



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



O Número de Ouro e Construções Geométricas

NATÁLIA DE CARVALHO DE AZEVEDO

Goiânia
2013

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Natália de Carvalho de Azevedo		
E-mail:	natematica@gmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não			
Vínculo empregatício do autor			
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	DF
		CNPJ:	
Título:	O Número de Ouro e Construções Geométricas		
Palavras-chave:	Número de ouro, segmento áureo, régua e compasso		
Título em outra língua:	The golden number and geometric constructions		
Palavras-chave em outra língua:	Golden number, golden ratio, ruler and compass		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico		
Data defesa:	(22/03/2013)		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional		
Orientador (a):	Dr. José Yunier Bello Cruz		
E-mail:	yunier.bello@gmail.com		
Co-orientador(a):*			
E-mail:			

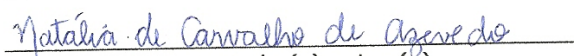
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.


 Assinatura do (a) autor (a)

Data: 22 / 03 / 2013

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

NATÁLIA DE CARVALHO DE AZEVEDO

O Número de Ouro e Construções Geométricas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em matemática

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz

Goiânia
2013

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG**

A994n Azevedo, Natália de Carvalho de.
O número de ouro e construções geométricas [manuscrito] /
Natália de Carvalho de Azevedo. – 2013.
46 f. : il., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Número de ouro –
Ensino básico. 3. Fibonacci, Números de. 4. Geometria. I. Título.

CDU: 511:373.5

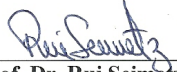
Natália de Carvalho de Azevedo

O número de Ouro e Construções Geométricas


Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 22 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Rui Seimetz
Universidade de Brasília - UnB



Profa. Dra. Ivonildes Ribeiro Martins
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Natália de Carvalho de Azevedo

Licenciada em Matemática pela Universidade de Brasília - UnB. Durante sua graduação, foi monitora no departamento de Matemática da UnB no projeto SAMAC e no projeto de pós-graduação de Psicopedagogia orientada pela Prof^a. Doutora Maria Terezinha Jesus Gaspar. Ministrou aulas de Matemática em língua inglesa durante o ano de 2011. Desde 2009 atua como professora da rede pública e da rede privada de ensino fundamental e médio.

A meu esposo por fazer dedicar-me a Matemática por amor, a minha vó, a meus pais e a minha irmã pelo exemplo, pela paciência e admiração que sempre tiveram ao longo do curso.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom de contemplar a natureza pelo olhar da Matemática e pelas pessoas e oportunidades incríveis que todos os dias recebo. Ao meu marido pela paciência, atenção e amor durante minhas falas infinitas quando buscava silêncio e concentração em seu trabalho. A minha vovó, aos meus pais e padrinhos pela reação ao meu primeiro 5 na minha primeira prova de desenho geométrico aos 10 anos, se não tivesse sido assim não teria me dedicado aos estudos e não amaria tanto essa área. A minha irmã pelo seu raciocínio lógico inexplicável e ao mesmo tempo coerente, fonte de inspiração desde criança nessa beleza das diferentes soluções que um problema pode ter.

Aos colegas do curso de Mestrado de Anápolis, com a nossa união e dedicação dos dois últimos anos e o bom humor entre um teorema e outro conseguimos seguir em frente e chegar aqui. Bem como aos criadores e a todos os professores do PROFMAT pelo empenho ao longo do curso, em especial ao Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz pela preocupação com minha dedicação e aprendizagem. Aos incríveis professores Terezinha, Guy, Celius, Rui, Lineu, que desde a graduação são fontes de inspiração diária na minha profissão, e finalmente ao professor Paulo Luiz que sem saber durante uma palestra sobre o número de ouro inspirou-me com o tema desse trabalho.

Pode um homem enriquecer a natureza com a sua incompletude?

Manoel de Barros,
O Livro das Ignorãças.

Resumo

Azevedo, Natália de Carvalho de. **O Número de Ouro e Construções Geométricas**. Goiânia, 2013. 46p. Trabalho de conclusão de curso. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

O estudo do número de ouro e de sua geometria remota desde a Grécia Antiga. O número de ouro é um número real que pode ser representado geometricamente por meio da divisão de um segmento em média e extrema razão. Trata-se de determinar um ponto C em um segmento AB, a fim de obter uma igualdade entre as razões $\overline{AB} : \overline{AC}$ e $\overline{AC} : \overline{CB}$. O seu valor numérico é obtido por meio da solução da equação do segundo grau obtida a partir dessa igualdade. Com a construção com régua e compasso desse segmento áureo são feitas outras construções geométricas áureas: triângulos, retângulos, pentágonos e espirais. O número de ouro está presente na arte, na arquitetura, na natureza há anos e apresenta-se aqui como ferramenta para estudo e com enfoque para apresentação a alunos de Ensino Médio.

Palavras-chave

<Número de ouro. Segmento áureo. Régua e compasso. >

Abstract

Azevedo, Natália de Carvalho de. **The Golden Number and Geometric Constructions**. Goiânia , 2013. 46p. Completion of course work. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

The golden number and its geometry remote from Ancient Greece. The golden number is a real number that can be represented geometrically by dividing a segment in extreme and mean ratio. It is related to the act of determining a point C on a segment AB in order to obtain equal ratios between $\overline{AB} : \overline{AC}$ and $\overline{AC} : \overline{CB}$. Its value is obtained by numerical solution of the quadratic equation obtained from this equality. From ruler and compass constructions of the golden mean other geometric constructions are made: triangles, rectangles, pentagons and spirals. The golden number has been present in arts, architecture and nature for years, and it presented in this work as a tool for study, focusing on presentation to high school students.

Keywords

<Golden number. Golden Ratio. Ruler and compass.>

Sumário

1	Introdução	11
2	Número de ouro	13
2.1	Divisão de um segmento em média e extrema razão	13
2.1.1	Segmento áureo como lado de um triângulo isósceles	15
2.2	O valor numérico de Φ	17
2.2.1	Características de Φ	18
2.2.2	Aproximações para Φ	20
3	A geometria do número de ouro	24
3.1	Triângulo áureo	24
3.1.1	Problema dos três triângulos de mesma área	25
3.2	Retângulo áureo	26
3.2.1	Retângulo de Fibonacci	29
3.2.2	Problema dos três triângulos no retângulo áureo	31
3.3	Pentágono regular	32
3.3.1	Pentagrama	34
3.4	Espirais	35
3.4.1	Espiral no triângulo áureo	35
3.4.2	Espiral no retângulo áureo	36
3.4.3	A espiral de Fibonacci	37
3.4.4	A espiral de Padovan e o número plástico	39
3.5	Ângulo ideal	40
4	O número de ouro no Ensino Básico	42
5	Considerações Finais	44
	Referências Bibliográficas	46

Introdução

Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo sobre o número de ouro, cuja simbologia utilizada é a letra grega Φ . Sob um olhar geométrico está voltado para construções que envolvem a razão áurea a serem analisadas junto à beleza da divina proporção nas suas diferentes formas.

Há anos, matemáticos, artistas, fotógrafos, dentistas e cientistas dedicam-se ao estudo do intrigante e fascinante número de ouro. Alguns focam a análise da razão áurea e os retângulos áureos presentes na geometria, os sólidos de Platão e o Pentagrama, por exemplo. Já outros focam-se nas medidas para obter uma imagem considerada esteticamente perfeita. Perfeição essa quando comparada a natureza: a espiral do náutilo, as espirais em sentidos opostos de margaridas e dos girassóis, o número de pétalas comuns serem associados a números áureos, entre tantos outros fenômenos naturais que encantam os olhos e estão relacionadas sobre um mesmo padrão, o padrão áureo.

Assim, a ideia de um dos capítulo é sugerir que o aluno produza objetos ou figuras interessantes que apresentem as relações áureas e/ou construções relacionadas. Os trabalhos contemplarão desde a produção de um simples cartão de visita que esteja esteticamente sobre o padrão áureo até o esboço de uma de Cadeira Saarinen, por exemplo. Nessa cadeira tanto a parte frontal quanto as curvas do desenho da cadeira estão envolvidas em retângulos ou em elipses áureas, ver Figura 1.1.

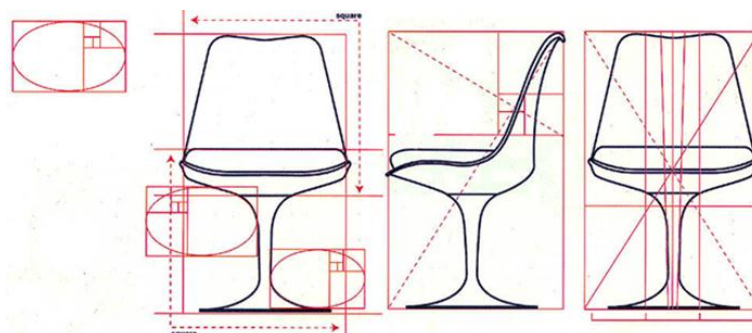


Figura 1.1: Cadeira Saarinen, veja [10].

Exemplos como esse e outros em que o uso do número de ouro foi tomado por base em estudos na arte, na arquitetura, na odontologia, e outros ao longo da história serão encontrados ao longo do trabalho.

No Capítulo 2 tem-se uma apresentação algébrica do número de ouro, simbolizado por Φ . O número de ouro será assim obtido por meio da determinação do segmento áureo com uso de régua e compasso. Com isso tem-se um valor aproximado de Φ por meio de cálculos em planilhas eletrônicas que fornecem certas casas decimais. Será apresentada a sequência de Fibonacci bem como algumas de suas decorrências. Todas essas ferramentas algébricas serão citadas para auxílio nas etapas de construção e nas conclusões posteriormente.

O Capítulo 3 trata de algumas construções com régua e compasso que envolvem o número de ouro. As construções serão realizadas com auxílio do software Geogebra. Esse software foi escolhido dentre tantos outros apresentados na disciplina Recursos Computacionais por ter acesso livre e por sua simplicidade, objetividade e clareza no estudo de desenho geométrico. Por meio do software é possível construir, justificar, generalizar, perceber e corrigir erros durante o processo de construção geométrica de maneira rápida e eficaz.

Ao final de cada construção são estabelecidas relações entre os padrões numéricos e os padrões geométricos. Serão construídos: o triângulo áureo, o retângulo áureo, pentágono regular, espirais logarítmicas. Além dessas, serão apresentadas aproximações como: o retângulo formado por quadrados na sequência de Fibonacci e a espiral de Pado-
van.

No Capítulo 4 tem-se uma proposta de apresentação do número de ouro para sala de aula. Sugere-se o uso de recursos computacionais como Geogebra, planilhas eletrônicas, atividades interativas para assimilação e apresentação do Φ .

Número de ouro

O número de ouro é denominado também por seção áurea, razão áurea do latim:

- *Ratio*: significa quociente entre dois números a e b ;
- *aurea* significa coberto por ouro, de cor dourada, feito de ouro.

Adota-se a letra grega Φ , para representar o número de ouro. O termo “número áureo” é recente, segundo o historiador Roger Herz-Fischler, data de 1835 no livro *A matemática elementar pura* de Martin Ohm, veja [8]. Trata-se de um número irracional cuja representação geométrica pode ser obtida por meio da divisão de um segmento em média e extrema razão.

2.1 Divisão de um segmento em média e extrema razão

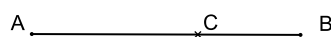
É possível obter o número de ouro por meio de construções geométricas. Para isso basta determinar a seção áurea através da divisão de um segmento em média e extrema razão.

Definição 1 Denotar-se-á \overline{AB} a medida do segmento AB , e $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ como a razão da medida do segmento AB para a medida do segmento AC .

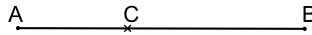
Dividir um segmento em média e extrema razão consiste em dividi-lo em duas partes de tal sorte que uma dessas partes seja a média proporcional entre o segmento inicial e a outra parte, veja [6].

Portanto, dado um segmento qualquer AB , deve-se determinar um ponto C pertencente ao segmento AB , tal que as igualdades a seguir sejam satisfeitas.

$$\bullet \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$



$$\bullet \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}}$$



Em relação à primeira igualdade, diz-se que o segmento AB estará dividido pelo ponto C em extrema e média razão. A razão da medida do segmento AB para a medida do segmento AC é denominada de razão extrema, e a razão da medida do segmento AC para a medida do segmento CB é denominada razão média. A igualdade entre essas razões nos fornece uma proporção também conhecida por divina proporção, veja [4]. O segmento AC é denominado segmento áureo de AB, e CB é o segmento áureo de AC.

A análise para a segunda igualdade é análoga. Assim, dado um segmento AB qualquer, podemos obter duas localizações para o ponto C que satisfazem a definição acima. A seguir tem-se uma das soluções, a outra solução é simétrica.

Exemplo 1 *Determinar com régua e compasso um ponto C pertencente a um segmento AB qualquer, tal que C divida o segmento AB em média e extrema razão.*

Etapas da construção:

- 1) Determinar o ponto médio M do segmento AB.
- 2) Determinar uma reta perpendicular ao segmento AB que passe pelo ponto B.
- 3) Marcar um ponto D sobre a reta anterior tal que $\overline{MB} = \overline{BD}$.
- 4) Traçar o segmento AD.
- 5) Marcar o ponto E sobre o segmento AD, tal que $\overline{BD} = \overline{ED}$.
- 6) Marcar o ponto C sobre o segmento AB, tal que $\overline{AE} = \overline{AC}$.

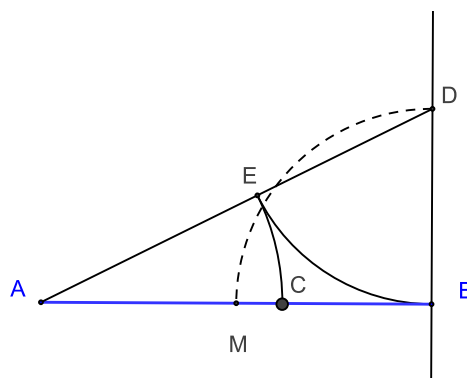


Figura 2.1: Segmento áureo

Justificativa da construção: Sem perda de generalidade podemos considerar AC um segmento unitário e $\overline{AB} = x$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle ABD$, temos:

$$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2, \quad (2-1)$$

ao transpor os termos da Equação (2-1) para o primeiro membro tem-se:

$$x^2 - x - 1 = 0. \quad (2-2)$$

Agora, considere a proporção áurea:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}. \quad (2-3)$$

Ao substituir $\overline{AB} = x$ e $\overline{AC} = 1$ em (2-3) temos:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}. \quad (2-4)$$

Ao determinar o produto dos meios e dos extremos em (2-4) obtemos a equação:

$$x^2 - x = 1,$$

ao transpor os termos para o primeiro membro da igualdade tem-se $x^2 - x - 1 = 0$. Assim, temos a mesma Equação (2-2) que justifica a validade da construção.

2.1.1 Segmento áureo como lado de um triângulo isósceles

A divisão de um segmento em média e extrema razão será ponto de partida para outras construções. Dentre essas construções está um triângulo isósceles áureo e os ângulos de medidas 36° , 72° e 108° . A sequência a seguir levará a construção de um triângulo isósceles cujo ângulo oposto a base tem medida igual a 36° .

Exemplo 2 *Determinar com régua e compasso um triângulo isósceles $\triangle ABH$, cujo ângulo oposto a base BH tem medida igual a 36° .*

Etapas da construção:

- 1) Determinar um ponto C, tal que AC seja segmento áureo do segmento AB;
- 2) Construir uma circunferência com centro em C e raio \overline{CA} ;
- 3) Construir uma circunferência com centro em B e raio \overline{CA} ;
- 4) Denominar uma das interseções dessas circunferências de H.

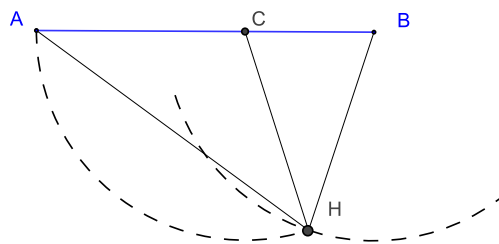


Figura 2.2: Triângulo isósceles áureo

O triângulo $\triangle HAB$ da Figura 2.2 é isósceles e $med(\angle HAB) = 36^\circ$.

A justificativa da construção terá por base as seguintes proposições relacionadas a essa construção. A notação usada nas proposições referem-se a Figura 2.2.

Proposição 2.1 *Os triângulos $\triangle AHB$ e $\triangle BCH$ são isósceles e semelhantes.*

Prova. Pela Etapa 1 temos que AC é segmento áureo do segmento AB , portanto,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}},$$

como $\overline{AC} = \overline{BH}$, tem-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}}.$$

Segue então que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Como $\overline{CH} = \overline{BH}$ temos que o triângulo $\triangle BCH$ é isósceles. Portanto, pelo critério lado-ângulo-lado tem-se que o triângulo $\triangle ABH$ é semelhante ao triângulo $\triangle CBH$, ambos isósceles. \square

Proposição 2.2 *A semirreta \overrightarrow{HC} é bissetriz de $\angle AHB$.*

Prova. Como $med(\angle AHB) = med(\angle CHA) + med(\angle BHC)$, e pelo item anterior tem-se

$$med(\angle CAH) = med(\angle CHA) = med(\angle BHC),$$

então \overrightarrow{HC} divide a medida do ângulo $\angle AHB$ ao meio. \square

Proposição 2.3 *A medida do ângulo $\angle BAH$ é igual a 36° .*

Prova. Seja $med(\angle BAH) = x$, vamos mostrar que $x = 36^\circ$. Pela Proposição 2.2 temos que os ângulos $\angle BHC$ e $\angle BAH$ são congruentes. Pelo teorema do ângulo externo temos:

$$med(\angle HCB) = med(\angle CAH) + med(\angle CHA) = 2 \times med(\angle CHA) = 2x.$$

Como $med(\angle ABH) = 2x$, $med(\angle BAH) = x$ e $med(\angle AHB) = 2x$ tem-se:

$$med(\angle ABH) + med(\angle BAH) + med(\angle AHB) = 2x + x + 2x. \quad (2-5)$$

Visto que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , tem-se no triângulo $\triangle ABH$:

$$\text{med}(\angle ABH) + \text{med}(\angle BAH) + \text{med}(\angle AHB) = 180^\circ. \quad (2-6)$$

Portanto, das equações (2-5) e (2-6) tem-se:

$$5x = 180^\circ,$$

conclue-se que $x = 36^\circ$. Portanto, $\text{med}(\angle BAH) = 36^\circ$. □

Com essas proposições comprova-se a validade da construção. Além disso, por meio da construção mostra-se a validade do teorema a seguir, ver [6].

Teorema 2.4 *Em um triângulo isósceles, com o ângulo do vértice de 36° , a base é igual ao segmento áureo do lado.*

Prova. Considere o triângulo $\triangle ABH$ da Figura 2.2. Pelas proposições anteriores tem-se que $\triangle ABH$ é um triângulo isósceles, com o ângulo do vértice de 36° . Pela construção temos que AC é segmento áureo do segmento AB. Como $\overline{BH} = \overline{AC}$, então a base BH é igual ao segmento áureo do lado AB. □

Conclue-se pela Proposição 2.1 e pela Proposição 2.2 que os ângulos $\angle AHB$, $\angle ABH$ e $\angle HCB$ da Figura 2.2 são congruentes, com medidas iguais a 72° ; e o ângulo $\angle HCA$ tem medida igual a 108° .

2.2 O valor numérico de Φ

Existem diversas maneiras para obter o valor numérico de Φ . Uma delas é calcular o valor das raízes da equação (2-1) do tópico anterior.

A equação foi obtida ao aplicar o Teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle ABD$ da Figura 2.1. Ao considerar $\overline{AB} = x$ e AC um segmento unitário, tem-se exatamente o valor procurado para Φ :

$$\Phi = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = x.$$

Assim, resolvendo a equação $x^2 - x - 1 = 0$ tem-se duas raízes:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Observe que a segunda raiz corresponde a um número negativo. Por se tratar de uma razão entre medidas tem-se:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

A segunda raiz corresponde ao recíproco negativo de Φ , denotada por Φ' .

2.2.1 Características de Φ

A partir da análise da equação $x^2 - x - 1 = 0$ obtemos algumas relações com respeito as raízes Φ e Φ' .

- O recíproco negativo de Φ é Φ' .

Prova. De fato, como $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, tem-se:

$$-\frac{1}{\Phi} = \frac{-2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{-2 + 2 \times \sqrt{5}}{-4} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \Phi'.$$

Conclue-se então que Φ' pode ser escrito como o recíproco negativo de Φ . Da mesma forma, o recíproco negativo de Φ' é Φ . \square

- O produto das raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$ é igual a -1 .

Prova. Decorre do item anterior. \square

- A soma das raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$ é igual a 1.

Prova. Temos:

$$\Phi + \Phi' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1.$$

Como Φ e Φ' são raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$, então, de fato, a soma de suas raízes é igual a 1. \square

- O número Φ é um número real positivo que subtraído de uma unidade torna-se ao seu inverso.

Prova. De fato, pelo item anterior tem-se $\Phi + \Phi' = 1$. Ao reorganizar os termos tem-se:

$$\Phi - 1 = -\Phi' = \frac{1}{\Phi}, \quad (2-7)$$

como $-\Phi'$ é o inverso de Φ conclue-se que Φ subtraído de uma unidade é igual ao seu inverso. \square

De outra forma, a equação $x^2 - x - 1 = 0$ é equivalente a $x^2 - x = 1$. Dividindo os termos dessa equação por x , $x \neq 0$, obtém-se:

$$x - 1 = \frac{1}{x},$$

cuja solução real positiva é igual ao número de ouro.

- É válido que $\Phi^{n+2} = \Phi^n + \Phi^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova. De (2-7) temos:

$$\Phi = \frac{1}{\Phi} + 1. \quad (2-8)$$

Ao multiplicar (2-8) por Φ , obtém-se $\Phi^2 = 1 + \Phi$. Multiplicando recursivamente por Φ , tem-se:

$$\begin{aligned} \Phi^3 &= \Phi + \Phi^2 \\ \Phi^4 &= \Phi^2 + \Phi^3 \\ \Phi^5 &= \Phi^3 + \Phi^4, \end{aligned}$$

portanto, $\Phi^{n+2} = \Phi^n + \Phi^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

- Em uma progressão geométrica de razão Φ cujo primeiro termo é 1, cada termo a partir do segundo é igual à soma dos dois precedentes.

Prova. Consequência direta do item anterior. \square

- O número de ouro é igual a fração contínua a seguir em que todos os números são iguais a 1.

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}.$$

Prova. Pelos itens anteriores temos:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$

Substituindo Φ por $1 + \frac{1}{\Phi}$, tem-se:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}.$$

Substituindo novamente Φ por $1 + \frac{1}{\Phi}$, tem-se:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}},$$

recursivamente obtém-se

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}},$$

que trata-se de uma fração contínua em que todos os termos são iguais a 1. \square

Um outro exemplo semelhante ao último é

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}},$$

cuja demonstração é semelhante a anterior.

Há várias outras características aritméticas relacionadas ao número de ouro e muitas delas geram aproximações para o valor o Φ , ver mais em [1].

2.2.2 Aproximações para Φ

Existem várias maneiras de obter uma aproximação numérica para o número de ouro. O Almanaque das Curiosidades Matemáticas de I. Stewart apresenta as primeiras 50 casas decimais de Φ , conforme [8]:

$$\Phi = 1.61803398874989484820458683436563811772030917980576....$$

Um exemplo de como obter essas aproximações é por meio de algumas sequências cujos termos são gerados pela soma dos dois precedentes.

Exemplo 1 Considere as sequências tais que:

- Os primeiros termos u_1, u_2 são reais não-nulos;
- Os próximos termos são tais que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, n \in \mathbb{N}$.

Observar-se-á que a medida que n aumenta o quociente $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ aproxima-se do valor numérico de Φ .

Definição 2.1 A sequência em que os termos iniciais u_1 e u_2 são iguais a 1 e os próximos termos são tais que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, n \in \mathbb{N}$ é denominada por Sequência de Fibonacci.

A Sequência de Fibonacci assim definida tem os dois primeiros termos iguais a 1, o terceiro termo igual a 2, o próximo termo é 3, e assim sucessivamente.

Para gerar as sequências e calcular o quociente de aproximação foi utilizada uma planilha eletrônica, Figura 2.3 e Figura 2.4 a seguir. A planilha torna-se uma ferramenta prática pois pode gerar os 20 primeiros termos da sequência a partir dos dois primeiros. Além disso, ela fornece o quociente entre os termos com aproximação de algumas casas decimais.

Tabela 1

Primeiro exemplo: valores inteiros																			
U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8	U9	U10	U11	U12	U13	U14	U15	U16	U17	U18	U19	U20
25	9	34	43	77	120	197	317	514	831	1345	2176	3521	5697	9218	14915	24133	39048	63181	102229
Valor aproximado de U20/U19=													1,618034						

Segundo exemplo: valores racionais																			
U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8	U9	U10	U11	U12	U13	U14	U15	U16	U17	U18	U19	U20
0,32	-0,333	-0,013	-0,347	-0,36	-0,707	-1,067	-1,773	-2,84	-4,613	-7,453	-12,07	-19,52	-31,59	-51,11	-82,69	-133,8	-216,5	-350,3	-566,79
Valor aproximado de U20/U19=													1,618034						

Terceiro exemplo: valores iniciais são iguais a Pi																			
U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8	U9	U10	U11	U12	U13	U14	U15	U16	U17	U18	U19	U20
3,1416	3,1416	6,2832	9,4248	15,708	25,133	40,841	65,973	106,81	172,79	279,6	452,39	731,99	1184,4	1916,4	3100,8	5017,1	8117,9	13135	21252,9
Valor aproximado de U20/U19=													1,618034						

Quarto exemplo: sequência de Fibonacci																			
U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8	U9	U10	U11	U12	U13	U14	U15	U16	U17	U18	U19	U20
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765
Valor aproximado de U20/U19=													1,618034						

Figura 2.3: Tabela 1

Observe na Tabela 1 o que acontece com o quociente do 20^o termo pelo 19^o termo. O fato observado é que o quociente $\frac{u_{20}}{u_{19}}$ em todas se aproxima do valor numérico do número de ouro independente dos valores escolhidos para iniciar cada uma das sequências.

Tabela 2

1º	1/1=	1,00000000
2º	2/1=	2,00000000
3º	3/2=	1,50000000
4º	5/3=	1,66666667
5º	8/5=	1,60000000
6º	13/8=	1,62500000
7º	21/13=	1,61538462
8º	34/21=	1,61904762
9º	55/34=	1,61764706
10º	89/55=	1,61818182
11º	144/89=	1,61797753
12º	233/144=	1,61805556
13º	377/233=	1,61802575
14º	610/377=	1,61803714
15º	987/610=	1,61803279

Figura 2.4: Tabela 2

Observe na Tabela 2 que quanto maiores os valores tomados da sequência de Fibonacci, mais próximo se torna o quociente do valor numérico de Φ , que será abordado na proposição a seguir. Outra observação na Tabela 2 é quanto à paridade e a aproximação observada: para as razões de ordem ímpar tem-se resultados inferiores a Φ , e para as razões de ordem par tem-se resultados superiores a Φ .

Proposição 2.2 *Seja $\{u_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ a Sequência de Fibonacci. Então*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \Phi.$$

Prova. Temos que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_{n-1} + u_n}{u_n} = 1 + \frac{u_{n-1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{\frac{u_n}{u_{n-1}}}.$$

Seja

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right),$$

então

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n + u_{n-1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\frac{u_n}{u_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Multiplicando os termos da última igualdade por x obtém-se $x^2 - x - 1 = 0$ cujas soluções são Φ e Φ' .

Como a sequência de Fibonacci trata de números inteiros positivos maiores que

1, a solução Φ' não convém. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \Phi.$$

Conclue-se que a Sequência de Fibonacci está assim relacionada ao número de ouro. \square

A geometria do número de ouro

Além do segmento áureo descrito no capítulo anterior, existem outros elementos geométricos que apresentam a proporção áurea. Elementos esses que estão relacionados ao número de ouro tanto em figuras geométricas quanto na natureza.

Nas figuras geométricas temos a presença da razão áurea no triângulo áureo, no retângulo áureo, no pentagrama, em algumas espirais e em outros problemas geométricos cuja solução depende de Φ .

Todos os elementos descritos auxiliam na compreensão dos elementos da natureza. Por exemplo, a quantidade de folhas e o ângulo ideal para distribuição dos ramos de plantas podem estar relacionados ao número de ouro.

A seguir temos construções geométricas áureas detalhadas e justificadas, bem como aplicações e conclusões a partir de cada uma delas.

3.1 Triângulo áureo

Dentre todos os polígonos que apresentam a razão áurea, o primeiro a ser estudado será o triângulo isósceles áureo.

Ao final da construção do segmento áureo no capítulo anterior obteve-se um triângulo isósceles $\triangle ABH$. A razão entre a medida da base e a medida de um dos lados congruentes desse triângulo resulta em Φ . No caso do triângulo obtusângulo $\triangle ACH$ a razão deve ser da medida da base para a medida de um dos lados, e novamente resultará no número de ouro. Esses triângulos são denominados triângulos áureos.

As etapas a seguir constituem na construção de triângulos áureos semelhantes.

1. Construir um triângulo isósceles $\triangle ABD$, com base BD e $med(\angle DAB) = 36^\circ$.
2. Marcar o ponto C no segmento AB , tal que C seja interseção do segmento AB com a bissetriz de $\angle BDA$.
3. Marcar o ponto E no segmento CD , tal que E seja interseção do segmento CD com a bissetriz de $\angle CBD$.
4. Repetir o processo anterior para marcar os pontos F , G e H .

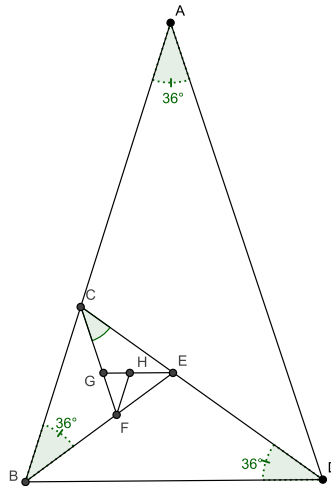


Figura 3.1: Triângulos áureos semelhantes

Observação 3.1 Os triângulos $\triangle ABD$, $\triangle DCB$ e $\triangle CFE$ da Figura 3.1 são isósceles e o ângulo oposto a base é igual a 36° . Portanto, os triângulos são semelhantes ao triângulo $\triangle ABH$ da Figura 2.2 e, conseqüentemente, áureos.

3.1.1 Problema dos três triângulos de mesma área

Tem-se um problema que relaciona triângulos não isósceles com a razão áurea. O problema consiste em inscrever um triângulo $\triangle AFE$ em um retângulo ABCD tal que a área dos três triângulos restantes seja a mesma.

A solução consiste em mostrar que E e F são pontos que dividem, respectivamente, os segmentos EC e ED, e FC e BF na razão áurea. A Figura 3.2 ilustra as soluções para diferentes retângulos.

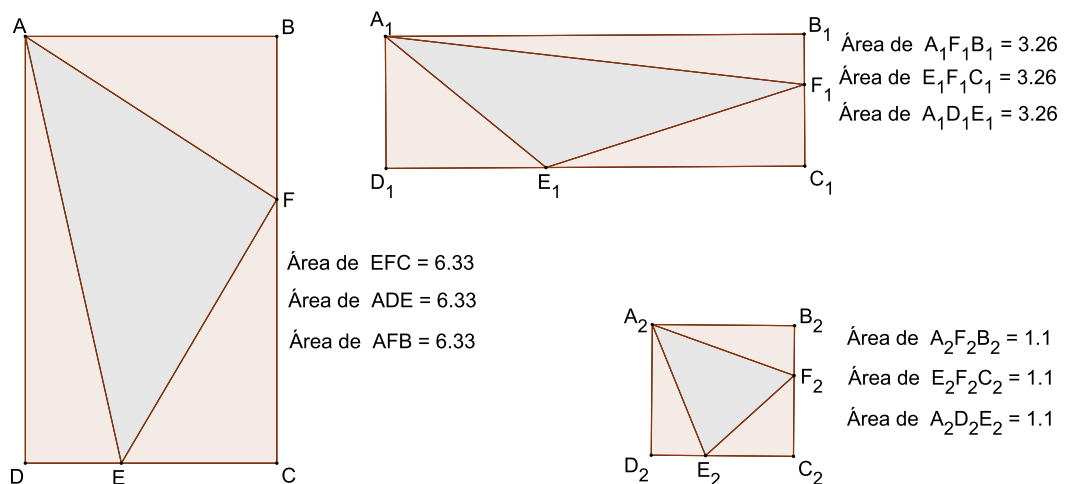


Figura 3.2: Problema dos três triângulos de mesma área

Percebe-se que independentemente dos diferentes formatos do retângulo a área dos demais triângulos é sempre igual.

Considerando a solução descrita e o retângulo ABCD da Figura 3.2 segue a prova de que as áreas dos triângulos são iguais.

Prova. Sejam os segmentos AB e DC com medidas iguais a x , e AD e BC com medidas iguais a y . Então, como $\overline{EC} = \Phi \times \overline{ED}$ e $\overline{FC} = \Phi \times \overline{BF}$ tem-se:

$$\overline{EC} = \frac{x}{\Phi}, \overline{ED} = \frac{x}{\Phi^2}, \overline{FC} = \frac{y}{\Phi}, \overline{BF} = \frac{y}{\Phi^2}.$$

Assim, ao calcular a área do triângulo retângulo $\triangle ADE$ de base ED e altura AD temos

$$A_{\triangle ADE} = \frac{yx}{2\Phi^2},$$

o mesmo ocorre para o triângulo retângulo $\triangle FBA$

$$A_{\triangle FBA} = \frac{yx}{2\Phi^2},$$

e no triângulo $\triangle ECF$:

$$A_{\triangle ECF} = \frac{yx}{2\Phi^2}. \quad (3-1)$$

Portanto, $A_{\triangle ADE} = A_{\triangle FBA} = A_{\triangle ECF}$. □

3.2 Retângulo áureo

Denomina-se retângulo áureo um retângulo cuja razão do comprimento para a largura é igual a Φ . Retângulos áureos são frequentemente encontrados em cartões de crédito, cartões de visita, formatos de página virtuais, livros, e outros, como o cartão telefônico a seguir.



Figura 3.3: Cartão telefônico com formato de retângulo áureo

As etapas a seguir levam a construção de um retângulo com largura \overline{AB} dada.

Etapas da construção do retângulo áureo:

1. Dado o segmento AB , construir um quadrado $\square ABCD$.
2. Determinar o ponto médio E do segmento AB .
3. Marcar o ponto F sobre a semirreta \overrightarrow{AB} , tal que $\overline{EC} = \overline{EF}$.
4. Marcar o ponto G , pé da perpendicular a CD pelo ponto F .

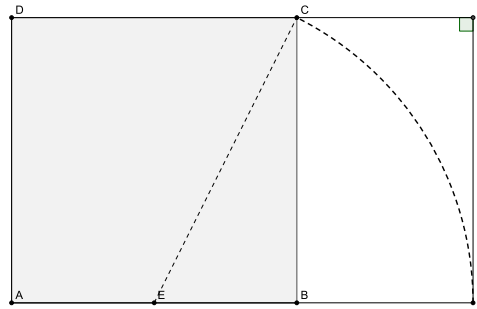


Figura 3.4: Retângulo áureo

O retângulo $AFGD$ da Figura 3.4 é um **retângulo áureo**.

Justificativa da construção: Como $\square ABCD$ é um quadrado e E pertence ao segmento AB , então o triângulo $\triangle EBC$ é retângulo. Seja $\overline{AB} = x$, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle EBC$ tem-se:

$$\overline{EC}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BC}^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{5x^2}{4},$$

que resulta em $\overline{EC} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$. Como $\overline{EC} = \overline{EF}$, substituindo o valor obtido na igualdade $\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EF}$, temos:

$$\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EC} = \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{5}}{2} = \frac{x(1 + \sqrt{5})}{2}.$$

Portanto, a razão do comprimento \overline{AF} do retângulo para a medida da largura \overline{AD} é igual a

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} = \frac{x(1 + \sqrt{5})}{2x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

O que justifica que a razão do comprimento para a largura é áurea, e portanto, o retângulo é áureo.

Observação 3.2 Como $\overline{AD} = \overline{AB}$, então a razão da medida do segmento AF para a medida do segmento AB também é igual a Φ . Analisando a razão entre as medidas dos

segmentos AB e BF , nessa ordem, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{5}}{2} - \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2\sqrt{5}+2}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi.$$

Dessa forma observa-se que a divina proporção aparece novamente:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} = \Phi.$$

Conclue-se então que o retângulo $CGFB$ da Figura 3.4 também é áureo. Assim, o processo pode ser repetido infinitas vezes e sempre obteremos retângulos áureos. O passo a passo a seguir ilustra esse procedimento.

Definição 2 Utilizar-se-á a notação $A * B * C$ para denotar que B está localizado em um ponto do segmento AC , sendo $B \neq A$ e $B \neq C$.

1. Construir um quadrado $\square CGJI$, tal que $G * J * F$.

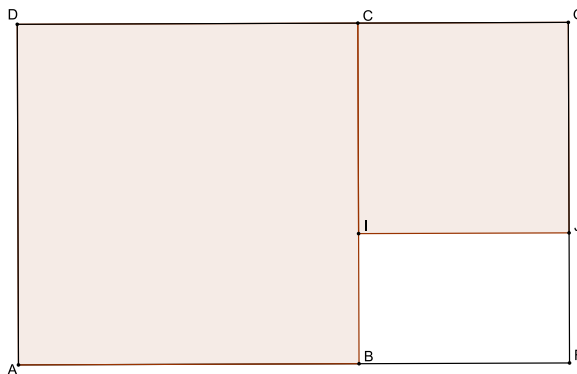


Figura 3.5: Etapa 1

2. Construir um quadrado $\square FJKL$, tal que $B * L * F$.

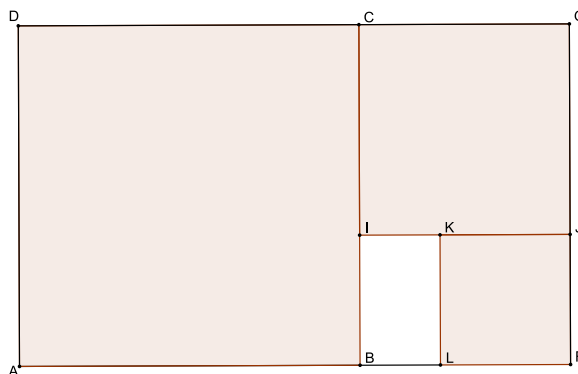


Figura 3.6: Etapa 2

3. Construir um quadrado $\square BLMN$, tal que $B * N * I$.

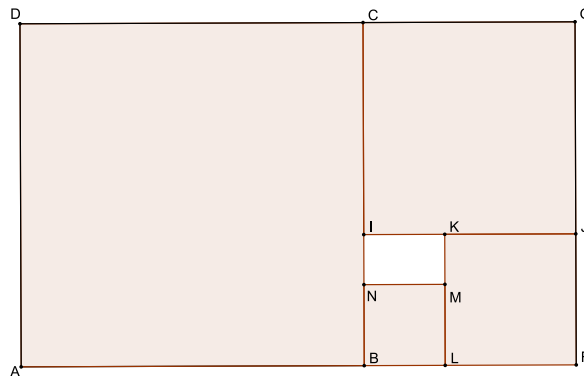


Figura 3.7: Etapa 3

4. Repetir o mesmo processo para os demais retângulos áureos.

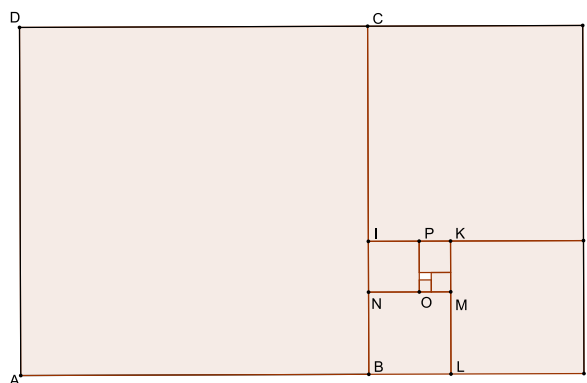


Figura 3.8: Etapa 4

Esse processo em que após a justaposição de figuras A uma dada figura gera uma figura semelhante a inicial é conhecido como Gnômone. “O gnômone é uma parte de uma figura juntada a outra figura de modo que o todo tenha o mesmo formato”, ver [1]. Observe que a Figura 3.1 dos triângulos áureos semelhantes também apresenta um padrão gnômone de formação.

3.2.1 Retângulo de Fibonacci

Um retângulo que se assemelha ao retângulo áureo é obtido a partir de quadrados cujos lados tem medidas iguais aos números da Sequência de Fibonacci. Como cada número da sequência a partir do terceiro é igual a soma dos dois antecessores é possível organizá-los a fim de obter um retângulo. As etapas a seguir descrevem a organização desses quadrados a fim de obter o retângulo procurado:

1. Construa um quadrado $\square ABCD$ cujo lado tem medida igual a 1.
2. A partir do lado AB , construa um novo quadrado $\square BFEA$, tal que $C * B * F$.

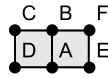


Figura 3.9: *Etapas 1 e 2*

3. Construa um novo quadrado $\square CFGH$, tal que $E * F * G$.

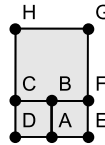


Figura 3.10: *Etapa 3*

Nota: Observe que dessa forma o lado do quadrado $\square CFGH$ tem medida igual a 2.

4. Construa um novo quadrado $\square GEIJ$, tal que $H * G * J$.

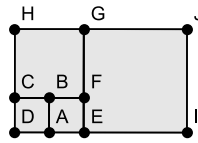


Figura 3.11: *Etapa 4*

5. Continue o processo, tal que a medida do lado do novo quadrado seja sempre igual a medida dos lados dos seus dois antecessores.

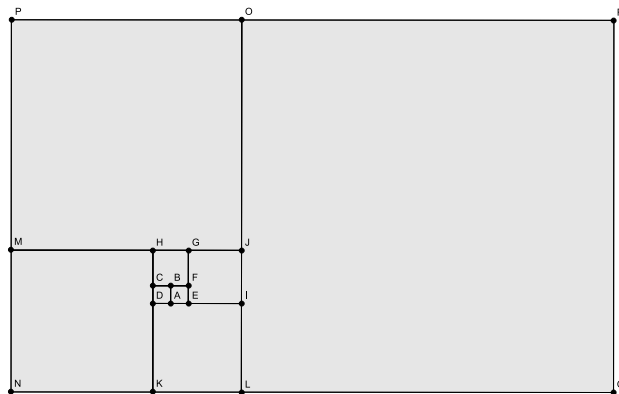


Figura 3.12: *Etapa 5*

Repetindo esse processo mais vezes obtemos um retângulo que se assemelha ao retângulo áureo. Observe que a razão do comprimento para a largura desse retângulo se aproxima do valor numérico de Φ . O que define, entretanto, um retângulo como áureo é a razão do comprimento para a largura ser igual a Φ . É importante deixar claro que dessa forma o retângulo não é áureo, trata-se apenas de uma aproximação.

3.2.2 Problema dos três triângulos no retângulo áureo

No tópico anterior fez-se referência ao problema de inscrever um triângulo em um retângulo dado, tal que a área dos demais triângulos seja a mesma. Verificou-se que as áreas dos triângulos $\triangle ADE$, $\triangle FBA$ e $\triangle ECF$ são iguais para um retângulo de dimensão x por y .

Verificaremos agora que o triângulo $\triangle AEF$ é isósceles e retângulo quando o retângulo $ABCD$ é um retângulo áureo, como ilustra a Figura 3.13.

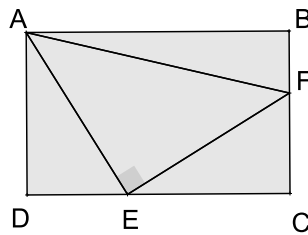


Figura 3.13: O triângulo isósceles $\triangle AEF$ é retângulo em E .

Proposição 3.3 *Se o retângulo $ABCD$ for um retângulo áureo então o triângulo $\triangle AEF$ será isósceles.*

Prova. Considere o retângulo $ABCD$ da Figura 3.13 áureo, tomando $\overline{DC} = x$ e $\overline{AD} = y$. Assim, temos $x = y \times \Phi$.

Como FC é o segmento áureo de AD e BF é o segmento áureo de FC então

$$\overline{FC} = \frac{y}{\Phi} \text{ e } \overline{BF} = \frac{y}{\Phi^2}.$$

Da mesma forma, como EC é o segmento áureo de DC e ED é o segmento áureo de EC , tem-se

$$\overline{EC} = \frac{x}{\Phi} = y \text{ e } \overline{ED} = \frac{x}{\Phi^2} = \frac{y}{\Phi}.$$

Assim, pelo critério lado-ângulo-lado os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ECF$ são congruentes.

Portanto, $\overline{AE} = \overline{EF}$, ou seja, $\triangle AEF$ é isósceles. \square

Proposição 3.4 *Se o retângulo $ABCD$ for áureo, então triângulo $\triangle AEF$ será retângulo em E .*

Prova. Pelo item anterior temos que $\triangle ADE$ e $\triangle ECF$ são congruentes. Portanto,

$$\text{med}(\angle AEF) = \text{med}(\angle DEC) - (\text{med}(\angle DEA) + \text{med}(\angle CEF)) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

\square

Desta forma, verifica-se que se $ABCD$ é um retângulo áureo, conclue-se então que o triângulo $\triangle AEF$ é isósceles retângulo.

3.3 Pentágono regular

O pentágono relaciona-se com as construções anteriores e também a razão áurea. Em sua construção aparecem os ângulos de 36° , 72° e 108° obtidos no capítulo anterior.

As etapas a seguir descrevem a construção de um pentágono regular inscrito em uma circunferência de raio \overline{AB} dado.

1. Construir um circunferência de raio \overline{AB} e centro em A.
2. Marcar um ponto E sobre a circunferência tal que EA seja perpendicular a AB.
3. Determinar o ponto médio C do segmento AB.

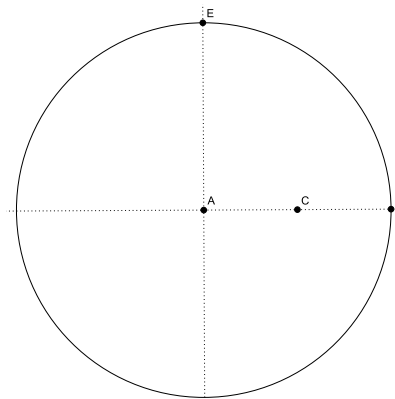


Figura 3.14: Etapas 1 a 3

4. Com centro em C e raio \overline{CE} marcar um ponto F sobre a reta AB, tal que $F * A * C$.

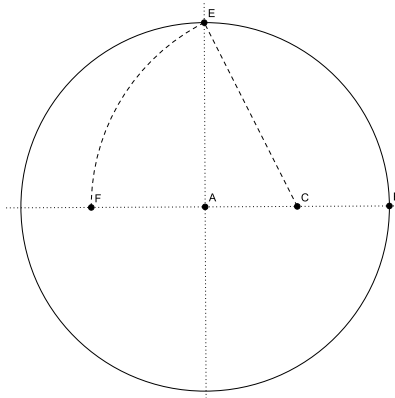


Figura 3.15: Etapa 4

5. Com centro em E e raio \overline{EF} marcar os pontos H e I interseções com a circunferência.

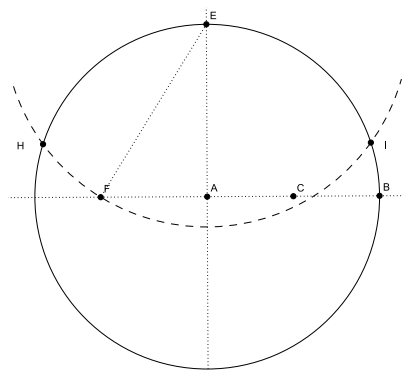


Figura 3.16: Etapa 5

6. Com centro em I marcar sobre a circunferência o ponto M, tal que $\overline{EI} = \overline{IM}$.
7. Com centro em H marcar sobre a circunferência o ponto K, tal que $\overline{KH} = \overline{HE}$.

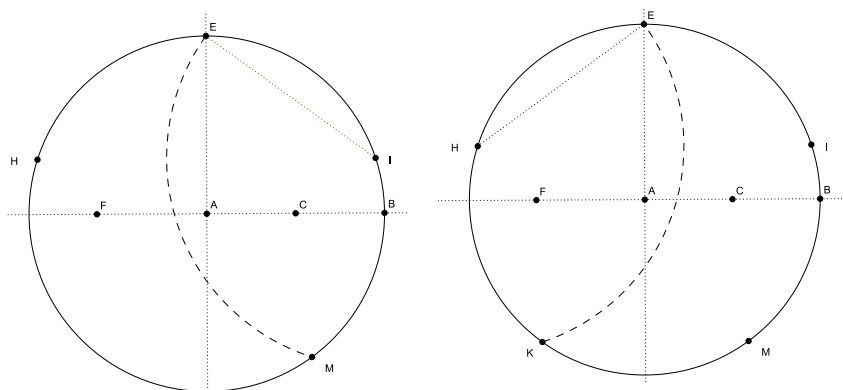


Figura 3.17: Etapas 6 e 7

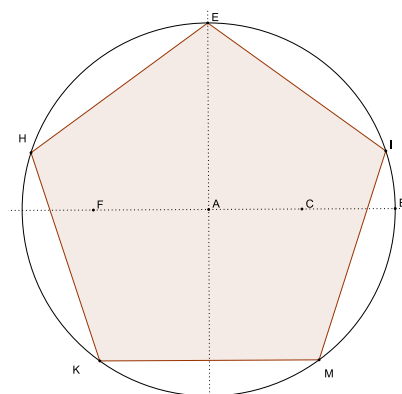


Figura 3.18: O polígono HEIMK é um pentágono regular.

Justificativa da construção: Sem perda de generalidade podemos considerar AB um segmento unitário. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle EAC$

temos:

$$\overline{EC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AE}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}.$$

Conclue-se que $\overline{EC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Pela etapa 4 temos:

$$\overline{EC} = \overline{FC} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle EAF$ obtém-se:

$$\overline{EF}^2 = \overline{FA}^2 + \overline{AE}^2 = (\overline{CF} - \overline{AC})^2 + \overline{AE}^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4} + 1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

Conclue-se que $\overline{EF} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$. E, pelas etapas 5, 6 e 7 tem-se que os segmentos EF, EH, EI, EM e EK são congruentes, portanto, todos os lados do pentágono têm a mesma medida. Como os pontos E, I, M, H e K pertencem a uma mesma circunferência, esse polígono é inscrito e, portanto, trata-se de um pentágono regular.

3.3.1 Pentagrama

O pentágono regular estrelado ou pentagrama é um símbolo de grande referência quando se trata do estudo do número de ouro. Também é denominado de pentalfa devido às cinco letras com formato A que aparecem. Para obtê-lo basta traçar as diagonais do pentágono regular como ilustra a Figura 3.19 a seguir.

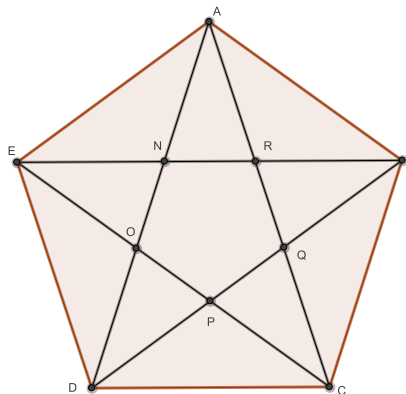


Figura 3.19: *Pentagrama*

As quatro medidas dos segmentos que aparecem no pentagrama \overline{RQ} , \overline{AR} , \overline{AQ} e \overline{AC} formam nessa ordem uma progressão geométrica cuja a razão é igual a Φ , ou seja,

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} = \Phi.$$

A justificativa vem da semelhança entre os triângulos $\triangle ABQ$, $\triangle RBQ$ e $\triangle CBR$, detalhada anteriormente no tópico Triângulo Áureo.

3.4 Espirais

Espirais são encontradas em diversos objetos, movimentos e também na natureza. Por exemplo, no voo de gaviões em direção à sua presa, no náutilo, e em vários outros, como o couve flor da Figura 3.20 conhecido por brócolis romanesco. Observa-se que cada ramo é parecido ao brócolis inicial, e a disposição dos ramos assemelha-se a espirais de Fibonacci.



Figura 3.20: *Brócolis Romanesco*

A seguir há vários exemplos de espirais que relacionam-se com o número de ouro e/ou com a sequência de Fibonacci.

3.4.1 Espiral no triângulo áureo

Com base na construção de triângulos áureos semelhantes e na Figura 3.1 é possível traçar uma espiral.

Etapas do traçado da espiral:

1. Com centro em C traçar o arco AD.
2. Com centro em E traçar o arco BD.
3. De forma análoga às etapas 1 e 2 continuar o traçado da espiral.

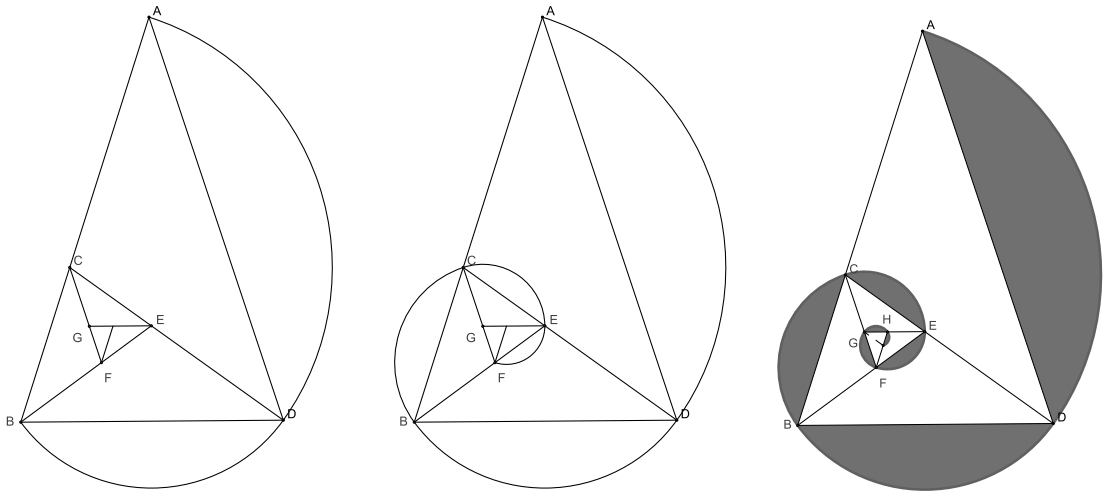


Figura 3.21: *Etapas para a construção da espiral.*

Observe que podemos repetir esse processo infinitamente, e obter um ponto limite, pólo de uma espiral logarítmica, ver mais em [1].

3.4.2 Espiral no retângulo áureo

Outra espiral também logarítmica é obtida a partir do retângulo áureo. Para realizar as etapas de construção é necessário antes realizar os mesmos processos até obter a Figura 3.8.

Etapas do traçado da espiral:

1. Com centro em B traçar o arco AC.

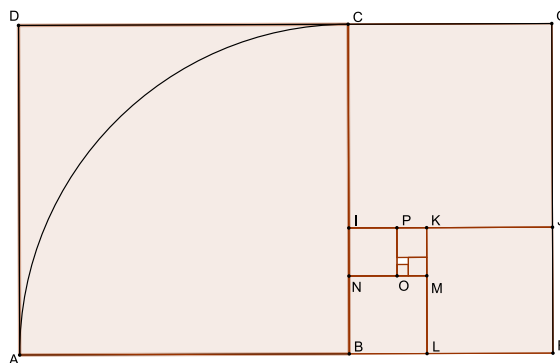


Figura 3.22: *Etapa 1*

2. Com centro em I traçar o arco CJ.

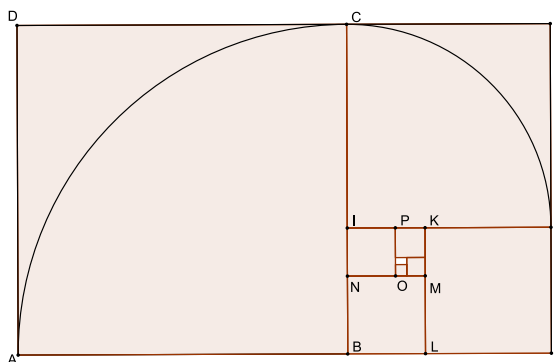


Figura 3.23: Etapa 1

3. Analogamente as etapas 1 e 2 continuar o traçado da espiral.

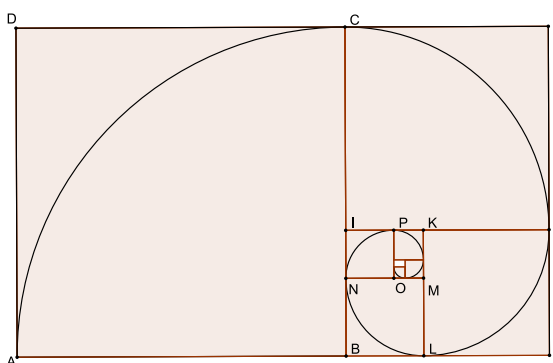


Figura 3.24: Etapa 3

Novamente a espiral é logarítmica, e observe que ela toca em um único ponto na extensão do comprimento de cada retângulo áureo.

3.4.3 A espiral de Fibonacci

Uma espiral se assemelha a espiral anterior é denominada espiral de Fibonacci. Essa espiral foi obtida no tópico Retângulo de Fibonacci. Ressalta-se que o retângulo obtido foi construído tal que os lados dos quadrados que o compõem estão de acordo com a sequência de Fibonacci.

As etapas de construção a seguir são baseadas na construção do retângulo de Fibonacci a partir da Figura 3.12 .

Etapas de construção da espiral de Fibonacci:

1. Com centro em L traçar o arco QO.

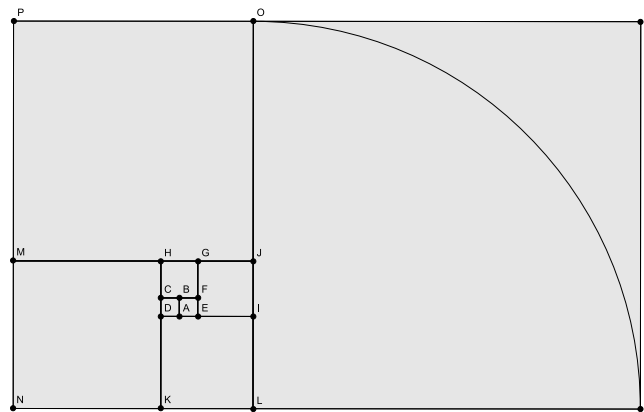


Figura 3.25: *Etapa 1*

2. Com centro em J traçar o arco OM.

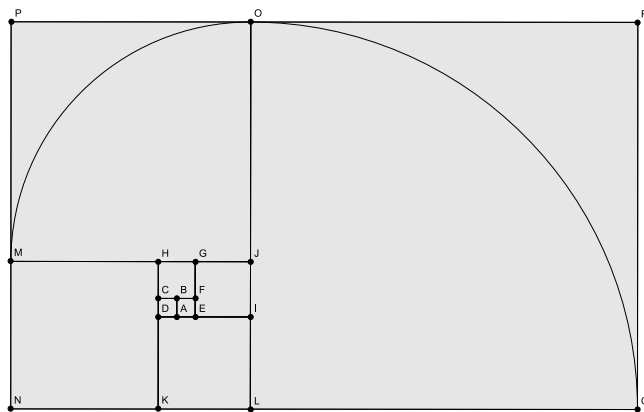


Figura 3.26: *Etapa 2*

3. De forma análoga às etapas 1 e 2 continuar o traçado da espiral nos demais quadrados.

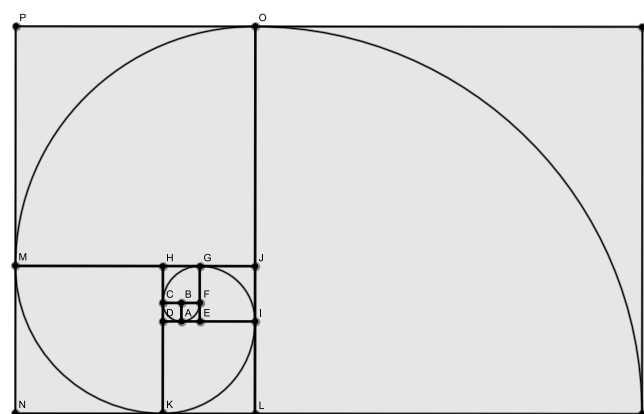


Figura 3.27: *Etapa 3*

Essa espiral se aproxima da espiral logarítmica, porém o crescimento dela não ocorre na razão áurea.

3.4.4 A espiral de Padovan e o número plástico

Seguindo a ideia da formação anterior podemos repetir o mesmo processo para obter uma espiral semelhante. Trata-se da sequência de Padovan, ver [8]. Essa sequência que assemelha-se a ideia da sequência de Fibonacci.

Definição 3 Seja p_n , $n \in \mathbb{N}$, um termo da sequência dos números de Padovan, temos:

- Os três primeiros termos iguais a 1, $p_1 = p_2 = p_3 = 1$;
- Para $n > 3$, tem-se $p_n = p_{n-2} + p_{n-3}$, n natural.

Assim, os dez primeiros números da sequência de Padovan são 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7 e 9.

Considerando triângulos equiláteros cujos lados têm medidas iguais a sequência de Padovan podemos organizá-los em forma de espiral.

1. Dispor três triângulos equiláteros cujos lados têm medida igual a 1, como ilustra a figura a seguir.

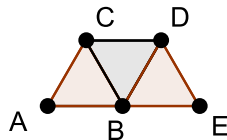


Figura 3.28: Etapa 1

2. Dispor dois triângulos equiláteros cujos lados têm medida igual a 2, como ilustra a figura a seguir.

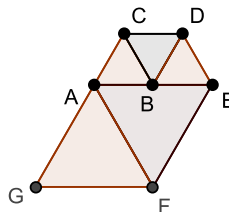


Figura 3.29: Etapa 2

3. Dispor um triângulo equilátero cujo lados tem medida igual a 3, tal que um de seus lados seja comum aos lados dos triângulos de lados 1 e 2.

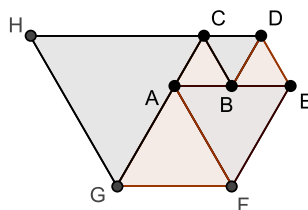


Figura 3.30: Etapa 3

4. Repetir o procedimento anterior para os demais triângulos cujos lados seguem a sequência de Padovan.

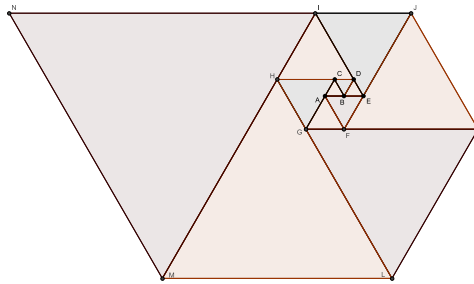


Figura 3.31: Etapa 4

Semelhante a sequência de Fibonacci a razão $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ converge para $\cong 1,324718$ quando n tende a infinito. Esse número é denominado número plástico.

3.5 Ângulo ideal

O número de ouro aparece novamente no estudo da filotaxia quando estuda-se o melhor ângulo, o *ângulo ideal*. Um ângulo ideal distribuirá as folhas ou os ramos de uma planta para que eles recebam o máximo da exposição à luz solar vertical. Dessa forma fazendo uma projeção horizontal a sobreposição de folhas ou ramos seria mínima.

Segundo Keith Devlin, ver [7], no século XVIII matemáticos suspeitavam que o único ângulo de rotação que permitisse que isso acontecesse do modo mais eficiente possível seria baseado na razão áurea. Esse ângulo ideal inicialmente descoberto por Church e confirmado em 1875 por Weisner foi

$$\alpha = \frac{360^\circ}{\Phi^2} \cong 137,5^\circ.$$

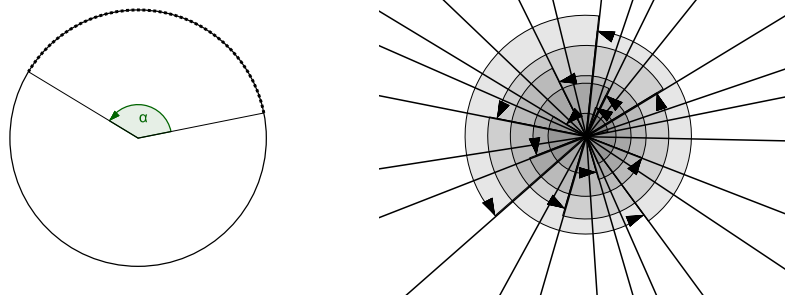


Figura 3.32: A esquerda o ângulo α e a direita a projeção da distribuição de ramos segundo o ângulo α

O valor é obtido relacionando a volta completa 360° a um ângulo de medida α sobre a razão áurea, tal que:

$$\frac{360^\circ}{360^\circ - \alpha} = \frac{360^\circ - \alpha}{\alpha}.$$

Ainda segundo Keith Devlin, os cientistas franceses Stéohane Douady e Yves Couder em 1993 realizaram um estudo que mostra a importância do Φ relacionado ao crescimento de plantas, veja mais em [\[12\]](#).

O número de ouro no Ensino Básico

A razão áurea não faz parte do currículo escolar obrigatório, entretanto, o número de ouro pode ser apresentado como uma aula diferenciada em Laboratório de Ensino. As propriedades e construções obtidas nos capítulos anteriores relacionam-se entre si. As ideias apresentadas podem ser utilizadas em uma atividade lúdica com alunos do Ensino Médio. As construções utilizaram ferramentas matemáticas conhecidas pelos alunos: solução de equação do 2º grau, aplicação da semelhança de triângulos, uso do Teorema de Pitágoras, cálculo de razões, construções com régua e compasso, aproximações numéricas e tantos outros assuntos.

A ideia inicial é introduzir aos alunos os conceitos básicos sobre a razão áurea e como realizar as etapas de construção. A seguir, apresentar ao aluno a um software de construção geométrica, como sugestão tem-se o Geogebra. Como exercício avaliativo sugere-se a construção do decágono regular como os alunos. Assim, o aluno pode realizar a construção do decágono a partir da construção do pentágono ou da construção do ângulos de 36° , ambos explicados anteriormente. Outra sugestão é trabalhar as aproximações pela Sequência de Fibonacci por meio de planilhas eletrônicas ou uso de calculadoras. Um exercício avaliativo para as aproximações pode ser relacionado a Sequência de Padovan, assim utiliza-se uma ideia semelhante a Sequência de Fibonacci e ao número de ouro.

Após familiarizar o aluno com conceitos e como utilizar as ferramentas sugere-se que o aluno crie figuras ou objetos no software com a razão áurea. Para que o aluno tenha base para criar alguma figura ou objeto é necessário estimulá-lo com exemplos que apresentem a razão áurea. Nesse momento deve-se apresentar alguns cânones para as proporções do corpo humano utilizados por Luca Pacioli, Leonardo da Vinci e outros pintores da primeira Renascença, como a Figura 4.1 por exemplo com os cânones por Thales Mello Carvalho, veja [9].

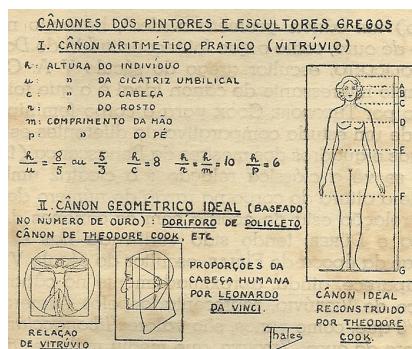


Figura 4.1: *Cânones*

Outro exemplo curioso em relação a aplicação da razão áurea na estética é na odontologia. A razão áurea é utilizada como base para dentes esteticamente perfeitos.

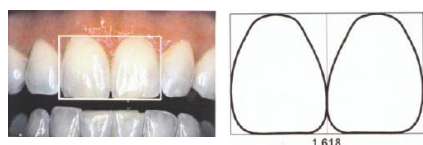


Figura 4.2: *A razão áurea na estética do sorriso*

A Figura 4.2 mostra uma de várias aplicações da razão áurea, nela os dentes devem ser inscritos em um retângulo áureo. Assim, dada a largura ou a altura dos dentes pode-se fazer cortes para alinhar a gengiva ou por meio de aparelhos ortodônticos aproximar os dentes a fim de inscrevê-los em um retângulo áureo; ver [11]. Há outros exemplos atuais que exemplificam a aplicação da razão áurea, como a Cadeira de Saarinen citada no Capítulo 1 ou a estrutura de páginas da web com uso do retângulo áureo.

Como fechamento do trabalho o aluno produz no software de simulação de régua e compasso algum objeto ou figura que utilize a razão áurea, as sequências ou quaisquer outras relações estudadas nos capítulos anteriores. Assim, com uso do software é possível mensurar, transportar, ampliar e refazer figuras e traçados de maneira mais rápida e eficaz.

Considerações Finais

Desde a Antiga Grécia tem-se falado da divisão de um segmento em média e extrema razão. Consiste em dado um segmento qualquer AB , determinar um ponto C entre A e B , a fim de obter uma igualdade entre as razões $\overline{AB} : \overline{AC}$ e $\overline{AC} : \overline{CB}$. Com isso tem-se um estudo algébrico e geométrico dessa igualdade. O estudo algébrico conecta as medidas na proporção áurea a uma equação do segundo grau em que Φ e seu recíproco negativo aparecem como soluções. Seguiu-se então várias características numéricas para relacionar aquele número a sua representação geométrica.

Por meio da divisão em média e extrema razão com régua e compasso obteve-se ângulos de medidas iguais 36, 72 e 108 graus, facilitando a construção de pentágono e decágono regulares. Além disso, com a forma geométrica do número áureo é possível estabelecer relações entre triângulos, retângulos e outras figuras áureas. O pentágono em particular traz em todas as suas medidas relações diretas com o número de ouro, nele está presente a construção do segmento áureo e os triângulos áureos.

Na teoria gnomônica de crescimento harmonioso viu-se que uma figura crescente é obtida de partes sucessivamente semelhantes. E como estão semelhantemente dispostas pode-se traçar uma espiral logarítmica em seus pontos coincidentes. Dentre as espirais apresentadas, as de maior destaque são as espirais logarítmicas cuja pulsação radial é Φ e apresentam um crescimento harmonioso, como por exemplo, a espiral do retângulo áureo.

Church, Wiesner, Stéphane Douady, Yves Couder e outros contribuíram para o estudo da distribuição das plantas ao longo dos ramos, a distribuição para aproveitamento máximo do sol sobre um ângulo ideal. Justificando também o número de espirais em cada direção no centro de um girassol. Surge então uma breve justificativa do mistério atribuído a quem encontra trevos de quatro folhas. A quantidade de folhas de uma planta apresentam normalmente um número da Sequência de Fibonacci, assim, plantas com 1, 2, 3, 5, 8, 13 pétalas são mais facilmente encontradas.

Com base na teoria sobre o número de ouro e as aplicações nas construções geométricas teve-se um direcionamento para aplicação do conteúdo na sala de aula do Ensino Básico a fim de utilizar diferentes ferramentas matemáticas para construção de figuras e objetos harmoniosos. A indicação de um software como o Geogebra para

as construções auxilia na investigação de possibilidades de solução e observações de mensurabilidade de cada etapa do processo construtivo.

Obtemos então uma harmonia oriunda de relações numéricas e ciências, harmonia encontrada na natureza, na arte, na arquitetura desde a Renascença e aplicadas até os dias de hoje como fonte de estética e estudo. Obviamente, qualquer objeto que apresente uma proporção não-áurea não será mais ou menos bonito. Entretanto, aquele que apresente o número de ouro em sua composição certamente será fruto da beleza da matemática.

Referências Bibliográficas

- [1] HUNTLEY, H. E. Trad. de Luís Carlos Ascêncio Nunes. A Divina Proporção. Universidade de Brasília, Brasília, 1985.
- [2] BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. Edgard Blucher, São Paulo, 1996.
- [3] KATZ, V. J. A History of Mathematics: an introduction. Addison-Wesley educational publishers, New York , 1998.
- [4] PICKOVER, Clifford A. O Livro da matemática. Librero, Holanda, 2011
- [5] WAGNER, Eduardo. Construções Geométricas. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2007
- [6] FILHO, Edgar de Alencar. Lições de Geometria Plana 2. Livraria Nobel, São Paulo, 1966
- [7] DEVLIN, Keith. O instinto matemático. Record, Rio de Janeiro, 2005
- [8] STEWART, Ian. Almanaque das curiosidades matemáticas. Record, Rio de Janeiro, 2009
- [9] CARVALHO, Thales de Mello. O número de ouro. Imprensa Nacional, Rio de Janeiro, 1945
- [10] BAUHAUS, Design. Geometria do Design: Cadeira Saarinen. Disponível em <<http://www.bauhausdesign.com.br/blog/2010/08/geometria-do-design-cadeira-saarinen/>>. Acesso em: janeiro de 2013
- [11] LEVIN, Eddy. Introdução à aplicação da proporção áurea em estética dental. Disponível em <<http://www.labordental.com.br/smileline-goldensectioncorel.pdf>>. Acesso em: janeiro de 2013
- [12] S. DOUADY, Y. COUDER. Phyllotaxis as a dynamical self organizing process. Disponível em <<http://www.math.ntnu.no/jarlet/Douady96.pdf>>. Acesso em: janeiro de 2013