Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Um estudo sobre alguns tópicos em sistemas dinâmicos unidimensionais e aplicações ao cálculo de raízes de uma equação.

Rodolfo Sabino Vicente da Silva

João Pessoa – PB

Outubro de 2018

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pos–Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Um estudo sobre alguns tópicos em sistemas dinâmicos unidimensionais e aplicações ao cálculo de raízes de uma equação.

por

Rodolfo Sabino Vicente da Silva

sob a orientação do

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto

João Pessoa – PB
Outubro de 2018

Catalográfia da publicação
Universidade Federal da Para´ıba
Biblioteca Setorial do CCEN

s586e Silva, Rodolfo Sabino Vicente da.
Um estudo sobre alguns tópicos em sistemas dinâmicos unidimensionais e aplicações ao cálculo de raízes de uma equação / Rodolfo Sabino Vicente da Silva. - João Pessoa, 2018. 43 f.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Bocker Neto
Dissertação (Mestrado) - UFPB/João Pessoa.

1. Sistemas Dinâmicos, Família Quadrática.

I. Bocker-Neto, Prof. Dr. Carlos. II. T´ıtulo.

UFPB/BC

Um estudo sobre alguns tópicos em sistemas dinâmicos unidimensionais e aplicações ao cálculo de raízes de uma equação.

por

Rodolfo Sabino Vicente da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração:

Aprovada em 31 de Outubro de 2018.

Banca Examinadora:

Carlos Bocker Neto

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto – UFPB
(Orientador)

Thiago José Machado

Prof. Dr. Thiago José Machado – UFPB
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro – UFPB
(Examinador Interno)

A DEUS por todas as suas
incontáveís misericórdias
para comigo!

Agradecimentos

A DEUS sem o qual eu nada posso fazer, pelo seu cuidado incansável quando me encontrei prestes a esmorecer, aos meus professores pela sua inestimável ajuda, em especial ao professor Bruno que me deu uma nova chance de continuar no mestrado e ao professor Bocker pela sua paciência ao me orientar, e também não posso esquecer dos meus amigos que tanto me ajudaram nessa jornada. A todos deixo os meus agradecimentos, pois sem vocês esse êxito não seria possível.

Resumo

Este trabalho traz um estudo introdutório sobre sistemas dinâmicos unidimensionais discretos. Abordamos os conceitos iniciais para o estudo de sistemas dinâmicos, tais como, as noções de órbitas, ponto fixo e de ponto periódico. Além disso, estudamos o comportamento dinâmico de uma família a um parâmetro de funções quadráticas que, surpreendentemente, apresenta comportamentos muito distintos para diferentes parâmetros. Encerramos nosso trabalho com uma pequena discussão sobre o cálculo de raízes de uma equação através de iterações, em especial apresentamos o método de Newton como um desses métodos.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos, família quadrática, iteração de funções, método de Newton. .

Abstract

This work presents an introductory study on discrete one-dimensional dynamical systems. We approached the initial concepts for the study of dynamical systems, such as the notions of orbits, fixed point and period point. In addition, we study the dynamical behavior of an one-parameter family of quadratic functions that, surprisingly, presents very different behaviors for different parameters. We finish our work with a small discussion about the root calculation of an equation through iterations, in particular Newton's method is one of these methods.

Keywords: Dynamical systems, quadratic family, iteration of functions, Newton method.

Sumário

Introdução

Um Sistema Dinâmico Discreto consiste de um conjunto de estados possíveis, juntamente com uma regra que determina o estado presente em termos do estado passado, cujo estado só muda durante os instantes $\{t_0, t_1, ...\}$, ou seja, o sistema faz exame do estado atual com a entrada e atualiza a situação produzindo um estado novo com a saída. Da origem do sistema, teremos em vista todas as informações necessárias assim que a regra for aplicada.

A **Equação de evolução** permite calcular o estado x_{n+1}, num instante t_{n+1}, a partir do estado x_n, no instante anterior $x_{n+1} = F(x_n)$ onde $F(x)$ e uma função conhecida. Dado um estado inicial x_0, aplicações sucessivas da função F permitem obter facilmente a sequencia de estados x_n. Em alguns casos pode ser possível obter uma expressão geral para x_n em função de n.

Citamos como uma aplicação simples, a função $f(x) = 2x$, é uma regra que atribui a cada número x o seu dobro. Este é um modelo matemático simples. Poderíamos imaginar que x denota a população de bactérias em uma cultura de laboratório e que $f(x)$ denota a população de uma hora a outra. Se a cultura tem uma população inicial de 10.000 bactérias, depois de uma hora haverá $f(10.000) = 20.000$ bactérias, depois de duas horas haverá $f(f(10.000)) = 40.000$ bactérias e assim por diante.

No parágrafo anterior, discutimos um sistema dinâmico simples cujos estados são n´ıveis populacionais, que mudam com o tempo sob a regra $x_n = f(x_{n-1}) = 2x_{n-1}$. Aqui, a variável n significa tempo, e x_n designa a população no tempo n. Nós vamos exigir que a regra seja determinista, o que significa que podemos determinar o estado atual (população, por exemplo) a partir unicamente dos estados passados. Nenhuma aleatoriedade é permitida em nossa definição de um sistema dinâmico determinístico.

O modelo matemático anterior não é realista para descrever o crescimento populacional sobre recursos limitados. É necessário acrescentar o que se convencionou chamar de suporte da população, o qual representa um valor de saturação. Ele é obtido a partir do modelo logístico a seguir: $x_{n+1} = x_n + \alpha(S - x_n)x_n$, com x_0 dado. Onde S é o suporte. O suporte S serve para tornar o modelo realista com relação a efeitos como a morte e a limitação natural da espécie, claro que ainda assim desprezam-se fatores tais como:canibalismo, dedetização, dentre outros.

Este modelo é válido também para descrever o espalhamento de doenças infecciosas.

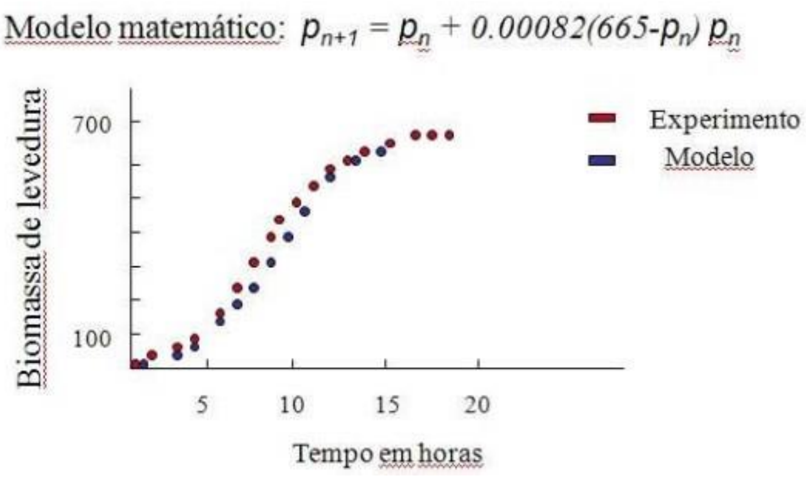

Figura 1: Modelo Realista de Bactéria.

Outro exemplo, num sistema dinâmico discreto de dimensão superior é um problema como o da população de besouros num dado momento, cujo objetivo é entender a dinâmica das populações dos besouros e outros insetos.

Como uma maneira de aprender sobre a fisiologia destes insetos. Uma aplicação comercial de estudos populacionais é o desenvolvimento de estratégias de controle populacional, por exemplo, um grupo de pesquisadores estudou a flutuação populacional do besouro na farinha. A larva passa duas semanas para sair para o estado de pupa e mais duas semanas para se tornar um besouro adulto, desta forma os pesquisadores tomaram um modelo discreto de três populações distintas, para as larvas, pupa e adultos respectivamente, L_t, P_t e A_t.

$$L_{t+1} = bA_t$$

$$P_{t+1} = L_t(1 - \mu_l)$$

$$A_{t+1} = P_t(1 - \mu_p) + A_t(1 - \mu_a)$$

Onde b é a taxa de nascimento da espécie (o número de larvas por adulto, em cada unidade de tempo) e μ_l, μ_p , μ_a sao as taxas de morte da larva, pupa e adulto respectivamente. Chamamos um mapa discreto de três variáveis ou mapa tridimensional, pois o estado da população em um dado momento é especificado por três números L_t, P_t e A_t.

Outra aplicação é o produto interno bruto (PIB) de um país no instante k é dado por P_k. Suponha que o PIB seja função do consumo interno C_k, do investimento I_k, dos gastos realizados pelo governo G_k e do balanço entre exportações e importações B_k, produzindo:

$$P_k = C_k + I_k + G_k + B_k$$

Considere que o consumo interno C_{k+1} é uma fração α ($\alpha \in$ R) de P_k.

Considere que o investimento I_{k+1} é uma fração β ($\beta \in$ R) do que deixou de ser consumido entre dois períodos consecutivos, ou seja, $C_{k+1} - C_k$. Com isso, obtém-se o seguinte modelo matemático:

$$P_{k+1} = C_{k+1} + I_{k+1} + G_{k+1} + B_{k+1}$$

$$P_{k+1} = \alpha P_k + \beta[C_{k+1} - C_k] + G_{k+1} + B_{k+1}$$

$$P_{k+1} = \alpha(1 - \beta)P_k - \alpha\beta P_{k-1} - G_{k+1} + B_{k+1}$$

Este trabalho está dividido em três capítulos da seguinte forma.

No cap´ıtulo 1 estudamos os conceitos fundamentais para o estudo de sistemas dinâmicos tais como: a representação gráfica de um sistema dinâmico unidimensional, a órbita de um ponto, pontos fixos e periódicos e sua classificação quanto a hiperbolicidade. As principais referências utilizadas neste capítulo foram York[8], Von Zuben[7], Villate[6] e Jesus[5].

Já no capitulo 2 estudamos a familia quadrática que é uma família a um parâmetro μ de modelos simplificados de uma população no qual um dos principais objetivos é entender o que ocorre quando variamos o parâmetro μ. Tal estudo tem como referências Devaney[3], Bocker[1] e Hernandez[4].

Finalmente no Capitulo 3, analisamos os sistemas dinâmicos aplicados em métodos numéricos para obtenção de raízes de uma equação, o que é realizado através da simples iteração de um sistema dinâmico adequado que converge para algum ponto fixo e verificamos que o método de Newton é um desses sistemas iterativos. Aqui utilizamos como principal referência Hernandez[4].

Capítulo 1

Sistemas Dinâmicos Unidimensionais Discretos

Um sistema dinâmico discreto unidimensional é uma função $F : A \longrightarrow A$ onde A é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

A evolução do sistema dinâmico F a partir de um estado inicial $x_0 \in A$ é obtida aplicando-se sucessivamente a função F ao estado inicial x_0 o que nos dá a sequência $\{x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F^2(x_0), \ldots, x_n = F^n(x_0)\}, \ldots$ onde $F^n = \underbrace{F \circ F \circ F \circ \ldots \circ F}_{n \text{ vezes}}$.

A Equação de evolução do sistema dinâmico F é dada a partir de x_0 por

$$x_{n+1} = F(x_n). \tag{1.1}$$

Note que tal sistema é dito discreto, pois estamos observando seu estado em tempos discretos $n = 0, 1, 2, \ldots$.

O Conjunto $O(x_0) = \{x_0, F(x_0), F^2(x_0), \ldots\}$ é chamado de órbita do ponto x_0.

Exemplo 1: Encontre os primeiros 4 termos da evolução do sistema $x_{n+1} = \cos(x_n)$, com estado inicial $x_0 = 2$.

Resolução: Aplicando a equação de diferenças três vezes, obtemos os quatro primeiros termos na sucessão: $\{2; 0.99939; 0.99984; 0.99984\}$.

1.1 Análise Gráfica

Uma forma gráfica de representar a evolução do sistema consiste em desenhar um ponto para cada passo na sequência, com abcissa igual ao índice n e ordenada igual a x_n.

Exemplo 2: Usando a variável x com $F(x) = \cos(x)$, com valor inicial $x_0 = 2$. Obtemos o gráfico de evolução dos primeiros 20 termos:

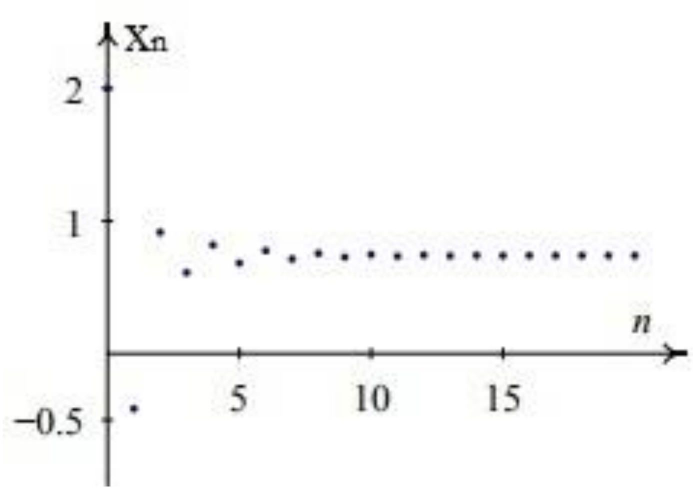

Figura 1.1: Evolução de $x_{n+1} = \cos(x_n)$ com $x_0 = 2$.

Uma outra forma de representar é o **diagrama de degraus** consiste em representar as funções $y = F(x)$ e $y = x$, e uma série alternada de segmentos verticais e horizontais que unem os pontos (x_0, x_0), (x_0, x_1), (x_1, x_1), (x_1, x_2), etc. A principal vantagem na representação pelo diagrama de degraus é que torna possivel saber quando uma sequência converge ou diverge e qual o valor para onde converge.

Por exemplo, a figura 1.2 mostra o diagrama de degraus para o caso da sequência representada na figura 1.1.

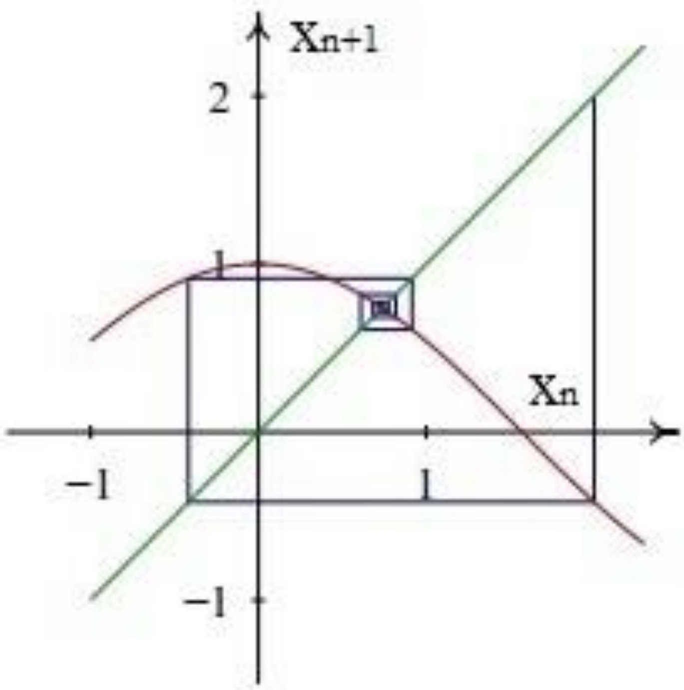

Figura 1.2: **Diagrama de degraus** para $x_{n+1} = \cos(x_n)$ com $x_0 = 2$

1.2 Pontos Fixos

Definição 1.1. Um ponto x^* no domínio de F é denominado um ponto de equilíbrio ou ponto fixo da equação (1.1) quando a partir dele não ocorrem variações do estágio n para o estágio $n + 1$, isto é, quando

$$x_{n+1} = x_n = x^*, \quad \text{para todo } n \geq n_0,\ n \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.2}$$

ou seja, é a solução constante de (1.1).

Teorema 1.1. *Um número x^* é um ponto de equilíbrio de* (1.1) *se, e somente se,* $x^* = F(x^*)$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como x^* é um ponto de equilíbrio, a sequência constante $x_{n+1} = x_n = x^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$ é uma solução de (1.1). Assim, $x^* = x_{n+1} = F(x_n) = F(x^*)$. ($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que $x_0 = x^*$, provemos que a sequência constante (x^*, $x^*, x^*, \ldots$) é solução do sistema. Como $x_0 = x^*$ obtemos $x_1 = F(x_0) = F(x^*) = x^*$, por hipótese; $x_2 = F(x_1) = f(x^*) = x^*$, por hipótese. Assim, sucessivamente, teremos que $x_n = F(x_{n-1}) = F(x^*) = x^*$. Logo, a solução x_n é a sequência constante $(x^*, x^*, x^*, \ldots)$ e portanto, x^* é um ponto de equilíbrio de (1.1). □

Note que se um valor x^* é um ponto de equilíbrio de um sistema, então cada termo subsequente é igual a x^*.

Exemplo 3: Seja a equação $x_{n+1} = F(x_n)$, onde $F(x) = x^3$. Para encontrarmos os pontos fixos dessa equação faremos $F(x^*) = x^*$, ou seja, $(x^*)^3 = x^*$. A solução dessa equação são os pontos de equilíbrio: $x_1^* = -1$, $x_2^* = 0$ e $x_3^* = 1$, conforme mostra a figura 1.3.

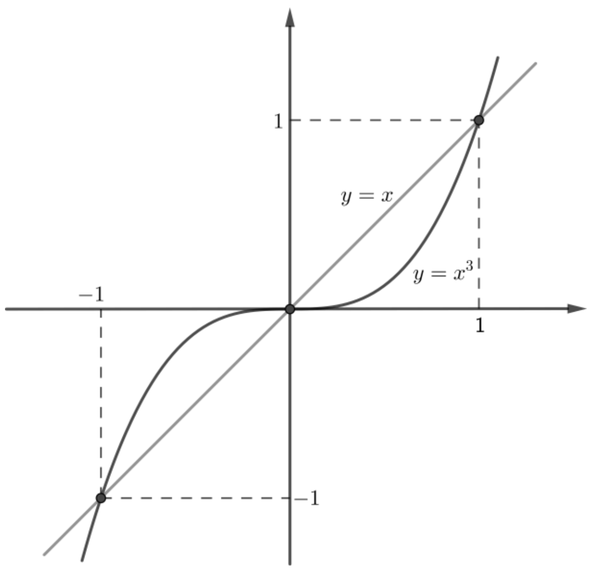

Figura 1.3: $x_{n+1} = x^3_n$ e seus três pontos de equilíbrio: $x^* = -1$, $x^* = 0$ e $x^* = 1$

Exemplo 4: Seja a equação $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}$, onde $F(x) = 5 - \frac{6}{x}$. As soluções $F(x^*) = 5 - \frac{6}{x}$ são os pontos fixos: $x^*_2 = 2$ e $x^*_1 = 3$, como mostra a figura 1.4.

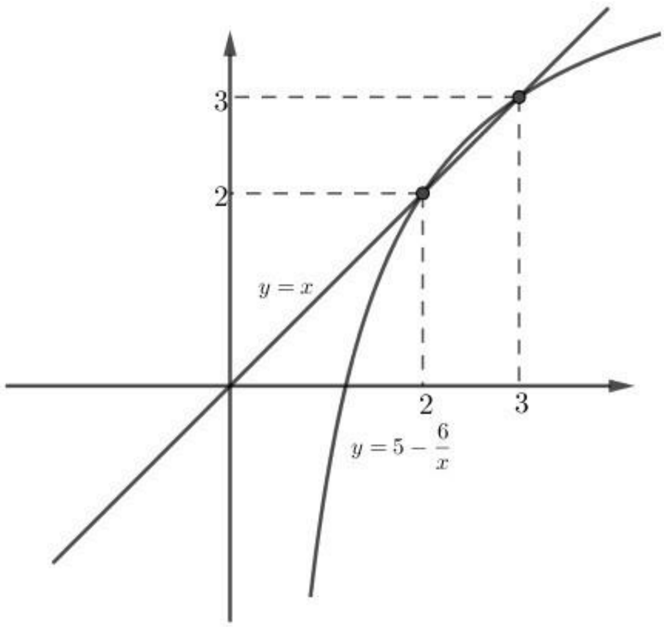

Figura 1.4: $x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n}$ e seus dois pontos fixos: $x^* = 2$ e $x^* = 3$.

Alguns exemplos elementares de sistemas dinâmicos discretos são a progressão aritmética e a progressão geométrica como destacaremos abaixo.

Denominamos de progressão aritmética uma sequência definida da seguinte forma:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r,$$

onde a_n é o enésimo termo da progressão e r é a razão da mesma.

Denominamos de progressão geométrica uma sequência definida da seguinte forma:

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

Onde a_n é o enésimo termo da progressão e q é a razão da mesma.

Note que a progressão aritmética de razão r e primeiro termo igual a a_1 é a evolução do sistema dinâmico $f(x) = x+r$ evoluída a partir de $x_0 = a_1$ e a progressão geométrica de razão q e primeiro termo igual a a_1 é a evolução do sistema dinâmico $g(x) = qx$, começando com $x_0 = a_1$.

1.3 Ponto Fixo Hiperbólico

Definição 1.2. Seja F um difeomorfismo e x um ponto fixo de F. Dizemos que x é um ponto fixo hiperbólico se $|f'(x)| = 1$. Se $|f'(x)| < 1$ dizemos que esse ponto fixo é um atrator, e se $|f'(x)| > 1$ dizemos que é um ponto fixo repulsor. Um ponto fixo com derivada igual a 1 ou −1 é dito não-hiperbólico.

Definição 1.3. Seja $F : X \to X$ uma aplicação, e seja $x^* \in X$ tal que $F(x^*) = x^*$, ou seja, x^* é um ponto fixo de $F(x)$. Então:
(I) x^* é um ponto fixo estável se para todo $s > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $|x - x^*| < \delta$, então $|F^n(x) - x^*| < s$ para todo $n \in Z^+$.
Quando isto não ocorre, x^* se chama ponto fixo instável.
(II) x^* se diz ponto fixo atrator se existe um número real $\eta > 0$ tal que

$$|x - x^*| < \eta \Rightarrow \lim_{n\to\infty} F^n(x) = x^*.$$

(III) x^* se chama assintoticamente estável se é ao mesmo tempo estável e atrator.

Caso exista $s > 0$ tal que para todo $x \neq x^*$, exista algum $n \in Z^+$ tal que $|F^n(x) - x^*| > s$, então o ponto fixo é repulsor.

Teorema 1.2. *Seja $F : X \to X$ uma função diferenciável e $F'(x)$ contínua (F de classe C^1) . Então:*
(I) *Se x^* é um ponto fixo de $F(x)$ com $|F'(x^*)| < 1$, então x^* é assintoticamente estável. Logo as iterações de F na vizinhança do ponto fixo convergem para ele, ou seja, existe uma constante $0 < \lambda < 1$ tal que $|F^n(x) - x^*| < \lambda^n|x - x^*|$ para todo $n \in Z^+$ e para todo $x \in X$ suficientemente próximo de x^*.*
(II) *Se x^* é um ponto fixo de $F(x)$, tal que para todo $x \neq x^*$ temos $|F'(x) - x^*| > 1$, então x^* é um ponto fixo repulsor de F.*

Demonstração. (I) Suponhamos X intervalo aberto e $|F'(x^*)| < \lambda < 1$ para algum $\lambda > 0$. Então pela continuidade de $F'(x)$ existe um intervalo aberto $I \subset X$ tal que $|F'(x)| < \lambda < 1$ para todo $x \in I$. Pelo Teorema do Valor Médio existe um $c \in I$ que satisfaz

$$F'(c) = \frac{F(x) - F(x^*)}{x - x^*},$$

de modo que

$$|F(x) - x^*| = |F'(c)||x - x^*| < \lambda |x - x^*|$$

ou seja, $F(x)$ está mais próximo de x^* do que está x.

Repetindo o processo para $F(x)$ no lugar de x, e assim sucessivamente, temos:

$$|F^2(x) - x^*| < \lambda^2 |x - x^*|, \ldots, |F^n(x) - x^*| < \lambda^n |x - x^*|.$$

E como $\lambda^n \to 0$, quando $n \to \infty$ se conclui que $F^n(x) \to x^*$ quando $n \to \infty$. Portanto, x^* é estável e atrator, ou seja, assintoticamente estável.

(II) Suponhamos agora que $1 < \lambda < |F'(x^*)|$.

Pela continuidade de $F'(x)$ existe um intervalo aberto $I \subset X$, com $x^* \in I$, tal que $1 < \lambda < |F'(x)|$, para todo $x \in I$. Então pelo Teorema do Valor Médio, se $x \in I$, existe um $c \in I$ que verifica

$$|F(x) - x^*| = |F'(c)||x - x^*| > \lambda |x - x^*|.$$

ou seja, se $F(x)$ não pertence a I, então $F(x)$ está separado de x^*.

Repetindo o processo para $F(x)$ no lugar de x e assim sucessivamente, chegamos a que $F^n(x) \notin I$ ou $|F^n(x) - x^*| > \lambda^n |x - x^*|$. Como agora $\lambda^n \to \infty$ quando $n \to \infty$, as iterações de pontos vizinhos a x^* tendem a distanciar-se de x^*. Portanto, x^* é um ponto fixo instável. □

Consideremos um ponto fixo, onde a função $F(x)$ intersecta a reta $y = x$, e com a derivada da função, $F'(x)$:

Se esboçarmos o diagrama de degraus a partir de um ponto perto do ponto fixo, a sequência se afastar do ponto fixo formando uma escada. Designamos esse tipo de ponto fixo de *nó repulsivo*. Analogamente, se a derivada da função F tiver o valor entre 0 e 1, as sequências que começarem próximas do ponto fixo aproximam dele na forma de uma escada chamamos de *nó atrativo*.

Se a derivada for negativa e menor do que −1 as sequências também se afastam do ponto fixo, mas nesse caso alternando-se de um lado para o outro, formando uma teia de aranha no diagrama de degraus, dizemos que o ponto fixo é um *foco repulsivo*. Analogamente, se a derivada da função F tiver um valor compreendido entre −1 e 0, e as sequências começarem perto do ponto fixo aproximam-se dele alternando de um lado para o outro como uma teia de aranha no diagrama de degraus e o chamamos de *foco atrativo*.

Temos resumidamente os seguintes casos:

1. *nó atrativo*, se $0 \leq F^{j}(x_0) < 1$.

2. *nó repulsivo*, se $F(x_0) > 1$.

3. *foco atrativo*, se $-1 < F^{j}(x_0) < 0$.

4. *foco repulsivo*, se $F^{j}(x_0) < -1$.

Observação 1.1. Se $F^{j}(x_0)$ for igual a 1 ou -1, a situação é mais complexa: o ponto fixo poderá ser atrativo ou repulsivo, ou atrativo num lado e repulsivo no outro.

Exemplo 5: Seja a equação $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$, onde $F(x) = 4x(1 - x)$. As soluções $F(x^*) = 4x^*(1 - x^*) = x^*$ são os pontos fixos 0 e 0.75.
Que podem ser obtidos no Maxima com o comandos **Solve**. O valor da Derivada de nos pontos fixos é:
No ponto fixo $x = 0.75$, temos $F^{j}(0,75) = -2$, há um *foco repulsivo*.
No ponto fixo $x = 0$, temos $F^{j}(0) = 4$, há um *nó repulsivo*.

1.4 Pontos Periódicos

Se a sequência $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$ for uma solução do sistema dinâmico:

$$x_{n+1} = F(x_n) \tag{1.3}$$

Um elemento qualquer na sequencia pode ser obtido diretamente a partir de x_0 , por meio da função composta:

$$x_n = F^n(x_0) = F(F(F(...F(x_0)))) \tag{1.4}$$

uma solução será um **ciclo** de período 2 se for uma sequência de dois valores alternados: $\{x_0, x_1, x_0, x_1, ...\}$, com $x_0 \; f\!= x_1$. Os dois pontos x_0, x_1 são pontos periódicos com período igual a 2. Como $x_2 = F^2(x_0) = x_0$, é necessário que $F^2(x_0) = x_0$. E como $x_3 = F^2(x_1) = x_1$ temos também que $F^2(x_1) = x_1$. Ainda, como $F(x_0) = x_1 \; f\!= x_0$, ́e
preciso que $F(x_0) \; f\!= x_0$, e como $F(x_1) = x_0 \neq x_1$, também é preciso que $F(x_1)$ x_1.

Todas as condições anteriores podem ser resumidas dizendo que dois pontos x_0 e x_1 formam um ciclo de período 2, se ambos forem pontos fixos da função $F^2(x)$, mas sem ser pontos fixos da função $F(x)$.

O ciclo será atrativo ou repulsivo segundo o valor que a derivada de F^2 tiver em cada ponto do ciclo. Para calcular a derivada de F^2 em x_0 usa-se a regra da cadeia:

$$(F^2(x_0)^j) = (F(F(x_0))^j) = F^j(F(x_0))F^j(x_0) = F^j(x_1)F^j(x_0)$$

Assim, a derivada de F^2 é igual nos dois pontos x_0, x_1 que fazem parte do ciclo, e é igual ao produto da derivada de F nos dois pontos.

Generalizando, um ponto x_0 faz parte dum ciclo de período m, se $F^m(x_0) = x_0$, mas $F^j(x_0) \neq x_0$, para $j < m$. Os pontos que formam o ciclo completo são:

$$x_0$$

$$x_1 = F(x_0)$$

$$x_2 = F^2(x_0)$$

$$.$$

$$x_{m-1} = F^{m-1}(x_0)$$

Todos esses pontos sao pontos fixos de F^m, mas não podem ser pontos fixos de F^j, com $j < m$. Se o valor absoluto do produto da derivada nos m pontos do ciclo: $\prod_{j=0}^{m-1} F^j(x_j)$ for maior que 1, o ciclo será repulsivo; se o produto for menor que 1, o ciclo será atrativo, e se o produto for igual a 1, o ciclo poderá ser atrativo ou repulsivo, em diferentes regiões.

Exemplo 6: Encontre os ciclos de período igual a 2 do sistema logístico

$$x_{n+1} = 3,1x_n(1 - x_n)$$

e diga se são atrativos ou repulsivos.

Começamos por definir a funçao $F(x)$ e a função composta $F^2(x)$:

$$F(x) = 3,1x(1 - x)$$

$$F^2(x) = 3,1(3,1x - 12,71x^2 + 19,22x^3 - 9,61x^4)$$

Os pontos periódicos de período igual a dois estarão entre as soluções da equaçao:

$$F^2(x) - x = 0$$

$$\left\{x = \frac{\sqrt{(41)} - 41}{62},\ x = \frac{\sqrt{(41)} + 41}{62},\ x = \frac{21}{31},\ x = 0\right\}$$

Os dois últimos pontos, nomeadamente 0 e $\frac{21}{31}$ são pontos fixos (a demonstração disto pode ser feita simplesmente conferindo que essa equação é válida para cada um desses pontos).

Portanto, os outros dois pontos deverão formar um ciclo de período dois; se o estado inicial for igual a um desses pontos, obtém-se uma sequência que oscila entre esses dois pontos.

Para determinar se o ciclo e atrativo ou repulsivo, calcula-se o produto da derivada em cada um dos dois pontos do ciclo Usando o Maxima temos que os pontos periódicos são:

P1: -0. 3596875787352

P2: - 1.640312421264802

Cujo produto é 0.5900000031740065. O valor absoluto do produto das duas derivadas e menor que 1 e, portanto, o ciclo é atrativo.

Capítulo 2

A Família Quadrática

A família quadrática se tornou muito conhecida a partir da pesquisa sobre o cres cimento demográfico feita pelo biólogo Robert May no ano de 1976 e a mesma pode ser expressa matematicamente da seguinte forma $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$ onde μ é o parâmetro que varia. O parâmetro μ vária de acordo com a populacão que desejamos estudar, caso tivéssemos com uma praga numa plantação por exemplo, desejaríamos que o parâmetro μ variasse entre 0 e 1, pois assim teríamos a extinção dessa praga, caso fosse a população de uma espécie animal, como baleias, por exemplo, desejaríamos que a sua população continuasse a crescer, neste caso precisaríamos de um parametro $\mu > 1$.

May pretendia modelar o crescimento de uma população e mostrar que seu crescimento se torna cada vez mais lento à medida que se aproxima de um determinado limite. Também chegou a concluir que em alguns dos intervalos que estudaremos a seguir este comportamento se torna caótico, pois uma ínfima variacão nas condiçoes iniciais muda drasticamente seu comportamento.

Note que: $F(x) = \mu x(1 - x)$ tem dois pontos fixos, a saber e

$$\mu x(1 - x) = x$$

$x = 0$ ou $x \neq 0$, se $x \neq 0$ então temos:

$$F(p_\mu) = \mu p_\mu(1 - P_\mu) = p_\mu$$

$$\mu - \mu p_\mu = 1$$

$$-\mu p_\mu = 1 - \mu$$

$$p_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu}$$

Antes de iniciamos o estudo de alguns casos da família quadrática, temos o seguinte exemplo: Calcular os 10 primeiros termos da sequência definida pela equação:

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \tag{2.1}$$

Usando os seguintes valores iniciais $x_0 = 0.75$, $x_0 = 0.76$ e $x_0 = 0.77$, respectivamente.

Resolução:

Ao aplicamos $x_0 = 0.75$ na equação (2.1) e iterando uma vez obtemos o ponto fixo 0.75 a partir daí todos os iterados são iguais a 0.75.

Por outro lado, ao aplicamos $x_0 = 0.76$ na equação (2.1) e iterando 10 vezes temos:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.72960000\\
x_2 &= 0.78913536\\
x_3 &= 0.66560297\\
x_4 &= 0.89030261\\
x_5 &= 0.39065546\\
x_6 &= 0.95217508\\
x_7 &= 0.18215076\\
x_8 &= 0.59588744\\
x_9 &= 0.96322238\\
x_{10} &= 0.14170007
\end{aligned}$$

Ou seja, aparentemente a equação não vai para nenhum ponto fixo, quando tomamos o valor inicial $x_0 = 0.76$

Ao aplicamos $x_0 = 0.77$ na equação (2.1) e iterando 10 vezes temos:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.70839999\\
x_2 &= 0.82627776\\
x_3 &= 0.57417129\\
x_4 &= 0.97799447\\
x_5 &= 0.08608511\\
x_6 &= 0.31469788\\
x_7 &= 0.86265250\\
x_8 &= 0.47393263\\
x_9 &= 0.99728196\\
x_{10} &= 0.01084257
\end{aligned}$$

Ou seja, aparentemente a sequência não vai para nenhum ponto fixo, quando tomamos o valor inicial $x_0 = 0.77$.

Teorema 2.1. *Seja $\mu > 1$. Se $x \notin [0,1]$ então $F_\mu^k(x) \longrightarrow -\infty$, quando $k \longrightarrow \infty$*

Para ilustrar a demonstração temos a figura abaixo:

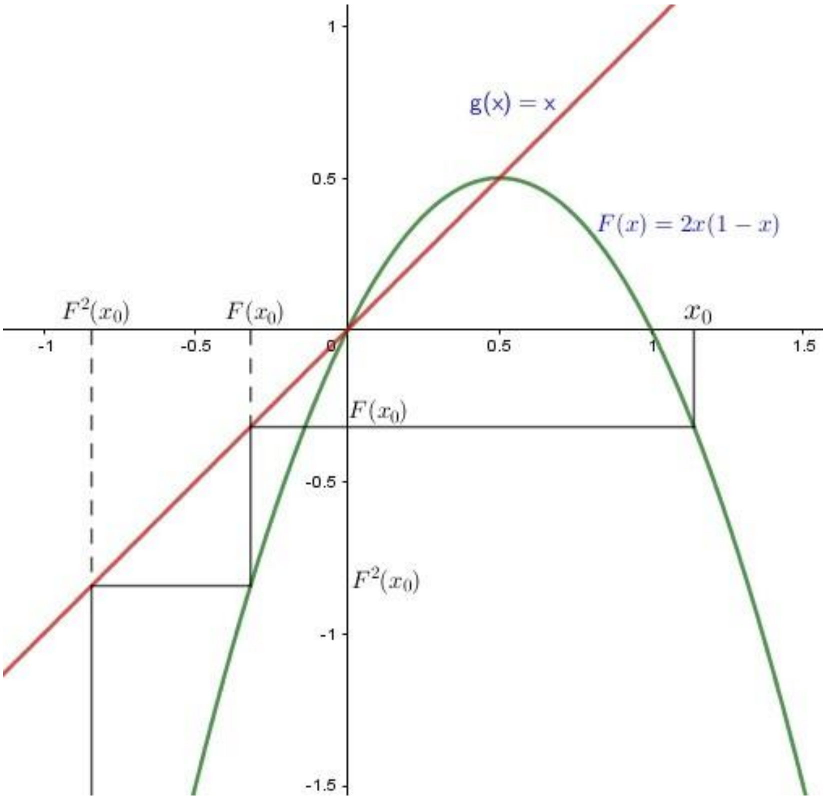

Figura 2.1: Teorema 2.1

Demonstração. Para $x < 0$, $F_\mu^{'}(x) = \mu - 2\mu x > 1$. Portanto, se $x_0 < 0$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $x_0 < \overline{x} < 0$ e como $F_\mu^{'}(\overline{x}) > 1$ e $F_\mu^{'}(\overline{x})x_0 < x_0$, temos que $F_\mu(x_0) = F_\mu(x_0) - F_\mu(0) = F_\mu(\overline{x})x_0 < x_0$. Por monotonicidade de F_μ, para $x_0 < 0$, temos:

$$x_0 > F_\mu(x_0) > F_\mu^2(x_0) > \ldots > F_\mu^k(x_0) > \ldots$$

Se esta óbita fosse limitada, ela deveria convergir para algum ponto fixo negativo. Como não há tal ponto, $F_\mu^k(x_0) \longrightarrow -\infty$.

Se $x_0 > 1$, então $F_\mu(x_0) < 0$ e, assim, $F_\mu^k(x_0) = F_\mu^{k-1}(F_\mu(x_0)) \longrightarrow -\infty$ □

2.1 Caso: $1 < \mu < 3$

Neste caso vamos estudar quando o parâmetro μ está entre 1 e 3.

Definição 2.1. Um ponto x é positivamente assintótico a p se

$$\lim_{n\to\infty} |F^n(x) - F^n(p)| = 0.$$

O conjunto estável de p, denotado por $W^s(p)$, consiste de todos os pontos positivamento assintóticos a p. Observamos que no caso em que p é periódico de período n, dique que x é positivamente assintótico a p é equivalente a dizer que $\lim_{j\to\infty} |F^{jn}(x)| = p$.

Se F é invertível, dizemos que x é negativamente assintótico a p se

$$\lim_{n\to-\infty} |F^n(x) - F^n(p)| = 0.$$

O Conjunto dos pontos negativamente assintóticos a p é chamado de conjunto instável de p e é denotado por $W^u(p)$.

Sabendo que $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu} = 1 - \frac{1}{\mu}$ é um ponto fixo atrator, pois ao se tomar um ponto próximo deste ponto fixo a sequência aproxima-se dele, logo vale o seguinte teorema.

Teorema 2.2. *Se $x \in (0, 1)$, então $F_\mu^k(x)$ converge para p_μ quando $k \to \infty$. Portanto, $W^s(p_\mu) = (0, 1)$.*

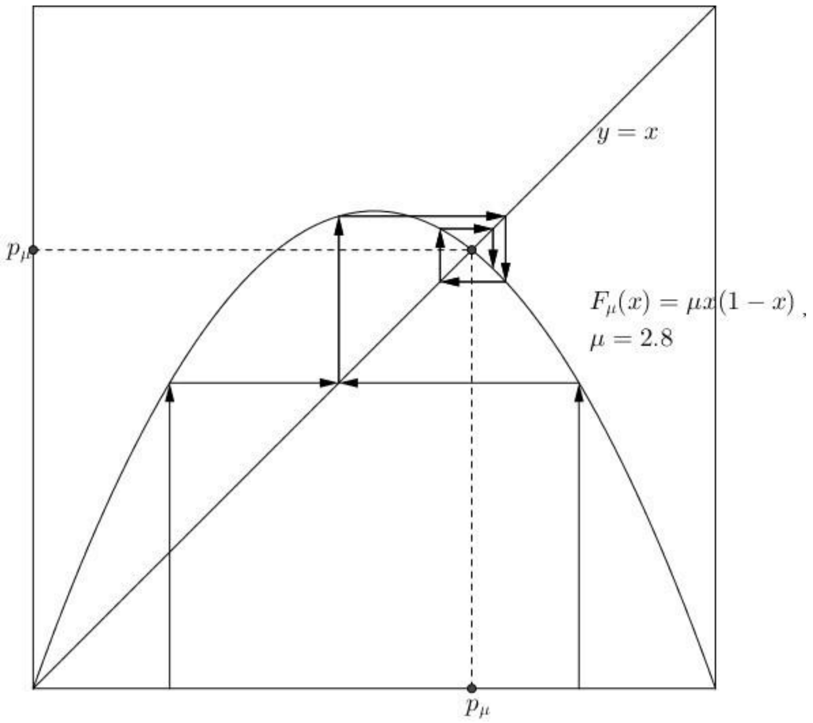

Figura 2.2: Os iterados dos $x \in (0, 1)$ tendem a p_μ.

Demonstração. Dividiremos a demonstração em dois casos:
(I) Considere primeiramente $1 < \mu \le 2$. O máximo de F_μ ocorre em $x = \frac{1}{2}$. Para estes parâmetros $F_\mu(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4} \le \frac{1}{2}$ e, portanto, $p_\mu = F_\mu(p_\mu) \le \frac{1}{2}$.
A função é, portanto monótona crescente sobre $(0, p_\mu)$ e o gráfico de F_μ está acima da diagonal $(y = x)$. Logo, para $x_0 \in (0, p_\mu)$, a sequência de $F_\mu^k(x_0)$ é monótona crescente

e limitada por p_μ, e consequentemente converge para o ponto fixo p_μ.

Analogamente, sobre o intervalo $(p_\mu, \frac{1}{2}]$ a função é monótona crescente e o gráfico de F_μ está abaixo da diagonal.

Dessa forma, para $x_0 \in (p_\mu, \frac{1}{2}]$, a sequência $F_\mu^k(x_0)$ decresce de maneira monótona para p_μ. Finalmente, para $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, $F_\mu(x_0) \in (0, \frac{1}{2})$ e, assim $F_\mu^k(x_0)$ converge para p_μ.

Isto completa a prova para $1 < \mu \leq 2$.

(II) Agora suponha que $2 < \mu < 3$ e, portanto, $p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu} > \frac{1}{2}$.

Seja $\hat{p}_\mu = 1 - p_\mu = \frac{1}{\mu} < \frac{1}{2}$, assim $F_\mu(\hat{p}_\mu) = p_\mu$.

(a) Considere o intervalo $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$. Aplicando F_μ, temos:

$$F_\mu([\hat{p}_\mu, p_\mu]) = F_\mu([\frac{1}{2}, p_\mu]) = [p_\mu, \frac{\mu}{4}].$$

Então,

$$F_\mu^2([\hat{p}_\mu, p_\mu]) = [\mu(\frac{\mu}{4})(1 - \frac{\mu}{4}), p_\mu] \tag{2.2}$$

Queremos mostrar que

$$F_\mu^2([\hat{p}_\mu, p_\mu]) \subset [\frac{1}{2}, p_\mu] \subset [\hat{p}_\mu, p_\mu].$$

Por (2.2), é suficiente mostrar que

$$\mu(\frac{\mu}{4})(1 - \frac{\mu}{4}) > \frac{1}{2}$$

Ou equivalentemente,

$$0 > \mu^3 - 4\mu^2 + 8 = (\mu - 2)(\mu^2 - 2\mu - 4)$$

As raízes de $\mu^2 - 2\mu - 4$ são $1 + \sqrt{5}$ e $1 - \sqrt{5}$ e, assim, este fator é negativo para $\mu < 3$. O primeiro fator $\mu - 2$ é positivo, assim o produto é negativo, como queríamos mostrar. Portanto, concluímos que

$$F_\mu^2([\hat{p}_\mu, p_\mu]) \subset [\frac{1}{2}, p_\mu] \subset [\hat{p}_\mu, p_\mu].$$

Além disso, $F_\mu^2(\frac{1}{2}) = \mu(\frac{\mu}{4})(1 - \frac{\mu}{4}) > \frac{1}{2}$. Portanto, sobre o interval $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$ o gráfico de F_μ^2 cruza a diagonal uma vez e é exatamente em p_μ, pois F_μ^2 não possui outros pontos fixos além de 0 e p_μ. Como o gráfico de F_μ^2 está acima da diagonal no intervalo $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$, todos os pontos neste intervalo convergem para p_μ.

(b) Se $x_0 \in (0, \hat{p}_\mu)$ então, pela monotonicidade de F_μ e pelo fato de que o gráfico de F_μ está acima da diagonal nesse intervalo, temos que $F_\mu^k(x_0)$ é monótona crescente

enquanto $F_\mu^k(x_0)$ pertencer a $(0, \hat{p}_\mu)$.
Como $F_\mu(\hat{p}_\mu) = p_\mu$, o primeiro iterado de $F_\mu^k(x_0)$ que deixa $(0, \hat{p}_\mu)$ deve pertencer a $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$, isto é, $F_\mu^j(x_0) \in [\hat{p}_\mu, p_\mu]$ para algum $j > 0$.
Entao $F_\mu^{j+k}(x_0)$ converge para p_μ.
(c) Finalmente, se $x_0 \in (p_\mu, 1)$, então $F_\mu(x_0) \in (0, p_\mu)$ e, assim, $F_\mu^k(x_0)$ converge para p_μ.
Combinado os três casos, provamos o teorema. □

Portanto, para $1 < \mu < 3$, F_μ possui dois pontos fixos e todos os outros pontos em $[0, 1]$ são assintóticos a p_μ.

2.2 Caso: $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$

Antes de fazemos a análise de como se comporta o parâmetro μ da família quadrática neste intervalo se faz necessário o conceito de ponto fixo não hiperbólico.

Pontos Fixos Não Hiperbólicos

Dentre os pontos fixos instáveis existem alguns que são estaveis apenas pela direita ou pela esquerda, estes são chamados de semi-estáveis.

Definição 2.2. Um ponto fixo x^* se denomina não-hiperbólico quando temos $|F'(x^*)| = 1$.

Teorema 2.3. *Seja x^* um ponto fixo não hiperbólico de $F(x)$, sendo $F'(x^*) = 1$. Se $F'(x)$, $F''(x)$ e $F'''(x)$ são continuas em $x = x^*$, temos:*
(I) Se $F''(x^*) \neq 0$, então x^* é ponto fixo semi-estável.
(II) Se $F''(x^*) = 0$ e $F'''(x^*) > 0$, então x^* é ponto fixo instável.
(III) Se $F''(x^*) = 0$ e $F'''(x^*) < 0$, então x^* é ponto fixo assintoticamente estável.

Demonstração. (I)Se $F'(x^*) = 1$ então $F(x)$ é tangente a $y = x$ em $x = x^*$.
Suponhamos $F''(x^*) > 0$, sem perda de generalidade, de modo que $F(x)$ é côncava está acima em $x = x^*$.

Como as derivadas são continuas por hipótese, neste caso temos que $F''(x^*) > 0$ para todo $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$, $\delta > 0$. Desta forma $F'(x)$ deve ser crescente neste intervalo, e como $F'(x^*) = 1$ temos:

$$F'(x) < 1, \forall x \in (x^* - \delta, x^*)$$

$$F'(x) > 1, \forall x \in (x^*, x^* + \delta).$$

Pela continuidade de $F'(x)$ podemos supor que $F'(x) > 0$ neste intervalo. Então pelo Teorema do Valor Médio aplicado ao intervalo $[x, x^*] \subset (x^* - \delta, x^*]$, existe $q \in (x, x^*)$ verificando:

$$F'(q) = \frac{F(x) - F(x^*)}{x - x^*},$$

e como $0 < F'(q) < 1$ e $x^* > x$ se têm:

$0 < \frac{F(x)-F(x^*)}{x-x^*} < 1$, de modo que $x < F(x) < x^*$.

Reiterando este processo podemos ver que a sequência $F^n(x)$ é crescente e limitada superiormente por x^*. Além disso não pode existir outro ponto fixo neste intervalo já que então o Teorema do Valor Médio daria $F'(q_1) = 1$ para algum $q_1 \in (x, x^*)$, o que seria uma contradição.

Logo, temos que x^* é estável e atrator pela direita.

Por outro lado, se consideramos $[x^*, x] \subset [x^*, x^* + \delta)$. Aplicando de novo o Teorema do Valor Médio se obtém: $F'(q) = \frac{F(x)-F(x^*)}{x-x^*} > 1$, de modo que $F(x) > x > x^*$, Pois $x > x^*$.

Repetindo este processo temos que os pontos próximos a x^* se distanciam por iterações da função, e portanto o ponto fixo x^* é instável pela esquerda.

Para verificar o mesmo quando $F''(x^*) < 0$ o gráfico é côncavo para baixo em $x = x^*$, se utiliza um processo analogo.

(II) Finalmente se $F'''(x^*) = 0$, $F'''(x^*) > 0$ e $F'(x^*) = 1$. De novo há um ponto de inflexão em $x = x^*$ e pelo estudo da segunda derivada se encontra o mínimo local. Se segue que:

$F'(x) > 1$ para todo $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$, $x \quad x^*$ e $\delta > 0$

Em particular, $F'(x) \neq 1$, se $x \neq x^*$, e pelo raciocínio feito em (I) os pontos próximos de x^* se distanciam pelas interações de ambos os lados de x^*. Portanto x^* é um ponto fixo instável.

(III) Para $F'''(x^*) < 0$, $F''(x^*) = 0$ e $F'(x^*) = 1$. Então há um ponto de inflexão em $x = x^*$, e pelo estudo da terceira derivada concluímos que $F'(x)$ têm máximo local em dito ponto.

Pela continuidade se segue que:

$F'(x) < 1$ para todo $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$, $x \quad x^*$ e $\delta > 0$.

Em outras palavras, $F''(x) > 0$ para $x \in (x^* - \delta, x^*)$, de modo que $F'(x)$ é crescente em dito intervalo, e $F'' < 0$ para $x \in (x^*, x^* + \delta)$, assim que $F'(x)$ é decrescente neste intervalo.

Em particular, $F'(x) \neq 1$ se $x \neq x^*$, e fazendo de forma análoga ao usado em I obtemos que x^* é um ponto fixo assintoticamente estável.

□

Definição 2.3. A derivada Schwarziana de $F(x)$ é a função $SF(x)$ definida por

$$SF(x) = \frac{F'''(x)}{F'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{F''(x)}{F'(x)}\right]^2$$

. Quando $F'(x) = -1$,

$$SF(x) = -F'''(x) - \frac{3}{2}[F''(x)]^2.$$

Teorema 2.4. *Suponhamos x^* ponto fixo de $F(x)$ sendo $F'(x^*) = -1$. Se $F'(x)$, $F''(x)$ e $F'''(x)$ são continuas em $x = x^*$, temos:*
(I) Se $SF(x^*) < 0$, então x^* é um ponto fixo assintoticamente estável.
(II) Se $SF(x^*) > 0$, então x^* é um ponto fixo instável.

Demonstração. (I) Definindo $G(x) = F^2(x)$. Então $G(x^*) = x^*$, é o mesmo que dizer que x^* é ponto fixo de G, além disso se x^* é assintoticamente estável em G, então também é em F, Vejamos que efetivamente é assim:

$$G'(x) = \frac{d}{dx}(F(F(x))) = F'[F(x)]F'(x),$$

de modo que

$$G'(x^*) = F'(x^*)F'(x^*) = (-1)(-1) = 1.$$

Então podemos aplicar o teorema anterior a $G(x)$. Começamos por ver que se G'' é igual ou distinta de 0 em $x = x^*$:

$$G''(x) = F'[F(x)]F''(x) + F''[F(x)](F'(x))^2.$$

De modo que

$$G''(x^*) = F'(x^*)F''(x^*) + F''(x^*)(F'(x^*))^2 = -F''(x^*) + F''(x^*) = 0$$ao

estudamos a derivada terceira obtemos:

$$G'''(x) = F''[F(x)]F'(x)F''(x) + F'[F(x)]F'''(x) + F'''[F(x)](F'(x))^3$$
$$+F''[F(x)]2F'(x)F''(x).$$

portanto, em $x = x^*$:

$$G'''(x^*) = [F''(x^*)]^2(-1) - F'''(x^*) - F'''(x^*) + 2F''(x^*)(-1)F''(x^*)$$
$$= -2F'''(x^*) - 3[F''(x^*)]^2 = 2SF(x^*)$$

e por hipótese $SF(x^*) < 0$), de modo que $G'''(x^*) = 2SF(x^*) < 0$ e concluímos que x^* é assintoticamente estável em F.

(II) De forma análoga ao procedido em (I), para $G(x) = F^2(x)$, obtemos igualmente que $G'(x^*) = 1$ e $G''(x^*) = 0$. Porém, agora $G'''(x^*) = 2SF(x^*) > 0$ já que por hipótese $SF(x^*) > 0$. Concluímos que x^* é instável. □

Teorema 2.5. *Para $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$ a família quadrática $F_\mu(x) = \mu(1 - x)$ tem um 2-ciclo assintótico estável. Para $1 + \sqrt{6} < \mu$ o 2-ciclo é instável.*

Demonstração. Para encontrar os 2-ciclos da equação logística $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, $0 \leq x \leq 1$ resolvemos a equação:

$$F_\mu^2(x) = x$$

$$\mu[\mu x(1 - x)][1 - \mu x(1 - x)] - x = 0$$

$$-\mu^3x^4 + 2\mu^3x^3 - (\mu^3 + \mu^2)x^2 + \mu^2x - x = 0.$$

Como $x^* = 0$ e $x^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ são os pontos fixos de $F_\mu(x)$, x e $x - (1 - \frac{1}{\mu})$ devem ser fatores da equação, de modo que:

$$F_\mu^2(x) - x = -x(\mu x - \mu + 1)(\mu^2x^2 - \mu(\mu + 1)x + \mu + 1),$$

obtendo uma equação quadrática que não tem raízes reais se $\mu < 3$:

$$\mu^2x^2 - \mu(\mu + 1)x + \mu + 1 = 0$$

$$x^* = \frac{\mu(\mu + 1) \pm \sqrt{\mu^2(\mu + 1)^2 - 4\mu^2(\mu + 1)}}{2\mu^2}$$

$$= \frac{(1 + \mu) \pm \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}}{2\mu}$$

Sejam x_1^* e x_2^* as raízes resultantes (que dependem de μ). Buscamos que o 2-ciclo seja assintoticamente estável, logo temos:

$$|(F_\mu^2)'(x_1^*)| = |F_\mu'(x_1^*)F_\mu'(x_2^*)| < 1$$

$$-1 < \mu^2(1 - 2x_1^*)(1 - 2x_2^*) < 1$$

$$-1 < (-1 - \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3})(-1 + \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}) < 1$$

$$-1 < 1 - (\mu^2 - 2\mu - 3) < 1,$$

De onde saem duas inequações:

$$\mu^2 - 2\mu - 3 > 0 \quad \text{e} \quad \mu^2 - 2\mu - 5 < 0$$

e resolvendo obtemos o intervalo dos valores de μ buscado:

$$3 < \mu < 1 + \sqrt{6}.$$

Além disso $\mu = 1 + \sqrt{6}$ se têm

$$F_\mu'(x_1^*)F_\mu'(x_2^*) = -1$$

De modo que o 2-ciclo não é hiperbólico. Calculando sua derivada Schwarziana obtemos:

$$SF_\mu^2(x_1^*) < 0$$

Assim que pela caracterização do teorema anterior, o 2-ciclo também é assintoticamente estável. Portanto obtemos que em geral $\{x_1^*, x_2^*\}$ é assintoticamente estável para $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$, e que para $\mu > 1 + \sqrt{6}$ este 2-ciclo é instável. □

2.3 Caso: $\mu > 4$

Como $\mu > 4$, o valor máximo de F_μ, $\frac{\mu}{4}$ é maior que 1, e portanto, existem pontos que deixam o intervalo $I := [0, 1]$ no primeiro iterado, veja o gráfico de F_μ na Figura 2.3. Denote o conjunto de tais pontos por A_0. Claramente, A_0 é um intervalo aberto centrado em $\frac{1}{2}$ e é caracterizado por

$$A_0 = \{x \in I | F_\mu(x) > 1\}.$$

Assim, se $x \in A_0$, então $F_\mu^2(x) < 0$ e portanto $F_\mu^k(x) \longrightarrow -\infty$, quando $k \longrightarrow \infty$. Veja a Figura 2.3

Defina

$$A_1 = \{x \in I | F_\mu(x) \in A_0\}$$

Se $x \in A_1$, então $F_\mu^2(x) > 1$ e portanto $F_\mu^k(x) \longrightarrow \infty$, quando $k \longrightarrow \infty$.

Indutivamente defina

$$A_n = \{x \in I | F_\mu^n(x) \in A_0\},$$

Isto é,

$$A_n = \{x \in I | F_\mu^i(x) \in I, i \leq n, \text{ mas } F_\mu^{n+1}(x) \notin I\}.$$

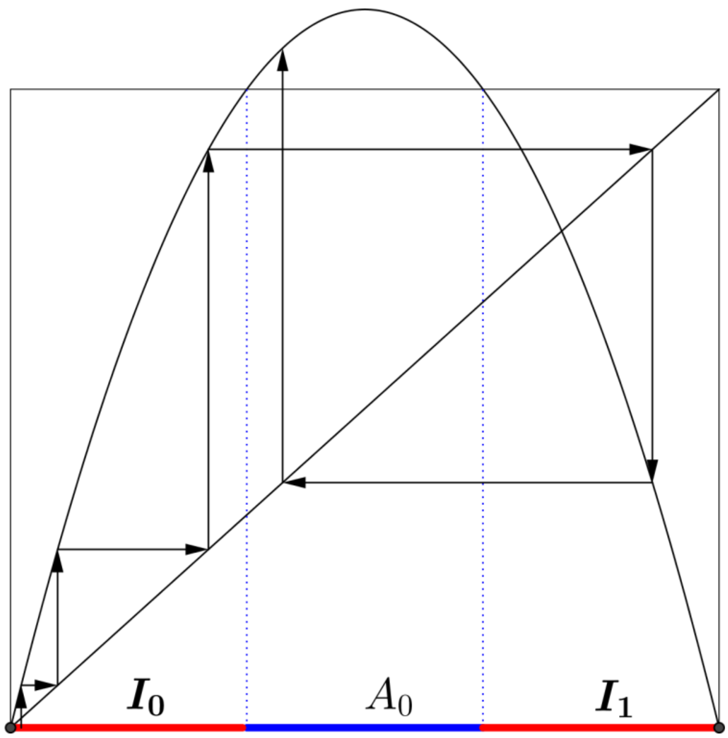

Figura 2.3: Há pontos em (0, 1) que escapam de [0, 1] por iteração de F_μ.

Como acima, concluímos que se $x \in A_n$ então $F^k(x) \longrightarrow -\infty$, quando $k \longrightarrow \infty$. Portanto, resta-nos analisar os pontos que nunca escapam de $\boldsymbol{I}$ por iteração de F_μ, isto é, vamos analisar o conjunto de pontos que se encontram em

$$\Lambda := \boldsymbol{I}\ (\cup_{n=0}^{\infty} A_n)... \tag{2.3}$$

Como A_0 é um interval aberto centrado em $\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{I} \backslash A_0$ consiste de dois intervalos fechados, I_0 do lado esquerdo e I_1 do lado direito de A_0.

Observe que F_μ aplica de forma monótona ambos os intervalos $\boldsymbol{I}_0$ e $\boldsymbol{I}_1$ sobre $\boldsymbol{I}$; de fato, F_μ é crescente em $\boldsymbol{I}_0$ e decrescente em $\boldsymbol{I}_1$ com $F_\mu(\boldsymbol{I}_0) = F_\mu(\boldsymbol{I}_1) = \boldsymbol{I}$.

Assim, existe um par de intervalos abertos, um deles em $\boldsymbol{I}_0$ e o outro em $\boldsymbol{I}_1$ que são levados em A_0 por F_μ. Portanto este par de intervalos é precisamente A_1.

Agora considere $I \backslash (A_0 \cup A_1)$. Este conjunto consiste de quatro intervalos e F_μ leva cada um deles, de maneira monótona, em $\boldsymbol{I}_0$ ou $\boldsymbol{I}_1$. Consequentemente, F_μ^2 leva cada um desses intervalos em I. E, portanto conclu´ımos que cada um desses quatro intervalos em $\boldsymbol{I} \backslash (A_0 \cup A_1)$ contém um subintervalo aberto que é levado por F_μ^2 em A_0. Consequentemente, pontos desses intervalos escapam de I no terceiro iterado de F_μ.

Logo, este conjunto é A_2. Observamos que F_μ^2 em A_0 é alternadamente crescente e decrescente nesses quatro intervalos. Segue que o gráfico de F_μ^2 tem, portanto duas corcovas.

Continuando dessa maneira, notamos que A_n consiste de 2^n intervalos abertos disjuntos e, portanto $I \backslash A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ consiste de 2^n intervalos fechados, uma vez que cada intervalo de A_n corresponde a retirada de um subintervalo de cada um dos intervalos que permanecem em $I \backslash (A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$.

Além disso, F_μ^n aplica, de maneira monótona, cada um desses intervalos sobre I. De fato, F_μ^n é alternadamente crescente e decrescente sobre cada um desses intervalos.

Portanto, o gráfico de F_μ^n tem exatamente 2^{n-1} corcovas sobre I, e consequentemente, o gráfico de F_μ^n cruza a diagonal $y = x$ pelo menos 2^n vezes. Isto implica que F_μ^n tem pelo menos 2^n pontos fixos.

Definição 2.4. Um conjunto Λ é um conjunto de Cantor se ele é **fechado, totalmente desconexo** e um subconjunto perfeito de I. Um conjunto é totalmente desconexo se ele não contém intervalos; um conjunto é perfeito se qualquer de seus pontos é um ponto de acumulação ou ponto limite de outros pontos do conjunto.

Exemplo: (conjunto Terço-Médio de Cantor). Este é um exemplo clássico de um conjunto de Cantor. Comece com $I = [0, 1]$, mas remova o "terco médio"aberto. Isto é, remova o intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Em seguida remova dos dois intervalos que permaneceram os dois terços médios novamente, isto é remova os intervalos $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ e $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Continue removendo os terços médios dessa forma; note que 2^n intervalos são removidos no n-ésimo estágio da construção. Portanto, este procedimento é inteiramente análogo à construção acima.

Teorema 2.6. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então (2.3) é um conjunto de Cantor.*

Demonstração. A hipótese $\mu > 2 + \sqrt{5}$ garante que $|F'_\mu(x) > 1|$ para todo $x \in I_0 \cup I_1 \supset \Lambda$. Portanto, existe $\lambda > 1$ tal que, para todo $x \in \Lambda$, $|F'_\mu(x)| > \lambda$. Pela Regra da Cadeia, $|(F_\mu^n)'(x)| > \lambda^n$ para todo $x \in \Lambda$.

Afirmamos que Λ não contém intervalos. De fato, se existem $x \neq y$ tais que $[x, y] \subset \Lambda$, então pelo Teorema do Valor Médio, $|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| > \lambda^n |x - y|$.

Como o lado direito da última equação tende a infinito, quando $n \longrightarrow \infty$, segue em $|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| > 1$, para algum iterado n suficientemente grande. Isso contradiz a hipótese de que ambos os pontos x e y estão em Λ. Logo, Λ não contém intervalos, isto é, Λ é totalmente desconexo.

Como Λ é uma interseção de conjuntos fechados, Λ é fechado. Agora, vamos provar que Λ é perfeito. Primeiramente, note que qualquer ponto extremo de A_k está em Λ, pois tais pontos são pré-fixos. De fato, se y é um ponto extremo de A_k entao $F_\mu^{k+1}(y) = 1$, e portanto $F_\mu^{k+2}(y) = 0$, o que implica que $F_\mu^n(y) \in I$ para todo $n \in N$. Note ainda que todo ponto extremo A_k é acumulado por pontos extremos de outros A_n, com $n > k$.

Agora, se p é um ponto isolado de Λ, então qualquer ponto próximo de p deve deixar I sob iterações de F_μ. Tais pontos devem pertencer a algum A_k. Assim, ou existe uma sequência de extremidades dos A_k convergindo para p ou então todos os pontos de uma vizinhança de p deixam I no mesmo iterado.

No primeiro caso, p não seria Isolado, pois estaria sendo acumulado por extremidades dos A_k. No segundo caso, existiria um iterado n uma vizinhança de p que seria levada no eixo real negativo, exceto p que seria levado em 0 por F_μ^n. Assim, p serio ponto de máximo para F_μ^n.

Em particular, $(F_\mu^n)'(p) = 0$. Pela Regra da Cadeia, $F_\mu'(F_\mu^i(p)) = 0$ para algum $i < n$.

Portanto, $F_\mu^i(p) = \frac{1}{2}$, o que implica que $F_\mu^{i+1}(p) \notin I$ e, assim, $F_\mu^n(p) \longrightarrow -\infty$, contradizendo o fato de que $F_\mu^n(p) = 0$.

Com isso concluímos a prova de que Λ é perfeito e a prova do teorema. □

NOTA: O teorema acima é verdadeiro para $\mu > 4$, todavia a sua demonstração é mais complexa.

Capítulo 3

Resolução Numérica de Equações

Uma aplicação importante dos sistemas dinâmicos discretos é a na resolução de equações com uma variável. O problema consiste em encontrar as raízes de uma função real F, ou seja, os valores de x que verificam a equação:

$$F(x) = 0 \tag{3.1}$$

Por exemplo, encontrar os valores de x que resolvem a equação:

$$3x^2 - x\cos(5x) = 6$$

Este tipo de equação não tem solução analítica, podendo ser resolvida por métodos numéricos. Tais métodos consistem em encontrar um sistema dinâmico com sequências convergentes que se aproximem das soluções da equação.

3.1 Método de Iteração

Se a equação (3.1) pode ser escrita na forma

$$x = G(x) \tag{3.2}$$

As soluções são os pontos fixos do sistema dinâmico:

$$x_{n+1} = G(x_n) \tag{3.3}$$

Para encontrar um ponto fixo, escolhemos um x_0 qualquer e calculamos a evolução do sistema.

Exemplo 3.1: Encontre a solução da equação $x = \cos(x)$.

Resolução: Esta equação já está escrita numa forma que nos permite usar o método de iteração.

Considerando o sistema dinâmico como relação de recorrência:

$$x_{n+1} = \cos(x_n)$$

Para encontrarmos um ponto fixo, escolhemos um valor inicial qualquer e calculamos a evolução do sistema.

Fazendo $x_0 = 1$ e iterando 15 vezes temos:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.54030230586814\\
x_2 &= 0.85755321584639\\
x_3 &= 0.65428979049778\\
x_4 &= 0.79348035874257\\
x_5 &= 0.70136877362276\\
x_6 &= 0.76395968290065\\
x_7 &= 0.72210242502671\\
x_8 &= 0.75041776176376\\
x_9 &= 0.73140404242251\\
x_{10} &= 0.74423735490056\\
x_{11} &= 0.73560474043635\\
x_{12} &= 0.74142508661011\\
x_{13} &= 0.73750689051324\\
x_{14} &= 0.74014733556788\\
x_{15} &= 0.73836920412232
\end{aligned}$$

A solução da equação é aproximadamente 0.74. Este método foi bem sucedido neste caso, porque o ponto fixo do sistema dinâmico utilizado é um ponto atrator.

Exemplo 3.2: Calcule a raiz de 5, por meio de adicões, multiplicações e divisões.

Resolução: A raiz quadrada de 5 é a solução positiva da equação:

$$x^2 = 5$$

Que pode ser escrita como:

$$x = \frac{5}{x}$$

Resolve-se o sistema dinâmico associado à função:

$$F(x) = \frac{5}{x}$$

É fácil ver que para qualquer valor inicial x_0, diferente de $\sqrt{5}$, a solução desse sistema será sempre um ciclo de período 2:

$$\{x_0, \frac{5}{x_0}, x_0, \frac{5}{x_0}, \ldots\}$$

Para fugir desse ciclo, e aproximarmos do ponto fixo em $\sqrt{5}$, podemos tentar usar o ponto médio:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$$

Esse sistema converge rapidamente para o ponto fixo em $\sqrt{5}$: Fazendo $x_0 = 1$ e iterando 7 vezes temos

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3.000000000000000\\
x_2 &= 2.333333333333334\\
x_3 &= 2.238095238095238\\
x_4 &= 2.236068895643363\\
x_5 &= 2.236067977499978\\
x_6 &= 2.23606797749979\\
x_7 &= 2.23606797749979
\end{aligned}$$

Exemplo 3.3: Admita que a populacão atual de baleias no mundo é 1000 e que cada ano o aumento natural da população (nascimentos menos mortes naturais) é de 25%. Admitindo que o número de baleias abatidas pelos pescadores cada ano fosse 300, e que esse número não mudasse nos próximos anos, como seria a evolução da população de baleias nos próximos 10 anos?

Resolução: No ano de número n, a quantidade de baleias x_n será igual a quantidade de baleias do ano anterior x_{n-1} mais o aumento de 25% deste período, menos as 300 baleias mortas por ano, assim temos a recorrência:

$$x_{n+1} = x_n + jx_n - 300$$

Onde j é a taxa de crescimento da população das baleias anual (25%), a sequência da quantidade de baleias pode ser obtida aplicando de forma repetida a relação de recorrência acima $j := 25\%$, $x := 1000$ e $x := j * x - 300$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 950.00000000000\\
x_2 &= 887.50000000000\\
x_3 &= 809.37500000000\\
x_4 &= 711.71875000000\\
x_5 &= 589.64843750000
\end{aligned}$$

$$x_6 = 437.06054687500$$
$$x_7 = 246.32568359375$$
$$x_8 = 7.9071044921875$$

Ou seja, quando chegasse ao 10° ano a população de baleias do mundo estaria extinta.

Com isso concluimos que $x^* = 0$ é um ponto fixo atrator deste problema.

Analisaremos agora o mesmo **Exemplo 3.3** caso a quantidade inicial de baleias fosse 2000 o que aconteceria após 10 anos?

Resolução: Analogamente ao anterior de onde temos a recorrência:

$$x_{n+1} = x_n + jx_n - 300$$

Onde a quantidade de baleias pode ser obtida aplicando de forma repetida a relação de recorrência acima $j := 25\%$, $x := 2000$ e $x := j * x - 300$

$$x_1 = 2200.000000$$
$$x_2 = 2450.000000$$
$$x_3 = 2762.500000$$
$$x_4 = 3153.125000$$
$$x_5 = 3641.406250$$
$$x_6 = 4251.757812$$
$$x_7 = 5014.697265$$
$$x_8 = 5968.371582$$
$$x_9 = 7160.464477$$
$$x_{10} = 8650.58059$$

É fácil notar que dependendo da quantidade inicial de baleias a relação de recorrência acima pode levar a extinção ou ao crescimento da espécie.

3.2 O Método de Newton

O método de Newton permite encontrar as raízes da equação(3.1). Começamos por admitir que existe uma raiz perto do valor x_0 e melhorarmos a nossa aproximação inicial encontrando o ponto x_1 onde a tangente em $F(x_0)$ corta o eixo dos x, ver Figura 3.1.

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{f'(x_0)} \tag{3.4}$$

Podemos usar a mesma equação para calcular uma outra aproximação x_2 a partir de

x_1. Em geral:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \tag{3.5}$$

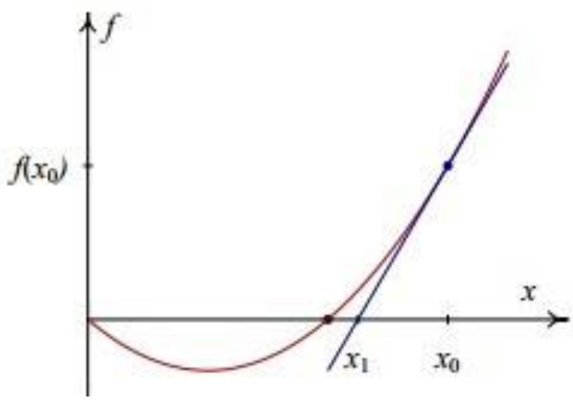

Figura 3.1: Método de Newton para aproximação a uma raiz

É evidente que as raízes de uma função contínua F, onde F é nula, são os pontos fixos do sistema dinâmico definido pela equação(3.5).
A função que gera o sistema(3.5)é:

$$G(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} \tag{3.6}$$

A derivada dessa função é

$$G' = 1 - \frac{(F')^2 - F''F}{(F')^2} = \frac{F''F}{(F')^2} \tag{3.7}$$

Nos pontos fixos, F é igual a zero. Assim, G' também será nula nos pontos fixos. Portanto, os pontos fixos de(3.5)serão sempre atrativos. Ou seja, se o ponto inicial x_0 for escolhido suficientemente próximo duma das raízes de F, a sequência x_n aproximar-se-á dela. O problema está em determinar, em cada caso o que é suficientemente perto.

Para ilustrar o método, vamos resolver novamente o exemplo3.2.pelo método de Newton. A raiz quadrada de 5 é uma das soluções da equação $x^2 = 5$. Assim, para encontrar a raiz de 5 podemos procurar a raiz positiva da função:

$$F(x) = x^2 - 5$$

A derivada dessa função é

$$F'(x) = 2x$$

Substituindo na relação de recorrência(3.5)obtemos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n})$$

Que é exatamente a mesma sequência que já tínhamos encontrado e resolvido por iteração antes.

Porém, desta forma apenas foi preciso aplicar a fórmula padrão do método.

Exemplo 3.4: A sequência que encontramos neste capítulo, para calcular raízes quadradas,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \tag{3.8}$$

Já era conhecida pela civilização suméria há 4000 anos. Usando esse método, calcule $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{234}$. Use qualquer valor inicial positivo, e represente o número **a** como ponto flutuante, para os resultados obtidos no Maxima sejam também em ponto flutuante. Em cada caso, compare o resultado com o valor obtido com a função **sqrt()** do Maxima.

Resolução:

Para $\sqrt{3}$, aplicando a fórmula $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n})$ e iterando 7 vezes temos:

$$x_0 = 2.000000000000000$$
$$x_1 = 1.750000000000000$$
$$x_2 = 1.732142857142857$$
$$x_3 = 1.732050810014727$$
$$x_4 = 1.732050807568877$$
$$x_5 = 1.732050807568877$$
$$x_6 = 1.732050807568877$$

Enquanto o valor usando o MAXIMA para $\sqrt{3}$ é 1.732050807568877.

Para $\sqrt{15}$, aplicando a fórmula $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{15}{x_n})$ e iterando 7 vezes temos:

$$x_0 = 8.000000000000000$$
$$x_1 = 4.937500000000000$$
$$x_2 = 3.987737341772152$$
$$x_3 = 3.874634467930020$$
$$x_4 = 3.872983698008724$$
$$x_5 = 3.872983346207433$$

$$x_6 = 3.872983346207417$$
$$x_7 = 3.872983346207417$$

Enquanto o valor usando o MAXIMA para $\sqrt{15}$ é 3.872983346207417.

Para $\sqrt{234}$, aplicando a fórmula $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{234}{x_n})$ e iterando 10 vezes temos:

$$x_0 = 117.5000000000000$$
$$x_1 = 59.74574468085106$$
$$x_2 = 31.83117080377198$$
$$x_3 = 19.59122776896272$$
$$x_4 = 15.76767451180746$$
$$x_5 = 15.30408175120871$$
$$x_6 = 15.29706015229238$$
$$x_7 = 15.29705854077844$$
$$x_8 = 15.29705854077836$$
$$x_9 = 15.29705854077836$$

Enquanto o valor usando o MAXIMA para $\sqrt{234}$ é 15.29705854077836.

De onde podemos concluir que a fórmula (3.8) trás uma boa aproximação do valor numérico da raiz quadrada pedida com poucas iterações.

Exemplo 3.5: Vamos calcular os 10 primeiros termos da sequência definida pela equação:

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2 \tag{3.9}$$

usando os seguintes valores iniciais $x_0 = 1$, $x_0 = 0.5$, $x_0 = 2$ e $x_0 = 1.999$, respectivamente.

Resolução:

Ao aplicamos $x_0 = 1$ na equação (3.9) e iterando uma vez obtemos o ponto fixo -1 e a partir daí todos os iterados são iguais a -1.

Por outro lado, ao aplicamos $x_0 = 0.5$ na equação (3.9) e iterando 10 vezes temos

$$x_1 = -1.7500000000000000$$
$$x_2 = 1.0625000000000000$$
$$x_3 = -0.871093750000000$$
$$x_4 = -1.241195678710937$$
$$x_5 = -0.4594332871492952$$
$$x_6 = -1.7889210546591930$$
$$x_7 = 1.2002385398029600$$
$$x_8 = -0.559427447571659$$
$$x_9 = -1.687040930903459$$
$$x_{10} = 0.8461071025436091$$

Ou seja, aparentemente a equação não vai para nenhum ponto fixo, quando tomamos o valor inicial $x_0 = 0.5$.

Ao aplicamos $x_0 = 2$ na equação (3.9), vemos que ele é um ponto fixo do sistema e a equação vai diretamente para o ponto fixo $x^* = 2$ quando tomamos o valor inicial $x_0 = 2$.

Ao aplicamos $x_0 = 1.999$ na equação (3.9) e iterando 10 vezes temos

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1.996001000000001\\
x_2 &= 1.984019992001002\\
x_3 &= 1.936335328659657\\
x_4 &= 1.749394505015502\\
x_5 &= 1.060381134178431\\
x_6 &= -0.8755918502784632\\
x_7 &= -1.233338911725937\\
x_8 &= -0.4788751288226809\\
x_9 &= -1.770678610995061\\
x_{10} &= 1.135302743435397
\end{aligned}
$$

Ou seja, aparentemente a sequência não vai para nenhum ponto fixo, quando tomamos o valor inicial $x_0 = 1.999$.

Deste exemplo, podemos notar que uma mínima variação nos valores iniciais de uma recorrência pode mudar drasticamente o seu comportamento. E isto faz parte de um estudo bem mais profundo em dinâmica, conhecido como *caos*.

Como funções elementares em sistemas dinâmicos podem por vezes produzirem problemas muito difíceis alguns ficando em aberto temos o exemplo da **Conjectura de Collatz** que diz:

Dado um número natural não nulo, se este for par dividimos 2, caso contrário o multiplicamos por 3 e adicionamos 1. A conjectura apresenta uma regra dizendo que, qualquer número natural não nulo, quando aplicado a esta regra, eventualmente sempre chegará a 4, que se converte em 2 e termina em 1.

Em notação aritmética, a função de Collatz C é definida tal que:

$$
C(x) = \begin{cases} 3x + 1, & se\ x \equiv 1 (mod\ 2) \\ \frac{x}{2}, & se\ x \equiv 0 (mod\ 2) \end{cases}.
$$

Exemplos 1: Vamos aplicar a função de Collatz ao número 15, e temos então:

$$15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$$

Exemplos 2: Vamos aplicar a função de Collatz ao número 96, e temos então:

$$96, 48, 24, 12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$$

Referências Bibliográficas

[1] BOCKER-NETO, C., *Introdução aos Sistemas Dinâmicos Unidimensionais: A família quadrática e o teorema de Sharkovsky*. Mini Curso Template VIII Bienal de Introdução aos Sistemas Dinâmicos, 2017.

[2] CIPOLLI, Váleria Guedes, *Sistemas Dinâmicos Discretos: Análise de Estabilidade*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro/SP, 2012.

[3] DEVANEY, R.L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*.2nd Edition. Addison-Wesley, 1989.

[4] HERNANDEZ, Leticia Álvarez, *Sistemas Dinámicos Discretos y caos*. (Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas). La Laguna,Tenerife: Universidad de La Laguna, 2017.

[5] JESUS, Eliane Alves de, *Sistemas Dinâmicos Discretos*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São João Del-Rei.São João Del-Rei/MG, 2016.

[6] VILLATE, Jaime E., *Introdução aos Sistemas Dinâmicos: Uma Abordagem prática com o Maxima*.Porto: Universidade do Porto, 2007.

[7] VON ZUBEN,Fernando J. , *Tópico 5: Modelagem de Sistemas Dinâmicos Discretos no Tempo*.. DCA/FEEC/ Unicamp.

[8] YORKE, James A., *Chaos: An introduction to Dynamical Systems*. New York: Springer, 1996.