UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ANTÔNIO RICARDO DE OLIVEIRA

APLICAÇÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

JUAZEIRO DO NORTE - CEARÁ
2018

ANTÔNIO RICARDO DE OLIVEIRA

APLICAÇÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro e Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. FRANCISCO DE ASSIS BENJAMIM FILHO

JUAZEIRO DO NORTE - CEARÁ
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

O45a Oliveira, Antonio Ricardo de.
Aplicações de matemática financeira/Antonio Ricardo de Oliveira. – 2018.
63 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia –Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2018.

Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho.

1. Aplicações. 2. Dinheiro. 3. Juros. 4. Matemática Financeira. I. Título.

CDD 513.93

Bibliotecário: João Bosco Dumont do Nascimento – CRB 3/1355

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Aplicações de Matemática Financeira

Antônio Ricardo de Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 25 de outubro de 2018.

Banca Examinadora

Francisco de Assis Benjamim Filho.

Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho - UFCA

Orientador

Francisco Pereira Chaves

Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves - UFCA

Paulo César Cavalcante de Oliveira

Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira – URCA

À minha adorável família, pelo cuidado e amor incondicional.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por sempre guiar os meus caminhos.

Ao meu pai, Francisco Oliveira da Mota, e à minha mãe Maria Mota de Oliveira, pela educação que me deram, pelo amor incondicional e pelo apoio.

À minha namorada, Cícera Williany Dias, pelo companheirismo e pelas conversas confortantes dedicadas a mim.

À srª. Albertina Dias Leal, pelo acolhimento em sua casa em noites de estudo.

Aos meus amigos, em especial, Horácio Eufrásio Pereira, pelo apoio e aconselhamentos valiosos.

Aos professores do curso, pela dedicação e transmissão do conhecimento.

Aos colegas do curso de mestrado, pelas reflexões, críticas, sugestões e momentos de diversão.

Aos núcleos gestores das escolas EEF Cosmo Alves Pereira, EEIF Raimundo Mendes de Freitas e EEFM Getúlio Vargas, pela compreensão e flexibilidade nos horários.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho, pelo apoio, pela compreensão e pela ótima orientação.

À SBM, pela promoção do curso.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

E a todos os que contribuíram de alguma maneira para eu chegar até aqui.

"Felizes aqueles que se divertem com problemas que educam a alma e elevam o espírito." (Fenelon)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo mostrar a importância e a aplicabilidade da matemática financeira no cotidiano das pessoas. Para isto, iniciamos o estudo com algumas considerações sobre a origem e a evolução do dinheiro bem como a importância da matemática financeira, em seguida, fazemos um estudo sobre os pré-requisitos da matemática financeira e, na sequência, apresentamos os conceitos específicos dessa área de estudo. Posteriormente buscamos alguns dos diversos setores de aplicabilidade da matemática financeira como, bancos, instituições financeiras, estabelecimentos comerciais. Além disso, separamos algumas questões do ENEM, de vestibulares e de concursos públicos nas quais a matemática financeira se faz presente. O resultado dessa pesquisa mostra a aplicação da matemática financeira em diferentes situações.

Palavras-chave: Aplicações. Dinheiro. Juros. Matemática Financeira.

ABSTRACT

This work aims to show the importance and applicability of financial mathematics in the daily life of people. For this, we started the study with some considerations about the origin and evolution of money as well as the importance of financial mathematics, then we did a study on the prerequisite of financial mathematics and, in the sequence, we presented the specific concepts of this study area. Later we look for some of the diverse sectors of applicability of financial mathematics such as banks, financial institutions, commercial establishments. In addition, we separate some issues of the ENEM, of entrance exams and public competitions in which financial mathematics is present. The results of this research shows the application of financial mathematics in different situations.

Key-words: Applications. Money. Interest. Financial Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A motivação para a escolha do tema desse trabalho foi a percepção de como a matemática financeira afeta a vida das pessoas. Vemos frequentemente em noticiários que muitos indivíduos enfrentam problemas financeiros o que evidencia que um grande número deles não domina este assunto. Para ilustrar tal afirmação, podemos citar uma pesquisa recente feita pela Confederação Nacional de Dirigentes Lojistas (CNDL) e pelo Serviço de Proteção ao Crédito (SPC) [22], que mostrou que $62,4$ milhões de brasileiros estavam com alguma conta atrasada no mês de setembro de 2018.

São inúmeras as situações do dia a dia que envolvem matemática financeira. Frequentemente ouvimos falar sobre juros, taxas, inflação, queda e/ou aumento de ações na bolsa de valores, mas, às vezes, essas informações não são compreendidas devido à ausência de conhecimento adequado para isto. A matemática financeira fornece subsídios para que conheçamos esses assuntos que envolvem finanças. Um bom domínio da matemática financeira ajuda nas tomadas de decisões em situações de empréstimos, financiamentos, compras parceladas em lojas, investimentos, dentre outras.

Neste trabalho, mostraremos aplicações da matemática financeira em diversas situações que ocorrem no cotidiano das pessoas, o que possibilita o uso deste trabalho por professores do ensino básico, bem como por qualquer cidadão que deseje conhecer um pouco mais sobre o assunto desde alunos, até comerciantes que usam diariamente finanças.

Este trabalho está dividido em seis capítulos. O primeiro é composto por esta introdução. No segundo capítulo, apresentaremos a história do dinheiro mostrando sua evolução até os dias atuais. Mostraremos também a importância da matemática financeira no mundo atual, listando motivos que mostram a relevância do seu estudo.

O terceiro capítulo é destinado aos pré-requisitos para o estudo da matemática financeira. Falaremos sobre razão, proporção, porcentagem, função afim, função exponencial, progressão aritmética e progressão geométrica. Apresentaremos os conceitos básicos destes conteúdos tão necessários para um bom entendimento da matemática financeira.

No quarto capítulo, falaremos sobre os conceitos fundamentais da matemática financeira, tais como juros compostos, séries uniformes, a fórmula das taxas equivalentes e sistemas de amortização, enfatizando o SAC (Sistema de Amortização Constante) e o Sistema Francês de Amortização, também chamado de Tabela Price.

O quinto capítulo apresentará diversas aplicações de matemática financeira no cotidiano. Veremos situações no comércio, em operações com instituições financeiras, em avaliações (ENEM, vestibulares e concursos públicos), em setores de empreendimento e no planejamento financeiro familiar. Veremos ainda como usar o aplicativo Calculadora de Juros (Calfi) para resolver alguns dos problemas tratados neste trabalho. Neste capítulo o leitor perceberá a grande aplicabilidade da matemática financeira. Sua leitura, proporcionará ferramentas para uma melhor análise das situações financeiras presentes na vida.

No último capítulo, serão apresentadas as considerações finais deste trabalho. Enfatizamos que existem outras dissertações do PROFMAT sobre Matemática Financeira entre as quais podemos citar [10], [16] e [20]. No entanto, algumas das aplicações que veremos aqui não foram abordadas em outros trabalhos.

2 A HISTÓRIA DO DINHEIRO

A seguir, baseados em [5] e [7] , fazemos um apanhado histórico sobre o dinheiro.

A moeda passou por um longo processo de evolução até chegar ao formato em que é conhecida hoje. Antes de sua existência, era praticado o escambo, um tipo de comércio que era caracterizado pela troca de mercadorias. Uma das principais desvantagens do escambo, era que nas trocas não havia uma maneira de atribuir uma equivalência de valor entre as mercadorias a serem permutadas de modo que, com frequência, alguém saia perdendo.

Algumas mercadorias, como o gado bovino e o sal, passaram a ser mais procuradas e aceitas por todos, pois apresentavam mais utilidades. Eram as chamadas moedas-mercadorias. No Brasil, circularam mercadorias como o cauri, o açúcar, o cacau, o tabaco, o pau-brasil e o pano.

As mercadorias tornaram-se inconvenientes às operações comerciais ao longo do tempo, pois eram facilmente perecíveis e apresentavam oscilações em seu valor. Ao descobrir o metal, o homem passou a utilizá-lo na fabricação de armas e de seus utensílios, antes feitos de pedra. Isso fez o metal tornar-se o principal padrão de valor. Era trocado em seu estado natural, na forma de barras ou objetos, como anéis, braceletes, etc.

A comercialização do metal exigia, a cada troca, a aferição de peso e avaliação de seu grau de pureza. Com o passar do tempo, ganhou forma definida e peso determinado e recebeu marca que determinava o seu valor e indicava quem o emitira. Essa medida trouxe agilidade às transações, pois já não era mais preciso a pesagem e permitia a identificação do valor do metal para troca.

Os utensílios feitos a partir de metal tiveram o seu valor elevado. Essa crescente valorização, levou à sua utilização como moeda e ao aparecimento de réplicas de objetos metálicos, em pequenas dimensões, usadas como dinheiro, é o caso das moedas *faca* e *chave* que eram encontradas no oriente e do *talento*, moeda de cobre ou bronze, na forma de pele de animal, que circulou na Grécia e em Chipre.

No século VII a.C. surgiram as primeiras moedas com características semelhantes às das atuais, eram pequenas peças de metal com peso e valor definidos e apresentando a marca de quem as havia emitido, o que garantia o valor impresso no metal.

O ouro e a prata foram os primeiros metais usados na cunhagem de moedas, esses metais se impuseram porque além de serem raros e belos, estavam ligados a costumes religiosos da época. As moedas de ouro e prata mantiveram-se por séculos, sendo elas garantidas pelo seu valor intrínseco, ou seja, pelo valor comercial do metal utilizado na sua confecção. Isso durou até o final do século XIX, quando o cuproníquel e, posteriormente, outras ligas metálicas passaram a ser muito empregadas, sendo assim a moeda passou a circular com seu valor extrínseco, ou seja, pelo valor cunhado em sua face. Com a chegada do papel-moeda, a cunhagem de moedas metálicas restringiu-se a valores inferiores, usados para troco.

Surge na Idade Média o costume de se guardar os valores com um ourives, pessoa que negociava objetos de ouro e prata, e entregava um recibo como garantia. Ao longo do tempo, esses recibos passaram a ser usados como forma de pagamentos, circulando entre as pessoas, originando-se assim, a moeda de papel. No Brasil, em 1810, o Banco do Brasil lançou os primeiros bilhetes de banco, seu valor era preenchido à mão. Com o tempo, a emissão de cédulas passou a ser conduzida pelo governo, que controlava as falsificações e garantia o seu poder de pagamento.

Hoje quase todos os países possuem bancos centrais, que são os responsáveis por emitir cédulas e moedas. As cédulas atuais são confeccionadas usando papel e processos especiais o que as tornam seguras e duráveis.

O dinheiro, independentemente do formato em que se apresente, não vale por si, mas sim pelos serviços e mercadorias que seu possuidor é capaz de usufruir ou adquirir. A moeda surgiu de uma necessidade e sua evolução mostra o desejo do homem de adequar tal ferramenta à realidade de sua economia.

2.1 A História do Dinheiro Brasileiro

A circulação do dinheiro no Brasil iniciou-se ainda no período colonial, trazido pelos portugueses. Nos primeiros séculos de colonização ainda circulavam por aqui as moedas de prata espanholas e moedas trazidas por piratas e por outros invasores. As primeiras moedas cunhadas no Brasil foram durante o domínio holandês no Nordeste, entre 1630 e 1654. Essas moedas eram usadas para pagar aos fornecedores e às tropas holandesas e foram as primeiras com a palavra Brasil.

A primeira Casa da Moeda brasileira foi criada em 1694, pelo então rei de Portugal D. Pedro II. Neste período a moeda oficial era o réis. Diferentes instituições foram responsáveis pela emissão do dinheiro no Brasil, o que criou problemas financeiros obrigando o Tesouro Nacional, em 1896, a voltar a ser o responsável pela emissão de cédulas, tarefa que ficou a cargo do Banco Central a partir de 1965.

Altos índices de inflação fizeram com que, no decorrer do tempo, ocorressem algumas mudanças no padrão monetário brasileiro. O *réis* circulava no Brasil desde a época da colonização. Com a independência, em 1822, manteve-se o réis como unidade monetária. Em 1º de novembro de 1942, entrou em vigor no Brasil o *Cruzeiro*; mil réis passaram a valer 1 cruzeiro (Rs$ 1000 = Cr$ 1). Em 13 de fevereiro de 1964 o Cruzeiro foi substituído pelo *Cruzeiro Novo*; mil Cruzeiros passaram a valer 1 Cruzeiro Novo (Cr$ 1000 = NCr$ 1). Em 15 de maio de 1970 a moeda voltou a ser o Cruzeiro; desta vez não houve corte de zeros, 1 Cruzeiro Novo passou a valer 1 Cruzeiro (NCr$ 1 = Cr$ 1). Em 28 de fevereiro de 1986 nascia o *Cruzado*; mil Cruzeiros passavam a valer 1 Cruzado

(Cr\$ 1000 = Cz\$ 1). Em menos de três anos ocorre um novo corte de zeros, surgindo o *Cruzado Novo*, em 16 de janeiro de 1989; mil Cruzados passaram a valer 1 Cruzado novo (Cz\$ 1000 = NCz\$ 1). Mais uma vez aparece o *Cruzeiro* em 16 de março de 1990, no entanto, não houve corte de zeros; 1 Cruzado Novo passou a valer 1 Cruzeiro (NCz\$ 1 = Cr\$ 1). Em 1º de agosto de 1993 é criado o *Cruzeiro Real*; mil Cruzeiros passaram a valer 1 Cruzeiro Real (Cr\$ 1000 = CR\$ 1). A moeda atual, o *Real*, surgiu em 1º de julho de 1994; 2750 Cruzeiros Reais equivaliam a uma Unidade Real de Valor (URV), que, por sua vez, valia 1 Real (CR\$ 2750 = URV 1 = R\$ 1).

Portanto, houve várias mudanças no sistema monetário brasileiro com o objetivo de controlar a inflação. Note que, na maioria das trocas eram feitos cortes de zeros, no entanto, para a implantação da moeda atual, o Real, não houve um simples corte de zeros. Para implantação do plano real foi criado um novo índice - a Unidade Real de Valor (URV). Com base na média de três índices diários de inflação, o Banco Central, fixava uma taxa de conversão da URV em Cruzeiro Real, assim os bens eram pagos em Cruzeiro Real, mas tinham uma referência numa unidade de valor estável. Em 1º de julho de 1994, os cálculos baseados na URV deram lugar ao real. Como visto anteriormente, cada real valia CR\$ $2750,00$. Com o real conseguiu-se o controle da inflação e a estabilidade de preços.

2.2 A Importância da Matemática Financeira

Para Assaf [3], "a matemática financeira trata, em essência, do estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo". Portanto, busca quantificar as transações que ocorrem no universo financeiro, levando em conta a variável tempo, ou seja, o valor monetário no tempo. As principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira são: a taxa de juros, o capital e o tempo. Avalia-se a maneira de como o dinheiro está sendo ou será empregado, de modo a maximizar o resultado, que se espera positivo. Com as ferramentas adequadas, pode-se comparar duas ou mais alternativas, buscando aquela que mais benefícios trará, ou menos prejuízos acarretará.

O aspecto financeiro é um dos mais relevantes para a execução de qualquer projeto, seja qual for a área. Assim, o estudo de matemática financeira é de grande importância para quem deseja entender o mundo que nos é apresentado atualmente, em que o dinheiro dita as regras de quase todos, senão todos os aspectos de nossas vidas.

É comum no dia a dia nos depararmos com situações em que precisamos tomar decisões que irão afetar nossa vida financeira. Situações de compras, vendas, empréstimos, financiamentos, são corriqueiras na economia globalizada em que vivemos. O estudo e o entendimento da matemática financeira nos ajudam a tomarmos as decisões corretas e evitarmos complicações financeiras e endividamentos no futuro.

Com um bom domínio dessa ferramenta temos mais segurança ao financiarmos um imóvel ou um carro, escolhendo a alternativa de financiamento mais viável, de acordo com nossos recursos financeiros. Saberemos onde aplicar nosso dinheiro, a fim de minimizarmos os riscos. Pode-se evitar situações de juros abusivos e até mesmo certas propagandas enganosas do comércio, analisando o que é mais vantajoso: parcelar uma compra ou pagar à vista. Ou seja, quem tem um conhecimento razoável sobre matemática financeira terá facilidade em tomar as melhores decisões em situações que envolvem dinheiro.

No mundo atual, quase todo tipo de negócio é desenvolvido com prazos, então é essencial desenvolvermos nossas habilidades com o dinheiro, nos tornando aptos a fazer negócios e transações a prazo.

A matemática financeira pode ser usada para tomarmos decisões e fazermos um planejamento correto. Conhecermos o quanto pagamos de juros em uma prestação, o quanto ganhamos em uma aplicação, o que é e o que causa a inflação, o quanto ganhamos em um reajuste salarial acima da inflação são algumas das informações importantes para a vida que a matemática financeira nos fornece.

Além de ser usada em situações cotidianas, a matemática financeira é muito aplicada no ramo empresarial, onde empresas buscando os maiores níveis de lucro utilizam essa ferramenta para alcançar seus objetivos e evitar prejuízos. Cabe ressaltar que a matemática financeira é um conhecimento essencial para aprovação em vários concursos públicos.

3 NOÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo, abordaremos os pré-requisitos para o estudo de Matemática Financeira. Falaremos sobre razão, proporção, porcentagem, função afim, função exponencial, progressões aritméticas e progressões geométricas. Para mais detalhes sobre estes assuntos sugerimos [14], [15] e [18].

3.1 Razão

Razão é uma relação entre duas grandezas por meio de um quociente. Esse conceito é fundamental para o entendimento da ideia de proporção que veremos adiante. Antes disso, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.1. De uma sala de aula com 30 alunos, 17 são moças. Qual é a razão entre o número de moças e o número total de alunos da sala?
Como são 17 moças e 30 alunos, a razão entre os dois é simplesmente

$$\frac{17}{30}.$$

Exemplo 3.1.2. Um carro percorre o trajeto entre duas cidades A e B, distantes 150 km uma da outra, em 2 horas. Qual foi a velocidade média do carro no percurso da cidade A à cidade B?
A velocidade média V_m é definida pela razão entre o deslocamento e o tempo gasto, portanto

$$V_m = \frac{150}{2} = 75 \text{ km/h}.$$

3.2 Proporção

Nesta seção, estudaremos os conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

3.2.1 Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais

Comecemos com um exemplo simples.

Exemplo 3.2.1 Suponha que um grupo de agricultores colhe os produtos de uma lavoura de área 8 km^2 em 16 dias. Quantos dias seriam necessários para o mesmo grupo de agricultores colher os produtos de uma lavoura de área 12 km^2?
Podemos usar a ideia de proporção para resolvermos este problema. Seja x o número de dias que se deseja saber. Então 8 km^2 estão para 12 km^2 assim como 16 dias estão para

x. Ou seja:

$$\frac{8}{12} = \frac{16}{x}.$$

Logo

$$x = \frac{(12 \cdot 16)}{8} = 24.$$

O ponto crucial para a resolução do problema acima consiste em observarmos que o número de dias necessários para um grupo de agricultores colher uma lavoura é proporcional à área dessa lavoura.

Vejamos o conceito de *proporcionalidade direta.*

Sejam x e y duas grandezas. Diz-se que y é diretamente proporcional a x quando:

1. Para cada valor de x, existe um valor bem definido de y, isto é, y é uma função de x, o que será indicado pela notação $y = f(x)$.

2. Se $x < x'$, $y = f(x)$ e $y' = f(x')$ então $y < y'$.

3. Se $y_0 = f(x_0)$ e c é um número real então $f(cx_0) = cf(x_0) = cy_0$.

A validez da terceira condição só precisa ser verificada para o caso em que c é inteiro. (Este é o conteúdo do **Teorema Fundamental da Proporcionalidade,** cuja prova pode ser encontrada em [14].)

Exemplo 3.2.2. Aplicando x reais na caderneta de poupança no dia 1º de março, receberei y reais no dia 1º de abril. A correspondência $x \mapsto y = f(x)$ é uma proporcionalidade direta. Com efeito, quanto maior for a aplicação mais receberei. Além disso, se aplicar $2x$, isto equivalerá a fazer dois depósitos de x reais, portanto receberei $y + y = 2y$. Analogamente, aplicar nx equivale a fazer n depósitos de x reais, portanto $nx \mapsto ny$.

Outra maneira de dizer que as grandezas x e y são diretamente proporcionais é afirmar que existe uma constante k, tal que $y = kx$.

A ideia de proporcionalidade direta origina a chamada regra de três: Suponha que as grandezas x e y são diretamente proporcionais. Supõe-se que são conhecidos três dos números x', y', x'', y'' e pede-se o quarto dos números.

Como $y' = k \cdot x'$ e $y'' = k \cdot x''$, vem $\dfrac{y'}{y''} = \dfrac{x'}{x''}$. Esta proporção nos permite obter um dos números, x', y', x'' ou y'' quando os outros três são conhecidos.

Exemplo 3.2.3. Um mapa foi desenhado de modo que na escala usada 1 cm no desenho equivale a 70 km de distância real. Verificou-se que a distância entre a cidade A e a cidade B no mapa era de $0,9$ cm. Qual a distância real entre essas duas cidades?

Usando proporção, temos:

$$\frac{1}{70} = \frac{0,9}{x}, \quad \text{donde} \quad x = \frac{0,9 \cdot 70}{1} = 63$$

Portanto, a distância real entre as duas cidades é 63 km.

Discutamos agora o conceito de proporcionalidade inversa.

Se 5 pedreiros concluem uma obra em 20 dias, quanto tempo demorará para concluírem essa mesma obra se um dos pedreiros desistir do serviço?

Se y representa o número de dias necessários para que x pedreiros concluam uma obra então é intuitivamente claro que quanto menor for x, maior será y. Além disso, percebe-se que, dobrando o número de pedreiros, a obra será concluída na metade do tempo. Mais geralmente, se multiplicarmos o número de pedreiros por um número natural n, o tempo necessário para conclusão da obra ficará dividido por n. Estas condições caracterizam a proporcionalidade inversa, que definiremos agora.

Sejam x, y dois tipos de grandezas. Diz-se que y é *inversamente proporcional* a x quando:

1. Para cada valor de x, existe um valor bem definido de y, isto é, y é uma função de x, o que será indicado pela notação $y = f(x)$.

2. Se $x < x'$, $y = f(x)$ e $y' = f(x')$ então $y' < y$.

3. Se $y_0 = f(x_0)$ e c é um número real então $f(cx_0) = \frac{1}{c}f(x_0) = \frac{1}{c}y_0$.

De maneira análoga à que ocorreu na proporcionalidade direta, temos aqui a regra de três inversa. Suponha que y é inversamente proporcional a x e sejam dados x' e x'', aos quais correspondem respectivamente os valores y' e y'' de y. Tem - se portanto

$$y' = \frac{k}{x'} \quad \text{e} \quad y'' = \frac{k}{x''}, \quad \text{logo} \quad \frac{y''}{y'} = \frac{x'}{x''}.$$

Como antes, supomos que três dos números x', x'', y', y'' são conhecidos e buscamos o quarto deles a partir da proporção $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{x'}{x''}$.

Exemplo 3.2.4. Um veículo com velocidade média de 80 km/h fez o percurso da cidade A para a cidade B em 2 horas e 30 minutos. No percurso de volta sua velocidade média aumentou para 100 km/h. Quanto tempo foi gasto no percurso de volta?

Vemos com clareza que quanto maior for a velocidade média, o tempo gasto diminui proporcionalmente, estamos portanto, trabalhando com grandezas inversamente proporcionais. Daí como 2 horas e 30 minutos equivalem a 150 minutos, segue que

$$\begin{aligned} \frac{80}{100} &= \frac{x}{150} \\ x &= \frac{150 \cdot 80}{100} = 120. \end{aligned}$$

Logo, no percurso de volta foram gastos 120 minutos, ou seja, 2 horas.

3.3 Porcentagem

Uma *porcentagem* é uma fração de denominador 100.

Assim, "dez por cento" escreve-se 10% e significa "dez centésimos", isto é, $10\% = \frac{10}{100}$. Sempre que se diz "dez por cento" está-se pensando em 10% de uma determinada grandeza. Isto significa um décimo dessa grandeza, pois $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

Existem três elementos fundamentais nos problemas de porcentagem: o valor básico, a taxa de porcentagem e a porcentagem do valor básico. Os problemas mais simples consistem em, dados dois desses elementos, calcular o terceiro.

Exemplo 3.3.1. Um funcionário, cujo salário mensal é de 1820 reais, recebe um aumento de 4%. Qual é seu novo salário?

Como 4% de $1820 = \dfrac{1820 \cdot 4}{100} = 72,8$, seu novo salário será de $1820 + 72,8 = 1892,80$ reais.

Exemplo 3.3.2. Numa sala de aula de 40 alunos, 18 são homens. Qual a porcentagem de mulheres nessa classe?

Há 22 mulheres, as quais representam $x\%$ dos 40 alunos. Portanto x por cento de 40 são 22, ou seja,

$$\frac{x}{100} \cdot 40 = 22.$$

Daí

$$x = \frac{2200}{40} = 55.$$

Portanto, 55% dos alunos são mulheres.

As funções exponenciais constituem, juntamente com as funções afins e quadráticas, os modelos matemáticos mais usados para resolver problemas de nível elementar. A maior dificuldade consiste em escolher entre elas qual a mais adequada para resolver o problema em análise. A fim de sabermos qual modelo deve ser escolhido, precisamos conhecer as características dessas funções. Nas seções seguintes (3.4 e 3.5), mostraremos que o gráfico de uma função afim é uma reta não vertical e caracterizaremos a função exponencial. Uma vez que neste trabalho não usaremos as funções quadráticas, não as caracterizaremos. O leitor interessado pode encontrar a caracterização da função quadrática em [14].

3.4 Função Afim

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.4.1. As funções $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x$, $g(x) = x+1$ e $h(x) = 3$ são afins.

Exemplo 3.4.2. Se um vendedor tem um salário fixo e ganha um percentual de comissão adicional sobre o valor de suas vendas, a sua renda mensal é dada por uma função afim $f : x \mapsto ax + b$, onde x é o valor vendido no mês, o valor inicial b é o salário fixo e o coeficiente a é o percentual da comissão sobre as vendas.

Teorema 3.4.3. *O gráfico de uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma reta não vertical.*

Demonstração: Sejam f uma função afim, G o gráfico de f e $P_1 = (x_1, ax_1 + b), P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ pontos arbitrários de G. Para mostrar que G é uma reta, basta provar que o maior dos números $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ é igual à soma dos outros dois. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_1 < x_2 < x_3$. A fórmula da geometria analítica para o cálculo da distância entre dois pontos do plano nos dá

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

Analogamente, $d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$ e $d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$. Donde segue que $d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$, como queríamos. Obviamente, tal reta não pode ser vertical.

Na próxima seção, será caracterizada a função exponencial.

3.5 Função Exponencial

A função exponencial de base $a > 0$, $a \neq 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, indicada por $f(x) = a^x$ é definida de modo a ter as seguintes propriedades para $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

2. $a^1 = a$;

3. $x < y \Longrightarrow a^x < a^y$ quando, $a > 1$ e

   $x < y \Longrightarrow a^y < a^x$ quando, $0 < a < 1$.

Se uma função f tem a propriedade 1) acima então f é identicamente nula ou é sempre positiva. De fato, se $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ e, digamos $f(x_0) = 0$ então, para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0,$$

logo f será identicamente nula. Por outro lado, se f não é identicamente nula então, como para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

obtemos que f é positiva sempre.

Portanto, devido à propriedade 1), é indiferente dizer que o contra-domínio de f é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$ entretanto, neste último caso, ganha-se a sobrejetividade de f.

Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tem as propriedades 1) e 2) então, $f(r) = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. De fato, provemos a afirmação para um número natural n. Temos

$$f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = f(1) \cdot f(1) \cdots f(1) = a \cdot a \cdots a = a^n.$$

Além disso, as propriedade 1) e 2) implicam $a^0 = 1$ pois $a^1 = a^{0+1} = a^0 \cdot a^1$, o que nos dá $a^0 = 1$. Se $n \in \mathbb{Z}$ então, como $1 = a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n}$, devemos ter $a^{-n} = 1/a^n$.

Seja agora $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ e vejamos como definir a^r. Note que para 1) valer, é preciso que

$$(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdots a^r = a^{r+r+\cdots+r} = a^{rn} = a^m.$$

Logo, a^r é o número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m. Pela definição de raiz, podemos escrever $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Tal definição não é ambígua pois, como $r = \frac{m}{n} = \frac{pm}{pn}$ para todo $p \in \mathbb{N}$, temos $\sqrt[n]{a^m} = a^r = a^{\frac{pm}{pn}} = \sqrt[pn]{a^{pm}}$.

Agora, sejam $r = \alpha/\beta$ e $s = \gamma/\delta$ com $\alpha,\ \gamma \in \mathbb{Z}$ e $\beta,\ \delta \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$. Note que $a^r = a^{\frac{\alpha}{\beta}} = a^{\frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta\delta}{\beta\delta}} = a^{\alpha\delta \cdot \frac{1}{\beta\delta}}$ e, analogamente, $a^s = a^{\frac{\gamma}{\delta}} = a^{\beta\gamma \cdot \frac{1}{\beta\delta}}$. Assim, como

$$\begin{aligned} a^{r+s} &= a^{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}} \\ &= a^{\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{\alpha\delta \cdot \frac{1}{\beta\delta}} \cdot a^{\beta\gamma \cdot \frac{1}{\beta\delta}} \\ &= (a^{\alpha\delta})^{\frac{1}{\beta\delta}} \cdot (a^{\beta\gamma})^{\cdot \frac{1}{\beta\delta}} \\ &= (a^{\alpha\delta} \cdot a^{\beta\gamma})^{\frac{1}{\beta\delta}} \\ &= (a^{\alpha\delta+\beta\gamma})^{\frac{1}{\beta\delta}} \\ &= a^{\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}}, \end{aligned}$$

concluímos o fato desejado.

Dessa forma, se $r = \frac{m}{n}$ é um número racional com $n \in \mathbb{N}$, então pela propriedade 1), temos $f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}$.

Portanto $f(r) = a^r$ é a única função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(r+s) = f(r) \cdot f(s)$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$. Lembremos que uma função $f : \mathbb{X} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chama-se:

- *crescente* quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

- *decrescente* quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Pela propriedade 3, temos que a função exponencial é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

O fato de f ser crescente ou decrescente é o que fará com que haja uma única maneira de definir o valor $f(x) = a^x$ para x irracional.

Antes porém, lembremos do fato de que se $a \neq 1$ então as potências a^r são densas em $\mathbb{R}^+$. Isto é, todo intervalo $0 < \alpha < \beta$, contém alguma potência a^r com $r \in \mathbb{Q}$.

Suponha que $a > 1$, o caso $0 < a < 1$ é similar. Então a^x tem a seguinte propriedade:

$$r < x < s, \quad \text{com } r, s \in \mathbb{Q} \Longrightarrow a^r < a^x < a^s.$$

Se existissem dois números reais diferentes, digamos $A < B$, para assumir o valor a^x, com a propriedade acima, teríamos

$$r < x < s, \quad r, s \in \mathbb{Q} \Longrightarrow a^r < A < B < a^s$$

e assim o intervalo [A, B] não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando a densidade mencionada acima.

Portanto, quando x é irracional, a^x é o (único) número real cujas aproximações por falta são as potências a^r, com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, com s racional maior do que x.

Ou seja, se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui as propriedades 1, 2 e 3 exigidas acima para ser uma função exponencial, então o valor $f(x)$ com x irracional é dado por $f(x) = \lim f(r_n)$, onde (r_n) é uma sequência (crescente ou decrescente) de números racionais tais que $\lim r_n = x$.

Definindo a^x para todo $x \in \mathbb{R}$, verifica-se que são válidas as propriedades 1, 2 e 3 enunciadas. Além disso, a função exponencial tem as propriedades a seguir:

4. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.*
5. *A função exponencial é contínua.*
6. *A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = a^x, a \neq 1$, é sobrejetiva.*

Estamos agora em condições de caracterizar a função exponencial. Temos o

Teorema 3.5.1. (Caracterização da Função Exponencial)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função crescente ou decrescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

(3) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Provaremos as implicações (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1). A fim de mostrarmos que (1) $\Longrightarrow$ (2), observemos inicialmente que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = \dfrac{m}{n}$, (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, como $nr = m$, podemos escrever

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m,$$

logo $f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$.

Assim, se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Suponhamos que f seja crescente, isto é, $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que $f(x) < a^x$. (O caso $f(x) > a^x$ é análogo.) Então, pela densidade das potências a^r, com r racional, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$. Ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que (1) $\Longrightarrow$ (2). Mostremos agora que (2) $\Longrightarrow$ (3), de fato, por hipótese, temos que, $f(x) = a^x$, logo

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y).$$

Falta mostrar que (3) $\Longrightarrow$ (1). Temos, por hipótese, que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Logo, para $n \in \mathbb{N}$, temos

$$f(nx) = f(x + x + \cdots + x) = f(x) \cdot f(x) \cdots f(x) = f(x)^n.$$

Para mostrar que $f(-nx) = f(x)^{-n}$ quando $n \in \mathbb{N}$, notemos que

$$f(-x) \cdot f(x) = f(-x+x) = f(0) = 1$$

implica $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Logo, como

$$\begin{aligned}
f(-nx) &= f(-x - x - \cdots - x) \\
&= f(-x) \cdot f(-x) \cdots f(-x) \\
&= \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdots \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x)^n} \\
&= f(x)^{-n}
\end{aligned}$$

concluímos a demonstração do teorema.

3.6 Progressões

Nesta seção, estudaremos as progressões aritméticas e geométricas.

3.6.1 Progressões Aritméticas

São comuns, no cotidiano, grandezas que sofrem aumentos iguais em intervalos de tempo iguais. Trataremos de sequências que representam tais tipos de grandezas, ou seja, de sequências $(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ nas quais cada termo é obtido do anterior por um aumento constante.

Uma *Progressão Aritmética (PA)* é uma sequência de números $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ na qual é constante a diferença entre cada termo a_{n+1} e o seu antecessor a_n. Essa diferença constante é chamada de razão e será representada por r. Assim, uma progressão aritmética de razão r é uma sequência (a_n) na qual $a_{n+1} - a_n = r$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.6.1. As sequências $(3, 7, 11, 15, ...)$ e $(10, 7, 4, 1, ...)$ são progressões aritméticas cujas razões valem respectivamente 4 e -3.

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ...)$, para avançar um termo, basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, por exemplo, $a_{12} = a_3 + 9r$, pois, ao passar de a_3 para a_{12}, avançamos 9 termos; $a_{10} = a_6 + 4r$, pois para passar de a_6 para a_{10} avançamos 4 termos; $a_5 = a_{17} - 12r$, pois retrocedemos 12 termos ao passar de a_{17} para a_5. De modo geral, temos

$$a_n = a_1 + (n-1)r,$$

pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos $n - 1$ termos.

Exemplo 3.6.2. Qual é a razão da progressão aritmética que se obtém inserindo 5 termos entre os números 4 e 22?

Temos $a_1 = 4$ e $a_7 = 22$. Como $a_7 = a_1 + 6r$, temos $22 = 4 + 6r$. Daí, $r = 3$.

Exemplo 3.6.3. O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem por aqui foi em 1986. Quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de Cristo? Em que ano foi sua primeira passagem na era cristã?

Seja a_1 o primeiro ano da passagem do cometa na Terra após o nascimento de Cristo. Como as passagens do cometa ocorreram nos anos $a_1, a_2, ..., a_{n-1} = 1910, a_n = 1986$, obtemos assim uma progressão aritmética de razão $r = 76$. Substituindo tais valores na expressão do termo geral, temos

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$1986 = a_1 + (n-1)76$$

$$a_1 = 2062 - 76n$$

Como $a_1 > 0$, segue que

$$2062 - 76n > 0 \Rightarrow n < \frac{2062}{76} = 27,13...$$

Portanto, o cometa Halley nos visitou 27 vezes na era cristã e sua primeira passagem por aqui após Cristo nascer foi no ano $a_1 = 2062 - 76 \cdot 27 = 10$.

Aos sete anos, o grande matemático Carl F. Gauss $(1777-1855)$ surpreendeu seu professor ao resolver um problema rapidamente. O professor pediu que ele calculasse a soma dos inteiros de 1 até 100. Em poucos minutos, Gauss anunciou que o valor da soma era 5050. A resposta estava correta e, curioso, o professor lhe perguntou como conseguira fazer o cálculo tão rapidamente. Gauss explicou-lhe que somara primeiramente $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$... Assim obtivera 50 somas iguais a 101 e a resposta era $50 \cdot 101 = 5050$.

Com base na ideia de Gauss, podemos calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer.

Teorema 3.6.4. *A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ é igual a*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração: Temos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ e, escrevendo de trás pra frente, $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1$. Daí,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Observe que, ao passar de um par de parênteses para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os termos entre parênteses são iguais ao primeiro, $(a_1 + a_n)$. Como são n parcelas, temos

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

ou seja,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Exemplo 3.6.5. Qual é o valor da soma dos 10 primeiros termos da progressão aritmética $3, 7, 11, 15, ...$?

Como $a_1 = 3$ e $r = 4$, temos $a_{10} = a_1 + 9r = 39$. Daí, segue que

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = (3 + 39) \cdot 5 = 210.$$

3.6.2 Progressões Geométricas

Uma *progressão geométrica* é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente é chamado de *razão* da progressão e é representado pela letra q. A razão q de uma progressão geométrica é simplesmente o valor $q = 1 + i$, onde i é a taxa de crescimento constante de cada termo para o seguinte.

Exemplo 3.6.6. As sequências $(2, 4, 8, 16, 32, ...)$ e $(81, 27, 9, 3, ...)$ são progressões geométricas cujas razões valem, respectivamente, $q_1 = 2$ e $q_2 = \frac{1}{3}$. Suas taxas de crescimento são respectivamente $i_1 = 1 = 100\%$ e $i_2 = -\frac{2}{3} \approx -66,6\%$.

Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ...)$, para avançar um termo, basta multiplicar pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante.

Por exemplo, $a_{10} = a_3q^7$, pois avançamos 7 termos ao passar de a_3 para a_{10}; $a_6 = \dfrac{a_{15}}{q^9}$, pois ao passar de a_{15} para a_6, retrocedemos 9 termos; de modo geral, $a_n = a_1q^{n-1}$, pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos $n - 1$ termos.

Exemplo 3.6.7. Qual a razão da progressão geométrica que se obtém inserindo 5 termos entre os números 2 e 1458?

Temos $a_1 = 2$ e $a_7 = 1458$. Como $a_7 = a_1q^6$, segue que

$$1458 = 2q^6 \text{ e } q = \pm 3.$$

Exemplo 3.6.8. A população de uma certa cidade é hoje de 200 mil habitantes. Sabendo que essa população cresce 2% ao ano, qual será, aproximadamente, a população dessa cidade daqui a 5 anos?

A população dessa cidade daqui a 5 anos será $P_5 = P_0 \cdot (1+i)^5 = 200000 \cdot (1+0,02)^5 \cong 221$ mil habitantes.

Teorema 3.6.9. *A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$, é igual a*

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Demonstração: Como $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$. Multiplicando por q, obtemos $qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_{n+1}$. Subtraindo, membro a membro e usando que $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$, temos

$$S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1},$$

donde,

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Exemplo 3.6.10. Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda casa, 4 pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada casa nova. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o número de grãos pedidos pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica $1, 2, 4, ...$. O valor dessa soma é

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1.$$

4 MATEMÁTICA FINANCEIRA

Neste capítulo trataremos de alguns dos principais conteúdos de Matemática Financeira. Falaremos sobre juros compostos, a fórmula das taxas equivalentes, séries uniformes e sistemas de amortização. Para mais detalhes sobre estes assuntos sugerimos [17] e [18].

4.1 Juros Compostos

Conforme comentamos no final da Seção 3.3, as funções exponenciais são importantes na modelagem de problemas do mundo real. Especificamente em nosso trabalho, elas servem para estudar progressões geométricas que, por sua vez, desempenharão papel importante a partir de agora.

Nesta seção, veremos a relação de empréstimo que constitui a operação básica da matemática financeira.

Um capital C (chamado de principal) é emprestado a alguém por um certo período de tempo, e após esse período, recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma espécie de imposto J (chamado de juro) pelo empréstimo. O valor recebido de volta, ou seja, a soma $C + J$ é chamado de montante e é representado por M. A taxa de crescimento do capital $i = \dfrac{J}{C}$ será sempre referida ao período da operação e é chamada de taxa de juros.

Exemplo 4.1.1. Uma pessoa tomou um empréstimo de 200 reais, a juros de taxa de 5% ao mês. Após um mês, a dívida dessa pessoa será acrescida de $0,05 \cdot 200$ reais de juros (pois $J = iC$), passando a 210 reais. Se essa pessoa e seu credor concordarem em adiar a liquidação da dívida por mais um mês, mantida a mesma taxa de juros, o empréstimo será quitado, dois meses depois de contraído, por $220,5$ reais, pois os juros relativos ao segundo mês serão de $0,05 \cdot 210$ reais $= 10,5$ reais.

Os juros calculados conforme o exemplo anterior são chamados de *juros compostos.* Mais precisamente, no regime de juros compostos, os juros em cada período são calculados sobre a dívida do início desse período.

Teorema 4.1.2. *No regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $C_n = C_0(1+i)^n$.*

Demonstração: Calculando o montante C_n produzido por um capital C_0, aplicado à taxa i ao período, no fim de n períodos, temos:

1º período: $C_1 = C_0 + iC_0 = C_0(1+i)$

2º período: $C_2 = C_1 + iC_1 = C_1(1+i) = C_0(1+i)\cdot(1+i) = C_0(1+i)^2$

3º período: $C_3 = C_2 + iC_2 = C_2(1+i) = C_0(1+i)^2\cdot(1+i) = C_0(1+i)^3$

Note que a sequência $(C_0, C_1, C_2, ...)$ é uma progressão geométrica de razão $1+i$. Logo, para n períodos, temos

$$C_n = C_0(1+i)^n.$$

Exemplo 4.1.3. João investe 300 reais a juros de 4% ao mês. Qual será o montante de João cinco meses depois?
$C_5 = C_0(1+i)^5 = 300(1+0,04)^5 = 365,00$ reais.

Um fato importante é percebermos que o valor de uma quantia depende da época à qual ela está referida. Por exemplo, se eu consigo fazer meu dinheiro render 5% ao mês, tanto faz eu pagar R\$ 1000,00 hoje, como R\$ 1050,00 daqui a um mês. É mais vantajoso pagar R\$ 1025,00 daqui a um mês do que pagar R\$ 1000,00 agora. Assim como é mais vantajoso pagar R\$ 1000,00 agora do que pagar R\$ 1100,00 daqui a um mês. Isso ilustra o deslocamento de quantias ao longo do tempo o que constitui o principal problema em Matemática Financeira.

O *Teorema 4.1.2* diz precisamente que para obter o valor futuro de uma quantia, basta multiplicá-la por $(1+i)^n$ e para obter o valor presente de uma quantia futura, basta dividi-la por $(1+i)^n$.

Exemplo 4.1.4. Mauro tomou um empréstimo de R\$ 500,00 a juros mensais de 5%. Dois meses após, Mauro pagou R\$ 250,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?
Os esquemas de pagamento a seguir são equivalentes. Logo, R\$ 500,00, na data 0, valem o mesmo que R\$ 250,00 dois meses após, mais um pagamento igual a P, na data 3.

Figura 1: Esquemas de pagamento.

Fonte: Autor.

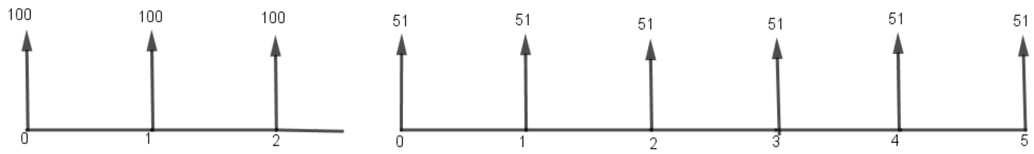
Igualando os valores, na mesma época (0, por exemplo), dos pagamentos nos dois esquemas, obtemos

$$500 = \frac{250}{(1+0,05)^2} + \frac{P}{(1+0,05)^3}.$$

Daí, $P \cong 316,31$ reais.

Exemplo 4.1.5. Ana tem duas opções de pagamento na compra de uma mesa: Três prestações mensais de R\$ 100,00 cada, ou seis prestações mensais de R\$ 51,00 cada. Se o dinheiro vale 2% ao mês para Ana, qual opção de pagamento é a mais vantajosa para ela?

Figura 2: Outro esquema de pagamento.



Fonte: Autor.

Para comparar, determinaremos o valor dos conjuntos de pagamentos na mesma época, por exemplo na época 2.

$V_1 = 100 \cdot (1+0,02)^2 + 100 \cdot (1+0,02) + 100 = 306,04$

$V_2 = 51 \cdot (1+0,02)^2 + 51 \cdot (1+0,02) + 51 + \dfrac{51}{(1+0,02)} + \dfrac{51}{(1+0,02)^2} + \dfrac{51}{(1+0,02)^3} \cong 303,16$

Ana deve preferir o pagamento em seis prestações.

Exemplo 4.1.6. Marcos tem três opções de pagamento na compra de um par de tênis:

1. À vista, com 10% de desconto.

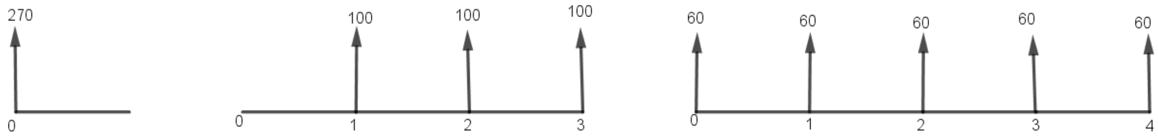
2. Em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra.

3. Em cinco prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual a melhor opção para Marcos, sabendo que o dinheiro vale, para ele, 5% ao mês?

Fixando o preço em 300, temos os três esquemas a seguir

Figura 3: Comparando três esquemas de pagamento



Fonte: Autor.

Comparando os valores na época 0, obtemos

$$
\begin{aligned}
V_1 &= 270. \\
V_2 &= \frac{100}{(1+0,05)} + \frac{100}{(1+0,05)^2} + \frac{100}{(1+0,05)^3} \cong 272,32. \\
V_3 &= 60 + \frac{60}{(1+0,05)} + \frac{60}{(1+0,05)^2} + \frac{60}{(1+0,05)^3} + \frac{60}{(1+0,05)^4} \cong 272,76.
\end{aligned}
$$

A melhor alternativa para Marcos é a compra à vista.

É interessante observar que a melhor alternativa para uma pessoa pode não ser a melhor alternativa para outra. Por exemplo, vamos analisar as situações de duas pessoas: João e José.

Se João compra a prazo, tendo dinheiro para comprar à vista, é provável que ele invista o dinheiro que seria usado na compra à vista, em uma caderneta de poupança que lhe renderia, digamos, 2% ao mês. Então, para ele seria indiferente comprar à vista ou a prazo com juros de 2% ao mês.

Se José tem o costume de emprestar dinheiro informalmente, por exemplo, ele poderia fazer render o dinheiro a, digamos, 8% ao mês. Então, seria atrativo para José comprar a prazo com juros de 5% ao mês.

Logo, o dinheiro tem valores diferentes para João e José. A taxa de juros que representa o valor do dinheiro para cada pessoa e que é, em suma, a taxa à qual a pessoa consegue fazer render seu capital, é chamada de *taxa mínima de atratividade*. O motivo do nome é claro: para essa pessoa, um investimento só é atrativo se render, no mínimo, a essa taxa.

4.2 A Fórmula das Taxas Equivalentes

Apresentaremos a seguir o importante

Lema 4.2.1. (Fórmula das Taxas Equivalentes) *Se a taxa de crescimento de uma quantia G_0 relativamente ao período de tempo T é igual a I e se $T = nt$ então a taxa de crescimento i de G_0 relativamente ao período de tempo t é $I = (1+i)^n - 1$.*

Demonstração: Após um período de tempo T, G_0 passará a ser $G_0(1+I)^1$. Como $T = nt$, após n períodos de tempo t, a mesma quantia também será igual a $G_0(1+i)^n$, donde segue o resultado.

Exemplo 4.2.2. A taxa anual de juros equivalente a 5% ao mês é I tal que $1 + I = (1 + 0,05)^{12}$. Daí, $I \approx 0,795 = 79,5\%$ ao ano.

Achar que juros de 5% ao mês equivalem a juros de 60% constitui um erro comum. Taxas como 5% ao mês e 60% ao ano são chamadas de taxas proporcionais, pois a razão entre elas é igual à razão entre os períodos aos quais elas se referem.

Taxas proporcionais, em geral, não são equivalentes.

Exemplo 4.2.3. As taxas de 10% ao mês, 30% ao trimestre e 120% ao ano são taxas proporcionais.

Anunciar taxas proporcionais pode levar pessoas com menos conhecimentos matemáticos a erros. Uma frase do tipo "60% ao ano, com capitalização mensal" significa que a taxa usada na operação não é a taxa de 60% anunciada e sim a taxa mensal que lhe é proporcional. Logo, a expressão "60% ao ano, com capitalização mensal" significa "5% ao mês". Pode-se pensar que os juros sejam de 60% ao ano, o que não é verdade. Vimos no *Exemplo 4.2.2*, que esses juros são de $79,5\%$ ao ano.

Exemplo 4.2.4. Fábio investe seu dinheiro a juros de 12% ao ano com capitalização mensal. Qual a taxa anual de juros à qual está investido o capital de Fábio?

Solução: O dinheiro de Fábio está investido a juros de taxa $i = 1\%$ ao mês. A taxa anual equivalente é I tal que $1 + I = (1 + 0,01)^{12}$. Daí, $I = 0,1268 = 12,68\%$ ao ano.

A (falsa) taxa de 12% ao ano é dita taxa *nominal*. A taxa (verdadeira) de $12,68\%$ ao ano é dita taxa *efetiva*.

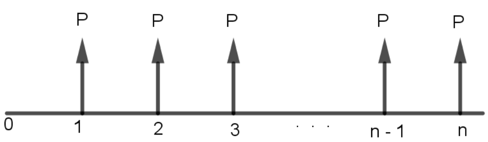
4.3 Séries Uniformes

Uma coleção de quantias (chamadas de pagamentos ou termos), referidas a épocas diversas, é denominada de série ou renda. Se esses pagamentos forem iguais e estiverem igualmente distribuídos no tempo, a série é dita uniforme.

Teorema 4.3.1. *Se i é a taxa de juros, então o valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é igual a* $A = P\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

Demonstração:

Figura 4: Série uniforme



Fonte: Autor.

O valor da série na época 0 é

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n},$$

que é a soma de n termos de uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{1+i}$. Daí, temos

$$A = \frac{P}{1+i}\frac{1-(\frac{1}{1+i})^n}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{P}{1+i}\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{\frac{i}{1+i}} = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Corolário 4.3.2. *O valor de uma série uniforme na época do último pagamento é*

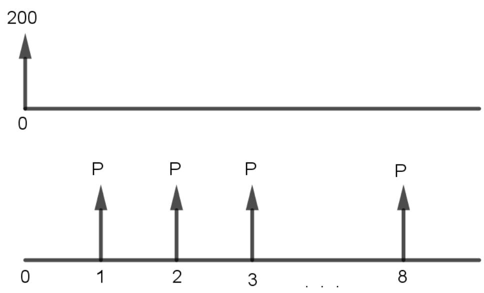
$$F = P\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Demonstração: De fato, pelo *Teorema 4.3.1*, temos

$$F = A(1+i)^n = P\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Exemplo 4.3.3. Determine o valor das prestações de um bem, cujo valor é R\$ $200,00$, que é vendido em 8 prestações mensais iguais em que a primeira prestação é paga um mês após a compra e a taxa de juros é de 5% ao mês.
Igualando os valores na época 0 (essa é a escolha natural da data de comparação: um tempo antes do primeiro termo da série), obtemos:

Figura 5: Pagamento em 8 parcelas.



Fonte: Autor

$$\begin{aligned} 200 &= P\frac{1-(1+0,05)^{-8}}{0,05} \\ P &= 200\frac{0,05}{1-(1+0,05)^{-8}} = 14,77. \end{aligned}$$

As prestações são de R\$ $14,77$.

Exemplo 4.3.4. Determine o valor das prestações de um bem, que à vista custa R\$ $300,00$, e é vendido em 5 prestações mensais iguais, antecipadas (isto é, a primeira é paga no ato da compra), com taxa de juros de 5% ao mês.
Vamos igualar os valores na época -1 (essa escolha é muito conveniente pois dispomos de uma fórmula que calcula diretamente o valor da série nessa época), temos:

$$\begin{aligned} \frac{300}{1+0,05} &= P\frac{1-(1+0,05)^{-5}}{0,05} \\ P &\approx 66,00. \end{aligned}$$

4.4 Sistemas de Amortização

Nesta seção, estudaremos os sistemas de amortização. Ao pagarmos uma dívida parceladamente, cada pagamento é formado por duas partes. Uma que corresponde aos juros e outra que diminui ou amortiza a dívida. O valor pago em cada parcela pode variar a depender do que foi combinado entre credor e devedor. Para ilustrar, vejamos o

Exemplo 4.4.1. Um empréstimo de R\$ $1000,00$, foi feito a uma taxa de 10% ao mês. Quitou-se esse empréstimo em quatro meses, pagando os juros devidos em cada mês e amortizando 25% da dívida no primeiro mês, 25% no segundo mês e 30% e 20% nos dois últimos meses.

Na planilha a seguir, A_k, J_k, P_k *e* D_k são, respectivamente, a parcela de amortização, a parcela de juros, a prestação e o estado da dívida (isto é, o valor da dívida após o pagamento da prestação) na época k.

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	-	-	-	1000
1	350	250	100	750
2	325	250	75	500
3	350	300	50	200
4	220	200	20	-

Leia cada linha na ordem A_k, D_k, J_k *e* P_k. Analisemos, por exemplo, a linha correspondente a $k = 1$. Temos que a amortização é $A_1 = 250$, $D_1 = 1000 - 250 = 750$, os juros $J_1 = 100$, o que gera a parcela $P_1 = A_1 + J_1 = 350$.

Veremos agora os sistemas de amortização mais usados atualmente pelas instituições financeiras. Vamos fazer um estudo sobre o sistema de amortização constante (SAC), o sistema francês de amortização, também chamado de Tabela Price (Richard Price foi um economista inglês), caracterizado por apresentar prestações constantes, e o sistema de amortização misto (SAM), que é uma combinação entre o sistema francês de amortização e o SAC.

Teorema 4.4.2. *No SAC, se n é o número de pagamentos e i é a taxa de juros, então*

$$A_k = \frac{D_0}{n},\ D_k = \frac{n-k}{n}D_0,\ J_k = iD_{k-1},\ P_k = A_k + J_k.$$

Demonstração: Se a dívida D_0 é amortizada em n quotas iguais, cada quota é igual a

$$A_k = \frac{D_0}{n}.$$

O estado da dívida, após k amortizações, é

$$D_k = D_0 - k\frac{D_0}{n} = \frac{n \cdot D_0 - k \cdot D_0}{n} = \frac{n-k}{n}D_0.$$

Obviamente que $J_k = iD_{k-1}$ e $P_k = A_k + J_k$.

Exemplo 4.4.3. Uma dívida de 1 000 reais, com juros de 4% ao mês, é paga em 5 meses, pelo SAC. Faça a planilha de amortização.

Cada amortização será de $\frac{1}{5}$ da dívida inicial, pois as amortizações são iguais. A planilha é, portanto:

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	-	-	-	1000
1	240	200	40	800
2	232	200	32	600
3	224	200	24	400
4	216	200	16	200
5	208	200	8	-

Leia cada linha na ordem A_k, D_k, J_k *e* P_k.

Teorema 4.4.4. *No sistema francês de amortização, se n é o número de pagamentos e i é a taxa de juros, então*

$$\begin{aligned} P &= D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}, \\ D_k &= D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}, \\ J_k &= iD_{k-1},\ A_k = P_k - J_k. \end{aligned}$$

Demonstração: A primeira fórmula é simplesmente o *Teorema 4.3.1*. Quanto à segunda fórmula, observe que D_k é a dívida que será liquidada, postecipadamente, por $n-k$ pagamentos sucessivos a P_k. Portanto, novamente pelo *Teorema 4.3.1*, temos

$$D_k = P_k \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}.$$

Substituindo o valor de P_k, obteremos a segunda fórmula. No caso das duas últimas fórmulas, obviamente que, $J_k = iD_{k-1}$ e $A_k = P_k - J_k$.

Exemplo 4.4.5. Vamos fazer uma planilha de amortização com os valores e condições do *Exemplo 4.4.3*, usando o sistema francês de amortização.

No sistema francês, as prestações são constantes. Então, temos que

$$P = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 1000 \frac{0,04}{1-1,04^{-5}} = 224,63.$$

A planilha é, portanto:

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	-	-	-	1000
1	$224,63$	$184,63$	40	$815,37$
2	$224,63$	$192,01$	$32,62$	$623,36$
3	$224,63$	$199,70$	$24,93$	$423,66$
4	$224,63$	$207,68$	$16,95$	$215,98$
5	$224,63$	$215,98$	$8,65$	-

No Sistema de Amortização Misto (SAM) as prestações são calculadas fazendo-se a média aritmética simples entre os valores encontrados para as prestações calculadas pela Tabela Price e pelo SAC. Sendo assim, pelo SAM, em cada período, o juro, a amortização e o saldo devedor são as médias aritméticas simples entre os elementos correspondentes da Tabela Price e do SAC.

Exemplo 4.4.6. Façamos uma planilha de amortização com valores e condições iguais aos dos *Exemplos 4.4.3* e *4.4.5*, usando o SAM.

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	-	-	-	1000
1	$232,32$	$192,32$	40	$807,68$
2	$228,31$	$196,00$	$32,31$	$611,68$
3	$224,32$	$199,85$	$24,47$	$411,83$
4	$220,31$	$203,84$	$16,47$	$207,99$
5	$216,32$	$207,99$	$8,33$	-

Note que o valor da primeira prestação do SAM é menor que a do SAC e maior do que a da Tabela Price.

É natural surgir o questionamento sobre a possibilidade de um sistema de amortização ser mais vantajoso do que o outro. Vamos fazer uma comparação entre o SAC e o sistemas francês, usando como referência os *Exemplos 4.4.3* e *4.4.5*.

Note que no SAC o valor total pago foi de R\$ $1120,00$, já no sistema francês esse valor foi de R\$ $1123,15$. No entanto, a primeira parcela no SAC foi de R\$ $240,00$, já no sistema francês foi de R\$ $224,63$. Portanto, no SAC há uma amortização maior da dívida, e, consequentemente são pagos menos juros, o que leva a uma economia significativa no final. No nosso exemplo essa economia foi de R\$ $3,15$; um valor relativamente pequeno, mas, lembre-se que, usamos uma situação de um empréstimo de R\$ $1000,00$ para ser quitado em 5 meses. Imagine, por exemplo, o caso de um empréstimo de R\$ $80\,000,00$ para ser quitado em 20 anos, com uma taxa de 2% ao mês. Neste caso, usando a Tabela Price serão pagos $387\,343,20$ reais, enquanto usando o SAC, $272\,801,11$ reais, a economia chega a $114\,542,09$ reais, um valor considerável.

Observemos que no SAC o valor das primeiras prestações são bem maiores comparadas ao sistema francês. Com isso, conclui-se que, se o tomador do empréstimo puder suportar pagar uma prestação maior no início, o sistema que lhe trará mais vantagens é o SAC.

A comparação entre as dívidas D_k, os juros J_k, as parcelas P_k e, consequentemente a amortização A_k dos sistemas SAC e Price pode ser encontrada com detalhes em [11], páginas 47 a 51.

Exemplo 4.4.7. Em um mês cuja inflação foi de 2%, José investiu seu capital a juros de 5% ao mês. Se o dinheiro de José render 5%, digamos em janeiro, não significa que ao fim de janeiro, José poderá comprar 5% de objetos a mais do que comprava no início de janeiro. É preciso descontar a inflação pois mesmo passando a ter mais dinheiro no bolso, este sofreu uma desvalorização, isto é, seu poder de compra foi diminuído. A taxa de 5% é chamada de taxa nominal de juros. Se no início de janeiro, José podia comprar com seu capital C, x artigos de preço unitário igual a p. No fim do mês, o capital passou a ser $1,05C$ e o preço unitário passou a ser $1,02p$. Logo, José poderá comprar

$$\frac{1,05C}{1,02p} \approx 1,0294x \text{ artigos}$$

O poder de compra de José aumentou em aproximadamente $2,94\%$ nesse mês.

A taxa de $2,94\%$ ao mês, que se refere ao crescimento do poder de compra de José, é chamada de *taxa real de juros.* Em geral, dados a taxa nominal de juros i e a taxa de inflação j, a taxa real de juros r pode ser calculada por meio da fórmula a seguir, (veja [3], página 68.)

$$r = \frac{1+i}{1+j} - 1.$$

5 MATEMÁTICA FINANCEIRA NO COTIDIANO

A matemática financeira é encontrada em várias situações do nosso dia a dia, pois em inúmeros momentos fazemos operações com dinheiro, principalmente nos casos de compras, vendas, empréstimos, financiamentos, etc. Neste capítulo abordaremos o uso da matemática financeira nessas situações cotidianas, trazendo casos reais onde a mesma é aplicada.

5.1 Comércio

Nesta seção iremos mostrar como a matemática financeira pode ser usada no comércio, principalmente em situações de compra e venda de produtos e/ou mercadorias, bem como no auxílio de decisões do tipo, se é mais vantajoso uma compra ser feita com pagamento à vista ou parcelado e, ainda, fazermos a análise de preços possivelmente abusivos passados ao consumidor.

Vejamos a seguir algumas situações cotidianas de comércio em que a matemática financeira nos auxilia a tomar decisões e fazer análises.

Exemplo 5.1.1. Em um site de uma loja encontramos a oferta de uma caixa de som portátil por R$ $449,00$ podendo ser paga nas seguintes condições:

Condição 1: À vista, com desconto, pagamento único, no boleto, de R$ $426,55$.

Condição 2: Parcelado, em até 7 prestações mensais e iguais, sem juros, sendo a primeira prestação um mês após a compra.

Condição 3: Parcelado, em 8 prestações mensais de R$ $61,42$ cada, com juros de $1,29\%$ ao mês, sendo a primeira prestação um mês após a compra.

Condição 4: Parcelado, em 9 prestações mensais de R$ $52,85$ cada, com juros de $0,5\%$ ao mês, sendo a primeira prestação um mês após a compra.

Condição 5: Parcelado, em 10 prestações mensais de R$ $47,68$ cada, com juros de $0,5\%$ ao mês, sendo a primeira prestação um mês após a compra.

Observe que mesmo causando estranheza, os juros nas condições 4 e 5 são menores do que na condição 3, mesmo nesta a dívida sendo quitada em menos tempo. Vamos analisar essa situação do ponto de vista do consumidor, calculando o percentual de desconto no pagamento à vista e se a taxa de juros anunciada nos casos de pagamento parcelado condiz com a realidade. Analisemos cada condição de pagamento:

Na *Condição 1*, o pagamento é à vista, o consumidor recebe um desconto de

$449,00 - 426,55 = 22,45$ reais, em percentual, temos

$$\begin{aligned} 449 \cdot \frac{x}{100} &= 22,45 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Portanto, o consumidor recebe um desconto de 5% no pagamento à vista.

Na *Condição 2*, a loja oferece um pagamento parcelado em até 7 prestações mensais e iguais, sem juros. Seja n o número de prestações escolhido pelo consumidor, temos que $1 \leq n \leq 7$ e o valor de cada prestação P é dado por $P = \frac{449}{n}$, sem incidência de juros.

Na *Condição 3*, o consumidor opta por pagar o produto em 8 prestações mensais de R\$ 61,42 cada, com incidência de juros de 1,29% ao mês. Neste caso, podemos utilizar os conhecimentos de matemática financeira para verificar se a informação do site quanto à taxa de juros está correta. Substituindo os valores na fórmula de séries uniformes, temos

$$\begin{aligned} 449 &= 61,42 \cdot \frac{1-(1+i)^{-8}}{i} \\ 7,31 &= \frac{1-(1+i)^{-8}}{i} \\ i &\approx 0,02. \end{aligned}$$

Portanto, a taxa de juros incidente nessa condição é de, aproximadamente, 2% ao mês, o que torna falsa a informação apresentada no site. Fiquemos curiosos para saber de onde veio esse valor de taxa igual a 1,29% ao mês. Verifiquemos se o cálculo da taxa de juros foi feito equivocadamente levando-se em consideração o montante da dívida $M = 8 \cdot 61,42 = 491,36$ e fazendo-se a substituição na fórmula de juros compostos, resultando

$$\begin{aligned} 491,36 &= 449 \cdot (1+i)^8. \\ i &\approx 0,0129 = 1,29\%. \end{aligned}$$

Nas *Condições* 4 e 5, encontramos o mesmo equívoco quanto à informação da taxa de juros. Fazendo cálculos análogos aos feitos na condição 3, encontramos as taxas de juros incidentes iguais a, aproximadamente, 1,2% ao mês na condição 4 e, aproximadamente, 1,1% ao mês na condição 5. Vemos que a melhor opção para o consumidor é o pagamento à vista.

Em situações de compra de produtos, o pagamento à vista, sempre que possível, é uma boa opção, pois neste pagamento o consumidor pode obter descontos e não paga valores referentes a juros. Mas isso não quer dizer que o pagamento parcelado seja sempre uma opção ruim. Se o consumidor possui o capital para pagar determinado produto à vista, mas opta por investir esse capital à uma taxa de juros superior a taxa de juros que pagaria com o parcelamento, essa opção seria mais vantajosa do que o pagamento à vista. Por exemplo, se no *Exemplo 5.1.1* o consumidor investisse o dinheiro à uma taxa de 3% ao mês, a opção por pagar a caixa de som portátil de forma parcelada seria a melhor. Daí a importância de conhecer a real taxa de juros em qualquer situação de parcelamento.

A Petrobras, desde meados de fevereiro de 2018, passou a divulgar os preços, sem tributos, do diesel e da gasolina repassados às distribuidoras. Essa medida ajuda os consumidores a fazerem uma análise e/ou uma comparação sobre o preço do combustível que chega às distribuidoras e o preço que chega ao bolso do consumidor.

Exemplo 5.1.2. O quadro a seguir apresenta os preços médios sem tributos dos combustíveis (gasolina e diesel) que chegaram às distribuidoras no período de 10/07/2018 à 14/07/2018.

Preços médios de diesel e gasolina

Início da vigência	Gasolina (R$/litro)	Diesel (R$/litro)
10/07/2018	2,0249	2,0316
11/07/2018	2,0369	2,0316
12/07/2018	2,0527	2,0316
13/07/2018	2,0326	2,0316
14/07/2018	1,9970	2,0316

Fonte: Petrobras

Note que no período observado houve uma queda de $2,0249 - 1,9970 = 0,0279$ reais no preço da gasolina. Em termos percentuais isso equivale a uma redução de, aproximadamente, $1,38\%$. No caso do preço do diesel, não houve alterações.

Com essas informações e um pouco de matemática financeira podemos calcular a diferença de preços entre a chegada às distribuidoras e o pago pelo consumidor. Nesse período foi observado o valor para o consumidor em dois postos de combustíveis. Quanto à gasolina, no *Posto A* não houve variação de preços, o litro estava sendo comercializado a R$ 4,68. No *Posto B*, também não houve variação de preço, no entanto, o litro da gasolina estava sendo comercializado a R$ 4,79. Vamos calcular a diferença de preços em ambos os postos, tomando como referência o dia 14/07/2018.

No *Posto A* a diferença foi de $4,68 - 1,9970 = 2,683$ reais. Em porcentagem, temos

$$\begin{aligned} 1,9970 \cdot \frac{x}{100} &= 4,68 \\ x &\approx 234,35. \end{aligned}$$

Portanto, no *Posto A*, o preço de venda ao consumidor é, aproximadamente, $234,35\%$ do preço de entrada nas distribuidoras.

No *Posto B* a diferença foi de $4,79 - 1,9970 = 2,7930$ reais. Em porcentagem, temos

$$\begin{aligned} 1,9970 \cdot \frac{x}{100} &= 4,79 \\ x &\approx 239,86 \end{aligned}$$

. Logo, no *Posto B* o preço de venda ao consumidor é de, aproximadamente, $239,86\%$ do preço de entrada nas distribuidoras.

No que se refere ao preço do diesel, no *Posto A*, o litro estava sendo comercializado a R\$ $3,68$ e no *Posto B* a R\$ $3,72$. Fazendo cálculos análogos aos feitos com o preço da gasolina, concluímos que, no *Posto A* o diesel pago pelo consumidor é, aproximadamente, $181,14\%$ do preço de chegada nas distribuidoras e no *Posto B*, esse percentual é de, aproximadamente, $1,83\%$.

Nas considerações e cálculos feitos anteriormente, em nenhum momento levou-se em conta os tributos que incidem sobre os combustíveis até chegarem aos postos, mas cabe ao consumidor fazer uma análise e uma reflexão se o posto de onde ele é cliente está sendo coerente ou está acontecendo uma situação de abuso no que diz respeito aos preços cobrados.

5.2 Operações com Instituições Financeiras

Nesta seção vamos estudar situações onde a matemática financeira aparece com maior frequência. Nas operações com instituições financeiras é essencial o uso da matemática financeira, pois, um bom conhecimento sobre esse assunto, com certeza, ajudará a tomarmos decisões acertadas, evitando possíveis endividamentos.

Antes de vermos algumas situações sobre as operações com instituições financeiras precisamos falar um pouco sobre a taxa Selic, pois esta taxa influencia nessas operações.

A *taxa Selic* é a média de juros que o governo brasileiro paga por empréstimos tomados dos bancos. Essa taxa é usada pelo governo como instrumento de controle da inflação, se a Selic está alta, diminui-se a circulação de dinheiro e consequentemente haverá menos procura por serviços e produtos à venda. É a Selic que dá a medida das outras taxas de juros que são usadas no país, como, da poupança, dos cartões de crédito e do crediário.

Vejamos a seguir situações de aplicações da matemática financeira nas operações com bancos e/ou outras instituições financeiras.

Exemplo 5.2.1. A caderneta de poupança é o investimento favorito dos brasileiros, talvez por apresentar vantagens, como, segurança, liquidez imediata, facilidade de investimento e não incidência de imposto de renda.

A remuneração do valor da caderneta varia conforme a data em que foi feito o depósito da seguinte forma:

- Depósitos feitos até 3 de maio de 2012: $0,5\%$ ao mês + TR (taxa referencial, calculada a partir de uma média ponderada dos juros diários praticados no Certificado de Depósitos Bancários.)
- Depósitos feitos a partir de 4 de maio de 2012: Se a Selic estiver igual ou abaixo de $8,5\%$ o rendimento será de 70% da Selic + TR, se estiver acima, o rendimento é de $0,5\%$ ao mês + TR.

Mas será que a poupança é um investimento cujo retorno financeiro é atrativo?

Para responder esse questionamento, vamos tomar como exemplo o ano de 2017, que foi, nos últimos anos, um dos melhores para quem investe na poupança. A rentabilidade total, sem o desconto da inflação, em 2017 foi de $6,93\%$ ao ano, ou seja, alguém que investiu, por exemplo, R\$ $1\,000,00$ na poupança em 1 de janeiro de 2017, ao final do ano obteve como retorno um montante

$$\begin{aligned} M &= 1000 \cdot (1 + 0,0693)^1 \\ &= 1069,30 \text{ reais.} \end{aligned}$$

No entanto, o ganho de R\$ $69,30$ não representa o ganho real do investidor, pois precisamos levar em consideração a inflação daquele ano, que foi de $2,95\%$ ao ano, isso significa que, para comprar o que se comprava com R\$ $1\,000,00$ no inicio do ano, ao final do ano precisava-se de $1000+\frac{2,95}{100}\cdot 1000 = 1029,50$ reais. Logo, o ganho real, em porcentagem, para quem investiu na caderneta de poupança em 2017 foi de, aproximadamente, $3,88\%$ ao ano.

O que podemos concluir é que o ganho da caderneta de poupança não é tão atrativo, pois a inflação pode diminuí-lo bastante, ou até mesmo, ultrapassá-lo, como aconteceu, por exemplo, no ano de 2015, onde o ganho real da caderneta de poupança foi de $-2,4\%$ ao ano.

O cartão de crédito atualmente é usado por milhões de pessoas no mundo, trata-se de uma forma prática de concentrar a maioria das despesas em uma única fatura. Além disso, proporciona mais segurança, pois a quantidade de dinheiro em espécie que uma pessoa precisa portar diminui consideravelmente. Muitas pessoas optam por usar apenas o cartão de crédito, já que este é aceito atualmente na maioria dos estabelecimentos.

As vantagens do cartão de crédito são inegáveis, no entanto, é preciso ter cuidado com o uso dessa ferramenta. Se não usado com responsabilidade o cartão de crédito pode complicar financeiramente o usuário, pois os juros incidentes sobre parcelamentos ou atrasos são altíssimos. O pagamento total da fatura até o vencimento é sempre a melhor opção, pois, neste caso, não haverá incidência de juros.

Vamos analisar a seguinte situação que retrata um caso de cliente que não pôde pagar o valor total da fatura do cartão de crédito até o vencimento.

Antes, temos a seguinte definição:

Definição 5.2.2. *A taxa que considera todas as despesas e encargos incidentes sobre operações de crédito e de arrendamento mercantil financeiro, contratados ou ofertados por pessoa física, microempresas ou empresas de pequeno porte é denominada Custo Efetivo Total (CET).*

Exemplo 5.2.3. Um usuário de cartão de crédito percebe que não poderá quitar a fatura do cartão até o vencimento. O valor da fatura é de R\$ $852,39$; o cliente escolherá a opção de efetuar o pagamento mínimo da fatura, que é 15% do valor total, e parcelar o restante em 12 prestações mensais e iguais. Para esse tipo de operação, ele verificou na fatura que o CET é de 14% ao mês. Qual será o valor de cada prestação mensal?

O pagamento mínimo será de $\frac{15}{100} \cdot 852,39 = 127,86$ reais, logo o valor financiado será de $852,39 - 127,86 = 724,53$ reais. Como a taxa de juros sobre a operação é de 14% ao mês, seja P o valor de cada prestação mensal, temos

$$\begin{aligned} 724,53 &= P \cdot \frac{1-(1+0,14)^{-12}}{0,14} \\ P &= 128,00. \end{aligned}$$

Portanto, cada parcela mensal será de R\$ $128,00$.

Para se ter uma ideia da dimensão dos encargos, note que a fatura inicialmente de $852,39$ reais, após o período do parcelamento passou a ter um custo de $127,86+12\cdot 128 = 1663,86$ reais para o cliente, quase o dobro!

Uma prática comum é recorrermos aos bancos quando queremos adquirir bens como, imóveis ou veículos. Nesses casos, o banco financia parte ou todo o valor do bem, mas precisamos ficar atentos aos juros incidentes nesses financiamentos, nem sempre a taxa de juros ofertada é a taxa real que está sendo cobrada, isso ocorre porque, na maioria dos casos, o banco não informa os valores de IOF (imposto sobre operações financeiras) e encargos extras. Vejamos a seguinte situação.

Exemplo 5.2.4. Um carro é vendido na concessionária por R\$ $42\ 000,00$. Suponha que alguém queira comprar esse carro mas dispõe de apenas R\$ $21\ 000,00$. Tal valor será dado como entrada, o restante será financiado. Um banco, oferece a proposta de financiamento dos R\$ $21\ 000,00$ que faltam em 24 parcelas mensais iguais a R\$ $1048,01$ com juros de $1,27\%$ ao mês. Vamos usar a matemática financeira para verificar se nesta proposta já estão inclusos todos os encargos.

Usando a taxa de juros da proposta, vamos verificar se os valores da série e o financiado são os mesmos. Seja A o valor da série uniforme, temos

$$A = 1048,01 \cdot \frac{1-(1+0,0127)^{-24}}{0,0127}$$

$$A = 21563,66.$$

Ora, percebemos que o valor encontrado não é igual ao valor financiado, isso nos dá um indício que o CET não é $1,27\%$ ao mês. Vamos verificar qual é a real taxa de juros neste financiamento. Seja i a taxa de juros, temos

$$\begin{aligned} 21000 &= 1048,01 \cdot \frac{1-(1+i)^{-24}}{i} \\ i &\approx 0,01497. \end{aligned}$$

Logo, a real taxa de juros paga no financiamento é de, aproximadamente, $1,497\%$ ao mês.

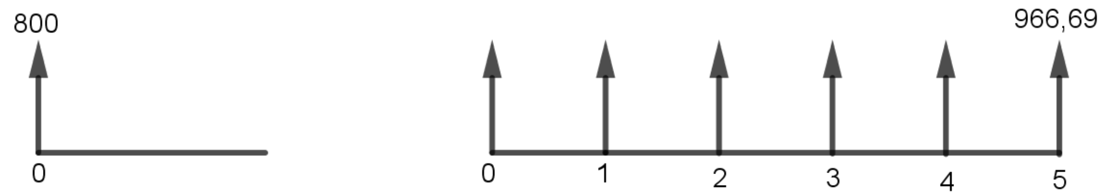
Portanto, fica claro que em um financiamento precisamos observar o CET e não a taxa mensal da proposta do banco.

Outra prática comum consiste em instituições financeiras oferecerem adiantamento do 13º salário. Na prática, essas instituições estão oferecendo um empréstimo a ser pago no fim do ano. Vejamos a simulação de uma situação desse tipo.

Exemplo 5.2.5. Geralmente o adiantamento do 13º salário é oferecido através de propagandas de TV ou até mesmo por aplicativos de celulares. No último caso, o cliente informa o valor do adiantamento e o aplicativo gera o valor da parcela a ser paga no fim do ano. Em uma simulação desse adiantamento feita no dia 20/07/2018, foi solicitado um adiantamento de R\$ $800,00$ para ser quitado no dia 20/12/2018, ou seja, 5 meses depois. O valor da parcela gerada pelo aplicativo foi de R\$ $966,69$. Com essas informações podemos usar a matemática financeira para descobrirmos qual a taxa de juros desse adiantamento.

Temos um valor de R\$ $800,00$ para ser quitado 5 meses depois por R\$ $966,69$.

Figura 6: Esquema de pagamento de adiantamento de 13º salário.



Fonte: Autor.

Igualando os valores na data 0, temos

$$\begin{aligned} 800 &= \frac{966,69}{(1+i)^5}. \\ i &\approx 0,0386. \end{aligned}$$

Portanto, a taxa de juros cobrada no adiantamento é de, aproximadamente,

$3,86\%$ ao mês.

5.3 ENEM, Vestibulares e Concursos

Nesta seção vamos mostrar que a matemática financeira está presente em determinadas avaliações que grande parte da população brasileira realiza, seja na vida estudantil, como é o caso do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e dos vestibulares, seja na vida profissional, como é o caso de concursos públicos.

5.3.1 ENEM

O ENEM é feito com base em uma matriz de referência que indica as habilidades que serão cobradas dos candidatos no exame. No bloco de *Matemática e suas tecnologias*, temos a habilidade *H21* que, indiretamente, faz menção ao estudo da matemática financeira. Essa habilidade é descrita como:

H21: ***Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.***

Vejamos a seguir alguns exemplos de como a matemática financeira é abordada no ENEM.

Exemplo 5.3.1. (ENEM 2017) Um empréstimo foi feito a taxa mensal de $i\%$, usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a P. O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela.

A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é

a) $P\left[1+\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}\right]$;

b) $P\left[1+\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\dfrac{1}{(1+\frac{2i}{100})}\right]$;

c) $P\left[1+\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}+\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}\right]$;

d) $P\left[1+\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\dfrac{1}{(1+\frac{2i}{100})}+\dfrac{1}{(1+\frac{3i}{100})}\right]$;

e) $P\left[1+\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}+\dfrac{1}{(1+\frac{i}{100})^3}\right]$.

Solução: O devedor quitará a dívida na 6ª parcela, tendo pago as 5 parcelas anteriores, logo, para quitar o empréstimo, ele pagará o valor P referente à 6ª parcela e antecipará a 7ª e a 8ª parcela. Daí, temos que o valor da quitação será

$$P+\frac{P}{(1+\frac{i}{100})}+\frac{P}{(1+\frac{i}{100})^2}=P\left[1+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})}+\frac{1}{(1+\frac{i}{100})^2}\right]$$

Portanto, a alternativa correta é a letra a).

Exemplo 5.3.2. (ENEM 2015) Um casal realiza um financiamento imobiliário de R\$ $180.000,00$, a ser pago, em 360 prestações mensais com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R\$ $500,00$ mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R\$ $500,00$ e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de

a) $2075,00$

b) $2093,00$

c) $2138,00$

d) $2255,00$

e) $2300,00$

Solução: O valor da décima prestação é composto por R\$ $500,00$ mais 1% do saldo devedor, que no momento da décima prestação é de $180\ 000 - 9 \cdot 500 = 175\ 000$ reais. Logo, o valor, em reais, da décima prestação é

$$500 + \frac{1}{100} \cdot 175000 = 2255,00.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra d).

Exemplo 5.3.3. (ENEM 2013) O Conselho Monetário Nacional (CMN) determinou novas regras sobre o pagamento mínimo da fatura do cartão de crédito, a partir do mês de agosto de 2011. A partir de então, o pagamento mensal não poderá ser inferior a 15% do valor total da fatura. Em dezembro daquele ano, outra alteração foi efetuada: daí em diante, o valor mínimo a ser pago seria de 20% da fatura.

Um determinado consumidor possuía no dia do vencimento, 01/03/2012, uma dívida de R\$ $1.000,00$ na fatura de seu cartão de crédito. Se não houver pagamento do valor total da fatura, serão cobrados juros de 10% sobre o saldo devedor para a próxima fatura. Para quitar sua dívida, optou por pagar sempre o mínimo da fatura a cada mês e não efetuar mais nenhuma compra. A dívida desse consumidor em 01/05/2012 será de

a) R\$ $600,00$

b) R\$ $640,00$

c) R\$ $722,50$

d) R\$ $774,40$

e) R\$ $874,22$

Solução: Note que o período da dívida até 01/05/2012 é de 2 meses. Temos que em um mês é diminuído 20% do saldo devedor e depois acrescido 10%. Logo, depois de 2 meses,

a dívida será de
$$1000 \cdot \frac{80}{100} \cdot \frac{110}{100} \cdot \frac{80}{100} \cdot \frac{110}{100} = 774,40.$$
Portanto, a alternativa correta é a letra d).

Exemplo 5.3.4. (ENEM 2012) Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

Opção 1: Pagar à vista, por R\$ 55.000, 00.

Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R\$ 30.000, 00, e mais uma prestação de R\$ 26.000, 00 para dali a 6 meses.

Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R\$ 20.000, 00, mais uma prestação de R\$ 20.000, 00 para dali a 6 meses e outra de R\$ 18.000, 00 para dali a 12 meses da data da compra.

Opção 4: Pagar a prazo, dando uma entrada de R\$ 15.000, 00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R\$ 39.000, 00.

Opção 5: Pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R\$ 60.000, 00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor), em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente a opção

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Solução: Considerando a data de compra como a data focal (data escolhida para comparação), vamos fazer uma análise sobre os valores dos pagamentos em cada opção.

Opção 1: R\$ 55 000, 00

Opção 2: $30000 + \dfrac{26000}{(1+0,1)} \approx R\$\ 53\ 636,36$

Opção 3: $20000 + \dfrac{20000}{(1+0,1)} + \dfrac{18000}{(1+0,1)^2} \approx R\$\ 53\ 057,85$

Opção 4: $15000 + \dfrac{39000}{(1+0,1)^2} \approx R\$\ 47\ 231,40$

Opção 5: $\dfrac{60000}{(1+0,1)^2} \approx R\$\ 49\ 586,78$

Portanto a melhor opção para Arthur é a *opção 4*, ou seja, a alternativa correta é a letra d).

Exemplo 5.3.5. (ENEM 2009) João deve 12 parcelas de R\$ 150, 00 referentes ao cheque especial de seu banco e cinco parcelas de R\$ 80, 00 referentes ao cartão de crédito. O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de desconto no cheque especial, caso João

quitasse esta dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é, quitação imediata, com 25% de desconto na dívida do cartão. João também poderia renegociar suas dívidas em 18 parcelas mensais de R\$ 125,00. Sabendo desses termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses, com juros de 25% sobre o total emprestado.
A opção que dá a João o menor gasto seria
a) renegociar suas dívidas com o banco.
b) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação das duas dívidas.
c) recusar o empréstimo de José e pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos.
d) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cheque especial e pagar as parcelas do cartão de crédito.
e) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do cheque especial.
Solução: A dívida total é de $12 \cdot 150 + 5 \cdot 80 = 2200$ reais. Com o desconto a dívida passa a ser $1500 + 300 = 1800$ reais. Vamos analisar o valor gasto por João em cada item anterior.
Item a: Valor gasto: $18 \cdot 125,00 = 2250,00$ reais.
Item b: Valor gasto: $1800 \cdot 1,25 = 2250,00$ reais.
Item c: Valor gasto: $1800 + 400 = 2200,00$ reais.
Item d: Valor gasto: $1500 \cdot 1,25 + 400 = 2275,00$ reais.
Item e: Valor gasto: $300 \cdot 1,25 + 1800 = 2175,00$ reais.
Logo, a opção de menor gasto para João é a opção do item e).

5.3.2 Vestibulares

Os vestibulares das universidades espalhadas pelo Brasil também abordam a matemática financeira em suas avaliações. Vejamos a seguir alguns exemplos:
Exemplo 5.3.6. (Universidade Estadual do Rio de Janeiro - Uerj 2017) Um capital de C reais foi investido a juros compostos de 10% ao mês e gerou, em três meses, um montante de R\$ 53.240,00.
Calcule o valor, em reais, do capital C.
Solução: Sendo $i = 10\% = 0,1$ ao mês e $n = 3$ meses, pela fórmula de juros compostos obtemos que

$$\begin{aligned} 53240 &= C(1+0,1)^3 \\ C &= 40000. \end{aligned}$$

Logo, o capital C é de R\$ 40.000,00.
Exemplo 5.3.7. (Universidade São Francisco - USF 2016) Pensando em montar seu próprio consultório, Nathália começou a economizar desde que entrou no curso de medicina.

Ao passar no vestibular, ela ganhou R\$ 5 000, 00 de seus pais e os aplicou a uma taxa de 0, 5% ao mês a juros compostos. Além disso, mensalmente, ela depositou R\$ 100, 00 à mesma taxa de juros compostos. Hoje, passados 5 anos, ou seja, 60 meses, qual o montante do rendimento dos R\$ 5.000, 00 e qual o valor economizado por Nathália com suas aplicações mensais? (Considere $1,005^{60} \approx 1,35$).
a) R\$ 6.750, 00 e R\$ 7.000, 00
b) R\$ 6.500, 00 e R\$ 7.800, 00
c) R\$ 6.500, 00 e R\$ 7.000, 00
d) R\$ 6.750, 00 e R\$ 7.800, 00
e) R\$ 7.800, 00 e R\$ 6.500, 00
Solução: O montante obtido com o presente dos pais é

$$5000(1 + 0,005)^{60} \approx 5000 \cdot 1,35 = R\$\ 6.750,00.$$

O montante M obtido com as aplicações mensais é dado por

$$100 \cdot 1,005^{59} + 100 \cdot 1,005^{58} + \cdots + 100 \cdot 1,005 + 100 = 100 \cdot (1,005^{59} + 1,005^{58} + \cdots + 1,005 + 1).$$

Note que a sequência $(1,005^{59}, 1,005^{58}, ..., 1,005, 1)$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{1,005}$. Logo, usando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, temos

$$\begin{aligned} M &= 100 \cdot 1,005^{59} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{1,005})^{60}}{1 - \frac{1}{1,005}} \\ M &\approx 100 \cdot \frac{0,35}{0,005} = R\$\ 7\ 000,00. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra a).

Exemplo 5.3.8. (Fuvest 2016) De 1869 até hoje, ocorreram as seguintes mudanças de moeda no Brasil: (1) em 1942, foi criado o cruzeiro, cada cruzeiro valendo mil réis; (2) em 1967, foi criado o cruzeiro novo, cada cruzeiro novo valendo mil cruzeiros; em 1970, o cruzeiro novo voltou a se chamar apenas cruzeiro; (3) em 1986, foi criado o cruzado, cada cruzado valendo mil cruzeiros; (4) em 1989, foi criado o cruzado novo, cada um valendo mil cruzados; em 1990, o cruzado novo passou a se chamar novamente cruzeiro; (5) em 1993, foi criado o cruzeiro real, cada um valendo mil cruzeiros; (6) em 1994, foi criado o real, cada um valendo 2750 cruzeiros reais.

Quando morreu, em 1869, Brás Cubas possuía 300 contos. Se esse valor tivesse ficado até hoje em uma conta bancária, sem receber juros e sem pagar taxas, e se, a cada mudança de moeda, o depósito tivesse sido normalmente convertido para a nova moeda, o saldo hipotético dessa conta seria, aproximadamente, de um décimo de

Dados: Um conto equivalia a um milhão de réis.
a) real.
b) milésimo de real.
c) milionésimo de real.
d) bilionésimo de real.
e) trilionésimo de real.
Solução: Temos que

$$1 \text{ real} = 2,75 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 2,75 \cdot 10^{18} \text{ réis}.$$

Portanto, como 300 contos $= 300 \cdot 10^6 = 3 \cdot 10^8$ réis, segue que $\dfrac{3 \cdot 10^8}{2,75 \cdot 10^{18}} = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{10^9}$. Ou seja, aproximadamente, um décimo de bilionésimo de real.
Logo, a resposta da questão é a letra d).
Exemplo 5.3.9. (Fuvest 2009) Há um ano, Bruno comprou uma casa por R\$ 50 000, 00. Para isso, tomou emprestados R\$ 10 000, 00 de Edson e R\$ 10 000, 00 de Carlos, prometendo devolver-lhes o dinheiro, após um ano, acrescido de 5% e 4% de juros, respectivamente. A casa valorizou 3% durante este período de um ano. Sabendo-se que Bruno vendeu a casa hoje e pagou o combinado a Edson e Carlos, o seu lucro foi de:
a) R\$ 400, 00
b) R\$ 500, 00
c) R\$ 600, 00
d) R\$ 700, 00
e) R\$ 800, 00
Solução: O valor da casa foi R\$ 50.000, 00; donde Bruno investiu R\$ 30.000, 00, pois ele tomou emprestado R\$ 20.000, 00 de Edson e Carlos. Por esse empréstimo Bruno pagará R\$ 10.500, 00 e R\$ 10.400, 00 a Edson e Carlos, respectivamente. No entanto, após um ano, a casa valorizou-se 3%, sendo assim, Bruno a vendeu por R\$ 51.500, 00; pagando o empréstimo e ainda lhe sobrando R\$ 30.600, 00. Como o valor inicial investido por Bruno foi de R\$ 30.000, 00 seu lucro foi de R\$ 600, 00.
Logo a resposta é a letra c).
Exemplo 5.3.10. (Unicamp 2010) O valor presente, V_p, de uma parcela de um financiamento, a ser paga daqui a n meses, é dado pela fórmula a seguir, em que r é o percentual mensal de juros ($0 \leq r \leq 100$) e p é o valor da parcela.

$$V_p = \frac{p}{(1 + \frac{r}{100})^n}.$$

a) Suponha que uma mercadoria seja vendida em duas parcelas iguais de R\$ 200, 00, uma a ser paga à vista, e outra a ser paga em 30 dias (ou seja, 1 mês). Calcule o valor presente da mercadoria, V_p, supondo uma taxa de juros de 1% ao mês.

b) Imagine que outra mercadoria, de preço $2p$, seja vendida em duas parcelas iguais a p, sem entrada, com o primeiro pagamento em 30 dias (ou seja, 1 mês) e o segundo em 60 dias (ou 2 meses). Supondo, novamente, que a taxa mensal de juros é igual a 1%, determine o valor presente da mercadoria, V_p, e o percentual mínimo de desconto que a loja deve dar para que seja vantajoso, para o cliente, comprar à vista.

Solução:
a) O valor presente da mercadoria será $V_p = 200 + \dfrac{200}{(1+\frac{1}{100})^1} \approx 398,02.$

b) Valor presente da primeira parcela: $\dfrac{p}{(1+\frac{1}{100})^1} \approx 0,99p.$

Valor presente da segunda parcela: $\dfrac{p}{(1+\frac{1}{100})^2} \approx 0,98p$

Logo, o valor presente da mercadoria é $0,99p + 0,98p = 1,97p$. A compra à vista será vantajosa se o desconto for, no mínimo, de $\dfrac{2p - 1,97p}{2p} = 1,5\%$.

5.3.3 Concursos

Quanto aos concursos, é comum nos depararmos com questões sobre matemática financeira, principalmente se o objetivo for o preenchimento de vaga de trabalho em instituições financeiras ou órgãos públicos. Veremos a seguir exemplos de questões contidas em avaliações de concursos.

Exemplo 5.3.11. (FGV 2018, Órgão: BANESTES, Prova: Assistente Securitário) Um capital de R$ 2 662,00 é capitalizado sob regime de juros compostos, ao longo de 4 meses, à taxa efetiva de 10% ao mês, produzindo um montante M.

Para que R$ 2 000,00 produzam o mesmo montante M, ele deve ser capitalizado nessas mesmas condições durante um período igual a

a) 8 meses

b) 7 meses

c) 6 meses

d) 4 meses

e) 3 meses

Solução: Vamos determinar primeiramente o montante M. As informações do enunciado nos fornecem um capital $C_1 = 2662,00$ aplicado à taxa de 10% ao mês em juros compostos durante 4 meses. Logo, substituindo na fórmula de juros compostos, temos

$$M = 2662 \cdot (1 + 0,1)^4 = 3897,43$$

Em seguida, temos um capital $C_2 =$ R$ 2000,00, à mesma taxa anteriormente mencionada. Para determinar o período de aplicação n, em meses, substituímos novamente na fórmula de juros compostos. Daí, temos

$$\begin{aligned} 3897,43 &= 2000 \cdot (1+0,1)^n \\ n &= \frac{\log 1,9487}{\log 1,1} \approx 7. \end{aligned}$$

Portanto, a resposta da questão é a letra b).

Exemplo 5.3.12. (CESPE 2018, Órgão: TCE-PB, Prova: Auditor de Contas Públicas) Um banco emprestou R\$ 200.000, 00, entregues no ato, sem prazo de carência. O empréstimo foi quitado pelo sistema de amortização constante (SAC) em 20 prestações semestrais consecutivas.

Nessa situação, se a taxa de juros do empréstimo foi de 1, 5% ao semestre, então o valor da quinta prestação, em reais, foi de

a) 12 400

b) 13 000

c) 10 000

d) 11 650

e) 12 250

Solução: As informações nos fornecem a dívida $D_0 = 200\,000,00$ reais, o período $n = 20$ semestres, a taxa $i = 1,5\%$ ao semestre e o sistema de amortização em que a dívida foi quitada, o SAC. Precisamos determinar o valor da quinta prestação P_5. Pelo SAC, a amortização A é constante e é dada por $A = \dfrac{200000}{20} = 10000$. Para determinarmos P_5 temos que encontrar primeiro os juros incidentes sobre a quinta parcela, que chamaremos de J_5 e é dado por $J_5 = i \cdot D_4$, onde D_4 é o valor da dívida após paga a quarta prestação. A saber, $D_4 = \dfrac{20-4}{20} \cdot 200000 = 160000$. Daí, segue que

$$J_5 = 0,015 \cdot 160000 = 2400.$$

Portanto, temos que

$$P_5 = A + J_5 = 10000 + 2400 = 12400.$$

Concluímos que o valor da quinta prestação foi de R\$ 12 400, 00, ou seja, a resposta da questão é a letra a).

Exemplo 5.3.13. (Cesgranrio 2018, Órgão: Transpetro, Prova: Economista Júnior) Uma dívida no valor de 20 milhões de reais foi dividida, em janeiro de 2018, em duas parcelas anuais postecipadas, sendo a primeira no valor de 12 milhões de reais, com vencimento em janeiro de 2019, e a segunda de 14, 4 milhões de reais, com vencimento para janeiro de 2020.

Nessas condições, a taxa anual cobrada no financiamento dessa dívida, no regime de juros compostos, foi de

a) 2%

b) 10%
c) 12%
d) 20%
e) 22%

Solução: Temos, $20 = \dfrac{12}{1+i} + \dfrac{14,4}{(1+i)^2}$, fazendo $x = 1+i$, fica $20x^2 - 12x - 14,4 = 0$. Resolvendo esta equação obtemos $x = 1,2$ como a única raiz real positiva. Logo, segue que

$$\begin{aligned} x &= 1+i \\ 1,2 &= 1+i \\ i &= 0,2 \end{aligned}$$

Portanto, a resposta da questão é a letra d).

Exemplo 5.3.14. (Cesgranrio 2018, Órgão: Petrobras, Prova: Técnico de Administração e Controle Júnior) Uma empresa avalia uma proposta de investimento, que promete pagar 20% ao ano, no regime de juros compostos. Ela pretende fazer un único investimento em jan/2019, para realizar dois resgates no futuro, sendo o primeiro, em jan/2020, no valor de 120 milhões de reais, e o segundo, de 720 milhões de reais, em jan/2021.
Assim, o valor mínimo a ser investido pela empresa, em milhões de reais, que garante os dois resgates, é igual a
a) 528
b) 583
c) 600
d) 672
e) 700

Solução: Seja V o valor mínimo a ser investido pela empresa, temos

$$\begin{aligned} V &= \frac{120}{1+0,2} + \frac{720}{(1+0,2)^2} \\ V &= 600. \end{aligned}$$

Logo, a resposta da questão é a letra c).

Exemplo 5.3.15. (Cesgranrio 2015, Órgão: Banco do Brasil, Prova: Escriturário) Arthur contraiu um financiamento para a compra de um apartamento, cujo valor à vista é de 200 mil reais, no Sistema de Amortização Constante (SAC), a uma taxa de juros de 1% ao mês, com um prazo de 20 anos. Para reduzir o valor a ser financiado, ele dará uma entrada no valor de 50 mil reais na data da assinatura do contrato. As prestações começam um mês após a assinatura do contrato e são compostas de amortização, juros sobre o saldo devedor do mês anterior, seguro especial no valor de 75 reais mensais fixos no primeiro ano e despesa administrativa mensal fixa no valor de 25 reais. A partir dessas informações, o valor, em reais, da segunda prestação prevista na planilha de amortização desse financiamento, desconsiderando qualquer outro tipo de reajuste no saldo devedor que não seja a taxa de juros do financiamento, é igual a

a) $2087,25$

b) $2218,75$

c) $2175,25$

d) $2125,00$

e) $2225,00$

Solução: O valor financiado foi de 150 mil reais. Como no SAC a amortização A é constante, temos que $A = \dfrac{150000}{240} = 625$ reais. Os juros no segundo mês serão de $J = 0,01 \cdot 149\ 375,00 = 1493,75$ reais. Acrescentando-se os valores do seguro especial e despesa administrativa, o valor da segunda prestação será de $625,00 + 1493,75 + 75,00 + 25,00 = 2218,75$ reais.

Logo, a resposta da questão é a letra b).

5.4 Setores de Empreendimento

A matemática financeira é essencial para o gestor administrar com êxito seu negócio, é ela que vai lhe oferecer subsídios, por exemplo, para gerenciar o fluxo de caixa, controlar a folha de pagamento, corte de despesas, avaliação de margem de lucro, etc. O controle das finanças é um dos grandes desafios de um empreendedor.

A importância da matemática financeira para o setor de empreendimento é notável, por isso, atualmente, a disciplina *matemática financeira* está presente na grade curricular da maioria dos cursos de Administração de Empresas e Contabilidade, além da existência de vários cursos independentes abordando este assunto. O uso eficaz da matemática financeira em uma empresa minimiza custos e maximiza lucros.

Vejamos a seguir situações cotidianas onde a matemática financeira ajuda o empreendedor a tomar decisões que melhorem o seu negócio.

Exemplo 5.4.1. Uma dona de salão de beleza pretende melhorar suas instalações, para isso, quer realizar o serviço de climatização do salão. No entanto, para cobrir as despesas, ela precisará fazer reajustes nos preços dos serviços oferecidos. Com receio desse reajuste inflacionar os preços e afastar a clientela, ela pensa em fazer o reajuste de modo que cubra suas despesas e que não cause uma grande inflação nos preços. Como fazer isto?

Com as informações de fluxo de caixa, pode-se calcular o percentual de reajuste dos preços, para isso, precisamos de alguns dados. A dona do salão verificou que o custo com o aparelho de ar-condicionado e com a mão-de-obra seria de R\$ $2100,00$, além disso, os gastos com a conta de luz aumentaria em torno de R\$ $50,00$ por mês. Ela pretende cobrir esses gastos em 6 meses, sabendo que o lucro médio do salão de beleza é de R\$ $3400,00$ mensais, ela quer saber, qual o percentual de reajuste dos preços nos serviços oferecidos para que sejam atendidas as condições anteriores?

Nos próximos 6 meses as despesas mensais do salão aumentarão em $(2100/6) + 50 = 400$ reais. Portanto, o reajuste tem que cobrir esse aumento de despesa. Como o lucro médio do salão é de R\$ $3400,00$ mensais, seja i a taxa de reajuste mensal, usando a fórmula de juros compostos, temos

$$\begin{aligned} 3800 &= 3400 \cdot (1+i)^1 \\ i &\approx 0,1176. \end{aligned}$$

Portanto, o percentual médio de reajuste dos preços dos serviços ofertados no salão será de, aproximadamente, $11,76\%$. Em termos práticos, a dona do salão verificou que esse reajuste era cabível, por exemplo, o preço do corte de cabelo masculino, hoje custa R\$ $12,00$ e após reajustado passará a custar R\$ $13,41$. Já o preço do corte de cabelo feminino, que hoje custa R\$ $18,00$ passará a custar R\$ $20,10$.

Exemplo 5.4.2. Um dono de bar e restaurante deseja aumentar o fluxo de mercadorias do seu negócio. Para isto, pretende investir na compra da cerveja de 300 ml, por ser um produto com alto índice de venda. Para aumentar suas compras ele irá fazer um empréstimo no valor de R\$ $2000,00$, a uma taxa de juros de 4% ao mês, para ser quitado após três meses. O dinheiro do empréstimo será investido na compra da cerveja de 300 ml. Sabendo que o empresário compra a cerveja por R\$ $1,90$ e vende por R\$ $2,50$, considerando que ele venderá todas as unidades compradas, deseja-se saber, se é vantajoso fazer esse empréstimo.

Após três meses o empresário terá que pagar o montante $M = 2000 \cdot (1+0,04)^3 = 2249,73$ reais pelo empréstimo. Com R\$ $2000,00$ ele comprará, aproximadamente, 1052 unidades da cerveja. Cada unidade lhe dá um lucro de R\$ $0,60$ reais. Logo, com a venda de todas as unidades compradas, ele terá um lucro de $0,6 \cdot 1052 = 631,20$ reais. Isso mostra que o empréstimo é vantajoso, pois, ele pagará R\$ $249,73$ de juros e lucrará R\$ $631,20$ com as vendas.

5.5 Planejamento Financeiro Familiar

Nesta seção discutiremos como a matemática financeira pode ajudar no controle das finanças de uma família para que esta não venha a se encontrar em situação de endividamento.

São inúmeras as despesas de uma família, como impostos, alimentação, lazer, possíveis financiamentos ou empréstimos, contas de água, luz, etc. Para um controle financeiro eficaz é importante termos uma *planilha para controle de gastos*, na qual deve constar todo e qualquer débito ou crédito, para que se tenha a exata noção de como o dinheiro está sendo usado. É nesse ponto que a matemática financeira pode ser aplicada para analisar as melhores condições de pagamento de débitos a fim de minimizar eventuais juros.

Vejamos a seguir uma situação em que o planejamento financeiro pode evitar problemas.

Exemplo 5.5.1. Para viajar no fim do ano, uma família fará um planejamento financeiro. Ela dispõe de um capital de R\$ $12\ 000,00$ e pretende depositar esse dinheiro em um fundo de investimento, de modo que, o juro obtido cubra as despesas da viagem. Feito o orçamento, verificou-se que serão gastos R\$ $1\ 500,00$ com essa viagem. O resgate do valor ocorrerá 6 meses depois do depósito que será efetuado em junho. Para obter êxito no planejamento, qual deve ser a taxa de juros mínima do fundo de investimento que eles devem escolher?

Nessa situação, temos um capital de R\$ $12\ 000,00$ e queremos que, após 6 meses, esse capital obtenha um juro de R\$ $1\ 500,00$, ou seja, após 6 meses, o montante deve ser de R\$ $13\ 500,00$. Precisamos descobrir qual taxa de juros dará esse retorno. Aplicando as informações na fórmula de juros compostos, temos

$$\begin{aligned} 13500 &= 12000 \cdot (1+i)^6 \\ i &\approx 0,0198. \end{aligned}$$

Portanto, o capital deve ser aplicado em um fundo de investimento que tenha uma taxa de juros de, no mínimo, $1,98\%$ ao mês.

A matemática financeira pode ajudar no planejamento financeiro familiar em situações mais simples, como, por exemplo, nas compras do supermercado. Vejamos a seguinte situação.

Exemplo 5.5.2. Quando vamos ao supermercado devemos ter uma lista adequada às nossas finanças para que tenhamos os produtos dos quais necessitamos sem que fiquemos endividados. É sempre bom termos uma calculadora em mãos para nos ajudar a controlar o valor final da compra e a fazermos algumas comparações interessantes. Por exemplo, se x e y são marcas distintas da mesma mercadoria e uma unidade da marca x custa R\$ $6,00$ enquanto uma unidade da marca y custa R\$ $9,00$, mas x tem 300 gramas e y tem 500 gramas, fazendo alguns cálculos percebemos que 1 grama de x custa R\$ $0,02$, enquanto, 1 grama de y custa R\$ $0,018$. Ou seja, a opção pelo produto y é mais vantajosa.

5.6 Matemática Financeira Usando Tecnologias Digitais

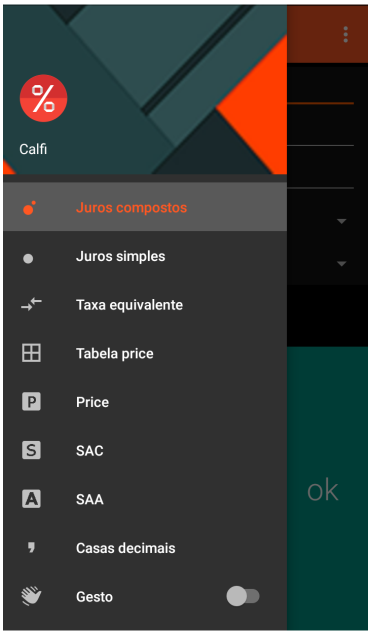
Vivemos em uma sociedade em constante transformação. O uso da informática tem adquirido importância cada vez maior no dia a dia, nos mais diversos setores. Podemos encontrar nas plataformas digitais aplicativos referentes a vários assuntos.

Quanto à matemática financeira, existem aplicativos que podem auxiliar nos cálculos servindo, em particular, ao professor em sala de aula.

Abordaremos aqui, em particular, o aplicativo *Calculadora de Juros (Calfi)*. Esse aplicativo, disponível para *android* e *IOS*, efetua cálculos com juros simples (não abordado nesse trabalho), juros compostos, análise de taxas de financiamentos imobiliários, boletos bancários, cartão de crédito, entre outros.

Observe a *Figura 7* a seguir, onde é mostrado o menu do aplicativo, com as opções de cálculo.

Figura 7: Menu do aplicativo *Calculadora de Juros*.

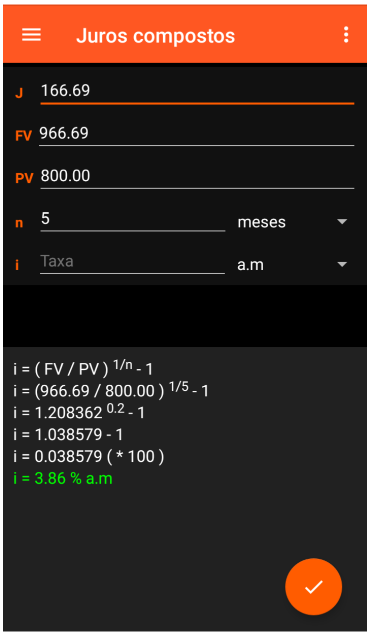


Fonte: Autor.

Vamos refazer alguns cálculos já vistos neste trabalho utilizando o aplicativo *Calculadora de Juros* para constatar a sua utilidade.

Exemplo 5.6.1 Vamos resolver o *Exemplo 5.2.5* usando o aplicativo. Para isso, basta ir no *menu* e escolher a opção *Juros Compostos*. Irá aparecer os campos J (juro), FV (Valor Futuro), PV (Valor Presente), n (Período, onde é escolhido a unidade de tempo) e i (Taxa de Juros). Recordemos que, no *Exemplo 5.2.5*, pede-se a taxa de juros do adiantamento do 13º salário dados o Valor Presente, o Valor Futuro e o Período. Colocando os dados no aplicativo, temos o resultado, como mostra a *Figura 8* a seguir.

Figura 8: Cálculo da taxa de juros do *Exemplo 5.2.5*.

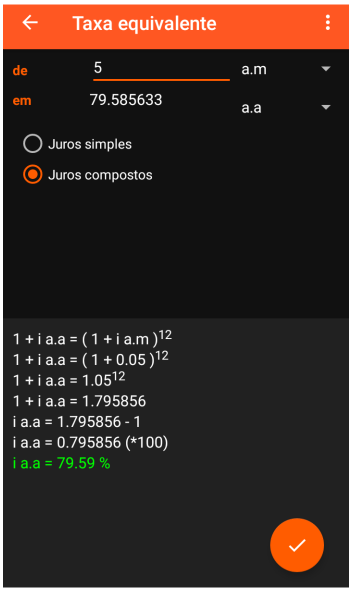


Fonte: Autor.

Vejamos outro exemplo.

Exemplo 5.6.2 Vamos agora resolver o *Exemplo 4.2.2* usando o aplicativo. No *menu*, escolhemos a opção *Taxa Equivalente*. Irá aparecer o campo para se colocar a taxa que se deseja converter em outra. Lembremos que no *Exemplo 4.2.2* queríamos calcular qual a taxa anual equivalente a 5% ao mês. Colocando os dados no aplicativo, obtemos a resposta. Veja a *Figura 9* a seguir.

Figura 9: Cálculo da taxa equivalente do *Exemplo 4.2.2*.

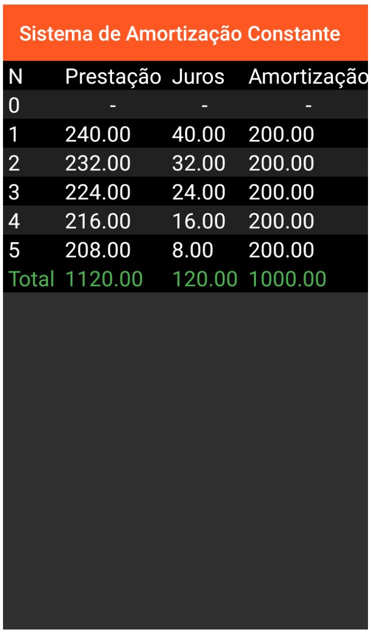


Fonte: Autor.

O aplicativo *Calculadora de Juros* também é muito útil para fazer as planilhas de amortização de um financiamento.

Exemplo 5.6.3. Vejamos como fazer a planilha de amortização do *Exemplo 4.4.3*. Basta ir no *menu* e escolher a opção *SAC*. Irá aparecer os campos PV (Valor Presente), n (Tempo do Financiamento) e i (Taxa de Juros). Colocando os dados, o aplicativo fornece a planilha de amortização. Veja a *Figura 10* a seguir.

Figura 10: Planilha de amortização do *Exemplo 4.4.3*.



Sistema de Amortização Constante

N	Prestação	Juros	Amortização
0	-	-	-
1	240.00	40.00	200.00
2	232.00	32.00	200.00
3	224.00	24.00	200.00
4	216.00	16.00	200.00
5	208.00	8.00	200.00
Total	1120.00	120.00	1000.00

Fonte: Autor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho visa mostrar a importância da matemática financeira na vida de qualquer pessoa, através da aplicação em situações cotidianas.

O nosso trabalho fornece meios para que os leitores possam identificar situações em que estão sendo lesados financeiramente por instituições financeiras ou estabelecimentos comerciais.

É relevante comentarmos sobre o estudo da matemática financeira nas escolas. Infelizmente, ainda não é dada a importância devida a este assunto na educação básica, principalmente no ensino fundamental, o que pode ser verificado fazendo-se uma análise na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do ensino fundamental. Nela, notamos menção à matemática financeira apenas como uma aplicação de porcentagem, como podemos ver na redação das seguintes habilidades lá encontradas:

HABILIDADE (EF06MA13): ***Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.***

HABILIDADE (EF07MA02): ***Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.***

HABILIDADE (EF09MA05) : ***Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.***

Esse fato é preocupante, pois mostra que os conteúdos básicos de matemática financeira só serão apresentados aos alunos no ensino médio. Além disso, o INEP divulgou em 2016 uma pesquisa mostrando que a taxa de evasão escolar no 9º ano do ensino fundamental entre os anos de 2014 e 2015 foi de $7,7\%$. Esse número, mostra que muitos jovens não terão a oportunidade de aprender na escola nem mesmo os conteúdos básicos de matemática financeira.

Diante disso, defendemos que a matemática financeira deveria ser estudada com mais ênfase no ensino fundamental, pois desde criança todos nós já temos contato com o dinheiro e com situações financeiras, assim, os ensinamentos dos termos financeiros deveriam ser abordados com maior importância em nossas escolas, proporcionando que o jovem cresça educado financeiramente. Quanto a isso Kiyosaky e Lechter em [12] afirma que "temos que ensinar aos jovens as habilidades acadêmicas e financeiras de que precisarão não só para sobreviver, mas para desenvolver-se no mundo com que se deparam".

As situações e exemplos aqui abordados foram escolhidos por retratarem situações do dia a dia de muitas pessoas, por isso, foram necessárias pesquisas em bancos, instituições financeiras, lojas, postos de combustível, entre outros locais. Cabe ressaltar que todas as situações e exemplos mostrados no capítulo 5 são reais, produtos dessa pesquisa.

Esperamos que ao concluir a leitura deste trabalho os leitores fiquem curiosos e instigados a se aprofundarem no assunto, fazerem novos estudos sobre o tema e descobrirem novas aplicações. A matemática financeira, por ser presença constante no meio social e econômico, proporciona um leque de opções de estudo, inclusive aplicações interdisciplinares, podendo o leitor buscar esses novos horizontes.

REFERÊNCIAS

[1] Aprova Concursos, **Questões sobre Matemática Financeira em Concursos**. Disponível em: https://www.aprovaconcursos.com.br/questoes-de-concurso/questoes/disciplina/Matem%25C3%25A1tica+Financeira/assunto/9.1.+Sistema+de+amortiza%25C3%25A7%25C3%25A3o+constante+%2522SAC%2522. Acesso em: 10 de Setembro de 2018.

[2] Assaf Neto, A. **Finanças corporativas e valor**. 2ª edição. Atlas. São Paulo, 2005.

[3] Assaf Neto, A. **Matemática Financeira e Suas Aplicações**. 12ª edição. Atlas. São Paulo, 2012.

[4] BOYER, C. B. **História da Matemática**, Revista por Uta. C. Merzbach: Tradução Elza F. Gomide.- 2. ed. São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

[5] Brasil, Banco Central do, **Origem e evolução do dinheiro**. Disponível em: http://www.bcb.gov.br/htms/origevol.asp. Acesso em: 08 de maio de 2018.

[6] Brasil, Ministério da Educação, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), **Matriz de Referência ENEM**. Brasília, 2017.

[7] Brasil, Governo Federal, **história das cédulas e moedas nacionais**. Disponível em: http://www.brasil.gov.br/governo/2009/11/conheca-a-historia-das-cedulas-e-moedas-nacionais. Acesso em: 16 de agosto de 2018.

[8] Brasil, Ministério da Educação, **Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental**. Brasília, 2017.

[9] Brasil, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), **Divulgação de dados inéditos sobre fluxo escolar na educação básica**. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/inep-divulga-dados-ineditos-sobre-fluxo-escolar-na-educacao-basica/21206. Acesso em: 26 de agosto de 2018.

[10] Dias, André George Morais. **Matemática financeira no ensino básico: uma abordagem voltada para o financiamento, crédito e consumo consciente**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Federal do Estado do Amapá - UNIFAP. Macapá: UNIFAP - PROFMAT, 2017.

[11] Gomes, Carlos Roberto Bastos. **Matemática Financeira: Imposto de renda, Sistemas de Amortização e outras Aplicações - Análise Quantitativa e Qualitativa**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Federal da Bahia - UFBA. Salvador: UFBA - PROFMAT, 2018.

[12] Kiyosaky, R. T.; Lechter, S. L. **Pai rico, pai pobre**. Editora Elsevier, Rio de Janeiro (2000).

[13] Lima, Elon L.; Carvalho, Paulo C. P; Morgado,Augusto C.; Wagner, Eduardo. **A Matemática do Ensino Médio, volume** 1. Editora SBM, Rio de Janeiro (1996).

[14] Lima, Elon L. **Números e Funções Reais**. Coleção PROFMAT. 1ª Edição. Editora SBM. Rio de Janeiro (2014)

[15] Lima, Elon L.; Carvalho, Paulo C. P.; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. **Temas e Problemas Elementares**. 2ª Edição. Editora SBM, Rio de Janeiro (2006)

[16] Matias, Roberto Fernandes. **Matemática Financeira no Ensino Médio: Educando para a Vida.** Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Federal de Goiás - UFG. Goiânia: UFG - PROFMAT, 2018.

[17] Morgado, Augusto C.; Wagner, Eduardo; Zani, Sheila. **Progressões e Matemática Financeira**. 6ª Edição. Editora SBM, Rio de Janeiro (2015).

[18] Morgado, Augusto C.; Carvalho, Paulo C. P. **Matemática Discreta**. Coleção PROFMAT. 2ª Edição. Editora SBM, Rio de Janeiro (2015).

[19] Petrobras, **Preços médios de diesel e gasolina às distribuidoras sem tributos**. Disponível em: http://www.petrobras.com.br/pt/produtos-e-servicos/composicao-de-precos-de-venda-as-distribuidoras/gasolina-e-diesel/. Acesso em: 15 de julho de 2018.

[20] Pontes, Luis Fernando de. **A Importância da Matemática Financeira na Formação de Cidadãos**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - UEMS. Dourados: UEMS - PROFMAT, 2017.

[21] Qconcursos, **Questões de matemática financeira em concursos**. Disponível em: http://www.qconcursos.com. Acesso em: 11 de julho de 2018.

[22] Sistema de Proteção ao Crédito (SPC). Disponível em: https://www.spcbrasil.org.br/pesquisas/pesquisa/5365. Acesso em: 11 de Outubro de 2018.