COLÉGIO PEDRO II

Pró Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Alvaro Domingues Soares

ATIVIDADES LÚDICAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO SEGUNDO SEGMENTO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Rio de Janeiro
2018

Alvaro Domingues Soares

ATIVIDADES LÚDICAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO SEGUNDO SEGMENTO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora Professora Dra. Patrícia Erthal de Moraes.

Rio de Janeiro
2018

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

S676 Soares, Alvaro Domingues
Atividades lúdicas para o ensino de geometria analítica no segundo segmento do Ensino Fundamental / Alvaro Domingues Soares. – Rio de Janeiro, 2018.
110 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.
Orientador: Patricia Erthal de Moraes.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria analítica. 3. Ensino Fundamental. I. Moraes, Patricia Erthal de. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecário Andre Dantas – CRB7 5026

Alvaro Domingues Soares

ATIVIDADES LÚDICAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO SEGUNDO SEGMENTO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____
Dra. Patrícia Erthal de Moraes
COLÉGIO PEDRO II

____
Dra. Priscila Cardoso Petito
UERJ FFP

____
Dr. Daniel Felipe Neves Martins
COLÉGIO PEDRO II

Rio de Janeiro
2018

Às minhas meninas: Evelyn e Giovanna.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente a Deus, a Ele seja dada toda honra e glória.

Agradeço a meus pais, Débora e Carlos, por serem meus exemplos na vida. Por me fazerem amar o oficio de ser professor, e serem exemplos da forma de como amar seus alunos. Por me fazerem acreditar que a criatividade é parte importante no meu trabalho e utilizar da melhor forma.

Dedico este parágrafo de forma mais que especial. Agradeço à minha esposa Evelyn por estar ao meu lado durante todo o tempo desse mestrado. Por ser amiga e conselheira, saber falar o que eu precisava ouvir. Por estar sempre por perto e ao mesmo tempo me substituir várias vezes, entendendo que a minha ausência era necessária. Por se mostrar companheira, afirmando várias vezes que estava ao meu lado. Obrigado pelas opiniões feitas nessa dissertação. Te amo de forma que não posso descrever em palavras.

À minha pequena Giovanna, que nasceu no meio disso tudo e que mesmo tão pequena é minha companheira de horas de escrita. Muitas vezes me distraindo com seu sorriso e brincadeiras e assim me motivando a continuar.

A cada amigo e familiar que me apoiou nesse nessa caminhada. Agradeço pelos seus “ouvidos” após ouvir minhas queixas e suas palavras de incentivo, me fazendo continuar.

Agradeço, a minha querida cunhada Ana Carla. Pelo comprometimento com minha filha nas horas de escrita e por fazer o possível para comprar e confeccionar as lindas embalagens dos jogos.

Aos alunos que ao jogarem alguns jogos deste trabalho, me deram diversas opiniões que foram utilizadas, agradeço em especial ao Matheus Richard, Bruno e Renan Moreira.

Aos meus colegas de turma que se mostraram como uma equipe, não deixando ninguém cair, motivando a todos. Agradeço pelas horas incontáveis de troca de explicações de exercícios e ideias durante a madrugada. Em especial a “Social dos Mestres” (Thiago, Denise e Vinicius) pelas longas horas de conversa, trocas e explicações. Por tornarem o mestrado mais “leve” e se mostrarem amigos. E também aos amigos: Pedro, Anita e Valter; não só pelas caronas, mas pelas horas de conversa no trajeto da ponte, por matérias e resumos. Sem vocês a caminhada seria mais dura.

Ao querido Rev. Carlos Augusto (Carlove), por ser usado por Deus para falar as coisas no momento certo e nas horas mais confusas.

A minha orientadora Prof. Dra. Patrícia Erthal, pelas horas de trabalho e discussão, sempre me direcionando e orientando da melhor forma desde o primeiro ano do PROFMAT. Meus sinceros agradecimentos.

Aos queridos professores do PROFMAT que me ajudaram a crescer academicamente, fazendo deles, novos exemplos a seguir.

RESUMO

SOARES, Alvaro Domingues. **Atividades Lúdicas Para o Ensino de Geometria Analítica no Segundo Segmento do Ensino Fundamental**. 2018. 110 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

A Geometria Analítica é um conteúdo que não faz parte do currículo do Ensino Fundamental no Brasil. A abordagem da Geometria Analítica é realizada apenas no Ensino Médio e muitas vezes é passada de forma pouco atrativa para o aluno, sendo meramente um conjunto de fórmulas e exercícios repetitivos. Em alguns casos, esse o conteúdo de Geometria Analítica não é passado por alguns professores, visto entre outros fatores, a grande quantidade de conteúdos na grade curricular de Ensino. Neste trabalho propomos uma abordagem através de jogos, fazendo o uso de tecnologias e desafios, envolvendo questões e atividades lúdicas sobre alguns tópicos da Geometria Analítica para alunos do segundo segmento do Ensino Fundamental. Todas as atividades sugeridas neste trabalho foram embasadas no Currículo Mínimo utilizado pela Secretaria de Educação do Governo do Estado do Rio de Janeiro. A proposta apresentada propicia um ambiente agradável à introdução da Geometria Analítica, visando a facilitação e a aprendizagem de alguns temas oferecidos no Ensino Fundamental e Médio. Além disso, permitimos aos alunos uma nova visão à Geometria Euclidiana com a utilização da Álgebra como ferramenta para resolução de problemas. Este trabalho traz abordagens simples para serem realizadas dentro de sala de aula com material acessível e de fácil adaptação quando necessário. Também foram abordados os principais motivos históricos para criação da Geometria Analítica, bem como o embasamento teórico necessário para o cumprimento das atividades junto aos alunos. Assim, a proposta é que seja possível a utilização das atividades oferecidas neste trabalho por professores na Educação Básica em diferentes realidades.

Palavras-chave: Geometria Analítica; Ensino Fundamental; Jogos Matemáticos, Atividade Motivadora.

ABSTRACT

SOARES, Alvaro Domingues. **Play Activities for the Teaching of Analytical Geometry in the Second Segment of Elementary Education**. 2018. 110 p. Dissertation (Master) – Colégio Pedro II, Pró Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

Analytical Geometry is content that is not included of the curriculum of Elementary School in Brazil. The approach of Analytical Geometry is performed only in High School and is often passed in an unattractive way for student, being merely a set of formulas and repetitive exercises. In some cases, this content of Analytical Geometry is not passed by some teachers, among other factors, the great amount of content in the curriculum of Teaching. In this work, we propose an approach through games, making use of technologies and challenges, involving questions and play activities on some topics of Analytical Geometry for students of the second segment of Elementary School. All activities suggested in this study were based on the Minimum Curriculum used by the Education Department of the Government of the State of Rio de Janeiro. The proposal presented provides a pleasant environment for the introduction of Analytical Geometry, aiming at the facilitation and learning of some subjects offered in Elementary and Middle School. In addition, we allow students a new insight into Euclidean geometry with the use of Algebra as a tool for problem solving. This work brings simple approaches to be performed within the classroom with accessible material and easy to adapt when necessary. The main historical reasons for the creation of the Analytical Geometry were also discussed, as well as the theoretical basis necessary for the accomplishment of the activities with the students. Thus, the proposal is that it is possible to use the activities offered in this work by teachers in Basic Education in different realities.

Keywords: Elementary School; Mathematical Games, Motivational Activity.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Para muitos alunos a Geometria se mostra como algo desconecto com a realidade. Para outros a Álgebra se trata de uma é uma linguagem complexa. Perceber os elementos geométricos nas formas que nos cercam e conseguir enxergar a Álgebra em nosso cotidiano para muitos é uma tarefa difícil. Alguns alunos chegam a se apoiar na ideia de que a Matemática não foi feita para todos e que é possível existir a “vida” sem a Matemática.

O distanciamento entre a Álgebra e a Geometria no Ensino Fundamental faz com que o aluno tenha a impressão que existem duas matemáticas. A maioria a enxerga como duas matérias a serem “enfrentadas”, muitas vezes escolhendo um dos lados, se afastando cada vez mais da matéria como um todo e com isso causando um bloqueio natural em relação a Matemática.

Este trabalho busca apresentar ao aluno do Ensino Fundamental uma introdução à Geometria Analítica. Seu objetivo é fazê-lo enxergar a junção entre Álgebra e Geometria, relacionando conceitos aos quais o aluno já foi apresentado, podendo facilitar o entendimento de assuntos anteriores e posteriores.

A Geometria Analítica é pouco abordada nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Nas escolas estaduais do Rio de Janeiro só é abordada no final do terceiro ano do Ensino Médio não acontecendo a relação com outros assuntos como função, Geometria plana e espacial. A proposta de trazer a Geometria Analítica como um dos temas para o Ensino Fundamental visa a aplicação da mesma em vários assuntos já estudados ao longo das séries finais. Além do mais, pode-se perceber que o aluno tem os pré-requisitos necessários para a aprendizagem das abordagens sugeridas. Com isso, o objetivo central é que o aluno consiga ter uma visão mais ampla dos assuntos abordados, preparando-os melhor para os assuntos do Ensino médio.

Este trabalho foi dividido cinco capítulos. De início, no segundo capítulo, será abordado o contexto histórico para criação da Geometria Analítica. No terceiro capítulo nos prendemos à formalização teórica necessária para as atividades oferecidas. No quarto capítulo, apresentamos quatro atividades que abordam os seguintes temas centrais: Plano cartesiano; Equação da reta na forma ax+by=c; Interpretação geométrica de Sistemas Lineares de equações com duas incógnitas e Distância entre dois pontos. Cada atividade foi dividida em: Atividade Motivadora, Formalização Teórica, Jogos Matemáticos e

Questões Propostas. No quinto e último capítulo são feitas as considerações finais a respeito desse trabalho.

2 UMA BREVE ABORDAGEM HISTÓRIA DA GEOMETRIA ANALÍTICA

A Geometria Analítica que conhecemos atualmente foi baseada no contexto da História da Matemática antes mesmo dela ser formalizada. Segundo Santos e Laval (2012), os mesopotâmicos usavam a Geometria para exemplificar alguns problemas algébricos, tendo assim, relatos do uso da Geometria na Álgebra. Há ainda, relatos do uso de coordenadas primitivas por gregos, egípcios e romanos para fins como localizações em mapas, medição e demarcação de terras (SANTOS, 2012).

Os gregos dominavam a Geometria Analítica semelhante à que conhecemos, como não houve o uso de uma relação algébrica, isso distanciou a Geometria Grega da Geometria Analítica do século XVII. Essa ocorrência gerou um bloqueio para que a Geometria Grega evoluísse ao ponto da Geometria Analítica pois lhes faltavam os simbolismos algébricos, que só foram discutidos no século XVII, com avanço nos processos algébricos (ROQUE, 2012). Durante um longo período, os gregos apresentaram grandes realizações, chegando até Os Elementos de Euclides (300 a.C). No entanto, a História da Matemática Grega pode ter sido obscurecida pela grandeza do “Elementos” utilizado como livro fundamental de Geometria durante séculos. (EVES, 2004).

Durante o século XVI, houve o ressurgimento do interesse pelas construções gregas através da tradução da “Coleção Matemática” de Pappus, em 1588. Chamavam esses tipos de problemas de lugares geométricos, influenciando a “Arte Analítica” de Viéte, que propunha uma nova forma de usar a ferramenta da análise, já utilizada pelos gregos. Segundo Roque (2012), o objetivo de Viéte era restaurar esse método, ou seja, fundar uma ferramenta universal em que a análise fosse identificada à Álgebra para resolver problemas. Seu objetivo era mostrar a utilidade da Álgebra aos problemas de construção gregos, substituindo, por exemplo, os problemas planos por equações de 2º grau e outros tipos de problemas por equações de graus mais elevados. Viéte pretendia fundar uma nova Álgebra com o mesmo prestígio da Geometria (ROQUE, 2012).

No século XVII, com a revolução científica os “Elementos de Euclides” já não atendiam as necessidades da época. A matemática precisava se renovar, buscando novos métodos. Com a morte de Torricelli (1608 1647), a Itália perde a liderança nos novos desenvolvimentos da Matemática e a França vira um grande centro da Matemática, durante o segundo terço do século XVII. Desde Platão não havia tanta intercomunicação matemática quanto naquele tempo. Haviam grupos científicos organizados na Itália, França e Inglaterra. Essa época foi marcada pela crença de que o desenvolvimento técnico podia melhorar o cotidiano e onde novos conceitos e atualizações de antigos pensamentos eram realizados. (BOYER,2012)

Figura 1 – Quadro René Descartes

Fonte: Unesp (http://www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/pages/historia/descartes.htm).

Ainda no século XVII, em meio à toda a revolução científica e a Guerra entre o Protestantismo e o Catolicismo, René Descartes publicava seus pensamentos que davam pontos iniciais para as ideias da Geometria Analítica. Há lendas de que ao observar uma mosca que caminhava pelo forro de seu quarto, junto a um dos cantos, a sua atenção foi para o caminho da mosca que poderia ser descrito se a relação ligando as distâncias dela às paredes adjacentes fosse conhecida (EVES, 2004).

Ao longo desse processo, Descartes conhece e se torna amigo do Frade Minimita, Marin Mersenne que representa um papel importante por ser responsável diretamente pela distribuição de informações matemáticas (BOYER,2012). Descartes foi considerado o “Pai da Filosofia Moderna”, admitia que tudo era explicável em termos de matéria e movimento. Até o século XVIII a Ciência Cartesiana manteve sua popularidade, no entanto, com o raciocínio matemático de Newton, ela perde a popularidade alcançada.

Segundo Boyer (2012), por volta de 1628, morando na Holanda, Descartes é apresentado aos problemas das *Três e Quatro Retas* de Pappus e, utilizando o pensamento da Geometria Analítica, consegue resolver o problema de maneira simplificada.

Figura 2 – Capa do livro “La Géométrie”.

Fonte: Unesp (http://www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/pages/historia/descartes.htm).

Percebendo a genialidade de seu ponto de vista, decide publicar “La Géométrie”. Nessa publicação, Descartes aborda a Geometria Analítica como sendo uma importante ferramenta para a aquisição de conhecimentos em todos os setores da ciência definindo as propriedades referentes a ponto, reta, plano e circunferência, além de criar estratégias para o cálculo das distâncias entre elementos e formas geométricas. Na primeira parte desta obra, Descartes marcava um valor x em um eixo fornecido e um comprimento y formando um ângulo fixo, não necessariamente reto, relacionando x e y através de um ponto. Na segunda e terceira partes, há uma reclassificação das curvas, anteriormente já classificadas por Galileu Galilei, um método para construção de tangentes a curvas e a resolução de equações de graus maiores que 2 (EVES, 2004). De acordo com o ponto de vista de Eves (2004), em “La Géométrie” o leitor constrói o método por si mesmo a partir de informações isoladas. Nenhuma das figuras que estão inseridas na obra de Descartes se encontram colocadas explicitamente aos eixos coordenados e, como o texto possuía uma difícil interpretação, a obra se limitou apenas a divulgação de seu conteúdo (EVES, 2004).

Assim como Galileu, Descartes acreditava que a linguagem da natureza era matemática.

> Para Descartes, essa Geometria deveria estudar figuras usando proporções. A tradução dos problemas geométricos em linguagem algébrica, visava compreender as relações entre as grandezas do problema: [...] O objetivo de Descartes era utilizar na Geometria, para resolver problemas de construção, uma espécie de aritmética, em que regras simples de composição levassem de objetos simples a outros mais complexos. O método começa por exibir objetos mais simples de todos, as retas, e as relações simples que os relacionam, as operações aritméticas (ROQUE, 2012, p. 322).

De forma diferente dos gregos que acreditavam que uma variável correspondia a um comprimento de segmento, e que o produto de duas variáveis à área de algum retângulo e o produto de três variáveis ao volume de algum paralelepípedo retângulo, Descartes pensava diferente. De acordo com seu pensamento, x^2 não se tratava de uma área, mas o quarto termo da proporção $\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2}$, assim, conhecendo x, se pode construir uma reta. Usando um segmento unitário é possível representar qualquer potência de uma variável. Por meio de um segmento de reta um produto de variáveis e quando atribuídos valores a essa variável construir uma reta através dos instrumentos euclidianos (BOYER, 2012).

Após mostrar como as operações algébricas são interpretadas geometricamente, Descartes se volta para a aplicação da Álgebra à problemas geométricos. Com processos algébricos, tenta libertar a Geometria “de diagramas” e por meio de interpretações geométricas, dar significado às operações algébricas. Desta forma ele traça seus objetivos para seu novo método.

A utilização de um sistema de coordenadas foi fundamental para concepção da Geometria Analítica, porém Descartes não empregava, necessariamente um sistema de eixos ortogonais. Seu pensamento não estava alinhado com a Geometria Analítica atual. Suas coordenadas e seu emprego no cotidiano não eram os mesmos do pensamento de hoje. Descartes não utilizava pares de números em suas coordenadas e sistema de eixos era escolhido de maneira conveniente de acordo com o problema proposto (BOYER, 2012).

Em 1629, trabalhando na recomposição de obras perdidas, o estudante de Literatura Clássica, Pierre Fermat, reconstruiu “Lugares Planos” de Apolônio. Acredita se que ao reconstruir essa obra, ele se inspirou para chegar ao princípio fundamental da

Geometria Analítica, que diz que “em geral, a toda equação de duas variáveis corresponde uma curva no plano”. O objetivo dos trabalhos iniciais de Fermat era expressar os problemas geométricos de Apolônio na linguagem algébrica proposta por Viéte. A Geometria Analítica de Fermat atingiu sua forma final por volta de 1635 (BOYER, 2012).

Figura 3 – Quadro Pierre Fermat

Fonte: Unesp http://www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/pages/historia/fermat.htm.

Em 1637, de forma quase simultânea, ambos matemáticos enviaram seus trabalhos a Mersenne. Em seus textos, eles apresentavam resoluções de forma bastante similares mas trabalharam individualmente.

Na época que se correspondia com os matemáticos de Paris, Fermat não conhecia a Geometria de Descartes, mas semelhante ao seu trabalho, o trabalho de Descartes também estabelecia correspondência a lugares geométricos (ROQUE, 2012). Na introdução é abordado a respeito de lugar geométrico, com linhas, retas e curvas. Em seguida, estuda equações de segundo grau, identificando que o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a equação é um círculo ou uma cônica. Fermat também se utiliza da Álgebra de Viéte para escrever a equação da hipérbole mostrando o lugar geométrico dos pontos que a satisfazem, e propõe um método para resolver equações de graus 3 ou 4 usando a interseção de cônicas (ROQUE, 2012).

Fermat usou a notação de Viéte como base para escrever algumas notações em seu trabalho. Assim, em relação a termos de simbolismos, quando comparado ao trabalho de Descartes, ele tinha uma aparência arcaica. Por esse motivo, houve um certo ceticismo entre os trabalhos matemáticos de Fermat. (BOYER, 2012).

Segundo Eves (2004), Descartes construiu sua Geometria em torno do problema de Pappus e Fermat expôs a Geometria falando sobre lugares geométricos mais simples, mostrando exemplos de curvas tais como hipérboles, parábolas, círculos e elipses. Outro aspecto importante de comparação entre as duas Geometrias é que Descartes partia de um lugar geométrico e então encontrava sua equação, Fermat partia de uma equação e então estudava o lugar correspondente. Porém, ambos aspectos, são recíprocos do princípio fundamental da Geometria Analítica.

O ponto comum aos trabalhos de Descartes e Fermat aborda um interesse crescente sobre tipos variados de curvas e o uso da Álgebra em problemas geométricos envolvendo o tratamento de equações. A construção da Geometria Analítica foi dada a partir da introdução de novas curvas e de suas aplicações para os estudos de problemas determinados, resolução de equações de graus mais elevados e de lugares geométricos (ROQUE 2012).

Segundo Boyer (2012), ainda que tenha circulado em manuscrito, a obra "Introdução a Lugares" de Fermat só foi publicada após sua morte. Essa obra trouxe grandes contribuições para as ciências exatas por explicitar a Geometria de forma algébrica. Boyer (2012) afirma que sua Geometria se aproxima mais da atual Geometria Analítica que a Geometria de Descartes.

A forma da Geometria Analítica atual começa a aparecer após quase um século da divulgação do trabalho de Descartes, de acordo com Boyer (2012) e Eves (2004). Sendo um trabalho em que há uma difícil compreensão, depois de várias interpretações e traduções. Leibniz é responsável pela contribuição da nomenclatura com qual estamos acostumados: Coordenada, abscissas e ordenadas. (BOYER, 2012)

Para que pudéssemos chegar ao formato que conhecemos atualmente, a evolução da Geometria analítica passa por diversos pensadores como: Jan De Witt (1629 1672), La Hire (1640 1718), Joseph Louis Lagrange (1736 1813) e pela divulgação e postura de Gaspard Monge (1746 1818). No entanto, de acordo com Eves (2004, p. 383):

> As apreciações precedem antes sobre a Geometria analítica parecem confundir o assunto com um ou mais de seus aspectos. Mas a essência real desse campo da matemática reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente. Antes de a Geometria analítica poder desempenhar plenamente esse papel, teve que esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. Assim, parece mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat como a origem essencial do assunto. Sem dúvida, só depois da contribuição dada por esses dois homens à Geometria analítica é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados.

3 ABORDAGEM TEÓRICA: PONTOS E RETAS

Neste capítulo serão apresentados alguns tópicos da Geometria Analítica que estão envolvidos nas atividades disponibilizadas para os alunos no capítulo 4. O objetivo é que os resultados aqui apresentados possam ser fonte de consulta para a aplicação das atividades bem como necessários para a formalização de alguns conceitos.

Iniciaremos falando sobre coordenadas dos pontos na reta e no plano e a seguir faremos um estudo sobre retas no plano. Para essa abordagem foram utilizadas três obras como base: Geometria Analítica e Álgebra Linear (LAGES, 2015); Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica (IEZZI, 1985) e Geometria Analítica (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013).

Utilizaremos os seguintes axiomas e resultados da Geometria Euclidiana ligados a pontos, retas e planos:

Definindo A e B como dois pontos distintos em uma reta r, o conjunto de pontos em r que estão entre A e B é chamado de segmento AB.

O conjunto formado pelos pontos que pertencem ao segmento AB e por todos os pontos C, de maneira que B está entre A e C é chamado de semirreta AB.

Figura 4 – Semirreta AC

Fonte: O autor, 2018

Seguem abaixo alguns axiomas importantes para nosso estudo:

A1. (axioma de incidência): Por dois pontos distintos passa uma, e somente uma única reta;

A2. (axioma das paralelas): Dados uma reta r e um ponto P não pertencente a r, existe uma, e somente uma reta paralela à reta r que passa por P;

A3.: Dados um ponto P e uma reta r, existe apenas uma reta perpendicular a r que passa por P;

A4.:Por três pontos do espaço não situados numa mesma reta passa um, e somente um plano

Usamos a notação d(A,B) para representar o comprimento do segmento AB, que será denominado distância entre os pontos A e B. Convencionamos que d(A,A) = 0. Deste modo as seguintes propriedades são válidas:

P_1. d(A,B)≥0;

P2. d(A,B) = 0 ⇔ A = B ;

P3. d(A,B) = d(B,A);

P4. d(A,B)≤d(A,C) + d(C,B) (desigualdade triangular);

P5.d(A,B) = d(A,C) + d(C,B) ⇔ A, B, e C são colineares e C está entre A e B .

A seguir faremos um estudo sobre pontos e retas associando-os a um sistema de coordenadas.

3.1 Pontos

3.1.1 Pontos em uma Reta

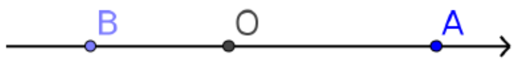
Trata-se de representar pontos da reta fazendo uso dos números reais. Para isso, utilizaremos um ponto como origem, orientando a reta. Segundo Elon (2015, p 3):

> Uma reta diz se orientada quando sobre ela se escolheu um sentido de percurso, chamado positivo; o sentido inverso chama se negativo. Numa reta orientada, diz se que o ponto B está à direita do ponto A (portanto A está à esquerda de B) quando o sentido de percurso de A para B é positivo.

Ao fixar um ponto O, chamado de origem, em uma reta r orientada, chamaremos r de eixo E.

Ainda em r, sejam os pontos A e B de tal forma que A está a direita de O e B a esquerda. Dessa forma as semirretas OA e OB são chamadas de opostas.

Figura 5 – semirretas AO e OB



Fonte: O autor, 2018

Podemos identificar a reta r com o conjunto dos números reais, ℝ da seguinte forma:

- a origem O corresponde ao número 0,
- cada ponto X≠O que pertencente à semirreta OA corresponde a um número real positivo x = d(O,X);
- cada ponto X≠O que pertencente à semirreta OB corresponde a um número real negativo x = d(O,X)

O número real x que corresponde ao ponto X segundo a correspondência acima estabelecida é denominada coordenada do ponto X em r.

Sejam X e Y pontos da reta r com coordenadas x e y, respectivamente. Dizemos que o ponto Y está à direita do ponto X (ou que o ponto X está à esquerda do ponto Y) se, e somente se, x < y.

Proposição 3.1: Se x e y são as coordenadas dos pontos X e Y sobre o eixo E, respectivamente, então d(X,Y) = |x y|

Demonstração:

Vamos supor x<y, sem perda de generalidade.

1º caso: *o ponto O está entre X e Y***.**

Nesse caso, x<0<y. Utilizando a propriedade P5 apresentada anteriormente, temos d(X,Y) = d(X,O) + d(O,Y) = x + y = |x y|

2º caso: *O está a direita de Y***.**

Logo, x < y < 0. Como no caso anterior, utilizando a propriedade P5 de distância, d(O,X) = d(O,Y) + d(Y,X).Isso implica que x = y + d(X,Y), ou seja, d(X,Y) = y–x = |x y|

3º caso: *O está a esquerda de X.*

Logo, $0 < x < y$. Por P5, d(O,Y) = d(O,X) + d(Y,X). Dessa forma y = x + d(X,Y), assim, d(X,Y) = y–x = |x–y|

3.1.2 Pontos em um plano

O conjunto de pares ordenados da forma (x,y) é chamado $\mathbb{R}^2$.

Sejam (x,y) e (x',y') pertencentes a $\mathbb{R}^2$, temos que (x,y) = (x',y'), se, e somente se, x = x'e y = y'. O número real representado por x e o número real representado por y são chamados, respectivamente, de primeira e segunda ordenada do par ordenado (x,y).

O par ordenado não se trata de um conjunto com dois elementos. No caso do par ordenado (x,y), pode se ter x = y, já no conjunto de dois elementos {x,y}, necessariamente, $x \neq y$.

Dado um plano π, seja um par de eixos OX e OY, pertencentes a π, perpendiculares entre si e se interceptando na origem O. Chamaremos OX de eixo das abcissas e OY de eixo das ordenadas. Tal sistema de eixos ortogonais permite que haja uma correspondência biunívoca entre π e $\mathbb{R}^2$. De fato, seja P um ponto em π. Se P pertence a OX então associamos a P o par ordenado $(x,0) \in \mathbb{R}^2$, onde x é a coordenada de P em OX. Caso P pertença a OY, de forma análoga associamos o par ordenado $(0,y) \in \mathbb{R}^2$, onde y é a coordenada de P em OY. Suponha que P não pertença a OX e nem a OY. Utilizando o axioma das paralelas, vamos traçar por P duas retas paralelas aos eixos: uma intersectando OX em um ponto de coordenada x, e a outra intersectando OY em um ponto de coordenada y. Assim temos que $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é o par ordenado de números reais correspondentes ao ponto P.

Seja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, considere em 0X o ponto P_1cuja coordenada é igual a x. Em 0Y, seja o ponto cuja coordenada é igual a y.

Seja r a reta paralela a 0Y passando por P_1e s a reta paralela a 0X passando por P_2. Como r e s são perpendiculares eles se interceptam em um único ponto P.

Seja $\varphi: \pi \to \mathbb{R}^2$ a função tal que a cada ponto $P \in \pi$ associa

$$\varphi(P_1) = \varphi(P_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Rightarrow\ (i)\ x_1 = x_2\ e\ (ii)\ y_1 = y_2$$

Então,

Por (i) P_1 e P_2 estão sobre uma mesma reta paralela ao eixo 0Y.

Por (ii) P_1 e P_2 estão sobre uma mesma reta paralela ao eixo 0X.

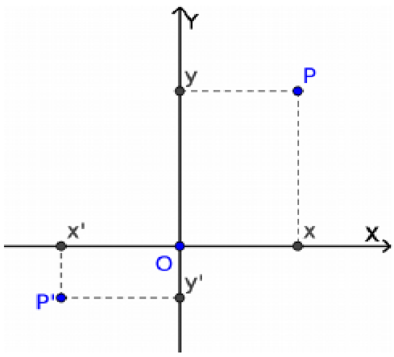
Assim, $P_{1\equiv}P_2$.

Considere P_1 o ponto de 0X cuja coordenada é x e P_2 o ponto de 0Y cuja coordenada é y. Seja e a reta paralela a 0Y passando por P_1e s a reta paralela a 0X passando por P_2. Como r e s são perpendiculares, elas se interseptam em um único ponto P ∈ π.

Por construção, $\varphi(P) = (x, y)$. Desta forma, mostramos que φ é injetiva e sobrejetiva.

Assim, existe uma correspondência biunívoca entre π e $\mathbb{R}^2$.

Gráfico 1 par de eixos OX e OU e representação de P e P'



Fonte: O autor, 2018

Com a identificação acima, π é chamado de Plano Cartesiano e o sistema OXY de sistema de coordenadas cartesianas.

Notamos P = (x,y), onde x e y são chamadas coordenadas de P. A primeira entrada x é dita a abcissa de P; a segunda entrada y é dita ordenada de P. O ponto O = (0,0) é chamado origem do plano cartesiano.

Ao escolher um sistema cartesiano de eixos OXY, vemos que os eixos ortogonais separam o plano π em 4 regiões chamadas de quadrantes. Trata-se de um conjunto de pontos tais que suas coordenadas (x,y) são:

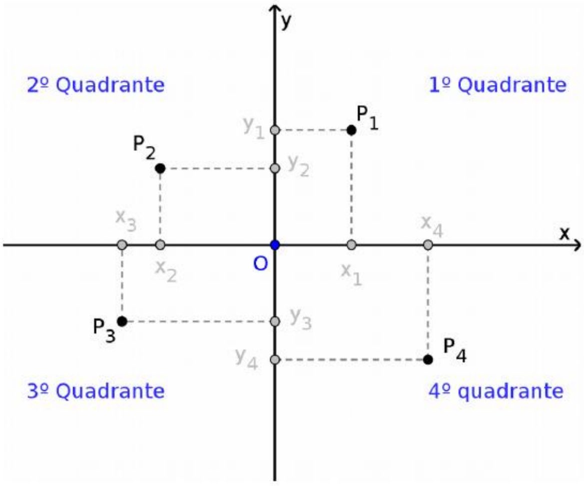
No primeiro quadrante: x ≥ 0 e y ≥0;

No segundo quadrante: x ≤ 0 e y ≥ 0;

No terceiro quadrante: x ≤ 0 e y ≤ 0;

No quarto quadrante: x ≥ 0 e y ≤ 0.

Gráfico 2 Sistema cartesiano de eixos OXY



Fonte: O autor, 2018

Proposição 3.2: Sejam P = (x,y) e Q = (u,v) pontos em $\mathbb{R}^2$ e d(P,Q) a distância entre os pontos P e Q. Então, d(P,Q) = $\sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{u})^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{v})^2}$

Demonstração:

Vamos dividir a demonstração em 3 casos.

1 º caso: *Os dois pontos possuem a mesma ordenada.*

Neste caso y = v. Assim, o comprimento de PQ é o mesmo de sua projeção em OX, que é dado por |x u|, como visto na Proposição 3.1, ou seja d(P,Q) = |x u|. Portanto d(P,Q) = |x u| = $\sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{u})^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{v})^2}$ **.**

2º caso: *Os dois pontos possuem a mesma abcissa.*

Neste caso x = u e o caso é análogo ao caso anterior. Sendo assim d(P,Q) = |y v| = $\sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{u})^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{v})^2}$

3º caso: *P e Q possuem abcissas e ordenadas diferentes.*

Vamos considerar um ponto R = (u,y). Desse modo R pertence a reta paralela a OY que passa por Q e pertence a reta paralela a OX que passa por P. Assim, o triângulo PQR é um triângulo retângulo em R. Como P e R possuem a mesma ordenada temos d(P,R) = |x u|. Por sua vez, Q e R possuem a mesma abcissa então d(Q,R) = |y v|. A distância entre o ponto P e Q trata se do valor da hipotenusa PQ do triângulo PQR formado. Usando o Teorema de Pitágoras temos $d(P,R)^2 = d(P,R)^2 + d(Q,R)^2$, ou seja, $d(P,R)^2 = |x\ u|^2 + |y\ v|^2$. Logo, $d(P,R)^2 = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{u})^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{v})^2}$.

3.2 Perpendicularidade entre segmentos de retas

Para ter a percepção sobre o tema, inicialmente vamos definir o ângulo formado entre dois segmentos com extremidades diferentes. Segundo Elon (2012), sejam dois segmentos de reta AA' e CC', com extremidades diferentes, pertencentes a retas diferentes. Para obtermos o cosseno do ângulo entre esses segmentos, em função da coordenadas $A = (a, b)$, $A' = (a', b')$, $C = (c, d)$ e $C' = (c', d')$, será necessário transladar o os dois segmentos de maneira que os pontos A e C caiam sobre O. Assim, será obtido dos segmentos, OA″ e OC″, paralelos a AA′ e CC′ respectivamente. Desta forma, definimos o ângulo entre AA′ e CC′ como sendo o ângulo formado entre OA″ e OC″.

Queremos obter uma condição necessária e suficiente para que dois segmentos de retas sejam perpendiculares. Para apresentar tal resultado, precisamos dos seguintes lemas:

Lema 3.1: Sejam os pontos $A = (a,b)$, $C = (c,d)$ e $O = (0,0)$. AO é perpendicular a CO se, e somente se, $ac\ bd = 0$.

Demonstração:

AO é perpendicular a CO se e somente se o triângulo AOC é retângulo em O.

Por outro lado, o triângulo AOC é retângulo em O se, e somente se,

$d^2(A,O) + d^2(C,O) = d^2(A,C)$, que equivale a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a\ c)^2 + (b\ d)^2$, ou seja, $ac\ bd = 0$.

Lema 3.2: Sejam $A = (a,b)$, $A' = (a',b')$. Considere $C = (c,d)$ um ponto não pertencente à reta determinada por A e A'. Seja CC' o segmento obtido transladando AA' paralelamente, de modo que o ponto A coincida com C.

Se $C' = (c',d')$ então $c' = c + (a'\ a)$ e $d' = d + (b'\ b)$.

Demonstração:

Considere os segmentos AA’ e CC’. Por construção temos que ACC’A’ são vértices de um paralelogramo. Sabemos que as diagonais de um paralelogramo intersectam ao meio. Desse modo, o ponto médio de AC’ coincide com o ponto médio de CA’.

Seja o segmento de reta AA’ definida pelos pontos A = (a,b) e A’ = (a’,b’) e M = (x,y) o ponto médio do segmento AA’. Utilizando a semelhança de triangulo, chegamos a conclusão que

$$x = \frac{a+a'}{2} \text{ e } y = \frac{b+b'}{2}$$

Portanto, analogamente, temos que no caso dos segmentos AC’ e CA’,

$$\frac{a+c'}{2} = \frac{c+a'}{2} \text{ e } \frac{b+d'}{2} = \frac{d+b'}{2}$$

Assim,

$$c' = c + (a' - a) \text{ e } d' = d + (b' - b)$$

Em particular, quando C é a origem O = (0,0), temos $c' = a'$ a e $d' = b'$ b.

Proposição 3.3: Sejam os pontos A = (a,b), A’ = (a’,b’), C = (c,d) e C’ = (c’,d’), tais que A ≠ A’ e C ≠ C’.

Os segmentos AA’ e CC’ são perpendiculares se, e somente se

(a’ a)(c’ c) + (b’ b)(d’ d) = 0

Demonstração:

Transladando AA’ paralelamente de modo que A coincida com a origem, temos, pelo Lema 3.2, o segmento OP = (a’ a,b’ b). Fazendo o mesmo com o segmento CC’, obtemos o segmento OQ = (c’ c,d’ d). Temos, por definição, que AA’ e CC’ são perpendiculares se, e somente se, OP e OQ são perpendiculares.

Por outro lado, usando o Lema 3.1, OP e OQ são perpendiculares se, e somente se,

(a’ a)(c’ c) + (b’ b)(d’ d) = 0.

3.3 Condição de Alinhamento de Três Pontos

Teorema 3.4: **Três pontos** A = (x_1,y_1),B = (x_2,y_2) **e** C = (x_3,y_3) **são colineares se, e somente se,** $\boldsymbol{D = det\ M}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$

Demonstração:

Seja $M = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$, assim, D = det M

Mostraremos que se os três pontos são colineares então D = 0. Para isso, a demonstração será dividida em 3 casos.

1º caso: *Dois pontos são coincidentes.*

Sem perda de generalidade, sejam A e C coincidentes então $x_1 = x_3$ e $y_1 = y_3$, assim, a matriz M possui duas linhas iguais. Usando as propriedades de determinantes, concluímos que D = 0.

2º caso: *Os três pontos são distintos e pertencem a uma reta paralela a um dos eixos.*

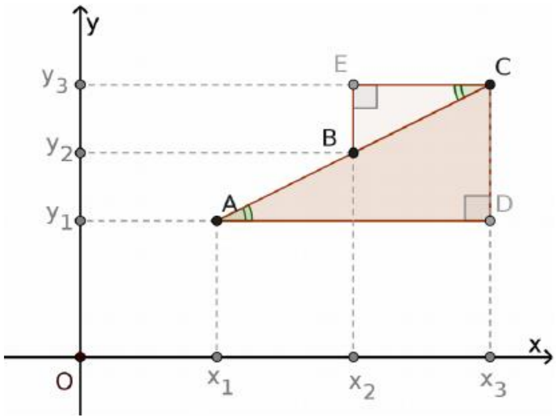
Sem perder a generalidade, vamos supor que os pontos sejam paralelos a OX, logo, $y_1 = y_2 = y_3$. Assim, ao montar a matriz M teremos que a 2º coluna e a 3º coluna serão proporcionais. Então, pelas propriedades das determinantes, concluímos que D = 0.

3º caso: *Os três pontos são distintos e pertencem a uma reta não paralela a OX e nem a OY.*

Suponhamos C a direita de A e B entre A e C.

Sejam D = (x_3,y_1) e E = (x_2,y_3). Logo, os triângulos retângulos ACD e BCE são semelhantes.

Gráfico 3 triângulos retângulos ACD e BCE



Fonte: O autor, 2018

Portanto,

$$\frac{d(A,D)}{d(C,E)}=\frac{d(C,D)}{d(B,E)}$$

Assim, substituindo pelos valores das respectivas distâncias, obtemos

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_3}=\frac{y_1-y_3}{y_3-y_2}$$

O que implica em,

$(x_3\ x_1)(y_2\ y_3) = (x_2\ x_3)(y_3\ y_1) \Rightarrow x_3y_2\ x_1y_2 + x_1y_3\ x_2y_3 + x_2y_1\ x_3y_1 = 0.$

Ou seja, $x_3(y_1\ y_2)–y_3(x_1\ x_2) + (x_1y_2–x_2y_1) = 0$

Pelo Teorema de Laplace, temos que D = 0.

Agora provaremos que se D = 0 temos os três pontos colineares. Observemos que:

$D = 0 \Leftrightarrow x_3(y_1\ y_2)–y_3(x_1\ x_2) + (x_1y_2–x_2y_1) = 0 \Leftrightarrow (x_3\ x_1)(y_2–y_3)\ (x_2\ x_3)(y_3–y_1) = 0$ **(A)**

Consideremos os seguintes casos:

1º caso: $x_2 = x_3$

Substituindo em (A) temos que $x_3\ x_1 = 0$ ou $y_2\ y_3 = 0$.

Suponha $x_3\ x_1 = 0$. Assim, $x_2 = x_3 = x_1$. Isso implica que A, B e C são colineares.

Se $y_2\ y_3 = 0$ então o ponto B coincide com C. Dessa forma, claramente A, B e C são colineares.

2º caso: $y_3 = y_1$

Esse caso é análogo ao anterior. Dessa forma, concluímos que A, B e C são colineares.

3º caso: $x_2\ x_3 \neq 0$ e $y_3\ y_1 \neq 0$

Por (A), concluímos que $x_3\ x_1 \neq 0$ e $y_2\ y_3 \neq 0$. Como $(x_3\ x_1)(y_2 - y_3) = (x_2\ x_3)(y_3 - y_1)$, temos

$$\frac{(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_3)} = \frac{(y_3 - y_1)}{(y_2 - y_3)}$$

ou seja,

$$\frac{(y_2 - y_3)}{(x_2 - x_3)} = \frac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)}.$$

Isso implica que A, B e C estão sobre uma mesma reta, pois a inclinação do segmento AC é a mesma que a do segmento BC.

3.4 Equação da Reta ax + by = c

Seja r uma reta no plano. Mostraremos que r é o lugar geométrico de pontos (x,y) que satisfazem ax + by = c, para determinados valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.5: Seja r uma reta. Existem a, b e c números reais tais que P = (x,y) é um ponto de r se, e somente se, ax + by = c.

Demonstração:

Seja P = (x,y) um ponto de r.

Considere A = (a,b), A≠ O = (0,0), tal que OA é um segmento perpendicular à reta r.

Seja $P_1 = (x_1,y_1)$ em r.

Como AO é perpendicular a PP_1 então, pela proposição 3.3,

$a(x_1\ x) + b(y_1\ y) = 0$, ou seja, $ax + by = ax_1 + by_1$

Seja $c = ax_1 + by_1$. Observe que c não depende do ponto P.

Assim, para qualquer P = (x,y) pertencente à reta r, as coordenadas do ponto P satisfazem à equação ax + by = c.

Agora, ainda com as mesmas condições sobre os pontos O e A, vamos supor que P = (x,y) satisfaça a equação ax + by = c. Seja Q = (x_0,y_0), tal que Q ∈ r, logo $ax_0 + by_0 = c$. Assim,

$a(x\ x_0) + b(y\ y_0) = 0$. Podemos concluir que o segmento PQ é perpendicular à reta OA, isso quer dizer que P pertence à reta que passa por Q e que é perpendicular ao segmento OA, ou seja, a reta r. Portanto, P pertence a reta r.

Concluímos então que para que um ponto P = (x,y) pertença a reta r é necessário e suficiente que suas coordenadas satisfaçam a equação ax + by = c.

A reta dessa forma será horizontal quando a = 0 e vertical quando b = 0.

3.5 Posições relativas das retas na forma ax + by = c

Sejam r e r′ as retas representadas pelas equações ax + by = c e a'x + b'y = c' respectivamente. Ponhamos A = (a,b) e A′ = (a′ ,b′).

Teorema 3.6: **As seguintes afirmações são equivalentes:**

1. As retas r e r′ são paralelas ou coincidem;
2. Os pontos O, A e A′ são colineares;
3. ab′ ba′ = 0;
4. Existe k ≠0 tal que a′ = ka e b′ = kb.”

Demonstração:

Provaremos que (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (1)

Sabendo que r e r’ são perpendiculares respectivamente a OA e OA’ e que r e r’ são paralelas ou coincidentes, então os segmentos OA e OA’ pertencem a uma mesma reta, assim sendo, A, A’ e O são colineares. Então, (1) ⇒ (2).

Como A, A’ e O são colineares, usando o teorema 3.1, temos que

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ a' & b' & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Assim, D = det M = 0 , isso implica que, ab’ ba’ = 0

Logo, (2) ⇒ (3).

Suponha ab’ ba’ = 0.

Temos que a≠0 ou b≠0.Suponhamos a≠0.

Então, b’ = kb, onde k = $\frac{a'}{a}$.

Com isso temos a’ = ka e b’ = kb. Notamos que k≠0 visto que se k = 0 então a’ = b’ = 0, o que não pode acontecer. Assim (3) ⇒ (4).

Vamos supor que a’ = ka e b’ = kb.

Abriremos em dois casos:

1º caso: *c’ = kc*

Seja P = (x,y), tal que P ∈ r, assim ax + by = c. Como k≠0, kax + kby = kc, assim,

a’x + b’y = c’, logo P = (x,y) ∈ r’. Com isso, concluímos que todos os pontos pertencentes a r são também pontos de r’, ou seja, r e r’ são coincidentes.

2º caso: *c’≠kc*

Seja P = (x,y), tal que, ax + by = c, então realizando a multiplicação por k≠0 temos

kax + kby = kc, assim, a’x + b’y = kc ≠ c’, assim o ponto P ∉ r, ou seja, nenhum ponto de r pertence a r’, logo r e r’ são paralelas. Assim (4) ⇒ (1).

Então, concluímos que (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (1) como queríamos demonstrar.

Corolário: As equações ax + by = c e a'x + b'y = c' representam a mesma reta se, e somente se, existe k ≠ 0 tal que a’ = ka, b' = kb e c' = kc.

Usando o Corolário acima podemos então dizer que duas retas são coincidentes se:

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$

Pelo teorema anteriormente demonstrado, vemos que as retas são paralelas quando:

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}\neq\frac{c'}{c}$$

Resta analisarmos em quais condições conseguimos classificar duas retas como concorrentes. Pelo teorema 3.2 concluímos que duas retas são concorrentes quando $ab' \neq ba'$, ou seja,

$$\frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b}$$

A seguinte proposição caracteriza retas perpendiculares entre si

Proposição 3.7 Sejam as retas r': a'x + b'y = c', com A' = (a',b') e r: ax + by = c com A = (a,b). Então, r' e r são perpendiculares se, e somente se, aa' + bb' = 0.

Demonstração:

r' e r são perpendiculares se, e somente se, os segmentos OA e OA' são perpendiculares.

Pelo Lema 3.1, para que isso aconteça é necessário e suficiente que aa' + bb' = 0.

3.6 Discussão de Sistemas Lineares de Duas Equações de duas incógnitas utilizando a forma gráfica de resolução

Considere o sistema linear 2x2.

$$(S)=\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c \end{cases}$$

Um par ordenado (x,y) é solução de (S) se, e só se, (x,y) satisfaz às equações (1) e (2) do teorema 3.6 simultaneamente.

Podemos classificar o sistema (S) como indeterminado, impossível ou possível determinado se possui, respectivamente, infinitas soluções, nenhuma solução ou solução única.

Conforme vimos anteriormente, podemos representar retas no plano através de equações do primeiro grau com duas variáveis. Portanto, a análise da posição relativa de duas retas, utilizando os coeficientes como base, é equivalente ao estudo da discussão da existência de soluções do sistema linear (S).

3.6.1 Sistema Determinado

Para que o sistema (S) seja considerado possível e determinado deve existir uma única solução comum entre as equações do sistema, ou seja, um único par ordenado que satisfaça as duas equações. Podemos então dizer, que o sistema é determinado quando for representado por duas retas concorrentes. Isso quer dizer, que o ponto comum entre elas representará a solução do sistema. Pelo Teorema 3, temos que o sistema (S) será possível determinado se ab’ ba’≠0, ou

$$\frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b}$$

3.6.2 Sistema Indeterminado

O Sistema Possível e Indeterminado é aquele que admite mais de uma solução, ou seja, mais de um par ordenado que satisfaça as duas equações do sistema. Como neste caso haverão infinitos resultados, podemos concluir que, quando o sistema é representado por suas retas coincidentes, trata se de um sistema indeterminado. Logo, concluímos que o sistema será considerado Indeterminado se, e somente se, $k \neq 0$ tem se $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$, ou seja,

$$k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

3.6.3 Sistema Impossível

É classificado como Sistema Impossível aquele que não possui soluções que sejam comuns entre as equações. Neste caso, podemos representar esse tipo de sistema através de duas retas paralelas, visto que retas classificadas desse modo não possuem pontos comuns. Assim não existe par ordenado que represente uma solução do sistema. Logo, concluímos que o sistema será considerado Impossível se, e somente se, existe $k \neq 0$ tal que $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' \neq kc$, ou seja,

$$k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c}$$

4 ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo iremos propor quatro atividades que de forma lúdica possam introduzir alguns temas da Geometria Analítica a alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. O objetivo das atividades é unir o conhecimento matemático já adquirido em Álgebra e Geometria, com a formalização de conceitos no assunto. As atividades abordarão quatro temas centrais: Plano cartesiano; Equação da reta na forma ax+by=c; Interpretação geométrica de Sistemas Lineares de equações com duas incógnitas e Distância entre dois pontos.

Cada atividade será dividida em quatro partes que se complementam: Atividade Motivadora, Formalização Teórica, Jogo e Questões Propostas. As atividades têm o objetivo de apresentar o conteúdo de forma natural buscando que os alunos possam compreender os conceitos que estão sendo estudados.

As atividades terão como ponto de apoio o Currículo Mínimo 2012, documento elaborado como base pela Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro (SEEDUC-RJ). Para cada ano de escolaridade, o Currículo Mínimo aponta o conteúdo básico que deve ser apresentado aos alunos durante cada bimestre. Ao realizar uma análise do Currículo Mínimo para o Ensino Fundamental, verificamos que os conteúdos de Álgebra são encerrados no assunto “Funções”, o qual servirá como base a todo ensino médio. Já quanto à Geometria, o Currículo Mínimo aborda temas que a Geometria Analítica auxiliará no entendimento e concepção de novos conceitos. O objetivo principal das atividades é introduzir de maneira clara e intuitiva o estudo da reta, visando a facilitação do entendimento de assuntos posteriores.

De acordo com a nossa proposta, cabe ao professor, o momento certo para a utilização das atividades. Para cada uma delas serão indicados os conteúdos que utilizaremos como pré-requisitos.

Visando uma introdução que seja interessante e aprazível para o aluno e, de maneira que o mesmo trabalhe de maneira autônoma chegando a conclusões esperadas, cada atividade terá em seu início uma proposta diferente. O objetivo é abordar temas que estão ligados ao cotidiano do aluno ou assuntos que geram interesse do aluno, fazendo com que o mesmo consiga aprender os conceitos matemáticos apresentados. Serão utilizados desde a organização de uma sala de aula (Atividade 1) até a organização do sistema de transporte público da cidade (Atividade 3), passando por curiosidades no ramo da biologia (Atividade 4) e o uso de tecnologia (Atividade 2).

Sobre o primeiro momento da atividade a “Atividade Motivadora”, o professor, através de contextualizações simples, poderá trabalhar assuntos ligados à Geometria Analítica adaptando-os à realidade do aluno. Havendo assim uma facilitação para a introdução de cada assunto da Geometria Analítica. Como competências específicas, fundamentando a Atividade Motivadora, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017, p. 223) propõe:

> 4. Enfrentar situações problema em múltiplos contextos, incluindo se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens: gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna.

Para a Atividade 2, sugerimos o uso da tecnologia, através de equipamentos como smartphone/computador com o programa GeoGebra Classic 6 (2018) instalado. Embasando essas atividades, temos uma das competências também abordadas pelo BNCC (BRASIL, 2017, p. 223):

> 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

É importante perceber que o uso da tecnologia já é uma preocupação desde os PCN’s, identificando a preocupação com uso da calculadora e o computador. Devemos observar que mesmo se tratando de um documento de 1994, os PCN’s já visualizavam que as tecnologias seriam usadas em larga escala, prevendo o uso dentro de sala de aula:

> [...] tudo indica que pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos, principalmente na medida em que possibilita o desenvolvimento de um trabalho que se adapta a distintos ritmos de aprendizagem e permite que o aluno aprenda com seus erros. (BRASIL, 1994, p. 44).

Após cada “Atividade Motivadora” caberá ao professor introdução das definições e propriedades pertinentes aos temas trabalhados, isso será feito na segunda parte da Atividade, que chamamos, “Formalização Teórica”

A terceira parte da atividade consistirá em um jogo desenvolvido especialmente para cada tema trabalhado, de modo que o aluno possa assimilá-lo de maneira atrativa, oferecendo dinâmica à atividade.

Os PCN’s (BRASIL, 1994) apontam o fato dos jogos matemáticos provocarem desafios genuínos nos alunos, gerando interesse e prazer como um dos fatores mais positivos, facilitando, assim, o processo de aprendizagem. Para tal, o aluno precisará de conhecimentos anteriormente adquiridos, interpretação e respeito às regras. Além disso, o uso de jogos auxilia no raciocínio, fazendo com que o aluno crie estratégias a cada jogada. Segundo Grandro (1998), isso permite que o mesmo adquira um conhecimento efetivo, construído durante a atividade através de situações que apareçam e que que precisam ser resolvidas. Com isso, percebemos que o uso de jogos possibilita uma situação de prazer e aprendizagem significativa dentro das aulas de matemática.

Na quarta parte da atividade, para que os alunos consigam aplicar o conhecimento adquirido serão apresentadas algumas questões referentes ao exame aplicado pela SEEDUC RJ, denominado SAERJINHO. Segundo a SEEDUC (RIO DE JANEIRO, 2011, p. 1) “O SAERJINHO é um programa de avaliação diagnóstica do processo Ensino Aprendizagem realizado nas unidades escolares da rede estadual de educação básica, sendo uma das ações que integram o Sistema de Avaliação da Educação Básica do Rio de Janeiro – SAERJ”. O exame é composto de questões objetivas com 5 alternativas. Observamos que apenas na Atividade 4 foram utilizadas questões fora da avaliação SAERJINHO: uma questão da prova de 2016 do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e uma questão do Banco de Questões do SARESP (Secretaria da Educação do Estado de São Paulo). As questões sugeridas poderão ser facilmente adaptadas para a série e o momento em que a atividade esteja sendo trabalhada, usando o assunto já aprendido pelo aluno.

4.1 Introdução ao Plano Cartesiano

O objetivo principal da atividade é, de maneira natural aos alunos, introduzir o conceito de par ordenado. A ideia é que se perceba que para se localizar uma posição em um plano são necessárias duas informações. Essa atividade pode ser aplicada a partir do sexto ano do Ensino Fundamental, fazendo as devidas adequações.

Tomando-se como referência a sala de aula e nela, a posição ocupada por um aluno, utiliza-se o par: número da fileira e número da carteira, para localizá-lo. Com esse exemplo, é fácil notar que com apenas uma das informações, fileira ou carteira, não se consegue identificar um determinado aluno e que é preciso estabelecer a ordem com que serão dadas as informações. Para essa atividade, é importante que o aluno já tenha familiaridade com o conjunto dos números Inteiros e organizá-los em retas numéricas. A mesma atividade pode ser realizada com alunos que conhecem apenas o conjunto dos números Naturais e sua organização em reta numérica. Nesse caso, basta que haja uma adaptação em alguns momentos da atividade.

Para aplicá-la é necessário que as carteiras na sala de aula estejam organizadas em fileiras.

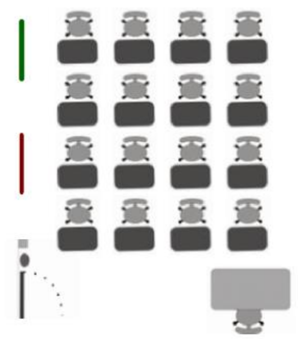
Cada aluno receberá a seguinte atividade:

4.1.1 Atividade motivadora

A Sala de Aula de Alice

A turma de Alice tem 16 alunos, contando com ela. A escola organiza as salas de aula em 4 fileiras verticais de 4 carteiras cada uma, como mostra a figura abaixo. A fileira 1 é a primeira a partir da parede que contém o mapa, a fileira 2, a segunda, e assim, sucessivamente. Da mesma maneira, numa determinada fileira, a posição 1 é a dada pela primeira carteira localizada a partir da mesa do professor, a posição 2, é dada pela segunda carteira, e assim sucessivamente.

Figura 6 – Sala de aula de Alice



Fonte: O autor, 2018

Como cada carteira possui uma localização em sala de aula, a professora combinou com os alunos que vai localizá-los indicando primeiro a sua fileira e logo após a posição da sua carteira na fileira. Ela vai usar essas duas informações escritas entre parênteses, desta forma: (fileira; carteira).

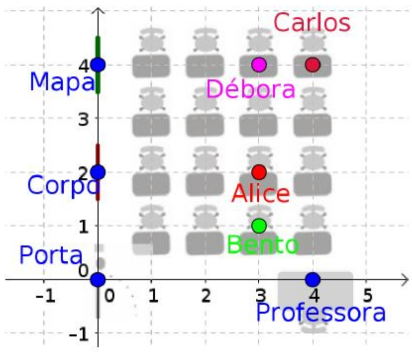
Em Matemática, essa forma de escrever recebe o nome de par ordenado.

Alice normalmente senta-se na terceira fila, na carteira que se localiza na segunda posição. Podemos então dizer que o par ordenado que representa a localização de Alice é (3,2). Seu amigo Bento, sempre se senta à frente de Alice, na mesma fileira. Logo, o par ordenado que representa a localização de Bento é (3,1).

Carlos e Débora, colegas de Alice, sentam em carteiras localizadas respectivamente em (2,3) e (3,3).

Como faremos para representar por par ordenado a porta, o mapa e a mesa do professor?

Gráfico 4 – Sala de Aula de Alice

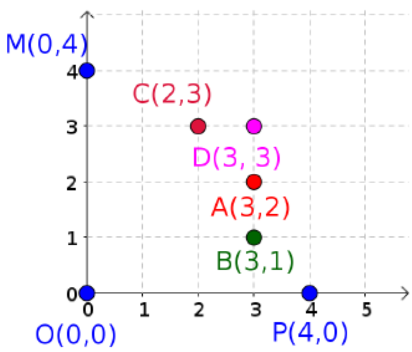


Fonte: O autor, 2018

Note que a contagem das fileiras é realizada a partir da parede que está localizado o mapa. Vamos então dizer que o mapa se localiza na fileira 0. Como todas as carteiras de posições iguais estão alinhadas e, como, de acordo com a figura, o mapa está localizado em frente às carteiras de posição 4, dizemos que o par ordenado que representa a localização do mapa é o (0,4). A mesa do professor está posicionada em frente da fileira 4 e está localizada antes do início da contagem das carteiras em suas fileiras, logo podemos dizer que a mesa do professor está localizada na posição 0. Dizemos que a localização da mesa do professor é o (4,0). Usando o mesmo raciocínio, concluímos que a porta está localizada no (0,0). O que foi dito acima pode ser representado pela figura a seguir.

As informações acima também podem ser representadas apenas por pares ordenado em um plano. Para isso, cada elemento que citamos será representado por pontos como figura a seguir:

Gráfico 5 – Pontos representando Alice e seus amigos



Fonte: O autor, 2018

Tabela 1 – Legenda de Pontos

Legenda de Pontos	
Alice	A(3,2)
Bento	B(3,1)
Carlos	C(2,3)
Débora	D(3,3)
Mapa	M(0,4)
Mesa do Professor	P(4,0)
Porta	O(0,0)

Fonte: O autor, 2018

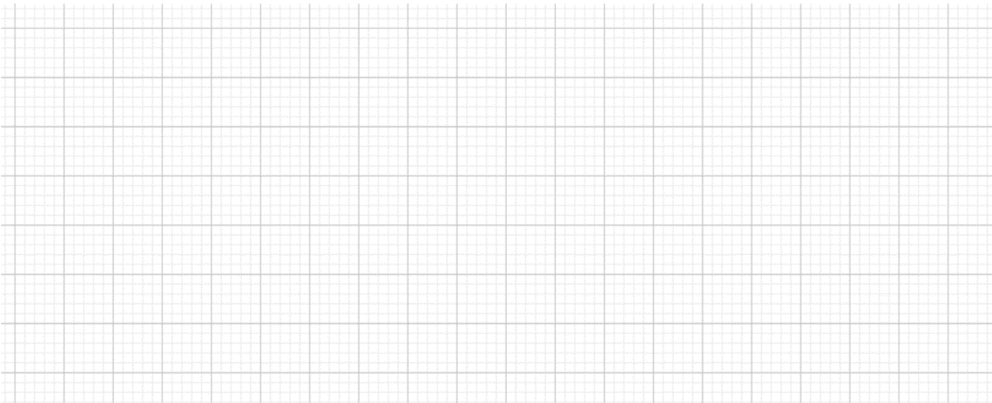
Esse plano onde representamos os pares ordenados é denominado Plano Cartesiano.

Agora, em relação a sua sala, combinando com seu professor e colegas de classe qual seria a primeira fileira e representando da mesma forma que a sala de Alice, responda as seguintes perguntas:1) Qual o par ordenado que representa sua posição?

2) Utilizando o papel quadriculado, represente a sua sala de aula como foi representada a sala de aula de Alice. Logo após, marque os pontos que se pede:

- Marque o ponto que representa a sua localização na sua sala de aula.
- Marque a posição do aluno que está a sua esquerda.
- Marque a posição do aluno que está a sua direita.
- Marque a posição do aluno que está atrás de você.
- Marque a posição do aluno que está a sua frente.
- Marque a posição da porta e a mesa do professor.

Figura 7 – Malha Geométrica



Fonte: O autor, 2018

4.1.2 Formalização Teórica: Pares Ordenados e Plano Cartesiano

Após a atividade sugerida, o aluno já possui de certo modo o conhecimento prático para introduzir os conceitos de Plano Cartesiano, utilizando as nomenclaturas necessárias. Conforme já discorrido neste trabalho, é nesse momento que o professor se encarregará de formalizar o assunto.

4.1.3 Jogo Matemático Safari Pokémon

Comentários: Trata-se de um jogo ambientado no universo Pokémon, onde o objetivo será capturar o máximo de Pokémons (pontos) com ajuda de um mapa que representa o plano cartesiano. Para jogar é preciso que o aluno tenha a noção das propriedades de quadrado e localização de pares ordenados. Os cartões referentes ao jogo estão disponíveis no Apêndice E.

Número de Participantes: individual ou em grupos de até 4 alunos.

Objetivo: Conseguir capturar o máximo de Pokémons (pontos) conforme os números forem sendo sorteados.

Dinâmica do jogo: Cada jogador ou grupo receberá uma lista de Pokémons a serem capturados. Cada monstro será relacionado com um par ordenado (x,y) no plano cartesiano, 10 $\leq x \leq 10$ e $-10 \leq y \leq 10$, escritos anteriormente a pelo professor nas cartelas a serem distribuídas. Cada cartela deve ser única para cada aluno\grupo. O aluno\grupo deve marcar cada Pokémon em um mapa impresso. Após distribuir o mapa e as coordenadas, que estão em anexo junto com a explicação do jogo, pede-se que os alunos marquem seus pontos no material entregue.

Após a marcação, o professor sorteará um par ordenado da seguinte maneira: em um recipiente com 21 papéis numerados de -10 a 10 serão realizados dois sorteios, com reposição. O primeiro sorteio indicará a abcissa do par, por sua vez, o segundo sorteio indicará a ordenada do par. O professor será responsável pelo sorteio e deve registrar os pares ordenado na ordem conforme forem sorteados para fim de conferência.

Após o sorteio, o aluno deve, no mapa oferecido, marcar um quadrado de lado 3 unidades cujo o vértice inferior esquerdo seja o par ordenado sorteado.

Para que o aluno consiga pontuar, o par ordenado referente a localização do Pokémon, deve pertencer aos lados ou vértices ou interior desse quadrado.

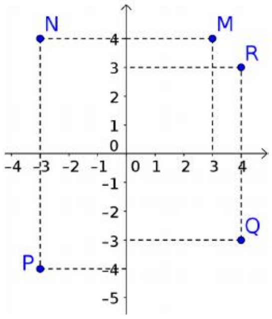
O jogo será finalizado após um jogador (grupo) conseguir capturar todos os Pokémons de sua lista ou que o professor finalize o jogo contando o número de Pokémons capturados de cada jogador (grupo). O ganhador será o jogador (grupo) que obtiver o maior número de Pokémons capturados.

Após o jogo, é esperado que o aluno tenha maior noção da localização dos pontos.

4.1.4 Questões Propostas

1 (M100019ES-Saerjinho) O desenho abaixo representa um sistema de coordenadas cartesianas.

Gráfico 6 – Questão 1, atividade 1

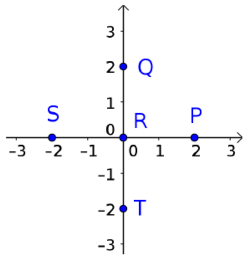


Fonte: Seeduc -RJ, 2012

Qual é o ponto nesse plano cartesiano de coordenadas (4,-3)?
a) M b) N c) P d) Q e) R

2 (M100135EX -Saerjinho) No plano cartesiano foram marcados cinco pontos.

Gráfico 7 Questão 2, atividade 1

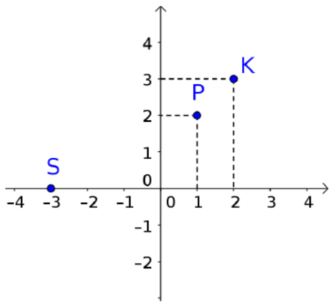


Fonte: Seeduc -RJ, 2012

O ponto que possui abscissa 2 e ordenada 0 é:
a) P b) Q c) R d) S e) T

3 (M100077EX-Saerjinho) No plano cartesiano abaixo foram marcados três pontos

Gráfico 8 Questão 3, atividade 1



Fonte: Seeduc -RJ, 2012

As coordenadas dos pontos S, P e K são, respectivamente,
a) (-3,0); (1,2) e (2,3) b) (-3,0); (1,2) e (3,2) c) (-3,0); (2,1) e (2,3)
d) (0,-3); (1,2) e (3,2) e) (0,-3); (2,1) e (2,3)

Gabarito: 1) d, 2) a e 3) a

4.2 Atividade 2: Equação da reta na forma ax+by=c

O objetivo central da atividade será que o aluno reconheça uma reta como lugar geométrico dos pontos (x,y) que satisfazem ax+by=c. Para isso, é necessário que o aluno saiba fazer cálculos algébrico e já conheça o plano cartesiano.

Em um primeiro momento o aluno será orientado, através de procedimentos, a localizar pontos e traçar retas no GeoGebra, relacionando a reta com a equação do primeiro grau com duas incógnitas. Após o aluno realizar exercícios utilizando o software GeoGebra como consulta, o professor poderá formalizar o conceito de retas sob o ponto de vista descrito acima. Através de um jogo de cartas, onde o objetivo principal é encontrar pontos que pertençam às retas, o aluno exercita de maneira informal os conteúdos trabalhados. Ao final, a turma poderá concluir o estudo utilizando questões propostas para que suas estratégias e raciocínios sejam testados.

Para a atividade a seguir será necessário que os alunos instalem em seus celulares o aplicativo ou utilizem o software disponível para computador.

4.2.1 Atividade Motivadora

Localizando pontos e traçando retas no GeoGebra

O Aplicativo GeoGebra é usado para o ensino de Geometria. Com ele temos a facilidade de escrever funções e desenhar figuras geométricas.

Localizando um ponto no plano cartesiano usando o GeoGebra

Para nos familiarizarmos com o procedimento, vamos marcar no plano cartesiano com a ajuda do GeoGebra o ponto A = (3,5).

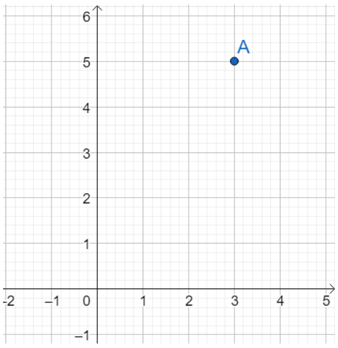
Logo na parte inferior da tela, aparecerá um teclado no qual digitaremos o ponto que queremos. Para isso, utilizaremos o campo “Entrada...”. Vamos tentar:

Quadro 1 Procedimento para marcar o ponto A = (3,5) no plano cartesiano

Procedimento para marcar o ponto A = (3,5) no plano cartesiano
1) Toque no campo “Entrada...” 2) Usando o teclado virtual digite A = (3,5) 3) Toque em “Enter” Fim do procedimento

Fonte: O autor, 2018

Gráfico 9 – Ponto A



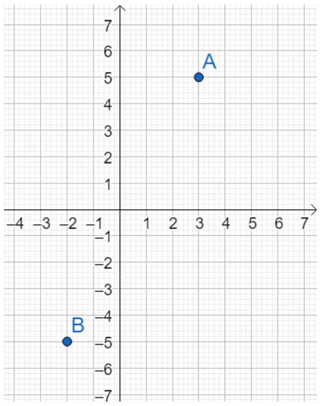
Fonte: O autor, 2018

Da mesma maneira que foi marcado o ponto A = (3,5), pode-se traçar qualquer ponto. Basta que no segundo passo se escreva as coordenadas do ponto a ser marcado.

1) Utilize o mesmo procedimento e marque o ponto B = (-2,-5).

Resposta:

Gráfico 10 – Ponto A e B



Fonte: O autor, 2018

Traçando uma reta usando o GeoGebra

Observe a equação 2x+y=11. Ela possui duas variáveis x e y. Para cada valor que atribuímos a x, substituindo na equação, podemos encontrar um valor para y. Assim:

Tabela 2 – Pontos da equação 2x + y = 11

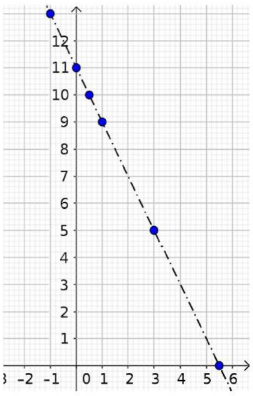
x	y	Par ordenado (x,y)
0	11	**(0,11)**
1	9	**(1,9)**
-1	13	**(-1,13)**
5,5	0	**(5,5;0)**
12	10	**(12,10)**
3	5	**(3,5)**

Fonte: O autor, 2018

Logo, (0,11),(1,9),(-1,13),(5.5,0) , (1/2,10) e (3,5) são algumas soluções da equação 2x+y=11.

Observe que, quando representamos graficamente os pares ordenados obtidos em um sistema cartesiano, esses pontos estão sobre uma mesma reta.

Gráfico 11 – Pontos alinhados



Fonte: O autor, 2018

Por outro lado, vamos seguir o roteiro descrito abaixo:

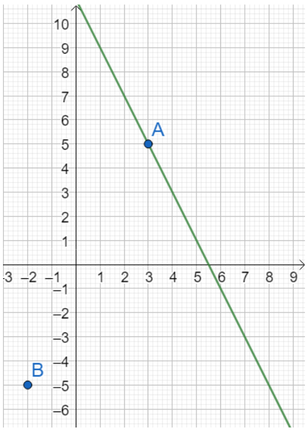
Quadro 2 Procedimento para traçar a reta f: 2x+y=11

Procedimento para traçar a reta f: 2x+y=11
1) Toque no campo “Entrada...”
2) Com a ajuda do teclado virtual, escreva a equação f: 2x+y=11
3) Toque no botão “Enter”.
Fim do Procedimento

Fonte: O autor, 2018

Resposta:

Gráfico 12 – Reta f e pontos A e B



Fonte: O autor, 2018

Observe que a figura que aparece na tela é de uma reta.

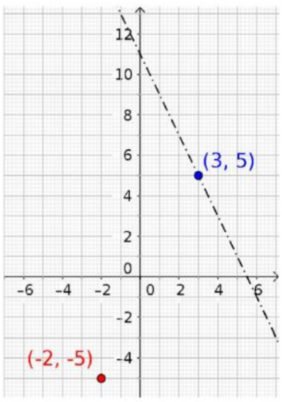
Isso nos leva a inferir que a representação gráfica de uma equação do primeiro grau com duas variáveis é uma reta. Esse estudo será justificado algebricamente mais adiante no Ensino Médio.

Da mesma maneira que traçamos a reta f: 2x+y=11, pode-se traçar qualquer reta, basta que no segundo passo se escreva a equação da reta a ser traçada.

Assim, vamos identificar uma reta à uma equação do primeiro grau com duas variáveis. Portanto, as coordenadas de um ponto na reta satisfazem à sua equação e vice-versa.

Na figura abaixo percebe-se que a reta f não passa pelo ponto (-2,-5). Portanto, (-2,-5) não é uma das soluções dessa equação.

Gráfico 13 – Pontos (3,5) e (-2,-5) sob a reta



Fonte: O autor, 2018

Note que, se tomamos x=-2 e o substituímos na equação 2x+y=11, encontramos y=15. Assim, o par ordenado (-2,5) não satisfaz à equação.

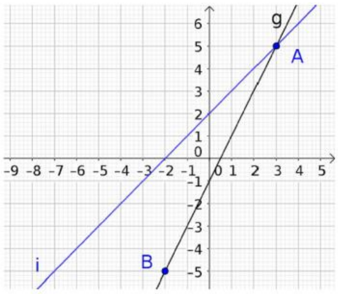
O ponto A = (3,5) pertence a reta f: 2x+y=11, logo, o par ordenado (3,5) é uma das soluções de f: 2x+y=11, por sua vez, o ponto B = (-2,-5) não pertence a reta f: 2x+y=11, assim, o par ordenado (-2,-5) não representa uma solução de f: 2x+y=11.

2) Seguindo esse raciocínio, vamos verificar, sem a ajuda do GeoGebra, se os pontos A e B pertencem às retas. Feito isso, confirme no GeoGebra o resultado:

g: 2x y =1 i: -x + y=2

Resposta:

Gráfico 14 – Resposta item 2



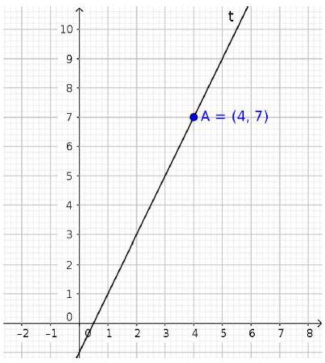
Fonte: O autor, 2018

Conforme vemos no gráfico acima A pertence a ambas as retas, por sua vez B pertence apenas a reta g.

3) Qual o ponto de abcissa 4 que pertence a reta t: 2x-y=1? Utilize o GeoGebra para conferir sua resposta.

Resposta: (4,7).

Gráfico 15 – Resposta item 3



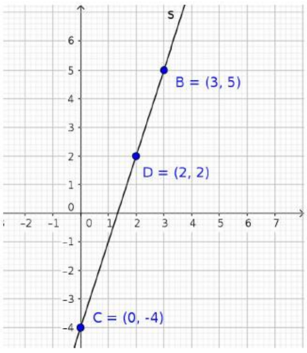
Fonte: O autor, 2018

4) Encontre dois pontos que pertençam a s: -3x+y= 4. Utilize o GeoGebra para conferir sua resposta.

Resposta:

Um exemplo é a que vemos na figura abaixo

Gráfico 16 – Possível resposta item 4



Fonte: O autor, 2018

4.2.2 Formalização Teórica: Equação da reta ax+by=c

Após a atividade sugerida, o aluno já possui de certo modo o conhecimento prático. Espera-se que o aluno tenha a visão da forma gráfica da equação de primeiro grau com duas variáveis e que possa identificar se um ponto pertencente a uma reta utilizando apenas a equação referente à reta. Deve-se ressaltar que esse estudo será mais aprofundado no Ensino Médio.

4.2.3 Jogo Matemático: Rouba o Monte Algébrico

Comentários: O jogo é baseado em um jogo de baralho chamado Rouba Monte. É necessário que o aluno tenha o entendimento básico de expressões algébricas e saiba reconhecer quando um ponto pertence a uma determinada reta, usando a sua equação. As cartas referentes ao jogo estão disponíveis no Apêndice F.

***Material*:** Para o material será utilizado o baralho disponível.

Objetivo: Formar duplas de cartas da seguinte forma

- Carta que representa um ponto que pertença a reta representada em outra carta;

- Carta que representa uma reta que possua um ponto representado em outra carta;

Número de Participantes: De 2 a 5 participantes.

Instruções: Inicia-se o jogo embaralhando as cartas.

Após embaralhar as cartas, disponha 5 delas sobre a mesa com a face voltada para cima e distribua 4 cartas para cada participante.

O jogo se inicia pelo participante à esquerda de quem distribuiu as cartas.

Este participante deve verificar entre as cartas de sua mão se há alguma carta na mesa que obedeça a algum dos dois objetivos já citados. Se em algum caso se forma a dupla, junta-se as duas cartas e as separa em um monte destacado a sua frente. A carta da mesa comprada deve ficar na parte de cima do monte virada para cima. De forma que os outros jogadores possam vê-las.

Caso o participante não possua nenhuma carta que forme duplas com as cartas da mesa, ele deve descartar uma carta qualquer da mão colocando-a com a face voltada para cima na mesa.

Assim que terminar sua jogada, o segundo participante deve verificar, entre as cartas da mesa e a carta de cima do monte dos outros participantes, se existe alguma que forme dupla com alguma de suas cartas. Caso aconteça, o participante põe sua carta em cima e rouba o monte para si. Caso contrário o jogador deve descartar uma carta sobre a mesa.

Quando algum participante ficar sem cartas na mão, deve pegar mais 4 cartas das que não foram distribuídas.

O jogo termina quando acabarem-se as cartas para distribuição e ninguém mais conseguir formar pares com as cartas da mão com alguma carta da mesa ou o monte de alguém.

O ganhador do jogo é o participante que tiver o maior monte de cartas ao final.

O gráfico referente aos pontos e retas representados nas cartas deste jogo pode ser encontrado no Apêndice G, ao final deste trabalho.

Ao final do jogo, espera-se que os alunos possam assimilar que para que um ponto pertença a uma reta, necessariamente, ele tem que ser solução da equação na qual a reta é representada.

4.2.4 Questões Propostas

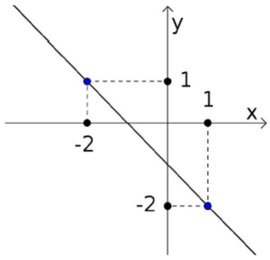
Sobre esse assunto, sugerimos três questões. São questões do terceiro ano do ensino médio, visto que o assunto Geometria Analítica é oferecido nessa série. A essa altura espera-se que o aluno relacione uma equação do primeiro grau com duas variáveis como uma reta. Nas questões a seguir, espera-se que o aluno utilize o processo de substituição para encontrar as respostas.

1) (M11114SI-Saerjinho) A Equação da reta que passa pelos pontos M e N de coordenadas (0,3) e (-3,3), respectivamente:

a) y=x+3 b) x=-3 c) y=-2x+3 d) y=2x+3 e) y=3

2) (PAMA11225MS-Saerjinho) Observe a função representada no gráfico abaixo.

Gráfico 17 – Questão 2, Atividade 2



Fonte: SEEDU-RJ, 2012

a) y-x=0 b) x-y= 1 c) x+y=1 d) x+y=-1 e) x-y=-1

3) (M11422SI-Saerjinho) Os pontos P(4,7), Q(7,10), R(5,6) e S(2,3) são vértices consecutivos de um paralelogramo PQRS. A equação da reta suporte da diagonal PR, desse paralelogramo é:

a) x+y= 11 b) -x+y= 1 c) y=7x5+15 d) x-y = -1 e) 2x-y=4

Gabarito: 1) e, 2) c e 3) a

4.3 Uso da equação da reta na forma ax+by=c para apresentar sistemas lineares na forma geométrica

Nesta atividade o aluno será incentivado a classificar o sistema de primeiro grau de duas incógnitas sem que seja feita a resolução do mesmo. Inicialmente, fazendo uma analogia com a rede de transporte da cidade do Rio de Janeiro, o aluno será conduzido a interpretar graficamente um sistema, onde cada via representará uma reta e suas estações de transferências representarão pontos dessas retas. Espera-se que na Formalização Teórica o assunto seja formalizado de forma simples, levando o aluno a analisar as equações antes da resolução. O jogo será utilizado como uma forma desafiadora, testando a estratégia dos alunos no cálculo e classificação de um sistema, seguido de questões propostas.

Ao iniciar, o aluno receberá uma folha contendo a atividade a seguir.

4.3.1 Atividade Motivadora

Transporte sobre Retas

Para entender como representamos a solução de um sistema de equações do primeiro grau de duas incógnitas na forma gráfica, vamos tomar como analogia o sistema de transporte da região metropolitana do Rio de Janeiro.

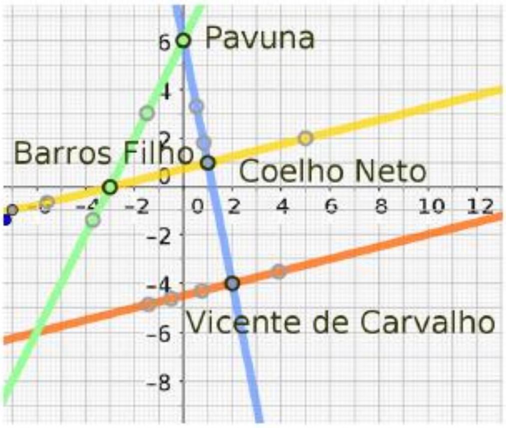
A figura abaixo representa uma parte de um mapa esquemático da rede metropolitana de transporte público, com ano-base de 2016, divulgado pela mobiRio. O trecho mostra um pequeno pedaço da Trans Brasil, que está em amarelo, da Trans Carioca, em laranja, o ramal de trem de Belford Roxo, que está em verde musgo, e a linha 1 do metrô, que está em azul. As estações da Trans Brasil e Trans Carioca são de BRT, Bus Rapid Transit. O BRT é um tipo de sistema de transporte público baseado no uso de ônibus.

Figura 7 – Parte do Mapa mobiRio

Fonte: mobiRio, 2018

Nessa atividade vamos transferir esse pedaço do mapa para o plano cartesiano. Para isso, vamos considerar que cada reta representará uma Via e cada ponto destacado uma estação.

Gráfico 18 – Sistema de transporte representado através de retas



Fonte: O autor, 2018

Tabela 3 – Retas e coordenadas representando as estações e vias

Vias	Representação	Estações	Representação
Trans Brasil (amarelo)	-x+4y=3	Pavuna	(0,6)
Trans Carioca(laranja)	-2x+8y=36	Coelho Neto	(1,1)
Metrô Linha 1 (azul)	5x+y=6	Barros Filho	(-3,0)
Ramal Belford Roxo (verde)	-6x+3y=18	Vicente de Carvalho	(2,-4)

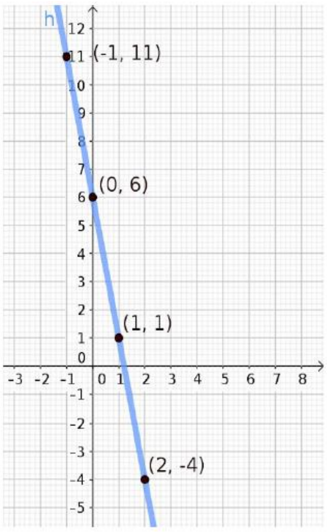
Fonte: O autor, 2018

Seja a equação do 1º grau de duas incógnitas que representa o Metrô Linha 1:

$$5x + y = 6$$

Sabe-se que, geometricamente, as soluções de uma equação do 1º grau de duas incógnitas estão alinhadas. Além disso, qualquer ponto que pertença a uma reta, descrita através de uma determinada equação, será uma solução dessa equação. Destacamos no gráfico abaixo alguns pontos que pertencem à reta de equação 5x+y=6:

Gráfico 19 – Reta 5x + y= 6



Fonte: O autor, 2018

Logo, os pares ordenados (-1, 11), (1, 1), (0, 6), (2, -4) representam algumas das soluções de 5x+y=6.

Voltando ao mapa da figura 7, notamos que cada estação é representada por um ponto da reta, que por sua vez representa a via que contém esses pontos. Fica fácil ver que Coelho Neto, Pavuna e Vicente de Carvalho pertencem a Linha 1 do Metrô, que estão representados, respectivamente, pelos pontos (1, 1), (0, 6), (2, -4) e pela equação 5x+y=6.

Observe, por exemplo, que de qualquer estação que se localize na linha 1 do Metrô é possível chegar numa estação do BRT localizada na Trans Carioca fazendo uma única baldeação. Isso acontece porque tais vias possuem uma estação em comum, a de Coelho Neto.

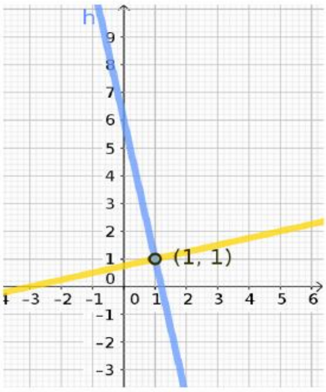
Em termos da matemática, dizemos que as retas 5x+y=6 e -x+4y=3 possuem um ponto em comum, a saber o ponto (1,1), ou seja, (1,1) satisfaz as duas equações. Dessa forma, o sistema

$$\begin{cases} 5x+y=6 \\ -x-4y=3 \end{cases}$$

possui uma única solução dada por (1,1).

Veja que se representarmos as duas equações graficamente então as duas retas são concorrentes.

Gráfico 20 – Resolução gráfica do Sistema



Fonte: O autor, 2018

Portanto, quando existir, a solução gráfica ou geométrica de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas é o ponto de intersecção das duas retas correspondentes às duas equações do sistema.

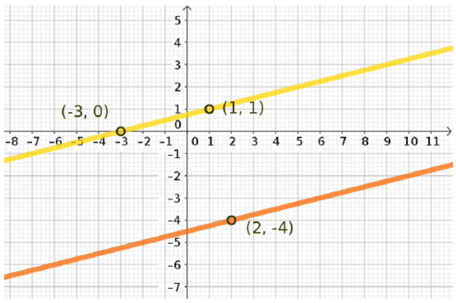
Quando um sistema é representado graficamente por duas retas concorrentes o classificamos como um Sistema Possível e Determinado. Nesse caso, ele possui uma única solução.

Voltando à figura 7, percebemos que não é possível fazer uma única baldeação entre quaisquer estações da Trans Brasil e da Trans Carioca. Tomemos, por exemplo, as estações de Barros Filho e Vaz Lobo. Isso acontece pois não existe nenhuma estação em comum entre elas nesse trecho.

Vamos representar geometricamente o sistema com as duas equações que representam essas vias.

$$\begin{cases} -x+4y=7 \\ -2x+8y=36 \end{cases}$$

Gráfico 21 – Representação das retas -x + 4y = 7 e -2x+8y = 36



Fonte: O autor, 2018

Veja que ao representarmos as duas equações graficamente as duas retas não possuem pontos em comum, ou seja, são paralelas. Podemos concluir então que se duas retas não possuem pontos em comum então as duas equações que as representam não possuem soluções comuns. Logo, não existe uma solução para esse sistema, assim, dizemos que esse sistema é um Sistema Impossível.

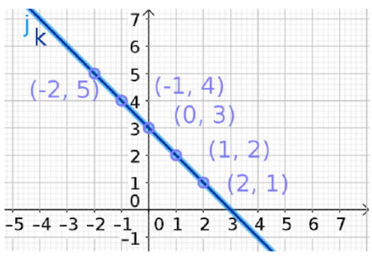
A figura 8 abaixo representa outra parte do mapa rodoviário. Nela estão representadas duas linhas do metrô, Linha 1 e Linha 2, num trecho do bairro da Glória até o bairro de Botafogo. Elas compartilham todas as paradas e estações. Os mesmos trilhos do Metrô são utilizados, ou seja, se um passageiro quiser ir do Catete ao Flamengo ele pode tomar qualquer uma das linhas e conseguirá chegar ao seu destino.

Figura 8 – Parte do mapa da mobiRio

Fonte: mobiRio, 2018

De forma semelhante a que fizemos no exemplo anterior, a Linha 1, representada pela cor azul clara, foi descrita sob a reta x+y=3 e a Linha 2, representada pela cor azul escura, foi descrita sob a reta 2x+2y=6. Cada ponto que representa uma estação satisfaz as duas equações.

Gráfico 21 – Representação das retas 2x+2y=6 e x+y=3.



Fonte: O autor, 2018

Tabela 3 – Legendas do gráfico 22

Vias	Representação
Linha 1	j: x+y=3
Linha 2	k: 2x+2y=6

Estações	Representação
Glória	(-2,5)
Catete	(-1,4)
Lgo do Machado	(0,3)
Flamengo	(1,2)
Botafogo	(2,1)

Fonte: O autor, 2018

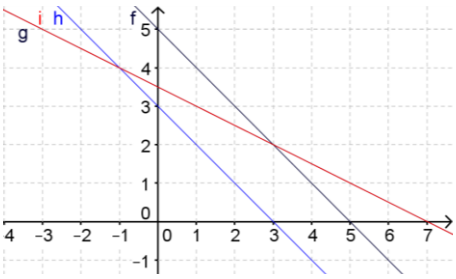
Observemos que toda estação da linha 1 é estação da Linha 2, e vice-versa, além disso, ao representarmos, graficamente, as duas equações referentes às Linhas 1 e 2, as duas retas ficam uma sobreposta a outra, ou seja, tratam-se de retas coincidentes.

Em linguagem matemática, isso implica que o sistema possui infinitas soluções. Dizemos que esse sistema é um Sistema Possível Indeterminado.

Vamos praticar.

1) Abaixo temos 4 equações e suas representações gráficas. Usando o que foi observado na atividade, classifique os sistemas formados pelos pares equações usando as siglas: SPD para sistema possível e determinado, SPI para sistema possível e indeterminado e SI para sistema impossível

Gráfico 23 -Item 1)



Fonte: O autor, 2018

Tabela 4 – Legenda gráfico 23

f: x + y = 5
g: x + 2y = 7
h: x + y = 3
i: 2x + 4y = 14

Fonte: O autor, 2018

Tabela 5 – Exercício referente ao item 1)

	f : x+y= 5	**g : x + 2y = 7**	**h : x + y = 3**	**i : 2x + 4y = 14**
f : x+y=5	**X**	SPD	SI	SPD
g : x + 2y = 7	SPD	**X**	SPD	SPI
h : x + y = 3	SI	SPD	**X**	SPD
i : 2x + 4y = 14	SPD	SPI	SPD	**X**

Fonte: O autor, 2018

2) Numa equação os números escritos na frente das incógnitas são chamados de coeficientes. Utilizaremos esses números para analisar os sistemas de forma mais prática. Vamos a seguinte atividade:

a) Complete a tabela a seguir utilizando para indicar cada coeficiente “a” para o coeficiente que está junto ao “x”, “b” para o coeficiente que está junto ao “y” e “c” para o termo independente, ou seja, o número que aparece sozinho, sem nenhuma incógnita vinculada.

Tabela 6 – Exercício item 2. a)

	a_f	b_f	c_f
f : x + y = 5	1	1	5
	a_g	b_g	c_g
g : x + 2y = 7	1	2	7
	a_h	b_h	c_h
h : x + y = 3	1	1	3
	a_i	b_i	c_i
i : 2x + 4y = 14	1	2	7

Fonte: O autor, 2018

Para classificar um sistema podemos utilizar esses coeficientes. Em Geometria Analítica, os coeficientes são muito importantes pois eles determinam a posição da reta representada pela equação. Analisando a razão entre os coeficientes, podemos classificar um sistema. Veja a seguir.

b) Usando as informações que encontramos na tabela do exercício (1) e as informações que encontramos na tabela do exercício (2.a), complete:

Sobre f e g:

$\frac{a_f}{a_h}$	Os valores são = ou ≠ ?	$\frac{b_f}{b_h}$	Os valores são = ou ≠ ?	$\frac{c_f}{c_h}$	Classificação

Sobre f e h:

$\frac{a_f}{a_h}$	Os valores são = ou ≠ ?	$\frac{b_f}{b_h}$	Os valores são = ou ≠ ?	$\frac{c_f}{c_h}$	Classificação

Sobre i e g:

$\frac{a_f}{a_h}$	Os valores são = ou ≠ ?	$\frac{b_f}{b_h}$	Os valores são = ou ≠ ?	$\frac{c_f}{c_h}$	Classificação

Responda: Comparando as seis tabelas acima, utilizando a razão entre os coeficientes, o que podemos concluir sobre a classificação dos sistemas.

c) Agora, complete o texto abaixo:

Considerando o sistema linear 2x2:

$$(S)\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Podemos classificar o sistema (S) como indeterminado se existirem _______________ soluções, impossível se existirem ______________ soluções ou possível determinado se existir apenas _______________ solução.

Para que o sistema seja considerado possível e determinado:

$$\frac{a'}{a} \_\_\_\_\_\_ \frac{b'}{b}.$$

Para que o sistema seja considerado possível e indeterminado

$$\frac{a'}{a} \_\_\_\_\_\_ \frac{b'}{b} \_\_\_\_\_\_ \frac{c'}{c}$$

Para que o sistema seja considerado impossível possível

$$\frac{a'}{a} \_\_\_\_\_\_ \frac{b'}{b} \_\_\_\_\_\_ \frac{c'}{c}$$

4.3.2 Formalização Teórica: Discussão de um Sistema forma algébrica e gráfica

Após a atividade sugerida, o aluno já possui de certo modo o conhecimento gráfico para classificar um sistema e como os coeficientes das equações do sistema se relacionam com sua discussão. Dessa forma, pode-se nesse momento formalizar a relação entre a discussão de um sistema com a razão entre seus coeficientes e com a posição das retas que representam as suas equações

4.3.3 Jogo Matemático: Caça aos pontos

Comentários: Através de uma lista de pistas, os alunos serão desafiados a encontrar 5 pontos no plano cartesiano. Cada aluno ou grupo terá que encontrar os pontos utilizando a melhor estratégia de cálculo, onde a forma gráfica de resolução de sistemas é a mais eficiente. O aluno que souber classificar o sistema será poupado de fazer cálculos desnecessários aumentando assim a possibilidade de sua equipe ganhar. Espera-se que após o jogo o aluno consiga assimilar melhor o conteúdo formalizado. Os cartões referentes a esse jogo se encontram no Apêndice H

Número de Participantes: A turma participará em busca do mesmo objetivo ou em grupos.

Objetivo: Encontrar os 5 pontos no plano Cartesiano.

Como jogar: Cada grupo deve receber o mesmo material: Folha para cálculo e cartões de dicas. Os cartões serão distribuídos todos, ao mesmo tempo e no início da partida. O grupo poderá usar uma folha de papel quadriculado como ajuda.

Com material em mãos os participantes devem, através de dicas que estão sendo oferecidas em cada cartão, encontrar os 5 pontos. O professor aplicador deve explicar o objetivo.

Os alunos devem se organizar a fim de resolverem de forma mais rápida o problema em questão.

Serão permitidos:

- Utilizar papel quadriculado para encontrar a solução gráfica;

- Resolver os sistemas utilizando o método ou estratégia que melhor atenda o jogador;

- Utilizar Calculadora; (opcional)

- Pesquisa no livro didático.

Não serão permitidos:

- Consulta ao professor;

- Consultar o GeoGebra

Após localizados todas os pontos, o grupo deve entregar o resultado para o professor, que avaliará da seguinte forma:

- Caso a turma esteja jogando em prol do mesmo objetivo, serão conferidas as localizações dos pontos, ganhando se o tempo anteriormente combinado for obedecido. Caso algum ponto seja marcado errado, o mesmo deve ser indicado pelo professor, devolvendo a turma. A turma deve entregar antes do tempo terminar.

- Caso a turma esteja dividida em grupos, ganha o grupo que entregar os 5 pontos com suas coordenadas corretas primeiro e dentro do tempo. Caso nenhum grupo consiga o feito, ganhará o grupo que tiver o maior número de pontos ou nenhum grupo ganhará.

Após o término é esperado que o aluno consiga, de forma intuitiva e utilizando as informações disponibilizadas na Formalização Teórica, classificar um sistema do primeiro grau de duas incógnitas e associar o encontro de duas retas como solução comum entre as equações que as representam. Durante e após o jogo, o professor pode auxiliar o aluno a traçar as retas em um papel quadriculado fazendo-o enxergar a solução por conta própria.

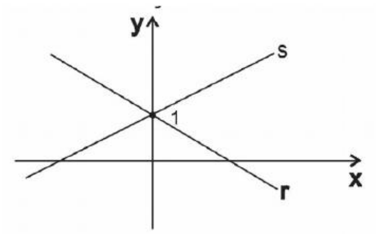
O gráfico referente aos pontos e retas representados nos cartões deste jogo pode ser encontrado no Apêndice I, ao final deste trabalho.

4.3.4 Questões Propostas

Sobre esse assunto, sugerimos a questão abaixo. Por sugestão, a questão pode ser feita através de desafio e corrigidas com toda turma. O Objetivo da questão é que o aluno possa massificar o ponto em comum entre as duas retas como resolução do sistema, havendo mais de uma estratégia para resolução da mesma.

1) (PAMA11233MS– Saerjinho) Observe a representação da interseção de duas retas r e s abaixo.

Gráfico 23 – Questão 1, atividade 3



Fonte: SEEDUC-RJ, 2012

Dentre os sistemas abaixo, qual tem sua solução representada acima?

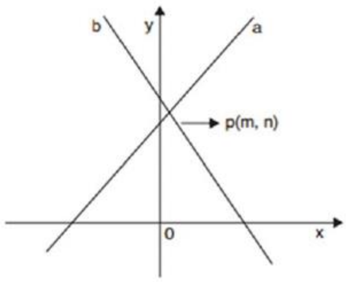
a) $\begin{cases} x-y=-1 \\ -x-y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 3x+y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-y=-1 \\ 3x+y=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

A próxima questão trata-se de uma questão sugerida no material de apoio pedagógico oferecido pela SEEDUC-RJ (http://www.conexaoescola.rj.gov.br/site/arq/matematica-regular-orientacoes-pedagogicas-3s-4b.pdf) pág 7

2) (Banco de Questões do SARESP) As duas retas a e b, representadas na fi gura abaixo, têm as seguintes equações: a: -x+y = 5 b: 2x+y = 11 O ponto P (m,n) é intersecção das duas retas. O valor de m -n é igual a:

Gráfico 24 – Questão 2, atividade 3

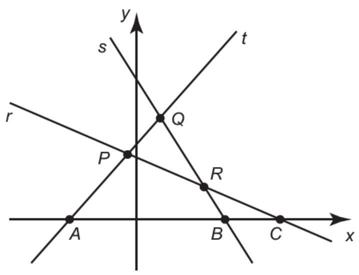


Fonte: SARESP, 2012

(A) 1 (B) −2 (C) −5 (D) −7

3) (Enem 2016 – 2ª Azul – 160) Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A, B e C s pontos de intersecções dessas retas com o eixo x.

Gráfico 25 – Questão 3, atividade 3



Fonte: ENEM, 2016

Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que:

a) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.

b) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.

c) possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.

d) não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.

e) possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.

Gabarito: 1) a , 2) c e 3) d

4.4 Atividade 4: Distância entre dois pontos

O objetivo dessa atividade é apresentar, através do Teorema de Pitágoras, o cálculo para a distância entre pontos no plano cartesiano. Essa atividade pode ser aplicada no momento em que o aluno consiga representar pares ordenados no plano cartesiano e tenha conhecimento do Teorema de Pitágoras. Utilizaremos como pano de fundo um texto que trata sobre o instinto de uma determinada espécie de formiga para encontrar a direção de seu ninho. Após a Atividade motivadora, sugere-se que o professor formalize a fórmula da distância entre dois pontos. O Jogo Matemático apresentado nesta atividade simula a vida profissional e acadêmica em aspectos gerais. Neste jogo, a distância e sua fórmula serão tratados de forma direta e o jogador deve realizar contas sobre distância para que possa continuar no jogo.

Para aplicar o tema, cada aluno receberá a seguinte atividade:

4.4.1 Atividade Motivadora

O Instinto Matemático das Formigas

"Várias espécies de formiga se guiam até seus destinos, seguindo odores e pistas químicas deixadas por elas mesmas ou por outros membros da colônia. Mas esse não é o caso da formiga do deserto tunisiano. (...) O único modo que pode realizar essa façanha diária é pelo uso do cálculo de posição.

Wehner e Srinivasan (cientistas) descobriram que, se deslocassem uma dessas formigas do deserto imediatamente depois de ter encontrado seu alimento, ela se voltaria exatamente para a direção que deveria tomar para encontrar seu ninho caso não tivesse sido deslocada, e além do mais, após cobrir a distância precisa que a levaria para casa, a formiga pararia e começaria uma busca confusa e desnorteada por seu ninho. Em outras palavras, ela conhece precisamente a direção que deve seguir para o retorno e sabe exatamente o quanto andar, ainda que esse caminho em linha reta não tenha nada a ver com o ziguezague aparentemente aleatório que ela fez em sua busca por comida.

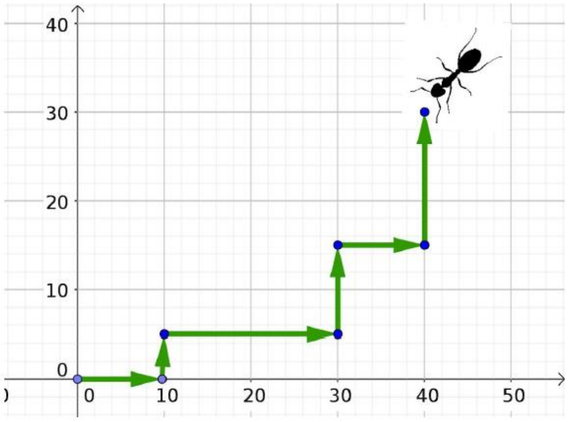
Um estudo recente mostrou que a formiga do deserto mede distâncias contando passo. Ela "sabe" qual é o comprimento de um único passo, e assim pode calcular a distância percorrida em qualquer linha reta multiplicando tal comprimento pelo número total de passos.

É claro que ninguém está sugerindo que essa criatura minúscula esteja executando multiplicações de modo como ser humano faria, (...) A formiga do deserto tunisiano simplesmente faz o que lhe é natural – segue seus instintos, que resultam de centenas de milhares de anos de evolução.”(DEVLIN, 2009, p. 45).

Após ler o texto, vamos imaginar que esta mesma formiga tunisiana está em um deserto plano. Vamos posicionar o plano cartesiano de modo que a origem coincida com a posição do ninho e que a escala utilizada dos eixos seja dada em função do comprimento dos passos da formiga. A partir da origem, a formiga pode se movimentar para todas as direções (Norte, Sul, Leste e Oeste).

Imagine que essa formiga, após a procura de comida, sempre caminhando para o norte ou para leste, consegue encontrar alimento em um ponto que fica a 40 passos para Leste e 30 passos para o Norte, conforme a imagem abaixo.

Gráfico 26 – Formiga no ponto (40,30)

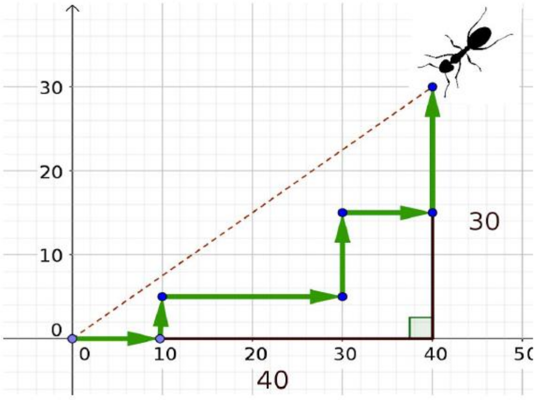


Fonte: O autor, 2018

Mas qual seria a distância, em passos, do alimento encontrado até o ninho da formiga?

Se a formiga de alguma forma consegue contar quantos passos foram dados para o leste e para o norte, ela intuitivamente consegue fazer um cálculo complexo. Perceba, que se somarmos a quantidade de passos percorridas para o leste e a quantidade de passos percorrida para o norte e representarmos nos eixos formaremos um triângulo retângulo no qual a hipotenusa será exatamente o caminho de volta da formiga para o ninho.

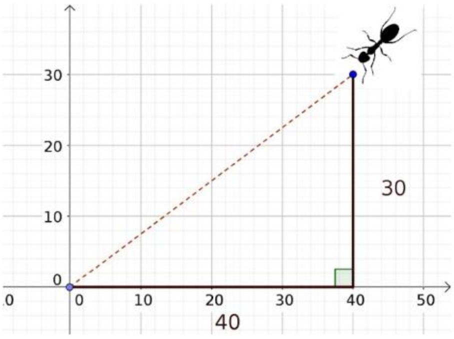
Gráfico 27 – Caminho reto que a formiga deve percorrer



Fonte: O autor, 2018

A medida da hipotenusa é a distância entre o alimento e o ninho. Ou seja, para se saber a menor distância do alimento até o ninho é preciso, utilizando teorema de Pitágoras, descobrir o valor da hipotenusa. Observe a figura e o cálculo abaixo:

Gráfico 28 – Triângulo formado pelo caminho percorrido



Fonte: O autor, 2018

Quadro 4 – Cálculo da Hipotenusa

$d^2=30^2+40^2$

$d^2=900+1600$

$d^2=2500$

$d=\sqrt{2500}$

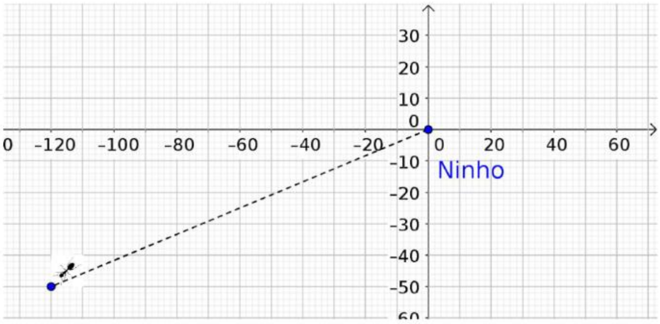
$d=50$

Fonte: O autor, 2018

Um dos experimentos, envolvia tirar a formiga do local onde ela encontrou o alimento e a posicionar em outro lugar. O texto fala, que a formiga obedecia a mesma direção ficando perdida ao cumprir a distância necessária. Digamos que isso foi feito. Após buscar o alimento a formiga é levada a uma posição que fica, em relação ao ninho, a 120 passos para oeste e 50 passos para sul, ou seja, ela foi deslocada 160 passos para oeste e 80 passos a sul.

1) Com a ajuda da figura abaixo, calcule a distância, em passos, que a formiga deve percorrer para que encontre seu ninho? Supondo que ela consiga encontrar a direção certa.

Gráfico 29 – Formiga no ponto (-120,-50)

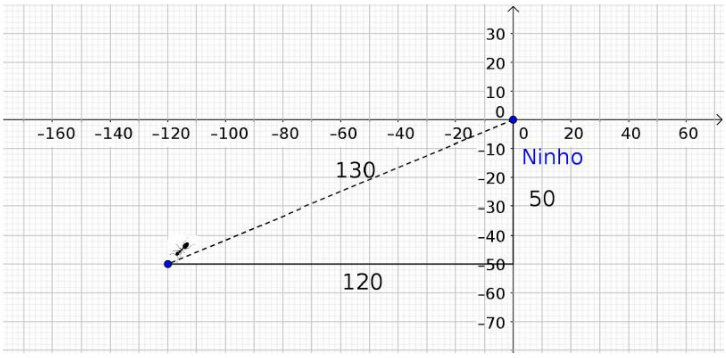


Fonte: O autor, 2018

Resposta:

Espera-se que o aluno construa o triângulo retângulo e calcule o valor de sua hipotenusa.

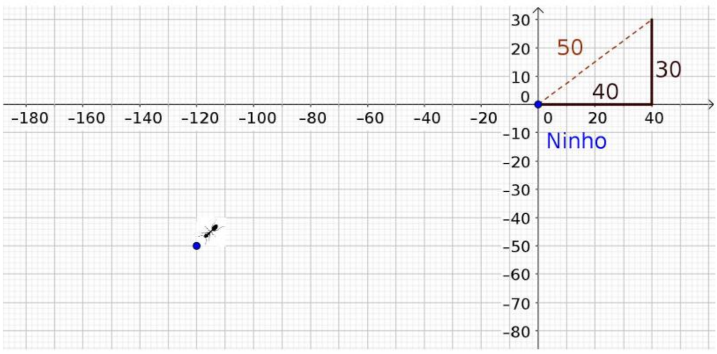
Gráfico 30 – Resposta referente ao item 1)



Fonte: O autor, 2018

2) Ao ser colocada no ponto (-120,-50), andará 50 passos na direção errada, pois em seu "raciocínio" ela ainda está no ponto (40,30), assim, a formiga tomaria uma direção errada achando que está no caminho correto. Com a ajuda da figura abaixo, indique em qual ponto a formiga pararia antes de notar que estava perdida.

Gráfico 31 – Formiga desorientada no ponto (-120,-50)

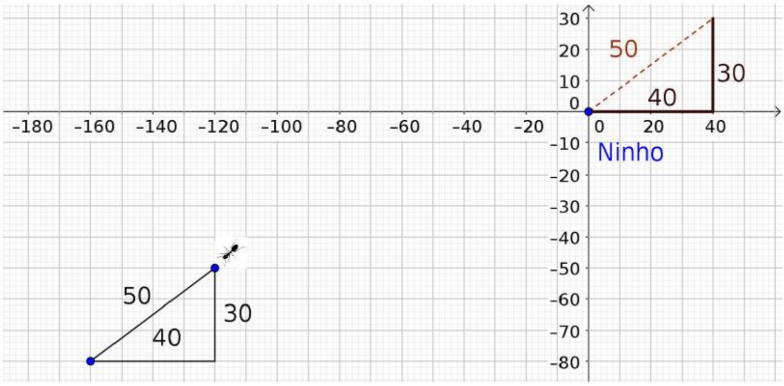


Fonte: O autor, 2018

Resposta:

A formiga fará o mesmo caminho que faria se não tivesse sido deslocada. A distância percorrida será a hipotenusa de um triângulo retângulo semelhante ao anterior. Logo, pelo desenho, ela pararia no ponto (-80,-160).

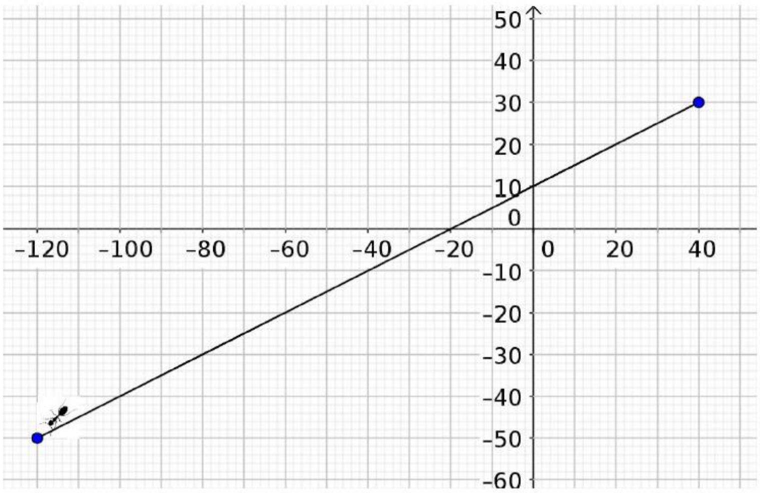
Gráfico 32 – Resposta referente ao item 2)



Fonte: O autor, 2018

3) Para a experiência, a quantos passos de distância a formiga foi deixada, em relação ao local onde estava o alimento? Utilize a figura abaixo para encontrar a melhor forma de encontrar essa distância. Discuta com seus colegas chegando a melhor conclusão.

Gráfico 33 – Caminho que a formiga deve percorrer até a comida

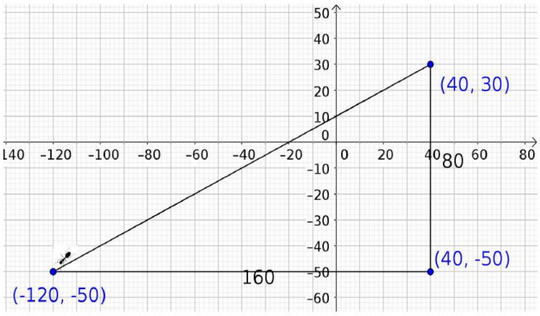


Fonte: O autor, 2018

Resposta:

Espera-se que o aluno consiga representar o triângulo retângulo cuja hipotenusa é o segmento que liga os pontos.

Gráfico 34 – Gráfico referente ao item 3)



Fonte: O autor, 2018

Onde,

$$d(A,B)^2 = \left(40 - (-120)\right)^2 + \left(30 - (-50)\right)^2$$
$$d(A,B)^2 = 25600 + 6400$$
$$d(A,B)^2 = 32000$$
$$d(A,B) = 80\sqrt{5}$$

4.4.2 Formalização Teórica: Fórmula da distância entre dois pontos do plano

Usando o Teorema de Pitágoras, apresentar a fórmula da distância entre dois pontos.

4.4.3 Jogo Matemático: Jogo da Vida Acadêmica

Jogo disponível no Apêndice J, utiliza a distância para caminharmos em um tabuleiro que é plano cartesiano. Através da temática “vida acadêmica”, a distância entre pontos não será o objetivo central do jogo, tornando a atividade mais leve e fazendo com que a prática do cálculo da distância entre dois pontos, seja feita de forma lúdica e divertida. Para tornar mais dinâmico, os participantes podem ter ajuda da calculadora ou GeoGebra. No caso do uso do GeoGebra, os alunos utilizariam a própria estratégia para localizar os pontos e calcular a distância entre eles.

Para realização do jogo é necessário que o aluno saiba a fórmula da distância entre dois pontos e expressão algébrica.

Número de Participantes: de 2 a 6 jogadores.

Objetivo: O jogador deve acumular o máximo de pontos, que serão determinados pelas cartas compradas. Quando quatro cartas “Tempo” forem retiradas ou quando seu “saldo de distâncias” acabar.

Cartas: As cartas que o jogo oferece serão divididas em 4 categorias:

1) Vida Acadêmica: Nela o jogador encontrará passos para sua vida acadêmica iniciando sempre pela ENSINO FUNDAMENTAL, podendo, a partir deste ponto, chegar até o DOUTORADO, passando pelo ENSINO MÉDIO, FACULDADE, ESPECIALIZAÇÃO E MESTRADO. Para isso, o jogador deve respeitar alguns pré-requisitos.

2) Vida Profissional: Cartas onde o jogador encontrará profissões almejadas na área que ele escolheu seguir. Com essas cartas o jogador acrescentará ao “Saldo de Distância” a quantidade de distância calculada entre o ponto que representa o último emprego e o ponto que representa o próximo emprego.

Quanto maior o nível alcançado, na área exigida, na “Vida Acadêmica” maior será o retorno. O nível 0 se inicia no nível mínimo exigido para vaga, podendo aumentar o nível respeitando a seguinte ordem:

ENSINO FUNDAMENTAL < ENSINO MÉDIO ou TÉCNICO < FACULDADE < ESPECIALIZAÇÃO < MESTRADO ou DOUTORADO

Em cada nível é acrescentado ao “Saldo de Distância” 10% do valor da distância entre o ponto que representa o último emprego e o ponto que representa o próximo emprego. Isso significa, por exemplo, que se para uma vaga é necessário que o jogador tenha a FACULDADE na área, e o jogador possuir a ESPECIALIZAÇÃO e o MESTRADO seja em qualquer área, ele estará no nível 2, acrescentando 20% do total da distância. Se nessa mesma situação, porém o jogador possuir apenas o MESTRADO em qualquer área, o jogador estará no nível 1, acrescentando 10% do valor total.

3) Cursos Complementares: São cartas que representam cursos livres e complementares. Alguns pontos do jogo, como por exemplo Intercâmbio e Curso no Exterior, só serão alcançados caso o jogador tenha em seu “CURRÍCULO” a carta necessária, descrita na carta correspondente.

4) **Cartas de Efeito:** Essas cartas ficaram misturadas junto com as cartas anteriormente descritas. Cada uma tem o poder de alterar o jogo de alguma forma lúdica. São essas as cartas:

Tempo: Uma carta que possuí o desenho de uma ampulheta. Essa carta deve ser mostrada aos outros jogadores e colocada a parte do jogo no momento em que for comprada. O jogo se encerrará ao serem agrupadas 4 cartas iguais a essa. Caso essa carta for retirada na primeira distribuição de cartas, ela ainda assim deve ser apresentada. Se 4 cartas forem retiradas na primeira distribuição de carta, todas as cartas distribuídas devem ser recolhidas, embaralhadas e redistribuídas.

Lixeiro: Carta com a figura de uma lata de lixo. Com essa carta o jogador poderá vasculhar o monte de descarte a procura de uma carta que o interesse e assim comprá-la.

Troca Justa: Carta com a figura de duas mãos se cumprimentando. Ao usar essa carta, o jogador pode propor uma troca com qualquer outro jogador. A troca deve ser feita com cartas que estejam no monte de trocas, sendo proibida a troca por cartas que ainda não foram jogadas. Para usar essa carta o jogador deve apresentá-la e propor a troca, caso a resposta seja negativa o jogador recolhe a carta e perdendo uma jogada.

Troca Injusta: Carta com a figura de um homem mascarado. Ao usar essa carta o jogador pode tomar uma carta do monte de trocas de um outro jogador.

Dobro: Carta com “2x” escrito. Essa carta deve ser utilizada no momento que o jogador acrescentar seus ganhos quando for contratado. Ela duplicará o valor de seus ganhos, somando ao “SALDO DE DISTÂNCIAS”

Como jogar: Inicialmente sorteia-se o “Saldo de Distância” de cada jogador:

Saldo de Distância: Antes de iniciar o jogo, o jogador receberá um total de distância que pode ser percorrida. Esse saldo será decidido através de um sorteio que será realizado, utilizando as cartas do tipo “Curso Complementar” da seguinte forma:

- Saldo inicial igual a 150 – Caso a carta sorteada seja de 5 pontos
- Saldo inicial igual a 200 – Caso a carta sorteada seja de 10 pontos
- Saldo inicial igual a 300 – Caso a carta sorteada seja de 20 pontos

Após o sorteio, os jogadores devem devolver as cartas que serão embaralhadas.

O jogador deve descontar o valor da distância percorrida a cada jogada e acrescentar quando for permitido.

Ao finalizar o saldo, o jogador deve esperar que o jogo acabe ou que todos os jogadores também esgotem seus saldos.

O Saldo de Distância deve ser guardado pelo aluno e sua conferência após cada jogada será de responsabilidade de cada jogador.

Após todos os alunos saberem a quantidade de distância que podem percorrer, as cartas serão distribuídas da seguinte forma:

Distribuição de Cartas: As cartas devem ser separadas por tipo e colocadas de forma que o jogador saiba o tipo porém não o conteúdo da carta. Assim, não importando qual tipo e começando pelo jogador que tiver menor SALDO DE DISTÂNCIA escolhe 5 cartas.

Após a distribuição, as cartas que sobraram devem ser colocadas, viradas para baixo, em montes separados por tipos. Deixando um espaço para o descarte de cartas.

O jogador que tiver menor saldo inicia a jogada, seguido pelo jogador a esquerda.

Após a distribuição, a dinâmica do jogo começa.

Dinâmica do jogo: Cada jogador, em sua vez de jogar, pode fazer até três jogadas, sendo possível não realizar jogadas, simplesmente passando a vez. Valerão como jogada:

1) Compra de cartas: O jogador pode comprar uma carta no monte. Mas o jogador nunca pode ficar com mais que 5 cartas na mão. Casos o jogador fique com mais que cinco cartas em sua mão, um jogador deve escolher, ao acaso, o número de cartas na mão do jogador e colocá-las no fim o monte de compras, respeitando o seu tipo.

2) Descartar uma carta: O jogador pode descartar qualquer carta no monte de descarte. Não podendo ficar com menos de 2 cartas na mão. Caso isso ocorra, o jogador, após o término de sua jogada, terá que comprar o número de cartas restantes para completar 5 cartas.

3) Acrescentar uma das cartas no Currículo: Em sua frente o jogador deve ter 3 montes representando Vida Acadêmica, Vida Profissional e Cursos Complementares. O jogador deve acrescentar a carta em cima do monte de seu tipo, de forma que todos consigam visualizar. Cada vez que um jogador acrescentar uma carta a distância entre a última carta que estiver virada no monte e a nova carta acrescentada deve ser calculada e descontada ou acrescentada, conforme o caso, no “Saldo de Distância”. Os valores das distâncias percorridas sempre serão calculados e arredondados para cima. A Conferência dos cálculos fica sob responsabilidade dos demais jogadores.

4) Apresentar uma carta de efeito: Ao apresentar a carta de efeito, o jogador deve cumpri-la. Contando como uma jogada.

Ao finalizar, o jogador deve anunciar que finalizou a sessão, passando a vez para o outro jogador.

Finalizando o Jogo: O jogo termina após terem sido sorteadas 4 cartas do tempo ou que todos os jogadores gastem todo o seu “Saldo de Distâncias”.

Vencedor: A pontuação é indicada no canto superior de cada carta. Ganha o jogo, o jogador que, após a soma dos valores das cartas que estão no CURRICULO, obtiver a maior pontuação.

Cada carta foi pensada de maneira que o aluno consiga traçar uma estratégia em relação a posição no plano cartesiano, podendo assim, se o aluno perceber, diminuir a quantidade de distância para cada carta. O gráfico referente aos pontos e retas representados nas cartas deste jogo, mostra essa estratégia, pode ser encontrado no Apêndice J, ao final deste trabalho.

4.4.4 Questões Propostas

Sobre o assunto tratado, sugerimos as questões abaixo. Em todas as questões propostas, o aluno pode utilizar a fórmula da distância ou aplicar, diretamente, o Teorema de Pitágoras.

1) (M120007E4 – Saerjinho) O mapa abaixo foi desenhado sobre um plano cartesiano graduado em centímetros. Nesse plano, a cidade de São Paulo encontra-se na origem dos eixos coordenados e Vitória no ponto de coordenadas (6,3)

Figura 9 – Questão 1, atividade 4

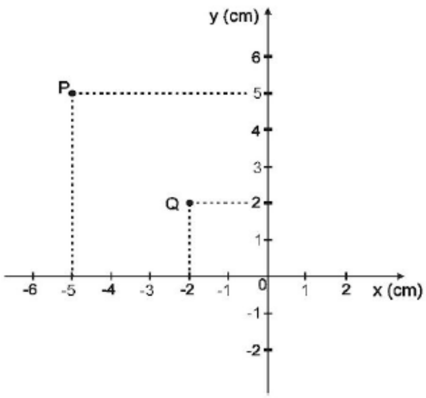
Fonte: SEEDUC-RJ, 2012

Nesse mapa, qual é a menor distância, aproximadamente, entre São Paulo e Vitória? (Considere $\sqrt{5} \cong 2,2$)

A)5,2 cm B) 6,6 cm C) 9,0 cm D) 22,5 cm E) 45,0 cm

2) (M12048481 – Saerjinho) Observe os pontos P e Q no plano cartesiano abaixo.

Gráfico 35 Questão 2, atividade 4



Fonte: SEEDUC-RJ, 2012

A distância entre esses dois pontos é:

A) 3 cm B) $\sqrt{12}\ cm$ C) $\sqrt{18}\ cm$ d) 9 cm E) 18 cm

Questão 3) ((M11266S1 – Saerjinho) A distância entre os pontos P = (-1,4) e Q = (1,-4) é:

A) 2 B) $\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{17}$ E) 68

Gabarito: 1) c, 2) c e 3)b

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi propor atividades a fim de introduzir a Geometria Analítica a alunos que estejam cursando as séries finais do Ensino Fundamental. Apresentamos o assunto de maneira simplificada e lúdica, usando jogos e atividades motivadoras como atrativos, para que o aluno consiga assimilar de maneira mais fácil e prazerosa o assunto em questão.

O tema Geometria Analítica foi escolhido dado a sua importância para o entendimento de conteúdos que serão abordados em Álgebra e Geometria nas séries seguintes. Durante todo o Ensino Médio o aluno será desafiado a pensar graficamente. Uma vez que haja um contato prévio com assuntos relacionados à Geometria Analítica, esperamos que o aluno possa lidar com temas mais complexos de forma mais natural.

Inicialmente, as atividades foram pensadas para serem vinculadas às séries específicas. Porém as atividades foram repensadas visando dar mais flexibilidade ao professor e pensando no conteúdo apresentado para turma até o momento da aplicação. É de grande importância que os assuntos sejam aplicados na ordem sugerida, visto que cada atividade depende do conteúdo abordado na atividade anterior.

Esses jogos foram aplicados com alunos de séries fora do objetivo do trabalho e com pessoas fora do ambiente escolar. Todos que participaram demostraram grande empolgação ao realizá-los. Com isso, acredito que todos os jogos serão de fácil aceitação ao nosso público alvo.

A data e o tempo de elaboração desta dissertação se mostraram opostas quanto ao calendário escolar da rede estadual, dificultando sua aplicação em escolas cujos alunos estavam cursando o segundo segmento do Ensino Fundamental. Para a aplicação das atividades propostas nessa pesquisa chegou a ser solicitada, em determinadas escolas, a participação de alguns alunos. Porém, devido ao início das aulas e calendário de provas não foi possível tal participação. Desse modo, não foi mensurado o tempo necessário para aplicação de cada atividade. Sugerimos que sejam necessários três tempos de 50 minutos. É importante ressaltar, que o tempo pode variar de acordo com o público alvo. Cada jogo possui sua velocidade e dinâmica, que precisam ser avaliadas pelo professor no momento de aplicação.

Ao longo da elaboração do trabalho, verificou-se que em alguns momentos serão necessárias algumas revisões de conteúdos prévios necessários para a aplicação das atividades. Existem temas pouco abordados no Currículo Mínimo e, devido a vários fatores, são classificados como menos importantes. Por muitas vezes esses temas não são apresentados da melhor forma para os alunos. Um outro fator problemático é a falta de afinidade com a

Geometria, que é extremamente necessária para o entendimento dos conceitos abordados. A Geometria muitas vezes é passada de forma superficial aos alunos.

Visto isso, cada atividade visa suprir as deficiências acima colocadas. As atividades foram feitas de maneira que os alunos possam construir determinados conceitos utilizando a Geometria Analítica como alicerce.

Durante o processo pudemos buscar novas maneiras de apresentar aos alunos assuntos de grande complexidade, o que foi um grande desafio e crescimento profissional. A construção dos jogos e das atividades imaginando a expressão de cada aluno foi algo motivador e que trouxeram grande prazer, nos fazendo repensar a maneira de abordar diversos assuntos em aula.

O assunto Geometria Analítica parece ser inesgotável. A sugestão para um futuro trabalho seria o desenvolvimento de atividades semelhantes envolvendo quatro temas, possíveis de serem trabalhados nas séries finais do Ensino Fundamental que são: Circunferências; Retas Perpendiculares e Paralelas; Distâncias entre Ponto e Reta e Coeficiente Angular de uma Reta.

REFERÊNCIAS

Boyer, Carl B. **História da Matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – PCN's 5a a 8a séries. Volume 03 – Matemática. Brasília, ano. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/ arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 24/03/18.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta preliminar. Segunda versão revista. Brasília, 2016. Disponível em:<http://basenacionalcomum.mec.gov. br/a base/>. Acesso em: 24 mar. 2018.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM 2017.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP., 2000. Disponível em:< https://pedagogiaaopedaletra.com/wp-content/uploads/2012/10/O-CONHECIMENTO-MATEM%C3%81TICO-E-O-USO-DE.pdf>. Acesso em: 03 de abr. 2018

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar**. São Paulo: Atual, 1985.

LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

RIO DE JANEIRO. Secretaria de Estado de Educação. **Currículo Mínimo 2012 Matemática**. Rio de Janeiro: SEEDUC, 2012. Disponível em:<http://www.rj.gov.br/web/ seeduc/exibeconteudo?article id = 5776111>. Acesso em: 24 mar. 2018.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, Dirceu Lima dos; LAVAL, Anderson. Uma história concisa da Geometria analítica. In: DANYLUK, Ocsana Sônia (Org.). **História da Educação Matemática** – escrita e reescrita de histórias. Porto Alegre: Sulina, 2012.

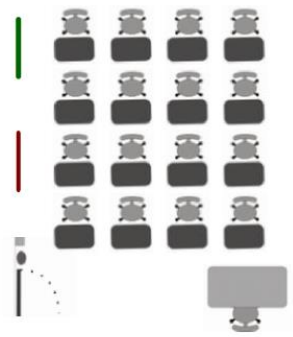
APÊNDICE A – ATIVIDADE 1

Escola		
Nome:		
Turma:	Série:	Data:

A Sala de Aula de Alice

A turma de Alice tem 16 alunos, contando com ela. A escola organiza as salas de aula em 4 fileiras verticais de 4 carteiras cada uma, como mostra a figura abaixo. A fileira 1 é a primeira a partir da parede que contém o mapa, a fileira 2, a segunda, e assim, sucessivamente. Da mesma maneira, numa determinada fileira, a posição 1 é a dada pela primeira carteira localizada a partir da mesa do professor, a posição 2, é dada pela segunda carteira, e assim sucessivamente.

Figura 6 – Sala de aula de Alice



Fonte: O autor, 2018

Como cada carteira possui uma localização em sala de aula, a professora combinou com os alunos que vai localizá-los indicando primeiro a sua fileira e logo após a posição da sua carteira na fileira. Ela vai usar essas duas informações escritas entre parênteses, desta forma: (fileira; carteira).

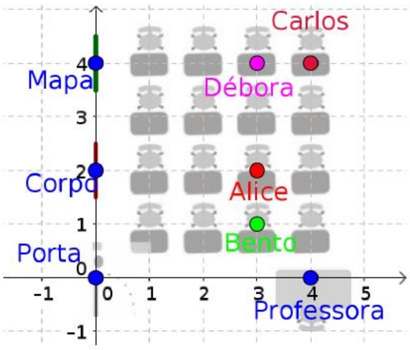
Em Matemática, essa forma de escrever recebe o nome de **par ordenado**.

Alice normalmente senta-se na terceira fila, na carteira que se localiza na segunda posição. Podemos então dizer que o par ordenado que representa a localização de Alice é (3,2). Seu amigo Bento, sempre se senta à frente de Alice, na mesma fileira. Logo, o par ordenado que representa a localização de Bento é (3,1).

Carlos e Débora, colegas de Alice, sentam em carteiras localizadas respectivamente em (2,3) e (3,3).

Como faremos para representar por par ordenado a porta, o mapa e a mesa do professor?

Gráfico 4 – Sala de Aula de Alice

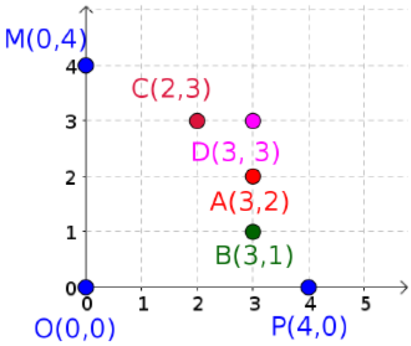


Fonte: O autor, 2018

Note que a contagem das fileiras é realizada a partir da parede que está localizado o mapa. Vamos então dizer que o mapa se localiza na fileira 0. Como todas as carteiras de posições iguais estão alinhadas e, como, de acordo com a figura, o mapa está localizado em frente às carteiras de posição 4, dizemos que o par ordenado que representa a localização do mapa é o (0,4). A mesa do professor está posicionada em frente da fileira 4 e está localizada antes do início da contagem das carteiras em suas fileiras, logo podemos dizer que a mesa do professor está localizada na posição 0. Dizemos que a localização da mesa do professor é o (4,0). Usando o mesmo raciocínio, concluímos que a porta está localizada no (0,0). O que foi dito acima pode ser representado pela figura a seguir.

As informações acima também podem ser representadas apenas por pares ordenado em um plano. Para isso, cada elemento que citamos será representado por pontos, como na figura abaixo

Gráfico 5 – Pontos representando Alice e seus amigos



Fonte: O autor, 2018

Tabela 1 – Legenda de Pontos

Legenda de Pontos	
Alice	A(3,2)
Bento	B(3,1)
Carlos	C(2,3)
Débora	D(3,3)
Mapa	M(0,4)
Mesa do Professor	P(4,0)
Porta	O(0,0)

Fonte: O autor, 2018

Esse plano onde representamos os pares ordenados é denominado Plano Cartesiano.

Agora, em relação a sua sala, combinando com seu professor e colegas de classe qual seria a primeira fileira e representando da mesma forma que a sala de Alice, responda as seguintes perguntas:

1) Qual o par ordenado que representa sua posição?

2) Utilizando o papel quadriculado, represente a sua sala de aula como foi representada a sala de aula de Alice. Logo após, marque os pontos que se pede:

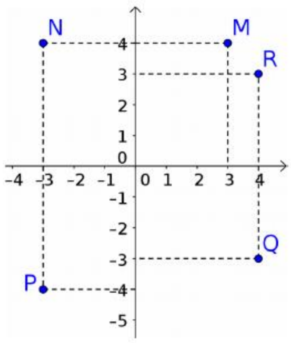
- Marque o ponto que representa a sua localização na sua sala de aula.
- Marque a posição do aluno que está a sua esquerda.
- Marque a posição do aluno que está a sua direita.
- Marque a posição do aluno que está atrás de você.
- Marque a posição do aluno que está a sua frente.
- Marque a posição da porta e a mesa do professor.

Figura 7 – Malha Geométrica

Fonte: O autor, 2018

4.1.4) Questões Propostas

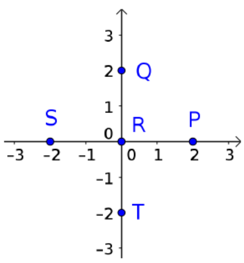
1 -(M100019ES-Saerjinho) O desenho abaixo representa um sistema de coordenadas cartesianas.



Qual é o ponto nesse plano cartesiano de coordenadas (4,-3)?

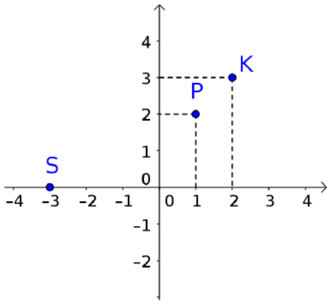
a) M b) N c) P d) Q e) R

2 – (M100135EX -Saerjinho) No plano cartesiano foram marcados cinco pontos.



O ponto que possui abscissa 2 e ordenada 0 é:
a) P b) Q c) R d) S e) T

3- (M100077EX-Saerjinho) No plano cartesiano abaixo foram marcados três pontos



As coordenadas dos pontos S, P e K são, respectivamente,
a) (-3,0); (1,2) e (2,3) b) (-3,0); (1,2) e (3,2) c) (-3,0); (2,1) e (2,3)
d) (0,-3); (1,2) e (3,2) e) (0,-3); (2,1) e (2,3)

APÊNDICE B – ATIVIDADE 2

Escola		
Nome:		
Turma:	Série:	Data:

Localizando pontos e traçando retas no GeoGebra

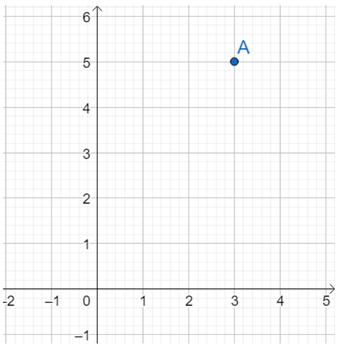
O Aplicativo GeoGebra é usado para o ensino de Geometria. Com ele temos a facilidade de escrever funções e desenhar figuras geométricas.

Localizando um ponto no plano cartesiano usando o GeoGebra

Para nos familiarizarmos com o procedimento, vamos marcar no plano cartesiano com a ajuda do GeoGebra o ponto A = (3,5).

Logo na parte inferior da tela, aparecerá um teclado no qual digitaremos o ponto que queremos. Para isso, utilizaremos o campo “Entrada...”. Vamos tentar:

Procedimento para marcar o ponto A = (3,5) no plano cartesiano
1) Toque no campo “Entrada...” 2) Usando o teclado virtual digite A = (3,5) 3) Toque em “Enter” Fim do procedimento



Da mesma maneira que foi marcado o ponto A = (3,5), pode-se traçar qualquer ponto. Basta que no segundo passo se escreva as coordenadas do ponto a ser marcado.

1) Utilize o mesmo procedimento e marque o ponto B = (-2,-5).

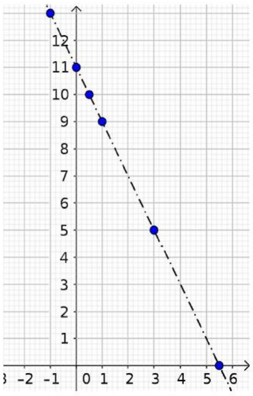
Traçando uma reta usando o GeoGebra

Observe a equação 2x+y=11. Ela possui duas variáveis x e y. Para cada valor que atribuímos a x, substituindo na equação, podemos encontrar um valor para y. Assim:

X	y	Par ordenado (x,y)
0	11	**(0,11)**
1	9	**(1,9)**
-1	13	**(-1,13)**
5,5	0	**(5,5;0)**
12	10	**(12,10)**
3	5	**(3,5)**

Logo, (0,11),(1,9),(-1,13),(5.5,0) , (1/2,10) e (3,5) são algumas soluções da equação 2x+y=11.

Observe que, quando representamos graficamente os pares ordenados obtidos em um sistema cartesiano, esses pontos estão sobre uma mesma reta.



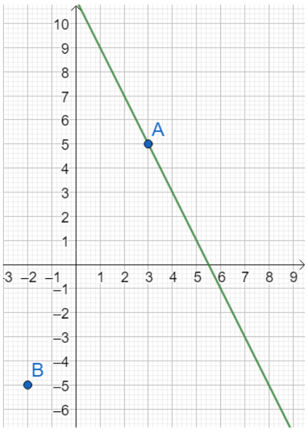
Por outro lado, vamos seguir o roteiro descrito abaixo:

Quadro 2 Procedimento para traçar a reta f: 2x+y=11

Procedimento para traçar a reta f: 2x+y=11
1) Toque no campo “Entrada...”
2) Com a ajuda do teclado virtual, escreva a equação f: 2x+y=11
3) Toque no botão “Enter”.
Fim do Procedimento

Fonte: O autor, 2018

Resposta:



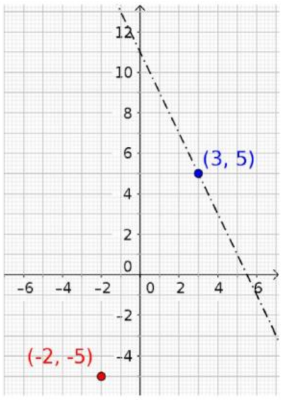
Observe que a figura que aparece na tela é de uma reta.

Isso nos leva a inferir que a representação gráfica de uma equação do primeiro grau com duas variáveis é uma reta. Esse estudo será justificado algebricamente mais adiante no Ensino Médio.

Da mesma maneira que traçamos a reta f: 2x+y=11, pode-se traçar qualquer reta, basta que no segundo passo se escreva a equação da reta a ser traçada.

Assim, vamos identificar uma reta à uma equação do primeiro grau com duas variáveis. Portanto, as coordenadas de um ponto na reta satisfazem à sua equação e vice-versa.

Na figura abaixo percebe-se que a reta f não passa pelo ponto (-2,-5). Portanto, (-2,-5) não é uma das soluções dessa equação.



Note que, se tomamos x=-2 e o substituímos na equação 2x+y=11, encontramos y=15. Assim, o par ordenado (-2,5) não satisfaz à equação.

O ponto A = (3,5) pertence a reta f: 2x+y=11, logo, o par ordenado (3,5) é uma das soluções de f: 2x+y=11, por sua vez, o ponto B = (-2,-5) não pertence a reta f: 2x+y=11, assim, o par ordenado (-2,-5) não representa uma solução de f: 2x+y=11.

2) Seguindo esse raciocínio, vamos verificar, sem a ajuda do GeoGebra, se os pontos A e B pertencem às retas. Após verifique no GeoGebra o resultado:

g: 2x y =1 i: -x + y=2

3) Qual o ponto de abcissa 4 que pertence a reta t: 2x-y=1? Utilize o GeoGebra para conferir sua resposta.

4) Encontre dois pontos que pertençam a s: -3x+y= 4. Utilize o GeoGebra para conferir sua resposta.

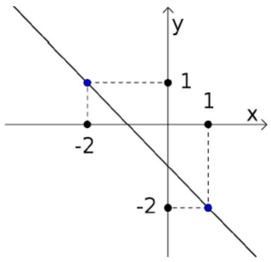
4.2.4) Questões Propostas

Sobre esse assunto, sugerimos três questões. Por sugestão, as questões podem ser feitas através e corrigidas logo com toda turma. São questões do terceiro ano do ensino médio, visto que o assunto Geometria Analítica é oferecido nessa série. A essa altura espera-se que o aluno relacione uma equação do primeiro grau com duas incógnitas como uma reta. Nas questões a seguir, espera-se que o aluno utilize o processo de substituição para encontrar as respostas.

1) (M11114SI-Saerjinho) A Equação da reta que passa pelos pontos M e N de coordenadas (0,3) e (-3,3), respectivamente:

a) y=x+3 b) x=-3c) y=-2x+3 d) y=2x+3 e) y=3

2) (PAMA11225MS-Saerjinho) Observe a função representada no gráfico abaixo.



a) y-x=0 b) x-y= 1 c) x+y=1 d) x+y=-1 e) x-y=-1

3) (M11422SI-Saerjinho) Os pontos P(4,7), Q(7,10), R(5,6) e S(2,3) são vértices consecutivos de um paralelogramo PQRS. A equação da reta suporte da diagonal PR, desse paralelogramo é:

a) x+y= 11 b) -x+y= 1 c) y=0,14x+15 d) x-y = -1 e) 2x-y=4

APÊNDICE C – ATIVIDADE 3

Escola		
Nome:		
Turma:	Série:	Data:

Transporte sobre Retas

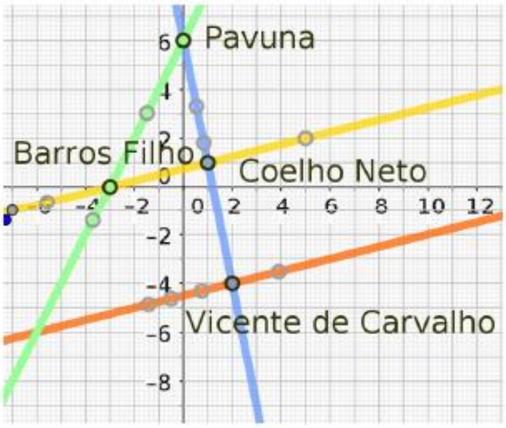
Para entender como representamos a solução de um sistema de equações do primeiro grau de duas incógnitas na forma gráfica, vamos tomar como analogia o sistema de transporte da região metropolitana do Rio de Janeiro.

A figura abaixo representa uma parte de um mapa esquemático da rede metropolitana de transporte público, com ano-base de 2016, divulgado pela mobiRio. O trecho mostra um pequeno pedaço da Trans Brasil, que está em amarelo, da Trans Carioca, em laranja, o ramal de trem de Belford Roxo, que está em verde musgo, e a linha 1 do metrô, que está em azul.
As estações da Trans Brasil e Trans Carioca são de BRT, Bus Rapid Transit. O BRT é um tipo de sistema de transporte público baseado no uso de ônibus.

Figura 1 – Parte do Mapa mobiRio

Fonte: mobiRio, 2018

Nessa atividade vamos transferir esse pedaço do mapa para o plano cartesiano. Para isso, vamos considerar que cada reta representará uma Via e cada ponto destacado uma estação.

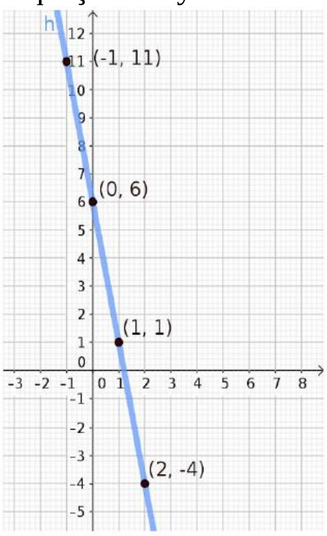


Vias	Representação	Estações	Representação
Trans Brasil (amarelo)	-x+4y=3	Pavuna	(0,6)
Trans Carioca(laranja)	-2x+8y=36	Coelho Neto	(1,1)
Metrô Linha 1 (azul)	5x+y=6	Barros Filho	(-3,0)
Ramal Belford Roxo (verde)	-6x+3y=18	Vicente de Carvalho	(2,-4)

Seja a equação do 1º grau de duas incógnitas que representa o Metrô Linha 1:

$$5x + y = 6$$

Sabe-se que, geometricamente, as soluções de uma equação do 1º grau de duas incógnitas estão alinhadas. Além disso, qualquer ponto que pertença a uma reta, descrita através de uma determinada equação, será uma solução dessa equação. Destacamos no gráfico abaixo alguns pontos que pertencem à reta de equação 5x+y=6:



Logo, os pares ordenados (-1, 11), (1, 1), (0, 6), (2, -4) representam algumas das soluções de 5x+y=6.

Voltando ao mapa da figura 1, notamos que cada estação é representada por um ponto da reta, que por sua vez representa a via que contém esses pontos. Fica fácil ver que Coelho

Neto , Pavuna e Vicente de Carvalho pertencem a Linha 1 do Metrô, que estão representados, respectivamente, pelos pontos (1, 1), (0, 6), (2, -4) e pela equação 5x+y=6.

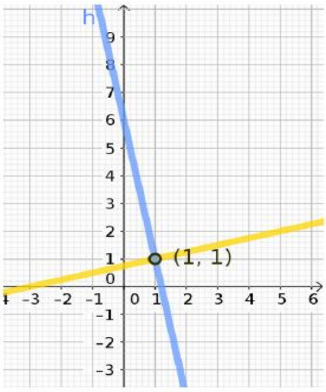
Observe, por exemplo, que de qualquer estação que se localize na linha 1 do Metrô é possível chegar numa estação do BRT localizada na Trans Carioca fazendo uma única baldeação. Isso acontece porque tais vias possuem uma estação em comum, a de Coelho Neto.

Em termos da matemática, dizemos que as retas 5x+y=6 e -x+4y=3 possuem um ponto em comum, a saber o ponto (1,1), ou seja, (1,1) satisfaz as duas equações. Dessa forma, o sistema

$$\begin{cases} 5x+y=6 \\ -x-4y=3 \end{cases}$$

possui uma única solução dada por (1,1).

Veja que se representarmos as duas equações graficamente então as duas retas são concorrentes.



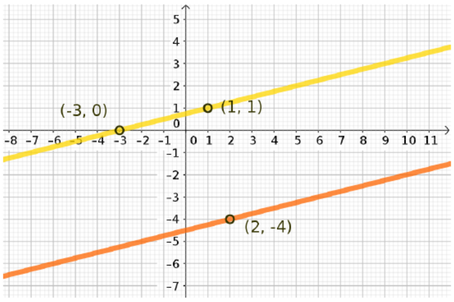
Portanto, quando existir, a solução gráfica ou geométrica de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas é o ponto de intersecção das duas retas correspondentes às duas equações do sistema.

Quando um sistema é representado graficamente por duas retas concorrentes o classificamos como um Sistema Possível e Determinado. Nesse caso, ele possui uma única solução.

Voltando à figura 1, percebemos que não é possível fazer uma única baldeação entre quaisquer estações da Trans Brasil e da Trans Carioca. Tomemos, por exemplo, as estações de Barros Filho e Vaz Lobo. Isso acontece pois não existe nenhuma estação em comum entre elas nesse trecho.

Vamos representar geometricamente o sistema com as duas equações que representam essas vias.

$$\begin{cases} -x+4y=7 \\ -2x+8y=36 \end{cases}$$

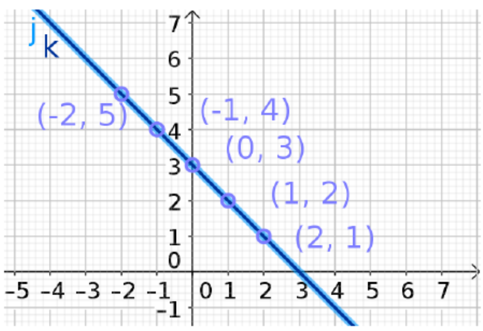


Veja que ao representarmos as duas equações graficamente as duas retas não possuem pontos em comum, ou seja, são paralelas. Podemos concluir então que se duas retas não possuem pontos em comum então as duas equações que as representam não possuem soluções comuns. Logo, não existe uma solução para esse sistema, assim, dizemos que esse sistema é um Sistema Impossível.

A figura 2 abaixo representa outra parte do mapa rodoviário. Nela está representada duas linhas do metrô, Linha 1 e Linha 2, num trecho do bairro da Glória até o bairro de Botafogo. Elas compartilham todas as paradas e estações. Os mesmos trilhos do Metrô são utilizados, ou seja, se um passageiro quiser ir do Catete ao Flamengo ele pode tomar qualquer uma das linhas e conseguirá chegar ao seu destino.

Figura 2 – Parte do mapa da mobiRio

De forma semelhante a que fizemos no exemplo anterior, a Linha 1, representada pela cor azul clara, foi descrita sob a reta x+y=3 e a Linha 2, representada pela cor azul escura, foi descrita sob a reta 2x+2y=6. Cada ponto que representa uma estação satisfaz às duas equações.



Vias	Representação
Linha 1	j: x+y=3
3qLinha 2	k: 2x+2y=6

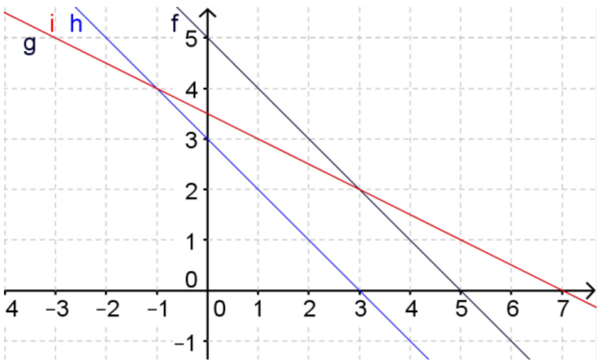
Estações	Representação
Glória	(-2,5)
Catete	(-1,4)
Lgo do Machado	(0,3)
Flamengo	(1,2)
Botafogo	(2,1)

Observemos que toda estação da linha 1 é estação da Linha 2, e vice-versa, além disso, ao representarmos, graficamente, as duas equações referentes às Linhas 1 e 2, as duas retas ficam uma sobreposta a outra, ou seja, tratam-se de retas coincidentes.

Em linguagem matemática, isso implica que o sistema possui infinitas soluções. Dizemos que esse sistema é um Sistema Possível Indeterminado.

Vamos praticar um pouco!

2) Abaixo temos 4 equações e suas representações gráficas. Usando o que foi observado na atividade, classifique os sistemas formados pelos pares equações usando as siglas: SPD para sistema possível e determinado, SPI para sistema possível e indeterminado e SI para sistema impossível



f: x + y = 5
g: x + 2y = 7
h: x + y = 3
i: 2x + 4y = 14

	f : x+y= 5	**g : x + 2y = 7**	**h : x + y = 3**	**i : 2x + 4y = 14**
f : x+y=5	**X**			
g : x + 2y = 7		**X**		
h : x + y = 3			**X**	
i : 2x + 4y = 14				**X**

3) Numa equação os números escritos na frente das incógnitas são chamados de coeficientes. Utilizaremos esses números para analisar os sistemas de forma mais prática. Vamos a seguinte atividade:

c) Complete a tabela a seguir utilizando para indicar cada coeficiente "a" para o coeficiente que está junto ao "x", "b" para o coeficiente que está junto ao "y" e "c" para o termo independente, ou seja, o número que aparece sozinho, sem nenhuma incógnita vinculada.

	a_f	b_f	c_f
f : x + y = 5			
	a_g	b_g	c_g
g : x + 2y = 7			
	a_h	b_h	c_h
h : x + y = 3			
	a_i	b_i	c_i
i : 2x + 4y = 14			

Para classificar um sistema podemos utilizar esses coeficientes. Em Geometria Analítica, os coeficientes são muito importantes pois eles determinam a posição da reta representada pela equação. Analisando a razão entre os coeficientes, podemos classificar um sistema. Veja a seguir.

d) Usando as informações que encontramos na tabela do exercício (1) e as informações que encontramos na tabela do exercício (2.a), complete:

Sobre f e g:

$\frac{a_f}{a_h}$	Os valores são = ou ≠ ?	$\frac{b_f}{b_h}$	Os valores são = ou ≠ ?	$\frac{c_f}{c_h}$	Classificação

Sobre f e h:

$\frac{a_f}{a_h}$	Os valores são = ou ≠ ?	$\frac{b_f}{b_h}$	Os valores são = ou ≠ ?	$\frac{c_f}{c_h}$	Classificação

Sobre i e g:

$\frac{a_f}{a_h}$	Os valores são = ou ≠ ?	$\frac{b_f}{b_h}$	Os valores são = ou ≠ ?	$\frac{c_f}{c_h}$	Classificação

Responda: Comparando as seis tabelas acima, utilizando a razão entre os coeficientes, o que podemos concluir sobre a classificação dos sistemas¿

c) Agora, complete o texto abaixo:

Considerando o sistema linear 2x2:

(S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Podemos classificar o sistema (S) como indeterminado se existirem ______________ soluções, impossível se existirem _____________ soluções ou possível determinado se existir apenas ______________ solução.

Para que o sistema seja considerado possível e determinado:

$\frac{a'}{a}$ ______ $\frac{b'}{b}$.

Para que o sistema seja considerado possível e indeterminado

$\frac{a'}{a}$ ______ $\frac{b'}{b}$ ______ $\frac{c'}{c}$

Para que o sistema seja considerado impossível possível

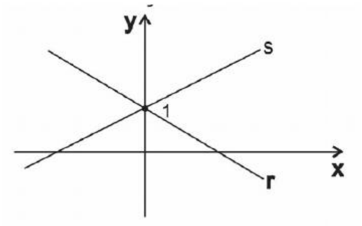
$\frac{a'}{a}$ ______ $\frac{b'}{b}$ ______ $\frac{c'}{c}$

Questões Propostas

Sobre esse assunto, sugerimos a questão abaixo. Por sugestão, a questão pode ser feitas através de desafio e corrigidas com toda turma. O Objetivo da questão é que o aluno possa massificar o ponto em comum entre as duas retas como resolução do sistema, havendo mais de uma estratégia para resolução da mesma.

1) (PAMA11233MS– Saerjinho) Observe a representação da interseção de duas retas r e s abaixo.

Gráfico 23 – Questão 1, atividade 3



Fonte: SEEDUC-RJ, 2012

Dentre os sistemas abaixo, qual tem sua solução representada acima?

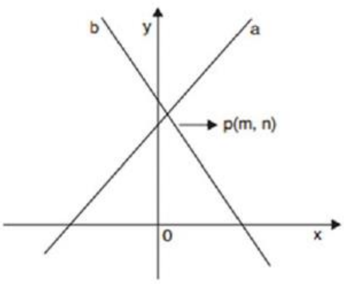
a) $\begin{cases} x-y=-1 \\ -x-y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 3x+y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-y=-1 \\ 3x+y=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

A próxima questão trata-se de uma questão sugerida no material de apoio pedagógico oferecido pela SEEDUC-RJ (http://www.conexaoescola.rj.gov.br/site/arq/matematica-regular-orientacoes-pedagogicas-3s-4b.pdf) pág 7

2) (Banco de Questões do SARESP) As duas retas a e b, representadas na fi gura abaixo, têm as seguintes equações: a: -x+y = 5 b: 2x+y = 11 O ponto P (m,n) é intersecção das duas retas. O valor de m -n é igual a:

Gráfico 24 – Questão 2, atividade 3

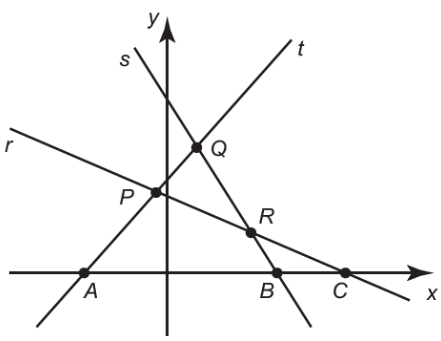


Fonte: SARESP, 2012

(A) 1 (B) −2 (C) −5 (D) −7

3) (Enem 2016 – 2ª Azul – 160) Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A, B e C s pontos de intersecções dessas retas com o eixo x.

Gráfico 25 – Questão 3, atividade 3



Fonte: ENEM, 2016

Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que:

a) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.

b) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.

c) possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.

d) não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.

e) possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.

APÊNDICE D – ATIVIDADE 4

Escola		
Nome:		
Turma:	Série:	Data:

O Instinto Matemático das Formigas

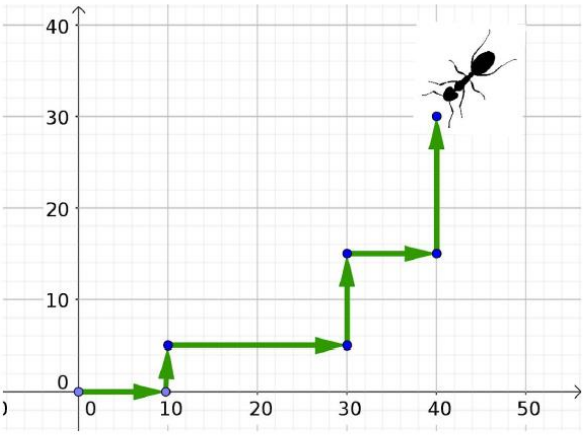
“Várias espécies de formiga se guiam até seus destinos, seguindo odores e pistas químicas deixadas por elas mesmas ou por outros membros da colônia. Mas esse não é o caso da formiga do deserto tunisiano. (…) O único modo que pode realizar essa façanha diária é pelo uso do cálculo de posição.

Wehner e Srinivasan (cientistas) descobriram que, se deslocassem uma dessas formigas do deserto imediatamente depois de ter encontrado seu alimento, ela se voltaria exatamente para a direção que deveria tomar para encontrar seu ninho caso não tivesse sido deslocada, e além do mais, após cobrir a distância precisa que a levaria para casa, a formiga pararia e começaria uma busca confusa e desnorteada por seu ninho. Em outras palavras, ela conhece precisamente a direção que deve seguir para o retorno e sabe exatamente o quanto andar, ainda que esse caminho em linha reta não tenha nada a ver com o ziguezague aparentemente aleatório que ela fez em sua busca por comida.

Um estudo recente mostrou que a formiga do deserto mede distâncias contando passo. Ela “sabe” qual é o comprimento de um único passo, e assim pode calcular a distância percorrida em qualquer linha reta multiplicando tal comprimento pelo número total de passos.

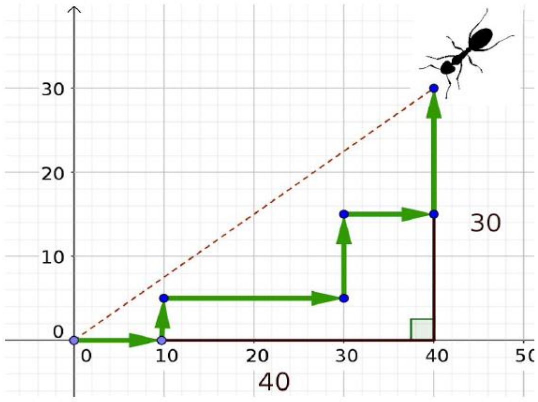
É claro que ninguém está sugerindo que essa criatura minúscula esteja executando multiplicações de modo como ser humano faria, (…) A formiga do deserto tunisiano simplesmente faz o que lhe é natural – segue seus instintos, que resultam de centenas de milhares de anos de evolução.”(DEVLIN, 2009, p. 45).Após ler o texto, vamos imaginar que esta mesma formiga tunisiana está em um deserto plano. Vamos posicionar o plano cartesiano de modo que a origem coincida com a posição do ninho e que a escala utilizada dos eixos seja dada em função do comprimento dos passos da formiga. A partir da origem, a formiga pode se movimentar para todas as direções (Norte, Sul, Leste e Oeste).

Imagine que essa formiga, após a procura de comida, sempre caminhando para o norte ou para leste, consegue encontrar alimento em um ponto que fica a 40 passos para Leste e 30 passos para o Norte, conforme a imagem abaixo.

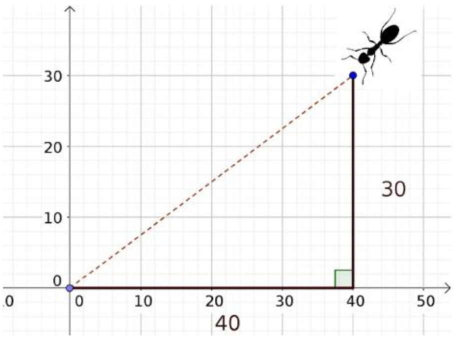


Mas qual seria a distância, em passos, do alimento encontrado até o ninho da formiga?

Se a formiga de alguma forma consegue contar quantos passos foram dados para o leste e para o norte, ela intuitivamente consegue fazer um cálculo complexo. Perceba, que se somarmos a quantidade de passos percorridas para o leste e a quantidade de passos percorrida para o norte e representarmos nos eixos formaremos um triângulo retângulo no qual a hipotenusa será exatamente o caminho de volta da formiga para o ninho.



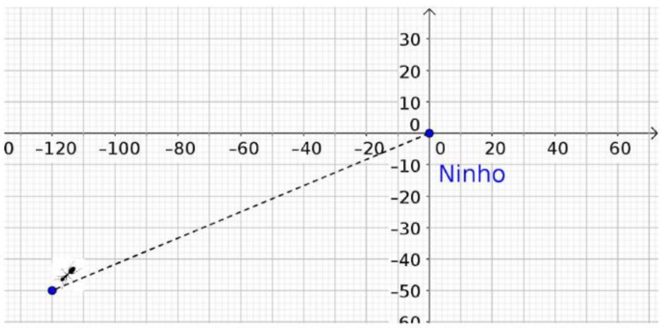
A medida da hipotenusa é a distância entre o alimento e o ninho. Ou seja, para se saber a menor distância do alimento até o ninho é preciso, utilizando teorema de Pitágoras, descobrir o valor da hipotenusa. Observe a figura e o cálculo abaixo:



$d^2=30^2+40^2$
$d^2=900+1600$
$d^2=2500$
$d=\sqrt{2500}$
$d=500$

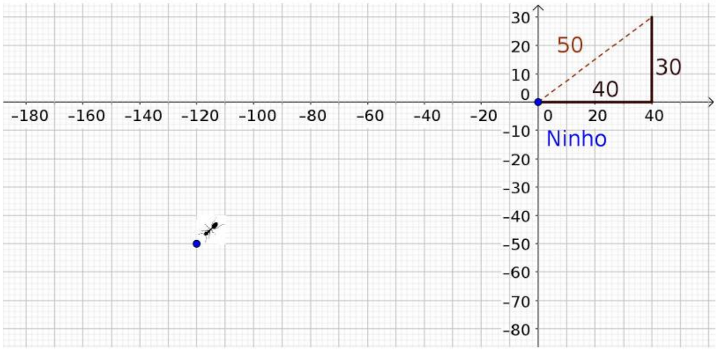
Um dos experimentos, envolvia tirar a formiga do local onde ela encontrou o alimento e a posicionar em outro lugar. O texto fala, que a formiga obedecia a mesma direção ficando perdida ao cumprir a distância necessária. Digamos que isso foi feito. Após buscar o alimento a formiga é levada a uma posição que fica, em relação ao ninho, a 120 passos para oeste e 50 passos para sul, ou seja, ela foi deslocada 160 passos para oeste e 80 passos a sul.

1) Com a ajuda da figura abaixo, calcule a distância, em passos, que a formiga deve percorrer para que encontre seu ninho? Supondo que ela consiga encontrar a direção certa.

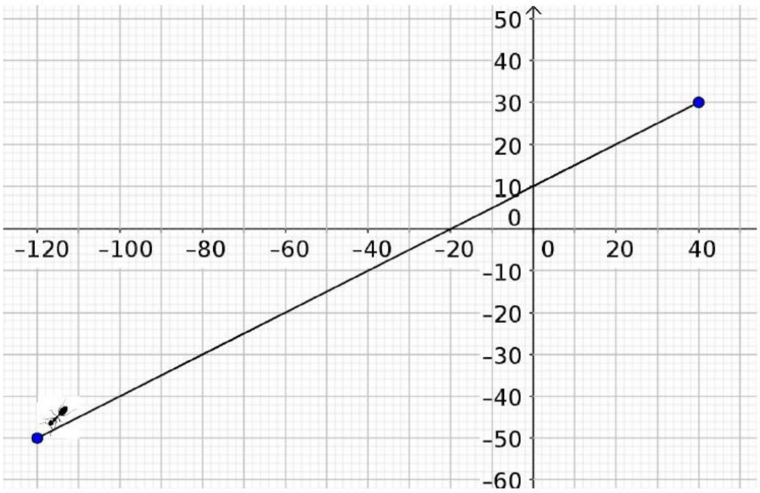


2) Ao ser colocada em no ponto (120,50), andará 50 passos na direção errada, pois em seu "raciocínio" ela ainda está no ponto (40,30), assim, a formiga tomaria uma direção errada

achando que está no caminho correto. Com a ajuda da figura abaixo, indique em qual ponto a formiga pararia antes de notar que estava perdida.



3) Para a experiência, a quantos passos de distância a formiga foi deixada, em relação ao local onde estava o alimento? Utilize a figura abaixo para encontrar a melhor forma de encontrar essa distância. Discuta com seus colegas chegando a melhor conclusão.



Onde,

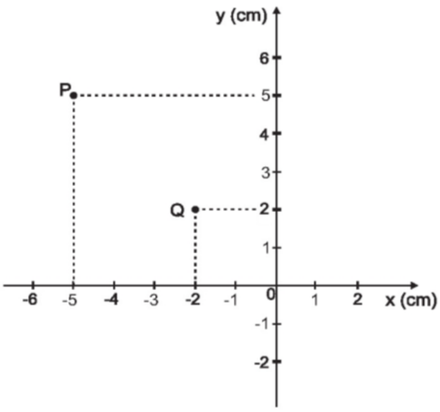
$$d(A,B) = \sqrt{(40-(-120))^2 - (30-(-50))^2} = \sqrt{25600 + 6400} = 80\sqrt{5}$$

Questões Propostas1) (M120007E4 – Saerjinho) O mapa abaixo foi desenhado sobre um plano cartesiano graduado em centímetros. Nesse plano, a cidade de São Paulo encontra se na origem dos eixos coordenados e Vitória no ponto de coordenadas (6,3)

Nesse mapa, qual é a menor distância, aproximadamente, entre São Paulo e Vitória? (Considere $\sqrt{5} \simeq 2{,}2$)

A)5,2 cm B) 6,6 cm C) 9,0 cm D) 22,5 cm E) 45,0 cm

2) (M12048481 – Saerjinho) Observe os pontos P e Q no plano cartesiano abaixo.



A distância entre esses dois pontos é:

A) 3 cm B) $\sqrt{12}$cm C)$\sqrt{18}$ cm d) 9 cm E) 18 cm

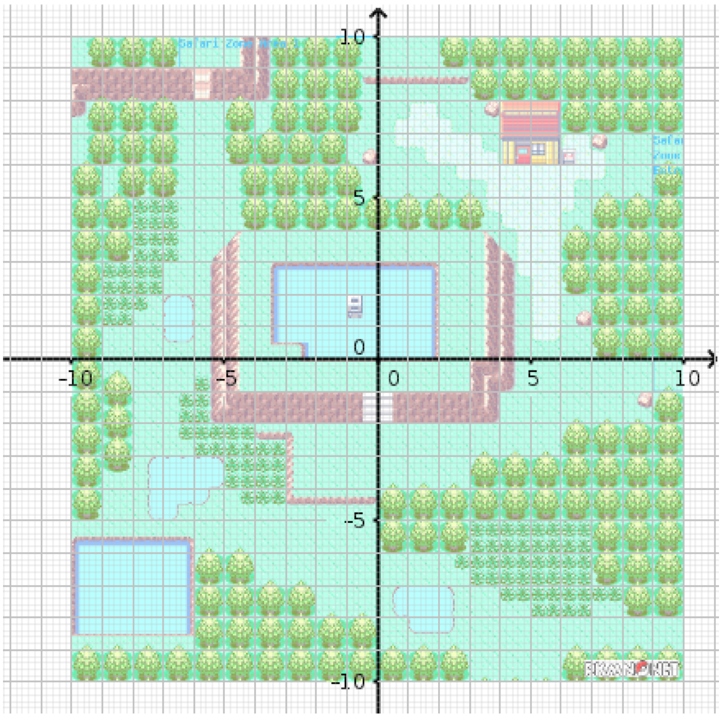
3) ((M11266S1 – Saerjinho) A distância entre os pontos P = (1,4) e Q = (1, 4) é:

A) 2 B)$\sqrt{10}$ C)$2\sqrt{5}$ D)$2\sqrt{17}$ E) 68

APÊNDICE E – CARTÕES JOGO POKÉMON

Pokémon	Localização
 Sandshrew	(,)
 Pikachu	(,)
 Bulbasaur	(,)
 Charmander	(,)
 Jigglypuff	(,)

Pokémon	Localização
 Rattata	(,)
 Eevee	(,)
 Squirtle	(,)
 Zubat	(,)
 Onix	(,)



APÊNDICE F – CARTAS DO JOGO MATEMÁTICO: CAÇA AOS PONTOS

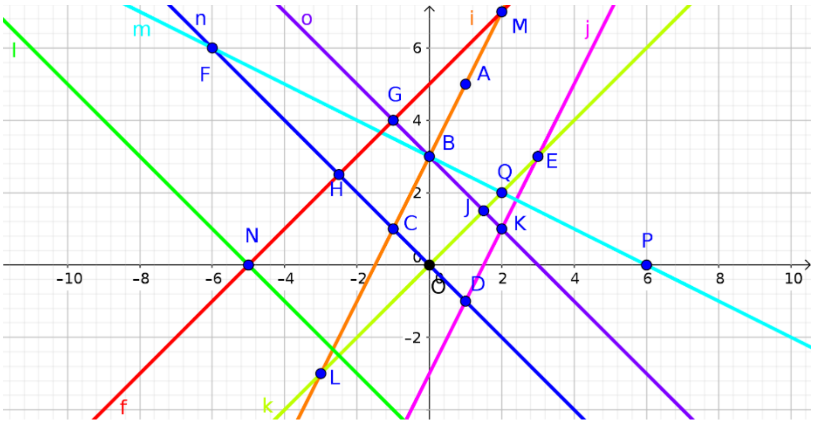
f: $-x+y=5$	i: $-2x + y = 3$	j: $-2x + y = -3$	k: $-x+ y =0$
l: $-x + y = 5$	m: $-x - 2y = -6$	n: $y +x = 0$	o: $y + x= 3$

A = (1,5)	B = (0,3)	C = (-1,1)	D = (1,-1)
E = (3,3)	F = (-6,6)	G = (-1,4)	H = (-2.5,2.5)
J = (1.5,1.5)	K = (2,1)	L = (-3,-3)	M = (2,7)

N = (-5,0)	O = (0,0)	P = (6,0)	Q = (2,2)
R = (8,13)			

APÊNDICE G – PONTOS E RETAS DO JOGO CAÇA AOS PONTOS

Pontos		Retas
• A = (1, 5) • B = (0, 3) • C = (-1, 1) • D = (1, -1) • E = (3, 3) • F = (-6, 6) • G = (-1, 4) • H = (-2.5, 2.5)	• J = (1.5, 1.5) • K = (2, 1) • L = (-3, -3) • M = (2, 7) • N = (-5, 0) • O = (0, 0) • P = (6, 0) • Q = (2, 2)	• f:-x+y=5 • i: -2x + y = 3 • j: -2x + y = -3 • k: -x + y = 0 • l: -x y = 5 • m: -x 2y = -6 • n: x + y = 0 • o: x + y = 3

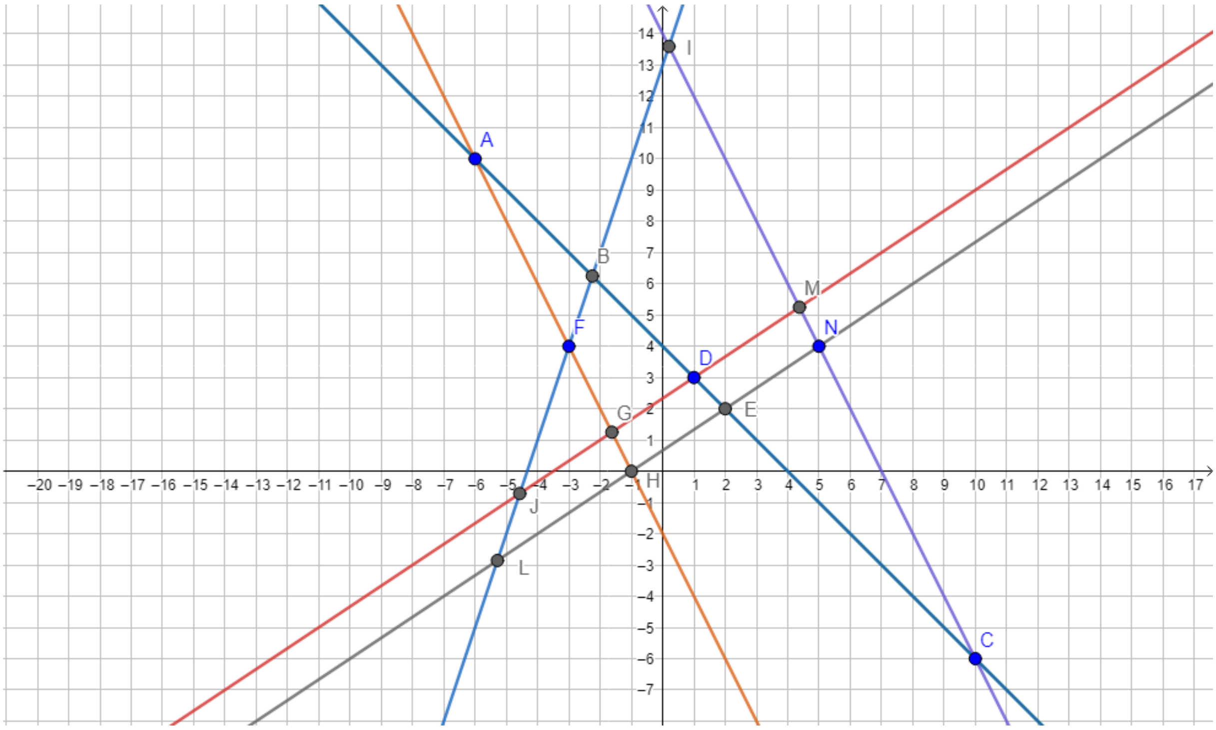


APÊNDICE H CARTÕES REPRESENTANDO AS RETAS E DICAS

Pista 1 Existem pontos na reta $x + y = 4$ Existem 2 pontos no primeiro quadrante.
Pista 2 Existem pontos na reta $3x\ y = 13$ Todos os pontos (x,y) estão localizadas de maneira que x e y sempre sejam números inteiros.
Pista 3 Existem pontos na reta $2x + 2y = 8$ Não existem pontos localizados no eixo das abcissas.
Pista 4 Existem pontos na reta $2x\ 3y = 7$. Nenhum ponto possui coordenadas onde a abcissa é igual a ordenada.
Pista 5 Existem pontos na reta $2x + y = 2$ Existem 1 ponto no quarto quadrante.
Pista 6 Existem pontos na reta $2x + y = 14$ Não existem pontos no terceiro quadrante.
Pista 7 Existem pontos na reta $2x\ 3y = 2$ Existem 2 pontos no segundo quadrante.

APÊNDICE I – PONTOS E RETAS DO JOGO

Pontos		Retas
• A = (-6, 10)	• H = (-1, 0)	• f: x + y = 4
• B = (-2.25, 6.25)	• I = (0.2, 13.6)	• i: 2x 3y = -7
• C = (10,-6)	• J = (-4.57, -0.71)	• j: 2x 3y = -2
• D = (1, 3)	• L = (-5.29, -2.86)	• l: 2x + y = -2
• E = (2,2)	• M = (4.38, 5.25)	• m: 2x + y = 14
• F = (-3, 4)	• N = (5, 4)	• n: 3x y = -13
• G = (-1.63, 1.25)		• o: 2x+2y=8



APÊNDICE J – CARTAS JOGO DA VIDA ACADÊMICA

◆ **5 Pontos** (2,7) **Curso de Chinês** *Este curso pode ser feito em sem nenhum pré-requisito*	◆ **5 Pontos** (2,-7) **Curso de Alemão** *Este curso pode ser feito em sem nenhum pré-requisito*	◆ **5 Pontos** (-2,7) **Curso de Inglês** *Este curso pode ser feito em sem nenhum pré-requisito*	◆ **5 Pontos** (-2,-7) **Curso de Francês** *Este curso pode ser feito em sem nenhum pré-requisito*
◆ **5 Pontos** (13,-15) **Curso Técnico em Matemática** *Este curso pode ser feito em sem nenhum pré-requisito*	◆ **5 Pontos** (-13,15) **Curso Técnico em Comunicação** *Este curso pode ser feito em sem nenhum pré-requisito*	◆ **5 Pontos** (-13,-15) **Curso Técnico em Biologia** *Este curso pode ser feito em sem nenhum pré-requisito*	◆ **5 Pontos** (13,15) **Curso Técnico em Informática** *Este curso pode ser feito em sem nenhum pré-requisito*
◆ **10 Pontos** (-24,-10) **Intercâmbio na Alemanha** ***Pré-requisito*** ***Falar Alemão***	◆ **10 Pontos** (-24,10) **Intercâmbio na França** ***Pré-requisito*** ***Falar Francês***	◆ **10 Pontos** (24,10) **Intercâmbio nos E.U.A.** ***Pré-requisito*** ***Falar Inglês***	◆ **10 Pontos** (24,-10) **Intercâmbio na China** ***Pré-requisito*** ***Falar chinês***

20 Pontos

(35,0)

Curso no Exterior

Pré-requisito
Falar qualquer uma das línguas oferecidas.

20 Pontos

(-35,0)

Curso no Exterior

Pré-requisito
Falar qualquer uma das línguas oferecidas.

1 Ponto

(-9,-4)

Trabalho: OfficeBoy

Pré-requisito
Nenhum
Ao trabalhar, some no "Saldo de Distâncias" a distância percorrida desde seu último emprego.

1 Ponto

(9,4)

Trabalho: Entregador de Jornal

Pré-requisito
Nenhum
Ao trabalhar, some no "Saldo de Distâncias" a distância percorrida desde seu último emprego.

1 Ponto

(9,-4)

Trabalho: Atendente de Loja Informática

Pré-requisito
Nenhum
Ao trabalhar, some no "Saldo de Distâncias" a distância percorrida desde seu último emprego.

1 Ponto

(-9,4)

Trabalho: Zelador de Zoológico

Pré-requisito
Nenhum
Ao trabalhar, some no "Saldo de Distâncias" a distância percorrida desde seu último emprego.

5 Pontos

(18,-5)

Trabalho: Técnico de Informática

Pré-requisito
Técnico em Informática
Ao trabalhar, some no "Saldo de Distâncias" a distância percorrida desde seu último emprego.

5 Pontos

(18,5)

Trabalho: Estagiário em um Jornal

Pré-requisito
Técnico em Comunicação
Ao trabalhar, some no "Saldo de Distâncias" a distância percorrida desde seu último emprego.

5 Pontos

(-18,5)

Trabalho: Técnico de Laboratório

Pré-requisito
Técnico em Biologia
Ao trabalhar, some no "Saldo de Distâncias" a distância percorrida desde seu último emprego.

5 Pontos

(-18,-5)

Trabalho: Monitor de Matemática

Pré-requisito
Técnico em Matemática
Ao trabalhar, some no "Saldo de Distâncias" a distância percorrida desde seu último emprego.

10 Pontos

(-16,-27)

Trabalho: Pesquisa em Matemática

Pré-requisito
Faculdade de Matemática
Ao trabalhar, some no "Saldo de Distâncias" a distância percorrida desde seu último emprego.

10 Pontos

(16,-27)

Trabalho: Analista de Sistemas Júnior

Pré-requisito
Faculdade de Informática
Ao trabalhar, some no "Saldo de Distâncias" a distância percorrida desde seu último emprego.

10 Pontos (16,27) **Trabalho: Jornalista** ***<u>Pré-requisito</u>*** ***Faculdade de Comunicação*** *Ao trabalhar, some no "Saldo de Distâncias" a distância percorrida desde seu último emprego.*	**10 Pontos** (-16,27) **Trabalho: Pesquisador** ***<u>Pré-requisito</u>*** ***Faculdade de Biologia*** *Ao trabalhar, some no "Saldo de Distâncias" a distância percorrida desde seu último emprego.*	**20 Pontos** (-35,-24) **Trabalho: Professor do IMPA** ***<u>Pré-requisito</u>*** ***Mestrado em Matemática*** *Ao trabalhar, some no "Saldo de Distâncias" a distância percorrida desde seu último emprego.*	**20 Pontos** (-35,24) **Trabalho: Professor da Universidade de Biologia** ***<u>Pré-requisito</u>*** ***Mestrado em Biologia*** *Ao trabalhar, some no "Saldo de Distâncias" a distância percorrida desde seu último emprego.*
20 Pontos (35,24) **Trabalho: Professor da Universidade de Comunicação** ***<u>Pré-requisito</u>*** ***Mestrado em Comunicação*** *Ao trabalhar, some no "Saldo de Distâncias" a distância percorrida desde seu último emprego.*	**20 Pontos** (-35,24) **Trabalho: Professor da Universidade de Ciências da Computação** ***<u>Pré-requisito</u>*** ***Mestrado em Informática*** *Ao trabalhar, some no "Saldo de Distâncias" a distância percorrida desde seu último emprego.*	**1 Ponto** (-6,-1) **Ensino Fundamental** ***<u>Pré-requisito</u>*** ***Nenhum***	**1 Ponto** (-6,1) **Ensino Fundamental** ***<u>Pré-requisito</u>*** ***Nenhum***
1 Ponto (6,1) **Ensino Fundamental** ***<u>Pré-requisito</u>*** ***Nenhum***	**1 Ponto** (6,-1) **Ensino Fundamental** ***<u>Pré-requisito</u>*** ***Nenhum***	**1 Ponto** (6,4) **Ensino Fundamental Integral com ênfase no ensino de Inglês** ***<u>Pré-requisito</u>*** ***Nenhum*** *Caso já tenha cursado o Ens. Fundamental, essa carta se tornar uma carta de "Curso de Inglês".*	**1 Ponto** (-6,-4) **Ensino Fundamental Integral com ênfase no ensino de Alemão** ***<u>Pré-requisito</u>*** ***Nenhum*** *Caso já tenha cursado o Ens. Fundamental, essa carta se tornar uma carta de "Curso de Alemão".*

1 Ponto

(-6,4)

Ensino Fundamental Integral com ênfase no ensino de Francês

Pré-requisito
Nenhum
Caso já tenha cursado o Ens. Fundamental, essa carta se tornar uma carta de "Curso de Francês".

---

1 Ponto

(6,-4)

Ensino Fundamental Integral com ênfase no ensino de Chinês

Pré-requisito
Nenhum
Caso já tenha cursado o Ens. Fundamental, essa carta se tornar uma carta de "Curso de Chinês".

---

5 Pontos

(-12,-13)

Ensino Médio Regular

Pré-requisito
Ter cursado o Ensino Fundamental

---

5 Pontos

(12,13)

Ensino Médio Regular

Pré-requisito
Ter cursado o Ensino Fundamental

---

5 Pontos

(12,-13)

Ensino Médio Regular

Pré-requisito
Ter cursado o Ensino Fundamental

---

5 Pontos

(-12,13)

Ensino Médio Regular

Pré-requisito
Ter cursado o Ensino Fundamental

---

5 Pontos

(-5,-15)

Ensino Médio Técnico em Matemática

Pré-requisito
Ter cursado o Ensino Fundamental.
Caso já tenha cursado o Ens. Fundamental, essa carta se torna uma carta de "Curso Técnico de Matemática ".

---

5 Pontos

(5,-15)

Ensino Médio Técnico em Informática

Pré-requisito
Ter cursado o Ensino Fundamental.
Caso já tenha cursado o Ens. Fundamental, essa carta se torna uma carta de "Curso Técnico de Informática ".

---

5 Pontos

(-5,15)

Ensino Médio Técnico em Biologia

Pré-requisito
Ter cursado a Ensino Fundamental.
Caso já tenha cursado a Ensino Fundamental, essa carta se torna uma carta de "Curso Técnico de Biologia".

---

5 Pontos

(5,15)

Ensino Médio Técnico em Comunicação

Pré-requisito
Ter cursado o Ensino Fundamental.
Caso já tenha cursado o Ens. Fundamental, essa carta se torna uma carta de "Curso Técnico de Comunicação".

---

10 Pontos

(-25,24)

Faculdade de Biologia

Pré-requisito
Ter cursado o Ensino Médio

---

10 Pontos

(25,-24)

Faculdade de Ciências da Computação

Pré-requisito
Ter cursado o Ensino Médio

10 Pontos

(25,24)

Faculdade de Comunicação

Pré-requisito
Ter cursado o Ensino Médio

10 Pontos

(-25,-24)

Faculdade de Matemática

Pré-requisito
Ter cursado o Ensino Médio

10 Pontos

(-5,-27)

Especialização em Matemática

Pré-requisito
Ter cursado a Faculdade (Qualquer Curso)

10 Pontos

(5,27)

Especialização em Comunicação

Pré-requisito
Ter cursado a Faculdade (Qualquer Curso)

10 Pontos

(-5,27)

Especialização em Genética

Pré-requisito
Ter cursado a Faculdade (Qualquer Curso)

10 Pontos

(5,-27)

Especialização em Análise de Sistemas

Pré-requisito
Ter cursado a Faculdade (Qualquer Curso)

20 Pontos

(5,35)

Mestrado em Comunicação

Pré-requisito
Ter cursado a Faculdade (Qualquer Curso)

20 Pontos

(5,-35)

Mestrado em Ciência da Computação

Pré-requisito
Ter cursado a Faculdade (Qualquer Curso)

20 Pontos

(-5,35)

Mestrado em Ciências Biológicas

Pré-requisito
Ter cursado a Faculdade (Qualquer Curso)

20 Pontos

(-5,-35)

Mestrado em Matemática

Pré-requisito
Ter cursado a Faculdade (Qualquer Curso)

20 Pontos

(-20,35)

Doutorado em Ciências Biológicas

Pré-requisito
Ter cursado a Faculdade (Qualquer Curso)

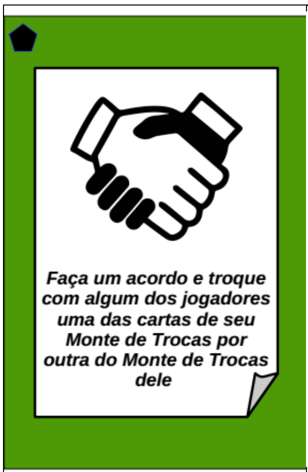
20 Pontos

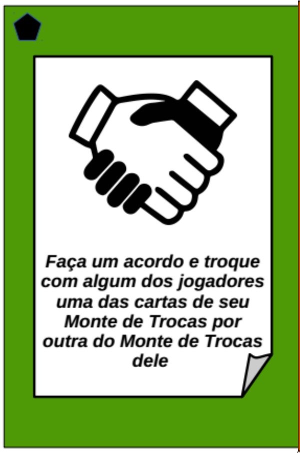
(20,-35)

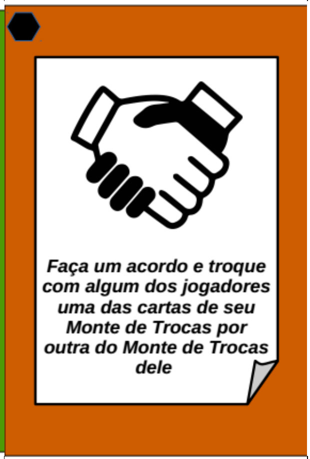
Doutorado em Ciência da Computação

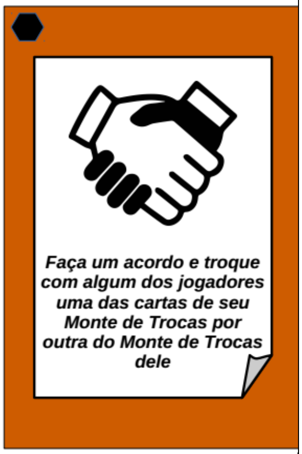
Pré-requisito
Ter cursado a Faculdade (Qualquer Curso)

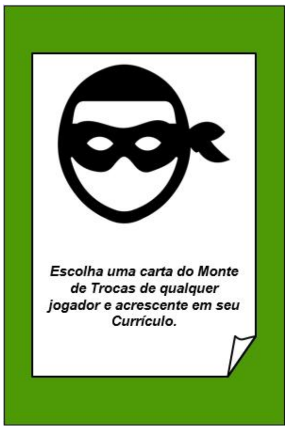
20 Pontos (20,35) **Doutorado em Comunicação** ***Pré-requisito*** ***Ter cursado a Faculdade (Qualquer Curso)***	**20 Pontos** (-20,-35) **Doutorado em Matemática** ***Pré-requisito*** ***Ter cursado a Faculdade (Qualquer Curso)***		
Com essa carta, o jogador poderá vasculhar o monte de descarte a procura e comprar uma (1) carta que deseje.	***Com essa carta, o jogador poderá vasculhar o monte de descarte a procura e comprar uma (1) carta que deseje.***	***Com essa carta, o jogador poderá vasculhar o monte de descarte a procura e comprar uma (1) carta que deseje.***	***Com essa carta, o jogador poderá vasculhar o monte de descarte a procura e comprar uma (1) carta que deseje.***
Com essa carta, o jogador poderá vasculhar o monte de descarte a procura e comprar uma (1) carta que deseje.	***Com essa carta, o jogador poderá vasculhar o monte de descarte a procura e comprar uma (1) carta que deseje.***	***Faça um acordo e troque com algum dos jogadores uma das cartas de seu Monte de Trocas por outra do Monte de Trocas dele***	***Faça um acordo e troque com algum dos jogadores uma das cartas de seu Monte de Trocas por outra do Monte de Trocas dele***


Faça um acordo e troque com algum dos jogadores uma das cartas de seu Monte de Trocas por outra do Monte de Trocas dele


Faça um acordo e troque com algum dos jogadores uma das cartas de seu Monte de Trocas por outra do Monte de Trocas dele

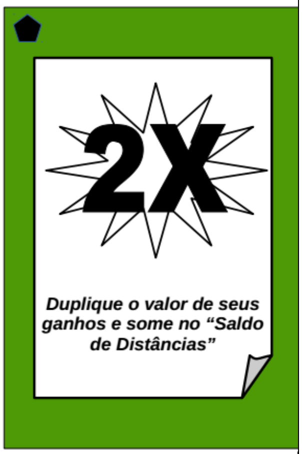

Faça um acordo e troque com algum dos jogadores uma das cartas de seu Monte de Trocas por outra do Monte de Trocas dele

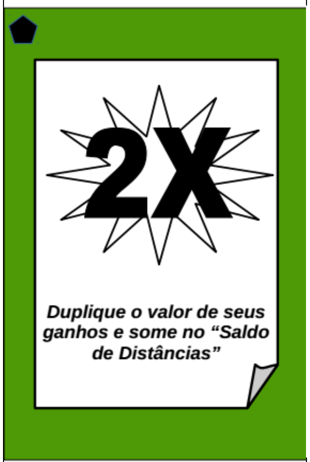

Faça um acordo e troque com algum dos jogadores uma das cartas de seu Monte de Trocas por outra do Monte de Trocas dele

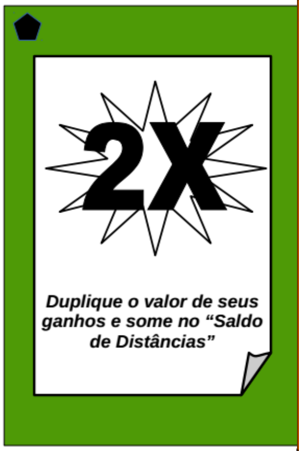

Escolha uma carta do Monte de Trocas de qualquer jogador e acrescente em seu Currículo.

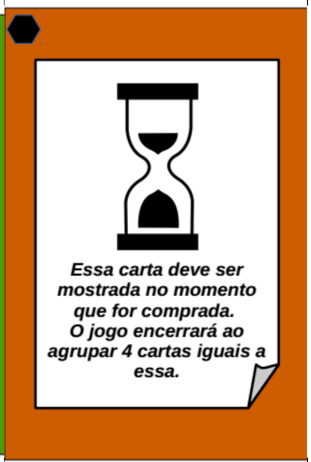

Escolha uma carta do Monte de Trocas de qualquer jogador e acrescente em seu Currículo.

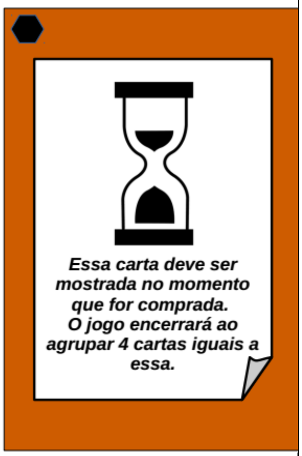

Escolha uma carta do Monte de Trocas de qualquer jogador e acrescente em seu Currículo.


2X
Duplique o valor de seus ganhos e some no "Saldo de Distâncias"


2X
Duplique o valor de seus ganhos e some no "Saldo de Distâncias"


2X
Duplique o valor de seus ganhos e some no "Saldo de Distâncias"


Essa carta deve ser mostrada no momento que for comprada.
O jogo encerrará ao agrupar 4 cartas iguais a essa.


Essa carta deve ser mostrada no momento que for comprada.
O jogo encerrará ao agrupar 4 cartas iguais a essa.

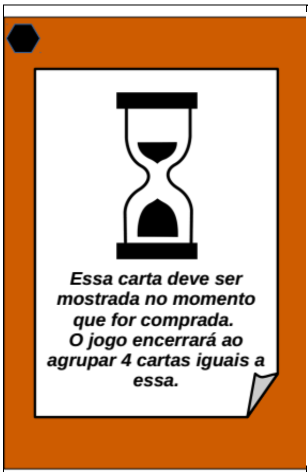
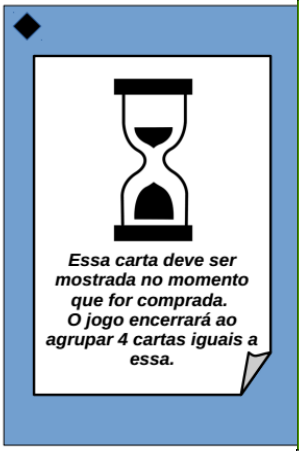
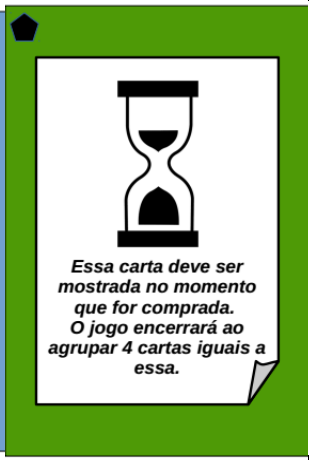
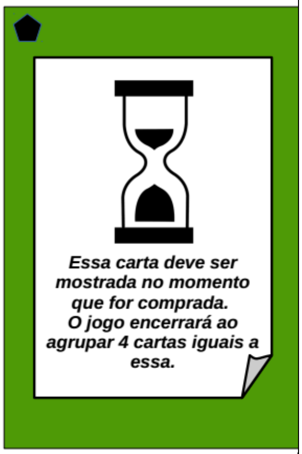
Essa carta deve ser mostrada no momento que for comprada. O jogo encerrará ao agrupar 4 cartas iguais a essa.	Essa carta deve ser mostrada no momento que for comprada. O jogo encerrará ao agrupar 4 cartas iguais a essa.	Essa carta deve ser mostrada no momento que for comprada. O jogo encerrará ao agrupar 4 cartas iguais a essa.	Essa carta deve ser mostrada no momento que for comprada. O jogo encerrará ao agrupar 4 cartas iguais a essa.

Gráfico Referente as Cartas:

Cada ponto azul representa uma carta do jogo, que são representadas por coordenadas. Cada quadrado representa um nível de cartas. O menor representa o ensino básico e o maior a Pós-graduação. Cada quadrante do plano cartesiano representa uma carreira: O primeiro quadrante Ciências Humanas, o Segundo quadrante Ciências Biológicas, o Terceiro Ciências Exatas e o Quarto Tecnologias. Desta forma, o aluno poderá escolher melhor sua estratégia utilizando o conhecimento sobre distância.