Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Jefferson Alexandre do Nascimento

Explorando a Lógica Matemática no Ensino Básico

Natal, 2016

Jefferson Alexandre do Nascimento

Explorando a Lógica Matemática no Ensino Básico

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: lógica matemática .

Orientador:
Prof. Dra. Débora Borges Ferreira

Natal, 2016

.

Catalogação da Publicação na Fonte
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Sistema de Bibliotecas
Biblioteca Central Zila Mamede / Setor de Informação e Referência

Nascimento, Jefferson Alexandre do.
Explorando a lógica matemática no ensino básico / Jefferson Alexandre do Nascimento. - 2016.
182f.; il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Débora Borges Ferreira.

1. Lógica – Estudo e Ensino – Dissertação. 2. Matemática – Estudo e Ensino – Dissertação. 3. Lógica matemática - Demonstrações – Dissertação. 4. Lógica matemática – Argumentação – Dissertação. I. Ferreira, Débora Borges. II. Título.

RN/UF/BCZM CDU510.6

Jefferson Alexandre do Nascimento

Explorando a Lógica Matemática no Ensino Básico

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Lógica matemática.

Aprovado em: 09 / 08 / 2016

Banca Examinadora

Débora Borges Ferreira

Prof. Dra. Débora Borges Ferreira
Departamento de Matemática - UFRN
Orientador

Paulo Roberto Ferreira dos Santos Silva.

Prof. Dr. Paulo Roberto Ferreira dos Santos Silva
Departamento de Matemática - UFRN

DBaratela

Prof. Dra. Daniele da Silva Baratela Martins Neto
Departamento de Matemática - UnB

Dedico este trabalho a minha família e amigos que tanto me ajudam a conseguir meus objetivos.

"A lógica é a higiene que o matemático pratica para manter as suas ideias saudáveis e fortes." Hermann Weyl

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado a saúde e vigor para concluir mais uma etapa do meu projeto de vida, não posso esquecer de agradecer à SBM, a UFRN e a Capes por viabilizarem todo esse projeto denominado PROFMAT, agradeço também a dedicação e atenção dos meus mestres professores do curso e em especial a minha orientadora, professora Débora Borges Ferreira pela prontidão em aceitar o desafio e dedicação em orientar o presente trabalho. Por fim, agradeço a minha família por ter estado sempre ao meu lado nos momentos em que mais precisei durante o curso.

Resumo

A presente dissertação tem por objetivo principal, apresentar uma proposta de ensino da lógica matemática no âmbito do Ensino Médio, elencando fatores que baseados nos principais documentos oficiais que regem a educação no Brasil, mostram a importância da inserção da lógica na grade curricular do Ensino Médio.

O trabalho está dividido em 4 partes, nas quais estão apresentadas a história da lógica proposicional, a teoria, aplicações da lógica nas demonstrações matemáticas e atividades propostas à serem aplicadas em sala de aula.

PALAVRAS-CHAVE: Lógica Matemática, Ensino de lógica, Ensino Médio.

Abstract

This work has as main objective to present a proposal for logic teaching mathematics in the high school, listing factors based on key documents official governing education in Brazil, show the importance of logic integration in curriculum of high school .

The work is divided into 4 parts, which are presented in the history of propositional logic, theory, logic applications in mathematical demonstrations and activities proposed to They are applied in the classroom.

KEYWORDS: Logic Math, Logic education, High scholl.

Lista de Siglas e Abreviações

- CEFET-RJ - Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro.
- CESPE - Centro de Seleção e de promoção de Eventos.
- CNEC - Campanha Nacional de Escolas da Comunidade.
- ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio
- ENEM PPL - Exame Nacional do Ensino Médio para Pessoas Privadas de Liberdade.
- ESAF - Escola de Administração Fazendária.
- FAAP - Fundação Armando Álvares Penteado.
- FATEC - Faculdade de Tecnologia de São Paulo.
- FCC - Fundação Carlos Chagas.
- FDRH - Fundação para o Desenvolvimento de Recursos Humanos.
- FGV - Fundação Getúlio Vargas
- FUNCAB - Fundação Professor Carlos Algusto Bittencourt.
- INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais .
- Insper - Instituto Superior de Pesquisa
- NOAS - Núcleo de Desenvolvimento de Objetos de Aprendizagem Significativa.
- OBM - Olimpíadas Brasileira de Matemática.
- PCNEF - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental.
- PCNEM - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.
- PUC - Pontifica Universidade Católica.
- UDESC - Universidade do Estado de Santa Catarina.
- UEL - Universidade Estadual de Londrina.

- UFBA - Universidade Federal da Bahia.
- UFF - Universidade Federal Fluminense.
- UFPE - Universidade Federal de Pernambuco.
- UFPR - Universidade Federal do Paraná.
- UNESP - Universidade Estadual Paulista.
- UNIFOR - Universidade de Fortaleza.

Sumário

Introdução

É notória e histórica a dificuldade e fracasso escolar que os alunos apresentam na disciplina de matemática. Em Maia Cruz, 2016 diz que o fenômeno do fracasso escolar em matemática tem sido foco de muitos estudos da educação matemática, na busca de argumentos que expliquem melhor as altas e persistentes taxas de retenção na disciplina, apontada como um dos vetores da descontinuidade da escolarização.

> *"À medida que começamos estudar mais profundamente o fracasso escolar, percebemos que, no Brasil, esse problema adquire características de fenômeno de massa, ou seja, atinge a maior parte da população em idade escolar" (DORNELES, 1990 apud MARQUEZAN, 2001,P.115).*

Os PCNEF(Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental) (1998b) corroboram ao dizer que em nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão.

Levando em consideração o caráter complexo e multivariável do processo de ensino- aprendizagem , muitos autores apresentam suas hipóteses na tentativa de responder ou pelo menos explicar o porquê que os alunos vão tão mal na disciplina. Dentre tantos fatores um é especialmente notável : a dissociação da lógica matemática(lógica de predicados ou de 1ª ordem) com a grade curricular das escolas, muitas vezes respaldadas pela falta de tais conteúdos em alguns livros didáticos que são hoje utilizados tanto na rede pública quanto na rede particular de ensino, a título de exemplo podemos citar os livros: Matemática Contexto e Aplicação da editora Ática, o livro Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia da editora Scipione e o livro Novo Olhar Matemática da editora FTD.

A lógica matemática se faz presente desde uma operação simples de aritmética como a adição entre dois números quaisquer, até nas mais refinadas e complexas demonstrações de teoremas. Nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio de 2006, diz que embora a Lógica não se constitua como um assunto a ser tratado explicitamente, alguns de seus princípios podem e devem ser integrados aos conteúdos, desde os ciclos iniciais, uma vez que ela é inerente à Matemática. No contexto da construção do conhecimento matemático é ela que permite a compreensão dos processos; é ela que possibilita o desenvolvimento da capacidade de argumentar e de fazer conjecturas e generalizações, bem como o da capacidade de argumentar e de fazer conjecturas e generalizações, bem como o da capacidade de justificar por meio uma demonstração formal.

O grande problema é que experiências próprias e vividas por alguns colegas de profissão em sala de aula apontam que os alunos não conseguem por muitas vezes organizar em seus pensamentos um raciocínio dedutivo na forma de encadeamento de ideias a fim de chegarem a uma conclusão plausível na resolução de problemas, deficiência essa que poderia muito bem ser solucionada com a inserção da lógica de 1ª ordem como conteúdo obrigatório na grade curricular dos alunos do ensino médio.

De acordo com as Orientações Curriculares do Ensino Médio(2006)

> *"A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático - nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva ".*

Essa forma de trabalhar os conteúdos nos aspectos de argumentar, inferir conclusões, abstrair, torna-se muito difícil quando o aluno não tem um conhecimento mínimo de lógica matemática, uma vez que podemos de maneira bem singular definir a lógica como sendo a "ciência do raciocínio" dividido em duas vertentes: o raciocínio dedutivo e o raciocínio indutivo. E segundo Mortari, 2001, basicamente, raciocinar, ou fazer inferências consiste em "manipular" a informação disponível - aquilo que sabemos, ou supomos, ser verdadeiro, aquilo em que acreditamos - e extrair consequências disso, obtendo informação nova. Isso é exatamente uma síntese do que está presente no texto das Orientações Curriculares para o ensino de matemática, podemos encontrar referências que relacionam a matemática diretamente com a lógica nos PCNEM(Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio)

> *"A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo..."*

O estudo da lógica no ensino médio auxilia no desenvolvimento da matemática enquanto linguagem, e em seu caráter semântico, dessa forma podemos considerar a lógica contemporânea como o principal pilar da matemática enquanto ciência axiomática, que tem um rigor sintáxico e semântico, para que não haja ambiguidades em sua estrutura. Mais uma vez fazendo menção ao texto dos PCNEM que diz que é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la.

Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

É com base nos documentos oficiais que tratam sobre educação matemática no Brasil, em revisão bibliográfica e principalmente nas experiências docentes vivenciadas que este trabalho está fundamentado.

A presente dissertação tem como público alvo professores do ensino básico e superior e está dividida em 4 capítulos e mais as considerações finais.

No Capítulo 1, é apresentada uma concepção inicial sobre o objeto de estudo da presente dissertação que é a lógica matemática e um escorço da história da lógica proposicional, passando pela lógica de 1ª ordem até chegar à lógica contemporânea, que é de fato o objeto principal de estudo desse trabalho.

No Capítulo 2 são apresentadas as primeiras definições da lógica proposicional, tais como: proposição, verdade e validade. É ainda nesse capítulo que são apresentados os principais conectivos da lógica de 1ª ordem, seus significados e a maneira correta de utilizá-los.

No Capítulo 3 tratamos sobre a argumentação lógica, fundamentados nas concepções de RUSSEAL, ALMOULOUD, FARJADO, ÁVILA entre outros autores. O capítulo em questão traz de fato a essência do trabalho que é a utilização das técnicas da lógica proposicional e de primeira ordem no encadeamento de raciocínio lógico dedutivo como auxílio para o aluno em argumentação matemática, principalmente no que diz respeito às demonstrações de teoremas.

No Capítulo 4 apresentamos uma série de sequências didáticas, a título de sugestões para abordagem do conteúdo da lógica proposicional nas séries finais do Ensino Fundamental e em qualquer série do Ensino Médio.

Capítulo 1

Introdução à Lógica Matemática

1.1 Como definir lógica?

A lógica pode ser definida informalmente como sendo a ciência do raciocínio dedutivo. Ocupa-se, dentre outras coisas, em estudar as relações de dedução e indução tratando das inferências válidas, ou seja, inferências cujas conclusões são necessariamente verdadeiras quando suas premissas o são. Não é objetivo da lógica estudar os processos mentais e psicológicos envolvidos no desenvolvimento de um argumento, mas estudar os resultados desse processo.

> *"Pensamentos, raciocínios, inferências e conhecimentos, enquanto processos psicológicos, que se passam na mente do indivíduo, não podem ser objeto de investigação. O que se pode investigar são os frutos de tais processos, ou seja, expressões linguísticas." (HEGENBERG,1977 apud TASINAFFO, 2008, p.3)*

A lógica contemporânea tem o nobre propósito de fundamentar a matemática em termos de linguagem, uma vez que não podem ser admitidas ambiguidades ou paradoxos nessa ciência tão complexa, completa e exata. Vamos aqui compreender linguagem como sendo um conjunto de símbolos que quando agrupados de determinadas maneiras(regras) passam a ter um significado. Segundo Fajardo, 2012, o conjunto de símbolos e a maneira que os agrupamos é chamado de sintaxe, e a forma como esses símbolos, palavras e frases adquirem um significado é denominado semântica.

1.2 Breve história da lógica

O início da história da lógica encontra-se na Grécia, mais precisamente em Atenas com a escola de Isócrates e a escola de Platão por volta do século IV a.C, movidos principalmente pela política. Enquanto Isócrates seguia os princípios dos sofistas[1] aqueles que propunham o desenvolvimento da arte de emitir opiniões prováveis sobre coisas úteis, a escola de Platão defendia a hipótese de que a base para ação política, deveria ser pautada sobre a investigação científica de preceitos matemáticos.

> *"Na Academia, que fundara em 387 a.C,[Platão] mostrava a seus discípulos que a atividade humana, desde que pretendesse ser correta e responsável, não poderia ser norteada por valores instáveis, formulados segundo o relativismo e a diversidade das opiniões; requeria uma ciência (episteme) dos fundamentos da realidade na qual aquela ação está inserida." (PESSANHA, 1987, p.3)*

Aos 18 anos de idade Aristóteles ingressa na escola de Platão, e alguns anos depois propõe o que vem a ser conhecida como a primeira sistematização para classificação das proposições e argumentos, verdadeiro ou falso para as proposições , válido ou inválido para os argumentos.

De acordo com Gomes, 2015, Aristóteles considerava a lógica como um método de demonstração norteada por três operações bem definidas,: o conceito , o juízo e o raciocínio. O conceito seria a representação do objeto no plano da mente. O juízo seria o ato de afirmação ou negação de dada ideia e o raciocínio tratava da articulação dos vários juízos.

Essa sistematização rende até os dias de hoje o título de pai da lógica clássica para Aristóteles, vale lembrar que o termo dado para o estudo e classificação na época de Aristóteles não era lógica e sim *Analytica.* O termo lógica tal qual usamos hoje, provém do latim da palavra *logos* que quer dizer razão e só passou a ser utilizada no século II a.C. . O principal objetivo de Aristóteles era

[1]**Sofistas** foram um tipo específico de professor na Grécia antiga e no império romano, que deveriam ensinar a *arete*, termo grego que traduz o conceito de "excelência" ou "virtude", aplicado a áreas como música, política, matemática e atleticismo. Entre os principais sofistas conhecidos estão Protágoras, Górgias, Pródico, Hípias, Trasímaco, Antifonte e Crálico.
O termo "sofista" tem sua origem no idioma grego, a partir da palavra "sofistês", derivada de "sophia" e "sophos", significando "sabedoria" e "sábio" respectivamente. O termo *sophistês* foi originalmente utilizado por Homero, para descrever alguém abilidoso em uma determinada atividade.

estabelecer um conjunto de regras para reger a argumentação científica e política da época, no entanto há registros de que bem antes de Aristóteles, por volta dos séculos V e IV a.C., os sofistas e alguns filósofos dentre eles Platão(mestre de Aristóteles), já mostravam preocupação em estruturar a lógica para usá-la como ferramenta em seus argumentos e discursos políticos, estudando por exemplo conceitos como: falácias, verdades, linguagem, entendimento e convicção.

No período da antiguidade destacam-se pelo menos três escolas com concepções complementares no estudo da lógica, são elas: a Escola Aristotélica ou Paripatética fundada por Aristóteles, a Escola Megárica fundada por Euclides e a Escola dos Estoicos fundada por Zenon. Inclusive o termo lógica que usamos hoje foi adotada inicialmente pelos estoicos, acredita-se que por motivos puramente religiosos.

> *"Para o estoicismo, uma tendência latina de origem romana, o universo seria governado por um "logos", uma razão universal que poderia ser definida como Deus, permitindo ao mundo atingir o "kosmos", harmonia.*
> *Um conceito, obviamente, influenciado pelo cristianismo que, por sua vez, fomentou o termo lógica aristotélica, nomeando todas as teorias na área até o aparecimento da lógica formal ou matemática."(RAMOS, 2013, p.1)*

Aristóteles escreveu 6 trabalhos que depois de sua morte foram organizados em um só denominado *Organon* que significa instrumento. Dentre suas obras as que mais especificamente tratam sobre a formalização da lógica são: *Analytica Priora* e o *De Interpretatione*. É atribuída também a Aristóteles a teoria dos silogismos, considerada por muitos filósofos e historiadores, a maior e mais importante "descoberta" em toda história da lógica formal.

Para melhor compreendermos a história da lógica podemos fragmentá-la em três partes:

- **Período(Grego) Aristotélico**(± 390 a.C. a ± 1840 d.C.) - Período no qual surgiram as escolas fundadas por Aristóteles, Euclides e Zenão. O principal núcleo de estudos dessas escolas clássicas era a valoração das proposições em verdadeiras ou falsas. A lógica proposta por Aristóteles fundamenta-se em três princípios bem definidos:
  - **Princípio da Identidade:** Se uma coisa é verdadeira, ela é verdadeira.

- **Princípio da não-contradição:** Uma coisa não pode ao mesmo tempo ser e não ser, sob uma mesma perspectiva. Em outras palavras não é aceitável admitir com a mesma valoração lógica uma proposição e sua contradição.

- **Princípio do terceiro excluído:** Só há duas opções para uma proposição, ou ela é verdadeira ou falsa não havendo uma terceira valoração. Mais a frente discutiremos o que aqui tratamos por proposição.

Na transição do período Grego para o período da lógica moderna(Booleana), destaca-se o grande matemático Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716) que em sua época já apresentava em seu sistema traços da lógica contemporânea e sua maneira de operar com símbolos, similar à forma do cálculo algébrico. Leibniz introduziu a lógica simbólica para intervir em um dos maiores problemas da lógica do período grego que eram as contradições e ambiguidades geradas pela inconsistência da linguagem ordinária que geravam muitos paradoxos. Uma escola clássica que propôs alguns desses paradoxos foi a escola megárica, um dos mais conhecidos é o paradoxo do mentiroso: Se uma pessoa diz "Eu estou mentindo", enuncia algo verdadeiro ou falso? Suponhamos que a frase seja verdadeira, mas se ela for verdadeira então é falsa uma vez que a mesma já afirma isso. Por outro lado se supormos que a frase é falsa, isso significa que não é verdade o que a frase diz, sendo assim a frase torna-se verdadeira.

- **Período Booleano**(± 1840 a ± 1910)- Esse período foi um dos mais férteis no estudo das lógicas. Após Aristóteles e as escolas(estoicas, megáricas) não havia tido um crescimento tão significativo quanto nesse período que começou com George Boole(1815-1864) e Augustus de Morgan(1806-1871), com a publicação do trabalho *Mathematical Analysis of logic e formal logic -1847* Nesse trabalho eles desenvolveram o que chamaram de Álgebra da lógica.

  Uma outra figura notavelmente importante desse período foi o filósofo alemão Friedrich Ludwing Gottlob Frege(1845-1925). Suas principais obras foram publicadas em 1879 e 1893, tratavam exatamente do cálculo proposicional na sua forma moderna. Em suma, seus esforços sempre foram a fim de encontrar um sistema capaz de transformar em raciocínios dedutivos todas as demonstrações matemáticas.

- **Período Contemporâneo**(± 1910 até os dias atuais) - O marco zero desse período foi a publicação do *Principia Mathematica* em três volumes nos seguintes anos 1910, 1912 e 1913, da autoria do britânico Alfred North Whitehead(1861-1947) juntamente com o também britânico Bertrand Russeal(1872-1970). Outra publicação do mesmo período foi *On the consistency of arithmetic* sendo esse fruto da colaboração de alguns matemáticos, entre eles Frances Jaques Herbrand(1908-1931) e Jan Lukasiewicz(1878-1956) que tentaram transformar a lógica em uma nova ciência. Foi exatamente nesse período que a lógica passa para uma perspectiva linguístico-formal, a lógica como estudamos hoje, como uma estrutura linguística completa, dotada de uma sintaxe e uma semântica. Desde então a lógica tem evoluído e com isso aumentado seu campo de aplicação, transcendendo à matemática e sendo utilizada em áreas como Engenharia, Robótica, Economia, Física e muitas outras.

Capítulo 2

Lógica Proposicional e de Primeira Ordem

No capítulo anterior há uma definição informal do que é a lógica. Neste capítulo trataremos acerca da lógica proposicional sob a luz da lógica aristotélica, não discutiremos apenas formalização, mas a linguagem dotada de símbolos, semântica e sintaxe própria.

2.1 Primeiras Definições

Antes de estudarmos as regras de inferências e técnicas para averiguar a validade ou não de um argumento, precisamos a priori de algumas definições como *sentença*, *proposição*, *linguagem*, *argumento* e *verdade*.

Durante todo esse trabalho irão aparecer com frequência duas palavras, a saber: verdadeiro e falso. Sendo assim se faz necessário sabermos quais eram as concepções de verdade de alguns filósofos precursores dessa ciência empírica da qual se ocupa esse texto.

Definição 2.1 (Verdade) *Para Aristóteles, verdade é o acordo ou correspondência do pensamento com a realidade. Outras duas definições de verdade adotadas a tomam como coerência e como processo. A primeira dessas concepções afirma que na medida em que nossas opiniões, conforme reveladas na nossa comunicação com os outros, se mostram coerentes, podemos admitir que a mesma é em geral verdadeira. A outra concepção diz que verdade é um processo contínuo, em que diversos aspectos da verdade, por vezes contraditórios mas sempre necessariamente ligados entre si, se vão manifestando, ou seja, é uma visão dinâmica da verdade.*

Definição 2.2 (Sentença) *Para Aristóteles sentenças são "coisas que combinadas com outras têm* *uma significação", essas coisas as quais Aristóteles se refere, podemos entender como símbolos ou palavras. Uma palavra pode ser considerada uma sentença uma vez que ela por si só tem um significado. Algumas dessas sentenças são passíveis de um julgamento em verdadeiro ou falso, outras não. Por exemplo: a sentença "Passe para a próxima página!" é uma sentença que não tem uma valoração, já a célebre sentença "Sócrates é mortal" é uma sentença que possui essa propriedade de ser verdadeira ou falsa.*

Definição 2.3 (Proposição) *Na definição de Aristóteles, proposição é "o discurso que afirma ou nega alguma coisa", isto quer dizer que uma proposição é uma sentença que possa ser julgada em verdadeira ou falsa.*

De maneira geral não são proposições:

- **Sentenças imperativas**

  Exemplo 2.1 *Feche a porta!*

- **Sentenças interrogativas**

  Exemplo 2.2 *Será que vai chover amanhã?*

- **Sentenças exclamativas**

  Exemplo 2.3 *Caramba!*

2.2 Linguagem da lógica matemática

A lógica proporciona à matemática enquanto linguagem o *status* de exatidão no que diz respeito ao rigor de suas demonstrações e na maneira que são definidos os objetos matemáticos. Na linguagem matemática não há lugar para ambiguidades, para figuras de linguagem ou para metáforas, que são tão comuns na linguagem coloquial ou literária.

> "A linguagem natural ganha em expressividade, e a lógica ganha em rigor.[...]
>
> Mesmo não sendo possível, na comunicação cotidiana, substituir a linguagem natural pela linguagem lógica, a compreensão da última fortalecerá o domínio da primeira. Quem estudou lógica será capaz de perceber alguns padrões onde é possível aplicar o rigor matemático, em fragmentos da linguagem." (FAJARDO, 2012, p.5)

2.2.1 Classificações e representações das proposições

Agora que temos bem definido o que é proposição, podemos classificá-las em simples(atômicas) ou compostas(moleculares).

Definição 2.4 (Proposição simples(Atômicas)) *Aprendemos ao estudar física que o átomo é a menor parte da matéria, uma parte indivisível. Assim uma proposição é dita simples ou atômica quando ela não contém em sua estrutura nenhuma outra proposição, sendo assim podemos considerar que as proposições simples constituem a unidade mínima de análise do cálculo sentencial. Na linguagem lógica essas estruturas geralmente são designadas pelas letras do alfabeto latino minúsculas (a, b, c, d, e, ...).*

Exemplo 2.4 *p: Sócrates é mortal.*

Definição 2.5 (Proposição composta(moleculares)) *Mais uma vez, fazendo alusão aos conceitos da física, uma molécula pode ser entendida como um agrupamento de átomos. Sendo assim uma proposição é dita composta ou molecular quando ela é formada por mais de uma proposição. Em outras palavras, são todas as sentenças que possuem como parte integrante de si própria pelo menos uma outra proposição. As proposições compostas serão designadas pelas letras maiúsculas do alfabeto latino. (A, B, C, D, E, ...)*

Exemplo 2.5 *P: Um número natural primo é divisível apenas por 1 e por ele mesmo.*

2.2.2 Conectivos Proposicionais

Como foi definido antes, a lógica não se preocupa em estudar se determinada afirmação é verdadeira ou falsa (no que diz respeito ao conteúdo), mas com a validade ou não de um argumento, prova disso é que no cálculo proposicional poderemos trocar qualquer que seja a proposição simples ou composta por um símbolo, geralmente letras do alfabeto latino sem se preocupar com o conteúdo de tais proposições. Na linguagem comum, usamos palavras explícitas ou não para interligar frases dotadas de algum sentido(o que definimos como sendo sentenças), essas palavras serão substituídas, na lógica matemática por símbolos denominados conectivos lógicos.

Tabela 2.1: Definição dos símbolos dos conectivos

Símbolo, leitura	Operação lógica
$\wedge$, e	Conjunção
$\vee$, ou	Disjunção inclusiva
$\underline{\vee}$, ou	Disjunção exclusiva
$\sim$ ou $\neg$, não	Negação
$\rightarrow$, se, então	Condicional
$\leftrightarrow$, se, e somente se	Bicondicional

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os símbolos apresentados na Tabela 2.1 são comumente denominados conectivos sentenciais ou proposicionais e serão detalhados e exemplificados na Seção 2.3. Mas a proposta desse trabalho é mais ampla, sobrepõe o estudo do cálculo proposicional e entra no cálculo de predicados, isto é, sairemos da lógica proposicional e enveredaremos na lógica de primeira ordem.

Para que não haja confusão sobre qual lógica utilizamos nesse trabalho, segue as definições de lógicas dadas por Fajardo (2012):

- **Lógica Proposicional**(ou **Cálculo Proposicional**): é o mais elementar exemplo de lógica simbólica. Sua semântica tem como base os princípios da identidade, do terceiro excluído e da não contradição, sendo assim, a primeira referência de *lógica clássica*.

  A linguagem da lógica proposicional é formada por fórmulas atômicas (representadas geralmente por letras do alfabeto latino), parênteses e conectivos ("e", "ou", "não", "se, então", "se, e somente se"). Mas essa simplicidade faz com que ela não tenha força expressiva para formalizar a matemática.

- **Lógica de Primeira Ordem**(ou **Cálculo de Predicados**): é a lógica usada para formalizar a matemática. Sua sintaxe também apresenta os conectivos da lógica proposicional, mas acrescenta os quantificadores (“para todo"e “existe") e as variáveis, além de outros símbolos específicos que dependem do assunto que a linguagem aborda.

A presença dos quantificadores torna substancialmente mais difícil a construção da sintaxe e da semântica em relação à lógica proposicional, mas ganha muito em expressividade.

Existem muitas outras lógicas, por exemplo a **Lógica de Segunda Ordem**, a **Lógica Modal**, a **Lógica Descritiva**, a **Lógica Paraconsistente** e a **Lógica Fuzzy** mais detalhes sobre cada uma dessas lógicas encontra-se em Fajardo, (2012).

Como o enfoque desse trabalho é exatamente apresentar argumentos para a importância da lógica matemática nos anos iniciais do ensino médio, um dos argumentos é o papel da lógica na formalização do saber matemático, principalmente entender a matemática como uma linguagem própria, sendo assim a lógica abordada será a *lógica de primeira ordem.*

Na definição dada sobre lógica de primeira ordem aparecem dois quantificadores, um universal e outro existencial. Esses quantificadores são utilizados quando queremos transformar uma sentença aberta(aquelas que não são consideradas proposições), em uma sentença com valoração. Segue tabela com os símbolos que os representam:

Tabela 2.2: Quantificadores

Símbolo, leitura	Operação lógica
$\forall$, Para todo	quantificador universal
$\exists$, Existe	quantificador existencial

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como exemplo do uso dos quantificadores universais podemos citar o seguinte:

Exemplo 2.6 *Considere a seguinte sentença:*

$$3x+3=6.$$

Não há dúvidas de que essa sentença matemática não é uma proposição, uma vez que para $x=1$ a sentença é verdadeira e é falsa para $x \neq 1$, indo de encontro com o princípio da não contradição que diz que uma coisa não pode ser verdadeira e falsa sob a mesma perspectiva. Sendo assim não há como validar sem conhecer o valor de x se a sentença em questão é verdadeira ou falsa.

Agora considere a sentença a seguir:

$$\text{Existe } x \in \mathbb{R}, \text{tal que } 3x + 3 = 6.$$

Observe que quando utilizamos o quantificador existencial, a sentença que até então não era passível de uma valoração em verdadeira ou falsa, agora pode ser avaliada. Com isso garantimos que a sentença passou a ser uma proposição.

De outra maneira, poderíamos ainda utilizar o quantificador universal:

$$\text{Para todo } x \in \mathbb{R}, \text{temos } 3x + 3 = 6.$$

Fazendo uso do quantificador universal, acontece o mesmo que aconteceu com o uso do quantificador existencial, a sentença agora pode ser avaliada em verdadeira ou falsa. Portanto o uso do quantificador universal transformou uma sentença até então aberta em uma proposição.

Conhecer os símbolos que formam o alfabeto de uma linguagem é apenas o primeiro passo para aprendermos tal linguagem, o segundo passo é entendermos como funciona sua gramática, ou seja, como é a sintaxe dessa linguagem.

2.2.3 Regras para formação de proposições compostas(fórmulas compostas)

Definição 2.6 (Fórmulas) *Fórmulas são sequências finitas de símbolos do alfabeto que gozam das seguintes regras:*

1. Proposições atômicas são fórmulas;
2. Se A é uma fórmula, (~A) é uma fórmula;
3. Se A e B são fórmulas, (A∧B), (A∨B), (A$\underline{\vee}$B), (A→B), (A↔B) também são fórmulas;
4. Se A é uma fórmula e x é uma variável, então $\forall x(A)$ e $\exists x(A)$ são fórmulas.
5. Não há fórmulas além das obtidas pelo uso das regras 1 a 4.

Essas regras expõem com clareza as estruturas lógicas das proposições e argumentos, evitando as confusões que podem por muitas vezes serem criadas no uso da linguagem comum, segundo Bispo(2014)

> *"A Lógica Matemática trata da relação entre proposições, considerando a forma que essa relação assume e não o seu conteúdo. ".(BISPO, 2014, p.6)*

2.3 Classificação dos conectivos

Na Tabela 2.1 foram apresentados os conectivos em sua forma simbólica, seu significado e o nome que se dá a operação lógica que os incluem. Agora vamos ver de fato em quais situações aparecem.

2.3.1 Conjunção

É o resultado da combinação de duas proposições, sejam elas atômicas ou moleculares, ligadas pela palavra "**e**", que será substituída pelo símbolo "$\wedge$", quando traduzimos para a linguagem da lógica. A conjunção também pode ser expressa por palavras como: *mas, todavia, contudo, no entanto, visto que, enquanto, além disso e embora.*

Exemplo 2.7

a) O número 2 é par **e** primo.
Tradução para a linguagem da lógica:
P: O número 2 é par.
Q: O número 2 é primo.
Simbolicamente, temos: $P \wedge Q$

b) 4 é um número par, no entanto não é primo.
Tradução para a linguagem da lógica:
P: 4 é um número par.
Q: 4 é um número primo.
Simbolicamente, temos: $P \wedge \sim Q$

2.3.2 Disjunção

É o resultado da combinação de duas proposições, sejam elas atômicas ou moleculares, ligadas pela palavra "**ou**" que será substituída pelo símbolo "$\vee$". Na linguagem usual, a palavra "**ou**" pode ser entendida com dois sentidos: inclusivo ou exclusivo.

Isso fica evidente em matemática quando tratamos da operação de união entre conjuntos, de maneira informal, dizemos que um elemento pertence à união entre os conjuntos A e B se o mesmo pertence ao conjunto A ou pertence ao conjunto B. Nesse caso interpretamos da seguinte maneira: para que um elemento faça parte da união entre dois conjuntos é suficiente que faça parte de um dos dois, mas ele pode fazer parte dos dois e ainda assim será elemento da união. Podemos exemplificar com proposições na linguagem usual.

Exemplo 2.8

a) Esse ano irei matricular-me em um curso de inglês **ou** em um curso de espanhol.
Perceba que a proposição não apresenta "impedimento" ao fato de matricular-me nos dois, portanto o conectivo é uma disjunção inclusiva.

b) As 10 horas da manhã irei para a academia ou ficarei em casa dormindo.
Nesse exemplo a proposição apresenta um "impedimento" temporal, uma vez que não posso estar nos dois lugares ao mesmo tempo, sendo assim trata-se de uma disjunção exclusiva. Em muitos casos a disjunção exclusiva é apresentada com o uso do duplo "ou".

2.3.3 Condicional

Vamos entender esse conectivo como o resultado da combinação entre duas proposições por uma condição de suficiência da ocorrência de uma para a ocorrência da outra. Em geral utilizamos as palavras "**se, então**" para estabelecer essa relação, quando na linguagem lógica de acordo com a Tabela 2.1, trocaremos o "**se, então**" pelo símbolo "$\rightarrow$."

Sejam P e Q proposições. Na relação $P \rightarrow Q$, lê-se: Se P, então Q. A proposição P é denominada condição ou antecedente, e a proposição Q é chamada de conclusão ou consequente.

Nota: A relação de suficiência supra citada, não diz respeito ao significado da proposição, mas a sua valoração. Veremos melhor mais adiante, nas construções das tabelas-verdade, o que uma condicional afirma é unicamente uma relação entre valores lógicos do antecedente e do consequente.

Exemplo 2.9 *"Se a lógica fundamenta a matemática, então o Brasil é penta campeão mundial de futebol."*

Passando para a linguagem da lógica teremos:
p: A lógica fundamenta a matemática.

q: O Brasil é penta campeão mundial de futebol.

Simbolicamente teremos: p→q.

A condicional p→q **não afirma** que o consequente q se deduz ou é consequência do antecedente p.

Como mencionando antes, na linguagem coloquial, o “se, então” tem um significado de causa e efeito, já para a lógica proposicional não importa se o antecedente tem relação com o consequente, importa apenas sua valoração. Vale também lembrar que na matemática “o se, então” tem exatamente a mesma utilização da linguagem literária, isto é, o antecedente deve ser a causa do consequente.

Exemplo 2.10

a) Se em uma matriz pelo menos uma fila(linha ou coluna) é composta apenas por zero o determinante dessa matriz é zero.

b) Se um número pertence ao conjunto dos números inteiros, também pertence ao conjunto dos números racionais.

2.3.4 Diferença entre condição necessária e condição suficiente

Existem situações nas quais duas proposições estão relacionadas por uma condição de suficiência, já em outros casos a relação é de apenas necessidade. Os alunos costumam sempre fazer confusão entre essas duas relações. Vamos analisar a seguinte proposição.

“Se um número natural é primo, então sua raiz quadrada é um número irracional.”

Note que um número ser primo é condição suficiente para que sua raiz quadrada seja um número irracional, mas não é necessária, basta perceber que $\sqrt{15} \in \mathbb{I}$, mesmo o número 15 não sendo primo. Da mesma maneira podemos verificar que a raiz quadrada de um número ser irracional não é condição suficiente para que o mesmo seja primo, mas é condição necessária, pois não há um número primo tal que sua raiz quadrada seja racional.

Em suma, sejam p e q proposições da lógica de 1ª ordem, da relação $p \rightarrow q$ tiramos duas conclusões:

1ª) p é condição suficiente para q.

2ª) q é condição necessária para p.

Existe ainda casos nos quais uma proposição é condição necessária e suficiente para ocorrência da outra, esses casos serão analisados na próxima subseção.

2.3.5 Bicondicional

Enquanto o conectivo ou operação condicional denota uma situação de suficiência entre o antecedente e o consequente, o bicondicional apresenta uma relação de necessidade e suficiência entre o antecedente e o consequente, e vice-versa.

As palavras da linguagem comum usadas para estabelecer essa relação de suficiência são: "**se, e somente se**", quando traduzimos da linguagem usual para a linguagem da lógica utilizaremos o simbolo "↔".

Sejam P e Q representações de duas proposições, denotamos por bicondicional a relação P↔Q, lê-se: P se, e somente se Q, podemos interpretar essa relação de duas maneiras:

1. P é condição necessária e suficiente para Q.

2. Q é condição necessária e suficiente para P.

Exemplo 2.11 *"Um número inteiro é par se, e somente se é múltiplo de 2."*

Nesse caso temos:

Se um número inteiro é par então ele é múltiplo de 2.

Se um número é múltiplo de 2 então ele é par.

Note que um número inteiro ser par é condição necessária para que seja múltiplo de 2, mas também é suficiente, uma vez que não existe múltiplo de 2 que não seja par.

Exemplo 2.12 *Seja A um subconjunto do domínio D de uma função f, e seja $x_0 \in A$. $f(x_0)$ é o valor mínimo de f em A se, e somente se $\forall x \in A$, tivermos $f(x) \geq f(x_0)$.*

Exemplo 2.13 *Sendo a e b números reais e positivos com $a \neq 1$ chama-se logaritmo de b na base a o expoente x ao qual se deve elevar a base "a" de modo que a potência a^x seja igual a b.*

$$\text{Simbolicamente: } log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$$

2.3.6 Negação

A Negação é a operação lógica que muda a valoração inteira de uma proposição. Na linguagem que usamos comumente para nos comunicar, quase sempre usamos a palavra NÃO quando queremos negar uma dada afirmação. Na linguagem da lógica utilizamos um entre dois símbolos para representar a negação, um sinal de acentuação gráfica, o "til"(~), o outro designado por cantoneira (¬) para exprimir tal relação lógica, assim sendo, se P é uma proposição qualquer, NÃO P é denotada simbolicamente por ~P ou ¬P.

Exemplo 2.14 *Se denotarmos por P a proposição: "A raiz quadrada de 2 é um número irracional ". Note que a proposição P é atômica, sendo assim a negação dessa proposição, ou seja, ~P será exatamente: "A raiz quadrada de 2* ***não*** *é um número irracional". adicionamos apenas a palavra* ***NÃO****.*

Mais adiante apresentamos uma seção especialmente para tratar da negação de proposições moleculares.

2.4 Tabela-Verdade

Na seção anterior foram expostos os conectivos da lógica de predicados assim como seus significados e maneiras corretas de utilizá-las. O valor-verdade de uma proposição composta depende de duas coisas: a primeira é o valor verdade de cada uma das proposições atômicas que compõem e a segunda os conectivos utilizados.

Existem alguns dispositivos para determinar o valor-verdade de uma proposição molecular, no entanto uma das mais práticas é um dispositivo denominado Tabela-Verdade. Empregamos **V** para denotar o valor lógico verdade, e a letra **F**, quando a proposição em questão é falsa. Existem muitas aplicações da tabela verdade, entre elas podemos citar a linguagem Dual da computação, circuitos elétricos e a validade da argumentação utilizada em demonstrações matemáticas.

Como exemplo vamos construir as tabelas verdades de proposições compostas em sua forma simplificada.

Definição 2.7 (Valoração de proposições compostas) *Já foi anteriormente definido pelo princípio do terceiro excluído que toda proposição assume um dos dois valores lógicos V ou F, sendo assim* *podemos definir a valoração de uma proposição como sendo uma função f que associa a cada proposição um dos valores lógicos V ou F, que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $f(\sim A) = V$ se, e somente se $f(A) = F$.

(ii) $f(A \wedge B) = V$ se, e somente se $f(A) = V$ e $f(B) = V$.

(iii) $f(A \vee B) = V$ se, e somente se $f(A) = V$ ou $f(B) = V$.

(iv) $f(A \underline{\vee} B)$ = V se, e somente se apenas um dos valores $f(A)$ ou $f(B)$ seja igual a V.

(v) $f(A \rightarrow B) = F$ se, e somente se $f(A) = V$ e $f(B) = F$.

(vi) $f(A \leftrightarrow B) = V$ se, e somente se $f(A) = f(B)$.

2.4.1 Tabela-verdade da Conjunção

Imagine a seguinte situação, você encontra com um amigo e ele diz o seguinte para você:

“Hoje eu vou estudar e depois vou à praia."

Em qual(is) hipótese(s) esses seu amigo falou a verdade para você? Suponha que ele tenha estudado, mas não tenha ido à praia depois, ele faltou com a verdade? Sim, ele faltou com a verdade. Por outro lado se ele foi à praia e não estudou, também mentiu. É fácil notar que ele só terá falado a verdade se as duas proposições atômicas forem verdadeiras.

Para melhor analisar, vamos traduzir para a linguagem lógica.

p: Hoje vou estudar.

q: Depois vou à praia.

Desse modo a proposição composta fica:

$$p \wedge q.$$

Para analisar todas as situações construímos a seguinte tabela-verdade

Tabela 2.3: Tabela-verdade da Conjunção

p	**q**	**p ∧ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.4.2 Tabela-Verdade da Disjunção Inclusiva

Analogamente ao que fizemos com a conjunção, analisemos uma situação. Suponha que alguém diga o seguinte para você:

"Esse final de semana irei estudar ou irei à praia."

Note que a princípio não há impedimento algum dessa pessoa fazer as duas coisas, porém nesse caso, diferentemente da conjunção, basta que uma das duas proposições seja verdadeira para que a frase toda seja também verdadeira. Vamos construir a tabela verdade da disjunção para melhor visualizarmos as possibilidades. Para tanto, vamos considerar o seguinte:

p: Esse final de semana irei estudar.

q: Esse final de semana irei à praia.

A proposição molecular na linguagem da lógica proposicional fica:

$$p \vee q$$

Tabela 2.4: Tabela-verdade da Disjunção inclusiva

p	**q**	**p ∨ q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.4.3 Tabela-Verdade da Disjunção Exclusiva

A disjunção exclusiva aparece de maneira geral na forma “ou, ou”. Lembro-me que enquanto garoto, ainda no meu ensino fundamental, adorava ir à casa da minha vó, o problema é que ela morava em outro estado e a oportunidade que tinha de ir era nas férias do final de ano. Mas existia sempre uma condição imposta por minha mãe. Lembro-me que uma dessas condições foi a seguinte: você passou por média, portanto pode escolher, ou você viaja para casa de sua vó, ou ganha uma bicicleta nova.

Nesse caso veja que há uma impossibilidade de ganhar as duas coisas, sendo assim a minha mãe cumpriria a promessa que fez, apenas se uma das partes for verdadeira.

Segue a tabela-verdade com as valorações para a disjunção exclusiva.

Tabela 2.5: Tabela-verdade da Disjunção Exclusiva

p	**q**	$\mathbf{p \veebar q}$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.4.4 Tabela-Verdade da Negação

Como visto anteriormente, a negação muda a valoração atribuída a uma proposição. Sendo assim sua tabela verdade fica:

Tabela 2.6: Tabela-verdade da Negação

P	$\sim$ **P**
F	V
V	F

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.4.5 Tabela-Verdade da Condicional

Diferentemente dos dois conectivos anteriormente apresentados, a condicional não é tão intuitiva. Em atividades aplicadas nas aulas para o ensino médio, nota-se que os alunos costumam fazer muita confusão quando a questão faz uso desse conectivo. No entanto, vamos seguir a mesma linha dos conectivos anteriores, isto é, vamos analisar uma situação.

Suponha que um amigo seu diga o seguinte:

"Se eu conseguir estudar pela manhã, irei à praia depois."

Analisando os possíveis casos:

(1º) Ele conseguiu estudar pela manhã e foi à praia depois. Nesse caso a "promessa"foi cumprida.

(2º) Ele conseguiu estudar, mas não foi à praia. Nesse caso está evidente que a promessa não foi devidamente cumprida. Este é o único caso onde a condicional é falsa, quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso.

(3º) Ele não conseguiu estudar pela manhã, mas mesmo assim ele foi à praia depois. Note que ele ainda não descumpriu a promessa, uma vez que a promessa era para o caso de ele ter conseguido estudar. A promessa não diz nada do que aconteceria se ele não estudasse, sendo assim nada impede que ele vá à praia mesmo se não conseguir estudar.

(4º) Ele não conseguiu estudar pela manhã e não foi à praia. Como ele havia dito que iria a praia se tivesse estudado, ele não estudou mas também não foi à praia, logo ele não descumpriu a promessa.

A frase "Se eu conseguir estudar pela manhã, irei à praia depois" pode ser entendida da seguinte maneira: Eu conseguir estudar pela manhã é condição suficiente para ir depois à praia, e não necessária. Da mesma maneira que podemos ainda entender como: Ir depois à praia é condição necessária para que eu tenha estudado pela manhã.

Traduzindo para a linguagem lógica fica:

p: Esse final de semana irei estudar.

q: Esse final de semana irei à praia.

$$p \to q.$$

Tabela 2.7: Tabela-verdade da Condicional

p	**q**	**p → q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.4.6 Tabela-Verdade da Bicondicional

Podemos entender a bicondicional como sendo a conjunção de duas proposições condicionais.

Exemplo 2.15 *Eu irei à praia se, e somente se conseguir estudar pela manhã.*

Pode ser entendida como: Eu irei à praia se conseguir estudar pela manhã e irei estudar pela manhã se eu for à praia.

Representação na linguagem da lógica;

p: Esse final de semana irei estudar.

q: Esse final de semana irei à praia.

$$(p \leftrightarrow q) \text{ ou ainda } (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

Nesse caso,é fácil perceber que a bicondicional entre p e q só será verdadeira se $f(p \rightarrow q) = V$ e $f(q \rightarrow p) = V$.

Sendo assim, construímos a seguinte tabela:

Tabela 2.8: Tabela-verdade da Bicondicional

p	**q**	**p ↔ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.4.7 Número de Linhas da Tabela-Verdade

Vimos que em todas as Tabelas-verdade que foram apresentadas anteriormente o número de linhas foi igual a 4. O teorema a seguir prova que o número de linhas está relacionado com o número de proposições simples que a integram.

Teorema 2.1 *A Tabela-verdade de uma proposição composta com n proposições simples componentes contém exatamente* 2^n *linhas.*

Demonstração: Já foi definido pelo princípio do terceiro excluído que toda proposição seja simples ou molecular possui um dos dois valores lógicos mutuamente excludentes: verdade(V) ou falsidade (F). Considere agora $P(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ uma proposição composta por n proposições simples $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Nesse caso para cada proposição simples tem-se 2 possibilidades de valoração (V) ou (F).Usando um conceito básico de Análise Combinatória, pelo principio multiplicativo temos: $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n \text{ vezes}} = 2^n$ possíveis valorações para as proposições compostas.

2.4.8 Dispondo na Tabela-Verdade os Valores Lógicos das Proposições Simples

Mais uma vez considere a proposição composta por n proposições simples

$$P(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n).$$

Foi demonstrado no Teorema 2.1 que a tabela-verdade de P contém exatamente 2^n linhas. Sendo assim segue um método para distribuição das valorações das proposições simples na Tabela-Verdade.

1º) Para a primeira proposição simples p_1 atribuem-se $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ valores lógicos verdade (V), seguidos de 2^{n-1} valores lógicos falsidade (F).

2º) Para a segunda proposição p_2 atribuem-se $\frac{2^n}{4}$ valores lógicos verdade(V) seguidos da mesma quantidade de valores de falsidade(F), seguidos da mesma quantidade de valores verdadeiro(V). Por último $\frac{2^n}{4}$ valores lógicos falsidade (F).

Generalizando temos que à k-ésima proposição simples ($k \leq n$) atribuímos alternadamente $\frac{2^n}{2^k} = 2^{n-k}$ valores lógicos verdade(V) seguidos de igual número de valores lógicos falsidade (F).

A título de exemplo vamos fazer a Tabela-Verdade para $n = 4$.

Tabela 2.9: Distribuição de valoração para as proposições simples

Número da linha	p_1	p_2	p_3	p_4	$P(p_1, p_2, p_3, P_4)$
01	V	V	V	V	
02	V	V	V	F	
03	V	V	F	V	
04	V	V	F	F	
05	V	F	V	V	
06	V	F	V	F	
07	V	F	F	V	
08	V	F	F	F	
09	F	V	V	V	
10	F	V	V	F	
11	F	V	F	V	
12	F	V	F	F	
13	F	F	V	V	
14	F	F	V	F	
15	F	F	F	V	
16	F	F	F	F	

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.4.9 Quadro de Resumo das Tabelas-Verdade

Tabela 2.10: Resumo das tabelas-verdade

Estrutura lógica	É V quando	É F quando
$p \wedge q$	p e q são, ambas, V	Uma das duas for F
$p \vee q$	Uma das duas for V	p e q são, F
$p \underline{\vee} q$	p e q tiverem valores lógicos diferentes	p e q tiverem valores lógicos iguais
$p \rightarrow q$	nos demais casos	p é V e q é F
$p \leftrightarrow q$	p e q tiverem valores lógicos iguais	p e q tiverem valores lógicos diferentes
$\sim p$	p é F	p é V

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.5 Equivalência Lógica

Definição 2.8 *Dizemos que duas proposições P e Q são equivalentes e indicaremos por $P \Leftrightarrow Q$ (Lê-se P implica logicamente em Q, ou simplesmente P equivale a Q) se, e somente se P e Q possuem os mesmos valores lógicos, isto é, quando P é verdade, Q também é verdade, valendo a mesma coisa para a valoração falsa. De maneira simplificada, duas proposições são logicamente equivalentes quando suas tabelas-verdade são idênticas. Utilizaremos o símbolo "$\Leftrightarrow$" para representar a relação de equivalência entre duas proposições .*

Seguem algumas equivalências lógicas que podem facilmente ser verificadas utilizando a tabela-verdade.

- $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

Tabela 2.11: Exemplo de equivalência lógica

p	**q**	**p → q**	$\sim p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.16 *(FGV 2013) Considere a sentença a seguir.*

"Qualquer que seja o quadrilátero convexo, se ele é equilátero ou equiângulo, então ele é regular."

Assinale a alternativa que indica a sentença logicamente equivalente à sentença acima.
A) Qualquer que seja o quadrilátero convexo, se ele é regular então ele é equilátero ou equiângulo.
B) Existe um quadrilátero convexo que é equilátero ou equiângulo mas que não é regular.
C) Qualquer que seja o quadrilátero convexo, se ele não é equilátero ou não é equiângulo então ele não é regular.
D) Algum quadrilátero convexo não é regular, mas é equilátero ou equiângulo.
E) Qualquer que seja o quadrilátero convexo, ele não é equilátero nem é equiângulo, ou ele é regular.

Solução:

Sabemos que "$p \rightarrow q$" é logicamente equivalente á "$\sim p \vee q$, e na Subseção 2.5.6 foi mostrado que a negação da disjunção inclusiva "$p \vee q$ é dada por "$\sim p \wedge \sim q$. Sendo assim, podemos concluir que uma sentença equivalente à proposição em questão é:

"Qualquer que seja o quadrilátero convexo, ele não é equilátero nem é equiângulo, ou ele é regular."

Alternativa [E].

- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$

Tabela 2.12: Exemplo de equivalência lógica

p	**q**	**p → q**	**q → p**	**p ↔ q**	**(p→ q) ∧ (q→ p)**
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.17 *(ESAF - 2012 (modificada))A proposição "um número inteiro é par se e somente se o seu quadrado for par" equivale logicamente à proposição:*

A) se um número inteiro for par, então o seu quadrado é par, e se o quadrado de um número inteiro for par, então o número é par.

B) se um número inteiro for ímpar, então o seu quadrado é ímpar.

C) se o quadrado de um número inteiro for ímpar, então o número é ímpar.

D) se um número inteiro for par, então o seu quadrado é par, e se o quadrado de um número inteiro não for par, então o número não é par.

E) se um número inteiro for par, então o seu quadrado é par.

Solução: Considere as seguintes proposições simples:

p: Um número inteiro é par.

q: O quadrado de um número é par.

A proposição composta da questão pode ser representada por $p \leftrightarrow q$, que como vimos é equivalente à proposição $(p \to q) \wedge (q \to p)$. Sendo assim a alternativa correta para essa questão é a letra [A].

Observação 2.1

Da maneira que está definida a equivalência entre duas proposições, podemos tirar algumas consequências diretas, são algumas delas:

i) Uma proposição é sempre equivalente à conjunção entre ela e ela mesma

$$p \Leftrightarrow p \wedge p.$$

ii) Uma proposição é sempre equivalente à disjunção entre ela e ela mesma

$$p \Leftrightarrow p \vee p.$$

iii) Se duas proposições P e Q são ambas tautológicas ou ambas contradições, teremos $P \Leftrightarrow Q$.

2.5.1 Propriedades da equivalência

Sejam P, Q e R três proposições. De acordo com a definição de equivalência seguem algumas propriedades:

1. Reflexiva: $P \Leftrightarrow P$ e $Q \Leftrightarrow Q$;

2. Simétrica: Se $P \Leftrightarrow Q$, então $Q \Leftrightarrow P$;

3. Transitiva: Se $P \Leftrightarrow Q$ e $Q \Leftrightarrow R$, então $P \Leftrightarrow R$;

4. Dupla negação: $\sim(\sim P) \Leftrightarrow P$.

2.6 Negação de Proposições Compostas

Parte da demonstrações de alguns teoremas se faz necessário saber negar o que queremos demonstrar a fim de encontrarmos uma contradição e assim concluirmos que de fato o teorema é consistente.

2.6.1 Negação da Conjunção

Considere a seguinte conjunção:

“O número 2 é primo **e** $\sqrt{5}$ é um número irracional."

Em minhas experiências em sala de aula percebo que a grande maioria dos alunos do Ensino Médio apresenta dificuldades no que diz respeito à negação de proposições compostas, exatamente porque pensam que negar é apenas acrescentar a palavra não.

Lembrando que a negação de uma proposição, como visto anteriormente, deve mudar todos os valores lógicos de tal proposição. Nesse caso podemos analisar da seguinte maneira: Considerando que a proposição mencionada anteriormente seja verdadeira, o que é necessário para que torne-se falsa? Como foi visto na tabela verdade da conjunção, basta que uma das proposições atômicas seja falsa, isto quer dizer que a primeira deve ser falsa **ou** a segunda deve ser, ou ainda as duas serem falsas.

De maneira geral se tivermos uma proposição $P(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) = p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ a negação de P, isto é, $\sim P(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ será dada por $\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee \sim p_n$.

Exemplo 2.18 *Visto isto, a negação da proposição:*

"O número 2 é primo ***e*** $\sqrt{5}$ *é um número irracional."*

É exatamente:

" O número 2 não é primo ***ou*** $\sqrt{5}$ *não é um número irracional."*

Vamos verificar utilizando a tabela-verdade:

Tabela 2.13: Tabela-verdade negação da Conjunção

p	**q**	**¬p**	**¬q**	**p ∧ q**	**¬(p ∧ q)**	**(¬p ∨¬ q)**
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.19 *(VUNESP - 2015) A afirmação "canto e danço" tem como uma negação a afirmação contida na alternativa:*

A) não danço ou não canto.

B) danço ou canto.

C) não canto e não danço.

D) canto ou não danço.

E) danço ou não canto.

Solução:

Sejam,

p: canto

q: danço

A proposição composta é dada por: $p \wedge q$, que como visto tem por negação a proposição $\neg p \vee \neg q$. Que fica:

"Não canto ou não danço."

Alternativa [A].

2.6.2 Negação da Disjunção Inclusiva

Seja P a proposição: O número 2 é primo **ou** $\sqrt{5}$ é irracional. Note que considerando verdadeira tal proposição, ela só será falsa se as duas partes forem falsas como mencionado na construção da tabela verdade. Sendo assim a negação da proposição fica:

"O número 2 não é primo **e** $\sqrt{5}$ não é irracional."

De maneira geral teremos:

$$\sim (P \vee Q) \Rightarrow \sim P \wedge \sim Q.$$

Vejamos como fica na tabela-verdade.

Tabela 2.14: Tabela-verdade negação da Disjunção inclusiva

p	**q**	$\neg$ **p**	$\neg$ **q**	**p** $\vee$ **q**	$\neg$**(p** $\vee$ **q)**	$\neg$**p** $\wedge\neg$ **q**
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.20 *(ESAF - 2009) A negação de: Milão é a capital da Itália ou Paris é a capital da Inglaterra é:*

A) Milão não é a capital da Itália.

B) Milão não é a capital da Itália e Paris não é a capital da Inglaterra.

C) Milão não é a capital da Itália ou Paris não é a capital da Inglaterra.

D) Paris não é a capital da Inglaterra.

E) Milão é a capital da Itália e Paris não é a capital da Inglaterra.

Solução:

Sendo:

p: Milão é capital da Itália.

q: Paris é capital da Inglaterra.

A proposição composta apreciada na questão fica: $p \vee q$*, cuja negação é dada por* $\neg p \wedge \neg q$*. portanto, a alternativa correta é a letra [B].*

2.6.3 Negação da Disjunção exclusiva

Vamos analisar a seguinte proposição composta:

"O gráfico de uma função quadrática tem concavidade voltada para cima ou para baixo."

É fácil notar que não é possível que sejam as duas partes dessa proposição verdadeiras, da mesma maneira que não podem também ser as duas partes falsas. Sendo assim trata de fato de uma disjunção exclusiva e como foi mencionado antes a negação de uma proposição composta é uma proposição com valorações opostas às valorações da proposição em apreço. Sendo assim a negação da disjunção exclusiva deve ser uma proposição que seja verdadeira quando a disjunção for falsa e seja falsa quando a disjunção for verdadeira.

É fato que essa proposição será falsa, somente se as duas partes tiverem valorações iguais, que é exatamente o contrário de proposições bicondicionais. Concluímos assim que a negação de $p \underline{\vee} q$ é dada por $p \leftrightarrow q$. vamos conferir usando o dispositivo da tabela-verdade:

Tabela 2.15: Tabela-verdade negação da Disjunção Exclusiva

p	**q**	**$\neg$ p**	**$\neg$ q**	**p $\underline{\vee}$ q**	**$\neg$(p $\underline{\vee}$ q)**	**p $\leftrightarrow$ q**
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.6.4 Negação da Condicional

De acordo com o que foi explanado na sessão que trata sobre construção da tabela verdade da condicional, vimos que se tivermos uma proposição do tipo $P \rightarrow Q$, só há uma maneira de tal proposição ser falsa, à saber: se a primeira for verdadeira **e** a segunda for falsa. Pois bem , assim concluímos que a negação da proposição $\sim (P \rightarrow Q)$ é dada por $P \wedge \sim Q$.

Tabela 2.16: Negação da Condicional

p	**q**	**$\neg$ q**	**p $\rightarrow$ q**	**$\neg$ (p $\rightarrow$ q)**	**p $\wedge \sim$ q**
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.21 *“Se um número real é decimal infinito e não periódico, ele é irracional."*

A negação dessa proposição fica: “Um número é decimal infinito e não periódico, ainda assim não é irracional”.

Exemplo 2.22 *(FGV-TSE/SE-2015) Considere a afirmação: “Se hoje é sábado, amanhã não trabalharei.”*

A negação dessa afirmação é:

A) Hoje é sábado e amanhã trabalharei.

B) Hoje não é sábado e amanhã trabalharei.

C) Hoje não é sábado ou amanhã trabalharei.

D) Se hoje não é sábado, amanhã trabalharei.

E) Se hoje não é sábado, amanhã não trabalharei

Solução:

Temos uma proposição condicional $p \rightarrow q$ no enunciado, onde:

p: hoje é sábado.

q: amanhã não trabalharei.

Sua negação como vimos é dada por “$p \wedge \neg q$”. Portanto, podemos escrever a negação assim:

"Hoje é sábado e amanhã trabalharei"

Alternativa [A].

2.6.5 Negação da Bicondicional

Como a bicondicional é uma "dupla condicional", isto é, $(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$, só será falsa se apenas uma das proposições for falsa. Concluímos então que:

$$\sim (P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P).$$

Uma outra maneira de negar a bicondicional, é utilizando o "duplo OU" (disjunção exclusiva). Para verificarmos de fato, podemos utilizar a tabela-verdade como recurso.

Tabela 2.17: Negação da Bicondicional

p	**q**	$\mathbf{p \leftrightarrow q}$	$\mathbf{\sim(p \leftrightarrow q)}$	$\mathbf{p \wedge \sim q}$	$\mathbf{q \wedge \sim p}$	$\mathbf{(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)}$	$\mathbf{p \underline{\vee} q}$
V	V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F	F

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.23 *(FDRH - 2008) A negação da proposição "Alfredo vai ao médico se, e somente se está doente" é a da alternativa:*

A) "Se Alfredo não vai ao médico, então ele não está doente".

B) "Alfredo vai ao médico e não está doente".

C) "Ou Alfredo vai ao médico, ou Alfredo está doente".

D) "Alfredo está doente e não vai ao médico".

E) "Alfredo vai ao médico ou não está doente e está doente ou não vai ao médico".

Solução:

Na subseção que precede esse exemplo foram apresentadas duas formas distintas de negar uma proposição bicondicional. No caso dessa questão, diante do que foi exposto no texto e na tabela verdade da negação da bicondicional, podemos inferir que a assertiva para essa questão é a alternativa [C].

2.7 Negação de Proposições com Quantificadores

A negação de proposições que contêm em sua estrutura os quantificadores universais e existenciais geralmente causam muita confusão por causa dos antônimos. Sempre que introduzo esse conteúdo em minhas aulas pergunto qual a negação de uma proposição com o quantificador universal **“Todos"**, por exemplo: “Todos os alunos dessa escola serão aprovados por média”, geralmente os alunos respondem “nenhum aluno dessa escola será aprovado por média".

2.7.1 Negação de “Todos”

Considere a seguinte proposição:

“Todos os alunos da terceira série do Ensino Médio têm 17 anos.”

Mais uma vez vale lembrar que a negação é a operação lógica que tem por objetivo trocar a valoração de uma proposição, isto é, contradizer uma proposição. Sendo assim, vale sempre fazer a seguinte pergunta: sob qual(is) hipótese(s) a proposição torna-se falsa? No caso da proposição em questão, perceba que basta que pelo menos um dos alunos da turma não tenha 17 anos para que a proposição seja falsa, logo a negação fica:

“ Algum aluno da terceira série do Ensino Médio não tem 17 anos.”

Ou simplesmente,

“Nem todos os alunos da terceira série do Ensino Médio tem 17 anos.”

Note que poderíamos também trocar o quantificador universal pelo existencial, ficando:

“ Existe aluno da terceira série do Ensino Médio que não tem 17 anos.”

Exemplo 2.24 *(FGV - 2013) Considere a sentença a seguir.*

“Qualquer que seja o candidato a uma vaga de consultor legislativo na Assembleia Legislativa do Estado do Maranhão, se ele foi aprovado então, estudou muito ou teve sorte.”

Assinale a alternativa que indica a negação lógica dessa sentença.

A) Qualquer que seja o candidato a uma vaga de consultor legislativo na Assembleia Legislativa do Estado do Maranhão, se ele foi aprovado então não estudou muito nem teve sorte.

B) Nenhum candidato a uma vaga de consultor legislativo na Assembleia Legislativa do Estado do Maranhão foi aprovado e não estudou muito nem teve sorte.

C) Algum candidato a uma vaga de consultor legislativo na Assembleia Legislativa do Estado do Maranhão não foi aprovado ou estudou muito ou teve sorte.

D) Algum candidato a uma vaga de consultor legislativo na Assembleia Legislativa do Estado do Maranhão foi aprovado e não estudou muito nem teve sorte.

E) Nenhum candidato a uma vaga de consultor legislativo na Assembleia Legislativa do Estado do Maranhão não foi aprovado e estudou muito mas não teve sorte.

Solução:

Note que a proposição é composta por um quantificador universal, uma condicional e uma disjunção inclusiva como consequente da condicional.

Perceba que a palavra "Qualquer" pode ser entendida como "todo", sendo assim negar a proposição em questão consiste em negar o quantificador e também negar a condicional. Nesse caso negação do quantificador "qualquer" é a palavra algum e as negações da condicional e disjunção foram apresentadas anteriormente. Portanto a negação da proposição requerida é:

"Algum candidato a uma vaga de consultor legislativo na Assembleia Legislativa do Estado do Maranhão foi aprovado e não estudou muito nem teve sorte."

Alternativa [D].

Exemplo 2.25 *(FGV - 2010) A negação de "Todos viajaram e retornaram todos na terça-feira" é:*

A) Ninguém viajou, portanto não retornaram todos na terça-feira.

B) Ninguém viajou ou ninguém retornou na terça-feira.

C) Pelo menos um não viajou ou alguém não retornou na terça-feira.

D) Pelo menos um não viajou e alguém não retornou na terça-feira.

E) Pelo menos um não viajou ou ninguém retornou na terça-feira.

Solução:

Nesse caso temos uma proposição composta por uma conjunção, relembrando que a negação da conjunção "$p \wedge q$"é dada por "$\sim p \vee \sim q$ (Subseção 2.5.1). Mas, observe que na primeiro parte da

conjunção tem um quantificador "todos" cuja negação discutida nessa seção é dada por "Pelo menos um".
Portanto a negação da proposição em questão é dada por:

" Pelo menos um não viajou ou alguém retornou na terça-feira."

Alternativa [C].

2.7.2 Negação de "Algum"

A negação de "Algum A é B"é dado por "Nenhum A é B".

Exemplo 2.26 *"Algum número primo é divisor de 100."*

A negação dessa proposição é:

"Nenhum número primo é divisor de 100."

Exemplo 2.27 *(FGV- 2013) Considere a afirmação: "Alguns homens sabem cozinhar".*
A negação dessa afirmação é:
A) Algumas mulheres sabem cozinhar.
B) Alguns homens não sabem cozinhar.
C) Algumas mulheres não sabem cozinhar.
D) Nenhum homem sabe cozinhar.
E) Todos os homens sa bem cozinhar.
Solução:
Dentro do que foi exposto, é fácil perceber que a resposta é a alternativa [D].

2.7.3 Negação de "Nenhum"

A negação de "Nenhum A é B"é dado por "Algum A é B" ou ainda "Existe A que também é B".

Exemplo 2.28 *"Nenhum número real é solução da equação $x+1=3$."*

A negação dessa proposição é:

"Existe pelo menos um número real que é solução da equação $x+1=3$. "

Exemplo 2.29 *(FGV - 2013) Não é verdadeira a afirmação: "Nenhum motorista é maluco". Isto significa que*

A) Há, pelo menos, um motorista maluco.

B) Alguns malucos são motoristas.

C) Todos os motoristas são malucos.

D) todos os malucos são motoristas.

E) Todos os motoristas não são malucos.

Solução:

Pelo que foi apresentado anteriormente, chegamos rápidamente à conclusão de que a negação da proposição dada é:

"Há, pelo menos, um motorista maluco."

Alternativa [A].

2.7.4 Resumo das Negações de Proposições Compostas ou com Quantificadores

Tabela 2.18: Resumo das negações de proposições compostas

$\sim (p \wedge q)$	é	$\sim p \vee \sim q$ (lei de Morgan)
$\sim (p \vee q)$	é	$\sim p \wedge \sim q$ (lei de Morgan)
$\sim (p \underline{\vee} q)$	é	$p \leftrightarrow q$
$\sim (p \rightarrow q)$	é	$p \wedge \sim q$
$\sim (p \leftrightarrow q)$	é	$p \underline{\vee} q$
$\sim (\sim p)$	é	p
Todo A é B	é	Algum A não é B
Algum A é B	é	Nenhum A é B
Nenhum A é B	é	Algum A é B

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.8 Tautologia, Contradição e Contingência

Existem algumas proposições compostas que tornam-se notáveis pelas características de suas valorações, tais proposições são muito importantes quando tratamos a respeito das demonstrações matemáticas, como veremos no próximo capítulo.

Definição 2.9 (Tautologia) *Seja $P(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ uma proposição composta por n proposições simples, dizemos que P é uma tautologia se, e somente se P é sempre verdadeira independentemente das valorações de $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$.*

Exemplo 2.30 *Considere p e q duas proposições simples e $P(p, q) = (p \wedge q) \rightarrow p$ uma proposição composta. Verifiquemos com o auxílio da tabela verdade que $P(p, q)$ é sempre verdadeira independentemente das valorações de p e q.*

Tabela 2.19: Exemplo de Tautologia

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 2.10 (Contradição) *Denominamos contradição às proposições compostas do tipo $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ tais que suas valorações são todas (F) independendo dos valores das proposições simples que a compõe.*

Exemplo 2.31 *O exemplo mais comum é a conjunção $p \wedge (\sim p)$.*

Tabela 2.20: Exemplo de Contradição

p	$\sim p$	$p \wedge (\sim p)$
V	F	F
V	F	F
F	V	F
F	V	F

Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 2.11 (Contingência) *Uma contingência ocorre quando a proposição composta não é tautológica nem contraditória, isto é, nem todas as valorações são verdadeiras ou falsas.*

Exemplo 2.32 *Façamos a Tabela-Verdade da seguinte proposição:* $\sim (P \vee Q) \leftrightarrow P$

Tabela 2.21: Exemplo de Contingência

p	q	$(p \vee q)$	$\sim (p \vee q)$	$\sim (p \vee q) \leftrightarrow p$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	V
F	F	F	V	F

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.9 Contrapositiva e Recíproca

Tanto na matemática como na própria argumentação dialética utilizamos muito a implicação condicional "se, então". O problema é a confusão que existe na utilização. O exemplo de erro mais comum é o de pensar que se p implica em q, então q também implica em p. Para melhor exemplificar considere a seguinte proposição:

Exemplo 2.33 *"Se eu beber, então não dirijo."*

Isso quer dizer que se eu não dirijo é porque bebi? Claro que não! Posso não dirigir simplesmente porque não quero e o que disse anteriormente continua sendo verdade. O que está garantido é tão somente que não dirigiria caso resolvesse beber. Agora suponha que resolvi que não vou beber, então quer dizer que irei dirigir? Absolutamente não! A proposição só afirma que se eu beber, eu não vou dirigir. Ela não afirma nada caso eu resolva não beber, sendo assim posso dirigir ou não. Por outro lado, suponha que eu resolvi dirigir, e desejo cumprir o que foi prometido na proposição anteriormente enunciada, então podemos concluir que eu não irei beber. Vamos deixar bem definido o que é a contrapositiva e o que é a recíproca de uma implicação.

Definição 2.12 *Dadas duas proposições P e Q e a fórmula $P \to Q$, chamamos de recíproca de $P \to Q$ a fórmula $Q \to P$.*

Como vimos no exemplo que iniciou essa sessão, não existe uma relação de equivalência entre uma implicação e sua recíproca, isto é se P implica em Q, não necessariamente Q deverá implicar em P.

Definição 2.13 *Dadas duas proposições P e Q e a fórmula $P \to Q$, chamamos de contrapositiva de $P \to Q$ a fórmula $\sim Q \to \sim P$.*

Proposição 2.1 *Uma implicação e sua contrapositiva são equivalentes logicamente, isto é, sendo f a função que relaciona uma proposição à sua valoração como definida anteriormente, e sendo P e Q duas proposições teremos $f(P \to Q) = f(\sim Q \to \sim P)$.*

Podemos verificar isso analisando a tabela verdade das duas fórmulas.

Exemplo 2.34 *Considere a seguinte proposição:*

"Se eu estudo lógica, então aprendo melhor a matemática."

Vamos construir uma tabela-verdade com as valorações dessa implicação, de sua recíproca e da contrapositiva.

Em primeiro lugar vamos traduzir para a linguagem lógica todas as fórmulas que desejamos construir a tabela-verdade.

l: Eu estudo lógica.

m: Aprendo melhor a matemática.

Sendo assim as fórmulas ficam: $(l \to m)$, $(m \to l)$ e $(\sim m \to \sim l)$.

Tabela 2.22: Exemplo de recíproca e contrapositiva

l	**m**	**l → m**	**m → l**	**~ m → ~ l**
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.35 *(FGV - 2014) Considere a sentença: "Se Geraldo foi à academia então Jovelina foi ao cinema." É correto concluir que*

A) se Geraldo não foi à academia então Jovelina não foi ao cinema.

B) se Jovelina foi ao cinema então Geraldo foi à academia.

C) Geraldo foi à academia ou Jovelina foi ao cinema.

D) Geraldo foi à academia e Jovelina foi ao cinema.

E) Geraldo não foi à academia ou Jovelina foi ao cinema.

Solução:

Perceba que na alternativa B é apresentada exatamente a recíproca da proposição , que como mostramos, não é equivalente à proposição em questão. Na verdade a solução para essa questão é uma proposição equivalente à proposição dada, que nesse caso por se tratar de uma condicional do tipo "$p \to q$" uma proposição equivalente é $\sim p \vee q$. Logo, a alternativa correta para essa questão é aquela que apresenta a seguinte proposição:

"Geraldo não foi à academia ou Jovelina foi ao cinema."

Alternativa [E].

Exemplo 2.36 *(VUNESP - 2015) Uma equivalente da afirmação "Se eu estudei, então tirei uma boa nota no concurso" está contida na alternativa:*

A) Se eu tirei uma boa nota no concurso, então estudei.

B) Estudei e tirei uma boa nota no concurso.

C) Não estudei e não tirei uma boa nota no concurso.

D) Se eu não tirei uma boa nota no concurso, então não estudei.

E) Se eu não estudei, então não tirei uma boa nota no concurso.

Solução: *Observe que logo na primeira alternativa a proposição é a recíproca da sentença em questão, talvez um aluno pouco atento seja levado a considerá-la como sendo verdadeira, mas nós mostramos que uma sentença não é necessariamente equivalente à sua recíproca. Na alternativa [D] é apresentada a contrapositiva, agora sim temos uma relação de equivalência lógica. Portanto a sentença que representa uma equivalência com a proposição dada é:*

"Se eu não tirei uma boa nota no concurso, então não estudei."

2.10 Sugestões de Exercícios

1. (FCC/ICMS-SP) Das cinco frases abaixo, quatro delas têm uma mesma característica lógica em comum, enquanto uma delas não tem essa característica.

   I) 2012 não é um ano bissexto.

   II) A quinta parte de 6 dezenas é igual a 12.

   III) Leia o próximo item.

   IV) Existe um número inteiro e não racional.

   V) Todos os escritores são poetas.

   A frase que não possui essa característica comum é a

   A) I.

   B) II.

   C) III.

   D) IV.

   E) V.

2. (FCC) Considere a proposição "Paula estuda, mas não passa no concurso". Nessa proposição, o conectivo lógico é

   A) disjunção inclusiva.

   B) conjunção.

   C) disjunção exclusiva.

   D) condicional.

   E) bicondicional.

3. (CESGRANRIO) Sejam as proposições:

   A: Ana estuda

   B: Beto briga

   C: Carlos canta

   A linguagem corrente "Se Carlos não canta, então não é verdade que Ana estuda e Beto não briga" pode ser representada, na forma simbólica, por:

   A) $\sim C \to \sim A \wedge B$.

B) $C \rightarrow \sim A \wedge \sim B$.

C) $C \rightarrow \sim (A \vee B)$.

D) $\sim C \rightarrow \sim (A \wedge \sim B)$.

E) $\sim C \rightarrow \sim (A \vee B)$.

Texto para as Questões 4 e 5

Considere as seguintes proposições simples: A: andar; B: beber; C: cair; D: dormir. Com relação à proposição:“Se ando e bebo, então caio, mas não durmo ou não bebo."

4. (FGV) Transformando para linguagem simbólica a proposição composta anterior, teremos a seguinte estrutura lógica:

   A) $(A \wedge B) \rightarrow (C \wedge \sim D \vee \sim B)$.

   B) $(A \vee B) \rightarrow (C \vee \sim D) \wedge \sim B$.

   C) $(A \wedge \sim B) \rightarrow C \wedge (\sim D \vee B)$.

   D) $(A \wedge B) \rightarrow (C \wedge \sim D) \vee B$.

   E) $(A \wedge \sim B) \rightarrow (C \wedge \sim D \vee B)$.

5. (FGV) O número de linhas da tabela-verdade da proposição composta anterior é igual a:

   A) 2.

   B) 4.

   C) 8.

   D) 16.

   E) 32.

6. (CESGRANRIO) O número de linhas da tabela-verdade da proposição “Se estudo ou não compreendo, então é falso que ou trabalho ou não durmo”, é de:

   A) 2.

   B) 4.

   C) 8.

   D) 16.

   E) 32.

7. (CESPE/UnB) Observe as seguintes proposições compostas:

- $2 + 7 = 11$ ou 3 não é um número primo.
- Se 2 é divisor de 15, então 3 não é divisor de 21.
- Se $3 > 5$, então $7 < 5$
- Π é racional ou -8 é um número inteiro.
- 2,333... é uma dízima periódica e $\frac{1}{3}$ não é.

Nesse caso, é correto afirmar que:

A) existem 2 proposições falsas e 3 verdadeiras.

B) existem 3 proposições falsas e 2 verdadeiras.

C) existem 4 verdadeiras e 1 falsa.

D) todas são verdadeiras.

E) todas são falsas.

8. (CONSULPLAN) Qual das proposições abaixo é verdadeira?

A) O ar é necessário à vida e a água do mar é doce.

B) O avião é um meio de transporte ou o aço é mole.

C) 6 é ímpar ou $2 + 3 \neq 5$.

D) O Brasil é um país e Sergipe é uma cidade.

E) O papagaio fala e o porco voa.

9. (CESPE/UnB) Considere as afirmações abaixo.

I) Uma proposição pode admitir, no máximo, duas valorações lógicas (V ou F).

II) A proposição "$(7 < 6) \vee (8 - 3 > 6)$"é falsa.

III) A proposição "Se 91 é divisível por 7 $\rightarrow$ 65 não é múltiplo de 13"é verdadeira.

É verdade o que se afirma APENAS em:

A) I.

B) II.

C) III.

D) I e II.

E) I e III.

10. CESPE/UnB) Considere as seguintes proposições.

    I) $(7+3=10) \wedge (5-12=7)$

    II) A palavra crime é dissílaba.

    III) Se “lâmpada"é uma palavra trissílaba, então “lâmpada"tem acentuação gráfica.

    IV) $(8-4=4) \wedge (10+3=13)$

    V) Se $x=4$ então $x+3<6$

    Entre essas proposições, há exatamente:

    A) uma F.

    B) duas F.

    C) três F.

    D) quatro F.

    E) todas são F.

11. (CESPE/UnB) A tabela-verdade da proposição:$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ apresenta, como solução:

    A) apenas valorações V.

    B) apenas valorações F.

    C) duas valorações V.

    D) uma valoração V.

    E) uma valoração F.

12. (CESPE/UnB) Se A, B e C forem proposições simples e distintas, então a solução da tabela-verdade da proposição: $(A \rightarrow \sim B) \wedge (C \rightarrow \sim A)$, será formada por:

    A) apenas valores V.

    B) apenas valores F.

    C) mais valorações F do que V.

    D) mais valorações V do que F.

    E) mesma quantidade de valorações V ou F.

13. (CESPE/UnB) A negação da proposição A, simbolizada por $\sim A$ será F se A for V, e será V se A for F. Então, para todas as possíveis valorações V ou F atribuídas às proposições A e B, é correto concluir que a proposição $(\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A)$possui exatamente

A) 4 valores F.

B) 4 valores V.

C) 1 valor V e 3 valores F.

D) 1 valor F e 3 valores V.

E) 2 valores V e 2 valores F

14. (CESGRANRIO) Dizer que não é verdade que "José é gordo e Carlos é alto" é logicamente equivalente a dizer que é verdade que:

    A) José não é gordo ou Carlos não é alto.

    B) José não é gordo e Carlos não é alto.

    C) José é gordo ou Carlos não é alto.

    D) Se José não é gordo, então Carlos é alto.

    E) Se José não é gordo, então Carlos não é alto.

15. (TRT 1ª Região/2008/CESPE) Utilizando as letras proposicionais adequadas na proposição composta "Nem Antônio é desembargador nem Jonas é juiz", assinale a opção correspondente à simbolização correta dessa proposição.

    A) $\sim (A \wedge B)$

    B) $(\sim A) \vee (\sim B)$

    C) $(\sim A) \wedge (\sim B)$

    D) $(\sim A) \rightarrow B$

    E) $\sim [A \vee (\sim B)]$

16. (TRT-9R-FCC)Considere a seguinte proposição "na eleição para a prefeitura, o candidato A será eleito ou não será eleito". Do ponto de vista lógico, a afirmação da proposição caracteriza:

    A) Um silogismo

    B) Uma tautologia

    C) Uma equivalência

    D) Uma contingência

    E) Uma contradição

17. (UFBA)A negação de "hoje é segunda-feira e amanhã não choverá" é:

A) Hoje não é segunda-feira e amanhã não choverá.

B) Hoje não é segunda-feira ou amanhã choverá.

C) Hoje não é segunda-feira então amanhã choverá.

D) Hoje não é segunda-feira nem amanhã choverá.

E) Hoje é segunda-feira ou amanhã choverá.

18. (AFC - ESAF) Dizer que não é verdade que Pedro é pobre e Alberto é alto, é logicamente equivalente a dizer que é verdade que:

    A) Pedro não é pobre ou Alberto não é alto.

    B) Pedro não é pobre e Alberto não é alto.

    C) Pedro é pobre ou Alberto não é alto.

    D) Se Pedro não é pobre, então Alberto é alto.

    E) Se Pedro não é pobre, então Alberto não é alto.

19. (Vunesp) Sobre as tabelas de verdade dos conectivos de disjunção (inclusiva), conjunção e implicação (material), assinale a alternativa correta.

    A) As conjunções só são falsas quando ambos os conjuntos são falsos.

    B) Não existe implicação falsa com antecedente verdadeiro.

    C) As disjunções são falsas quando algum dos disjuntos é falso.

    D) Só há um caso em que as implicações são verdadeiras.

    E) As implicações são verdadeiras quando o antecedente é falso.

20. (FUNCAB) A negação de "Arthur ou Paulo são agentes administrativos e Mauro mora em Brasília" é:

    A) Arthur e Paulo não são agentes administrativos e Mauro mora em Brasília.

    B) Arthur e Paulo não são agentes administrativos ou Mauro mora em Brasília.

    C) Arthur e Paulo não são agentes administrativos ou Mauro não mora em Brasília.

    D) Arthur ou Paulo não são agentes administrativos e Mauro não mora em Brasília.

    E) Arthur ou Paulo não são agentes administrativos ou Mauro não mora em Brasília.

21. (FUNCAB) A negação da afirmação condicional "Se estiver fazendo sol no feriado, eu vou ao clube" é:

    A) Está fazendo sol no feriado e eu não vou ao clube.

B) Se não estiver fazendo sol no feriado, eu vou ao clube.

C) Se estiver fazendo sol no feriado, eu não vou ao clube.

D) Não está fazendo sol no feriado e eu vou ao clube.

E) Não está fazendo sol no feriado e eu não vou ao clube.

Capítulo 3

Argumentação Lógica e Demonstração Matemática

> *"A Matemática é uma ciência dedutiva: partindo de certas premissas, chega, por um estrito processo de dedução, aos vários teoremas que a constituem. É verdade que, no passado, as deduções matemáticas eram com frequência muito destituídas de rigor; é também verdade que o rigor é um ideal dificilmente alcançável. Não obstante, se faltar rigor em uma prova matemática, ela será, sob esse aspecto, defeituosa; não constitui defesa a alegação de que o senso comum mostra ser o resultado correto, porquanto, se tivéssemos de confiar nisso, melhor seria abandonar completamente o argumento do que trazer a falácia em socorro do senso comum. Nenhum apelo ao senso comum, ou "intuição" ou qualquer outra coisa que não a estrita lógica dedutiva, deve ser necessário à Matemática após estabelecidas as premissas." (RUSSEL, 1976 apud NAGAFUCHI, 2008, p.5)*

Em todo tempo nos pegamos na tentativa de convencer alguém de que algo é legitimamente verdadeiro, seja esse algo de fato verdadeiro ou não. Nesse processo de convencimento geralmente usa-se o seguinte esquema:

1º) Tomamos como pressuposto fatos que a pessoa à quem tentamos convencer acredite, seja por ser óbvio ou pelo senso comum.

2º) Estabelecido o primeiro passo, agora usamos o que foi levantado para tirar novas conclusões que por estarem baseadas nas anteriores tornam-se sem discussão verdadeiras também.

Esse processo não é diferente da demonstração na matemática, o que acontece é que o tal "senso comum" e o "óbvio", mencionados anteriormente na concepção da argumentação dialética, na matemática possuem nomes bem definidos à saber: postulados e axiomas.

Uma das recomendações constantes nos PCNEF (1998b), diz que é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas coma produção de respostas a afirmações, mas assumam a atividade de sempre tentar justificá-las. E ainda seguindo o texto orienta ao professor trabalhar a partir do quarto ciclo demonstrações de alguns teoremas singulares.

Vários autores versam sobre o que é uma demonstração matemática dentre essas concepções seguem:

Fajardo(2012),

> *"Portanto, na matemática moderna, uma demonstração é uma sequência de fórmulas matemáticas, em uma linguagem lógica apropriada, em que cada fórmula ou é um axioma ou é obtida a partir de fórmulas anteriores através de uma regra de inferência. Um teorema é qualquer uma dessas fórmulas que ocorrem em uma demonstração."(FAJARDO, 2012, p. 17)*
>
> *"Um dos maiores méritos educativos de Matemática á o de ensinar aos jovens que toda conclusão se baseia em hipóteses, as quais precisam ser aceitas, admitidas para que a afirmação final seja válida. O processo de passar, mediante argumentos logicamente convincentes, das hipóteses para a conclusão, chama-se demonstração e seu uso sistemático na apresentação de uma teoria constitui o método dedutivo." (LAGES LIMA, 1999, apud ABRIL, 2016, p 31).*

A demonstração matemática tem sofrido constante processo de transformação, aumentando o seu rigor com o passar do tempo e para isso a linguagem da lógica tem contribuído de forma acintosa. Um dos primeiros registros de demonstrações matemáticas de forma esquematizada encontra-se na coletânea de livros denominada *Os elementos*, escrito e organizado por Euclides aproximadamente no ano 300a.C.. Euclides traz uma nova dimensão no que diz respeito à construção da matemática, uma vez que introduz conceitos como *axioma* e *postulado*. No obra intitulada Tio Petrus e conjectura de Goldbach, Doxiadis(1953), diz que a visão de Euclides foi a transformação de uma coletânea casual de observações numéricas e geométricas em um sistema bem articulado, em que partindo-se de verdades elementares aceitas a priori é possível avançar-se, utilizando operações lógicas, passo a passo, até a demonstração rigorosa de todos os enunciados verdadeiros. E ainda compara de maneira fantástica a matemática à uma árvore de raízes fortes(Axiomas), tronco sólido (Demonstrações rigorosas) e ramos sempre crescentes cheios de maravilhosas flores(os Teoremas).

Anos mais tarde, já em meados do século XIX, David Hilbert traz uma nova concepção de demonstração matemática ao reformular as ideias de Euclides acerca de axiomas que até então eram tidos como verdades absolutas e a partir de então são concebidos como ideias primeiras. Hilbert também trouxe à matemática um processo de demonstração baseado na metamatemática.

O principal aspecto que distingue a matemática das demais ciências empíricas é exatamente o fato de que os resultados da matemática são demonstráveis sem precisar da experimentação. Vejamos o que diz a esse respeito Nagafuchi

> *"A possibilidade da demonstração no seio da Matemática a distingue da necessidade e do caráter empírico das ciências que são ditas naturais. Por meio dela os matemáticos podem desenvolver e avançar em sua ciência, estabelecendo uma árvore teórica derivada de algumas verdades primeiras, os postulados e axiomas, em que cada galho e cada folha representam um resultado, um teorema ou um corolário, mantendo o caráter de verdade, universal e atemporal." (NAGAFUCHI, 2008, p.4)*

A parte mais conspícua desse capítulo trata exatamente do papel do raciocínio lógico dedutivo nas demonstrações matemáticas, demostrações essas que deveriam ser apresentadas aos alunos desde os anos finais do Ensino Fundamental, dando continuidade no Ensino Médio e culminando em um aluno melhor preparado para seguir sua vida acadêmica e/ou profissional. Infelizmente há caso em que os alunos, principalmente dos anos finais do ensino fundamental, não veem tais demonstrações na grande maioria das vezes porque o próprio professor não sente-se confortável, seja por uma formação deficiente ou porque acha mais cômodo apresentar um monte de "fórmulas mágicas" que resolvem os problemas propostos em sala de aula. Ávila (2006), diz que é inadmissível que o professor de matemática sinta-se deficiente em demonstrações. Já Nagafuchi (2008),diz que demonstrar não é fácil, mas é necessário. Durante o ensino médio a matemática é apresentada aos alunos de uma maneira simbólica e cheia de fórmulas mágicas, sem que essas sejam explicadas ou justificadas, os alunos não têm necessidade de uma reflexão mais profunda sobre o que está fazendo, gerando uma formação estreita e acrítica.

A importância da demonstração na matemática não está ligada simplesmente no ato de verificar resultados, é a partir das demonstrações que os alunos podem refletir sobre conceitos já aceitos e construir outros. As demonstrações produzem novas visões matemáticas, novas ligações contextualizadas e novos métodos para resolver problemas, dando a elas um valor muito além de comprovar a veracidade de proposições (Abril 2016).

Além de formalizar os conceitos de argumentação lógica nesse capítulo traremos uma coletânea das principais demonstrações que cabem ao anos finais do Ensino Fundamental, assim como, alguns tipos de demonstrações (Contra-positiva, por redução ao absurdo e por indução).

3.1 Argumento

Segundo a Enciclopédia de termos lógico-filosóficos, disponível em:< *http://repositorio.ul.pt/jspui/b*
Filos%C3%B3ficos.pdf >, define-se argumento como sendo:

> *"Um argumento, dedutivo ou indutivo, é composto por um conjunto de frases a que chamamos premissas, por uma frase a que chamamos conclusão e por uma expressão que representa a relação que se reclama existir entre as premissas e a conclusão, por exemplo, a expressão «logo» — a qual traduz a expressão latina «ergo». Esta expressão que representa a relação entre premissas e conclusão, seja ela «logo» seja outra do gênero, ocorre mais tipicamente nos argumentos dedutivos; no entanto, algo que se lhe assemelhe deve de igual modo estar presente nos argumentos indutivos visto que, nestes também, se reclama existir uma relação entre premissas e conclusão" (Enciclopédia de termos lógico-Filosóficos; BRANQUINHO, MURCHO, 2006, P. 57)*

De uma maneira mais formal podemos definir:

Definição 3.1 (Argumento) *Sejam $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ e Q um conjunto de proposições de maneira que a partir das proposições $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ as quais denominaremos premissas possamos concluir a proposição Q, a essa última chamaremos de conclusão.*

Dado um argumento de premissas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ e conclusão Q, na linguagem da lógica poderemos representá-lo das seguintes maneiras:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \vdash Q.$$

O traço de asserção ($\vdash$) indica que a proposição Q pode ser deduzida utilizando apenas as premissas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$.

Uma outra maneira de representar um argumento, essa por sua vez bem mais comum é dada por:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \underline{p_n} \\ \therefore Q \end{array}$$

Lê-se:
"$p_1, p_2, \ldots, p_n$ acarretam Q", ou ainda, "Q decorre de $p_1, p_2, \ldots, p_n$."

3.1.1 Validade de um Argumento: Silogismo e Falácia

Quando estudamos no capítulo anterior sobre as proposições, vimos que as mesmas recebem uma valoração: verdadeira(V) ou falsa(F). No estudo dos argumentos, esses também recebem uma valoração, sendo essas em válido ou inválido.

Definição 3.2 (Argumento válido) *Dizemos que um argumento é válido, quando é impossível que sendo todas as premissas verdadeiras*[1] *resultem em uma conclusão falsa.*

De uma maneira mais técnica podemos definir da seguinte forma: Um argumento é válido se, e somente se, for uma implicação tautológica, em que o antecedente é a conjunção das premissas e o consequente,a conclusão.

Um argumento $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \vdash Q$ *é válido se, e somente se,* $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow Q$

Exemplo 3.1

P1. Se o número 2 é par então ele é impar.

P2. O número 2 é par.

Q. Logo, o número 2 é ímpar.

Note que o argumento do exemplo dado é válido, apesar de sabermos que o número 2 não é ímpar. Para verificarmos se um dado argumento é válido ou não, consideramos verdadeiras suas premissas e verificamos se a conclusão decorre corretamente das mesmas.

É evidente que os argumentos que nos interessam não são desse tipo, mas aqueles em que poderemos analisar a veracidade ou não de suas premissas dentro da concepção do que é conhecido em matemática e não apenas considerá-las verdadeiras.

Definição 3.3 (Argumento inválido) *Dizemos que um argumento não é valido somente na situação em que, todas as premissas são verdadeiras, mas a conclusão é falsa ou não decorre das premissas, nesse caso o argumento é denominado uma* ***falácia*** *ou* ***sofisma****.*

[1] Vale lembrar que na lógica formal uma premissa ser verdadeira não quer dizer necessariamente que está de acordo com as concepções de verdade que temos sobre o objeto em questão, até porque o objetivo da lógica não é estudar a veracidade de uma proposição, mas as possibilidades de valoração para uma proposição.

Exemplo 3.2

P1. Se o número 2 é par então ele é ímpar.

P2. O número 2 é ímpar.

Q. Portanto, o número 2 é par.

Se houver dúvida quanto a invalidade desse argumento, sugiro que retorne ao Capítulo 2 na seção que trata sobre contrapositiva e recíproca.

Definição 3.4 (Silogismo) *De acordo com Aristóteles, silogismo é um argumento pelo qual, a partir de um antecedente cujas premissas ligam dois termos a um terceiro, podemos concluir um consequente que liga esses dois termos entre si. De maneira mais direta definimos que silogismo é um tipo especial de argumento com duas premissas que culminam em uma conclusão, e todas as proposições(premissas e conclusão) são proposições categóricas, isto é, proposições que tenham qualquer uma das quatro formas lógicas a seguir:*

- **Todos A é B.(universal afirmativa)**

  Utilizando-se a teoria dos conjuntos, vamos exemplificar o que significa dizer todo A é B à luz dos diagramas de Venn.

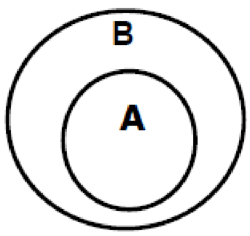
  Nesse caso temos duas situações.

  1º caso:

  Exemplo 3.3 *Todo número inteiro é também racional.*

  Se denotarmos por A o conjunto dos números inteiros e por B o conjunto dos números racionais, a representação gráfica de tal proposição seria representada pela figura que segue:

  Figura 3.1: O conjunto A dentro do B

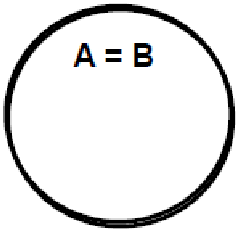


  2º caso:

Exemplo 3.4 *Todo número múltiplo de 2 e de 3 simultaneamente é também múltiplo de 6.*

Sendo A o conjunto de todos os números que são múltiplos de 2 e de 3, e B o conjunto dos múltiplos de 6. Uma representação da proposição acima é dada por:

Figura 3.2: O conjunto A igual ao conjunto B

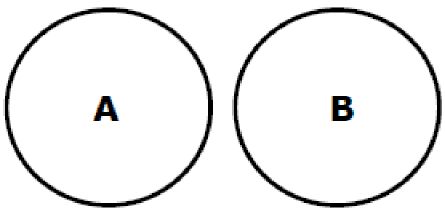


- **Nenhum A é B.(universal negativa)**

  Exemplo 3.5 *Nenhum número negativo é natural.*

  Para esse tipo de proposição, fazendo uso dos diagramas de Venn, temos apenas uma situação: Consideremos A como sendo o conjuntos dos números negativos e B o conjunto dos números naturais, seguindo os preceitos da matemática, a intersecção entre A e B é nula, sendo assim fica corretamente representada por:

Figura 3.3: Os conjuntos são disjuntos



- **Algum A é B.(particular afirmativa)** Para esse tipo de proposição analisaremos 4 casos distintos.

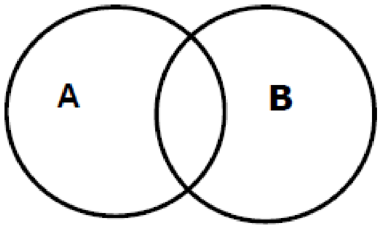
  Nesse caso temos quatro situações possíveis:

  1º caso:

  Exemplo 3.6 *Alguns múltiplo de 3 são também múltiplos de 6 .*

Segundo o mesmo padrão dos exemplos anteriores, considere A como sendo o conjunto de todos os múltiplos de três e B o conjunto de todos os múltiplos de 6, segue diagrama que exemplifica tal proposição:

Figura 3.4: Os dois conjuntos possuem apenas alguns elementos em comum

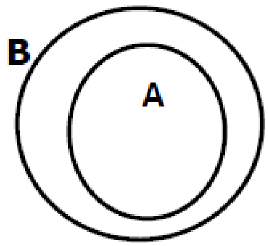


2º caso:

Exemplo 3.7 *Alguns múltiplos de 6 são pares .*

Seja A o conjunto de todos os múltiplos de 6 e B o conjunto de todos os números pares, daí segue da proposição anteriormente enunciada a seguinte figura:

Figura 3.5: O conjunto A está dentro no conjunto B

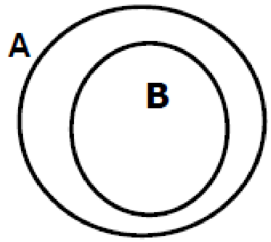


3º caso:

Exemplo 3.8 *Alguns números pares são múltiplos de 6 .*

Agora considerando A o conjunto de os números pares e B o conjunto de todos os múltiplos de 6, temos:

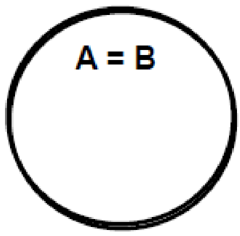
Figura 3.6: O conjunto B está dentro do conjunto A



4º caso:

Exemplo 3.9 *Considere A como sendo o conjunto dos números naturais e B o conjunto de todos os inteiros não negativos, não é difícil notar que o conjunto A é igual ao conjunto B.*

Figura 3.7: O conjunto A igual ao conjunto B



- **Algum A não é B.(particular negativa)**

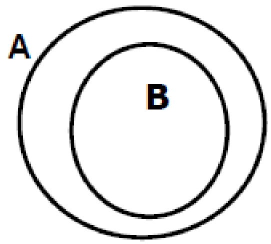
  Já no caso em que exite algum elemento em A que não seja elemento de B, temos três situações:

  1º caso:

Exemplo 3.10 *Alguns triângulos não são equiláteros*

considerando A como sendo o conjunto de todos os triângulos e B o conjunto de todos os triângulos equiláteros, podemos então representar tal proposição por:

Figura 3.8: O conjunto B esta dentro do conjunto A

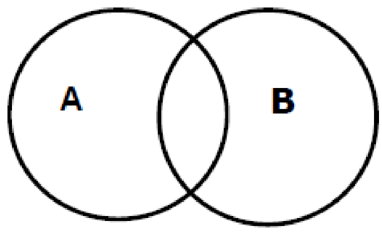


2º caso:

Exemplo 3.11 *Algumas funções injetivas não são sobrejetivas*

è de fácil verificação que sendo A o conjunto das funções injetivas e B o conjunto das funções sobrejetivas, a intersecção entre as duas funções é formada pelas funções bijetivas.

Figura 3.9: Os dois conjuntos possuem apenas alguns elementos em comum

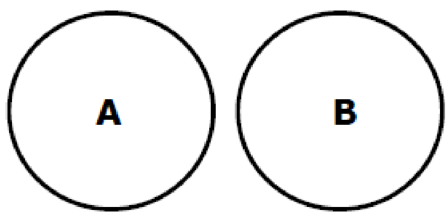


3º caso:

Exemplo 3.12 *Algumas matrizes quadradas não possui determinantes*

Sendo A o conjunto das matrizes quadradas e B o conjunto das matrizes que não possuem determinantes, segue:

Figura 3.10: Os conjuntos são disjuntos



Veremos a seguir um exemplo de silogismo, assim como foi definido anteriormente:

Exemplo 3.13 *Exemplo de silogismo:*

1. Todos os números inteiros são racionais.

2. Todos os números naturais são inteiros.

3. Logo, todos os naturais são racionais.

3.1.2 Contrárias X contraditórias das proposições categóricas

Definição 3.5 *(Contrárias) São proposições que trocam apenas apenas o quantificador(Todo, algum ou nenhum) pelo seu antônimo, ela não nega a proposição. Duas proposições contrárias não podem ambas serem verdadeiras, mas ambas podem ser falsas.*

Exemplo 3.14 *Todo número composto pode ser decomposto em fatores primos de maneira única a menos da ordem em que os fatores aparecem.*
Contrária: *Nenhum número composto pode ser decomposto em fatores primos de maneira única a menos da ordem em que os fatores aparecem.*

Definição 3.6 *(Contraditórias) São proposições que negam o quantificador e o qualificador. Ela é a negação de uma proposição. Troca-se o quantificador e nega-se a sentença. Duas sentenças contraditórias nunca podem ser ambas verdadeiras nem ambas falsas.*

Exemplo 3.15 *Todos os número de determinado conjunto A são pares.*
Contraditória: *Algum elemento do conjunto A não é par.*

3.2 Métodos para testar a validade de argumentos

Existem vários métodos para teste de validade de argumentos, o mais utilizado para argumentos “pequenos”(argumentos que envolvem poucas proposições atômicas) é a tabela verdade. Uma maneira mais rápida de verificar a validade ou não de um argumento quando este apresenta muitas proposições simples é a chamada prova direta. A prova direta utiliza-se de implicações e equivalências tautológica para análise dos argumentos. É interessante notar que quando um determinado argumento é válido, não está tão somente determinada a validade de tal argumento, mas de todo argumento que tenha a mesma estrutura.

Exemplo 3.16 *Uma vez verificada a validade do exemplo anterior*

1. Todos os números inteiros são racionais.
2. Todos os números naturais são inteiros.

3. Logo, Todos os naturais são racionais.

Implica que todo argumento do tipo:

Todo A é B.

Todo C é A.

Logo, Todo C é B

É sempre válido independente do que seja A, B ou C.

3.2.1 Prova direta

Definição 3.7 (Equivalência Tautológica) *Denominamos equivalência tautológica qualquer proposição bicondicional tautológica.*

Exemplo 3.17 *Um exemplo clássico de uma equivalência tautológica é a chamada Lei de Morgan, vista no capítulo anterior quando tratamos sobre a negação das proposições compostas:*

$$\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q).$$

Tabela 3.1: Exemplo de equivalência tautológica

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$(\sim p \vee \sim q)$	$\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

Fonte: Elaborada pelo autor

O teste de validade, quando feito por esse método exige previamente o conhecimento de algumas equivalências e implicações tautológicas. Seguem algumas:

Equivalências tautológicas

Considere p, q, r e s proposições atômicas quaisquer.

1. Comutação

   $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

   $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

2. Associação

   $((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$

   $((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$

3. Distribuição

   $(p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

   $(p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r))$

   $(p \rightarrow (q \wedge r) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$

   $(p \rightarrow (q \vee r) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r))$

4. Equivalência Material

   $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$

   $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (q \wedge p))$

5. Implicação Material

   $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

   $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$

6. Absurdo

   $(p \rightarrow (q \wedge \sim q)) \leftrightarrow \sim p$

Definição 3.8 (Implicações Tautológica) *Denominamos implicação tautológica qualquer proposição condicional tautológica. Nos exemplos que seguem, a implicação dar-se-á entre a conjunção das premissas e a conclusão.*

Implicações Tautológicas

Vejamos apenas algumas das implicações tautológicas contempladas pela lógica de primeira ordem:

1. Modus Ponens

   $p \rightarrow q$

$\underline{p}$

q

de outra maneira:

$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q.$

Exemplo 3.18 *Considere as duas premissas a seguir de um argumento e deduza a conclusão que segue das mesmas.*

p1: Se A é uma matriz quadrada em que uma de suas filas(linha ou coluna) é composta apenas por zeros, então o determinante da matriz A (det(A)) é zero.

p2: A é uma matriz quadrada tal que uma de suas filas é composta por zeros.

(Perceba que nesse caso o antecedente foi afirmado, assim podemos concluir corretamente o seguinte:)

q: O determinante da matriz A é zero.

2. Modus Tollens

   $p \rightarrow q$

   $\underline{\sim q}$

   $\sim p$

   de outra maneira:

   $((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$

3. Dilema construtivo

   $p \rightarrow q$

   $r \rightarrow s$

   $\underline{p \vee r}$

   $q \vee s$

4. Dilema destrutivo

   $p \rightarrow q$

   $r \rightarrow s$

   $\underline{\sim q \vee \sim s}$

   $\sim p \vee \sim r$

5. Silogismo hipotético

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ p \to r \end{array}$$

3.2.2 Método da tabela-verdade

Esse método consiste no uso da tabela-verdade para verificar se as premissas e a conclusão formam uma implicação tautológica.

Um argumento $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \vdash Q$ é válido se, e somente se, $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \to Q$.

Exemplo 3.19 *Vamos verificar através da tabela-verdade a validade ou não do argumento que segue:*

p1: João vai estudar ou vai à praia.

p2: Se João vai à praia, então Maria também vai à praia.

p3: Maria não foi à praia.

Q: Portanto, João foi estudar.

Se denotarmos por: E: João vai estudar, P: João vai à praia e por M: Maria vai à praia. Podemos escrever o argumento na linguagem da lógica proposicional da seguinte maneira:

p1: $E \vee P$

p2: $P \to M$

p3: $\sim M$

Q: E

Vamos construir a tabela verdade para o argumento:

Tabela 3.2: Exemplo validade de argumento usando a tabela verdade

E	**P**	**M**	$E \vee P$	$P \to M$	$\sim M$	$(E \vee P) \wedge (P \to M) \wedge (\sim M)$	$(E \vee P) \wedge (P \to M) \wedge (\sim M) \to E$
V	V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	F	V	F	V
V	F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V	F	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que a tabela verdade é tautológica, o que é suficiente para afirmarmos que esse argumento é válido.

Vejamos outro exemplo:

Exemplo 3.20 *Considere o seguinte argumento:*

p1: Se João vai à praia, então Maria também vai à praia.

p2: João não foi à praia.

Q: Logo, Maria não foi à praia.

Considere J: João vai à praia, M: Maria vai à praia. assim o argumento fica:

p1: $J \to M$

p2: $\sim J$

Q: $\sim M$

Devemos construir a tabela verdade para a seguinte proposição:

$$p1 \wedge p2 \to Q.$$

O argumento será válido se, e somente se a tabela verdade de tal proposição for tautológica, caso contrário o argumento é uma falácia.

Vejamos a tabela verdade:

Tabela 3.3: Exemplo invalidade de argumento uasando a tabela verdade

J	**M**	$J \to M$	$\sim J$	$(J \to M) \wedge \sim J$	$(J \to M) \wedge \sim J \to \sim M$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como podemos constatar na tabela-verdade acima, na terceira linha o valor da implicação entre as conjunções das premissas e a conclusão é F. Portanto o argumento do exemplo em questão é inválido.

3.2.3 Prova Indireta para validade de argumentos

Como dito anteriormente, a tabela-verdade é um instrumento que nos permite avaliar a validade ou não de um argumento. No entanto, torna-se bastante complicado e enfadonho construir a tabela verdade quando temos muitas proposições atômicas, para esses tipos de argumentos, torna-se mais razoável utilizar um outro tipo de prova, que é a prova indireta.

O método da prova indireta, consiste em tomar um argumento do tipo $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \vdash Q$, negar a conclusão, isto é supor $V(\sim Q) = V$ e deduzir logicamente uma contradição qualquer, ou seja a negação de alguma premissa. Essa demonstração também é conhecida como demonstração por absurdo, e é muito utilizada em demonstrações matemáticas.

De maneira formal, este método está baseado na equivalência entre a condicional e a sua contrapositiva, isto é, $(P \to Q) \Leftrightarrow (\sim Q \to \sim P)$, assim $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \to Q) \Leftrightarrow (\sim Q \to \sim (P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n)) \Leftrightarrow (\sim Q \to \sim P_1 \vee \sim P_2 \vee \ldots \vee \sim P_n)$.

A título de exemplo vamos analisar por esse método um argumento que já comprovamos ser válido.

Exemplo 3.21

p1: João vai estudar ou vai à praia.

p2: Se João vai à praia, então Maria também vai à praia.

p3: Maria não foi à praia.

Q: Portanto, João foi estudar.

Se denotarmos por: E: João vai estudar, P: João vai à praia e por M: Maria vai à praia. Podemos escrever o argumento na linguagem da lógica proposicional da seguinte maneira:

p1: $E \vee P$

p2: $P \rightarrow M$

p3: $\sim M$

Q $\therefore E$

Negando a conclusão, isto é, considerando $V(\sim E) = V$, teremos que João não foi estudar, daí pela premissa 1 (p1) concluímos que João foi à praia, de p2 concluímos que Maria também foi à praia o que contradiz p3. Portanto concluímos que o argumento é válido.

Exemplo 3.22 *Verifiquemos o argumento a seguir:*

p1: Se João for ao shopping comprará um tênis ou uma camisa.

p2: João foi ao shopping e comprou um tênis.

p3: Se João comprou um tênis ou uma camisa então João foi so shopping.

Q: Logo, João foi ao shopping e comprou uma camisa.

Vamos converter para a linguagem da lógica proposicional:

S: João foi ao shopping.

T: João comprou um tênis.

C: João comprou uma camisa.

Assim o argumento fica:

p1: $S \rightarrow (T \vee C)$.

p2: $S \wedge T$.

p3: $(T \vee C) \rightarrow S$.

Q: $\therefore S \wedge C$

Observe que ao negar a conclusão, isto é, $f(Q) = F$, consiste em $f(\sim Q) = V$, mas $\sim Q \rightarrow \sim (T \wedge C) \rightarrow \sim T \vee \sim C$ então temos duas alternativas:

i) $f(S) = F$ ou ii)$f(C) = F$

Nesse caso teremos que analisar separadamente cada uma das alternativas.

i) $f(S) = F$

Considerando V(T)= F, decorre direto uma contradição em p2.

ii) $f(C) = F$ De p2 temos que V(S)=V(T)=V, com estas valorações temos que V(p1)=V(p2)=V(p3)= V e V(Q) = F, o que nos faz concluir que o argumento analisado é um sofisma.

3.3 Demonstrações matemáticas

Nas seções que compõem esse capítulo, mostramos a relação que existe entre a lógica de 1ª ordem e a argumentação matemática. Seguem agora alguns métodos de demonstrações matemáticas que são bastante acessíveis para aplicação no ensino básico, relembrando que foi explanado na introdução do capítulo o quanto as demonstrações matemáticas são importantes para a construção do saber matemático. De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio

> *"A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático- nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicações quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.(BRASIL, 2008, p.70)*

3.3.1 Prova por Redução ao Absurdo

A lógica da redução ao absurdo - "reductio ad absurdum"

Esse tipo de demonstração é uma daquelas ferramentas que possui grande valia para a matemática, muito provavelmente os pitagóricos fizeram uso desse método para constatar a irracionalidade da raiz quadrada de dois. A redução ao absurdo é sempre uma boa sugestão de método de prova quando o que se quer demonstrar exige duas e apenas duas situações distintas, por exemplo: provar que um dado número expresso por uma determinada expressão matemática é par ou ímpar sob condições pré estabelecidas, provar que números de determinada forma são racionais ou irracionais, provar que um elemento pertence ou não à um determinado conjunto.

> *"Reductio ad absurdum, que Euclides gostava tanto, é uma das armas mais admiráveis de um matemático. É uma jogada mais admirável do que qualquer jogada de xadrez: um jogador de xadrez pode oferecer o sacrifício de um peão ou mesmo de qualquer outra peça, mas o matemático oferece o jogo."(HARDY, 1993, p. 34)*

Associando a *"reductio ad absurdum"* com a lógica das proposições, vamos relembrar algumas coisas que foram mostradas nos capítulos anteriores, como por exemplo, as negações de proposições compostas e as equivalências lógicas.

Definição 3.9 *Teoremas são proposições que podem ser demonstradas por meio de um processo lógico.*

Os teoremas são compostos de duas partes, uma é a hipótese e a outra a tese. Informalmente podemos dizer que a hipótese é uma coisa que não é, mas imaginamos que é para ver como seria se de fato fosse, a tese é o "como seria se de fato fosse", em outras palavras, hipótese é o que admitimos ser verdade, tese é o que queremos provar com admissão de verdade da hipótese.

Note então que demonstrar um teorema é demonstrar do ponto de vista lógico que a implicação entre hipótese e tese é válida.

$$\text{Hipótese} \Longrightarrow \text{Tese}$$

O método da redução ao absurdo consiste em admitir que a tese é falsa e que a hipótese é verdadeira e, através de um raciocínio lógico, chegar a uma contradição(absurdo) com a hipótese, concluindo então que a tese só pode ser verdadeira.

Podemos ainda escrever na linguagem da lógica da seguinte maneira:

H: Hipótese

T: Tese

O que queremos provar é que $H \to T$.

As demonstrações por redução ao absurdo de maneira geral seguem os seguintes passos:

1º) Suponha que seja válido H;

2º) Suponha que seja válido $\sim T$;

3º) Utilizamos as definições e teorias desenvolvidas e aplicamos em $\sim T$;

4º) Encontra-se uma contradição(ou absurdo), isto é, algo na demonstração com dois significados distintos ao confrontarmos H com $\sim T$.

O desenvolvimento desses passos se configura da seguinte maneira: Seja f a função definida no Capítulo 2, que tem domínio como sendo o conjunto das proposições e contradomínio o conjunto {V,F}.

- $f(H) = V$, isto é, consideramos a hipótese H verdadeira.
- $f(\sim T) = V$, consideramos verdadeira a negação da tese.

A partir daqui usamos conhecimentos prévios da matemática como axiomas, lemas e postulados para desenvolver $\sim T$, concluindo uma proposição r, de tal modo que r seja uma contradição à proposição H(hipótese), ou seja, ao compararmos r com H, concluímos que r é equivalente a $\sim H$, então chegamos a uma contradição da hipótese a essa contradição chamamos de absurdo. Lembremos ainda que $H \to T \Leftrightarrow \sim (H \wedge \sim T)$, isto é, $f(H \to T) = f(\sim (H \wedge \sim T))$. Sendo $f(H) = V$ e $f(\sim T) = V$, como queremos mostrar que $f(H \to T) = V$, supomos então $f(\sim (H \to T)) = F$, ou seja, $f(H \wedge \sim T) = F$, o que nos levaria a $f(\sim (H \wedge \sim T)) = V$.

Observemos a seguinte tabela:

Tabela 3.4: Exemplo invalidade de argumento uasando a tabela verdade

H	**T**	$\sim T$	$H \to T$	$H \wedge \sim T$	$\sim (H \wedge \sim T)$
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que na linha 1 tem-se $f(T) = V$. Mas isso não pode ocorrer, uma vez que consideramos que $f(\sim T) = V$, logo $f(T) = F$. Sendo assim o absurdo está no fato de consideramos $f(\sim T) = V$

e pela Tabela 3.4 a única situação onde teremos $f(H) = Vef(T) = V$ é na primeira linha, onde $f(\sim(H\wedge\sim T)) = V$ e $f(H \to T) = V$.

Os alunos do ensino fundamental II têm o primeiro contato com a demonstração por redução ao absurdo no 8º ano quando o professor introduz o conjunto dos números irracionais, o teorema a ser demonstrado é o seguinte:

Exemplo 3.23 *$\sqrt{2}$é um número irracional.*

Demonstração: *Suponhamos inicialmente que $\sqrt{2}$ é racional, isso quer dizer que teríamos p e $q \in \mathbb{Z}$ com $mdc(p,q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (definição de números racinais). segue que $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 2q^2 = p^2$.*

Isso nos mostra que p^2 é par, mas se p^2 é par, então p também é par. Sendo p um número par, podemos escrevê-lo como sendo $p = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo na equação $2q^2 = p^2$, temos:

$$(2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2.$$

Isso nos mostra que q também é par, o que é um absurdo, pois consideramos que $mdc(p,q) = 1$. Portanto, $\sqrt{2}$ não é racional. ∎

Deixamos como exercício a demonstração de que qualquer raiz inexata é irracional.

Ao estudar a teoria dos conjuntos, percebe-se que muitas demonstrações são feitas utilizando as regras da redução ao absurdo.

Uma muito conhecida é a seguinte:

Exemplo 3.24 *Seja **A** um conjunto qualquer, mostre que o conjunto vazio é subconjunto de **A**.*

Demonstração: *A relação de inclusão entre dois conjuntos pode ser enunciada da seguinte maneira: Sejam **A** e **B** conjuntos. Se todo elemento de **A** for também elemento de **B**, diz-se que **A** é um subconjunto de **B**, ou ainda que **A** está contido em B. Para indicar esse fato utilizamos a notação $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$. Concluímos com isso que o conjunto A não será considerado subconjunto de B, se houver pelo menos um elemento de A que não seja elemento de B.*

Sabendo disso podemos agora ir de fato à demonstração. Suponhamos que existe pelo menos um conjunto para o qual o vazio não seja subconjunto do mesmo(negação da tese), ora, para que isso aconteça teríamos que ter um objeto x tal que $x \in \emptyset$ mas $x \notin A$, perceba que isso é um absurdo, uma vez que nenhum objeto x pode pertencer ao conjunto vazio. ∎

Exemplo 3.25 *O conjunto dos números primos possui infinitos elementos.*

Demonstração: *O primeiro registro de tal demonstração foi feita por Euclides no livro Elementos. O interessante sobre tal teorema é que os gregos evitavam lidar com conceitos de infinito, pelas dificuldades que esse conceito carrega consigo. Eles preferiam enunciar o teorema da seguinte maneira: Dado qualquer conjunto finito de primos, é possível mostrar que existe pelo menos um número primo fora desse conjunto.*

Vamos de fato à demonstração: Assuma por absurdo que o conjunto dos números primos seja finito e que seu maior elemento é p_k. Então $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$ é um múltiplo de todos os números primos existentes.
Considere agora um número P tal que $P = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k} + 1$, é fácil perceber que P não é múltiplo de nenhum dos números primos mencionados anteriormente(o resto da divisão entre P e qualquer $p_1, i = 1, 2, 3 \cdots k$ é sempre igual a 1), daí seguem duas hipóteses.

1ª Hipótese: P é composto - Nesse caso para decompor o número P em fatores primos, devem existir primos diferentes de $p_i, i = 1, 2, \cdots k$, o que é um absurdo, uma vez que supomos inicialmente que só exitem os primos mencionados.

2ª hipótese : P é primo - Se P é primo então é maior que p_k, o que também é um absurdo, pois por hipótese supomos p_k, como sendo o maior número primo. ■

3.3.2 Prova Direta

A prova direta consiste no seguinte: Se quisermos demonstrar uma proposição do tipo "$H \Rightarrow T$", usando a demonstração direta, temos que supor a hipótese H válida e usando um processo lógico-dedutivo, chegar diretamente a tese T. Existem demonstrações diretas que usam conceitos simples e nada engenhosos, mas há também demonstrações que requerem argumentos e procedimentos muito elaborados. Nesse tipo de demonstração não podemos abrir mão do rigor que matemática exige, portanto não podemos fazer uso de argumentos duvidosos.

Exemplo 3.26 *Se um inteiro é divisível por 6, então ele também é divisível por 3.*

Demonstração: *Escrevendo a proposição acima na linguagem da lógica matemática tem-se:*

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(x \text{ divisível por } 6 \rightarrow x \text{ divisível por } 3.)$$

Inicialmente consideramos verdadeira a hipótese e trabalhando sob essa perspectiva devemos con-

cluir que a tese no caso (x é divisível por 3) também é verdadeira. Usando as técnicas de divisibilidade, temos:

Se a é divisível por b então a é igual ao produto de um inteiro por b. Sendo assim, se x é divisível por 6 (hipótese), então $x = 6k, k \in \mathbb{Z}$.

$$De\ x = 6k \Rightarrow x = k(3 \times 2) \Rightarrow x = \underbrace{(2k)}_{q} \times 3 \Rightarrow x = 3q.$$

De onde concluímos que de fato x é divisível por 3. ∎

Exemplo 3.27 *A soma de dois números racionais também é racional.*

Demonstração: *Sabemos que se um número* $x \in \mathbb{Q}$, *então podemos escrever x da seguinte maneira:* $x = \frac{p}{q}$, *p e* $q \in \mathbb{Z}$ *e* $q \neq 0$.

Sejam $\frac{p}{q}$ *e* $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, *temos que* $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+qr}{qs}$, *como* $ps + qr$ *e* qs *são números inteiros, uma vez que representam soma e produto entre inteiros, e está garantido que* $qs \neq 0$, *uma vez que* $q \neq 0$ *e* $s \neq 0$ *pela definição de número número racional supra citado. Com isso fica garantido que* $\frac{p}{q} + \frac{r}{s}$ *é de fato um número racional.* ∎

Exemplo 3.28 *Considere a sequência 1, 11, 111, 1111, ..., 1111...11; com 2015 números naturais. Mostre que pelo menos dois números dessa sequência, deixam o mesmo resto quando divididos por 2014.*

Demonstração: *Pelo algoritmo de Euclides para a divisão, temos:*

Em uma divisão em que D é o dividendo, d é o divisor, q é o quociente e r é o resto, tiramos a seguinte relação:

$$D = d \times q + r \ com\ 0 \leq r < |d|$$

Quando dividimos um número natural por 2014, existem exatamente 2014 possibilidades para o resto, isto é, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 2013\}$. *Como a sequência possui 2015 números naturais, ao dividirmos um a um por 2014 teremos um resto para cada divisão, não é difícil perceber que faremos 2015 divisões, mas temos apenas 2014 possibilidades de resto, portanto utilizando o Princípio das Gavetas de Dirichlet (mais conhecido como Princípio da Casa de Pombos) concluímos que no mínimo duas dessas divisões terão o mesmo resto quando dividido por 2014.* ∎

3.3.3 Prova por contrapositiva

Nas seções anteriores que tratamos sobre demonstrações matemáticas. Vimos que os teoremas apresentam-se sempre na forma $H \to T$, e vimos duas maneiras de demonstrar proposições desse tipo, a prova direta e a prova por redução ao absurdo. Ainda podemos nos utilizar da lógica proposicional no que diz respeito às equivalências tautológicas e o princípio da contrapositividade.

$$(H \to T) \Leftrightarrow (\sim T \to \sim H).$$

Utilizamos esse método de prova quando for mais conveniente provar a contrapositiva do que a própria sentença.

Exemplo 3.29 *Se* $2x^2 + x - 1 = 0$, *então* $x < 1$.

Demonstração: *A contrapositiva da proposição que queremos provar é a seguinte:*

Se $x \geq 1$, *então* $2x^2 + x - 1 \neq 0$. *De fato, se* $x \geq 1$, *temos* $x - 1 \geq 0$ *e* $2x^2 > 0$. *Logo* $2x^2 + x - 1 > 0$, *o que significa que* $2x^2 + x - 1 \neq 0$. ∎

Exemplo 3.30 *Se n e m são números inteiros para os quais $n + m$ é par, então n e m têm a mesma paridade.*

Demonstração: Inicialmente vamos analisar qual é a contrapositiva do teorema que queremos demonstrar.

"Se n e m são dois números inteiros com paridade opostas, então sua soma $n+m$ deve ser ímpar".

Suponha que n e m têm paridades opostas, ou seja, um deles é par e o outro é ímpar, note que não há perda de generalidade em supor n par e m ímpar. Sendo assim, garantimos a existência de a e $b \in \mathbb{Z}$, de maneira que $n = 2a$ e $m = 2b + 1$. Calculando a soma entre m e n

$$n + m = 2a + 2b + 1 = 2(a + b) = 2(a + b) + 1.$$

Observe que $a + b$ é um número inteiro, temos que $n + m$ é um número ímpar, por definição. ∎

3.3.4 Princípio da Indução Finita

A demonstração utilizando o Princípio da Indução Matemática (PIM) ou Princípio da Indução Finita(PIF) não está prevista em nenhum documento oficial que versa sobre educação no Brasil, mas tendo em vista a grande aplicabilidade desse princípio em olimpíadas, vamos enunciar tal princípio e demonstrar alguns resultados.

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa aos inteiros se

i) $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$ e

ii) $P(k)$ é verdadeira implica que $P(k+1)$ é verdadeira, então$P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$.

Para aplicarmos a primeira forma do Princípio da Indução Matemática, devemos seguir os passos abaixo:

I) Passo inicial: verificar se $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$.

II) Assumir que $P(k)$ é verdadeira, hipótese da indução, e provar que $P(k+1)$ é verdadeira.

III) Sendo verificados os itens (I) e (II), concluir que $P(n)$ é válida para todo n maior que ou igual a 1.

Exemplo 3.31 *Demonstrar que a soma dos cubos de três números consecutivos é divisível por 9*

Demonstração:

1º) A soma $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ *é divisível por 9, ou seja, a proposição é válida se o primeiro dos três números consecutivos é 1.*

2º) Suponhamos que a soma $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$*, onde k é um número inteiro natural, seja divisível por 9.*

3º) Devemos mostrar que a soma $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$ *também é divisível por 9.*

Temos,

$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3 = (k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+27k+27 = [k^3+(k+1)^3+(k+2)^3]+ 9(k^2+3k+3)$.

Que também será divisível por 9, uma vez que consta de duas parcelas divisíveis cada uma por 9.

■

Exemplo 3.32 *Demonstre que* $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

1º) Vamos verificar se é valido para $n = 1$:

$$2^0 = 2^1 - 1.$$

2º) Suponhamos válida para $n = k$, isto é,

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1.$$

3º) Agora devemos mostrar que vale para $n = k + 1$.

$$\underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1}}_{2^k - 1 \textit{por hipótese de indução}} + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$

Segue que:

$$2^k - 1 + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$

■

3.4 Dedução de fórmulas

Um outro tipo de demonstração que deve ser apresentada para os alunos do ensino básico no Brasil é a dedução de fórmulas matemáticas, inclusive está previsto nas Orientações Curriculares para o ensino médio.

> *"A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático.[...] Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicações quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.(BRASIL, 2008, p.70)*

Muitas vezes é bem mais cômodo para os professores apresentar a fórmula "mágica" que resolve uma equação do 2º grau por exemplo, do que deduzi-la junto com os alunos. A dedução da fórmula além de fazer com que os alunos compreendam o porquê que aquela fórmula funciona sempre, também tem um caráter formativo uma vez que durante muitas demonstrações são exigidas competências e habilidades previstas na matriz do Exame Nacional do Ensino Médio.

A título de exemplo seguem demonstrações de algumas relações importantes que são apresentadas no ensino fundamental.

Exemplo 3.33 (Equação do 2º Grau) *Dedução da fórmula de resolução de uma equação do 2º grau qualquer.*

Demonstração: *Segue na íntegra a demonstração apresentada em [14].*

*Utilizando a ideia de completamento de quadrado, podemos chegar a uma fórmula para resolver equações do 2º grau. Considerando a equação genérica do 2º grau com coeficientes **a**, **b** e **c**, com* $a \neq 0$*:*

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

*Dividindo ambos os membros por **a**, temos:*

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Em seguida, completamos o quadrado do primeiro membro somando $\frac{b^2}{4a^2}$ *a ambos os membros:*

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Fatorando o trinômio quadrado perfeito, obtemos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Finalmente, obtemos a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

■

Exemplo 3.34 (Soma e produto das raízes da equação do 2º grau) *Existem duas relações entre os coeficientes da equação do 2º grau e suas raízes, são elas:*

*1ª) A soma das raízes de uma equação do 2º grau é igual ao quociente do oposto de **b** por **a**.*

$$S = x' + x'' = \frac{-b}{a}.$$

2ª) O produto das raízes é igual ao quociente de c por a, ou seja:

$$P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a}.$$

Demonstração: *A demonstração a seguir foi retirada parcialmente de [14].*

Para provar que essas relações valem para todas as equações do 2º grau com raízes reais, devemos usar a equação geral $ax^2 + bx + c = 0$, *com* $a \neq 0$.

*Os coeficientes da equação são **a**, **b** e **c**; suas raízes são* $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *e* $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, *com* $\Delta = b^2 - 4ac$.

Vamos fazer a demonstração da 1ª relação:

$$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Vamos agora demonstrar a relação: $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$.

$P = x' \cdot x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})\cdot(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b^2)-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

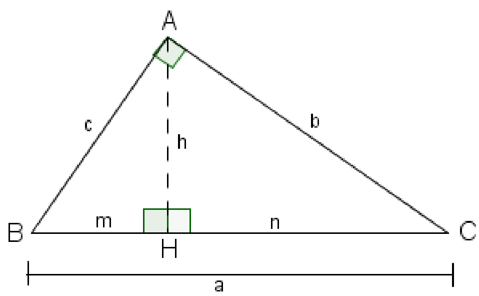
Portanto, $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$. ■

Exemplo 3.35 (Teorema de Pitágoras) *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.*

Demonstração: *Existem muitas demonstrações para esse teorema, a que escolhemos é a que consta em [14], que está baseada na semelhança de triângulos.*

Consideremos o triângulo ABC, retângulo em A, com altura $\overline{AH}$ *relativa à hipotenusa.*

Figura 3.11: Triângulo retângulo



Fonte:Elaborada pelo autor

Temos que:

$$a = m + n \tag{3.1}$$

Vamos considerar os triângulos retângulos HBA e ABC. Os dois triângulos têm um ângulo reto (são triângulos retângulos) e têm o ângulo $\widehat{B}$ *comum; logo, pelo caso (ângulo e ângulo) de semelhança de triângulos temos* $\Delta ABC \sim \Delta HBA$.

Se os triângulos são semelhantes, os lados homólogos têm medidas proporcionais, o que nos permite escrever:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}.$$

Dessas proporções tiramos as relações:

$$c^2 = am, \tag{3.2}$$

$$ah = bc \text{ e} \tag{3.3}$$

$$ch = bm. \tag{3.4}$$

Vamos, agora, considerar os triângulos ABC e HAC da figura inicial. Note que os dois triângulos são semelhantes, uma vez que possuem ângulo reto e o ângulo $\widehat{C}$ *em comum.*

Como os lados homólogos são proporcionais, escrevemos as proporções a seguir:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h}.$$

Dessas proporções tiramos:

$$b^2 = an, \tag{3.5}$$

$$bh = nce \tag{3.6}$$

$$ah = bc. \tag{3.7}$$

Somando membro à membro as igualdades apresentadas em (3.5) e (3.2) temos:

$$b^2 + c^2 = an + am \Rightarrow b^2 + c^2 = a(n+m).$$

Como em (3.1) temos $a = m + n$*, segue:*

$$b^2 + c^2 = a \cdot a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Fica assim demonstrado o teorema de Pitágoras.

■

3.5 Sugestões de Exercícios

1. (ATA/MF - 2009) Entre os membros de uma família existe o seguinte arranjo: se Márcio vai ao Shopping, Marta fica em casa. Se Marta fica em casa, Martinho vai ao Shopping. Se Martinho vai ao Shopping, Mario fica em casa. Dessa maneira, se Mário foi ao Shopping, pode-se afirmar que:

   A) Marta ficou em casa.

   B) Martinho foi ao Shopping.

   C) Márcio não foi ao Shopping e Marta não ficou em casa.

   D) Márcio e Martinho foram ao shopping.

   E) Márcio não foi a shopping e Martinho foi ao shopping.

2. (ANA 2009) Determinado rio passa pelas cidades A, B e C. Se chove em A, o rio transborda. Se chove em B, o rio transborda e, se chove em C, o rio não transborda. Se o rio transbordou, pode-se afirmar que:

   A) choveu em A e choveu em B.

   B) não choveu em C.

   C) choveu em A ou choveu em B.

   D) choveu em C.

   E) choveu em A.

3. (ADMINISTRADOR - DNOCS – 2010) Considere a seguinte proposição: "Se uma pessoa não faz cursos de aperfeiçoamento na sua área de trabalho, então ela não melhora o seu desempenho profissional." Uma proposição logicamente equivalente à proposição dada é:

   A) É falso que, uma pessoa não melhora o seu desempenho profissional ou faz cursos de aperfeiçoamento na sua área de trabalho.

   B) Não é verdade que, uma pessoa não faz cursos de aperfeiçoamento profissional e não melhora o seu desempenho profissional.

   C) Se uma pessoa não melhora seu desempenho profissional, então ela não faz cursos de aperfeiçoamento na sua área de trabalho.

   D) Uma pessoa melhora o seu desempenho profissional ou não faz cursos de aperfeiçoamento na sua área de trabalho.

   E) Uma pessoa não melhora seu desempenho profissional ou faz cursos de aperfeiçoamento na sua área de trabalho.

4. (ADMINISTRADOR - DNOCS – 2010)Argemiro, Belisário, Coriolano e Divina são funcionários de um mesmo setor do Departamento Nacional de Obras Contra as Secas. Certo dia, após a realização de uma reunião em que se discutiu um projeto de irrigação a ser implantado numa região, algumas pessoas fizeram as seguintes declarações sobre seus participantes:

   - Se Divina participou da reunião, então o Diretor também participou.
   - Se Coriolano não participou da reunião, então Divina participou.
   - Se Argemiro participou da reunião, então Belisário e Coriolano não participaram.

   Considerando que o Diretor não participou de tal reunião e que as três declarações são verdadeiras, é correto afirmar que, com certeza, também não participaram
   A) Argemiro e Belisário.
   B) Argemiro e Divina.
   C) Belisário e Coriolano.
   D) Belisário e Divina.
   E) Coriolano e Divina.

5. (Técnico da Fazenda Estadual SEFAZ-SP 2010) Considere as seguintes premissas:
   p: Estudar é fundamental para crescer profissionalmente.
   q: O trabalho enobrece.
   A afirmação “Se o trabalho não enobrece, então estudar não é fundamental para crescer profissionalmente” é, com certeza, FALSA quando:
   A) p é falsa e q é falsa.
   B) p é verdadeira e q é verdadeira.
   C) p é falsa e q é verdadeira.
   D) p é verdadeira e q é falsa.
   E) p é falsa ou q é falsa.

6. (TRT 1ª Região Anal. Jud. 2008 CESPE) Considere que todas as proposições listadas abaixo são V.
   I Existe uma mulher desembargadora ou existe uma mulher juíza.

II Se existe uma mulher juíza então existe uma mulher que estabelece punições ou existe uma mulher que revoga prisões.

III Não existe uma mulher que estabelece punições.

IV Não existe uma mulher que revoga prisões.

Nessa situação, é correto afirmar que, por consequência da veracidade das proposições acima, é também V a proposição.

A) Existe uma mulher que estabelece punições mas não revoga prisões.

B) Existe uma mulher que não é desembargadora.

C) Se não existe uma mulher que estabelece punições, então existe uma mulher que revoga prisões.

D) Não existe uma mulher juíza.

E) Existe uma mulher juíza mas não existe uma mulher que estabelece punições.

7. (CGU-2006) Márcia não é magra ou Renata é ruiva. Beatriz é bailarina ou Renata não é ruiva. Renata não é ruiva ou Beatriz não é bailarina. Se Beatriz não é bailarina, então Márcia é magra. Assim,

   A) Márcia não é magra, Renata não é ruiva, Beatriz é bailarina.

   B) Márcia é magra, Renata não é ruiva, Beatriz é bailarina.

   C) Márcia é magra, Renata não é ruiva, Beatriz não é bailarina.

   D) Márcia não é magra, Renata é ruiva, Beatriz é bailarina.

   E) Márcia não é magra, Renata é ruiva, Beatriz não é bailarina.

8. (CGU-2008)Sou amiga de Abel ou sou amiga de Oscar. Sou amiga de Nara ou não sou amiga de Abel. Sou amiga de Clara ou não sou amiga de Oscar. Ora, não sou amiga de Clara. Assim,

   A) Não sou amiga de Nara e sou amiga de Abel.

   B) Não sou amiga de Clara e não sou amiga de Nara.

   C) Sou amiga de Nara e amiga de Abel.

   D) Sou amiga de Oscar e amiga de Nara.

   E) Sou amiga de Oscar e não sou amiga de Clara.

9. (ESAF - TCU - 2002)O Rei ir a caça é condição necessária para o duque sair do castelo, e é condição suficiente para a duquesa ir ao jardim. Por outro lado, o conde encontrar com a princesa é condição suficiente para o barão sorrir e é condição necessária para a duquesa ir

ao jardim. O Barão não sorriu.

Logo:

A) A duquesa foi ao jardim ou o conde encontrou a princesa.

B) Se o duque não saiu do castelo, então o conde encontrou a princesa.

C) O rei não foi a caça e o conde não encontrou a princesa.

D) O rei foi a caça e a duquesa não foi ao jardim.

E) O duque saiu do castelo e o rei não foi a caça.

10. (AFC 2002 ESAF)Se Iara não fala italiano, então Ana fala Alemão. Se Iara fala italiano, então ou Ching fala inglês ou Débora fala dinamarquês. Se Débora fala dinamarquês, Elton fala espanhol. Mas Elton fala espanhol se e somente se não for verdade que Francisco não fala francês, Ora, Francisco não fala francês e Ching não fala chinês. Logo,

    A) Iara não fala italiano e Débora não fala dinamarquês.

    B) Ching não fala chinês e Débora fala dinamarquês.

    C) Francisco não fala francês e Elton fala espanhol.

    D) Ana não fala alemão ou Iara fala italiano.

    E) Ana fala alemão e Débora fala dinamarquês.

11. (BADESC-2010) Certo dia, três amigos fizeram, cada um deles, uma afirmação:

    Aluísio: Hoje não é terça feira

    Benedito: Ontem foi domingo

    Camilo: Amanhã será quarta-feira

    Sabe-se que um deles mentiu e que os outros dois falaram a verdade.

    Assinale a alternativa que indique corretamente o dia em que fizeram essas afirmações.

    A) Sábado.

    B) Domingo.

    C) Segunda-feira.

    D) Terça-feira.

    E) Quarta-feira.

12. (TRT 1ª Região Téc Jud 2008 CESPE) Assinale a opção correspondente à negação correta da proposição "Os ocupantes de cargos em comissão CJ.3 e CJ.4 não têm direito à carteira funcional".

A) Os ocupantes de cargos em comissão CJ.3 e CJ.4 têm direito à carteira funcional.

B) Os ocupantes de cargos em comissão CJ.3 ou os ocupantes de cargos em comissão CJ.4 têm direito à carteira funcional.

C) Não é o caso de os ocupantes de cargos em comissão CJ.3 e CJ.4 terem direito à carteira funcional.

D) Nem ocupantes de cargos em comissão CJ.3, nem CJ.4 não têm direito à carteira funcional.

E) Os ocupantes de cargos em comissão CJ.3 não têm direito à carteira funcional, mas os ocupantes de cargos em comissão CJ.4 têm direito à carteira funcional.

13. (ESAF) Se Beto briga com Glória, então Glória vai ao cinema. Se Glória vai ao cinema, então Carla fica em casa. Se Carla fica em casa, então Raul briga com Carla. Ora, Raul não briga com Carla. Logo.

    A) Carla não fica em casa e Beto não briga com Glória.

    B) Carla fica em casa e Glória vai ao cinema.

    C) Carla não fica em casa e Glória vai ao cinema.

    D) Glória vai ao cinema e Beto briga com Glória.

    E) Glória não vai ao cinema e Beto briga com Glória.

14. . (ESAF) Se Carlos é mais velho do que Pedro, então Maria e Julia tem a mesma idade. Se Maria e Julia tem a mesma idade, então João é mais moço do que Pedro.

    Se João é mais moço do que Pedro, então Carlos é mais velho do que Maria.

    Ora, Carlos não é mais velho do que Maria. Então:

    A) Carlos não é mais velho do que Leila, e João é mais moço do que Pedro.

    B) Carlos é mais velho que Pedro, e Maria e Julia tem a mesma idade. C) Carlos e João são mais moços do que Pedro.

    D) Carlos é mais velho do que Pedro, e João é mais moço do que Pedro.

    E) Carlos não é mais velho do que Pedro, e Maria e Julia não tem a mesma idade.

Capítulo 4

Sugestões de sequências didáticas

4.1 Circuitos lógicos e a relação com as Tabelas-verdade

Nesse capítulo serão apresentados alguns métodos e estratégias para ensinar o conteúdo da lógica proposicional e de 1ª ordem de maneira lúdica e não enfadonha para os alunos do Ensino Fundamental nos anos finais e para os alunos do Ensino Médio. Uma das maneiras interessantes de ter um primeiro contato com a tabela verdade é o estudo dos circuitos lógicos(de chaveamento ou computacionais), uma vez que existe uma grande semelhança entre as proposições e os dispositivos físicos de dois estados tais como interruptores, contatos, diodos, transistores que dependendo do dispositivo chaveado podem tomar os estados ligado/desligado, conduzindo/não conduzindo, fechado/aberto, carregado/descarregado, magnetizado/não magnetizado. É fato e notório o crescimento da aplicação desse ramo da matemática em engenharias e tecnologia da informação, por isso se faz tão importante a introdução desse tipo de matemática nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

4.1.1 Álgebra Booleana

Em 1854, George Boole[1] desenvolveu de maneira sistemática e formalizada uma representação da lógica. Esse método ficou conhecido como Álgebra Booleana que definindo informalmente trata de maneira sofisticada o que foi apresentado anteriormente como tabela verdade, as operações lógicas que até então eram tratados como conectivos. Só em 1938, C.E. Shannon aplicou a álgebra booleana para mostrar que as propriedades de circuitos elétricos de chaveamento podem ser representados por tal lógica.

Não tratamos de maneira mais aprofundada sobre a álgebra booleana, tendo em vista que o propósito desse capítulo é tão somente apresentar estratégias sistematizadas para o ensino da lógica nas escolas de Ensino Fundamental e Médio. Apresentamos apenas algumas definições para melhor compreensão das atividades propostas.

A principal diferença entre a Álgebra Booleana e álgebra ordinária dos reais é que enquanto as variáveis na álgebra ordinária dos reais podem assumir valores no intervalo $(-\infty,\infty)$, na álgebra booleana só podem assumir um entre dois valores lógicos possíveis, os quais podem ser denotados por [F,V](falso ou verdadeiro), [H,L](high or low) ou ainda o mais utilizado na literatura que trata sobre o assunto que é [0,1], este último é muito utilizado em circuitos eletrônicos de chaveamento.

Definição 4.1 (Álgebra Booleana) *Podemos definir uma Álgebra Booleana como sendo um conjunto com três operações bem definidas a saber:*

1ª) Uma operação binária[2] denominada soma, para qual empregaremos o simbolo $\oplus$. Essa operação é similar ao conectivo "OU", $(\vee)$ estudado no Capítulo 2. Assim como na construção da tabela verdade do conectivo "OU", uma variável booleana receberá valoração 1, quando pelo menos uma das variáveis de entrada vale 1.

[1]George Boole nasceu em Lincoln - Inglaterra em 2 de Novembro de 1815. Autodidata, fundou aos 20 anos de idade a sua própria escola e dedicou-se ao estudo da Matemática. Em 1840 publicou o seu primeiro trabalho original e em 1844 foi condecorado com a medalha de ouro da Royal Society pelo seu trabalho sobre cálculo de operadores. Em 1847 publica um volume sob o título The Mathematical Analysis of Logic em que introduz os conceitos de lógica simbólica demonstrando que a lógica podia ser representada por equações algébricas. Este trabalho é fundamental para a construção e programação dos computadores eletrônicos iniciada cerca de 100 anos mais tarde.

[2]Uma operação é dita binária quando só pode ser definida se houver pelo menos duas variáveis envolvidas.

Tabela 4.1: Tabela-verdade da soma booleana

x	**y**	$\mathbf{x \oplus y}$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor.

2ª) Uma operação binária denominada produto, para a qual utilizaremos o simbolo $\times$. Essa operação tem o mesmo efeito que o uso do "E", $(\wedge)$, utilizado na lógica proposicional e de 1ª ordem. Sendo assim, uma variável booleana receberá a valoração 1 se, e somente se todas as variáveis de entrada forem iguais a 1.

Tabela 4.2: Tabela-verdade do produto booleano

x	**y**	$\mathbf{x \times y}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Fonte: Elaborada pelo autor.

3ª) Uma operação denominada complementação (ou negação, ou inversão) é a operação cujo resultado é simplesmente o valor complementar ao que a variável apresenta. Sabendo que uma variável boolena pode assumir apenas um entre dois valores lógicos[0,1], o valor complementar será 1 caso a variável apresente valoração 0, e será 0 caso a variável seja igual a 1. Nesse caso usaremos o mesmo símbolo que representa o complementar de um conjunto, isto é, uma asserção em cima da variável. Por exemplo sendo **A** uma variável booleana, então $\overline{\mathbf{A}}$ será sua complementar.

Tabela 4.3: Tabela-verdade da complementação lógica

A	$\overline{\mathbf{A}}$
1	0
0	1

Fonte: elaborada pelo autor.

Como já mencionado anteriormente, há uma correspondência muito grande entre lógica proposicional e a Álgebra Booleana. Vimos que no exemplo das operações só mudaram os símbolos, mas a operação em si não se alterou. Segue um quadro de resumo entre essas correspondências:

Tabela 4.4: Quadro resumo da correspondência entre lógica proposicional e Álgebra Booleana

Lógica proposicional	**Álgebra Booleana**
F	0
V	1
$\vee$	$\oplus$
$\wedge$	$\times$
$\sim A$	$\overline{A}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

As operações na Álgebra Booleana como foram definidas apresentam algumas propriedades facilmente demonstráveis. Não trataremos aqui das demonstrações porque foge do objetivo desse trabalho, mas segue uma tabela com um resumo das propriedades das operações booleanas:

Tabela 4.5: Quadro resumo das propriedades das operações da Álgebra Booleana

Nome	Propriedade
complemento de 0 e 1	$\overline{1} = 0$ e $\overline{0} = 1$
idempotência	$x \oplus x = x$ e $x \times x = x$
Identidade	$b \oplus 1 = 1$ e $b \times 0 = 0$
Absorção	$x \oplus (x \times z) = x$ $x \times (x \oplus z) = x$
Involução	$\overline{\overline{x}} = x$
Associatividade	$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$
Leis de Morgan	$\overline{(x \oplus y)} = \overline{x} \times \overline{y}$ $\overline{(x \times y)} = \overline{x} \oplus \overline{y}$

Fonte: Dantas.

4.1.2 Avaliação de equações Boolenas

O procedimento para avaliar como se comporta determinada equação Booleana é através de sua tabela verdade, que seguem as mesmas orientações na ordem de precedência dos conectivos e operações lógicas.

1. Criamos colunas para as variáveis de entrada e listamos todas as combinações possíveis. Para isso vimos um passo-a-passo no Capítulo 2.

2. Criar uma coluna para cada variável que aparece complementada.(Esse segundo passo não é necessariamente obrigatório, mas ajuda bastante dependendo do número de entradas que há na equação a ser avaliada).

3. Avaliar a equação seguindo a ordem de precedência, a partir do nível de parênteses mais internos:

   1º) multiplicação lógica;

   2º) adição lógica.

4.1.3 Função Booleana

Seja B o conjunto definido como sendo uma álgebra Booleana, isto é, um conjunto munido das operações soma, produto e complementar lógicos, e que cada um de seus elementos recebem valoração 0 ou 1. Uma maneira simples de representar uma álgebra Booleana, é simplesmente $\langle B, \oplus, \times, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$. Uma função Booleana de n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma função $f : B^n \to B$ de tal modo que $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma expressão Booleana.

Exemplo 4.1 *Considere uma álgebra Booleana* $\langle B, \oplus, \times, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$, *vamos analisar as possíveis saídas para a função booleana* $W : B^3 \to B$, *definida como* $W(x, y, z) = x \oplus y \times \overline{z}$.

Tabela 4.6: Exemplo de análise de uma equação Booleana

x	**y**	**z**	$\overline{z}$	$y \times \overline{z}$	$x \oplus y \times \overline{z}$
1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 Circuitos de Chaveamento

Em um circuito chaveado como por exemplo um circuito elétrico, uma chave é um dispositivo ligado a um ponto de um circuito elétrico, que pode assumir um dos dois estados: fechado ou aberto. Quando no estado fechado, a chave permite que a corrente passe através do ponto, enquanto que no estado aberto nenhuma corrente passa através do ponto. Os estados aberto e fechado podem ser representados respectivamente por (F) e (V), mas na maioria da literatura que trata sobre o tema da álgebra Booleana aplicada a circuitos chaveados usa-se (1) para o caso da chave fechada e (0) para a chave aberta, e por esse motivo também usaremos essa linguagem. e as chaves podem ser representadas por letras do alfabeto latino, sendo na maioria das vezes designadas pelas letras x, y e z.

Dizemos que dois pontos P e Q de um circuito elétrico estão ligados por um circuito de chaveamento se, e somente se estão interligados por um circuito, isto é, linha no qual está localizado um número finito de chaves.

4.2.1 Circuitos em série

Em um circuito em série a corrente flui de A até B somente sob a condição de todas as portas estarem fechadas.

Exemplo 4.2

Figura 4.1: Exemplo de circuito em série

Fonte: Elaborada pelo autor

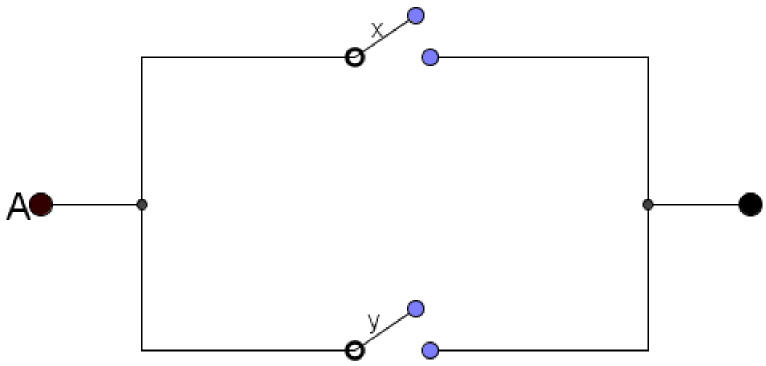
Nesse exemplo apresentamos um circuito em série com duas portas(interruptores), x e y, se adotarmos 1 para fechada e 0 para aberta, teremos $x = 0$ e $y = 0$. O circuito só passaria corrente de A para B no caso em que $x = 1$ e $y = 1$. Representando na álgebra Booleana a corrente flui de A para B se, e somente se a equação $x \times y = 1$ é satisfeita.

4.2.2 Circuitos paralelos

Funciona como o "OU" da lógica proposicional, ou se preferir como a operação adição da álgebra Booleana.

Exemplo 4.3

Figura 4.2: Exemplo de circuito em paralelo



Fonte: Elaborada pelo autor

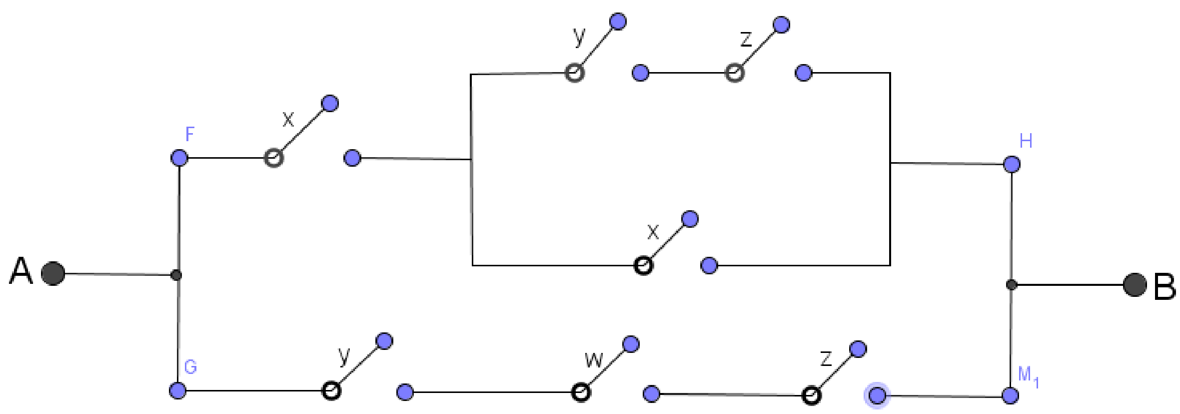
Note que para a corrente fluir de A para B é suficiente que apenas uma das portas esteja fechada, o que na álgebra Booleana, é equivalente a dizer que a corrente flui de A para B quando satisfeita a seguinte equação: $x \oplus y = 1$.

4.2.3 Circuito em série-paralelo

Esse tipo de ligação envolve os dois tipos de ligações mencionadas anteriormente.

Exemplo 4.4

Figura 4.3: Exemplo de circuito em série-paralelo



Fonte: Elaborada pelo autor

Considerações importantes

- Observe que no último exemplo existem algumas chaves com o mesmo nome. Chaves com o mesmo nome operam de forma idêntica, isto é, se uma está aberta a outra está necessariamente aberta e vice-versa.

- Uma regra geral para montarmos uma expressão Booleana para os circuitos de chaveamento é a seguinte: denotamos pelo produto lógico duas chaves que estejam em série e pela soma lógica chaves que estejam em circuito paralelo(observe como foram obtidas as fórmulas nos exemplos anteriores). Por exemplo, o circuito em série paralelo do exemplo anterior pode ser denotado pela expressão Booleana dada por: $x \times (y \times z \oplus x) \oplus y \times w \times z$. Analogamente aos exemplos anteriores, existirá uma condução interligando A a B se, e somente se $x \times (y \times z \oplus x) \oplus y \times w \times z = 1$. De maneira mais generalizada podemos dizer que uma função Booleana representa um circuito e um circuito de chaveamento realiza uma função Booleana.

- Tendo em vista que as chaves de um circuito podem tomar apenas um dos dois estados(Aberto/ Fechado), sob à luz da lógica, isto é, sem considerar questões físicas como voltagem, resistência, quantidade de corrente elétrica, os circuitos de chaveamento sempre poderão ser modelados pela álgebra Booleana.

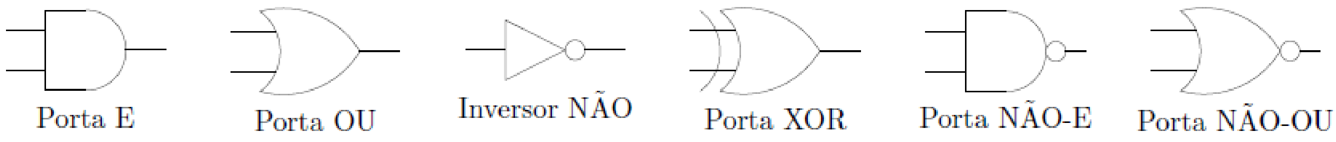
4.3 Circuitos lógicos

Na seção anterior foram detalhados alguns circuitos de chaveamento simples, como os circuitos em série, em paralelo e em série-paralelos, agora vamos ver como esses podem ter outro tratamento na elaboração de circuitos mais elaborados.

Definição 4.2 (Portas lógicas) *Podemos definir um circuito de chaveamento em série como sendo um dispositivo com n entradas (chaves), e uma saída que vale 1 se transmitir corrente e vale 0 caso contrário. Dessa mesma forma poderemos definir cada um dos circuitos de chaveamento. A cada um desses dispositivos simples (circuitos de chaveamento) denominamos porta lógica. De maneira informal podemos definir as portas lógicas como sendo a representação gráfica de funções Booleanas.*

As portas lógicas são representadas por símbolos específicos que nos permitem identificar facilmente de qual operação lógica estamos tratando, segue ilustração das principais portas lógicas:

Figura 4.4: Representação gráfica de algumas portas lógicas



Fonte: http://www.inf.ufes.br

Note em cada uma das portas lógicas existem duas entradas excetuando a porta inversora , todavia podem haver mais de uma entrada,porém apenas uma saída que pode ser ou 1 ou 0.

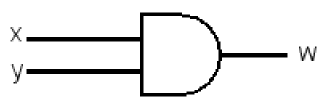
Definição 4.3 (Circuitos Lógicos) *As portas lógicas podem ser agrupadas de maneira a formarem circuitos a partir de conexões formando expressões Booleanas, a esse conjunto de conexões entre portas lógicas denominaremos circuitos lógicos.*

As portas lógicas funcionam exatamente como os conectivos da lógica proposicional operadores lógicos da álgebra Booleana.

4.3.1 Porta lógica E

Na porta lógica “E” de n entradas a saída será 1 se, e somente se as n entradas forem iguais a 1.

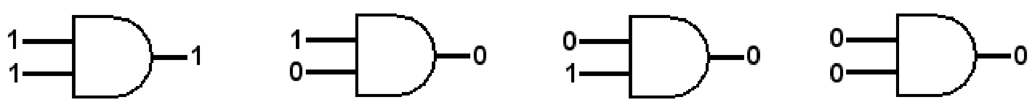
Figura 4.5: Representação gráfica da porta lógica E



Fonte: Elaborada pelo autor.

No caso do exemplo anterior, a corrente só passa pela porta lógica se a equação $x \times y = 1$ for satisfeita.

Figura 4.6: Tabela-verdade usando a porta lógica E

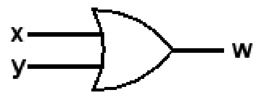


Fonte: Elaborada pelo autor.

4.3.2 Porta lógica OU

Assim como na porta E, a porta OU precisa receber no mínimo duas entradas. A porta OU segue o funcionamento da operação Booleana soma, isto é, para que resulte em 1, basta que uma das entradas seja igual a 1.

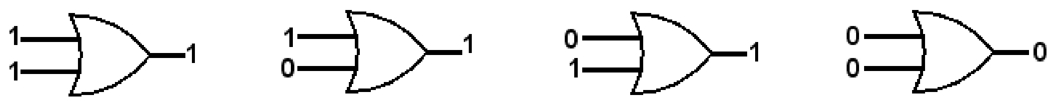
Figura 4.7: Representação gráfica da porta lógica OU



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos fazer a representação das possíveis saídas para uma porta do tipo OU da seguinte maneira:

Figura 4.8: Tabela-verdade usando a porta lógica OU

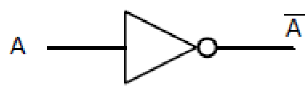


Fonte: Elaborada pelo autor.

4.3.3 Porta inversora

A porta inversora faz exatamente o papel da operação complementar da álgebra Booleana que é a negação da lógica proposicional. Diferentemente das outras portas, a inversora possui apenas uma entrada.

Figura 4.9: Representação gráfica da porta inversora



Fonte: logisim v2.7.1

Como está definida essa porta, o resultado é 1 se a entrada for 0 e é 0 caso a entrada seja 1.

Figura 4.10: Tabela-verdade da porta inversora

Fonte: Elaborada pelo autor.

Essas três portas que foram detalhadas, porta E (AND), porta OU (OR) e a porta inversora NÃO(NOT) são as principais e mais básicas, com elas já é possível a implementação das atividades lúdicas que serão apresentadas a seguir.

4.4 Primeira Atividade - Aplicativo computacional

A matemática, assim como a maioria das ciências empíricas, tem sua parte abstrata o que é de certa forma um incômodo para os alunos em sala de aula, tendo em vista que muitas das vezes os exemplos que são apresentados apresentam situações nas quais os alunos não podem ver na prática o que acontece. Esse fato por si só já é responsável por um grande percentual do desinteresse do aluno em aprender matemática.

> *"A dificuldade [no processo de ensino-aprendizagem] pode estar no fato de passar uma imagem de que a matemática é por excelência o lugar das abstrações, enfatizando-se seus pontos formais e distanciando-a da realidade, tanto para quem aprende como para quem ensina."(SILVA, 2004, p.6)*

A primeira atividade que segue como sugestão é o uso de ferramentas computacionais para que os alunos tenham um contato direto e lúdico na formação das tabelas-verdade, que como vimos é fundamental para entender a lógica desde proposições simples até a validade de argumentos.

4.4.1 Aplicativo on-line - circuito lógico

Existe um núcleo de computação aplicada destinado ao desenvolvimento de objetos de aprendizagem significativa, estruturados em simulações computacionais de fenômenos. Esse núcleo, batizado como NOAS, oferece muitas ferramentas interessantes para o auxilio no processo multivariável de ensino-aprendizagem. A proposta é desenvolver objetos que contribuam para uma aprendizagem significativa. Esses atividades são baseadas em simulações computacionais (applets Java, animações em flash, realidade virtual) que permitem ao aprendiz a interação necessária à compreensão dos fenômenos estudados.

A equipe do NOAS é constituída por educadores, especialistas em softwares, engenheiros, que se utilizam da tecnologia digital como elemento potencializador do processo de ensino e aprendizagem.

Uma das ferramentas apresentadas no site do NOAS é um aplicativo denominado circuito lógico, disponível gratuitamente para ser utilizado na plataforma on-line no seguinte endereço: http://www.noas.com.br/ensino-medio/matematica/logica/circuitos-logicos/.

O intuito do aplicativo é fazer uma associação direta entre circuitos de chaveamento e as linhas da tabela-verdade dos conectivos: conjunção e disjunção inclusiva.

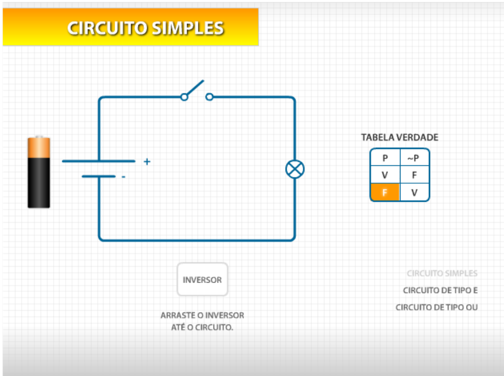
Figura 4.11: Tela inicial do aplicativo

Fonte: http://www.noas.com.br/ensino-medio/matematica/logica/circuitos-logicos/.

Circuito simples

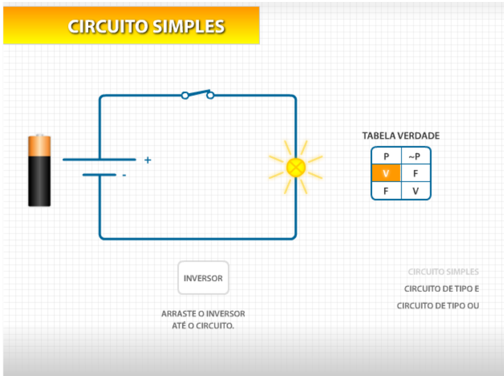
Esse item do aplicativo, serve para o aluno entender o circuito de chaveamento, como só tem uma chave, fica bem intuitivo o uso do aplicativo. Para a a chave mudar de estado (Aberto/Fechado), basta clicar com o mouse na determinada chave.

Figura 4.12: Circuito simples aberto



Fonte: http://www.noas.com.br/ensino-medio/matematica/logica/circuitos-logicos/.

Figura 4.13: circuito simples fechado

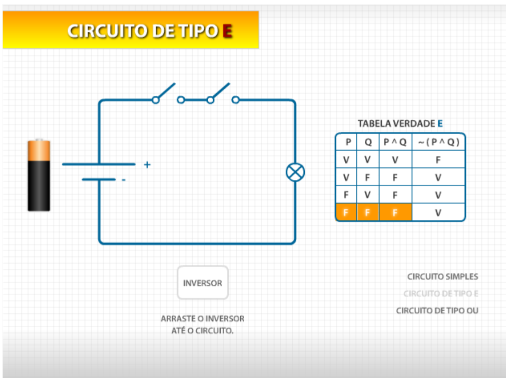


Fonte: http://www.noas.com.br/ensino-medio/matematica/logica/circuitos-logicos/.

Circuito tipo E

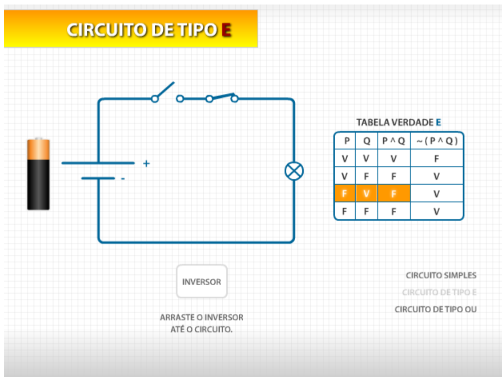
Com uso desse aplicativo é esperado que o aluno passe a compreender melhor, o que acontece com as valorações de proposições compostas do tipo conjunção.

Figura 4.14: Circuito Tipo E - Quarta linha da tabela-verdade



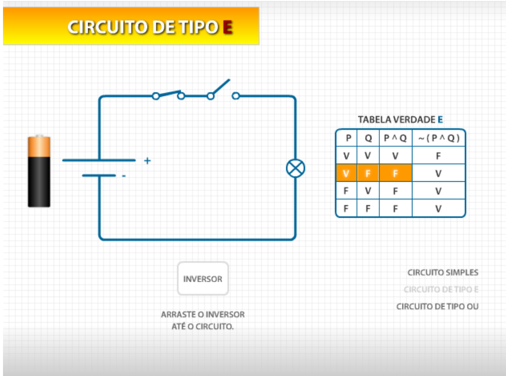
Fonte: http://www.noas.com.br/ensino-medio/matematica/logica/circuitos-logicos/.

Figura 4.15: Circuito Tipo E - Terceira linha da tabela-verdade



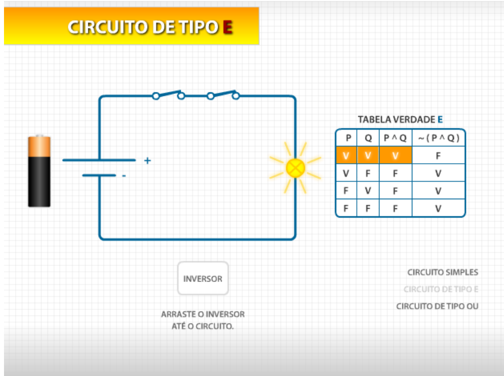
Fonte: http://www.noas.com.br/ensino-medio/matematica/logica/circuitos-logicos/.

Figura 4.16: Circuito Tipo E - Segunda linha da tabela-verdade



Fonte: http://www.noas.com.br/ensino-medio/matematica/logica/circuitos-logicos/.

Figura 4.17: Circuito Tipo E - primeira linha da tabela-verdade

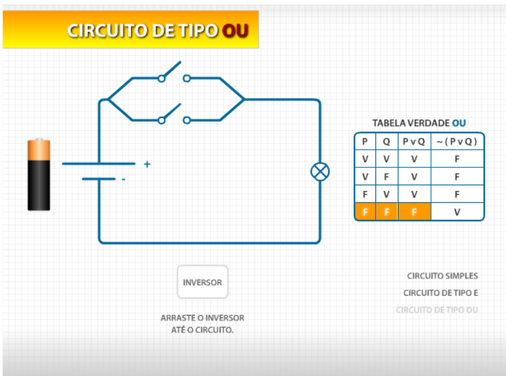


Fonte: http://www.noas.com.br/ensino-medio/matematica/logica/circuitos-logicos/.

Circuito tipo OU

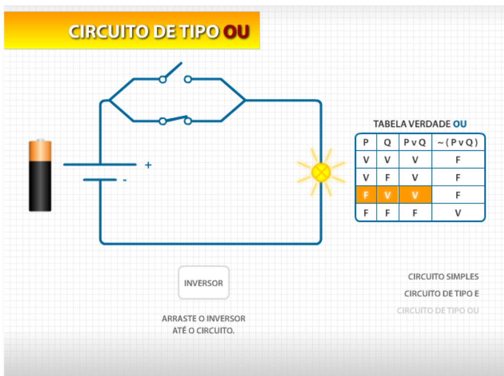
Na construção da tabela verdade da disjunção, por mais que procuremos usar proposições fáceis de entendimento, muitas vezes os alunos apresentam dificuldades em entender o OU inclusivo, o aplicativo torna essa conceito bem mais simples, e o aluno ainda pode ficar fazendo testes e tirando suas próprias conclusões acerca do conteúdo apresentado.

Figura 4.18: Circuito Tipo OU - Segunda linha da tabela-verdade



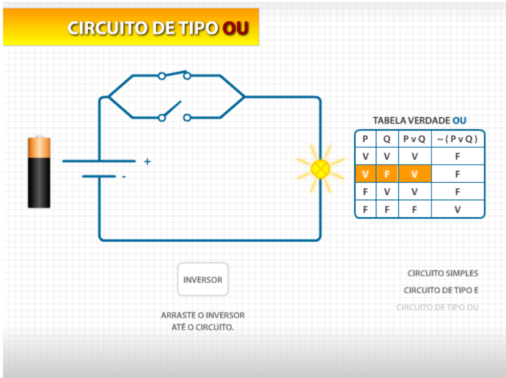
Fonte: http://www.noas.com.br/ensino-medio/matematica/logica/circuitos-logicos/.

Figura 4.19: Circuito Tipo OU - Primeira linha da tabela-verdade



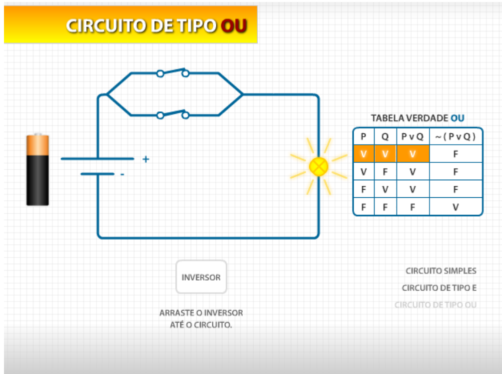
Fonte: http://www.noas.com.br/ensino-medio/matematica/logica/circuitos-logicos/.

Figura 4.20: Circuito Tipo OU - Segunda linha da tabela-verdade



Fonte: http://www.noas.com.br/ensino-medio/matematica/logica/circuitos-logicos/.

Figura 4.21: Circuito Tipo OU - Primeira linha da tabela-verdade



Fonte: http://www.noas.com.br/ensino-medio/matematica/logica/circuitos-logicos/.

4.5 Segunda atividade - Redefinindo conectivos com uso do programa de computador logisim v2.7.1

Essa segunda atividade deve preferencialmente ser aplicada quando o aluno já tem entendido bem o que é uma proposição composta, já souber montar uma tabela verdade e ter conhecimento do comportamento dos conectivos da lógica proposicional no que diz respeito a suas valorações.

Para alguns resultados teóricos da lógica se faz necessário que os conectivos sejam reduzidos o máximo que pudermos, um desses resultados por exemplo é quando partindo da tabela verdade de uma proposição composta desejamos chegar à função Booleana que a descreve. É possível redefinirmos os conectivos usando apenas três deles a saber: a conjunção, a disjunção e a negação. Como exemplo podemos utilizar o que já foi apresentado na seção que trata sobre equivalências lógicas, vimos que $A \rightarrow B$ é equivalente a $(\sim A) \vee B$.

Feito isto fica fácil notar que também é possível redefinir o conectivo bicondicional com outros conectivos mais simples. Na Subseção 2.3.4 já escrevemos a bicondicional como a conjunção entre duas implicações, desse fato segue:

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \Leftrightarrow ((\sim A) \vee B) \wedge ((\sim B) \vee A).$$

Note que ainda é possível reduzir mais a quantidade de conectivos, uma vez que as leis de Morgan nos permitem escrever a conjunção como uma disjunção e vice-versa, claro com uso da negação. Por exemplo $A \wedge B \Leftrightarrow \sim ((\sim A) \vee (\sim B))$.

Com base no exposto podemos fazer a seguinte afirmação:

Proposição 4.1 *Para toda fórmula composta A da lógica proposicional, existe uma fórmula B equivalente à A, tal que os únicos conectivos de B são $\vee$ e $\sim$.*

A tabela a seguir resume a proposição acima.

Tabela 4.7: Forma disjuntiva normal

$A \wedge B$	$\sim ((\sim A) \vee (\sim B)$
$A \rightarrow B$	$(\sim A) \vee B$
$A \leftrightarrow B$	$\sim (\sim ((\sim A) \vee B) \vee \sim ((\sim B) \vee A)))$

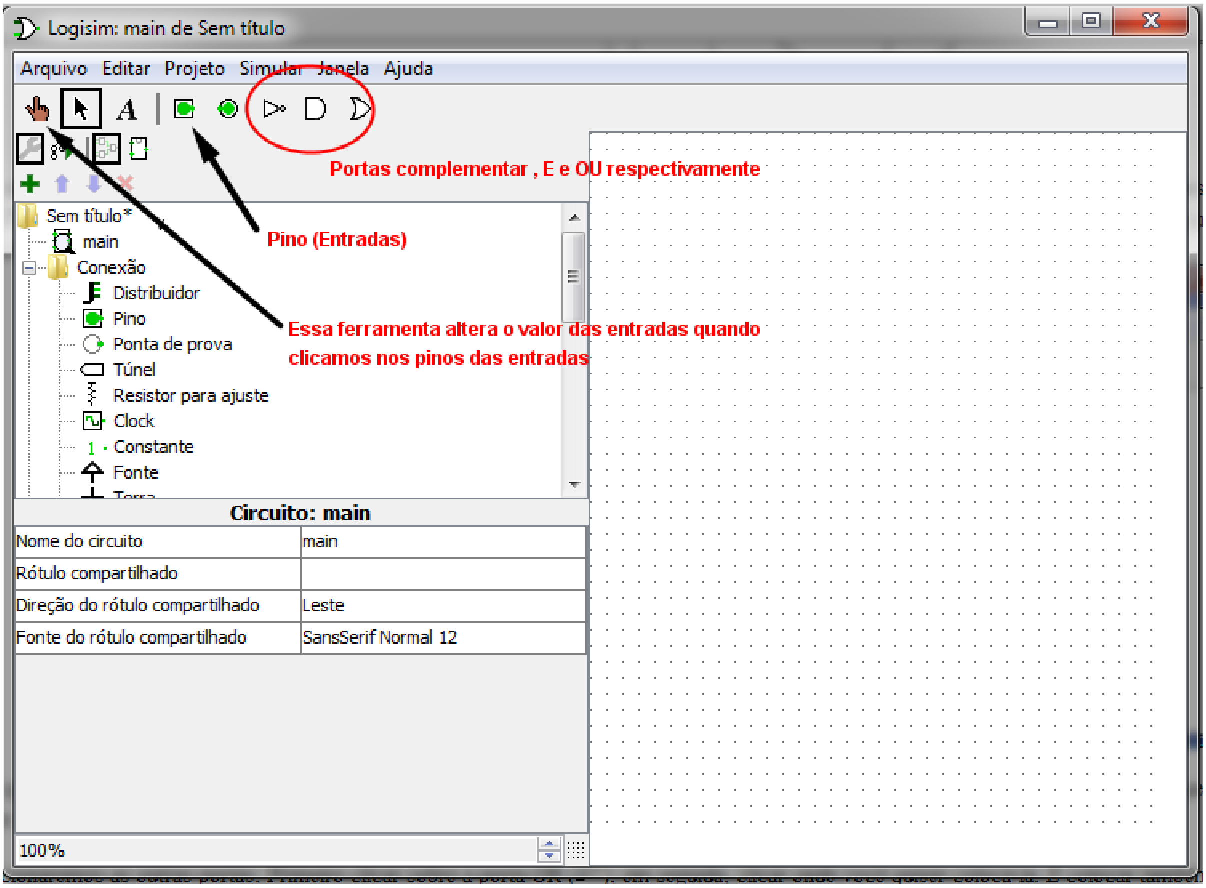
Da mesma forma que redefinimos os conectivos utilizando apenas a disjunção e a negação é possível fazê-lo utilizando a conjunção. Quando a fórmula é apresentada na forma $A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \ldots \vee A_n$, onde cada $A_i = B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_m$, tal que B_i é uma fórmula atômica ou sua negação, dizemos que a mesma está na forma disjuntiva normal.

4.5.1 Atividade utilizando o Logisim

O Logisim é uma ferramenta educacional gratuita para a concepção e a simulação digital de circuitos lógicos, disponível no seguinte endereço eletrônico: http://www.cburch.com/logisim/pt/.

A interface da ferramenta é bem intuitiva e de fácil manuseio para a atividade proposta. As ferramentas que serão necessárias para a atividade são as seguintes:

Figura 4.22: Tela inicial do software



Fonte: Elaborada pelo autor.

Objetivos específicos

Os objetivos específicos para essa atividade são os seguintes:

- Realizar operações lógicas reduzindo os conectivos a apenas 3 operadores: E, OU e Complementar(Negação);
- Descrever as operações das portas AND (E), OR (OU), e NOT (Negação), e construir as tabelas-verdade por observação de circuitos criados no *software* Logisim em sua versão 2.7.1;
- Implementar circuítos lógicos utiliazando portas básicas And, OR e NOT;
- Compreender de que forma as leis de DeMorgan ajudam a simplificar circuitos lógicos complexos;

- Usar a experimentação para conferir resultados antes já mostrado utilizando-se da prática tradicional;
- Reconhecer circuítos lógicos como sendo a representação gráfica de expressões Booleanas.

Metodologia

Essa atividade tem como público alvo os alunos do Ensino Médio, e pode ter a duração de pelo menos 03(três) aulas de 50 minutos e é interessante que seja realizada em grupos objetivando proporcionar a discussão da atividade entre os próprios alunos. É ideal para ser aplicada em aulas no laboratório de informática. A princípio deve-se apresentar o programa aos alunos, mostrando como dar os primeiros passos. Em um segundo momento poderemos solicitar que os alunos "testem" os conectivos básicos que estaremos utilizando na construção dos circuitos lógicos, fazendo o que está representado nas figuras 4.6, 4.8 e 4.10, comparando os resultados obtidos com os resultados da tabela-verdade. Para finalizar a sequência didática, agora que os alunos já se "apropriaram" do *software*, o professor já pode pedir que os alunos representes expressões mais complexas utilizando apenas as portas lógicas AND, OR e NOT. Seguem alguns exemplos de atividades que podem ser tomadas como base para criação de outras.

Exemplo 4.5 *Construir um circuito lógico utilizando apenas duas entradas e a porta lógica complementar, Porta E e Porta OU, de maneira que as saídas sejam exatamente as mesmas da condicional.*

Sabemos que a tabela-verdade da condicional é a seguinte:

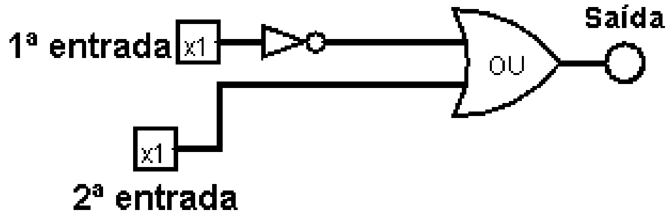
Tabela 4.8: Tabela-verdade da Condicional

A	**B**	**A → B**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

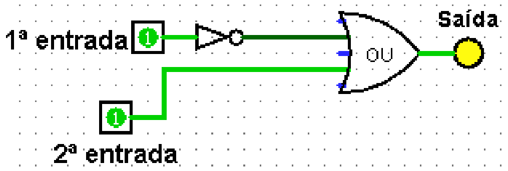
E também sabemos que $A \rightarrow B \Leftrightarrow ((\sim A) \vee B)$. Sendo assim, uma solução para o problema é a seguinte:

Figura 4.23: circuito lógico - condicional



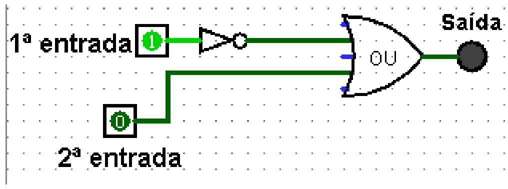
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.24: 1ª linha da tabela-verdade condicional



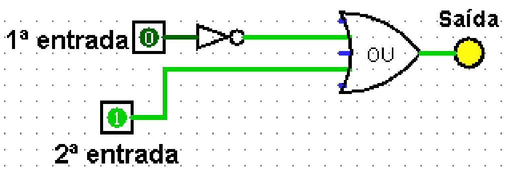
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.25: 2ª linha da tabela-verdade condicional



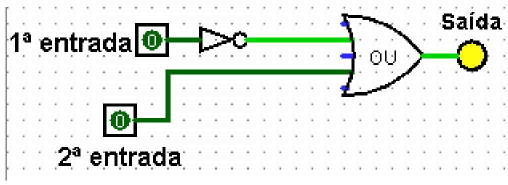
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.26: 3ª linha da tabela-verdade condicional



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.27: 4ª linha da tabela-verdade condicional



Fonte: Elaborada pelo autor.

No exemplo anterior foi feito um circuito usando apenas a negação e a disjunção para representar a condicional. Agora fazendo uso também da conjunção, além dos dois já mencionados vamos representar a bicondicional

Exemplo 4.6 *Construir um circuito lógico que simule a bicondicional entre duas proposições.*

Vamos relembrar a tabela verdade da bicondicional:

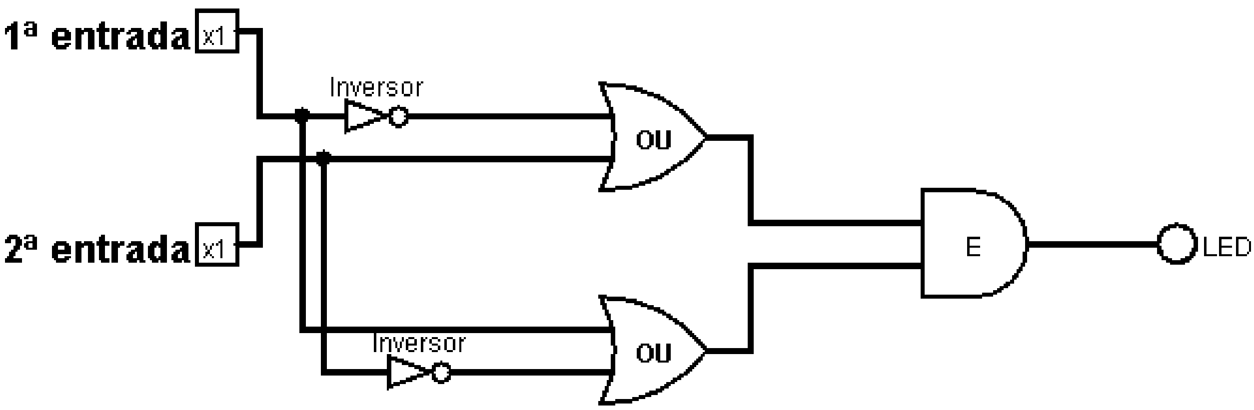
Tabela 4.9: Tabela-verdade da Bicondicional

A	**B**	**$A \leftrightarrow B$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma solução é a seguinte:

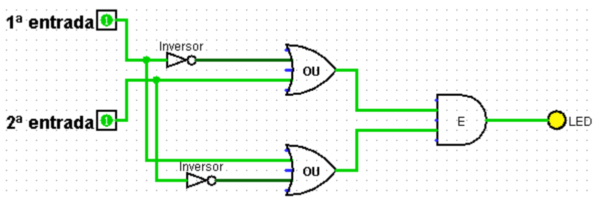
Figura 4.28: circuito lógico - bicondicional



Fonte: Elaborada pelo autor.

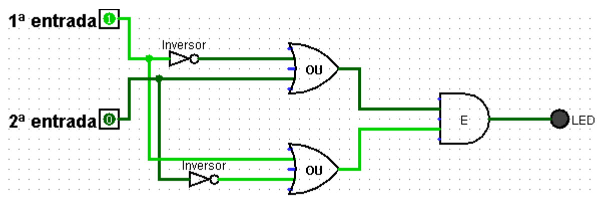
Vejamos de fato que esse circuito comporta-se exatamente como a bicondicional

Figura 4.29: 1ª linha da tabela-verdade bicondicional



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.30: 2ª linha da tabela-verdade bicondicional

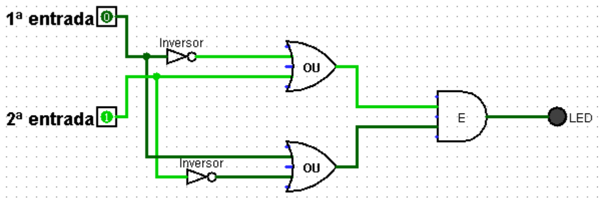


Fonte: Elaborada pelo autor.

.

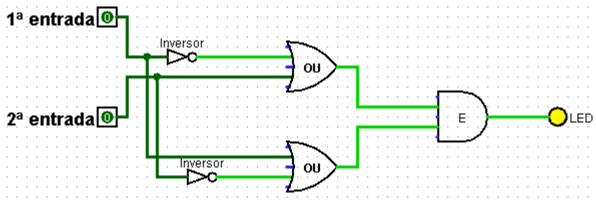
Exemplo 4.7 *Agora, faremos um circuito lógico para a disjunção exclusiva.*

Figura 4.31: 3ª linha da tabela-verdade bicondicional



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.32: 4ª linha da tabela-verdade bicondicional



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vejamos a tabela-verdade disjunção exclusiva:

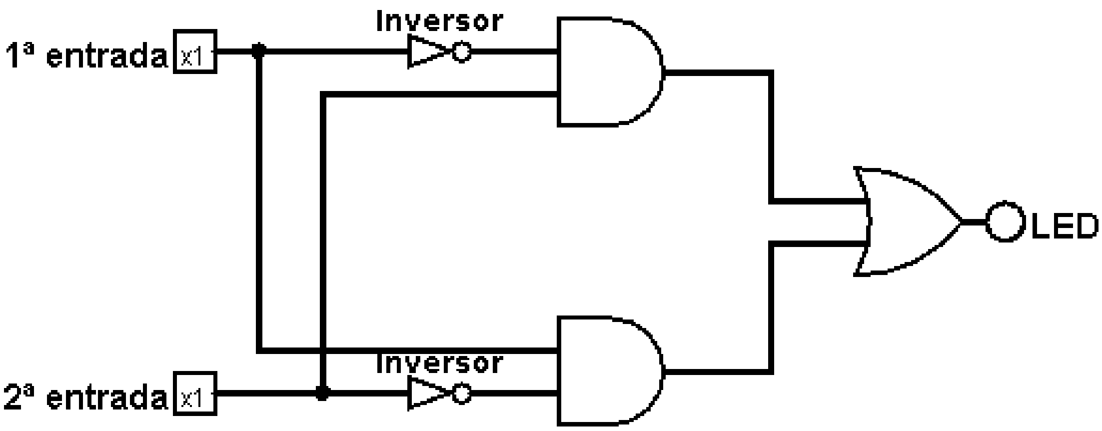
Tabela 4.10: Tabela-verdade da Disjunção Exclusiva

A	**B**	**A $\underline{\vee}$ B**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma possível solução é a seguinte:

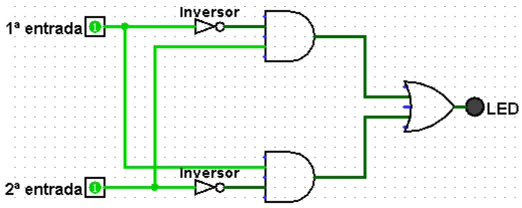
Figura 4.33: circuito lógico - Disjunção exclusiva



Fonte: Elaborada pelo autor.

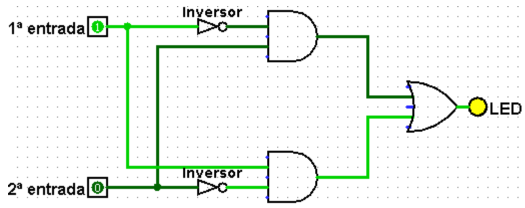
Vejamos que o circuito de fato representa graficamente a disjunção exclusiva.

Figura 4.34: 1ª linha da tabela-verdade da disjunção exclusiva



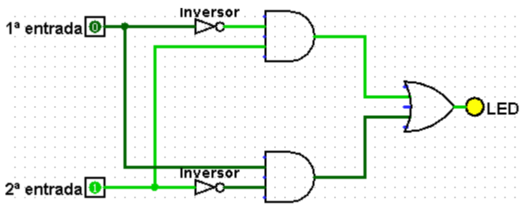
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.35: 2ª linha da tabela-verdade da disjunção exclusiva



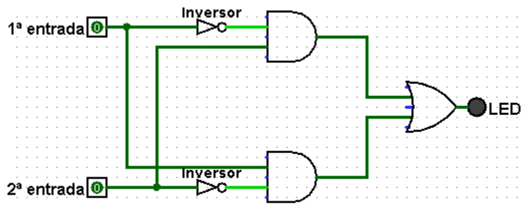
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.36: 3ª linha da tabela-verdade da disjunção exclusiva



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.37: 4ª linha da tabela-verdade da disjunção exclusiva



Fonte: Elaborada pelo autor.

.

Algumas escolas, principalmente as públicas(estaduais e municipais) infelizmente ainda não possuem laboratório ou porque nunca tiveram de fato ou por conta do mal uso que acaba sucateando os laboratórios das escolas. Uma alternativa para aplicação dessa atividade é o professor previamente, explicar a representação gráfica dos conectivos e auxiliar os alunos na criação de esboços de expressões booleanas.

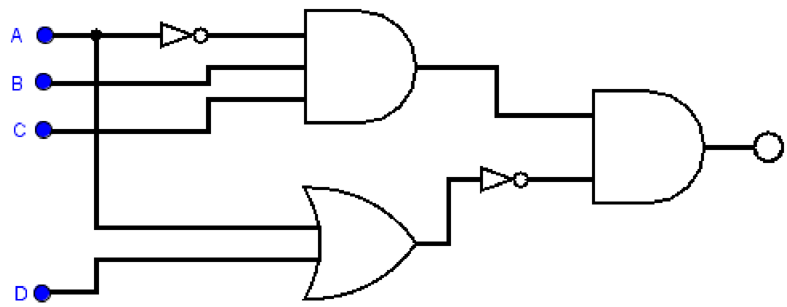
4.6 Terceira atividade - Ainda utilizando o Logisim

Uma outra atividade que pode ser realizada fazendo uso do Logisim é o inverso da atividade anterior, isto é, na atividade anterior era fornecida a tabela verdade ou uma função booleana e o aluno deveria montar o circuito lógico. A proposta dessa atividade é que o professor construa previamente o circuito lógico e determine os valores lógicos das entradas, o aluno deverá concluir se o "LED" acenderá ou não. Uma outra variante dessa atividade seria a seguinte: o professor monta o circuito tomando como ponto de partida uma função booleana e pede para que o aluno descubra quais são as combinações de entrada que fazem o LED acender.

Uma abordagem poderia ser inicialmente dando o circuíto e solicitando do aluno a expressão algébrica da saída.

Exemplo 4.8 *Dado o Circuito a seguir com 4 entradas, determine a equação albébrica que relaciona a saída x com as entradas.*

Figura 4.38: circuito lógico 1 - Terceira atividade

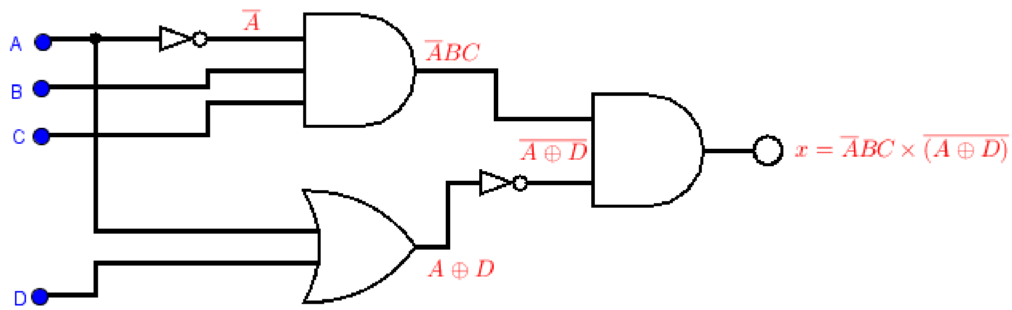


Fonte: Elaborada pelo autor.

Solução:

Uma solução para essa questão é a seguinte:

Figura 4.39: circuito lógico 1 Solução - Terceira atividade



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sendo assim a Expressão Booleana que é solução para o problema é dada por:

$$x = \overline{A}BC \times \overline{(A \oplus D)}$$

Exemplo 4.9 *Ainda utilizando a Figura 4.38, e a solução do Exemplo 4.8, analise o circuito e faça uma discussão acerca das entradas e saídas do mesmo.*

Solução:

Fazer uma discussão significa estudar quais devem ser as entradas para que a saída seja 1, e quais *são as entradas que fazem a saída ser 0(zero). Uma maneira de fazer tal estudo poderia ser utilizando a tabela verdade, uma vez que já é conhecida a expressão Booleana do determinado circuito. Note que na expressão* $x = \overline{A}BC \times \overline{(A \oplus D)}$, *o valor de x será 1 somente se os dois conjuntos forem iguais a 1, ou seja,* $\overline{A}BC = 1$ *e* $\overline{A \oplus D} = 1$.

De $\overline{A}BC = 1$ *concluímos que* $\overline{A} = 1, B = 1$ *e* $C = 1$, *e de* $\overline{A \oplus D} = 1$ *concluímos que D necessariamente deve ser 0 (zero) para que a saída seja 1, tendo em vista que* $A = 0$.

Conclusão: São possíveis 16 combinações de entrada mas apenas em uma delas a saída será 1, no caso em que $A = 0, B = 1, c = 1 e D = 0$.

Podemos constatar esse fato, fazendo a tabela verdade para a expressão booleana.

Tabela 4.11: Tabela-verdade do Exemplo 4.9

A	B	C	D	$\neg A$	$\overline{A}BC$	$\overline{A \oplus D}$	$\overline{A}BC \times \overline{(A \oplus D)}$
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.7 Resultados esperados e considerações finais

A presente dissertação foi motivada especialmente por experiências vividas em sala de aula como aluno(do ensino básico até o ensino superior), mas principalmente enquanto professor do ensino fundamental e médio, tanto na rede privada quanto na rede pública de ensino. Um dos principais requisitos que fundamentam a importância da matemática escolar nos textos oficiais que versam sobre o assunto é a resolução de problemas, mas para que o aluno consiga alcançar bem essa competência não é suficiente que o mesmo saiba fazer contas, existem várias outras habilidades que são inerentes à pratica de resolução de problemas das quais os PCNEM citam algumas: estabelecer hipóteses e tirar conclusões, saber apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, conseguir abstrair regularidades, criar modelos a partir de observações singulares. Isso evidência a importância que o estudo da lógica formal tem no contexto do ensino-aprendizagem, tendo em vista que as habilidades supra citadas são devidamente trabalhadas (como mostrado no texto) na abordagem da lógica formal.

> *"No contexto da construção do conhecimento matemático é ela[A LÓGICA] que permite a compreensão dos processos; é ela que possibilita o desenvolvimento da capacidade de argumentar e de fazer conjecturas e generalizações, bem como o da capacidade de justificar por meio de uma demonstração formal."(BRASIL, 2008)*

Existe uma dificuldade para os professores em trabalhar a lógica em sala de aula, muitas vezes porque os mesmos não tiveram a oportunidade de cursar essa cadeira na graduação ou porque a maioria dos livros didáticos não apresentam tal conteúdo, e quando o apresenta, faz isso de maneira muito resumida e sem nenhuma proposta de atividade para nortear a prática do profissional, a presente dissertação baseada nesses argumentos teve como escopo apresentar não só a importância da lógica no ensino básico e toda a teoria que fundamenta essa importância, mas trazer também algumas sugestões de atividades sejam como questionário ou como sequências didáticas utilizando o lúdico como ferramenta de aprendizagem.

É esperado que o profissional em educação matemática ao ler esse texto, compreenda o quão importante é a lógica para a matemática e não a dissocie de sua prática enquanto docente, e mais, veja nesse texto inspiração para formular suas próprias atividades ou até mesmo implementar em suas aulas as atividades que estão propostas na presente dissertação.

4.8 Exercícios de Vestibulares

1. (Insper 2014) Dentro de um grupo de tradutores de livros, todos os que falam alemão também falam inglês, mas nenhum que fala inglês fala japonês. Além disso, os dois únicos que falam russo também falam coreano. Sabendo que todo integrante desse grupo que fala coreano também fala japonês, pode-se concluir que, necessariamente,

   A) todos os tradutores que falam japonês também falam russo.

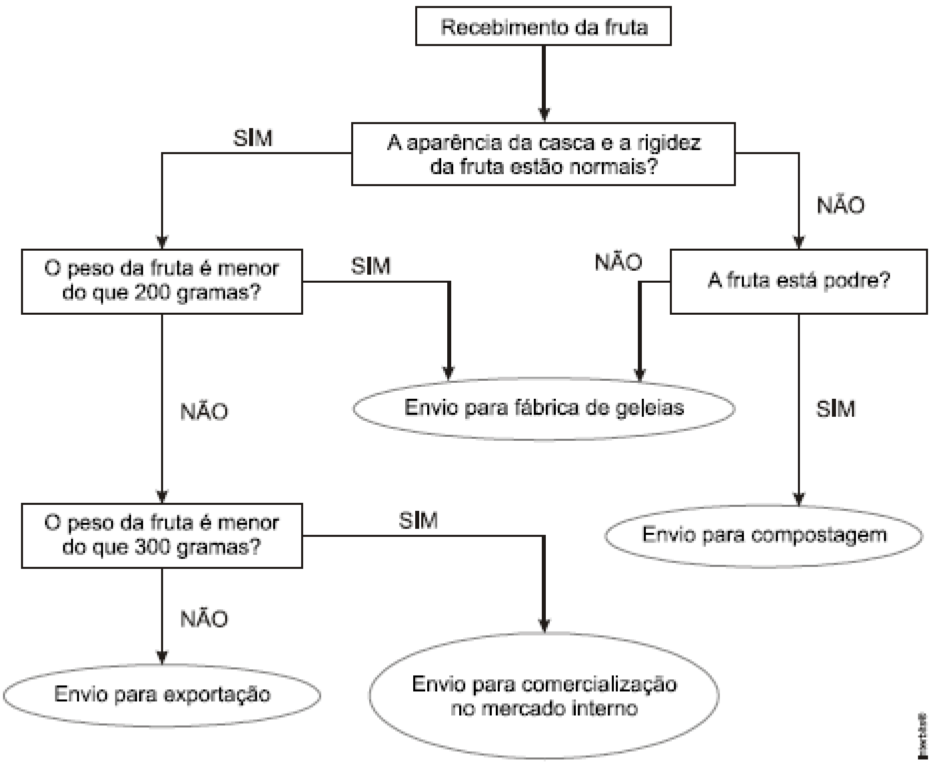
   B) todos os tradutores que falam alemão também falam coreano.

   C) pelo menos um tradutor que fala inglês também fala coreano.

   D) nenhum dos tradutores fala japonês e também russo.

   E) nenhum dos tradutores fala russo e também alemão.

2. (Insper 2014) A figura abaixo mostra o fluxograma do processo que é utilizado em uma cooperativa agrícola para definir o destino das frutas enviadas a ela pelos produtores da região.

   De acordo com o fluxograma, se o peso de uma fruta recebida pela cooperativa é 320 gramas, então essa fruta, necessariamente,

   A) será enviada para exportação.

B) será enviada para a fábrica de geleias.

C) não será enviada para comercialização no mercado interno.

D) não será enviada para compostagem.

E) não será enviada para a fábrica de geleias.

3. (Insper 2014) Os organizadores de uma festa previram que o público do evento seria de, pelo menos, 1.000 pessoas e que o número de homens presentes estaria entre 60% e 80% do número de mulheres presentes. Para que tal previsão esteja errada, basta que o número de

   A) homens presentes na festa seja igual a 360.

   B) homens presentes na festa seja igual a 500.

   C) homens presentes na festa seja igual a 1.000.

   D) mulheres presentes na festa seja igual a 650.

   E) mulheres presentes na festa seja igual a 1.000.

4. (Fatec 2013) Na Lógica, tem-se que a proposição

   Se ocorre P, então ocorre Q.

   é equivalente à proposição

   Se não ocorre Q, então não ocorre P.

   Assim sendo,

   Se $x < 3$, então $y = -4$

   é equivalente a

   A) Se $x > 3$, então $y \neq -4$.

   B) Se $x \geq 3$, então $y \neq 4$.

   C) Se $y \neq 4$, então $x \geq 3$.

   D) Se $y \neq -4$, então $x > 3$.

   E) Se $y \neq -4$, então $x \geq 3$.

5. (Insper 2012) As duas afirmações a seguir foram retiradas de um livro cuja finalidade era revelar o segredo das pessoas bem sucedidas.

   I. Se uma pessoa possui muita força de vontade, então ela consegue atingir todos os seus objetivos.

II. Se uma pessoa consegue atingir todos os seus objetivos, então ela é bem sucedida.

Dentre as alternativas abaixo, a única que relaciona corretamente a veracidade ou a falsidade das duas afirmações é

A) se a afirmação I é falsa, então a afirmação II é necessariamente verdadeira.

B) se a afirmação I é falsa, então a afirmação II é necessariamente falsa.

C) se a afirmação I é verdadeira, então a afirmação II é necessariamente falsa.

D) se a afirmação II é falsa, então a afirmação I é necessariamente falsa.

E) se a afirmação II é verdadeira, então a afirmação I é necessariamente verdadeira.

6. (Insper 2012) Em um campeonato disputado por 20 equipes, quatro delas são consideradas "times grandes". Numa rodada desse campeonato, na qual todas as 20 equipes disputaram um único jogo, houve exatamente três partidas envolvendo pelo menos um time grande. O total de gols marcados nessas três partidas foi 2. Apenas com essas informações, conclui-se que nessa rodada, necessariamente,

   A) pelo menos um time grande marcou um gol.

   B) pelo menos uma partida envolvendo um time grande não terminou empatada.

   C) nenhum time grande marcou mais de um gol. D) no mínimo um e no máximo dois times grandes venceram sua partida.

   E) no mínimo um e no máximo três times grandes tiveram 0 a 0 como resultado.

7. (Enem PPL 2012) Cinco times de futebol (A, B, C, D e E) ocuparam as primeiras colocações em um campeonato realizado em seu país. A classificação final desses clubes apresentou as seguintes características:

   - O time A superou o time C na classificação;

   - O time C ficou imediatamente à frente do time E;

   - O time B não ficou entre os 3 últimos colocados;

   - O time D ficou em uma classificação melhor que a do time A.

   Assim, os dois times mais bem classificados foram

   A) A e B.

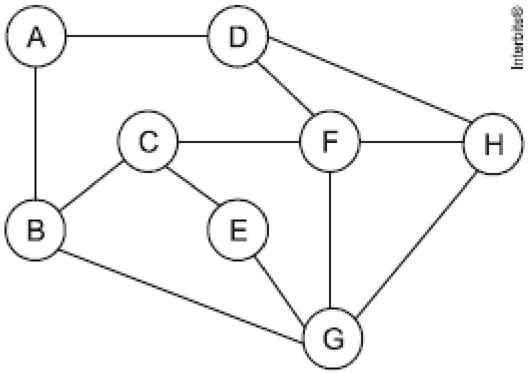
   B) A e C.

   C) B e D.

   D) B e E.

E) C e D.

8. (Uff 2012) No mapa a seguir estão indicados os depósitos de uma rede de supermercados e as rotas possíveis entre eles.



Um caminhão saindo do depósito A pode chegar ao depósito H de várias maneiras. Por exemplo, os trajetos $A \to D \to H$ e $A \to B \to E \to G \to F \to H$ são duas possibilidades.A quantidade total de tjetos que um camihão da empresa pode fazer, partindo do depósito A com destino ao depósito H, sem passar mais de uma vez pelo mesmo depósit, é igual a

A) 8.

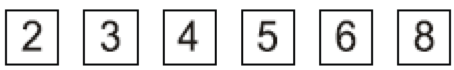
B) 12.

C) 16.

D) 30.

E) 64.

9. (Insper 2012) Uma pessoa dispõe dos seis adesivos numerados reproduzidos a seguir, devendo colar um em cada face de um cubo.



Sabe-se que:

- se numa face do cubo for colado um número ímpar, então na face oposta será colado um número maior do que ele;

- a soma dos números colados em duas faces opostas quaisquer do cubo pertence ao intervalo [6, 5; 12, 5].

Nessas condições, multiplicando os números colados em duas faces opostas quaisquer desse cubo, obtémse, no máximo,

A) 20.

B) 24.

C) 30.

D) 32.

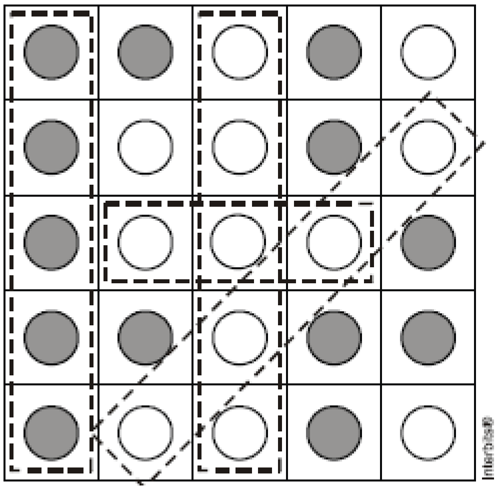
E) 40.

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO

Um jogo é disputado por duas pessoas em um tabuleiro quadrado 5×5. Cada jogador, de maneira alternada, escolhe uma casa vazia do tabuleiro para ocupá-la com uma peça da sua cor. Ao final do jogo, se conseguiu ocupar 3 ou mais casas alinhadas e consecutivas com peças da sua cor, um jogador ganha pontos de acordo com a tabela abaixo.

Número de casas alinhadas	Pontos obtidos
3	1
4	4
5	10

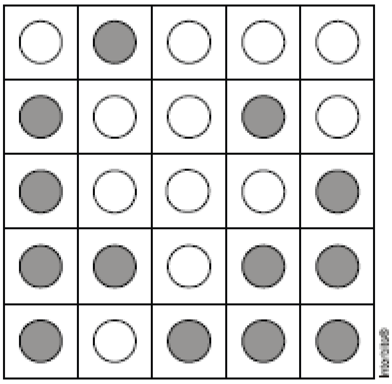
Entende-se por casas alinhadas aquelas que estejam numa mesma vertical, numa mesma horizontal ou numa mesma diagonal. No jogo mostrado abaixo, por exemplo, o jogador das peças claras marcou 15 pontos e o das peças escuras marcou 10 pontos.



Peças claras: $10+4+1=15$ pontos Peças escuras: 10 pontos

O jogo termina quando todas as casas são ocupadas.

10. (Insper 2012) Um jogo entre duas pessoas terminou com o tabuleiro preenchido como mostra a figura.



A soma dos pontos obtidos pelos dois jogadores foi

A) 19.

B) 20.

C) 21.

D) 22.

E) 23.

11. (Unesp 2011) Todo dado cúbico padrão possui as seguintes propriedades:

- Sobre suas faces estão registrados os números de 1 a 6, na forma de pontos.

- A soma dos números registrados, em qualquer duas de suas faces opostas, é sempre igual a 7.

Se quatro dados cúbicos padrões forem colocados verticalmente, um sobre o outro, em cima de uma superfície plana horizontal, de forma que qualquer observador tenha conhecimento apenas do número registrado na face horizontal superior do quarto dado, podemos afirmar que, se nessa face estiver registrado o número 5, então a soma dos números registrados nas faces horizontais não visíveis ao observador será de:

A) 23.

B) 24.

C) 25.

D) 26.

E) 27.

12. (G1 - ccampos 2011) João, Pedro e Carlos são atletas. João tem 16 anos e joga vôlei, Pedro tem 17 anos e joga basquete e Carlos tem 15 anos e joga futebol. Considere que uma pessoa alta tem mais de 1,80m de altura e que somente uma das afirmativas abaixo é verdadeira.

   1- Exatamente um dos rapazes é alto.

   2- Exatamente dois dos rapazes mencionados são altos.

   3- Exatamente três dos rapazes mencionados são altos.

   4- Pelo menos dois dos rapazes mencionados são altos.

   A soma dos números dos itens cujas afirmações são falsas é:

   A) 1

   B) 2

   C) 8

   D) 9

13. (Insper 2011) Ao serem investigados, dois suspeitos de um crime fizeram as seguintes declarações:

Suspeito A : Se eu estiver mentindo, então não sou culpado.

Suspeito B: Se o suspeito A disse a verdade ou eu estiver mentindo, então não sou culpado.

Se o suspeito B é culpado e disse a verdade, então

A) o suspeito A é inocente, mas mentiu.

B) o suspeito A é inocente e disse a verdade.

C) o suspeito A é culpado, mas disse a verdade.

D) o suspeito A é culpado e mentiu.

E) o suspeito A é culpado, mas pode ter dito a verdade ou mentido.

14. (Ufpe 2011) O Jogo do Nim é um jogo de estratégia entre dois jogadores com palitos dispostos em três linhas. A quantidade de palitos por linha é estabelecida no início do jogo. Cada jogador retira, na sua vez de jogar, uma quantidade qualquer de palitos de uma só linha (pelo menos um palito). Vence o jogo aquele que retirar o último grupo de palitos. João e Maria estão jogando o Jogo do Nim com 3 palitos por linha, e Maria começa retirando os três palitos de alguma linha. A propósito, analise as seguintes afirmações:

    ( ) Se João retirar apenas um palito de outra linha, ele com certeza vence o jogo.

    ( ) Se João retirar dois palitos de outra linha, ele com certeza vence o jogo.

    ( ) Se João retirar todos os palitos de outra linha, ele só vence se Maria permitir.

    ( ) Independentemente da jogada de João, Maria vencerá se quiser.

    ( ) Com a configuração inicial de 3 palitos por linha, a única jogada inicial que garante a vitória é a usada por Maria.

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Numa pesquisa sobre uma determinada doença, os médicos identificaram relações entre a presença de três substâncias no sangue de uma pessoa e a pessoa estar com a doença. As conclusões dos estudos foram as seguintes:

Toda pessoa com a substância A no sangue está com a doença.

- Se a pessoa está com a doença, então a substância B está em seu sangue.
- A substância C está presente no sangue de 90pessoas que estão com a doença e no sangue de 10% das pessoas que não estão.

15. (Insper 2011) Uma pessoa certamente não está com a doença se

    A) a substância A não estiver em seu sangue.

    B) a substância B não estiver em seu sangue.

    C) a substância C não estiver em seu sangue.

    D) a substância C estiver em seu sangue e a substância B também.

    E) a substância C não estiver em seu sangue e a substância A estiver.

16. (Ufpr 2010) Temos três caixas, uma com duas bolas azuis, outra com duas bolas brancas e uma terceira com uma bola branca e outra azul. Cada caixa tinha uma etiqueta correspondente ao seu conteúdo – AA, BB e AB –, contudo alguém trocou as etiquetas de tal forma que todas ficaram etiquetadas de forma errada. Tirando apenas uma bola por vez de qualquer das caixas, sem olhar o conteúdo, qual é o menor número de bolas que deve ser retirado para saber o conteúdo de cada caixa?

    A) Cinco bolas.

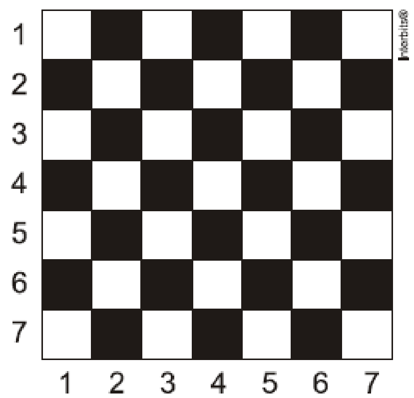
    B) Quatro bolas.

    C) Três bolas.

    D) Duas bolas.

    E) Uma bola.

17. (Ibmecrj 2010) Considere o tabuleiro de xadrez exposto abaixo onde cada posição é identificada por um par ordenado (a,b), sendo que a primeira coordenada (nesse caso "a") corresponde ao número da linha, e a segunda coordenada (nesse caso "b") corresponde ao número da coluna. Cada posição assume a cor branca ou preta. Baseado nessas informações e considerando uma posição cujas coordenadas correspondem a (x,y), assinale a afirmativa correta.



A) x é par e y é par se, e somente se, a posição é branca.

B) Se a cor da posição é branca então $x = y$.

C) x é ímpar e y é par se, e somente se, a posição é preta.

D) Se a posição é branca, então x é ímpar, e y é par.

E) x é par e y é ímpar somente se a cor da posição é preta.

18. (Fatec 2010) Considerando verdadeiras as premissas:

    • Todo lixo eletrônico contamina o meio ambiente.

    • Existe lixo eletrônico que é destinado à reciclagem.

    pode-se concluir logicamente que se um determinado lixo

    A) é eletrônico ou é destinado à reciclagem, então contamina o meio ambiente.

    B) não é eletrônico e contamina o ambiente, então não é destinado à reciclagem.

    C) contamina o meio ambiente e não é destinado à reciclagem, então é lixo eletrônico.

    D) não é destinado à reciclagem e não contamina o meio ambiente, então não é eletrônico.

    E) é destinado à reciclagem ou não contamina o meio ambiente, então não é lixo eletrônico.

19. (G1 - cps 2006) Um avião monomotor caiu no Triângulo das Bermudas e, a muito custo, o piloto conseguiu alcançar a praia de uma ilha. Nessa ilha morava apenas um náufrago que mentia às terças, quartas e quintas-feiras, e falava a verdade nos outros dias da semana. Depois de algum tempo, o piloto perdeu a noção do dia da semana. Um dia o piloto encontrou o náufrago, que lhe disse: "Ontem foi um dos meus dias de mentir".

    (Adaptado de A linguagem lógica, de Iole de Freitas Druck, Revista do Professor de Matemática, n0 17, 1990)

    A partir da afirmação acima, o piloto deduziu que esse dia da semana poderia ser

    A) terça ou quarta-feira.

    B) terça ou quinta-feira.

    C) terça ou sexta-feira.

    D) quarta ou quinta-feira.

    E) quarta ou sexta-feira.

20. (FAAP- SP) Cláudia é mais velha do que Ana?

    I. Roberta é quatro anos mais velha do que Cláudia e 2 anos mais moça do que Ana.

    II. A média das idades de Cláudia e Ana é 17 anos.

A) I é suficiente para responder, mas 2 não é.

B) II é suficiente para responder, mas I não é.

C) I e II juntas são suficientes para responder, mas nenhuma delas sozinha é suficiente.

D) Cada proposição é suficiente para responder.

E) Nenhuma das proposições é suficiente para responder.

21. (OBM) Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas. Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e, entre as 10 restantes, algumas são brancas e as outras pretas. O **MENOR** número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver pelo menos 10 bolas da mesma cor, é:

A) 31

B) 33

C) 35

D) 37

E) 38

22. (FCC 2005) No esquema seguinte têm-se indicadas as operações que de¬vem ser sucessivamente efetuadas, a partir de um número x, a fim de obter-se como resultado final o número 12.

É verdade que o número x é:

A) primo

B) par

C) divisível por 3

D) múltiplo de 7

E) quadrado perfeito

23. (Ufmg 2003 - adaptada) Num campeonato de futebol, 16 times jogam entre si apenas uma vez. A pontuação do campeonato é feita da seguinte maneira: 3 pontos por vitória, 1 ponto por empate e nenhum ponto por derrota. Considere que um desses times obteve 19 pontos

ao final do campeonato.

Assim sendo, é INCORRETO afirmar que, para esse time,

A) o número de derrotas é, no máximo, igual a sete.

B) o número de vitórias é, pelo menos, igual a um.

C) o número de derrotas é um número par.

D) o número de empates é múltiplo de três.

E) o número de vitórias é um número ímpar.

24. (Uel 2007) O "Sudoku"é um jogo de desafio lógico inventado pelo Matemático Leonhard Euler (1707- 1783). Na década de 70, este jogo foi redescoberto pelos japoneses que o rebatizaram como Sudoku, palavra com o significado "número sozinho". É jogado em um quadro com 9 por 9 quadrados, que é subdividido em 9 submalhas de 3 por 3 quadrados, denominados quadrantes. O jogador deve preencher o quadro maior de forma que todos os espaços em branco contenham números de 1 a 9. Os algarismos não podem se repetir na mesma coluna, linha ou quadrante.

    Fonte: LEÃO, S. Lógica e estratégia. Folha de Londrina, Especial 14, 17 de setembro de 2006.

    Com base nessas informações, o algarismo a ser colocada na casa com um círculo no quadro a seguir é:

4				7			5	6
						9		2
6								
3				6	9			
		5	8	○	1	7		
8			7		4			
					3		2	1
		2						
1	6			2				7

A) 2

B) 5

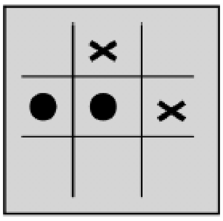
C) 7

D) 6

E) 3

25. (ENEM) O jogo-da-velha é um jogo popular, originado na Inglaterra. O nome “velha” surgiu do fato de esse jogo ser praticado, à época em que foi criado, por senhoras idosas que

tinham dificuldades de visão e não conseguiam mais bordar. Esse jogo consiste na disputa de dois adversários que, em um tabuleiro 3×3, devem conseguir alinhar verticalmente, horizontalmente ou na diagonal, 3 peças de formato idêntico. Cada jogador, após escolher o formato da peça com a qual irá jogar, coloca uma peça por vez, em qualquer casa do tabuleiro, e passa a vez para o adversário. Vence o primeiro que alinhar 3 peças.
No tabuleiro representado ao lado, estão registradas as jogadas de dois adversários em um dado momento. Observe que uma das peças tem formato de círculo e a outra tem a forma de um xis. Considere as regras do jogo-da-velha e o fato de que, neste momento, é a vez do jogador que utiliza os círculos. Para garantir a vitória na sua próxima jogada, esse jogador pode posicionar a peça no tabuleiro de



A) uma só maneira.

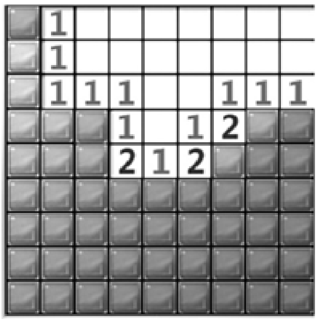
B) duas maneiras distintas.

C) três maneiras distintas.

D) quatro maneiras distintas.

E) cinco maneiras distintas.

26. (Udesc) Campo Minado é um popular jogo de computador em que a área do jogo consiste em um campo retangular dividido em pequenos quadrados que podem ocultar minas. O conteúdo de cada quadrado é revelado clicando sobre ele. Caso haja uma mina sob o quadrado clicado, o jogador perde o jogo. Caso contrário, há duas possibilidades: 1ª)é exibido um número indicando a quantidade de quadrados adjacentes que contêm minas; 2ª)o quadrado fica em branco e, neste caso, o jogo revela automaticamente os quadrados adjacentes que não contêm minas. Vence-se o jogo quando todos os quadrados que não têm minas são revelados. A Figura 2 apresenta um jogo de Campo Minado iniciado, que contém no total 10 minas.



Analise as proposições abaixo sobre o jogo ilustrado na Figura 2, considerando a contagem de linhas de cima para baixo e colunas da esquerda para a direita.

I. Na interseção da quarta linha com a oitava coluna há uma mina.

II. Na interseção da primeira linha com a primeira coluna há uma mina.

III. Na sexta linha existem no mínimo duas minas.

IV. Na interseção da quinta linha com a sétima coluna há uma mina.

V. Nas quatro linhas inferiores há no máximo seis minas.

Assinale a alternativa que contém o número de proposição(ões) verdadeira(s).

A) 5

B) 1

C) 2

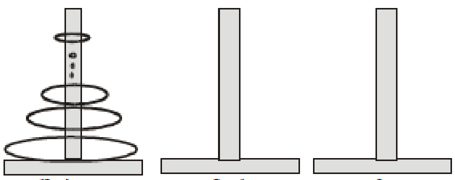
D) 3

E) 4

27. (PUC PR) Um quebra-cabeça, abaixo figurado, consiste em transferir os discos do 1º para o 3º pino sob as seguintes regras:

1) Somente um disco pode ser transferido de cada vez de um pino para qualquer outro.

2) Nunca se deve colocar um disco maior sobre um disco menor.



Na transferência de 7 discos, utilizando-se os 3 pinos, obtivemos a seguinte tabela:

Números de discos transferidos	1	2	3	4	5	6	7	......	10
Números de movimentos executados	1	3	7	15	31	63	127	......	10

Qual o número de movimentos necessários para transpor 10 discos do 1 para o 3 pino?

A) 511.

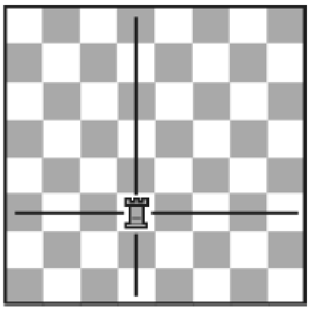
B) 1023.

C) 512.

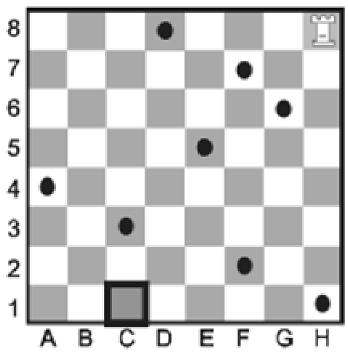
D) 1024.

E) 1025.

28. (ENEM Simulado) O xadrez é jogado por duas pessoas. Um jogador joga com as peças brancas, o outro, com as pretas. Neste jogo, vamos utilizar somente a Torre, uma das peças do xadrez. Ela pode mover-se para qualquer casa ao longo da coluna ou linha que ocupa, para frente ou para trás, conforme indicado na figura a seguir.



O jogo consiste em chegar a um determinado ponto sem passar por cima dos pontos pretos já indicados.



Respeitando-se o movimento da peça Torres e as suas regras de movimentação no jogo, qual é o menor número de movimentos possíveis e necessários para que a Torre chegue à casa C1?

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 7

29. (Unifor - CE) Certo dia, o Centro Acadêmico de uma Faculdade de Medicina publicou a seguinte notícia:

"Todos os alunos serão reprovados em Anatomia!"

A repercussão dessa manchete fez com que a direção da faculdade interpelasse os responsáveis e deles exigisse, como forma de retratação, a publicação de uma negação da afirmação feita. Diante desse fato, a nota de retratação pode ter sido:

A) "Nenhum aluno será reprovado em Anatomia."

B) "Algum aluno será aprovado em Anatomia."

C) " Algum aluno será reprovado em Anatomia."

D) " Se alguém for reprovado em Anatomia, então não será aluno."

E) "Todos os reprovados em Anatomia não são alunos."

GABARITO

1. E
2. C
3. A
4. C
5. A
6. E
7. C
8. C
9. C
10. B
11. A
12. D
13. D
14. F, F, V, V, V
15. B
16. E
17. E
18. D
19. C
20. A
21. E

22. E

23. A

24. E

25. B

26. E

27. B

28. C

29. B

Apêndice A

Demonstrações das Propriedades da Álgebra Booleana

No Capítulo 4 são propostas algumas sequências didáticas, e em uma delas se fez necessária a apresentação da álgebra Booleana, a maneira como estão definidas as operações nessa álgebra, mas como não é o objetivo desse trabalho foram omitidas as demonstrações no capitulo supra mencionado. Todavia como complemento desse trabalho seguem as demonstrações de algumas das propriedades que foram apresentadas na Tabela 4.5.

Antes de começarmos de fato as demonstrações, seguem alguns axiomas que as operações da Álgebra Booleana obedecem.

Considere uma álgebra Booleana $\langle B, \oplus, \times, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$.

Axioma A.1 *As operações $\oplus$ e $\times$ são* **comutativas***, ou seja, para todo $a, b \in B$*

$$a \oplus b = b \oplus a \ \text{ e}$$

$$a \times b = b \times a.$$

Axioma A.2 *Para todo $b \in B$, existe $\bar{b} \in B$ tal que $b \oplus \bar{b} = \mathbf{1}$ e $b \times \bar{b} = \mathbf{0}$.*

Axioma A.3 *Existem* **elementos identidade** *em B para cada uma das operações binárias $\oplus$ e $\times$. Denotaremos esses elementos por $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$, respectivamente. Assim temos, para todo $b \in B$:*

$$b \oplus \mathbf{0} = b \ \text{ e}$$

$$b \times \mathbf{1} = b.$$

Axioma A.4 *A operação* $\oplus$ *é* **distributiva** *em relação a* $\times$ *e o contrário também é válido, ou seja, para todo* $b_1, b_2, b_3 \in B$

$$a \oplus (b \times c) = (a \oplus b) \times (a \oplus c) \ \ e$$

$$a \times (b \oplus c) = (a \times b) \oplus (a \times c).$$

Vamos relembrar a Tabela 4.5:

Tabela A.1: Quadro resumo das propriedades das operações da Álgebra Booleana

Nome	**Propriedade**
complemento de 0 e 1	$\overline{1} = 0$ e $\overline{0} = 1$
idempotência	$b \oplus b = b$ e $b \times b = b$
Identidade	$b \oplus 1 = 1$ e $b \times 0 = 0$
Absorção	$b_1 \oplus (b_1 \times b_2) = b_1$ $b_1 \times (b_1 \oplus b_2) = b_1$
Involução	$\overline{\overline{b}} = b$
Associatividade	$b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3) = (b_1 \oplus b_2) \oplus b_3$ $b_1 \times (b_2 \times b_3) = (b_1 \times b_2) \times b_3$
Leis de Morgan	$\overline{(b_1 \oplus b_2)} = \overline{b_1} \times \overline{b_2}$ $\overline{(b_1 \times b_2)} = \overline{b_1} \oplus \overline{b_2}$

Fonte: Dantas

Propriedade A.1 (idempotência) *Para todo elemento* $b \in B$*,* $b \oplus b = b$ *e* $b \times b = b$*.*

Demonstração: Vamos inicialmente demonstrar a primeira parte, isto é, $b \in B$, $b \oplus b = b$.
Utilizando lo Axioma 3 podemos escrever

$$b \oplus b = (b \oplus b) \times 1 \qquad \textbf{(1)}$$

já o Axioma 2 garante que $1 = b \oplus \overline{b}$, substituindo em (1) fica

$$b \oplus b = (b \oplus b) \times (b \oplus \overline{b}) \qquad \textbf{(2)}$$

Agora pelo Axioma 4 temos $(b \oplus b) \times (b \oplus \overline{b}) = b \oplus (b \times \overline{b})$, e pelo Axioma 2 segue que $b \times \overline{b} = 0$, substituindo em (2) teremos:

$$b \oplus b = b \oplus 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Basta agora utilizarmos o axioma 3, que nos garante que $b \oplus 0 = b$, portanto concluímos que

$$b \oplus b = b.$$

Agora demonstraremos a segunda parte da propriedade, $b \in B$, $b \times b = b$.

Pelo axioma 3 está garantida a seguinte igualdade

$$b \times b = (b \times b) \oplus 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Fazendo uso do Axioma 2, a expressão (1), fica

$$b \times b = (b \times b) \oplus (b \times \overline{b}) \qquad \textbf{(5)}$$

Observe que pelo Axioma 4 $(b \times b) \oplus (b \times \overline{b}) = b \times (b \oplus \overline{b})$ e pelo Axioma 2 segue que $b \oplus \overline{b} = 1$, ou seja,

$$(b \times b) \oplus (b \times \overline{b}) = b \times 1 \qquad \textbf{(6)}$$

Substituindo (6) em (5) fica $b \times b = b \times 1$ que pelo Axioma 3 temos:

$$b \times b = b$$

■

Propriedade A.2 (Identidade) $b \oplus \mathbf{1} = \mathbf{1}$ *e* $b \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Demonstração: Mais uma vez fazendo apenas uso dos Axiomas A1, A2, A3 e A4, podemos demonstrar tal propriedade.

Demonstraremos a 1ª parte e a 2ª parte ficará como exercício.

Pelo Axioma 3 podemos escrever a seguinte igualdade:

$$(b \oplus 1) = (b \oplus 1) \times 1 \qquad \textbf{(7)}$$

Utilizando o Axioma 2 segue que $1 = b \oplus \overline{b}$, que quando substituído em (7), fica:

$$(b \oplus 1) = (b \oplus 1) \times (b \oplus \overline{b}) \qquad \textbf{(8)}$$

Pelo Axioma 4 $(b \oplus 1) \times (b\overline{b}) = b \oplus (1 \times \overline{b})$, note ainda que pelo Axioma 3 $1 \times \overline{b} = \overline{b}$, com isso temos:

$$(b \oplus 1) \times (b \oplus \overline{b}) = b \oplus \overline{b} \qquad \textbf{(9)}$$

Substituindo (9) em (8) teremos $b \oplus 1 = b \oplus \overline{b}$, e pelo Axioma 2 concluímos que

$$b \oplus 1 = 1$$

■

Propriedade A.3 (Absorção) *Para todo* $b_1, b_2 \in B, b_1 \oplus (b_1 \times b_2) = b_1$ *e* $b_1 \times (b_1 \oplus b_2) = b_1$.

Demonstração: Pelo Axioma 3 está garantida a seguinte igualdade

$$b_1 \oplus (b_1 \times b_2) = (b_1 \times 1) \oplus (b_1 \times b_2) \qquad \textbf{(10)}$$

Utilizando o Axioma 4 têm-se $(b_1 \times 1) \oplus (b_1 \times b_2) = b_1 \times (1 \oplus b_2)$,, fazendo uso agora da propriedade já demonstrada da identidade, temos que $1 + b_2 = 1$, assim $b_1 \oplus (b_1 \times b_2) = b_1 \times 1$ que pelo Axioma 3 concluímos que

$$b_1 \oplus (b_1 \times b_2) = b_1$$

Deixaremos a 2ª parte, isto é, $b_1 \times (b_1 \oplus b_2) = b_1$ como exercício. ■

Propriedade A.4 (Unicidade do complemento) *Dado um elemento* $b \in B$*, há um único elemento* $\bar{b} \in B$ *tal que* $b \oplus \bar{b} = \mathbf{1}$ *e* $b \times \bar{b} = \mathbf{0}$.

Demonstração: Para demonstrarmos a unicidade do complemento, vamos supor que exitem em B duas variáveis que sejam o complemento de um determinado b $\in B$. Isto é, suponha que existam $\bar{b_1}, \bar{b_2} \in B$ de modo que ambos sejam o complemento de b.

$$\begin{aligned}
\bar{b_1} &= \mathbf{1} \times \bar{b_1} && \text{Axioma 3} \\
&= (b \oplus \bar{b_2}) \times \bar{b_1} && \text{Axioma 2} \\
&= (b \times \bar{b_1}) \oplus (\bar{b_1} \times \bar{b_2}) && \text{Axioma 4} \\
&= \mathbf{0} \oplus (\bar{b_1} \times \bar{b_2}) && \text{Axioma 2} \\
&= (b \times \bar{b_2}) \oplus (\bar{b_1} \times \bar{b_2}) && \text{Axioma 2} \\
&= (b \oplus \bar{b_1}) \times \bar{b_2} && \text{Axioma4} \\
&= \mathbf{1} \times \bar{b_2} && \text{Axioma 2} \\
&= \bar{b_2} && \text{Axioma 3.}
\end{aligned}$$

■

Propriedade A.5 (Involução) *Para todo $b \in B$, $\bar{\bar{b}} = b$.*

Demonstração: Note que $b \oplus \bar{b} = \bar{b} \oplus b = \mathbf{1}$ e $b \times \bar{b} = \bar{b} \times b = \mathbf{0}$, sendo assim, b é o complemento de $\bar{b}$. Como o complemento é único, $\bar{\bar{b}} = b$. ■

Propriedade A.6 (Leis de De Morgan) *Para todos $b_1, b_2 \in B$,*

$$\overline{(b_1 \oplus b_2)} = \bar{b}_1 \times \bar{b}_2 \ e \ \overline{(b_1 \times b_2)} = \bar{b}_1 \oplus \bar{b}_2$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
(b_1 \oplus b_2) \oplus (\bar{b}_1 \times \bar{b}_2) &= [(b_1 \oplus b_2) \oplus \bar{b}_1] \times [(b_1 \oplus b_2) \oplus \bar{b}_2] && \text{Axioma 4} \\
&= [\bar{b}_1 \oplus (b_1 \oplus b_2)] \times [(b_1 \oplus b_2) \oplus \bar{b}_2] && \text{Axioma 1} \\
&= [(\bar{b}_1 \oplus b_1) \oplus b_2] \times [b_1 \oplus (b_2 \oplus \bar{b}_2)] && \text{Associatividade} \\
&= (\mathbf{1} \oplus b_2) \times (b_1 \oplus 1) && \text{Axioma 2} \\
&= \mathbf{1} \times \mathbf{1} && \text{Identidade} \\
&= \mathbf{1}. && \text{Axioma 3}
\end{aligned}$$

Está provado que $(b_1 \oplus b_2) \oplus (\bar{b}_1 \times \bar{b}_2) = \mathbf{1}$, então $\bar{b}_1 \times \bar{b}_2$ é o complemento de $b_1 \oplus b_2$, isto é, $\overline{(b_1 \oplus b_2)} = \bar{b}_1 \times \bar{b}_2$.

A segunda lei De Morgan, fica a cargo do leitor como exercício. ■

Apêndice B

Soluções dos Exercícios Propostos

Seção de Exercícios 2.9

1. (FCC/ICMS-SP)Das cinco frases abaixo, quatro delas têm uma mesma característica lógica em comum, enquanto uma delas não tem essa característica.

   I) 2012 não é um ano bissexto.

   II) A quinta parte de 6 dezenas é igual a 12.

   III) Leia o próximo item.

   IV) Existe um número inteiro e não racional.

   V) Todos os escritores são poetas.

   A frase que não possui essa característica comum é a

   A) I.

   B) II.

   C) III.

   D) IV.

   E) V.

   ### Solução

   Note que nas sentenças I, II, IV e V podemos fazer julgamento sobre a verdade ou não do conteúdo das mesmas o que as tornam proposições, já o item III não possui essa característica, sendo assim a assertiva é a letra [C].

2. (FCC) Considere a proposição “Paula estuda, mas não passa no concurso”. Nessa proposição, o conectivo lógico é

   A) disjunção inclusiva.

   B) conjunção.

   C) disjunção exclusiva.

   D) condicional.

   E) bicondicional.

   ## Solução

   A palavra “mas” na proposição em questão está substituindo o conectivo “e” que representa a conjunção, sendo assim podemos destacar as duas proposições simples que compõem a proposição composta:

   p: Paula estuda.

   q: Paula passa no vestibular.

   Podendo assim representar a proposição composta da seguinte maneira:

   $$p \wedge \neg q.$$

   Que é uma conjunção. Alternativa [B].

3. (CESGRANRIO) Sejam as proposições:

   A: Ana estuda

   B: Beto briga

   C: Carlos canta

   A linguagem corrente “Se Carlos não canta, então não é verdade que Ana estuda e Beto não briga” pode ser representada, na forma simbólica, por:

   A) $\sim C \rightarrow \sim A \wedge B$.

   B) $C \rightarrow \sim A \wedge \sim B$.

   C) $C \rightarrow \sim (A \vee B)$.

   D) $\sim C \rightarrow \sim (A \wedge \sim B)$.

   E) $\sim C \rightarrow \sim (A \vee B)$.

   ## Solução

   É dado na questão que C representa Carlos canta, então $\sim C$ representa Carlos não canta.

Observe que há uma condicional (se, então), na qual o antecedente é $\sim C$ e o consequente é dado por $\sim (A \wedge \sim B)$. Assim, a tradução da proposição "Se Carlos não canta, então não é verdade que Ana estuda e Beto não briga" pode ser representado, na forma simbólica, por $\sim C \rightarrow \sim (A \wedge \sim B)$. Alternativa[D].

Texto para as questões 4 e 5

Considere as seguintes proposições simples: A: andar; B: beber; C: cair; D: dormir. Com relação à proposição:"Se ando e bebo, então caio, mas não durmo ou não bebo."

4. (FGV) Transformando para linguagem simbólica a proposição composta anterior, teremos a seguinte estrutura lógica:

   A) $(A \wedge B) \rightarrow (C \wedge \sim D \vee \sim B)$.

   B) $(A \vee B) \rightarrow (C \vee \sim D) \wedge \sim B$.

   C) $(A \wedge \sim B) \rightarrow C \wedge (\sim D \vee B)$.

   D) $(A \wedge B) \rightarrow (C \wedge \sim D) \vee B$.

   E) $(A \wedge \sim B) \rightarrow (C \wedge \sim D \vee B)$.

   ### Solução

   É de fácil verificação que a questão trata de uma condicional, na qual o antecedente é dado por $A \wedge B$ e o consequente é dado por $(C \wedge \sim \vee \sim B)$. Alternativa [A].

5. (FGV) O número de linhas da tabela-verdade da proposição composta anterior é igual a:

   A) 2.

   B) 4.

   C) 8.

   D) 16.

   E) 32.

   ### Solução

   Na Seção 2.4.7 o Teorema 2.1 mostra que o número de linhas da tabela verdade de uma proposição composta é dada por 2^n, onde n é o número de proposições simples que compõem a proposição composta em questão. Na questão a proposição é composta por 4 outras proposições simples, sendo assim o número de linhas da tabela verdade é dada por $2^4 = 16$. Alternativa[D].

6. (CESGRANRIO) O número de linhas da tabela-verdade da proposição "Se estudo ou não compreendo, então é falso que ou trabalho ou não durmo", é de:

   A) 2.

   B) 4.

   C) 8.

   D) 16.

   E) 32.

   ### Solução

   De maneira extremamente análoga ao que foi feito na questão anterior, o número de linhas da tabela verdade da proposição em questão é dada por $2^4 = 16$. Alternativa [D].

7. (CESPE/UnB) Observe as seguintes proposições compostas:

   - 2 + 7 = 11 ou 3 não é um número primo.
   - Se 2 é divisor de 15, então 3 não é divisor de 21.
   - Se $3 > 5$, então $7 < 5$
   - Π é racional ou -8 é um número inteiro.
   - 2,333... é uma dízima periódica e $\frac{1}{3}$ não é.

   Nesse caso, é correto afirmar que:

   A) existem 2 proposições falsas e 3 verdadeiras.

   B) existem 3 proposições falsas e 2 verdadeiras.

   C) existem 4 verdadeiras e 1 falsa.

   D) todas são verdadeiras.

   E) todas são falsas.

   ### Solução

   Para essa questão teremos que analisar cada uma das afirmativas e ter o conhecimento da Tabela 2.10, que trás um resumo da valoração dos conectivos da lógica proposicional e de 1ª ordem.

- A 1ª proposição é uma disjunção do tipo $F \vee F$, portanto é FALSA.
- A 2ª proposição é uma condicional do tipo $F \rightarrow F$, que de acordo com o que foi exposto na Seção 2.3.3 e posteriormente na Tabela 2.10 é VERDADEIRA.
- A 3ª proposição é VERDADEIRA pelo mesmo motivo do item anterior.
- na 4ª proposição tem-se uma disjunção do tipo $F \vee V$ que sendo assim é VERDADEIRA.
- A 5ª e última proposição trata de uma conjunção, que como visto no texto no Capítulo 2, só será verdadeira se as duas partes forem verdadeiras, o que não acontece nesse caso a proposição é do tipo $V \wedge F$. Portanto a proposição é FALSA.

  Observado os resultados da análise feita podemos concluir que existem duas proposições falsas e três verdadeiras. Alternativa [A].

8. (CONSULPLAN) Qual das proposições abaixo é verdadeira?

   A) O ar é necessário à vida e a água do mar é doce.

   B) O avião é um meio de transporte ou o aço é mole.

   C) 6 é ímpar ou $2 + 3 \neq 5$.

   D) O Brasil é um país e Sergipe é uma cidade.

   E) O papagaio fala e o porco voa.

   ### Solução

   Assim como foi feito na questão anterior analisaremos cada uma das proposições e com auxílio do que foi apresentado no Capítulo 2 vamos decidir qual das alternativas é a correta.

   - A primeira proposição é uma conjunção do tipo $V \wedge F$, que é FALSA.
   - A segunda proposição trata de uma disjunção do tipo $V \vee F$, que é VERDADEIRA.
   - A terceira proposição também é uma disjunção, mas essa é do tipo $F \vee F$ que é FALSA.
   - Assim como na primeira proposição, a quarta proposição é uma conjunção do tipo $V \wedge F$ que como já mencionado anteriormente é FALSA.
   - a 5ª e última proposição também é uma conjunção do tipo $V \wedge F$, portanto FALSA.

   Como podemos notar a única proposição verdadeira é “O avião é um meio de transporte ou o aço é mole”. Alternativa [B].

9. (CESPE/UnB) Considere as afirmações abaixo.

   I) Uma proposição pode admitir, no máximo, duas valorações lógicas (V ou F).

   II) A proposição "$(7 < 6) \vee (8 - 3 > 6)$"é falsa.

   III) A proposição "Se 91 é divisível por 7 $\to$ 65 não é múltiplo de 13"é verdadeira.

   É verdade o que se afirma APENAS em:

   A) I.

   B) II.

   C) III.

   D) I e II.

   E) I e III.

   ## Solução

   A 1ª afirmação é falsa, uma vez que uma proposição não pode receber mais de uma valoração, ou a proposição é V ou é F, nunca as duas.

   A segunda proposição é verdadeira, trata de uma disjunção do tipo $F \vee F$ que de fato é falsa como afirma o item II.

   A terceira é uma condicional do tipo $V \to F$ que é falsa e não verdadeira como afirma no item III.

   Tendo sido feita a análise acima, é fácil verificar que apenas a afirmação II é verdadeira. Alternativa [B].

10. CESPE/UnB) Considere as seguintes proposições.

   I) $(7 + 3 = 10) \wedge (5 - 12 = 7)$.

   II) A palavra crime é dissílaba.

   III) Se "lâmpada"é uma palavra trissílaba, então "lâmpada"tem acentuação gráfica.

   IV) $(8 - 4 = 4) \wedge (10 + 3 = 13)$.

   V) Se $x = 4$, então $x + 3 < 6$.

   Entre essas proposições, há exatamente:

   A) uma F.

B) duas F.

C) três F.

D) quatro F.

E) todas são F.

Solução

Analisemos cada uma das proposições:

- a primeira é FALSA por se tratar de uma conjunção do tipo $V \wedge F$.
- a segunda proposição é VERDADEIRA, é uma proposição atômica.
- A terceira proposição é uma condicional do tipo $V \rightarrow V$, portanto VERDAEIRA.
- O item IV é VERDEIRO, uma vez que trata de uma conjunção do tipo $V \wedge V$.
- a 5ª e última proposição é FALSA por se tratar de uma implicação cujo antecedente é verdadeiro e o consequente falso.

Levando em consideração a análise feita anteriormente é fácil notar que dentre as 5 proposições exatamente duas receberam valoração FALSA. Alternativa[B].

11. (CESPE/UnB) A tabela-verdade da proposição:$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ apresenta, como solução:

A) apenas valorações V.

B) apenas valorações F.

C) duas valorações V.

D) uma valoração V.

E) uma valoração F.

Solução

Para respondermos essa questão teremos que construir a tabela-verdade da proposição composta em questão. Se houver dúvidas quanto à construção da tabela-verdade vide a Seção 2.4.

A	**B**	**A → B**	**B → A**	**(A → B) ∨ (B → A)**
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Fonte: Produção própria.

Em conformidade com a Seção 2.5 trata-se de uma tautologia. Alternativa A.

12. (CESPE/UnB) Se A, B e C forem proposições simples e distintas, então a solução da tabela-verdade da proposição: $(A \rightarrow \sim B) \wedge (C \rightarrow \sim A)$, será formada por:

A) apenas valores V.

B) apenas valores F.

C) mais valorações F do que V.

D) mais valorações V do que F.

E) mesma quantidade de valorações V ou F.

Solução

Para podermos avaliar e inferir qual das alternativas é a correta teremos que construir a tabela verdade. Note que nesse caso a proposição é composta de outras 3 proposições atômicas, A, B e C. Sendo assim teremos $2^3 = 8$ linhas.

A	**B**	**C**	**~A**	**~B**	**A →~ B**	**C →~ A**	**(A →~ B) ∨ (C →~ A)**
V	V	V	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Fonte: Produção própria.

Como podemos verificar, na tabela-verdade construída aparecem 5 valorações V e apenas 3 valorações F. Sendo assim podemos afirma que aparecem mais valorações V do que F. Alternativa [D].

13. (CESPE/UnB) A negação da proposição A, simbolizada por $\sim A$, será F se A for V, e será V se A for F. Então, para todas as possíveis valorações V ou F atribuídas às proposições A e B, é correto concluir que a proposição $(\sim A \to \sim B) \to (B \to A)$possui exatamente

A) 4 valores F.

B) 4 valores V.

C) 1 valor V e 3 valores F.

D) 1 valor F e 3 valores V.

E) 2 valores V e 2 valores F

Solução

Mais uma vez teremos que construir a tabela-verdade da proposição em questão para podermos concluir, qual das alternativas é a correta.

A	**B**	**~ A**	**~ B**	**(~A →~B)**	**(B → A)**	**(~A →~B) → (B → A)**
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Da tabela-verdade podemos inferir que a proposição é uma tautologia, sendo assim todos os valores para tal proposição são V. Alternativa [B].

14. (CESGRANRIO) Dizer que não é verdade que “José é gordo e Carlos é alto” é logicamente equivalente a dizer que é verdade que:

A) José não é gordo ou Carlos não é alto.

B) José não é gordo e Carlos não é alto.

C) José é gordo ou Carlos não é alto.

D) Se José não é gordo, então Carlos é alto.

E) Se José não é gordo, então Carlos não é alto.

Solução

Vamos relembrar a Subseção 2.8.1 que trata sobre a negação da conjunção, sejam A e B duas proposições, a negação da conjunção entre A e B é:

$$(A \wedge B) \Rightarrow (\sim A \vee \sim B).$$

Considere J: José é gordo e C: Carlos é alto, a proposição "José é gordo e Carlos é alto" fica traduzida para a lingugem lógica da seguinte maneira:

$$(J \wedge C).$$

Cuja negação fica: $\sim (J \wedge C) \Rightarrow (\sim J \vee \sim C)$, que traduzindo para linguagem natural fica:

"José não é gordo ou Carlos não é alto"

Alternativa [A].

15. (TRT 1ª Região/2008/CESPE) Utilizando as letras proposicionais adequadas na proposição composta "Nem Antônio é desembargador nem Jonas é juiz", assinale a opção correspondente à simbolização correta dessa proposição.

A) $\sim (A \wedge B)$.

B) $(\sim A) \vee (\sim B)$.

C) $(\sim A) \wedge (\sim B)$.

D) $(\sim A) \rightarrow B$.

E) $\sim [A \vee (\sim B)]$.

Solução

Considere as seguintes proposições atômicas:

A: Antônio é desembargador.

B: Jonas é Juiz.

A proposição composta "Nem Antônio é desembargador nem Jonas é juiz", fica traduzida na linguagem da lógica da seguinte maneira:

$$\sim A \wedge \sim B.$$

Alternativa [C].

16. (TRT-9R-FCC)Considere a seguinte proposição “na eleição para a prefeitura, o candidato A será eleito ou não será eleito”. Do ponto de vista lógico, a afirmação da proposição caracteriza:

    A) Um silogismo.

    B) Uma tautologia.

    C) Uma equivalência.

    D) Uma contingência.

    E) Uma contradição.

    ## Solução

    Se houver dúvida quanto ao significado de termos como tautologia, contingência, contradição e equivalência lógica, vide Seções 2.5 e 2.6.

    Vamos construir a tabela-verdade da proposição $A\vee \sim A$.

A	**~ A**	**A ∨ ~B**
V	F	V
F	V	V

    Fonte: Produção própria.

    Como podemos facilmente notar, todos os valores da última coluna da tabela construída são V. Portanto trata-se de uma tautologia. Alternativa [B].

17. (UFBA)A negação de “hoje é segunda-feira e amanhã não choverá” é:

    A) Hoje não é segunda-feira e amanhã não choverá.

    B) Hoje não é segunda-feira ou amanhã choverá.

    C) Hoje não é segunda-feira então amanhã choverá.

    D) Hoje não é segunda-feira nem amanhã choverá.

    E) Hoje é segunda-feira ou amanhã choverá.

    ## Solução

    Sejam:

    A: Hoje é segunda-feira.

    B: Amanhã choverá.

    A proposição “hoje é segunda-feira e amanhã não choverá”, fica traduzida para a linguagem da lógica proposicional da seguinte maneira:

$$(A \wedge \neg B).$$

Como já mencionado, a negação da conjunção é a disjunção da negação entre as proposições em questão. Sendo assim,

$$\neg(A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A \vee \neg(\neg B) \Rightarrow \neg A \vee B.$$

Que traduzida para a linguagem natural teremos:

"hoje não é segunda-feira ou amanhã choverá."

Alternativa [B].

18. (AFC - ESAF) Dizer que não é verdade que Pedro é pobre e Alberto é alto, é logicamente equivalente a dizer que é verdade que:

A) Pedro não é pobre ou Alberto não é alto.

B) Pedro não é pobre e Alberto não é alto.

C) Pedro é pobre ou Alberto não é alto.

D) Se Pedro não é pobre, então Alberto é alto.

E) Se Pedro não é pobre, então Alberto não é alto.

Solução

Considere as seguintes proposições simples:

P: Pedro é pobre.

A: Alberto é alto.

A proposição composta "Pedro é pobre e Alberto é alto", fica traduzida assim,

$$(P \wedge A).$$

Dizer que não é verdade tal proposição, é negá-la, assim ,

$$\sim (P \wedge A) \Rightarrow \sim P \vee \sim A.$$

ou seja, "Pedro não é pobre ou Alberto não é alto." Alternativa [A].

19. (Vunesp) Sobre as tabelas de verdade dos conectivos de disjunção (inclusiva), conjunção e implicação (material), assinale a alternativa correta.

    A) As conjunções só são falsas quando ambos os conjuntos são falsos.

    B) Não existe implicação falsa com antecedente verdadeiro.

    C) As disjunções são falsas quando algum dos disjuntos é falso.

    D) Só há um caso em que as implicações são verdadeiras.

    E) As implicações são verdadeiras quando o antecedente é falso.

    ### Solução

    Vide Tabela 2.10, que apresenta um resumo das valorações dos conectivos da lógica proposicional. Alternativa [A].

20. (FUNCAB) A negação de "Arthur ou Paulo são agentes administrativos e Mauro mora em Brasília" é:

    A) Arthur e Paulo não são agentes administrativos e Mauro mora em Brasília.

    B) Arthur e Paulo não são agentes administrativos ou Mauro mora em Brasília.

    C) Arthur e Paulo não são agentes administrativos ou Mauro não mora em Brasília.

    D) Arthur ou Paulo não são agentes administrativos e Mauro não mora em Brasília.

    E) Arthur ou Paulo não são agentes administrativos ou Mauro não mora em Brasília.

    ### Solução

    Primeiramente vamos transformar da linguagem corrente para a linguagem da lógica, assim considere as seguintes proposições atômicas:

    A: Arthur é agente administrativo.

    P: Paulo é agente administrativo.

    M: Mauro mora em Brasília.

    A proposição "Arthur ou Paulo são agentes administrativos e Mauro mora em Brasília" fica assim traduzida,

    $$(A \vee P) \wedge M.$$

    A negação de tal proposição composta fica,

    $$\neg[(A \vee P) \wedge M] \Rightarrow \neg(A \vee P) \vee \neg M \Rightarrow \neg A \wedge \neg P \vee \neg M.$$

    Isto é,

"Arthur e Paulo não são agentes administrativos ou Mauro não mora em Brasília."

Alternativa [C].

21. (FUNCAB) A negação da afirmação condicional "Se estiver fazendo sol no feriado, eu vou ao clube" é:

    A)Está fazendo sol no feriado e eu não vou ao clube.

    B) Se não estiver fazendo sol no feriado, eu vou ao clube.

    C) Se estiver fazendo sol no feriado, eu não vou ao clube.

    D) Não está fazendo sol no feriado e eu vou ao clube.

    E) Não está fazendo sol no feriado e eu não vou ao clube.

    Solução

    Lembremos que $\neg(A \rightarrow B) \Rightarrow A \wedge \sim B$. Assim se fizermos:

    A: Está fazendo sol no feriado.

    B: Eu vou ao clube.

    $\sim (A \rightarrow B)$ é na linguagem corrente: Está fazendo sol no feriado e eu não vou ao clube. Alternativa [A].

Seção de Exercícios 3.4

1. (ATA/MF - 2009) Entre os membros de uma família existe o seguinte arranjo: se Márcio vai ao Shopping, Marta fica em casa. Se Marta fica em casa, Martinho vai ao Shopping. Se Martinho vai ao Shopping, Mario fica em casa. Dessa maneira, se Mário foi ao Shopping, pode-se afirmar que:

   A) Marta ficou em casa.

   B) Martinho foi ao Shopping.

   C) Márcio não foi ao Shopping e Marta não ficou em casa.

   D) Márcio e Martinho foram ao shopping.

   E) Márcio não foi a shopping e Martinho foi ao shopping.

   Solução

   Vamos utilizar os conhecimentos da tabela-verdade para inferirmos conclusões acerca das premissas apresentadas.

Inicialmente vamos traduzir da linguagem natural para a linguagem da lógica.

Sejam,

A: Márcio vai ao shopping.

B: Marta fica em casa.

C: Martinho vai ao shopping.

D: Mario fica em casa.

Traduzindo o arranjo dado no enunciado temos:

$$A \rightarrow B \qquad \textbf{(1)}$$

$$B \rightarrow C \qquad \textbf{(2)}$$

$$C \rightarrow D \qquad \textbf{(3)}$$

$$\neg D \qquad \textbf{(4)}$$

Todas as premissas do enunciado devem ser consideradas como sendo verdadeiras, sendo assim temos $f((1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4)) = V$.

De **(4)** temos $f(\neg D) = V$ o que implica diretamente em $f(D) = F$.

De **(3)** segue que $f(C \rightarrow D) = V$, vamos relembrar que a condicional só resulta em F em uma única situação, no caso em que o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso, isto é, no caso em que $V \rightarrow F$. Como de **(1)** concluímos que $f(D) = F$, então necessariamente $f(C) = F$, caso contrário $f(C \rightarrow D) = F$. Procedendo de maneira análoga, é de fácil conclusão que $f(B) = f(A) = F$. Em resumo: $f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = F$. Concluímos então que Márcio não foi ao shopping e Marta não ficou em casa. Alternativa[C].

2. (ANA 2009) Determinado rio passa pelas cidades A, B e C. Se chove em A, o rio transborda. Se chove em B, o rio transborda e, se chove em C, o rio não transborda. Se o rio transbordou, pode-se afirmar que:

   A) choveu em A e choveu em B.

   B) não choveu em C.

   C) choveu em A ou choveu em B.

   D) choveu em C.

   E) choveu em A.

   ## Solução

   Considere,

A: Chove em A.

B: Chove em B.

C: Chove em C.

R: O rio transborda.

Traduzindo o arranjo dado no enunciado temos:

$$A \to R \qquad \textbf{(1)}$$

$$B \to R \qquad \textbf{(2)}$$

$$C \to \neg R \qquad \textbf{(3)}$$

$$R \qquad \textbf{(4)}$$

Todas as premissas do enunciado devem ser consideradas como sendo verdadeiras, sendo assim temos $f((1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4)) = V$.

É imediato de (4) que $f(R) = V$, o que implica em $f(\neg R) = F$.

Para que $f(C \to \neg R) = V$ devemos ter $f(C) = F$, se não fosse assim, teríamos uma condicional do tipo $V \to F$, que sabemos que é o único caso no qual a condicional é falsa. Note que pelo fato de $f(R) = V$, nada podemos concluir de (1) e de (2), porque independentemente da valoração das proposições A e B, $f(A \to R)$ e $f(B \to R)$ sempre será verdadeira. Portanto, concluímos que não choveu em C. Alternativa [B].

3. (ADMINISTRADOR - DNOCS – 2010) Considere a seguinte proposição: “Se uma pessoa não faz cursos de aperfeiçoamento na sua área de trabalho, então ela não melhora o seu desempenho profissional.” Uma proposição logicamente equivalente à proposição dada é:

   A) É falso que, uma pessoa não melhora o seu desempenho profissional ou faz cursos de aperfeiçoamento na sua área de trabalho.

   B) Não é verdade que, uma pessoa não faz cursos de aperfeiçoamento profissional e não melhora o seu desempenho profissional.

   C) Se uma pessoa não melhora seu desempenho profissional, então ela não faz cursos de aperfeiçoamento na sua área de trabalho.

   D) Uma pessoa melhora o seu desempenho profissional ou não faz cursos de aperfeiçoamento na sua área de trabalho.

   E) Uma pessoa não melhora seu desempenho profissional ou faz cursos de aperfeiçoamento na sua área de trabalho.

Solução

Sejam,

A: Uma pessoa faz curso de aperfeiçoamento.

B: Ela melhora o seu desempenho.

A proposição traduzida para a linguagem da lógica fica: $\neg A \to \neg B$.

No exemplo 2.19 foi verificado que $p \to q \Rightarrow \neg p \vee q \Rightarrow q \vee \neg p$.

Sendo assim, uma proposição equivalente a $\neg A \to \neg B$ é dada por $A \vee \neg B \Rightarrow \neg B \vee A$. Ficando: "Uma pessoa não melhora seu desempenho profissional ou faz cursos de aperfeiçoamento na sua área de trabalho". Alternativa [E].

4. (ADMINISTRADOR - DNOCS – 2010)Argemiro, Belisário, Coriolano e Divina são funcionários de um mesmo setor do Departamento Nacional de Obras Contra as Secas. Certo dia, após a realização de uma reunião em que se discutiu um projeto de irrigação a ser implantado numa região, algumas pessoas fizeram as seguintes declarações sobre seus participantes:

   - Se Divina participou da reunião, então o Diretor também participou.
   - Se Coriolano não participou da reunião, então Divina participou.
   - Se Argemiro participou da reunião, então Belisário e Coriolano não participaram.

   Considerando que o Diretor não participou de tal reunião e que as três declarações são verdadeiras, é correto afirmar que, com certeza, também não participaram

   A) Argemiro e Belisário.

   B) Argemiro e Divina.

   C) Belisário e Coriolano.

   D) Belisário e Divina.

   E) Coriolano e Divina.

Solução

Considere as seguintes proposições atômicas:

A: Argemiro participou da reunião.

B: Belisário participou da reunião.

C: Coriolano participou da reunião.

D: Divina participou da reunião.

E: O diretor participou da reunião. Traduzindo o arranjo dado no enunciado temos:

$$D \to E \qquad \textbf{(1)}$$

$$\neg C \to D \qquad \textbf{(2)}$$

$$A \to \neg B \wedge \neg C \qquad \textbf{(3)}$$

$$\neg E \qquad \textbf{(4)}$$

Todas as premissas do enunciado devem ser consideradas como sendo verdadeiras, assim temos $f((1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4)) = V$.

Observe que de imediato podemos concluir a partir de (4) que $f(\neg E) = V$ que implica direto em $f(E) = F$.

Em (1) temos $f(D \to E) = V$ o que nos leva a concluir que $f(D) = F$, caso contrário $f(D \to E) = F$, já que $f(E) = F$. Na expressão (2), segue que $f(\neg C \to D) = V$, o que implica em $f(\neg C) = F$. Note também que independente do valor de $\neg B$ na proposição (3), tem-se por obrigação que $f(A) = F$, e nada poderemos afirmar sobre B. Podemos assim concluir que também não participaram da reunião o Argemiro e a Divina. Alternativa [B].

5. (Técnico da Fazenda Estadual SEFAZ-SP 2010) Considere as seguintes premissas:

   p: Estudar é fundamental para crescer profissionalmente.

   q: O trabalho enobrece.

   A afirmação "Se o trabalho não enobrece, então estudar não é fundamental para crescer profissionalmente" é, com certeza, FALSA quando:

   A) p é falsa e q é falsa.

   B) p é verdadeira e q é verdadeira.

   C) p é falsa e q é verdadeira.

   D) p é verdadeira e q é falsa.

   E) p é falsa ou q é falsa.

   ### Solução

   A afirmação "Se o trabalho não enobrece, então estudar não é fundamental para crescer profissionalmente" pode ser traduzida corretamente da seguinte maneira:

$$\neg q \to \neg p$$

A questão afirma que $f(\neg q \to \neg p) = F$, mas isso só acontece no caso em que $\neg q = V$ e $\neg p = F$. Portanto $f(q) = F$ e $f(p) = V$. Alternativa [D].

6. (TRT 1ª Região Anal. Jud. 2008 CESPE) Considere que todas as proposições listadas abaixo são V.

   I Existe uma mulher desembargadora ou existe uma mulher juíza.

   II Se existe uma mulher juíza então existe uma mulher que estabelece punições ou existe uma mulher que revoga prisões.

   III Não existe uma mulher que estabelece punições.

   IV Não existe uma mulher que revoga prisões.

   Nessa situação, é correto afirmar que, por consequência da veracidade das proposições acima, é também V a proposição.

   A) Existe uma mulher que estabelece punições mas não revoga prisões.

   B) Existe uma mulher que não é desembargadora.

   C) Se não existe uma mulher que estabelece punições, então existe uma mulher que revoga prisões.

   D) Não existe uma mulher juíza.

   E) Existe uma mulher juíza mas não existe uma mulher que estabelece punições.

   ## Solução

   Considere as seguintes proposições atômicas retiradas do enunciado da questão:

   D: Existe uma mulher desembargadora.

   J: Existe uma mulher juíza.

   P: Existe uma mulher que estabelece prisões.

   R: Existe uma mulher que revoga prisões.

   Traduzindo o arranjo dado no enunciado temos:

$$D \vee J \qquad \textbf{(1)}$$
$$J \to P \vee R \qquad \textbf{(2)}$$
$$\neg P \qquad \textbf{(3)}$$
$$\neg R \qquad \textbf{(4)}$$

   Considerando que todas as proposições do enunciado são verdadeiras, segue de (4) que $f(\neg R) = V$, logo $f(R) = F$, de maneira análoga concluímos de (3) que $f(\neg P) = V \Rightarrow f(P) = F$.

Note que em (2), $f(P \vee R) = F$ que combinado com $f(J \to P \vee R) = V$ nos leva a conclusão de que $f(J) = F$.

Em (1) tem-se que $f(D \vee J) = V$, mas $f(J) = F$ que implica em $f(D) = V$. Alternativa [D].

7. (CGU-2006) Márcia não é magra ou Renata é ruiva. Beatriz é bailarina ou Renata não é ruiva. Renata não é ruiva ou Beatriz não é bailarina. Se Beatriz não é bailarina, então Márcia é magra. Assim,

   A) Márcia não é magra, Renata não é ruiva, Beatriz é bailarina.

   B) Márcia é magra, Renata não é ruiva, Beatriz é bailarina.

   C) Márcia é magra, Renata não é ruiva, Beatriz não é bailarina.

   D) Márcia não é magra, Renata é ruiva, Beatriz é bailarina.

   E) Márcia não é magra, Renata é ruiva, Beatriz não é bailarina.

   ### Solução

   Considere as seguintes proposições:

   M: Maria é magra.

   R: Renata é ruiva.

   B: Beatriz é bailarina.

   Do enunciado seguem as seguintes proposições:

   $$\neg M \vee R \qquad \textbf{(1)}$$

   $$B \vee \neg R \qquad \textbf{(2)}$$

   $$\neg R \vee \neg B \qquad \textbf{(3)}$$

   $$\neg B \to M \qquad \textbf{(4)}$$

   Essa questão, diferentemente das anteriores, não fornece a valoração de nenhuma proposição simples. A sugestão é escolher qualquer uma das proposições simples para considerarmos como verdadeira ou falsa(a depender do conectivo na qual a proposição está associada). Após escolhermos uma valoração conveniente, se encontrarmos alguma contradição é sinal de que a valoração da proposição é o contrário da que supomos.

   Vamos escolher M e supor convenientemente $f(M) = F$, o que obriga $f(\neg B) = F$, uma vez que $f(\neg B \to M) = V$. Dado que $f(\neg B) = F$, implica $f(\neg R) = V$, já que $f(\neg R \vee \neg B) = V$.

   Ora, se $f(\neg R) = V$, então $f(R) = F$, o que nos leva a $f(\neg M) = V$, de fato, havíamos considerado que $f(M) = F$. Como não houve nenhuma contradição temos em resumo:

$$f(M) = F, f(R) = F \text{ e } f(B) = V.$$

Alternativa [A].

8. (CGU-2008)Sou amiga de Abel ou sou amiga de Oscar. Sou amiga de Nara ou não sou amiga de Abel. Sou amiga de Clara ou não sou amiga de Oscar. Ora, não sou amiga de Clara. Assim,

   A) Não sou amiga de Nara e sou amiga de Abel.

   B) Não sou amiga de Clara e não sou amiga de Nara.

   C) Sou amiga de Nara e amiga de Abel.

   D) Sou amiga de Oscar e amiga de Nara.

   E) Sou amiga de Oscar e não sou amiga de Clara.

   ## Solução

   Sejam as proposições,

   A: Sou amiga de Abel.

   O: Sou amiga de Oscar.

   N: Sou amiga de Nara.

   C: Sou amiga de clara.

   Traduzindo o arranjo dado no enunciado temos:

$$\begin{array}{ll} A \vee O & \textbf{(1)} \\ N \vee \neg A & \textbf{(2)} \\ C \vee \neg O & \textbf{(3)} \\ \neg C & \textbf{(4)} \end{array}$$

   De (4) temos $f(\neg C) = V \Rightarrow f(C) = F$.

   Sabendo que $f(C \vee \neg O) = V$, concluímos que $f(\neg O) = V$. Não é difícil notar que para $f(A \vee O) = V$ $f(A)$ deve ser igual a Vuma vez que $f(O) = F$. Mas se $f(A) = V$ então $f(\neg A) = F$ o que nos leva direto a $f(N) = V$.

   Resumindo, $f(A) = V; f(O) = F; f(N) = V$ e $f(C) = F$. Alternativa [C].

9. (ESAF - TCU - 2002)O Rei ir a caça é condição necessária para o duque sair do castelo, e é condição suficiente para a duquesa ir ao jardim. Por outro lado, o conde encontrar com a

princesa é condição suficiente para o barão sorrir e é condição necessária para a duquesa ir ao jardim. O Barão não sorriu.

Logo:

A) A duquesa foi ao jardim ou o conde encontrou a princesa.

B) Se o duque não saiu do castelo, então o conde encontrou a princesa.

C) O rei não foi a caça e o conde não encontrou a princesa.

D) O rei foi a caça e a duquesa não foi ao jardim.

E) O duque saiu do castelo e o rei não foi a caça.

Solução

Podemos destacar as seguintes proposições atômicas do enunciado:

R: O rei ir caçar.

C: O duque sair do castelo.

J: A duquesa ir ao banheiro.

P: O conde encontrar com a princesa.

B: O barão sorrir.

Vamos lembrar que em uma relação do tipo $p \to q$, dizemos que p é suficiente para a ocorrência de q, e q é condição necessária para ocorrência de p.

Agora podemos traduzir as proposições encontradas no enunciado que ficam da seguinte maneira:

$$C \to R \qquad \textbf{(1)}$$

$$R \to J \qquad \textbf{(2)}$$

$$P \to B \qquad \textbf{(3)}$$

$$J \to P \qquad \textbf{(4)}$$

$$\neg B. \qquad \textbf{(5)}$$

Todas as premissas do enunciado devem ser consideradas como sendo verdadeiras, sendo assim temos $f((1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4)) = V$.

De (5) segue direto que $f(\neg B) = V \Rightarrow f(B) = F$. Em (3) temos $f(P \to B) = V$, para isso devemos ter $f(P) = F$. Segue ainda de (4) que $f(J \to P) = V \Rightarrow f(J) = F$ uma vez que $f(P) = F$.

De maneira análoga $f(R \to J) = V$ implica em $f(R) = F$ que implica $f(C) = F$, já que $f(C \to R) = V$.

Resumo: $f(R) = F, f(C) = F, f(J) = F, f(P) = F$ e $f(B) = F$. Alternativa [C].

10. (AFC 2002 ESAF)Se Iara não fala italiano, então Ana fala Alemão. Se Iara fala italiano, então ou Ching fala inglês ou Débora fala dinamarquês. Se Débora fala dinamarquês, Elton fala espanhol. Mas Elton fala espanhol se e somente se não for verdade que Francisco não fala francês, Ora, Francisco não fala francês e Ching não fala chinês. Logo,

    A) Iara não fala italiano e Débora não fala dinamarquês.

    B) Ching não fala chinês e Débora fala dinamarquês.

    C) Francisco não fala francês e Elton fala espanhol.

    D) Ana não fala alemão ou Iara fala italiano.

    E) Ana fala alemão e Débora fala dinamarquês.

    ## Solução

    Traduzindo as proposições para a linguagem lógica fica: I: Iara fala italiano. A: Ana fala alemão. C: Ching fala inglês. D: Débora fala dinamarquês. P: Francisco fala francês.

$$\neg I \rightarrow A \qquad \textbf{(1)}$$
$$I \rightarrow (C \underline{\vee} D) \qquad \textbf{(2)}$$
$$D \rightarrow E \qquad \textbf{(3)}$$
$$E \leftrightarrow \neg(\neg P) \qquad \textbf{(4)}$$
$$\neg P \qquad \textbf{(5)}$$
$$\neg C \qquad \textbf{(6)}$$

    De (5) e (6), segue $f(\neg P) = f(\neg C) = V \Rightarrow f(P) = f(C) = F$. Em (4) temos uma bicondicional, que sabemos ser verdadeira apenas se as duas partes tiverem valorações iguais, como já visto $f(P) = F$, então para que $f(E \leftrightarrow \neg(\neg P)) = V$ é necessário que $f(E) = F$, mas $f(E) = F$ implica $f(D) = F$ em (3). No te que em (2), $f(C \underline{\vee} D) = F$, pois $f(D) = f(C) = F$, disso podemos concluir que para $f(I \rightarrow (C \underline{\vee} D)) = V$ temos $f(I) = V \Rightarrow f(\neg I) = V$. Em (1) tem-se $f(\neg I \rightarrow A) = V$, mas como $f(\neg I) = V$, então $f(A)$não pode ser falso.

    Resumo: $f(I) = f(C) = f(P) = f(E) = f(D) = F$ e $f(A) = V$. A única afirmação verdadeira entra as alternativas é: "Iara não fala italiano e Débora não fala dinamarquês.". Alternativa [D].

11. (BADESC-2010) Certo dia, três amigos fizeram, cada um deles, uma afirmação:

    Aluísio: Hoje não é terça feira

    Benedito: Ontem foi domingo

Camilo: Amanhã será quarta-feira

Sabe-se que um deles mentiu e que os outros dois falaram a verdade.

Assinale a alternativa que indique corretamente o dia em que fizeram essas afirmações.

A) Sábado.

B) Domingo.

C) Segunda-feira.

D) Terça-feira.

E) Quarta-feira.

Solução

Temos que analisar três situações, comecemos analisando a hipótese de ser Aluísio o mentiroso.

1ª hipótese: a afirmação de Aluísio é mentira, ou seja, hoje é terça-feira!

Se hoje é terça-feira, ontem foi segunda, correto? Então, a afirmação de Benedito também será mentira, e isso não pode acontecer! Logo, gerou uma INCONSISTÊNCIA! A afirmação de Aluísio é verdadeira!

Agora Analisemos o caso em que Benedito está mentindo.

2ª hipótese: a afirmação de Benedito é mentira, ou seja, ontem NÃO foi domingo!

Se a de Benedito for mentira, as outras duas serão verdade. Outra INCONSISTÊNCIA! Ora, como pode ser verdade que hoje não é terça-feira (afirmação de Aluísio) e amanhã ser quarta-feira (afirmação de Camilo)? Então, a afirmação de Benedito é verdadeira!

Só nos resta a hipótese de ser Camilo o mentiroso.

3ª hipótese: a afirmação de Camilo é mentira, ou seja, amanhã NÃO será quarta-feira!

Se amanhã não é quarta-feira, hoje não é terça (afirmação verdadeira de Aluísio). Como apenas negamos o dia de hoje e o de amanhã, não haverá qualquer inconsistência com a afirmação e Benedito. Então, ontem foi domingo e HOJE É SEGUNDA-FEIRA! Alternativa [C].

12. (TRT 1ª Região Téc Jud 2008 CESPE) Assinale a opção correspondente à negação correta da proposição “Os ocupantes de cargos em comissão CJ.3 e CJ.4 não têm direito à carteira funcional”.

A) Os ocupantes de cargos em comissão CJ.3 e CJ.4 têm direito à carteira funcional.

B) Os ocupantes de cargos em comissão CJ.3 ou os ocupantes de cargos em comissão CJ.4 têm direito à carteira funcional.

C) Não é o caso de os ocupantes de cargos em comissão CJ.3 e CJ.4 terem direito à carteira funcional.

D) Nem ocupantes de cargos em comissão CJ.3, nem CJ.4 não têm direito à carteira funcional.

E) Os ocupantes de cargos em comissão CJ.3 não têm direito à carteira funcional, mas os ocupantes de cargos em comissão CJ.4 têm direito à carteira funcional.

Solução

Primeiro vamos decompor a proposição molecular em proposições atômicas, sejam,

A: Ocupantes de cargos da comissão CJ.3

B: Ocupantes de cargos da comissão CJ.4

A proposição composta apresentada no enunciado, traduzida para a linguagem da lógica, fica:

$$\neg A \wedge \neg B.$$

A Tabela 2.16 apresenta um resumo das negações de proposições compostas. Vamos relembrar que $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$. Sendo assim a negação de $\neg A \wedge \neg B$ é dada por $\neg(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(\neg A) \vee \neg(\neg B) \Rightarrow A \vee B$. Ficando "Os ocupantes de cargos em comissão CJ.3 ou os ocupantes de cargos em comissão CJ.4 têm direito à carteira funcional". Alternativa [B].

13. (ESAF) Se Beto briga com Glória, então Glória vai ao cinema. Se Glória vai ao cinema, então Carla fica em casa. Se Carla fica em casa, então Raul briga com Carla. Ora, Raul não briga com Carla. Logo.

A) Carla não fica em casa e Beto não briga com Glória.

B) Carla fica em casa e Glória vai ao cinema.

C) Carla não fica em casa e Glória vai ao cinema.

D) Glória vai ao cinema e Beto briga com Glória.

E) Glória não vai ao cinema e Beto briga com Glória.

Solução

É fácil notar que a questão apresenta 4(quatro) proposições simples, são elas:

B: Beto briga com Glória.

G: Glória vai ao cinema.

C: Carla fica em casa.

R: Raul briga com Carla.

Agora podemos traduzir as proposições encontradas no enunciado que ficam da seguinte maneira:

$$B \rightarrow G \qquad \textbf{(1)}$$

$$G \rightarrow C \qquad \textbf{(2)}$$

$$C \rightarrow R \qquad \textbf{(3)}$$

$$\neg R \qquad \textbf{(4)}$$

Todas as premissas do enunciado devem ser consideradas como sendo verdadeiras, sendo assim temos $f((1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4)) = V$.

Note que há um encadeamento de contrapositivas, de (4) conclui-se que $f(R) = F$ isso implica diretamente em $f(C) = F$, e de maneira análoga chegaremos a conclusão de $f(G) = f(B) = F$. Sendo assim temos, $f(B) = f(G) = f(C) = f(R) = F$. Com isso a única afirmação entre as alternativas que é verdadeira é: "Carla não fica em casa e Beto não briga com Glória.". Alternativa [A].

14. . (ESAF) Se Carlos é mais velho do que Pedro, então Maria e Julia têm a mesma idade. Se Maria e Julia têm a mesma idade, então João é mais moço do que Pedro.

Se João é mais moço do que Pedro, então Carlos é mais velho do que Maria.

Ora, Carlos não é mais velho do que Maria. Então:

A) Carlos não é mais velho do que Leila, e João é mais moço do que Pedro.

B) Carlos é mais velho que Pedro, e Maria e Julia tem a mesma idade.

C) Carlos e João são mais moços do que Pedro.

D) Carlos é mais velho do que Pedro, e João é mais moço do que Pedro.

E) Carlos não é mais velho do que Pedro, e Maria e Julia não têm a mesma idade.

Solução

Assim como fizemos nas questões anteriores, vamos inicialmente destacar as proposições simples que aparecem no enunciado.

C: Carlos é mais velho que Pedro.

M: Maria e Julia têm a mesma idade.

J: João é mais moço que Pedro.

B: Carlos é mais velho que Maria.

Agora podemos traduzir as proposições encontradas no enunciado que ficam da seguinte maneira:

$$C \to M \qquad \textbf{(1)}$$
$$M \to J \qquad \textbf{(2)}$$
$$J \to B \qquad \textbf{(3)}$$
$$\neg B \qquad \textbf{(4)}$$

Todas as premissas do enunciado devem ser consideradas como sendo verdadeiras, sendo assim temos $f((1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4)) = V$.
A verdade de $\neg B$ em (4) resulta em um encadeamento de valorações F para todas as outras proposições simples.

Perceba que para (3) ser verdadeira sendo B falsa, só é possível se $f(J) = F$, de maneira análoga conclui-se facilmente que $f(M) = f(C) = F$. Portanto , “Carlos não é mais velho do que Pedro, e Maria e Julia não têm a mesma idade”. Alternativa [E].

Referências Bibliográficas

[1] ABRIL,R.H. *Demonstração de Fórmulas Matemáticas no Ensino Médio.* Dissertação(Metrado Profissional em matemática - PROFMAT). Universidade Tecnológica do Paraná, Curitiba 2016.

[2] ALMOULOUD, S.A. *Prova e Demonstração em matemática: Problemática de seus processos de Ensino e Aprendizagem.* GT: Educação Matemática - Pontífica Universidade Católica(PUC-SP), São Paulo, 2012. disponível em:< http ://30reuniao.anped.org.br/trabalhos/GT19 – 2957 – –Int.pdf >. Acesso em: 22 de Abril de 2016.

[3] ÁVILA, G. S. S. *Análise Matemática para Licenciatura.3.ed.* São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

[4] BENEVIDES, P. F. *Raciocínio Lógico Quantitativo.* Notas de aula. Disponível em: < http ://paginapessoal.utfpr.edu.br/paulabenevides/raciocinio – logico – quantitativo/raciocinio–logica–quantitativo/RaciocinioLogicoQuantitativo.pdf > Acesso em: 22 de janeiro de 2016.

[5] BISPO, C. A. F *Introdução à lógica Matemática.* São Paulo : Cengage Leanirng, 2014.

[6] BRANQUINHO, J.; MURCHO, D.; GOMES, N.G *Enciclopédia de termos lógicos-filosóficos.*Editora WMF MARTINS FONTES. 743P. disponível em:< http ://repositorio.ul.pt/jspui/bitstream/10451/17626/1/Enciclop%C3%A9dia%20de%20Termos%2 Filos%C3%B3ficos.pdf >. Acesso em: 25 de Abril de 2016.

[7] BRASIL *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2000.

[8] BRASIL *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio - PCN+*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2002.

[9] BRASIL *Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2006.

[10] BRASIL *Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Disciplina Matemática*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 1998.

[11] BRASIL *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Brasília: Presidência da República, Casa Civil, 1998.Disponível em: $< http : //www.planalto.gov.br/ccivil_0 3/Leis/L9394.htm >$. Acesso em: 05 de junho de 2016.

[12] COSTA, K.R. *George Boole*. Brasil Escola. Disponível em: $< http : //brasilescola.uol.com.br/biografia/george - boole.htm >$. Acesso em: 04 de maio de 2016.

[13] CRUZ, F.; MAIA L. *O que dizem Professores e Alunos de Matemática sobre o Fracasso Escolar em Matemática? Inter-faces entre as Representações Sociais e o Desempenho Escolar.* . In **Anais do SIPEMAT**. Recife, Programa de Pós-Graduação em Educação - Centro de Educação - Universidade Federal de Pernambuco,2006, 17p. Disponível em: $< http : //www.gente.eti.br/lematec/CDS/SIPEMAT06/artigos/cruzmaia.pdf >$. Acesso em: 26 de maio de 2016.

[14] DANTE, L.R. *Tudo é Matemática - 9º Ano*. Livro didático - Editora ática, 2009.

[15] DANTAS, F.A. *Explorando a matemática dentro da calculadora.* 2015, 68f. Dissertação(Metrado Profissional em matemática - PROFMAT). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal 2015.

[16] DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole.* São Paulo: Editora Atlas S.A., 2008. 167 p.

[17] DOXIADIS, A. *Tio Petrus e a Conjectura de Goldbach: Um romance sobre desafios matemáticos.*1953. Tradução de Cristiane Gomes de Riba São Paulo: editora .34. 2001.

[18] FAJARDO, R. A. *Lógica matemática.* São Paulo: IME.2012.

[19] FILHO, D. C. M. *Um convite à Matemática.* SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2ª edição, 2013.

[20] GOMES, E.B. *Proposta de abordagem do ensino de raciocínio lógico no ensino médio.* Dissertação(Metrado Profissional em matemática - PROFMAT). Universidade Federal do Tocantins, Palmas-TO 2015.

[21] HARDY, G.H. *A Mathematician's Apology.* reprinted with a foreword by C. P. Snow. New York; Cambrige University, 1993.

[22] HEGENBERG, L. *Lógica* Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2015. 426 p.

[23] HOUAISS A. *Dicionário Houaiss da língua Portuguesa.* Disponível em: $< http : //www.dicio.com.br/houaiss/ >$. Acesso em: 15 de março de 2016.

[24] KANTE, E. *Crítica da Razão Pura*Tradução:J. Rodrigues de Merege. Versão eletrônica. Disponível em:$< http : //br.egroups.com/group/acropolis/ >$. Acesso em: 09 de dezembro de 2015.

[25] MARQUEZAN, F.F> *Fracasso escolar na alfabetização: um olhar a partir da psicopedagogia.* 2011. Monografia(Especialização em psicopedagogia)Centro Universitário Franciscano , Anapólis - GO 2001.

[26] MARTINS, P.R.G.M.V. *Matemática sem Números: Uma proposta de atividade para o estudo da lógica.* 2014, 82f. Dissertação(Mestrado Profissional em matemática - PROFMAT). Universidade Estadual de Maringá, Maringá 2014.

[27] MATIAS, R.R.; JÚNIOR, J.M.P.M. *Laboratório de Circuitos Lógicos.* Disponível em: < *http* : //*www.ufpi.br/subsiteFiles/menezes/arquivos/files/Guia*$_e$*xperimentos*%204.*pdf* >. Acesso em: 06 de fevereiro de 2016.

[28] MORTARI, C. A. *Introdução à Lógica.* São Paulo. Editora UNESP, 2001. 393p.

[29] MOTA, M.C.; CARVALHO, M.P. *Os diferentes tipos de demonstrações: Uma reflexão para os cursos de Licenciatura em matemática* . Revista da educação matemática da UFOP. Ouro Preto, 2011. Disponível em: < *http* : //*www.cead.ufop.br/jornal/index.php/redumat/article/view*/341 >. Acesso em: 28 de abril de 2016.

[30] NAGAFUCHI T.; BATISTA I. L. *O que é demonstração? síntese de uma reconstrução histórico-epistemológica.* Universidade Estadual de Londrina. Paraná: 2008. Disponível em: < *http* : //*www*2.*rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem*2008/*upload*/69 − 2 − *A* − *gt*4$_n$*agafuchi*$_t$*a.pdf* >. Acesso em: 10 de maio de 2016.

[31] NASCIMENTO, F.A.; GÜNTZEL, J.L. *Introdução aos circuitos lógicos* .. Santa Catarina, 2001. Disponível em: < *http* : //*www.inf.ufsc.br/ guntzel/isd/isd.html* >. Acesso em: 29 de maio de 2016.

[32] NASSER, L. *Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos.* In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. Educação Matemática no ensino superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009.

[33] PESSANHA, J. A.M. *Tópicos; Dos argumentos sofisticos/ Aristóteles.* Seleção de textos de José Américo Motta Pessanha; Tradução de Leonel Vallandro e Gerd Barnhein da versão inglesa de W.A. Pickard - São Paulo. Editora Nova Cultura, 1987.

[34] RAMOS, F.P. *Introdução à lógica Aristotélica.* Publicação on-line disponível em:< http : //fabiopestanaramos.blogspot.com.br/2011/10/introducao – logica – aristotelica.html >. Acesso em: 13 de março de 2016.

[35] RUSSEL, B. A. W. *Introdução à filosofia Matemática.* Zahar editores, 1974.

[36] SILVA, J. A. F. DA *Refletindosobre as dificuldades de aprendizagem na matemática: Algumas considerações.* disponível em:< https : //www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/JoseAugustoFlorentinodaSilva.pdf >. Acesso em: 04 de junho de 2016.

[37] TASINAFO, P. M. *Um breve histórico do desenvolvimento da lógica matemática e o surgimento da teoria da computação.* Anais do 14º Encontro da Iniciação científica e Pós-Graduação do ITA - XIV ENCITA/2008. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos-SP, 2008.