x_1 + 3x_2 = 1$ (1) que tem como representação gráfica a figura 9.

Figura 9: Representação gráfica da equação (1)



Fonte: Elaborada pelo autor

Além da reta, estão apresentados os pontos $A(2,-1)$, $B\left(1,-\frac{1}{3}\right)$, $C\left(\frac{1}{2},0\right)$ e $D(-1,1)$ que são soluções da equação por pertencerem a ela, assim como o ponto $E(-1,1)$ que não é solução da equação por não estar na reta.

A partir da representação gráfica da figura 9, podem ser discutidos a quantidade de soluções de uma equação linear e verificado que, mesmo tendo uma quantidade infinita de soluções, nem todo par ordenado é solução da equação, além do comportamento das soluções da equação escrevendo-os segundo um parâmetro real. No caso da equação (1), quando tomado $y = k$ com k pertencente aos reais, os pares ordenados da solução estarão na seguinte configuração $S = \left\{\left(\frac{1-3k}{2}, k\right)\right\}$.

2.3- Sistema de equações lineares

Um sistema de equações lineares, ou sistema linear, de m equações e n incógnitas, com $m, n \in N$, é um conjunto de equações lineares do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

em que $x_1, x_2, \dots, x_n$, são as incógnitas das equações, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}$ são os coeficientes reais e $b_1, b_2, \dots, b_m$ são os termos independentes.

Para que o sistema seja linear, ele deve ser composto apenas por equações lineares. O sistema S_1 , por exemplo, não é um caso de sistema linear, pois apresenta a equação $2x - y^3 = 10$ que não é linear por apresentar o expoente 3.

$$S_1 = \begin{cases} 2x - y^3 = 10 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$$

Como é apresentado na definição, as quantidades de equações e incógnitas são, m e n respectivamente, não sendo obrigatório que esses valores sejam iguais, podendo existir sistemas com mais equações que incógnitas ou o inverso, como no sistema linear S_2 abaixo.

$$S_2 = \begin{cases} 2x_2 + 6x_3 = 3 \\ -2x_1 + 9x_2 - \dfrac{2}{3}x_3 = -1 \end{cases}$$

Se um sistema linear é formado apenas por equações lineares homogêneas, ou seja, se todos os seus termos independentes forem nulos, o sistema será chamado de sistema homogêneo, como o S_3.

$$S_3 = \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 = 0 \\ 4x_2 - x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Aos sistemas lineares também pode ser dada uma abordagem vetorial. Nesse caso, o sistema linear de m equações e n incógnitas é escrito como uma equação vetorial formada $v_1.x_1 + v_2.x_2 + \cdots + v_n.x_m = b$, sendo os vetores-coluna $v_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$, $v_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})$, ... , $v_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$ e $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ e múltiplos escalares dos vetores $x_1, x_2, \dots, x_n$, as variáveis podendo ser representado também explicitando os vetores da equação tomando a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} . x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} . x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} . x_m = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Para a conversão, o sistema deve ser escrito com todos os seus termos ordenados e aparentes em todas as equações, ou seja, nas equações onde um ou mais deles não apareçam deve-se apresentar o termo acompanhado do coeficiente e em sua posição. Seguindo a recomendação o sistema S_3 deve ser reescrito como o sistema S_3', de modo que cada vetor seja formado pelos coeficientes de cada x_i.

$$S_3' = \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 0x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Já ordenado e completo, basta organizar os coeficientes em vetores que são multiplicados pelas incógnitas e igualá-los ao vetor coluna composto pelos termos independentes.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} . x_1 + \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} . x_2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} . x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Além das representações anteriores, há mais duas formas importantes de se representar um sistema linear utilizando uma notação matricial. O sistema pode ser representado por uma matriz associada a ele denominada matriz aumentada do sistema linear. A formação dela se dá através da organização dos coeficientes do sistema de modo que formem uma matriz em que as colunas, até a penúltima, correspondam aos valores dos coeficientes de $x_1, x_2, \dots, x_n$ e a última, aos termos independentes como pode ser visto na figura 10.

Figura 10: Matriz aumentada associada ao sistema linear

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Fonte: Elaborado pelo autor

O outro modo de representação, é por meio de uma equação matricial na forma

AX=B,

sendo A, a matriz incompleta do sistema, formada apenas pelos coeficientes das incógnitas, X uma matriz coluna das incógnitas e B a matriz coluna dos termos independentes como na figura 11.

Figura 11: Sistema representado por multiplicação matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Fonte: Elaborado pelo autor

Para as representações matriciais, o sistema deve estar ordenado e completo caso existam termos nulos, assim como na representação vetorial. O sistema $S_3´$ ao ser convertido nessas representações toma os formatos seguintes:

Matriz aumentada

$$S_3´ = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 40 \\ 1 & -5 & 00 \\ -1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

E multiplicação matricial

$$S_3´ = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.4- Solução de um sistema de equações lineares

O conjunto solução de um sistema linear é composto pelas ênuplas ordenadas de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ que sejam solução de todas as equações do sistema simultaneamente. Uma atenção especial deve ser dada ao fato de que todas as equações devem ser satisfeitas, a partir do momento em que a ênupla não seja solução de qualquer uma das equações, já é descartada a possibilidade de sua pertinência ao conjunto solução.

Para as representações por equações matriciais e vetoriais o conjunto solução é dado pela matriz $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ e pelos múltiplos escalares $x_1, x_2, \dots, x_n$, que satisfazem as equações respectivamente.

Cada ênupla do conjunto solução do sistema linear deve pertencer ao conjunto solução de cada uma das suas equações. A intersecção entre as soluções das equações pode resultar em três tipos de conjuntos:

(a) Conjunto vazio, caso não exista nenhum elemento na intersecção.
(b) Conjunto unitário, com apenas uma ênupla na intersecção.
(c) Conjunto infinito, formado por um número infinito de ênuplas com determinadas características.

2.5- Classificação de um sistema de equações lineares

De acordo com a quantidade de soluções, o sistema linear recebe uma classificação, sendo considerado possível ou compatível, caso existam soluções. Caso contrário são categorizados como impossíveis ou incompatíveis. Os sistemas possíveis são divididos em determinados, quando possuem apenas uma única solução, e indeterminados, caso existam infinitas soluções.

Sob a ótica vetorial um sistema possui solução $S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ se, e somente se, o vetor $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ é combinação linear dos vetores-coluna $v_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$, $v_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})$, ... , $v_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$. Com a combinação linear sendo configurada, caso o conjunto $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ seja linearmente independente o sistema terá uma única solução, e, se for linearmente dependente, as soluções serão infinitas.

Numa perspectiva matricial, o sistema $A_{mxn}.X_{nx1} = B_{mx1}$, tem a sua quantidade de soluções e classificação através da comparação do número n de incógnitas com o posto da matriz aumentada [A; B] e o posto de A que é determinado pela quantidade de linhas não nulas após a realização do escalonamento. A comparação se dá da seguinte forma:

Possui uma única solução: $Posto[A; B] = PostoA = n$;

Possui infinitas soluções: $Posto[A; B] = PostoA < n$;

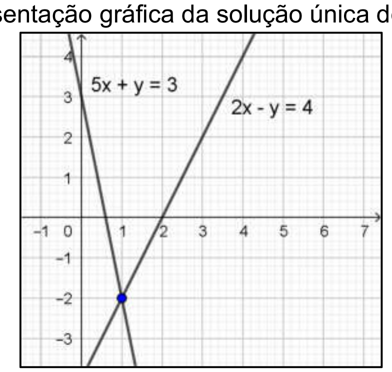
Não possui soluções: $Posto[A;B] > PostoA$.

Sistemas com duas incógnitas podem ter a solução verificada geometricamente através do ponto de intersecção entre as duas retas no plano. Nos sistemas com três incógnitas, o mesmo pode ser feito se diferenciando pela solução ser o ponto de intersecção três planos no espaço.

No sistema possível e determinado (SPD), uma única ênupla ordenada fará com que todas as equações do sistema sejam validadas. Isso pode ser verificado na representação gráfica (figura 12).

Em sistemas com duas incógnitas, se os gráficos equações forem representados no mesmo plano, temos um ponto como intersecção das duas retas. Esse par ordenado será a solução do sistema.

Figura 12: Representação gráfica da solução única do sistema no plano

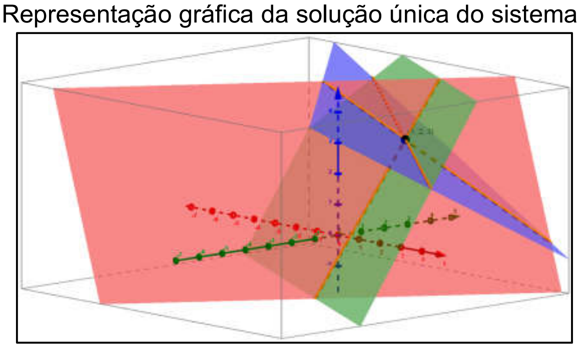


Fonte: Elaborado pelo autor

A esse tipo de representação é importante ter a consciência de que por um mesmo ponto podem ser traçadas infinitas retas, implicando na existência de infinitos sistemas lineares com a mesma solução, pois cada reta é a representação de uma equação.

Nos sistemas com três incógnitas, a intersecção entre os planos também é um único ponto, solução do sistema como pode ser visto na figura 13.

Figura 13: Representação gráfica da solução única do sistema no espaço.



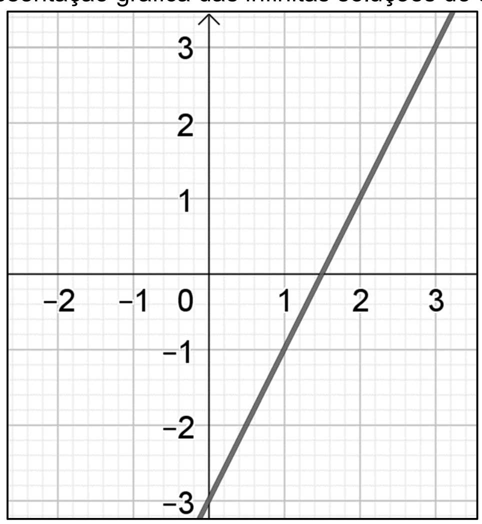
Fonte: Elaborado pelo autor

A mesma consideração sobre a infinidade de sistemas com essa mesma solução é feita aqui com cada plano representando uma das equações.

No sistema possível e indeterminado (SPI), existem infinitas ênuplas ordenadas validando o sistema, em sistemas com duas ou três incógnitas. Esse fato é facilmente perceptível geometricamente como será mostrado.

Na figura 14 pode ser observada a representação gráfica de um sistema com duas incógnitas. Ele é composto por duas retas coincidentes que têm infinitos pontos em comum entre as retas, sendo cada um deles uma solução do sistema.

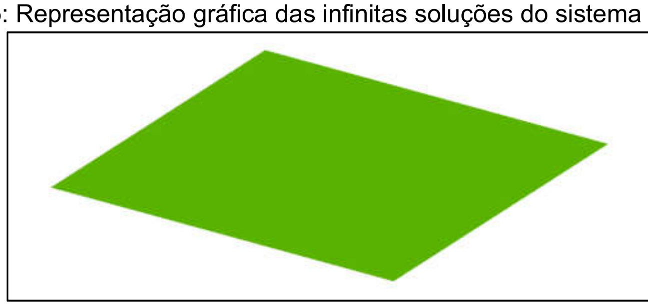
Figura 14: Representação gráfica das infinitas soluções do sistema no plano



Fonte: Elaborado pelo autor

No sistema com três incógnitas, a intersecção que resulta em infinitos soluções podem acontecer de três formas diferentes. Os três planos podem ser coincidentes como a figura 15.

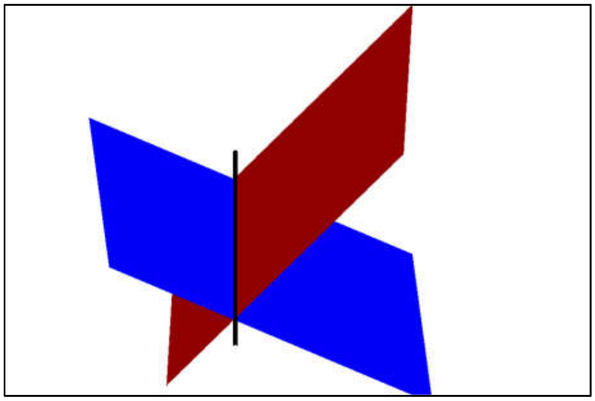
Figura 15: Representação gráfica das infinitas soluções do sistema no espaço



Fonte: Elaborado pelo autor

Ou dois planos coincidentes e o terceiro intersectando-os formando uma reta como na figura 16.

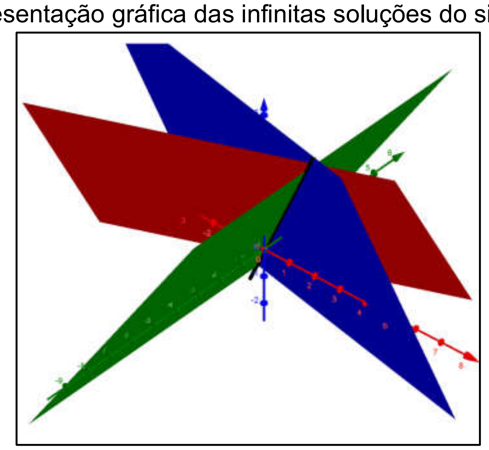
Figura 16: Representação gráfica das infinitas soluções do sistema no espaço



Fonte: Elaborado pelo autor

E o último caso, em que três planos não coincidentes, se intersectam numa mesma reta que pode ser observada na figura 17.

Figura 17: Representação gráfica das infinitas soluções do sistema no espaço

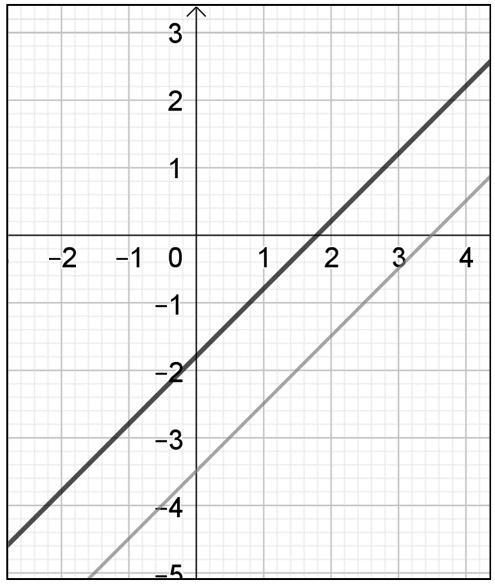


Fonte: Elaborado pelo autor

Nesse tipo de solução deve se atentar ao fato de que, apesar de existirem infinitos pontos de intersecção caracterizando uma solução, também existem infinitos pontos que não pertencem à intersecção, fazendo com que o conjunto solução seja diferente do conjunto universo.

No sistema impossível (SI), que não possui ênuplas validando o sistema quando as equações são representadas graficamente no mesmo plano, não há intersecção, pois serão retas paralelas, como pode ser observado na figura 18.

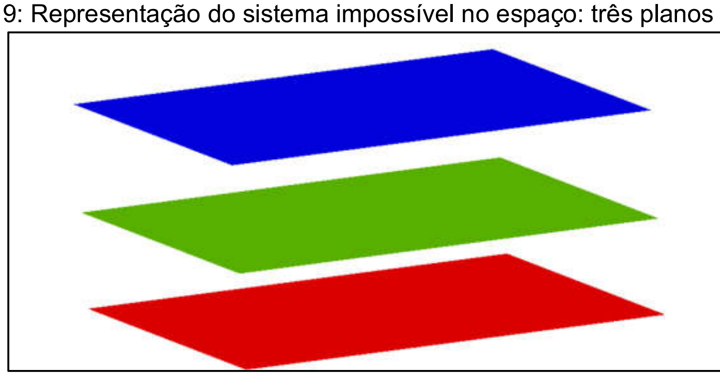
Figura 18: Representação do sistema impossível



Fonte: Elaborado pelo autor

No espaço, existem quatro formas possíveis de um sistema com três equações e três incógnitas que a solução é vazia ser representado. Podem ocorrer três planos paralelos como a figura 19.

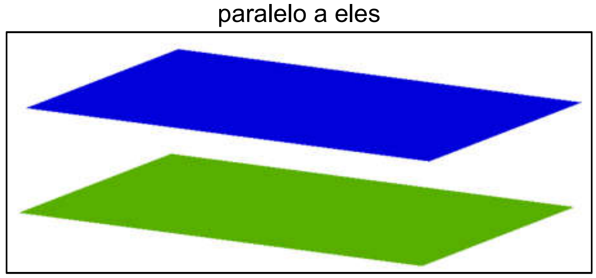
Figura 19: Representação do sistema impossível no espaço: três planos paralelos



Fonte: Elaborado pelo autor

Também podem ser dois planos coincidentes, e o terceiro paralelo a eles, como na figura 20.

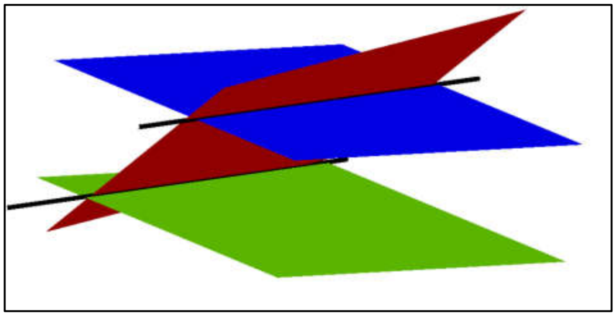
Figura 20: Representação do sistema impossível no espaço: dois planos coincidentes e o terceiro paralelo a eles



Fonte: Elaborado pelo autor

Ou dois planos paralelos com o terceiro intersectando-os como na figura 21.

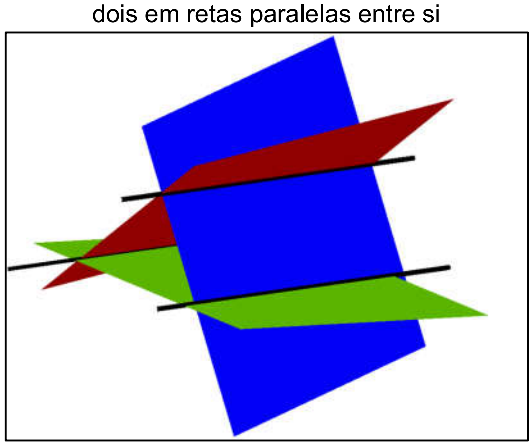
Figura 21: Representação do sistema impossível no espaço: dois planos paralelos com o terceiro intersectando-os



Fonte: Elaborado pelo autor

E o último caso onde três planos que se intersectam dois a dois em retas paralelas entre si como na figura 22.

Figura 22: Representação do sistema impossível no espaço: três planos que se intersectam dois a dois em retas paralelas entre si



Fonte: Elaborado pelo autor

Em sistemas homogêneos, o fato dos termos independentes serem nulos, fazem com que as representações gráficas passem pela origem, garantindo a intersecção, ao menos a intersecção entre as representações gráficas das equações na origem e, por consequência, a solução nula, porém, a intersecção pode não ser apenas na origem resultando em infinitas soluções. Por isso, os sistemas homogêneos sempre serão possíveis, podendo ser determinados ou indeterminados.

Se analisarmos matricialmente, é notável que a equação $A_{mxn}.X_{nx1} = 0_{mx1}$ possui uma solução trivial, pois uma das propriedades das matrizes afirmam que se $A_{mxn}.0_{mx1} = 0_{mx1}$ou seja a multiplicação de uma matriz qualquer pela matriz nula, tem como resultado outra matriz nula.

A existência de infinitas soluções já exige um pouco mais de experiência com as operações matriciais, já que, diferente das operações entre números, a equação matricial $A_{mxn}.X_{nx1} = 0_{mx1}$ com $A_{mxn} \neq 0_{mxn}$ não garante $X_{nx1} = 0_{nx1}$, pois podem existir infinitas operações $A_{mxn}.X_{nx1} = 0_{mx1}$com $A_{mxn} \neq 0_{mxn}$ e $X_{nx1} \neq 0_{nx1}$, para isso basta que uma linha da matriz A_{mxn} seja nula. Apenas quando isso acontece que o sistema homogêneo é possível e indeterminado.

2.6- Resolução do sistema linear

Sobre os métodos de resolução de um sistema linear Lages afirma que:

> O método de eliminação, embora simples e ingênuo, é a maneira mais eficaz de resolver um sistema de m equações lineares, com n incógnitas, apresentado sob a forma matricial **ax = b**, onde **a** ∈ M(m × n), **x** ∈ M(n × 1) e **b** ∈ M(m × 1).
> [..] O processo de eliminação se baseia na observação de que ao efetuar uma operação elementar sobre as linhas da matriz aumentada [**a**;**b**] obtém-se uma matriz [**a**′; **b**′] que e a matriz aumentada de um sistema **a**′**x** = **b**′, equivalente ao sistema original **ax** = **b**.(Lima, 2014, p. 106)

Dois sistemas lineares que possuem o mesmo conjunto solução são chamados de sistemas equivalentes. Em posse de um sistema linear, para se obter um equivalente a ele, podem ser realizadas as seguintes operações elementares no sistema:

(i) Multiplicar uma equação inteira por uma constante não nula.
(ii) Trocar a ordem das equações.
(iii) Substituir uma equação pela soma dela com outra multiplicada por uma constante não nula.

O método básico de se resolver um sistema de equações lineares é efetuar essas operações, quantas vezes se fizerem necessárias, de modo que seja encontrado um sistema equivalente ao inicial em que a obtenção dos valores das incógnitas se dá de maneira mais fácil. Esse formato do sistema que possui melhor resolução é chamado de ***Forma escalonada*.**

Para um sistema estar na forma escalonada, todas as equações devem apresentar as incógnitas na mesma ordem e apresentar as seguintes propriedades:

- Toda equação, que não tem todos os coeficientes iguais a zero, tem como primeiro número não-nulo o 1, que será chamado de **elemento líder** ou **pivô.**
- As equações em que todos os coeficientes são nulos, caso existam, estão abaixo das demais,

- O elemento líder, de cada equação não nula, está à esquerda das que a sucedem.

O processo de escalonamento deve ser feito utilizando as operações algébricas citadas sobre o sistema ou à matriz completa associada a ele. Por exemplo, a resolução, por escalonamento, se dá de acordo com os seguintes passos:

Dado o sistema linear

$$\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 2x - 3y - 3z = 5 \\ 3x - y - 5z = 10 \end{cases}$$

Para anular os coeficientes da primeira incógnita, da segunda e terceira equações, são realizadas as seguintes operações: (-2) vezes a primeira equação mais a segunda e (-3) vezes a primeira equação mais a última, obtendo o sistema

$$\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 0x + y - z = -1 \\ 0x + 5y - 2z = 1 \end{cases},$$

equivalente ao anterior.

O passo seguinte é anular o coeficiente da segunda incógnita da terceira equação do sistema obtido, nesse momento, o primeiro coeficiente não nulo da segunda equação que deve ser tomado como referência. Para tal, se faz (-5) vezes a segunda equação e se soma o resultado à terceira. Obtendo-se o sistema escalonado

$$\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 0x + y - z = -1 \\ 0x + 0y + 3z = 6 \end{cases}.$$

As resoluções das equações do sistema escalonado são bem simples, assim, determinar os valores das incógnitas se torna fácil, partindo sempre da última equação para a primeira. Então, da terceira equação temos z=2, depois de conhecido o valor de z ele é substituído na segunda equação para se determinar y=1 e substituindo y e z na primeira obtém-se x=7 e a solução do sistema $S = \{(7,1,2)\}$.

Esse sistema apresentou uma única solução para todas as equações, fato que não ocorre sempre, como será observado na resolução dos demais exemplos.

Para se resolver o próximo sistema, além das operações utilizadas no exemplo anterior, também será usada a troca na ordem das equações. Esse procedimento não é obrigatório, mas sempre que houver a possibilidade de usar o 1 como elemento líder, é aconselhável que se faça essa opção, pois as operações com o número 1 são mais fáceis de se realizar.

Para escalonar o seguinte sistema, a primeira coisa a se fazer, é trocar a posição entre a primeira e a segunda equação.

$$\begin{cases} 3x - y - 18z = 0 \\ x + y - 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 7 \end{cases}$$

Após a troca o sistema toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 3x - y - 18z = 0 \\ 2x + 3y - z = 7 \end{cases}$$

Anulando os coeficientes da primeira incógnita da segunda e terceira equações se faz (-3) vezes a primeira equação mais a segunda e (-2) vezes a primeira linha mais a terceira.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 0x - 4y - 12z = -9 \\ 0x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

Pela mesma razão da troca anterior, serão trocadas as posições das duas últimas equações, obtendo-se.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 0x + y + 3z = 1 \\ 0x - 4y - 12z = -9 \end{cases}$$

Fazendo (4) vezes a segunda equação mais a terceira o sistema fica escalonado e pronto para resolução.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 0x + y + 3z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = -5 \end{cases}$$

Como feito anteriormente, bastaria determinar os valores das incógnitas da terceira equação para a primeira. Quando todos os coeficientes de uma equação são anulados menos o termo independente, não há possibilidade de resolução da equação, fazendo com que o sistema não tenha solução, pois para existir uma solução ela deve satisfazer todas as equações. Nesse caso, o conjunto solução é representado pelo conjunto vazio.

Existem casos que no processo de escalonamento o sistema zera toda uma equação. Quando isso acontece, ela deve ser passada para a última posição. Um exemplo desse tipo de situação são os sistemas equivalentes:

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=-1 \\ 2x-y-z=-3 \\ x+y+z=0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=1 \\ 0z=0 \end{cases}$$

Nesses casos, o conjunto solução é descrito em forma paramétrica. O primeiro passo é identificar os elementos líderes das equações, as incógnitas que estão sendo multiplicadas por eles serão tratadas por variáveis dependentes, e as que não são líderes, chamadas de variáveis livres. A cada variável livre é atribuído um valor real e resolvidas as equações em função desse parâmetro.

No caso do sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z=1 \\ 0z=0 \end{cases}$$

as variáveis x e y são as dependentes e z será a livre, a essa é atribuído um $k \in R$ e resolvido o sistema em função dele da seguinte maneira:

Fazendo z=k e substituindo o mesmo na segunda equação do sistema tem-se:

$$y+k=1$$

$$y=1-k$$

Substituindo z=k e y=1-k na primeira equação o valor de x é ‘o:

$$x+y+z=0$$

$$x+(1-k)+k=0$$

$$x=-1+k-k$$

$$x=-1$$

Logo a solução do sistema é o conjunto $S=\{(-1,1-k,k), com k \in R\}$. Esse tipo de sistema possui infinitas soluções, porem nem toda terna ordenada faz parte dessa solução.

3. CAMINHO METODOLÓGICO

A escolha da teoria foi resultado de uma busca por algo que discutisse como acontece o aprendizado da matemática sob a perspectiva do estudante, tema que sempre me trouxe curiosidade. Durante a busca entre estudiosos de educação matemática, a teoria que aborda as imagens conceituais se faz presente e se destaca, por tratar do processo cognitivo do estudante, exatamente o que buscava.

A partir desse momento, dá início ao levantamento bibliográfico sobre o tema, para maior conhecimento da teoria desenvolvida por David Tall e Shlomo Vinner (1981), por meio da leitura de artigos, teses e dissertações que abordassem o tema.

Vinner (1991) comenta algumas pesquisas de campo realizadas por ele e Tall, que buscam levantar imagens conceituais acerca de conceitos existentes em alguns conteúdos de matemática, como funções, limites e derivadas. Para tal, eles utilizam questionários que foram aplicados no local de estudo dos participantes.

Como o intuito foi de seguir a mesma linha, o próximo passo foi definir o conteúdo a ser trabalhado. No período da pesquisa, estava trabalhando com turmas do segundo ano do ensino médio e com uma turma do curso Licenciatura em Química, mas a escolha ficou somente entre os conteúdos do ensino médio, pois o programa de mestrado PROFMAT exige que as pesquisas sejam direcionadas ao ensino básico.

Sistemas lineares foi o conteúdo considerado mais adequado, devido a sua importância, por ser utilizado em vários outros, e o período programado para ministrá-lo, que dava condições a um maior aprofundamento na teoria a ser utilizada na pesquisa.

O conteúdo foi ministrado de acordo com as recomendações do livro didático, partindo das definições e exemplos fornecidos e realização dos exercícios para que houvesse a menor interferência possível da teoria, pois o objetivo é identificar as imagens conceituais evocadas no estudo de sistemas lineares, seguindo a estrutura recomendada pelos livros didáticos e analisar os conflitos cognitivos que podem surgir a partir de imagens mal concebidas.

3.1- Tipo de pesquisa

Após a realização do levantamento bibliográfico sobre imagens conceituais, as características da pesquisa foram definidas, levando em consideração a forma com que as pesquisas comentadas por Vinner (1991) foram realizadas. Essas pesquisas são caracterizadas por utilizarem a técnica de documentação direta que “constitui-se, em geral, no levantamento de dados no próprio local onde os fenômenos ocorrem” (LAKATOS; MARCONI, 2003, p.186) e tem como opções para coleta o laboratório ou ir a campo.

Na pesquisa, a sala de aula foi o local escolhido para a coleta dos dados, tipo de coleta que caracteriza uma pesquisa de campo que “consiste na observação de fatos e fenômenos tal como ocorrem espontaneamente, na coleta de dados a eles referentes e no registro de variáveis que se presume relevantes, para analisá-los.” (LAKATOS; MARCONI, 2003, p.186).

Lakatos e Marconi (2003) dividem esse tipo de pesquisa em três fases: a primeira é o levantamento bibliográfico, para conhecer os trabalhos já realizados sobre o tema e elaboração do plano geral da pesquisa, a segunda define a escolha da técnica empregada na coleta de dados e a determinação da amostra, a terceira para definir a forma de registro e análise dos dados.

Como a primeira fase já havia sido realizada, a etapa seguinte foi a definição da técnica exploratória, quanto a natureza da pesquisa, que tem como “principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores” (GIL, 2008, p. 27). Mostrou-se a mais adequada à pesquisa, que procura esclarecer como se dá o processo cognitivo.

A última fase da definição dos aspectos da pesquisa foi a escolha da técnica a ser utilizada no registro dos dados e análise posterior dos mesmos, como em pesquisas exploratórias o “procedimentos de amostragem e técnicas quantitativas de coleta de dados não são costumeiramente aplicados” (GIL, 2008, p. 27) foi escolhida uma abordagem qualitativa.

Apesar da técnica qualitativa ter sido a definida para a análise dos dados, alguns deles foram quantificados na pesquisa, fazendo com que em alguns momentos ela apresente aspectos quantitativos, fato que não prejudica o resultado, pois as técnicas não são excludentes entre si como afirma Morse (1991)

> Morse observou que um projeto principalmente qualitativo pode incorporar alguns dados quantitativos para enriquecer a descrição dos participantes da amostra. Da mesma forma, ela descreveu como os dados qualitativos podem ser usados para descrever um aspecto de um estudo quantitativo que não pode ser quantificado". (apud Creswell, 2007, p.220)

3.2- Sujeitos da pesquisa

A amostra foi formada por uma turma do segundo ano do ensino médio do Instituto Federal Baiano – Campus Guanambi, composta por 30 alunos, dos quais 29 aceitaram participar da pesquisa, assinando o termo de livre consentimento.

Para a captação dos dados foram utilizadas provas realizadas pelos estudantes no ano letivo de 2017. Como o instrumento de coleta foi uma das provas realizadas pelos estudantes, foi garantida uma amostragem mais heterogênea, pois, os estudantes que costumam se voluntariar a pesquisas relativas a matemática, geralmente são os que tem mais afinidade com a área.

Em contrapartida a essa vantagem, nem todo o instrumento foi voltado à coleta por ter que se adequar à avaliação, com apenas cinco das seis questões sendo utilizadas na coleta, pois a quarta questão foi descartada por não ter características adequadas à coleta.

A existência da questão 4 e o tempo para realização da mesma foram condições que se estabeleceram devido à utilização da prova como instrumento avaliativo da turma e de coleta de dados da pesquisa. Na elaboração foi observado o tempo de duas horas referentes ao horário de aula da turma, fato que não acarretou transtornos por ser suficiente.

Como a intenção foi identificar as imagens conceituais evocadas no estudo do conteúdo, não houve a necessidade da identificação dos estudantes.

3.3- O Instrumento de coleta de dados

O instrumento foi produzido com a intenção de evidenciar as imagens conceituais evocadas pelos estudantes ao resolver questões que envolvem conceitos encontrados no conteúdo sistemas lineares.

Vinner (1991) relata pesquisas realizadas com objetivos semelhantes, onde apresenta alguns questionários utilizados nas mesmas. Esses questionários serviram como guia para construção do instrumento aqui descrito. Sobre o método recomendado para a coleta dos dados Vinner (1991, p. 73-74) afirma que:

> Um método natural para aprender sobre a definição conceitual de alguém é de uma pergunta direta (o que é uma função? O que é uma tangente? E assim por diante). Isso ocorre porque as definições são verbais e explícitas. Por outro lado, a fim de aprender sobre imagem do conceito, geralmente perguntas indiretas devem ser colocadas, devido a imagem do conceito poder ser não-verbal e implícita. Assim, a principal tarefa do pesquisador é inventar perguntas que têm o potencial para expor imagem do conceito do entrevistado. (Tradução nossa).[6]

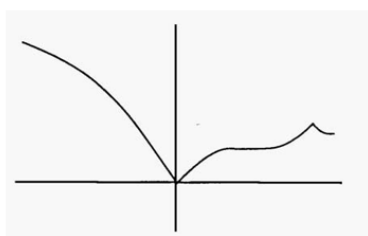
A intenção de identificar as imagens conceituais dos entrevistados pode ser percebida nos questionamentos feitos em suas pesquisas, sempre com algumas questões que remetem a situações em que a imagem conceitual evocada possa ser notada, inclusive os prováveis conflitos cognitivos relativos ao conceito trabalhado.

Cada questionário apresentado em Vinner (1991) era composto por várias perguntas indiretas, que procuravam exibir as imagens conceituais dos estudantes e uma única direta com o intuito de identificar a definição conceitual pessoal do estudante.

Figura 23: Questionário sobre função

Questionário

1. Existe uma função em que cada número diferente de 0 corresponda ao seu quadrado e o 0 corresponda a -1?
2. Existe uma função em que, cada número positivo corresponde a 1, cada número negativo corresponde a -1, e 0 corresponde a 0?
3. Existe uma função cujo gráfico é o seguinte?



4. Na sua opinião o que é uma função?

Fonte: VINNER (1991)

[6] A natural method to learn about somebody's concept definition is by a direct question (what is a function? what is a tangent? and so on). This is because definitions are verbal and explicit. On the other hand, in order to learn about somebody's concept image usually indirect questions should be posed, as the concept image might be non-verbal and implicit. Thus the main task of the researcher is to invent questions that have the potential to expose the respondent's concept image.

Em todos questionários apresentados, pôde ser esse padrão, como por exemplo, o que foi utilizado em uma investigação sobre funções (figura 23), é composto por quatro questionamentos, onde os três primeiros visam identificar imagens conceituais, com perguntas indiretas e, apenas o último solicitando diretamente a definição conceitual pessoal.

A ausência da pergunta direta é mais um limitante causado pela utilização da prova como instrumento de coleta, pois como não tenho o costume de perguntar definições em avaliações, optei por não fazer a pergunta para que não houvesse risco de prejudicar os estudantes no que diz respeito às notas.

Na prova utilizada na pesquisa, as questões foram elaboradas com o intuito de revelar quais imagens conceituais seriam evocadas sobre o conceito trabalhado, solicitando que as respostas fossem devidamente justificadas, para que essas imagens pudessem ser identificadas. As justificativas aceitas poderiam ser feitas em forma de texto ou cálculos, desde que explicitassem a razão da resposta dada.

O ideal seria que, ao analisar as respostas dos estudantes, todas as imagens conceituais que o estudante tem sobre aquele conceito fossem identificadas, porém, não existe a ilusão de que isso aconteça pois, como aponta Vinner (1991, p.73) “Em uma tarefa cognitiva específica, lidamos apenas com a imagem conceitual evocada. Não afirmamos que, em circunstâncias diferentes, a mesma imagem será evocada novamente”. Daí a necessidade de haver mais de uma questão tratando do mesmo conceito em situações diferentes.

Os conceitos presentes no estudo tratam de sistema linear, solução de uma equação linear, solução de um sistema linear, classificação quanto ao número de soluções e sistema linear homogêneo. Em cada questão, um ou mais desses assuntos são investigados, para que imagens conceituais que os estudantes possuem sobre esses assuntos sejam reveladas.

3.4- Construção do instrumento de coleta

Na primeira questão (figura 24) foi apresentado um sistema linear composto por três incógnitas e três equações, com quatro ternos ordenadas como opções de possíveis soluções para o mesmo, solicitando ao estudante que identifique quais opções eram soluções do sistema, sendo duas delas pertencentes ao conjunto solução.

Figura 24: Questão 01

1. (Valor 1,0) Determine se cada um dos ternos ordenados é, ou não solução do sistema linear
$$\begin{cases} 2x - 4y - z = 1 \\ x - 3y + z = 1 \\ 3x - 5y - 3z = 1 \end{cases}$$

a) (2,1,-1) b) (3,-1,1) c) (3,1,1) d) (17,7,5)

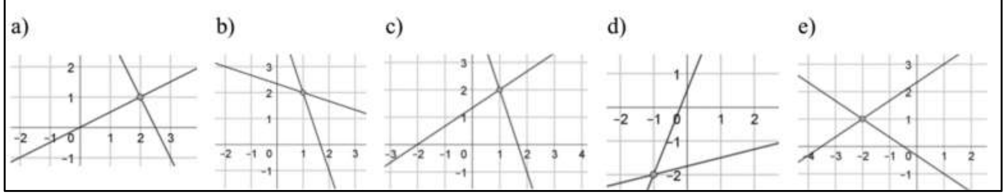
Fonte: Elaborado pelo autor

As ternas ordenadas foram escolhidas de forma que fossem solução de pelo menos uma das equações, por exemplo (2,1,-1) é solução apenas da primeira equação dando condições ao pesquisador de perceber se o estudante conhece o fato de que, uma solução de uma equação linear não é necessariamente a solução do sistema que ela faz parte. Diante desse cenário, fica mais fácil de perceber quais imagens conceituais serão evocadas sobre a solução de uma equação linear e de um sistema linear.

A segunda tem o mesmo princípio da anterior com algumas peculiaridades como a quantidade de equações e incógnitas, no caso apenas duas. Outra peculiaridade é a forma como as opções de solução são dadas, pois cinco soluções a serem analisadas são representadas graficamente pela intersecção entre duas retas no plano (figura 21).

Figura 25: Questão 02

2. (Valor 0,5) Dentre as opções, qual gráfico melhor representa a solução do sistema linear $\begin{cases} 6x + 2y = 10 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$? Justifique sua resposta.



Fonte: Elaborado pelo autor

A utilização de mais de uma questão atrelada a um mesmo conceito, se dá em razão da possibilidade da existência de várias imagens conceituais vinculadas a ele, além do fato de nem todas serem evocadas simultaneamente quando o estudante resolve um exercício que tem como requisito o domínio de um conceito. Como Vinner (1991) salienta, o uso de mais de um tipo de abordagem do mesmo tema possibilita a observação de uma gama maior de imagens do conceito.

Além de identificar qual é a solução do sistema linear, procedimento realizado também na questão anterior, agora o estudante deve reconhecer como se dá graficamente a solução do sistema, tanto o ponto de intersecção entre as retas como também as posições das mesmas.

Os pontos de intersecção entre as retas foram escolhidos de forma que, recaíssem sobre os pontos (1,2), (2,1) (-1,-2) e (-2,1), para que exista a possibilidade de verificar se há alguma imagem conceitual acerca da ordem ou dos sinais dos valores da solução.

Além disso, como a solução do sistema é o ponto (1,2), que se apresenta em dois gráficos, é necessário que se saiba que, a intersecção entre as retas não deve ser o único aspecto a se considerar para definir qual gráfico representa um sistema linear, pois por um ponto passam infinitas retas com cada agrupamento delas formando um novo sistema de mesma solução.

As imagens que abordam conceitos sobre as definições de equações e sistemas lineares são o foco da terceira questão, nela foram apresentados cinco sistemas para que os estudantes determinem quais deles são lineares, justificando as respostas.

Os sistemas foram escolhidos de modo que variassem a quantidade de equações e incógnitas. Dentre as equações não lineares, uma apresenta termos com o produto de duas incógnitas e o outro uma incógnita no denominador, que geraria um expoente diferente de 1, conforme figura 22.

Figura 26: Questão 03

3. **(Valor 0,5) Justificando a resposta** indique quais dos sistemas abaixo **não** são formados por equações lineares:

a) $\begin{cases} 6x + 2y = 10 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x - y + 2z = 3 \\ 2x + xy - 3z = -3 \\ -3x + 2y + yz = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 8z = 3 \\ -x + y = -3 \\ x + z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \sqrt{2}y = 10 \\ 2x + 7y + 8z = 35 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 6x + 2y = 10 \\ 2x - \frac{3}{y} = -4 \end{cases}$

Fonte: Elaborado pelo autor

A questão 4 é um problema envolvendo sistemas lineares que teve como objetivo a montagem do sistema linear que não foi considerada na pesquisa por não exigir que os conceitos fossem utilizados de forma explicita, impossibilitando a identificação de imagens conceituais.

Na questão 05 são apresentados três sistemas lineares e é solicitado que os estudantes apresentem o conjunto solução e classificação quanto ao número de soluções. Os sistemas foram criados de forma que cada um apresentasse uma das classificações existentes, o primeiro com impossível, o segundo possível e determinado e o último possível e indeterminado.

Figura 27: Questão 05

5. **(Valor 1,5)** Resolva e classifique quanto à quantidade de soluções os sistemas lineares:

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 7y + 8z = 3 \\ -x + y + 3z = -3 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 - \quad 5x_2 = 2 \\ -3x_1 + 15x_2 = -6 \end{cases}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Para o sistema letra (a) não existem pares ordenados que satisfaçam as duas equações simultaneamente, fazendo com que o conjunto solução seja vazio e que ele seja classificado como impossível. Na (b) existe uma única terna ordenada que atende as equações fazendo que o conjunto solução do sistema seja $S = \{(7, -5{,}3)\}$, classificando-o como possível e determinado. No último, após efetuados os cálculos devidos, uma das equações se anulará, de modo que o sistema equivalente a ele, tenha a quantidade de equações menor que a de incógnitas, fato que o configura como possível e determinado, onde suas infinitas soluções estão representadas no conjunto $S = \{(5k + 2, k), comk \in R\}$.

A última questão trata da definição de um sistema homogêneo e de características de seu conjunto solução.

Figura 28: Questão 06

6. **(Valor 0,5)** Determine uma solução do sistema linear $\begin{cases} x_1 - \quad 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 8x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Como é um sistema homogêneo formado por quatro equações e quatro incógnitas, não é desconsiderada a possibilidade de o estudante resolvê-lo por escalonamento. Mas o esperado é que ele domine os conceitos acerca de sistemas homogêneos sendo principal a garantia de que seu conjunto solução não é vazio, que pode ser melhor compreendido quando representado na forma de uma equação matricial.

O sistema pode ser representado por $A_{4x4}.X_{4x1} = 0_{4x1}$ e, de acordo com as propriedades da multiplicação matricial, tem-se que $A_{mxn}.0_{nxp} = 0_{mxp}$ ou seja, o resultado da multiplicação de uma matriz qualquer por uma matriz nula tem como resposta outra matriz nula, garantindo a existência de pelo menos uma solução, a $S = \{(0,0,0,0)\}$.

Como questão solicita que seja apresentada apenas uma solução do sistema, a expectativa é de que o estudante não realize cálculos, evidenciando essa propriedade dos sistemas homogêneos como uma de suas imagens conceituais relativas ao tema.

Ao final da realização da coleta de dados, espera-se que as imagens conceituais evocadas pelos estudantes em cada questão estejam relacionadas aos conceitos trabalhados conforme listados na tabela 1

Tabela 1: Conceitos inseridos nas questões

Conceitos	Questões				
	01	02	03	05	06
Sistema linear			x		
Solução de uma equação linear	x	x		x	
Solução de um sistema linear	x	x	x		x
Classificação quanto ao número de soluções				x	
Sistema linear homogêneo					X

Fonte: Elaborado pelo autor

4. ANÁLISE DOS DADOS

A análise teve como objetivo identificar imagens conceituais sobre o conteúdo sistemas lineares, para entender quais os conflitos cognitivos são mais recorrentes nos estudantes.

As questões foram analisadas individualmente e agrupadas de acordo com a apresentação da resposta. As que estavam sem registro algum foram separadas, por não haver possibilidade de investigação, e as que restaram foram divididas entre as que apresentaram respostas corretas e as que continham erros.

Em meio às questões sem resposta, é provável que existam algumas que não tenham sido respondidas devido a inexistência ou insuficiência de imagens conceituais acerca do tema, fato de difícil comprovação por não haver possibilidade de análise.

Tanto nas respostas corretas, quanto nas incorretas, os estudantes evidenciaram processos e propriedades que atribuídas aos conceitos empregados nas questões, que, de acordo com a definição de imagem conceitual apresentada por Tall e Vinner (1981), são algumas das imagens conceituais evocadas pelo indivíduo.

Entre as respostas corretas, além das imagens conceituais em conformidade com a definição formal, foram identificadas algumas que apresentavam características contrárias as da definição formal. Esses casos demandam uma maior atenção, pois, apesar de não causarem prejuízo na nota, fazem com que o estudante tenha uma falsa impressão de aprendizado, consolidando a imagem conceitual inadequada.

O caso da imagem conceitual apresentada no capítulo 1 que considera a reta tangente a uma curva como a que intersecta a curva em apenas um ponto é um exemplo de imagem conceitual que, mesmo em desacordo com a definição formal, pode levar o estudante a acertar a questão, caso a curva seja uma parábola por exemplo. Apesar do estudante acertar a questão, o objetivo maior, que é a compreensão do conceito, não é alcançada.

Em seguida, foram analisadas as justificativas das repostas incorretas e identificadas às imagens conceituais responsáveis pelos erros. É importante frisar que nem todos os erros são causados por questões conceituais, podem acontecer, por exemplo, por um descuido ao realizar operações elementares.

4.1- Análise da questão 01

As imagens conceituais encontradas na primeira questão foram:

1.1 - A solução de um sistema deve servir para todas as equações pertencentes a ele.

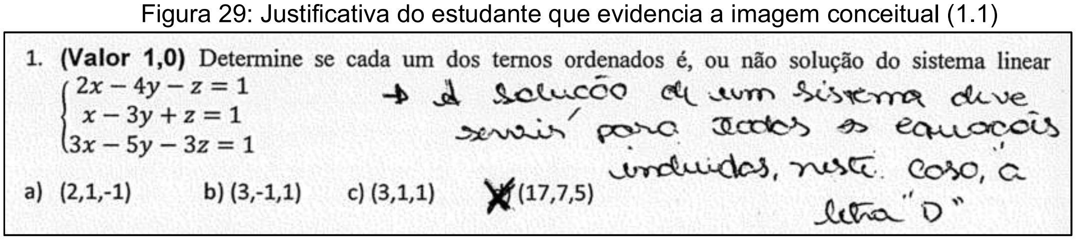
1.2 - Se a solução satisfaz uma única equação, então ela é solução do sistema.

1.3 - Se uma solução não satisfaz uma equação, então ela não é solução do sistema.

1.4 - O conjunto solução de um sistema possível e indeterminado é o conjunto universo.

Em (1.1) pode ser notado que 10 estudantes utilizaram dessa imagem conceitual, pois durante os cálculos, ao perceberem que a terna ordenada a ser testada não era solução de uma equação, eles já partiam para o próximo sistema linear. Nesse tipo de comportamento, é nítida a utilização da imagem conceitual (1.1). Mesmo com a imagem conceitual estando condizente com a definição formal, dentre os estudantes em que se utilizaram dessa imagem conceitual, 03 erraram a questão por erros de cálculos. Um desses, apesar de errar a questão, descreveu em suas palavras, o conceito de solução de um sistema linear de forma correta, como pode ser visto na figura 29.

Figura 29: Justificativa do estudante que evidencia a imagem conceitual (1.1)


1. **(Valor 1,0)** Determine se cada um dos ternos ordenados é, ou não solução do sistema linear

$$\begin{cases} 2x - 4y - z = 1 \\ x - 3y + z = 1 \\ 3x - 5y - 3z = 1 \end{cases}$$

a) (2,1,-1) b) (3,-1,1) c) (3,1,1) d) (17,7,5)

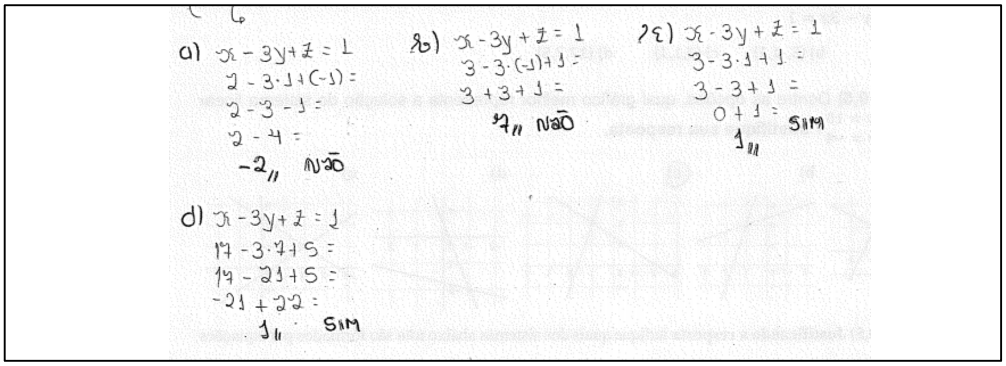
→ A solução de um sistema deve servir para todas as equações incluidas, neste caso, a letra "D"

Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

Em dois casos, a imagem conceitual (1.2) foi notada durante a observação das soluções dessa questão. No primeiro caso, ao testar se a terna ordenada era solução das equações de um sistema, mesmo quando uma equação não era satisfeita o estudante continuava a verificação nas outras e, ao obter uma equação na qual a terna ordenada era solução, ele afirmava que ela era solução do sistema linear, ficando evidente que o estudante evocou a imagem conceitual (1.2), causando um conflito cognitivo, por ela estar em desacordo com a definição conceitual formal.

No segundo caso, o estudante optou por avaliar se a terna ordenada era solução apenas da primeira equação, desconsiderando as demais, assumindo assim que o resultado encontrado seria válido também para o sistema. Diante desse fato, fica claro que ele evocou as imagens conceituais (1.2) e (1.3) sem perceber que são contraditórias entre si, pois no caso em que a terna ordenada atende apenas parte das equações pela imagem (1.2) ela é solução do sistema e pela (1.3) não é, por existir uma que não seja satisfeita pela terna ordenada. Como pode ser visto na figura 30.

Figura 30: Resolução que evidencia a utilização das imagens conceituais (1.2) e (1.3) simultaneamente



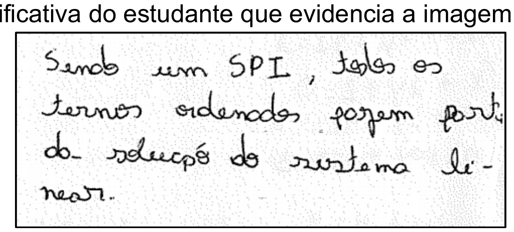
Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

Como a imagem conceitual (1.3) é condizente com a definição formal, a utilização dela nas letras a e b fizeram com que o estudante as acertasse, mas o uso da imagem conceitual (1.2) nas seguintes poderia causar o erro das demais, caso uma das equações seguintes dessas letras não fossem satisfeitas pela terna ordenada.

Quando imagens conceituais conflitantes entre si são evocadas e, por alguma razão, a divergência entre elas não é notada, um conflito cognitivo que era potencial, passa a ser real, apesar do estudantes não ter consciência dele e, apesar da falha na imagem conceitual, o estudante apresenta a resposta correta da questão, fazendo com que ele não perceba a falha no aprendizado impossibilitando a correção do problema por parte dele, podendo assim ocasionar problemas futuros.

A (1.4) é identificada em uma avaliação que após o estudante resolver o sistema linear e o classificar como possível e indeterminado, ele afirma que todas as opções são soluções do sistema devido à sua classificação, como pode ser visto na figura 31.

Figura 31: Justificativa do estudante que evidencia a imagem conceitual (1.4)

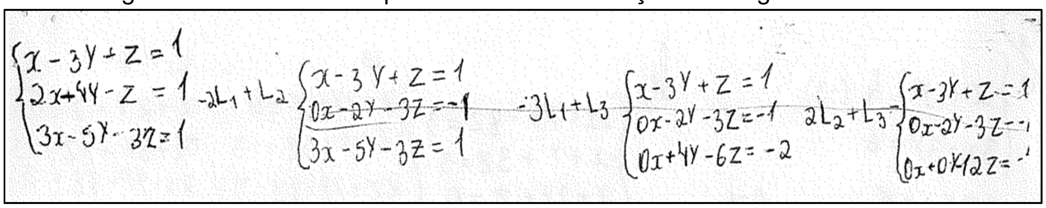


Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

Essa resposta apresenta um conflito cognitivo, no qual o estudante considera que todas as infinitas ternas ordenadas do espaço são solução do sistema de equações lineares, devido ao fato dele ser indeterminado, evidenciando a confusão entre um conjunto solução infinito e o conjunto universo.

Do total da amostra, foi possível identificar imagens conceituais na questão 01, em 21 avaliações, sendo que, das restantes, 02 não tinham respostas e 06 cometeram erros ao tentar resolver o sistema impossibilitando a identificação de imagens conceituais evocadas por eles, como a resolução apresentada na figura 32.

Figura 32: Justificativa impossibilitou a identificação de imagens conceituais



Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

A frequência em que cada uma das imagens conceituais é evocada está na tabela 2.

Tabela 2: Imagens conceituais evocadas na questão 01

Imagem conceitual evocada	Frequência
1.1- A solução de um sistema deve servir para todas as equações pertencentes a ele.	17
1.2 - Se a solução satisfaz uma equação é solução do sistema.	02
1.3 - Se a solução não satisfaz uma equação então ela não é solução do sistema.	01
1.4 - O conjunto solução de um sistema possível e indeterminado é o conjunto universo	01
Não foram identificadas imagens conceituais	08

Fonte: Elaborado pelo autor

4.2- Análise da questão 02

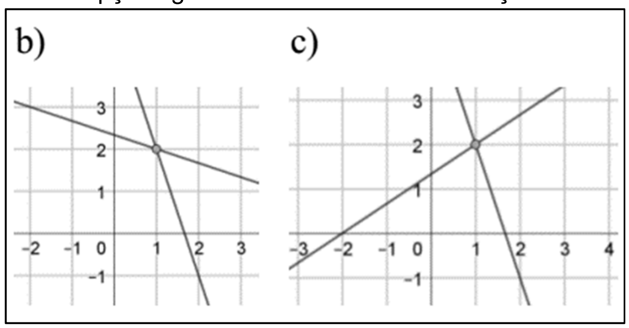
Na questão 02 as duas imagens conceituais evocadas e identificadas foram:

2.1- A solução de um sistema linear formado por duas equações e duas incógnitas, é representado pela intersecção entre duas retas no plano, ignorando se as retas representam ou não as equações.

2.2 - A solução do sistema linear é representada pela intersecção das retas que representam as equações.

Em todas as questões que apresentaram registro os estudantes resolveram o sistema linear corretamente, obtendo a solução. A partir desse resultado eles descartaram as opções **a**, **d** e **e** sobrando apenas as opções de gráficos em que as retas se intersectam no ponto correspondente à solução encontrada, que podem ser vistos na figura 33.

Figura 33: Opções gráficas com mesma intersecção entre retas.



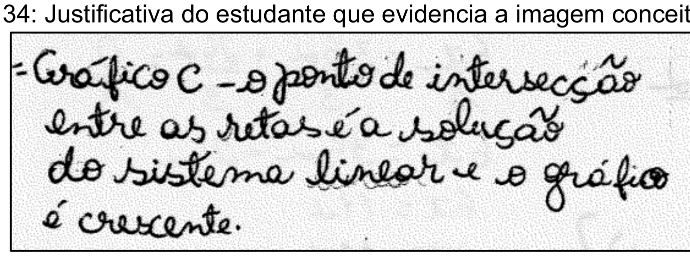
Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

Ainda assim, 10 deles erraram a questão, escolhendo a opção **b**, evidenciando a imagem conceitual (2.1), pois ao verificarem que existe a intersecção entre duas retas no ponto que é solução do sistema linear já optaram por apontá-la como verdadeira, mesmo sem verificar se as retas correspondiam às equações do sistema linear.

Os demais optaram pela letra **c**, porém apenas 08 deixaram registrado como fizeram para verificar qual dos dois gráficos apresentavam a correspondência correta entre as retas e o sistema linear, mostrando a utilização da imagem conceitual (2.2), que tem afinação com a definição conceitual formal.

Duas estratégias para a escolha da opção **c** foram as mais utilizadas pelos estudantes, uma foi através da observação da inclinação das retas, pois o gráfico de uma das equações do sistema linear era uma reta crescente (Figura 34).

Figura 34: Justificativa do estudante que evidencia a imagem conceitual (2.2)

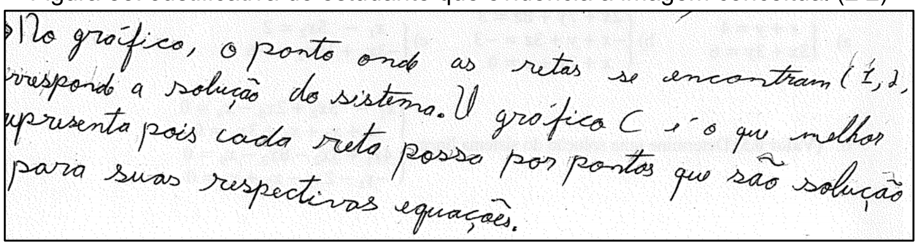

- Gráfico C - o ponto de intersecção entre as retas é a solução do sistema linear e o gráfico é crescente.

Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

Ainda assim, é possível que exista uma imagem conceitual conflitante, pois ao dizer "gráfico é crescente", ele não considera que uma das equações tem a representação gráfica crescente. A existência do conflito não pode ser confirmada por existir a possibilidade de que o estudante tenha cometido o erro na forma de se expressar.

A outra foi verificar se os pontos das retas eram solução das equações do sistema linear expressa na figura 35.

Figura 35: Justificativa do estudante que evidencia a imagem conceitual (2.2)


No gráfico, o ponto onde as retas se encontram (1,2), corresponde a solução do sistema. O gráfico C é o que melhor representa pois cada reta passa por pontos que são solução para suas respectivas equações.

Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

Dentre os 17 estudantes que acertaram a questão 09 não justificaram a opção pela letra c fazendo com que a imagem conceitual (2.2) ficasse aparente apenas em 08 das repostas analisadas como mostra a tabela 3.

Tabela 3: Imagens conceituais evocadas da questão 02

Imagem conceitual evocada	Frequência
2.1 - A solução de um sistema linear formado por duas equações e duas incógnitas é representado pela intersecção entre duas retas no plano, ignorando se as retas representam ou não as equações.	10
2.2 - A solução do sistema linear é representada pela intersecção das retas que representam as equações.	08
Não foram identificadas imagens conceituais	11

Fonte: Elaborado pelo autor

4.3- Análise da questão 03

Na terceira questão foram detectadas as seis imagens conceituais listadas:

3.1 - Um sistema linear deve seguir o padrão ax+by+cz=d.

3.2 - Se existirem incógnitas que não apareçam em todas as equações, não é um sistema linear.

3.3 - Sistemas com incógnitas em ordem diferente nas equações, não são lineares.

3.4 - Sistemas lineares não podem ter quantidade diferente de incógnitas nas equações do sistema.
3.5 - Se existirem coeficientes irracionais, o sistema não é linear.
3.6 - Se existirem coeficientes fracionários, o sistema não é linear.

A imagem conceitual (3.1) possui mesmo sentido da definição formal pecando apenas em sua representação, por limitar a quantidade de termos da equação em três incógnitas. Como na questão haviam equações com diferentes números de incógnitas e o estudante a acertou, é mais provável que ele tenha compreendido o conceito como pode ser visto na figura 36.

Figura 36: Descrição da imagem conceitual (3.1) realizada pelo estudante

3- As letras "b" e "e", pois em um sistema linear deve-se seguir o padrão: $ax + by + cz = d$, o que não ocorre nas alternativas indicadas.

Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

As demais imagens conceituais detectadas e apresentadas acima são todas inadequadas ao processo cognitivo do estudante, por serem a causa dos erros cometidos por eles na resolução da questão.

De (3.2) a (3.4) as imagens se concentram na disposição e na quantidade das incógnitas, provavelmente geradas pelo modelo utilizado na definição conceitual formal onde as equações do sistema linear são descritas de forma genérica e tem todas as incógnitas à vista e ordenadas. A justificativa apresentada na figura 37 mostra de forma explícita a utilização dessas imagens conceituais por eles.

Figura 37: Justificativa do estudante que apresenta características das imagens conceituais (3.2), (3.3) e (3.4)

Alternativa b e c, pois na letra b a equação contém mais de quatro incognitas e na letra c, não seguem a ordem das incognitas.

Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

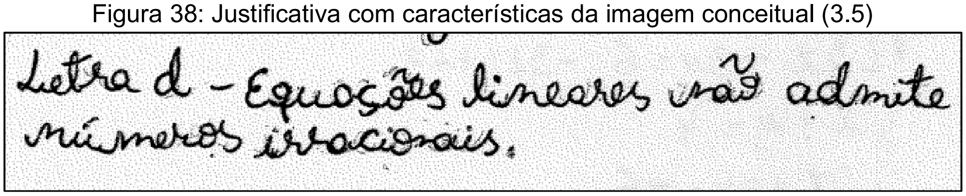
Esse tipo de resposta expõe a necessidade de se dar uma maior ênfase ao fato de que, as incógnitas que não aparecem, estão multiplicadas por zero e somadas aos outros termos. Outra observação importante é que a propriedade comutativa da adição se aplica aos termos de uma equação linear, porém, mesmo quando os estudantes conhecem essa propriedade, a imagem conceitual (3.4) pode ser evocada e se sobressaia aos seus conhecimentos algébricos, imputando esse tipo de erro.

Essa situação não é impossível, pois, como afirma a teoria, imagens conceituais conflitantes podem coexistir sem que o indivíduo perceba se forem evocadas em momentos diferentes. A pessoa só terá consciência da incompatibilidade delas se forem evocadas simultaneamente, ocasionando um conflito cognitivo ou se o professor o ajudar a identificar esse conflito cognitivo em potencial.

Aparentemente, os autores de livros didáticos perceberam a existência de uma imagem conceitual divergente à definição conceitual formal de equação linear, que é quando estudantes considerarem equações, com expoentes não naturais, como lineares. Essa imagem parece ser tão recorrente que a maioria dos autores, ao apresentar a definição de equação linear, apresentam exemplos de equações com expoentes não naturais reforçando a ideia de que não são lineares.

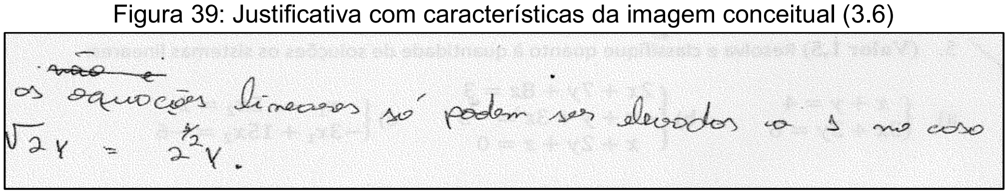
Esse fato fez com que ficasse notável a eficácia da apresentação de exemplos e contraexemplos que apresentam para a construção de um bom conjunto de imagens mentais sobre o conceito, pois, na pesquisa não houve nenhuma ocorrência dessa imagem conceitual. Mas, apesar de louvável essa iniciativa, os exemplos dados não foram suficientes para a compreensão do conceito, pois acabaram acarretando a criação de mais duas imagens conceituais inadequadas (3.5) e (3.6), como pode ser observado nas figuras 38 e 39, que mostram erros ocasionados pela imposição das regras existentes para as incógnitas aos coeficientes.

Figura 38: Justificativa com características da imagem conceitual (3.5)


Letra d - Equações lineares não admite números irracionais.

Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

Figura 39: Justificativa com características da imagem conceitual (3.6)


~~não~~ os equações lineares só podem ser elevados a 1 no caso $\sqrt{2}y = 2^{1/2}y$.

Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

É provável que essas imagens (3.5) e (3.6) pudessem ser evitadas, caso juntamente aos exemplos das equações não lineares fossem apresentadas equações lineares com coeficientes irracionais e fracionários, salientando as diferenças entre os casos apresentados.

A frequência que as imagens conceituais citadas na questão 3 se deu está apresentada conforme a tabela 4.3.

Tabela 4: Imagens conceituais evocadas na questão 03

Imagem conceitual evocada	Frequência
3.1 – Um sistema linear deve seguir o padrão ax+by+cz=d	01
3.2 - Se existirem incógnitas que não apareçam em todas as equações não é um sistema linear.	05
3.3 - Sistemas com incógnitas em ordem diferente nas equações não são lineares.	01
3.4 - Sistemas lineares não podem ter quantidade diferente de incógnitas nas equações do sistema.	06
3.5 - Se existirem coeficientes irracionais o sistema não é linear.	07
3.6 - Se existirem coeficientes fracionários o sistema não é linear.	01
Não foram identificadas imagens conceituais	08

Fonte: Elaborado pelo autor

4.4- Análise da questão 05

A quinta questão, apesar de composta por três letras, em duas delas (**a** e **b**), não foi possível identificar imagens conceituais. Isso não significa que o processo de resolução realizado pelos estudantes não tenha se baseado em imagens conceituais evocadas, simplesmente a identificação delas foi impossibilitada pela forma com que as respostas foram apresentadas. Apesar da justificativa ter sido solicitada, eles deixaram apenas os cálculos e a classificação como registro.

Já a letra **c**, mesmo sem uma justificativa devida, as relações que os estudantes fizeram entre os cálculos, a solução e a classificação do sistema linear foram uma fonte de dados considerável, expondo algumas imagens conceituais.

Ao final do processo de resolução do sistema linear, a maioria dos estudantes obteve a equação, mas, dos 25 que tentaram resolver a questão, cinco conseguiram descrever corretamente as soluções do sistema e os outros 20 emitiram soluções erradas ou nenhuma solução, mesmo classificando corretamente como possível e indeterminado, como mostra a tabela 5.

Tabela 5: Tipos de solução da letra c da questão 05

Tipo de solução apresentada	Frequência
Solução correta	05
Inexistente	10
S={(0,0)}	06
S=R²	02
Outros tipos	02
Em branco	04

Fonte: Elaborado pelo autor

Com base nos dados tabulados as imagens conceituais identificadas foram:

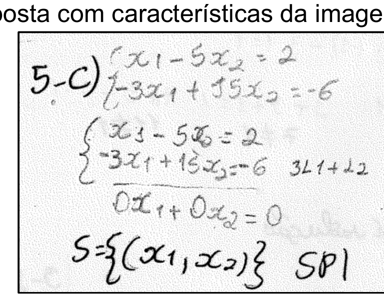
5.1– O conjunto solução de um sistema possível e indeterminado é o conjunto universo.

5.2 - O sistema possível e indeterminado não apresenta soluções.

5.3 - O sistema possível e indeterminado admite apenas a solução nula.

A imagem conceitual (5.1) foi detectada em resoluções que os estudantes apontaram como solução o R², ou o par ordenado genérico como solução do sistema linear como pode ser visto na figura 40.

Figura 40: Resposta com características da imagem conceitual (5.1)

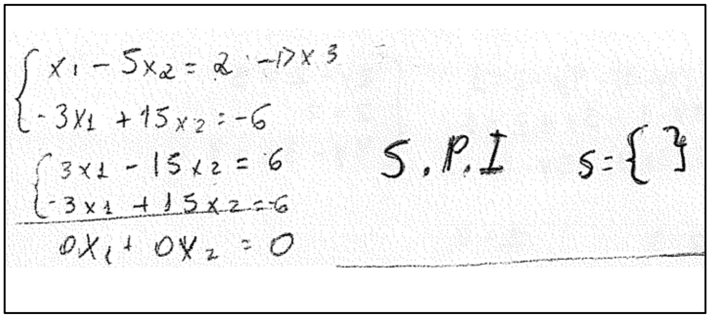


Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

Esse tipo de erro certamente se deu por se pensar que a equação $0x + 0y = 0$, obtida após a resolução do sistema da letra (c), tem solução igual tem solução igual à do sistema que deu origem a ela. A adição de equações, apresentada no ensino fundamental como método de resolução de sistemas lineares, pode ser o maior causador desse tipo de erro, pois o estudante acaba não percebendo que essa adição é apenas uma etapa do processo de escalonamento do sistema linear. A resolução em paralelo pelas duas formas seguida de uma comparação entre elas pode ser uma forma de possibilitar que o estudante molde suas imagens conceituais mais próximo da definição conceitual formal.

As imagens conceituais (5.2) e (5.3) mostram uma certa confusão em relação à quantidade de soluções que um sistema indeterminado possui. Na (5.2) alguns estudantes deixaram sem uma solução definida e outros apresentaram o conjunto vazio como solução do sistema conforme resolução da figura 41.

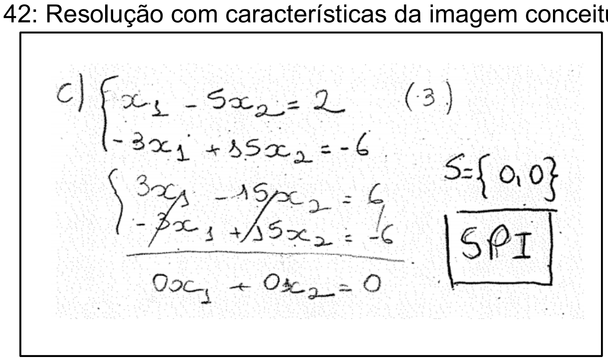
Figura 41: Resolução com características da imagem conceitual (5.2)



Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

Também foi encontrado o conjunto como solução do sistema caracterizando a imagem conceitual (5.3) como indica a figura 42.

Figura 42: Resolução com características da imagem conceitual (5.3)



Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

A dificuldade em entender que um sistema possível e indeterminado possui infinitas soluções e como são essas soluções, foi a maior causadora de erros nesse caso. Um simples detalhe que poderia ser sanado com uma discussão mais aprofundada sobre os conceitos aplicados ao conteúdo, mostrando que, elementos do conteúdo que são óbvios ao professor podem ser confusos sob a ótica do estudante.

A distribuição das imagens conceituais que foram identificadas na questão 5 podem ser vistas na tabela 6.

Tabela 6: Imagens conceituais evocadas na questão 05

Imagem conceitual evocada	Frequência
5.1 - O conjunto solução de um sistema possível e indeterminado é o conjunto universo.	02
5.2 - O sistema possível e indeterminado não apresenta soluções.	10
5.3 - O sistema possível e indeterminado admite apenas a solução nula.	06
Não foram identificadas imagens conceituais	11

Fonte: Elaborado pelo autor

4.5- Análise da questão 06

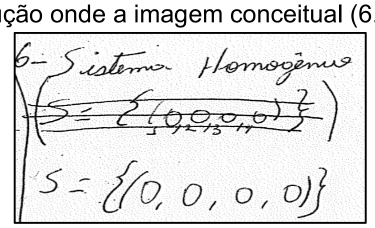
A questão seis solicita apenas uma única solução de um sistema homogêneo, não exigindo a quantidade de soluções existentes. Dezoito dos estudantes apresentaram a solução nula, cinco erraram a questão e seis a deixaram sem resposta.

Após análise dos dados obtidos, nessa última questão, quatro imagens conceituais sobre sistemas homogêneos foram identificadas.

6.1 - Todo sistema homogêneo admite a solução trivial.
6.2 - Todo sistema homogêneo é possível e determinado.
6.3 - Todo sistema homogêneo é possível e indeterminado.
6.4 - Todo sistema homogêneo é impossível e admite infinitas soluções.

Dos 18 que apresentaram a solução nula como resposta, 11 deixaram registrado a classificação do sistema como homogêneo como justificativa para solução apresentada, como pode ser percebido no registro da figura 43.

Figura 43: Resolução onde a imagem conceitual (6.1) foi identificada.

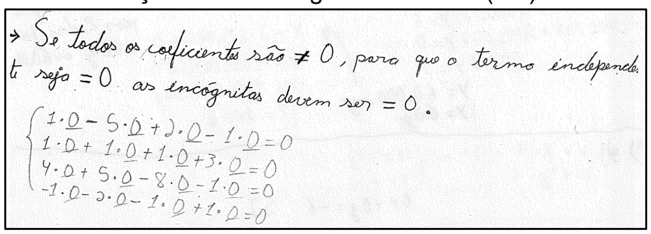


Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

Esse tipo de solução, que serviu de base para a identificação da imagem conceitual (6.1), é coerente aos conceitos ligados ao sistema homogêneo.

Ao utilizar as imagens conceituais (6.2) e (6.3), o estudante admite a existência da solução de um sistema apenas por ele ser homogêneo, o que é verdade, mas, além disso, fazem afirmações a espeito da quantidade de soluções do sistema que não podem ser confirmadas apenas por ele ser homogêneo. Na (6.2) por exemplo, o estudante conclui que, apenas a solução nula pode ser solução de um sistema linear homogêneo, podendo levá-lo a cometer erros em questões que solicitem a resolução de um sistema linear homogêneo que seja indeterminado.

Figura 44: Resolução onde a imagem conceitual (6.2) foi identificada.

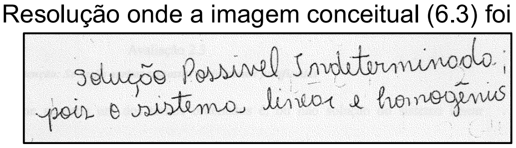

→ Se todos os coeficientes são ≠ 0, para que o termo independente seja = 0 as incógnitas devem ser = 0.

$$\begin{cases} 1\cdot\underline{0} - 5\cdot\underline{0} + 2\cdot\underline{0} - 1\cdot\underline{0} = 0 \\ 1\cdot\underline{0} + 1\cdot\underline{0} + 1\cdot\underline{0} + 3\cdot\underline{0} = 0 \\ 4\cdot\underline{0} + 5\cdot\underline{0} - 8\cdot\underline{0} - 1\cdot\underline{0} = 0 \\ -1\cdot\underline{0} - 2\cdot\underline{0} - 1\cdot\underline{0} + 1\cdot\underline{0} = 0 \end{cases}$$

Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

A informação referente à imagem conceitual (6.3) foi apresentada de forma explícita por um dos estudantes, ao fazer a classificação do sistema quanto ao número de soluções, baseando-se apenas no fato dele ser homogêneo como mostra a figura 45.

Figura 45: Resolução onde a imagem conceitual (6.3) foi identificada.

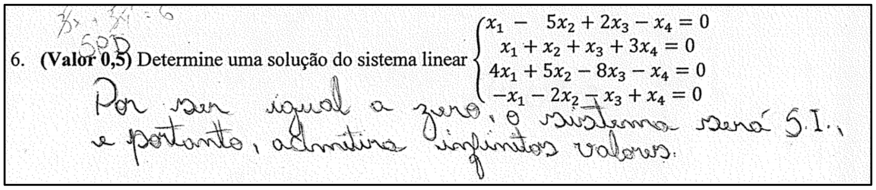

solução Possível Indeterminado; pois o sistema linear é homogênio

Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

Nesses conflitos os estudantes classificaram o sistema linear como determinado (figura 44) ou indeterminado (figura 45) devido ao fato dele ser homogêneo, ficando evidente que não entenderam que a única garantia que há é que ele é possível. Essas imagens conceituais equivocadas poderiam ser reparadas com a apresentação de dois sistemas homogêneos, um de cada caso, seguido de uma discussão sobre as suas soluções.

Já a imagem conceitual (6.4) mostra uma imagem conceitual equivocada a respeito de um sistema homogêneo, pois o estudante o classifica como impossível e ainda conclui afirmando que o mesmo sistema admite infinitas soluções conforme figura 46.

Figura 46: Resolução onde a imagem conceitual (6.4) foi identificada.


6. (Valor 0,5) Determine uma solução do sistema linear $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 8x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Por ser igual a zero, o sistema será S.I., e portanto, admitira infinitos valores.

Fonte: registros do instrumento de coleta da pesquisa

Esse caso mostra imagens conceituais conflitantes sendo evocadas simultaneamente, gerando um conflito subconsciente, pois, por mais que possa ter causado um desconforto ao estudante, ele não percebeu a razão e manteve sua resposta.

A frequência das imagens conceituais que foram identificadas na questão 6 podem ser vistas na tabela 7.

Tabela 7: Imagens conceituais evocadas na questão 06

Imagem conceitual evocada	Frequência
6.1 - Todo sistema homogêneo admite a solução trivial.	17
6.2 - Todo sistema homogêneo é possível e determinado.	01
6.3 - Todo sistema homogêneo é possível e indeterminado.	01
6.4 - Todo sistema homogêneo é impossível e admite infinitas soluções.	02
Não foram identificadas imagens conceituais	07

Fonte: Elaborado pelo autor

Das dezenove imagens conceituais listadas, 5 são consistentes ao conceito relacionado a elas, mesmo não apresentando todos os detalhes das definições encontradas nos livros. As 14 demais que devem ter uma maior atenção, pois estão em descordo com a definição conceitual formal, gerando conflitos no entendimento do conteúdo quando evocadas.

Os conflitos provenientes dessas imagens conceituais tratam das relações entre o conjunto solução e o conjunto universo, das classificações dos sistemas lineares e da representação dos sistemas lineares, tanto no que diz respeito à composição das equações e seus termos, quanto à organização dos mesmos.

Esses tipos de conflitos podem passar de problema a solução se o docente souber que podem acontecer, pois mesmo que não sejam conflitos comuns a todos os estudantes da turma, se o docente cria essas situações conflitantes durante as aulas, é provável que boa parte dos estudantes consigam corrigi-los. Fato que mostra a importância de se conhecer processo de construção do conjunto de imagens conceituais acerca dos conceitos a serem trabalhados.

De acordo com a teoria, se os estudantes tivessem contato com situações em que as imagens equivocadas fossem confrontadas, através de exemplos ou exercícios onde elas aparecem, eles poderiam moldar melhor o conjunto de imagens conceituais sobre o tema, melhorando o processo de aprendizagem e, por consequência, acabariam reduzindo a quantidade de erros nas avaliações ou em exercícios comuns.

Esse fato só reforça a importância de se conhecer as principais imagens conceituais pessoais que podem ser evocadas em cada conteúdo, para que possam ser utilizadas como norteadoras da escolha de exemplos e observações a serem utilizados durantes as aulas.

5. CONCLUSÃO

Ao analisar as resoluções das avaliações dos estudantes do Ensino Médio do Instituto Federal Baiano – Campus Guanambi, foram listadas quatorze imagens conceituais com inconsistências e cinco que apresentaram características da definição formal a que se referem.

Essas imagens evidenciaram falhas no processo de aprendizado do conteúdo apontando onde elas devem ter ocorrido, possibilitando assim, a análise de conflitos cognitivos decorrentes dessas inconsistências, fazendo com que o objetivo da pesquisa fosse alcançado.

A pesquisa se mostrou bastante reveladora quanto ao processo cognitivo dos estudantes no ensino de sistemas lineares, pois revelou imagens conceituais e conflitos que não são tão evidentes sob a ótica do professor de matemática, apontando diversos aspectos que poderiam ser melhorados nas aulas ministradas a eles.

Noções como a existência de um conjunto solução infinito, diferente do universo ou a necessidade da validação de todas as equações por uma ênupla para que ela pertença ao conjunto solução do sistema aparentemente fáceis de serem entendidas, se mostraram grandes causadoras conflitos cognitivos, proporcionando a possibilidade de futuramente se realizar um planejamento de aula ou sequência didática, em que os estudantes se confrontem com essas situações.

Ações como essas fazem com que o entendimento do conteúdo se dê com mais naturalidade, resultando em imagens conceituais semelhantes às definições formais, reduzindo assim os conflitos cognitivos causados por imagens conceituais incoerentes como afirma Vinner (1983, p. 297):

> [..]revelar as imagens conceituais dos nossos alunos se torna muito importante para o ensino; não só pode isso dar-nos uma melhor compreensão dos nossos alunos (saber o que os levou a agir como agiram), mas também pode sugerir algumas melhorias para o nosso ensino que formaram essas imagens conceituais erradas. (tradução nossa)[7]

Como imaginado, o não conhecimento dessas imagens conceituais conflitantes aliadas à metodologia encontrada na maioria dos livros didáticos, onde são

[7] “revealing the concept images of our students becomes very important for teaching; notonly might it give us a better understanding of our students (knowing what caused them to actasthey acted) but also it might suggest some improvements to our teaching which formed such wrong concept images”

apresentadas definições e alguns exemplos em seguida, se mostrou pouco eficaz no processo de construção das imagens conceituais, ficando evidente a necessidade das melhorias no ensino, tanto nos exemplos a serem apresentados, quanto nos comentários sobre as definições.

É provável que, se houvesse uma maior discussão sobre as representações dos sistemas lineares e as relações existentes entre suas soluções e as classificações, a quantidade de imagens conceituais conflitantes reduzisse consideravelmente.

Conflitos causados por imagens conceituais que se contradizem sozinhas poderiam ser desconstruídos simplesmente analisando as frases que os descrevem. Um exemplo, é uma imagem que considera a possibilidade de um sistema possível e indeterminado não apresentar soluções, só pelo termo possível estar presente na classificação o estudante já pode perceber a falha na afirmação.

Outra ação que pode ser tomada para redução dos conflitos é a utilização de sistemas lineares com termos desordenados com maior frequência, pois em geral esse formato só é utilizado ao definir o sistema linear, como ressalta Vinner (1983, p. 305) “Elementos da imagem conceitual, que não são constantemente reforçados têm uma boa chance de ser esquecidos e, assim, o conceito ser distorcido.” (Tradução nossa)

Como ainda não há uma lista das imagens conceituais que surgem com maior frequência no estudo de cada conteúdo, cabe ao docente ter um olhar mais observador em relação à forma como os estudantes abstraem cada definição apresentada e tentar proporcionar a ele situações que tornem suas imagens conceituais mais consistentes, resultando em uma compreensão adequada do conteúdo.

Ao compreender melhor o processo cognitivo que ocorre no aprendizado da matemática, minha prática docente evoluiu consideravelmente, pois, mesmo não conhecendo as imagens conceituais a serem evocadas em outros conceitos, durante o planejamento das aulas sempre há uma tentativa de prever quais imagens conceituais serão elencadas pelos estudantes, procurando fornecer subsídios suficientes para que o aprendizado seja o mais consistente possível. Para tal, além de uma escolha minuciosa dos exemplos a serem utilizados, também deve ser observado quando, como e quantos exemplos que abordam cada temática devem ser apresentados.

Outra forma de se identificar imagens conceituais conflitantes, é aumentar o tempo dedicado a discutir as definições formais observando as falas dos estudantes e indagando-os sobre os conflitos que surgirem, além de conduzi-los a situações em que os conflitos mais recorrentes ocorrem, usando essa oportunidade para corrigi-los.

Diante da variação do processo cognitivo de cada indivíduo, é provável que sempre existam conflitos cognitivos numa turma, gerados por imagens conceituais inconsistentes. O que nos resta é tomá-los como aliados do processo, fazendo com que sejam revelados para que se tornem instrumentos de aprimoramento das imagens conceituais.

Em meio às conclusões obtidas na pesquisa, fica claro o tamanho do trabalho a ser realizado nesse sentido, pois cada conteúdo tem seus próprios conceitos que geram conjuntos de imagens conceituais relativas a ele. Além disso, imagens conceituais diferentes podem surgir em cada grupo de estudantes com que se trabalha.

Nesse sentido, a pesquisa já deixa evidente a necessidade de sua continuidade, seja por meio do levantamento das imagens conceituais, que surgem em outros conteúdos ao serem apresentados aos estudantes, podendo gerar um catálogo composto por imagens conceituais a serem combatidas, ou encorajadas em cada tópico do ensino médio, ou até na construção de material didático para o ensino de sistemas lineares considerando as imagens conceituais.

Para a construção desse material, o ideal é que fossem realizadas mais pesquisas sobre as imagens conceituais relativas aos sistemas lineares, evitando as limitações presentes nesse trabalho, como a utilização de mais de um instrumento de coleta de dados, de preferência, utilizando uma pergunta direta sobre cada conceito pesquisado para identificação das definições conceituais pessoais dos estudantes, que são parte importante do conjunto de imagens conceituais.

Mesmo com as limitações apresentadas, a pesquisa foi um divisor de águas em minha carreira, pois possibilitou uma reflexão sobre as inúmeras vezes que estive errado ao imaginar que meus alunos estivessem entendendo com facilidade informações apresentadas, por considerá-las de fácil compreensão, enquanto imagens conceituais inconsistentes surgiam em suas mentes.

Além da constatação dessas falhas, a pesquisa também me fez perceber que, boa parte dos conflitos causados por imagens conceituais inconsistentes podem ser resolvidos apenas com uma dose extra de empatia em relação aos alunos, pois ao tentar enxergar o conteúdo pelos olhos deles, parte das imagens conceituais coerentes e incoerentes, que podem surgir em suas mentes, serão identificadas, possibilitando a condução da formação de um conjunto de imagens conceituais não conflitantes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁRVORE. **Dicionário online do Michaelis**, 17 nov. 2017. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br>. Acesso em: 17 nov. 2017

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa**: Métodos qualitativos, quantitativo e misto. Porto Alegre: Artmed, 2007.

GIL, A.C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6 ed. São Paulo: Atlas, 1994.

GIRALDO, V. A. **Descrições e conflitos computacionais: o caso da derivada**. 2004. 230 f. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia de Sistemas). Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. **Fundamentos de metodologia científica**. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**: Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

TALL David. Conflicts and catastrophes in the learning of mathematics, Mathematical Education for Teaching. v. 2, n 4, p.2-18. 1977.

______.**Mathematical intuition, with special reference to limiting processes**. Proceedings of the fourth International Congress on Mathematics Education. Berkeley, p. 170 – 176, 1980.

______.Constructing the concept image of a tangent. In J.C. Bergerom. N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), **Proceedings of the 11th conference of the international group for the psychology of mathematics education Montreal**, Canada. Vol. 3, p. 69-75. 1987.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 151-169, 1981.

Vinner, S. **The Naive Platonic approach as a teaching strategy in arithmetic**. *Ed. St. in Math*., p. 339–350, 1975.

______. Concept definition, concept image and the notion of function. International **Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, Vol. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.

______. Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 6, 1983, Antuérpia. **Proceedings…** Antuépia: Antwerp University, p. 24-28, 1983.

______.The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (ed.), **Advanced Mathematical Thinking Dordrecht**: Kluwer Academic Publishers, p. 65-81, 1991.

Vinner, S.; Dreyfuss, T. Images and Definitions for the Concept of Function. **Journal for Research in Mathematics Education**, Vol. 20, n. 4, p. 356-366,1989.