Universidade Federal de Viçosa

Dissertação de Mestrado

Eliane Maria do Nascimento Assis

Limites: história e aplicações

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2017

Eliane Maria do Nascimento Assis

LIMITES: HISTÓRIA E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2017

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T
A848h
2017

Assis, Eliane Maria do Nascimento, 1981-
Limites: história e aplicações : . / Eliane Maria do Nascimento Assis. – Florestal, MG, 2017.
viii,67f. : il. ; 29 cm.

Inclui apêndices.
Orientador: Justino Muniz Júnior.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.66-67.

I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado em Matemática - Profissional. II. Título.

511

Eliane Maria do Nascimento Assis

LIMITES: HISTÓRIA E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

Aprovada: 15 de dezembro de 2017.

Luciano Coutinho dos Santos

Mehran Sabeti

Alexandre Alvarenga Rocha

Justino Muniz Júnior
(Orientador)

Dedicatória

Dedico este trabalho ao meu marido Marcos e ao meu filho Benjamim.

Agradecimentos

A Deus, princípio e fim de todas as coisas, minha gratidão por seu amor e cuidado. “Ora, àquele que é poderoso para fazer infinitamente mais do que tudo quanto pedimos ou pensamos, conforme o seu poder que opera em nós, a ele seja a glória...” (Efésios 3: 20-21).

À minha amada mãe, Beatriz, obrigada pela coragem, dedicação, apoio, amor e constantes orações.

Ao Marcos, meu marido, com amor, pelo permanente incentivo e preocupação com que acompanhou mais essa minha jornada. Obrigada por seu companheirismo, compreensão, apoio e cuidado. Agradeço ainda a paciência e amor demonstrados nos meus momentos não tão bons.

À minha sogra, Dona Noeme, a quem confiei Benjamim, meu filho amado. Obrigada por toda dedicação, cuidado, amor e carinho dedicados a nós. Seria impossível terminar esse mestrado sem a sua colaboração.

Aos amigos Helvécio e Adriana, agradeço as valiosas contribuições.

Às amigas, que a matemática me presenteou, Adriana, Eliane Alves, Gracielle e Silviane obrigada por ouvirem meus desabafos e pelos bons conselhos.

Aos meus familiares e amigos, pelas orações e apoio.

À Escola Municipal Josefina Souza Lima e aos meus alunos do 8º ano, por me permitirem a realização desse trabalho.

Aos professores que passaram pela minha vida e contribuíram para minha formação. Em particular, agradeço ao meu orientador Justino.

Aos amigos do PROFMAT: agradeço por todo companheirismo, pelas tardes, noites e madrugadas de estudos compartilhados. Meu muito obrigada pelos momentos de descontração, pelas risadas e por toda paciência e cuidado que tiveram comigo durante a minha gestação.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram com essa conquista, o meu muito obrigada.

Lista de Figuras

Resumo

ASSIS, Eliane Maria do Nascimento, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, dezembro de 2017. **Limites: história e aplicações**. Orientador: Justino Muniz Júnior.

O conceito de limite é o grande pilar na fundamentação do Cálculo, uma vez que para definir derivada, continuidade, integral, convergência e divergência, utilizamos esse conceito. A sistematização lógica do Cálculo pressupõe então o conceito de limite. Por muitos séculos, a noção de limite foi confundida com ideias vagas, às vezes filosóficas relativas ao infinito - números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos - e com intuições geométricas subjetivas, nem sempre rigorosas. O termo limite no sentido moderno é produto dos séculos XVIII e XIX, originário da Europa. A definição moderna tem menos de 150 anos. Nesse trabalho estudamos como a noção de limite foi alterada no decorrer do tempo e como isso influenciou o desenvolvimento da matemática. Propomos também uma atividade exploratória cujo intuito é apresentar aos alunos do ensino básico as ideias intuitivas do conceito de limite e uma demonstração da fórmula da área do círculo, objetivando promover o interesse e a curiosidade dos alunos com o uso de um material concreto, buscando assim, tornar a aprendizagem mais acessível e agradável.

Abstract

ASSIS, Eliane Maria do Nascimento, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, December, 2017. **Mathematical Study of Abstract Theory**. Adviser: Justino Muniz Júnior.

The concept of limit is the great pillar in the reasoning of Calculus, since to define derivative, integral, convergence and divergence we use this concept. The logical systematization of Calculus then presupposes the concept of limit. For many centuries, the notion of limit has been confused with vague, sometimes philosophical, ideas concerning the infinity – infinitely large or infinitely small numbers – and with subjective, not always rigorous, geometric intuitions. The term limit in the modern sense is a product of the eighteenth and nineteenth centuries, originating in Europe. The modern definition is less than 150 years old. In this work we study how the notion of limit was changed over time and how it influenced the development of mathematics. We also propose an exploratory activity whose purpose is to present to the students of elementary education the intuitive ideas of the concept of limit and a demonstration of the formula of the area of the circle, aiming to promote the interest and curiosity of the students with the use of a concrete material, thus seeking to make learning more accessible and enjoyable.

Sumário

1 Introdução

As dificuldades de ensino-aprendizagem do cálculo aparecem em várias pesquisas sobre Educação Matemática ou Matemática, em especial, as dificuldades relativas ao ensino e à aprendizagem do conceito de limite. Para tanto, esse conceito constitui um dos pilares do Cálculo, uma vez que para definir conceitos como: derivada, continuidade, integral, convergência e divergência, utilizamos esse conceito.

Além disso, o ensino do conteúdo de limite é abordado, geralmente, no primeiro ano dos cursos de Exatas, tais quais; Matemática, Engenharias e áreas afins. A importância do ensino do conceito de limite é inegável, pois ele é a fundamentação das aplicações do cálculo que surgem no contexto da derivada e da integral. Apesar da sistematização lógica da disciplina de Cálculo abordar, primeiramente, o conteúdo de limite, e depois o conteúdo de derivada e de integral, veremos, no decorrer desse trabalho, que o registro cronológico é justamente o oposto.

Historicamente, o avanço do cálculo se efetivou com a formalização do limite e, após isso, várias aplicações surgiram. Porém, esses processos de conceptualização e instrumentalização do limite levaram mais de 2500 anos para serem formalizados e o termo limite, no sentido moderno, é produto dos séculos XVIII e XIX, sendo que essa definição moderna apresenta menos de 150 anos.

Por isso, neste trabalho, objetiva-se fazer uma retrospectiva histórico-matemática do conceito de limite, apontando como essa noção foi modificada no decorrer do tempo. Utilizaremos a História da Matemática como uma fonte de entendimento dos problemas matemáticos, relacionados ao tema limite. Apresentaremos, através dos principais momentos da História da Matemática, a concepção das ideias de limite, colocando-as na, medida do possível, nos seus contextos cultural e econômico.

Na narrativa do contexto histórico de limite, apresentaremos o Método da exaustão, desenvolvido por Eudoxo, assimilado por Arquimedes e Euclides e aplicado aos problemas geométricos. Também, de que modo Eudoxo resolveu o problema de se calcular à área de um círculo, usando o método da exaustão. Mostraremos, ainda, usando ideias e conceitos mais novos, uma prova do resultado de Eudoxo e de Euclides; ideia essa de que; dados dois círculos, C_1 e C_2, de raio r_1 e r_2, a razão entre suas áreas é a mesma que a razão entre as áreas dos quadrados de lados r_1 e r_2.

Por fim, será proposta uma atividade, em que o intuito é apresentar aos alunos do Ensino Básico como se obteve a fórmula para o cálculo da área do círculo, usando aproximações por polígonos regulares inscritos na circunferência. Com essa atividade, introduziremos de forma intuitiva o conceito de limites, pois os alunos precisarão analisar o que irá acontecer com a medida dos vários elementos de um polígono, tais como: lados, altura dos triângulos que decompomos desse polígono, perímetro e área do polígono, à medida que o número de lados desses polígonos tende ao infinito.

O objetivo dessa atividade é apresentar dentro de um contexto histórico como se deu a fórmula, que calcula a área do círculo, a qual é apresentada para os alunos no 8º ano, geralmente sem maiores detalhes. Objetiva-se também, em especial, apresentar e discutir com os alunos a ideia de limite, conteúdo do ensino superior, trabalhado em poucas escolas do Ensino Médio, mas que pode ser abordado de forma lúdica e intuitiva no Ensino Básico.

No decorrer da atividade, na parte histórica, os alunos irão ouvir um pouco sobre o surgimento dos incomensuráveis, apresentaremos um ou dois dos paradoxos de Zenão, que questionam a possibilidade da infinita divisão do segmento de reta. Isso é interessante e indicado para tal série, pois é no 8º ano do Ensino Fundamental que introduzimos o conjunto dos números irracionais aos nossos alunos. Zenão de Eléia foi um filósofo grego que apresentou quatro famosos paradoxos sobre a impossibilidade do movimento; o da Dicotomia, o de Aquiles, o da Flecha e o do Estádio. Por exemplo, no primeiro paradoxo, - a Dicotomia – Zenão discute o movimento de um objeto que se move entre dois pontos fixos, A e B, situados a uma distância finita, considerando uma sequência infinita de intervalos de tempo, cada um deles sendo o tempo gasto para percorrer a metade da distância percorrida no movimento anterior. Analisando o problema, Zenão concluiu que dessa maneira o móvel nunca chegaria em B.

Portanto, com essa atividade iremos discutir as seguintes ideias: teremos uma sequência de números que irá tender a zero, à medida que n tende ao infinito, a saber, o lado do polígono. Iremos somar infinitas parcelas e essa soma não será um número infinito, pois o perímetro do polígono de n lados tende ao comprimento da circunferência, e a soma das áreas dos infinitos triângulos que formam o polígono de n lados tende à área do círculo. Com essas discussões e observações trabalharemos de forma intuitiva o conceito de limite.

2

Contextualização Histórica

As civilizações babilônias e egípcias desenvolveram um importante corpo de conhecimentos em matemática e não há nenhuma dúvida de que os gregos aprenderam muito com os essas civilizações. Sabe-se, por exemplo, que esses povos articularam técnicas complexas de cálculo com números fracionários, que aqueles obtiveram resultados importantes pela aplicação do cálculo numérico à resolução de problemas práticos, tais como: obtenção de resultados que conduziram à elaboração de problemas de cálculos profundamente difíceis, capazes de determinar as raízes de equações algébricas com uma incógnita, ou também de sistemas de equações com duas incógnitas. Os egípcios e os babilônicos praticavam uma geometria prática, realizavam cálculos com medidas de comprimentos, áreas e volumes.[15]

Alguns livros tradicionais de história da matemática relatam que houve uma transição da Matemática pragmática e intuitiva realizada pelos babilônicos e egípcios, que era profundamente marcada por cálculos e algoritmos, para a Matemática teórica de raciocínio hipotético-dedutivo praticada pelos gregos, fundada em argumentações consistentes e demonstrações e é dessa Matemática grega que falaremos agora.

No decorrer do séc VII a.C para o séc VI a.C, nas colônias gregas do litoral da Asia Menor, aconteceu um crescimento das atividades comercias, e juntamente, com esse crescimento surge a necessidade da dispersão dos gregos pela bacia do Mediterrâneo, essa dispersão propiciou vivências com povos diferentes [5]. A expansão dos gregos e o crescimento populacional deram origem à *polis*- a cidade grega- que foi determinante para uma organização política, administrativa, religiosa e militar da Grécia, durante os séculos V e IV a.C . Juntamente com a *polis*, surge o direito do cidadão de reger a sua cidade, para isso, eram necessários parâmetros os quais alimentavam o gosto pela discussão, pelo debate. A capacidade de persuasão e de argumentação tornaram-se necessárias e valorizadas. O pensamento racional ganha impulso nesse novo tipo de organização [15].

Segundo [5] os gregos começam, então, a formular pensamentos que explicassem a formação do Universo , estavam preocupados em compreender o mundo que os rodeavam, agora não basta apenas conhecer os fenômenos, mas também é necessário descobrir suas razões, seus porquês e suas ligações. Com isso surge o seguinte questionamento:

O Universo, com toda a sua diversidade de propriedades e formas, poderia ser regido ou explicado por um princípio único ao qual tudo se reduz?

Filósofos de Mileto afirmavam que sim, mas diferiam as opiniões em qual deveriam ser esse único princípio. Thales de Mileto (624 a 548 a.C) afirmava que esse elemento único, ao qual tudo deveria reduzir-se era a água. Para Anaximandro de Mileto (611 a 545 a.C) esse elemento era infinito e indeterminado. Já para Anaximenes de Mileto contemporâneo de Thales e de Anaximandro, essa substância primordial era o ar. Para Heráclito (530 a.C), da cidade de Éfeso, o essencial é a transformação pela qual as coisas estão permanentemente sofrendo. Para ele, o mundo é dinâmico e impossível de atingir a estabilidade.

No século VI a.C, foi fundada na Grécia uma seita de grande influência, de objetivos místicos e científicos, que ficou conhecida como Escola Pitagórica, cujo o provável fundador seja Pitágoras de Samos (580 a 504 a.C). Como na antiguidade era usual dar todo o crédito das descobertas ao mestre, e não a um membro específico da escola que tenha feito a tal descoberta, falaremos dos pitagóricos e não apenas de Pitágoras. A resposta que os pitagóricos deram ao questionamento proposto, inicialmente, foi bastante original. Para os Pitagóricos a explicação racional das coisas está nas diferenças de quantidade e de arranjo de forma, isso é, o Universo consiste no estabelecimento de relações numéricas, de leis matemáticas, o que proporcionou o aparecimento da ideia de que o Cosmos tem sua origem nos números. Filolau, um importante pitagórico, chegou a afirmar: "todas as coisas tem um número e nada se pode compreender sem o número".

Os Pitagóricos afirmaram "todas as coisas são números" baseados no seguinte argumento: a matéria é formada por pequenos corpúsculos cósmicos (mônadas), de extensão não nula, os quais reunidos em certa quantidade e ordem, produziam os corpos. Cada mônada era assimilada à unidade numérica e, assim, os corpos se formavam por quantidades e arranjos de mônadas, da mesma maneira que os números se formavam por quantidades e arranjos de unidades. Ou seja, para os Pitagóricos, os números (naturais) eram os "pontos" que compunham a matéria, e um "ponto" é a menor parte possível de cada coisa.

Para os pitagóricos, os números passam a exercer um papel muito mais importante do que apenas traduzir relações de quantidades, passam a ser tratados de forma mística. Para eles tudo não só na geometria, mas também nas questões práticas da vida do homem pode ser explicado em termos das propriedades intrínsecas dos números inteiros e suas razões. Por exemplo: o 1 é a essência das coisas, o 2, primeiro número par e feminino, o 3, primeiro número ímpar e masculino, o 4, é o número perfeito, e logo a alma humana, o 5, casamento do feminino 2 e do masculino 3 , o 6, o frio, o 7, a mente, a saúde e a luz, o 10, número sagrado e assim por diante.

Baseados na ideia de que as leis matemáticas traduzem o Universo, os Pitagóricos criaram os números figurados, que são sequências de números inteiros que obedecem a uma determinada estrutura geométrica, tais como números triangulares, quadrangulares e retangulares. Eles estabeleceram relações aritméticas, a partir das propriedades geométricas das figuras, criaram o famoso Teorema de Pitágoras, dentre outras importantes proposições. Inclusive há estórias sobre a descoberta, por

Pitágoras, de que a harmônia da música é dada por uma proporção estabelecida entre o comprimento das cordas.

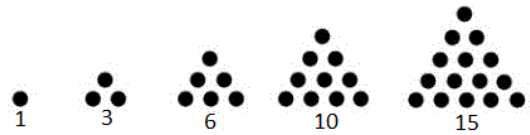


Figura 2.1: Números Triangulares.

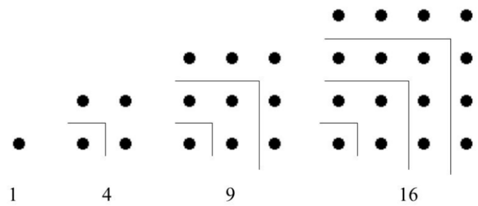


Figura 2.2: Números Quadrados.

Para os Pitagóricos, um segmento de reta não pode ser infinitamente divisível. Ele só pode ser dividido até chegar em sua menor parte, indivisível: o ponto. E foi na geometria que observou-se que os números naturais e suas razões eram insuficientes para descrever simples propriedades básicas. Estava desfeito o argumento dos Pitagóricos, quando, por exemplo, tentaram comparar a diagonal de um quadrado com o seu lado: viram que os segmentos eram incomensuráveis, não importando quão pequena se tome a unidade de medida. Segundo [4], não se sabe precisar quando ou como foi feita essa descoberta, a sugestão mais plausível é que tenha sido feita por Pitagóricos, em algum momento antes de 410 a.C. Alguns atribuem tal descoberta a Hipasus de Metapontum.

Aristóteles (384 a 322 a.C) se refere a uma prova da incomensurabilidade da diagonal do quadrado com o seu lado, baseando na distinção entre pares e ímpares. Vejamos a prova:

Seja d a diagonal do quadrado de lado l. Suponhamos que sejam comensuráveis, isto é, $\frac{d}{l}$ é racional.

$$\frac{d}{l} = \frac{p}{q}$$

onde p e q são inteiros sem fator comum. Do teorema de Pitágoras temos que:

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d^2 = 2l^2$$

$$\frac{d^2}{l^2} = \frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

Logo p^2 deve ser par, então p é par e q deve ser ímpar. Fazendo $p = 2r$, temos:

$$p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4r^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2r^2$$

. Logo q^2 deve ser par, então q é par, absurdo! Pois havíamos provado que q era ímpar. Portanto, a hipótese de d e l serem comensuráveis é falsa.

Para os Pitagóricos fica o grande dilema: como os números que eram os regentes do universo, não davam conta de explicar um problema como esse?

Pelos meados do séc VI a.C, Elea era uma cidade que constituía uma das colônias gregas na Itália. Lá nasceu o filósofo Parmênides (viveu por volta de 450 a.C) que, inicialmente, era ligado à escola Pitagórica e que ao romper com os pitagóricos passa a ser um crítico das noções e concepções filosóficas que até então eram emitidas, [5].

Para Parmênides e seus discípulos, a natureza íntima da existência não estava nos números e em suas pluralidades, como pregavam os Pitagóricos, nem estava nas permanentes transformações como afirmava Heráclito, mas sim na unidade e na invariabilidade do mundo.

Entre os discípulos de Parmênides estava Zenão de Elea, que viveu por volta de 450 a.C. Segundo [14], contra os indivisíveis, Zenão desenvolveu quatro importantes paradoxos conhecidos como os paradoxos de Zenão: Paradóxo de Aquiles e a Tataruga, A Dicotomia, A flexa e o Estádio. Neste capítulo, falaremos de dois deles.

Paradóxo de Aquiles e a Tataruga.

Nesse paradóxo, Zenão conclui que o tempo não pode ser infinitamente divisível.

Suponha que Aquiles deve disputar uma corrida com a tartaruga. Sendo de longe a mais lenta dos dois, a tartaruga é autorizada a começar num ponto a certa distância à frente. Aquiles jamais conseguirá alcançar seu adversário, afirma Zenão. Para isso, ele precisa chegar ao ponto de partida. A essa altura, a tartaruga terá avançado até algum ponto adiante na pista de corridas. E quando Aquiles alcançar esse ponto, a tartaruga terá avançado ainda mais. É óbvio, afirma Zenão, que a série é interminável. Haverá sempre alguma distância, por menor que seja, entre os dois competidores, [11].

> Vamos supor que Aquiles corre exatamente duas vezes mais depressa que a tartaruga. Além disso, vamos presumir que a vantagem dada à tartaruga é de 10 metros e que Aquiles precisa, exatamente, de um segundo para completar a primeira fase da corrida; isto é, para chegar ao ponto de partida da tartaruga. É fácil de ver que a dianteira da tartaruga terá sido reduzida a cinco metros nesse ponto. Se Aquiles é capaz de correr 10m por segundo, a tartaruga correrá com metade dessa velocidade. Como a dianteira da tartaruga foi reduzida pela metade, é óbvio que Aquiles precisará apenas de meio segundo para completar a segunda fase. A transposição da terceira exigirá um quarto de segundo, ao passo que a quarta vai demandar um oitavo de segundo, e assim por diante.([11], p.24).

volta	1	2	3	4	5	6	...
t(s)	1	½	¼	1/8	1/16	1/32	...

Figura 2.3: Dados da corrida entre Aquiles e a Tartaruga.

> Se somarmos então o tempo total transcorrido em qualquer fase da corrida, verificamos que a soma é 3/2 de segundos, após duas voltas, 7/4 de segundos, após três, 15/8 após quatro e assim por diante. A impressão que se tem, é de que o tempo total se aproxima cada vez mais de dois segundos. Zenão não disse que Aquiles seria incapaz de alcançar a tartaruga num tempo finito. Sabia perfeitamente que era exatamente isso que aconteceria. O que Zenão disse, realmente, foi que era impossível para Aquiles efetuar um número infinito de atos. ([11], p.25)

Paradóxo A Dicotomia.

Nesse paradóxo Zenão conclui que o espaço também não pode ser infinitamente divisível.

Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível, pois para irmos de uma extremidade a outra do segmento, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões. Se existem infinitos pontos médios... segue-se então, que o movimento jamais começará.

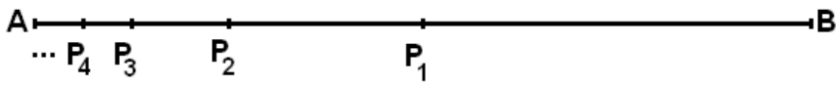


Figura 2.4: Subdivisão do seguimento AB

Segundo [4], os argumentos de Zenão parecem ter influenciado profundamente o desenvolvimento da Matemática grega, influência comparável a da descoberta dos incomensuráveis, com a qual talvez se relacione. As grandezas deixam de estar associadas aos números e passam a estar associadas aos segmentos de reta. É a passagem da ideia do discreto (medida pontual) para o contínuo (medida linear); ao menos em parte, o reino dos números continuava a ser discreto, mas o das grandezas passava a ser contínuo.

É o surgimento da noção do infinitamente pequeno: uma grandeza pode ser subdividida infinitamente, pois ela está relacionada ao conceito de continuidade. Com o advento dos incomensuráveis, a divisão infinita da reta se torna uma prática matemática necessária.

Esse fenômeno da incomensurabilidade levanta dificuldades que só puderam ser resolvidas após um cuidadoso estudo sobre alguns conceitos básicos, tais como: o infinito e o movimento. A incomensurabilidade, também indica que a reta não pode ser pensada como uma justaposição de pontos, pois há nela uma característica que ultrapassa uma simples coleção de pontos a saber, a sua continuidade, que necessita de um estudo aprofundado. Sendo assim, as soluções para a incomensurabilidade e para os paradoxos de Zenão estão relacionadas ao desenvolvimento de outros conceitos.

Segundo [5], a princípio, os gregos incapacitados de desenvolverem tais conceitos optam pela degradação do número em relação à geometria, uma vez que há incapacidade numérica para resolver o problema da incomensurabilidade, optam pelo horror ao infinito e ao movimento.

Evitando o uso do conceito de infinito, os matemáticos gregos procuravam resolver os paradoxos de Zenão. Platão (428 a 348 a.C) não respondeu diretamente os paradoxos de Zenão e nem o problema da incomensurabilidade, contrário às ideias dos Pitagóricos e de Demócrito (410 a.C)- que defendia a teoria atomística, segundo a qual uma grandeza é formada por um número muito grande de partes atômicas indivisíveis-, que atribuíam espessura aos seus elementos infinitamente pequenos, Platão preferiu interpretar seu conceito de infinitesimal, a partir de um conceito abstrato do "indeterminado", "ilimitado", "sem fim", "sem limite". Já Aristóteles (384 a 322 a.C), sugere que se expurgue toda noção de infinitamente grande ou infinitamente pequeno da ciência em geral. Eudoxo (408 a 355 a.C), evitando o conceito de infinito, desenvolve a teoria da proporções e o **método da exaustão**. Arquimedes (287 a 212 a.C) e Euclides(séc III a.C) , assimilam, desenvolvem e aplicam o **método da exaustão** aos problemas geométricos, [14].

2.1 Novas ideias

Nessa seção, apresentamos outra visão sobre os acontecimentos citados na seção anterior. Pesquisas recentes em História da Matemática questionam a veracidade de alguns fatos apresentados nos livros tradicionais de História da Matemática.

Assuntos que foram tratados na seção anterior, tais como a escola pitagórica, a descoberta dos incomensuráveis, a crise gerada por tal descoberta e a relação dos paradóxos de Zenão com o problema dos incomensuráveis são apresentados sob outra perspectiva.

Segundo [15], as pesquisas mais recentes em História da Matemática, na qual temos pouco acesso em português, questionam os relatos que são amplamente reproduzidos em grande parte dos livros de História de Matemática, disponíveis em português, que são traduções de obras estrangeiras já antigas, obras que utilizam os conceitos tais como os conhecemos hoje para investigar suas origens.

Sobre os Pitagóricos é comum encontrarmos várias referências que os consideram como uns dos pioneiros no desenvolvimento da matemática grega, e importantes descobertas matemáticas foram atribuídas a eles. Como exemplo citamos [4] "é evidente que os Pitagóricos desempenharam um papel importante, talvez crucial, na história da matemática".

Em [15] encontramos relatos de pesquisas recentes, que apresentam uma outra visão, que questionam essa importância atribuída a Escola Pitagórica. Relatos como: os ensinamentos da escola Pitagórica teriam influenciado um outro matemático importante do século V a.C, Hipócrates de Quios, e que Pitágoras fôra um dos primeiros matemáticos gregos, são atualmente questionados pelos historiadores.

> No século V a.C, o pensamento geométrico e técnico já estava Desenvolvido, porém, não temos como saber se os pitagóricos contribuíram para isso. A geometria grega começou antes deles e continuou depois; como mostra W. Burkert, essa escola não parece ter tido um papel significativo na transformação da matemática de seu tempo. ([15], p.63)

Em [16] pesquisas relatam, que a descoberta das grandezas incomensuráveis, que frequentemente é atribuída a um pitagórico, deve ter tido outras origens.

> Em um artigo publicado em 1945, "The discovery of incommensurability by Hippasos of Metapontum" (A descoberta da incomensurabilidade por Hípaso de Metaponto), Von Fritz conjectura que a incomensurabilidade tenha sido descoberta durante o estudo do problema das diagonais do pentágono regular, que constituem o famoso pentagrama. A lenda da descoberta dos irracionais por Hípaso foi erigida a partir desse exemplo. Entretanto, os historiadores que seguimos aqui contestam tal reconstrução, uma vez que ela implica o uso de fatos geométricos elaborados que só se tornaram conhecidos depois dos Elementos de Euclides.
>
> Burkert desconstruiu uma série de lendas sobre a matemática pitagórica... a aritmética dos pitagóricos não era abstrata, baseando-se em

> números figurados descritos por uma configuração espacial de pedrinhas, consideradas unidades com magnitude e manuseadas e arrumadas em padrões visíveis. Esse tipo de aritmética e os números irracionais são mutuamente exclusivos e seria mais plausível considerar que a incomensurabilidade tenha sido descoberta no campo da geometria. Em tal contexto, o problema diz respeito à existência de grandezas incomensuráveis e à possibilidade, ou não, de expressar a relação entre elas por uma razão entre números inteiros.
>
> Não sabemos exatamente qual a importância da geometria na escola pitagórica, mas acredita-se que não tenha sido tão relevante quanto a aritmética. Para os pitagóricos, que praticavam aritmética com números representados por pedrinhas e estavam preocupados com teorias sobre o cosmos, resumidas pelo enunciado "tudo é número", a descoberta da incomensurabilidade não deve ter tido nenhuma importância. ([16], p.95)

Segundo [15], não parece ser verdadeira a tese de que a descoberta dos incomensuráveis tenha representado um escândalo para a Escola Pitagórica. E nem mesmo se tem certeza se há uma relação entre a descoberta dos incomensuráveis e a aplicação do teorema "de Pitágoras". Isso porque os chineses já conheciam o teorema e nem por isso concluíram pela irracionalidade do lado do triângulo retângulo cuja medida é $\sqrt{2}$.

Segundo [16]:

> O problema da incomensurabilidade parece ter surgido no seio da própria matemática, mais precisamente da geometria, sem a relevância filosófica que lhe é atribuída. Ao contrário da célebre lenda, os historiadores citados, como Burkert e Knorr, contestam até mesmo que essa descoberta tenha representado uma crise nos fundamentos da matemática grega. Não se encontra alusão a escândalo em nenhuma passagem dos escritos a que temos acesso e que citam o problema dos incomensuráveis, como os de Platão ou Aristóteles.
>
> Na verdade, a descoberta da incomensurabilidade representou uma nova situação que motivou novos desenvolvimentos matemáticos - apenas isso. ([16], p.96)

No entanto, ainda que seja contestável a tese de que um pitagórico tenha descoberto os incomensuráveis, e de que isso tenha provocado uma crise, é inegável que tal problema tenha existido.

No que diz respeito aos paradoxos de Zenão e sua relação com o problema dos incomensuráveis [16] apresenta os seguintes argumentos:

> Temos notícia dos paradoxos de Zenão por fontes indiretas, como a Física de Aristóteles, e seus objetivos estão expostos no diálogo Parmênides, escrito por Platão. Tais paradoxos são mencionados algumas vezes em conexão com o problema dos incomensuráveis. No entanto, os argumentos de Zenão se voltam contra pressupostos filosóficos. Além disso,

a descoberta da incomensurabilidade deve ter se dado depois da época de Zenão, o que nos leva a concluir que seus paradoxos nada têm a ver com a questão. Em livros de história da matemática, é comum também relacionar esses paradoxos ao desenvolvimento do cálculo infinitesimal e do conceito de limite. Trata-se, no entanto, de uma interpretação a posteriori. É incerto afirmar que houvesse qualquer procedimento infinitesimal na época de Zenão e podemos questionar até mesmo se seus paradoxos, para além de seu papel filosófico, tiveram alguma relevância para o desenvolvimento da matemática propriamente dita. ([16], p.103)

2.2 O Método da exaustão

Sabemos que os matemáticos gregos se dedicaram, desde o tempo de Thales e Pitágoras, à investigação das propriedades das figuras geométricas e dos números inteiros positivos. Havia uma "matemática" experimental, baseada em procedimentos heurísticos e informais, na base das observações e soluções de problemas. Uma matemática que construía soluções de problemas geométricos e a comparação de grandezas geométricas, por meio de razões e proporções. Baseada apenas nos números racionais.

Mesmo que os estudos realizados por historiadores ainda não sejam suficientes para determinar, com exatidão, a época e quais os descobridores dos incomensuráveis, podemos afirmar que, com surgimento desses, a divisão infinita da reta se torna uma prática matemática necessária e há uma necessidade de se fazer uma matemática de caráter mais formal e abstrato.

E foi a partir de Platão que começou a construção de uma conexão entre a geometria e a aritmética, através de uma construção axiomática de número, independente de qualquer base geométrica. Nesse sentido, Eudoxo apresentou um novo modelo de proporções e criou o que, hoje, chamamos de Método da Exaustão.Tal método tem uma axiomatização própria, proporcionando uma metodologia que permitia demonstrar teoremas com um nível de rigor aceitável para a época. Arquimedes e Euclides, assimilaram, desenvolveram e aplicaram o método da Exaustão.

Nesse método, a teoria dos números é incorporada à estrutura geométrica e o conceito de infinito é evitado. Segundo [13], o Método da Exaustão é usado para manipular operações com limites sem invocar o conceito de infinito. Nesse sentido, podemos concluir que o método da exaustão seria o "embrião" da noção da operação limite. Porém, ele foi criado de modo a não utilizar o conceito de infinito, o que nos parece ser um pouco contraditório pois, hoje, sabemos que são conceitos intimamente ligados, já que a noção de limite pressupõe a consideração do infinito. Assim, podemos assumir que o método da exaustão foi a mais intensa fonte de inspiração e incentivo para o desenvolvimento das ideias de limite e de infinito atuais, os quais foram necessários, quase 2.500 anos de história, para que esses conceitos fossem estabelecidos da forma como são hoje.

Podemos inferir que as raízes da noção de infinito estão na descoberta dos incomensuráveis e que os paradoxos de Zenão constituem os exemplos mais primitivos dos desconfortos causados pela noção de infinito na história. Platão e seus discípulos, Eudoxo e Arquimedes, fizeram avançar a ideia do infinito, fazendo o uso das quantidades infinitesimais, números infinitamente pequenos, com objetivo de encontrar áreas e volumes.

Eudoxo, em sua teoria das proporções e com o método da exaustão, demonstrou que não temos que pressupor a existência real de quantidades infinitamente múltiplas de pequenas parcelas para cálculo de áreas e volumes. Basta presumirmos que existem quantidades tão pequenas quanto desejarmos, pela divisão continuada de qualquer magnitude total: introduzindo assim, a ideia de infinito potencial, que é aquele que nunca será atingido, ideia que, posteriormente, no séc XIX foi utilizada para introduzir o conceito de limite como fundamento do cálculo.

Arquimedes assimilou e desenvolveu o método de Eudoxo e utilizou o conceito de infinito potencial pra elaborar métodos, a fim de encontrar áreas e volumes, por meio das quantidades infinitesimais.

Eudoxo e Arquimedes fizeram inúmeras descobertas a respeito do conceito de infinito. Porém, pouco se avançou nos estudos de suas propriedades matemáticas durante os dois mil anos seguintes.

2.3 O Infinito a partir do Século XII

Segundo [16], a partir do século XII, o desenvolvimento da ciência na Europa foi impulsionado com a criação das primeiras universidades. Os currículos de ensino eram formados pelas sete artes liberais: os antigos trivium (incluindo lógica, gramática e retórica) e quadrivium (aritmética, geometria, música e astronomia). As traduções das obras de Aristóteles forneciam os métodos lógicos que deviam estar na base de qualquer investigação filosófica ou científica; a aritmética consistia em regras de cálculo; a geometria era tirada de Euclides e de outras geometrias práticas e a astronomia seguia a tradição de Ptolomeu e das traduções de trabalhos árabes.

Desde o século XIII, eram traduzidos para o latim textos gregos, como os de Euclides, Arquimedes, Apolônio e Diofanto. No século XIV, foram elaboradas diversas teorias acerca do movimento, expressas por meio da matemática e usando-se a linguagem de razões e proporções.

No período que vai do século XI ao XV, houve um desenvolvimento intelectual e cultural que contou com outros fatores, além do surgimento das universidades. A administração pública ganhou importância com o avanço de uma economia capitalista e concentrada nas cidades, exigindo mão de obra capacitada para desenvolver diversas atividades. Essa demanda contribuiu para a ascensão do Humanismo, movimento cultural que se espalhou pela Europa, cuja marca era a veneração da Antiguidade clássica.

Com o enriquecimento, alguns indivíduos passaram a operar como mecenas (pessoas dotadas de poder ou dinheiro que patrocinavam artistas e literatos). Os humanistas, geralmente, eram autodidatas que trabalhavam fora das universidades, sob o regime de mecenato. No fim do século XV, os soberanos os impuseram como professores em algumas universidades. Muitos humanistas eram matemáticos da corte e alternavam suas atividades de ensino, ou literárias, com funções políticas.

Um humanista, que conheceu bem a matemática clássica, e apreciava Arquimedes era o francês Petrus Ramus (1515-1572), segundo ele, mais do que métodos e provas, o uso público da matemática deveria ser valorizado. Apesar da iniciativa de Ramus, foram Viète (1540-1603) e Descartes (1596-1650) que difundiram essa ideia de modo mais eficiente. Esses estudiosos franceses sistematizaram o uso da álgebra na resolução de problemas geométricos.

As transformações econômicas e sociais causadas pelo desenvolvimento de uma cultura urbana, fizeram surgir oficinas, nas quais técnicos colaboravam entre si para desenvolver uma tecnologia que atendesse às novas demandas. Assim, o homem aproximou-se da esfera prática sem separar-se completamente da atividade intelectual. Nos séculos XIV e XV, invenções, como o relógio mecânico, a bússola, a artilharia, as lunetas entre outros, ajudaram a transformar o papel da ciência. Outra ferramenta importante que se desenvolveu foi a imprensa, que possibilitou a circulação e a divulgação dos saberes. A geometria ainda era o principal domínio da matemática e qualquer pessoa que quisesse aprender ciência precisava começar pelos Elementos de Euclides. No entanto, aos poucos, foi crescendo a consciência de que grande parte do conhecimento geométrico deveria servir a aplicações, desde as mais práticas, como as técnicas para construir mapas, até as mais abstratas, como a teoria da perspectiva, na pintura, e a astronomia.

No século XV e, principalmente, no XVI, intensificou-se o interesse pela matemática por parte de artesãos e engenheiros que desejavam resolver problemas dinâmicos, levando-os a fazer pesquisas sobre balística, bombas de água e outros assuntos ligados ao cotidiano. Os humanistas muito contribuíram com suas referências a Arquimedes e seus ensinamentos sobre a matemática antiga. As referências às obras matemáticas da Antiguidade eram encontradas em diversos trabalhos durante o século XV.

A Revolução Científica do século XVII é particularmente associada à expansão da ciência experimental e à matematização da natureza. Na matemática, a geometria cartesiana e o cálculo infinitesimal são vistos como as duas manifestações mais importantes desse período.

Segundo [20], Bonaventura Cavalieri (1598-1647), que era aluno de Galileu Galilei (1564-1642), retomou o conceito das partes atômicas indivisíveis para construir um princípio muito útil no cálculo de áreas e volumes, o conhecido princípio de Cavalieri.

Segundo [6], Galileu utilizou propriedades dos infinitésimos no estudo de problemas da mecânica e da dinâmica, como no movimento de projéteis e na queda livre de corpos. Galileu foi um dos primeiros a utilizar o termo indivisível, porém, seu uso ocorre de modo mais efetivo com seu discípulo Cavalieri que desenvolveu seu princípio, para o cálculo geométrico de áreas e de volumes, mesclando o método da exaustão e o método infinitesimal de Kepler. Isto o fez ser considerado um dos mais representativos precursores do cálculo diferencial e integral.

Segundo [4], Kepler (1571-1630) ao calcular as áreas das regiões envolvidas em sua segunda lei, a qual diz que o raio vetor, que liga um planeta ao Sol, varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais, recorreu ao Cálculo Integral, em que considerava as regiões como a soma de linhas, ou elementos de área infinitesimal.

Segundo [13], Blaise Pascal (1623-1662) deu a sua contribuição aos indivisíveis de Cavalieri colocando a necessidade de distribuir os indivisíveis uniformemente.

Segundo [16], o método dos indivisíveis, que havia sido formulado por Cavalieri, consistia numa técnica que era baseada na decomposição de uma figura em tiras indivisíveis, pois Cavalieri argumentava que uma linha é composta de pontos, assim como um cordão é formado por contas; um plano é feito de linhas assim como uma roupa, de fios; e um sólido é composto de planos assim como um livro, de páginas. Logo, a área de uma figura seria dada pela soma de um número indefinido de segmentos de reta paralelos. O volume de um sólido seria a soma de um número indefinido de áreas paralelas. Esses seriam, respectivamente, os indivisíveis de área e de volume.

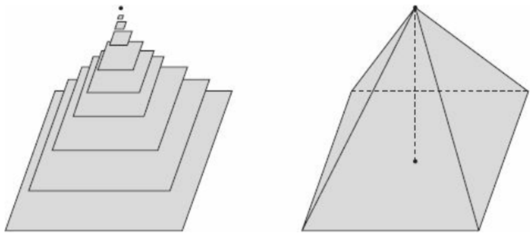


Figura 2.5: Volume da pirâmide de base quadrada que pode ser calculado pela soma de um número infinito de áreas de quadrados paralelos (indivisíveis)

Segundo [20], o princípio de Cavalieri foi muito utilizado por Kepler em sua pesquisa do movimento dos corpos celestes. Galileu concluiu que infinito e indivisibilidade são, em sua própria natureza, incompreensíveis para nós e piorou ainda mais a situação ao observar que os atributos “maior”, “menor” e “igual” não fazem nenhum sentido quando utilizados para comparar quantidades infinitas. Cria-se um novo paradoxo com relação ao infinito e refere-se, agora, aos conjuntos com infinitos elementos, como o conjunto dos números inteiros. Por exemplo, ao construir uma correspondência um a um, entre os números pares e o conjunto de todos os números inteiros, não podemos afirmar que temos uma quantidade de números pares menor do que a quantidade total de números. Isso contradiz um axioma básico da matemática grega, que afirma: o todo é maior que a parte.

Para [15], na antiguidade, os Gregos calculavam área e volume usando o método da exaustão de Arquimedes, procedimento que empregava diferentes tipos de figuras para aproximar uma figura curvilínea. Já no séc XVII surge uma nova maneira de calcular área e volume utilizando o método dos indivisíveis e os matemáticos concebem a área como uma soma de retângulos infinitamente pequenos. A aproximação por retângulos infinitamente finos possui a vantagem de servir para qualquer figura curvilínea. Fermat (1601- 1665) e Pascal (1623- 1662) utilizavam esse método. Há uma diferença importante nesses dois métodos apresentados. No método dos indivisíveis, não se usa nenhuma prova direta para se chegar ao resultado final, como era feito pelos gregos. Nesse novo método, o número de retângulos cresce arbitrariamente e, embora não fosse explicitado, toma-se o limite da soma quando n tende para o infinito. Além disso, o resultado do cálculo da área é uma expressão analítica e não outra área como no método dos gregos.

Descartes (1596–1650) e Fermat (1601-1665) introduziram as coordenadas cartesianas, proporcionando um grande avanço na matemática pois, a partir daí, foi possível transformar problemas geométricos em problemas algébricos e estudar analiticamente as funções, [19].

Segundo [15], os métodos analíticos de Descartes e Fermat motivaram o estudo das propriedades das séries infinitas na Inglaterra, em especial por John Wallis (1616-1703), que foi o primeiro a utilizar o símbolo ∞ para designar o infinito.

Segundo [4], Wallis foi o principal matemático Inglês, antes de Newton, e fez suas contribuições mais importantes em análise infinitesimal. Além disso, os autores também afirmam que, provavelmente, Fermat já estivesse de posse da sua Geometria Analítica desde 1629, pois, nesse período, ele fez duas descobertas importantes que se relacionam com o seu trabalho sobre lugares geométricos. A mais importante foi o chamado "Método para achar máximos e mínimos" que lhe acarretou, nas palavras de Laplace (1749 – 1827), o título de descobridor do Cálculo Diferencial, bem como co-descobridor da Geometria Analítica. Em [4], o autor descreve o método da seguinte maneira:

> Fermat estivera considerando lugares dados (em notação moderna) por equações da forma $y = x^n$; por isso elas são hoje frequentemente chamadas "parábolas de Fermat" se n é positivo ou "hipérboles de Fermat" se n é negativo. Aqui temos uma geometria analítica de curvas planas de grau superior; mas Fermat foi além. Para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$ ele notou um modo muito engenhoso para achar pontos em que a função assume um máximo ou mínimo. Ele comparou o valor de $f(x)$ num ponto com o valor de $f(x + E)$ num ponto vizinho. Em geral esses valores serão bem diferentes, mas num alto ou num baixo de uma curva lisa a variação será quase imperceptível. Portanto para achar os pontos de máximo e de mínimo Fermat igualava $f(x)$ e $f(x + E)$, percebendo que os valores, embora não exatamente iguais, são quase iguais. Quanto menor o intervalo E entre os dois pontos, mais perto chega a pseudo-equação de ser uma verdadeira equação; por isso Fermat, depois de dividir tudo por E fazia $E = 0$. Os resultados lhe davam as abscissas dos pontos de máximo e mínimo do polinômio. Aqui tem-se o processo hoje chamado de diferenciação pois o método de Fermat equivale a achar $\lim_{E\to 0} \frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ e igualar isso a zero. ([4], p. 240)

Segundo [4], Fermat não tinha o conceito de limite, mas seu método para máximos e mínimos se assemelha ao usado no Cálculo, atualmente, só que agora se usa, em geral, o símbolo h ou $\triangle\ x$ em lugar do E do Fermat. O processo de Fermat de mudar ligeiramente a variável e considerar valores vizinhos é a essência da análise infinitesimal.

No séc XVII, surgem os trabalhos de Isaac Newton (1642 – 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) que são considerados os inventores do Cálculo Diferencial e Integral. Newton e Leibniz desenvolveram o Cálculo através de caminhos diferentes. A diferença não estava apenas na linguagem com que ambos expressaram as ideias fundamentais do Cálculo, estava também, na concepção de seus trabalhos. Tanto Newton quanto Leibniz podem ser considerados como os primeiros a expressar a ideia da reciprocidade entre a diferencial e a integral, que constitui o Teorema Fundamental do Cálculo,[2].

Segundo [15], tanto o Cálculo de Newton quanto o cálculo de Leibniz estão relacionados com os estudos das séries. O cálculo de Newton se baseia nos estudos das quantidades variáveis com o tempo, cujo conceito fundamental é o da fluxão, que é a taxa de variação de uma quantidade em relação ao tempo (velocidade). O cálculo de Leibniz considerava quantidades que variam em uma sequência de valores infinitamente próximos um do outro, cujo conceito fundamental e o de diferencial, que é uma diferença infinitamente pequena entre valores sucessivos de uma série.

No século XVII, o conhecimento deveria proporcionar um controle dos fenômenos naturais. A necessidade de se obter relações quantitativas entre os diversos conceitos e grandezas emergentes, como força e aceleração, temperatura e pressão, velocidade e tempo, velocidade e distância, dentre outras, fizeram a matemática avançar. Essas relações faziam parte, principalmente, da mecânica newtoniana recém inventada. Essa mecânica foi muito bem aceita, pois com ela podia-se fazer previsões, calcular o momento e o local exatos da passagem de corpos celestes como cometas,[20].

> Dentro desse contexto histórico, a matemática se torna operacional, e o infinito passa a ser tratado de maneira intuitiva tendo como justificativa a funcionalidade. Foi uma época em que os resultados justificavam qualquer procedimento. Com isso, durante três séculos, (XVI, XVII e XVIII), o método dedutivo grego foi atropelado. Newton e Leibniz oficializaram esse atropelo com a teoria dos infinitesimais que culminou no Teorema Fundamental do Cálculo, a grande ferramenta para calcular áreas, volumes e resolver equações diferenciais (fundamentais para se obter previsibilidade e determinismo, baseiam-se na segunda lei de Newton e na noção de velocidade instantânea). Newton e Leibniz lidam com partes atômicas indivisíveis (infinitésimos) sem nenhum escrúpulo em relação à fundamentação de sua natureza. Em outras palavras, ninguém sabia o que era exatamente um infinitésimo indivisível, mas como o método e o raciocínio funcionavam bem, não se pedia uma fundamentação,[20].

Apesar das restrições a legitimidade dos métodos infinitesimais, com eles foi possível resolver vários problemas, tais como encontrar a tangente a uma curva, calcular quadraturas ou retificar curvas. Antes das definições formais de função e de limite, a derivada era sempre a derivada de uma curva, e a tangente era a melhor aproximação local da curva por uma reta, quando o movimento passa a ser representado por curvas e essas curvas passam a ser expressas por equações, as tangentes passaram a representar a velocidade do movimento. Sendo assim, as tangentes deixam de ser definidas por propriedades geométricas e passam a ser definidas de modo dinâmico. Essa associação foi um dos motivadores para o surgimento do cálculo infinitesimal,[15].

Segundo [16], até o advento do cálculo, a matemática era uma ciência das quantidades. No século XVII, o trabalho sobre curvas, relacionava quantidades geométricas. Já a partir do século XVIII, muitos matemáticos começaram a considerar que seu principal objeto era a função. Apesar de esboços da noção de função serem identificados nos cálculos de Leibniz e Newton, definições explícitas desse conceito só foram propostas posteriormente.

Os Cálculos de Newton e de Leibniz tinham problemas com os infinitesimais, visto por ambos de maneiras diferentes, mas que operavam de maneiras parecidas, pois esses infinitesimais, às vezes eram cancelados como fatores diferentes de zero, outras eram desprezados como se realmente fossem zero. Em ambos, faltavam os fundamentos. Durante muitos anos, os matemáticos se debateram com o problema de fundamentar o uso de quantidades infinitamente pequenas. A discussão sobre a legitimidade dos métodos infinitesimais levou à definição de função, no século XVIII e de limites posteriormente.

Segundo [16], a Inglaterra, no início do século XVIII, testemunhou diversas críticas às quantidades infinitamente pequenas e aos métodos do cálculo. Dentre os críticos do cálculo infinitesimal, George Berkeley (1685- 1753) foi o mais notório, ele publicou, em 1734, uma obra com um título que traduzimos para o português como: O analista ou um discurso endereçado a um matemático infiel. Na qual, foi examinado se o objeto, os princípios e as inferências da análise moderna são concebidos de um modo mais distinto, ou deduzidos de um modo mais evidente, do que mistérios religiosos e questões de fé. Berkeley enumerava diversas definições e técnicas do cálculo que contradiziam à intuição, uma delas era o fato de eliminarem quantidades infinitamente pequenas nas contas.

Segundo [6], críticas como as de Berkeley, não impediram a divulgação dos trabalhos de Newton e de Leibniz. Os irmãos e matemáticos suiços Jacques Bernoulli (1654-1705) e Jean Bernoulli (1667-1748), mantiveram assídua correspondência com Leibniz e foram os divulgadores de seus trabalhos. Jean foi professor do Marquês Guillaume F. A. de L'Hospital (1661-1704), entre 1690 e 1692, a quem teria cedido, descobertas que seriam usadas na redação do primeiro livro sobre o cálculo infinitesimal, de L'Hospital (1696). Nessa obra, é dado o melhor tratamento, até então, ao caráter inconsistente das quantidades infinitesimais, dessa axiomatização utilizada por L'Hospital, da qual destacamos os postulados seguintes.

- Pode-se tomar, indiferentemente, qualquer uma de duas quantidades que diferem entre si por uma quantidade infinitamente pequena.

- Uma linha curva pode ser considerada como uma coleção de infinitos segmentos, todos de comprimento infinitesimal, ou seja, pode ser aproximada por uma linha poligonal com quantidade infinita de lados, todos de comprimento infinitesimal.

Com esses postulados ficou evidente a relação que existe entre a equação da reta tangente a uma curva, em um de seus pontos, e os incrementos infinitesimais considerados. Na tentativa de justificar o cálculo para que ele pudesse ser considerado mais convincente, alguns matemáticos sugeriram substituir os fundamentos algébricos, propostos por L'Hôspital, por justificativas geométricas e cinemáticas, relacionadas com as ideias físicas de Newton.

Segundo [16], o matemático escocês Colin MacLaurin (1698- 1746), em 1742, baseado nos argumentos geométricos e cinemáticos de Newton nos quais rejeitava os infinitesimais, propôs uma resposta a Berkeley. Seus argumentos traziam de volta, por exemplo, as demonstrações indiretas, por dupla contradição, usadas por Arquimedes. Ele desprezava a algebrização e erigia a técnica geométrica de encontrar limites como base do cálculo, apesar de nem definir o que são limites nem as regras para operar com eles. Tal proposta influenciou o francês Jean le Rond D'Alembert (1717- 1783) a defender a substituição das quantidades infinitamente pequenas pelo método de limites, permitindo, contudo, a intervenção da álgebra. Impactado pelas críticas de Berkeley, D'Alembert afirmava que o uso das quantidades infinitamente pequenas podia abreviar as demonstrações, mas que ainda assim, elas não devem ser aceitas, já que é preciso deduzir as propriedades das curvas com “todo o rigor” necessário. Sua posição foi publicada, primeiramente, nos anos 1740, só ficando mais clara por volta de 1750.

D’Alembert escreve o verbete “Limite” datado de 1765 e nele se lê que tal conceito está na base da verdadeira metafísica do cálculo diferencial. É dito ainda que o limite nunca coincide com a quantidade, ou nunca se torna igual à quantidade da qual é limite; o limite sempre se aproxima, chegando cada vez mais perto da quantidade, mas difere sempre dela tão pouco quanto se deseje.

Segundo [19], D’Alembert era o único cientista da época que reconheceu explicitamente a centralidade do limite no Cálculo. Em sua famosa *Encyclopédie* ele afirmou que a definição apropriada ao conceito de derivada requer a compreensão de limite primeiramente, e então, ele explicou o conceito de limite da seguinte maneira:

> Limite substantivo (matemática). Diz que uma grandeza é o limite de outra grandeza quando a segunda pode aproximar-se da primeira tanto quanto se queira, embora a primeira grandeza nunca possa exceder a grandeza da qual ela se aproxima; de modo que a diferença entre tal qual quantidade e seu limite é absolutamente indeterminável. ([3], p.28).

Segundo [19], D’Alembert tenta fundamentar o cálculo diferencial com o cálculo de limite. Esse é um avanço importante, porque a derivada não é mais a relação de duas quantidades infinitesimais, mas o limite de uma relação de quantidade não nula. Entretanto, ele não conseguiu dar uma forma logicamente coerente.

Na tentativa de elaborar o conceito de limite em 1784, a Academia de Ciências de Berlim ofereceu um prêmio para quem explicasse com sucesso uma teoria do infinitamente pequeno e do infinitamente grande na matemática e que pudesse ser usado no Cálculo como um fundamento lógico e consistente. Embora esse prêmio tenha sido ganhado por Simon L’Huilier (1750 - 1840) pelo seu trabalho, que usava a linguagem dos limites, este não foi considerado uma solução aos problemas propostos. Carnot (1753 - 1823) propôs uma tentativa popular de explicar o papel do limite no Cálculo como “a compensação dos erros”, mas não explicou como esses erros se balançariam sempre perfeitamente.

Com o objetivo de se haver uma construção rigorosa dos fundamentos do Cálculo, iniciou-se um movimento que ficou conhecido como Aritmetização da Análise. O processo de Aritmetização da Análise foi uma busca pela fundamentação do Cálculo, não mais de maneira geométrica, mas sim por meio dos números. Segundo [19], isso só vai ocorrer na segunda metade do século XIX, com as contribuições de Gauss (1777-1855), Cantor (1845-1918), Cauchy (1789-1857), Dedekind (1831-1916) e Weirstrass (1815-1897).

Segundo [6], quando os infinitésimos estavam em vias de ser banidos da matemática e, a teoria de limites já despontando no horizonte matemático, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) fez uma das últimas tentativas de seu tempo para consolidar o cálculo, a partir do uso dos infinitésimos, considerados, agora, como quantidades fixas e não mais como variáveis tendendo a um limite. Foi, no entanto, mais uma tentativa frustada.

Cauchy se concentrou, então, na emergente teoria de limites, e em (1821 e 1826-1829), introduziu resultados que o tornaram um dos mais importantes precursores do cálculo diferencial e integral moderno.

Segundo [4], dispensando o caráter geométrico e os infinitésimos, Cauchy dá uma definição relativamente próxima da que conhecemos hoje para limite.

> Quando valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo a acabar diferindo dele tão pouco quanto se queira, este último chama-se o limite dos outros dados, ([4] p. 355).

Cauchy, diferentemente de matemáticos anteriores que pensavam num infinitésimo como um número fixo muito pequeno, pensou na concepção de infinitésimo como uma variável dependente:

> Diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce indefinidamente de modo a convergir para o limite zero, ([4], p. 355).

A partir desse conceito de limite, Cauchy desenvolveu os conceitos de continuidade, diferenciabilidade e integral, cujas definições são, em sua essência, as utilizadas até hoje. No entanto, a teoria de limites de Cauchy estava baseada numa noção intuitiva de números reais. Assim, era preciso uma fundamentação do sistema de números reais.

Segundo [6], os problemas relacionados às definições do cálculo diferencial e integral foram sanados por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), com sua aritmetização, através da qual problemas remanescentes dos trabalhos de Cauchy foram resolvidos, em particular, a Weierstrass são creditadas a definição rigorosa de limite através dos $\epsilon's$ e $\delta's$, e as correspondentes definições de continuidade, diferenciabilidade e outras noções afins.

Segundo [19], entre 1840 e 1850, Weierstrass verificou que, para corrigir os erros cometidos por Cauchy, era necessário iniciar pela definição de limite de Cauchy em termos aritméticos estritos, usando-se somente valores absolutos e desigualdades.

Segundo [2], Weierstrass foi quem defendeu a necessidade de que o sistema de números reais fosse tornado rigoroso, o que se concretizou no final do século XIX, com os trabalhos de Dedekind (1831 – 1916) e Peano (1851 – 1932), que mostraram como o sistema dos números reais podia ser deduzido de um conjunto de postulados para o sistema dos números naturais, conhecidos como “Axiomas de Peano” e “Cortes de Dedekind”, os quais permitiram a demonstração rigorosa dos teoremas fundamentais sobre limites sem utilizar recursos geométricos, criando dessa forma, uma nova forma de lógica matemática.

Heine (1821 – 1881), aluno de Weierstrass, na Universidade de Berlim, formula e apresenta, em 1872, a definição formal de limite para funções de uma variável real.

Definição 2.1: Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $x_0 \in I$ e $f : I \backslash \{x_0\} \to \mathbb{R}$ uma função dada. Dizemos que $f(x)$ tem limite L quando x tende a x_0, e denotamos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

se, para cada $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que

$$x \in I \quad e \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

3
Aprofundando o Método da Exaustão

Nessa seção apresentaremos como Eudoxo resolveu o problema de se calcular a área da região limitada por um círculo. Essa seção será baseada em [7].

Eudoxo propõe a seguinte definição de grandezas proporcionais:

Definição 3.1: Sejam dadas quatro grandezas a, b, c e d e suas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Temos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se para toda fração $\frac{m}{n}$, acontece um dos seguintes casos:

ou $\frac{m}{n} < \frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n} < \frac{c}{d}$, isto é, ou a fração é menor que ambas;

ou $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n} = \frac{c}{d}$, isto é, ou a fração é igual a ambas;

ou $\frac{m}{n} > \frac{a}{b}$ e $\frac{m}{n} > \frac{c}{d}$, isto é, ou a fração é maior que ambas.

A ideia intuitiva que está por trás desta definição é: tomando um número real a as frações $\frac{m}{n}$ se dividem em três grupos: as que são menores que a, as que são iguais a a e as que são maiores que a.

$$L_a = \left\{ \frac{m}{n} < a \right\}, \quad I_a = \left\{ \frac{m}{n} = a \right\}, \quad U_a = \left\{ \frac{m}{n} > a \right\}. \tag{3.1}$$

Usando essa ideia e o fato de que o conjunto dos números naturais não é limitado superiormente, podemos concluir os seguintes resultados;

Teorema 3.1: Dado um número real $a > 0$ existe um inteiro $n_0 > 0$ tal que $\frac{1}{n_0} < a$.

Demonstração. Dado a existem três opções para uma fração $\frac{1}{n}$. Podemos ter $\frac{1}{n} < a$ e então encontramos o resultado. Podemos ter $\frac{1}{n} = a$ e assim $\frac{1}{n+1} < a$ e achamos o que queríamos.

Suponhamos então, por absurdo, que estes dois casos não possam acontecer. Então $\frac{1}{n} > a$ para todo número inteiro positivo n. Teremos que $n < \frac{1}{a}$, $\forall n > 0$, ou seja, o conjunto dos naturais é limitado, o que é absurdo.

Logo, existe n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < a$. □

O próximo resultado é conhecido como o Princípio de Arquimedes e será fundamental no raciocínio de Eudoxo para achar a área do círculo.

Teorema 3.2: Dados dois números reais positivos a e b existe um natural $n > 0$ tal que $na > b$.

Demonstração. Para prová-lo basta aplicar o teorema anterior ao número $\frac{a}{b}$. □

Seja $a(S)$ a área de uma figura S. Para calcular áreas, os gregos partiam de dois princípios:

1. Se a figura S esta contida numa figura T então $a(S) \leq a(T)$.
2. Se a figura R é a união das figuras S e T, sem superposição de áreas, então $a(R) = a(S) + a(T)$.

Se S não é um polígono, os gregos, aplicavam a ideia de Antifonte de tomar uma sequência de polígonos P_1,P_2,P_3,... que preenchem ou exaurem S.

Se observarmos, estão quase tomando $\lim_{n\to\infty} a(P_n)$ para obter a área a(S). Mas os gregos não tomavam limites,pois como já vimos eles possuem aversão ao infinito.

Na tentativa de "calcular" o limite com um número finito de passos Eudoxo cria o método da Exaustão, que se encontra no livro X dos elementos de Euclides, [10]:

Duas grandezas desiguais sendo dadas, se da maior for tirada uma grandeza maior do que sua metade e este processo for repetido continuadamente, sobrará uma grandeza menor do que a menor grandeza dada.

Usando uma linguagem mais moderna podemos reescrever o Método da Exaustão da seguinte forma:

Teorema 3.3: Sejam M_0 e ϵ reais positivos, com $M_0 > \epsilon$. Tomamos $M_1 = M_0 - x$, onde $x > \frac{1}{2}M_0$, ou seja, $M_1 < \frac{1}{2}M_0$. Depois tomamos $M_2 = M_1 - y$, onde $y > \frac{1}{2}M_1$, ou seja, $M_2 < \frac{1}{2}M_1$. E assim sucessivamente de modo a termos uma sequência M_0,M_1,M_2,..., onde $M_1 < \frac{1}{2}M_0$, $M_2 < \frac{1}{2}M_1$, etc. Então existe um N natural, tal que $M_N < \epsilon$

Demonstração. A prova deste resultado depende do Princípio de Arquimedes. Como $M_0 > \epsilon$, existe N inteiro positivo tal que $(N+1)\epsilon > M_0$. Uma vez que $(N+1) \geq 2$, segue que $\frac{1}{2}(N+1)\epsilon \geq \epsilon$. Temos então que $(N+1)\epsilon = N\epsilon + \epsilon > M_0$, ou seja,

$$M_1 < \frac{1}{2}M_0 < \frac{1}{2}(N+1)\epsilon \leq \frac{1}{2}(N+N)\epsilon = N\epsilon. \tag{3.2}$$

ou seja, $(N+1)\epsilon > M_0$ implica que $N\epsilon > M_1$. Continuando o raciocínio, vemos que $N\epsilon > M_1$ implica que $(N-1)\epsilon = N\epsilon - \epsilon \geq M_1 - \epsilon \geq \frac{1}{2}M_1 > M_2$ e assim sucessivamente até chegarmos em $\epsilon > M_N$. □

Eudoxo assume que um segmento de reta pode ser infinitamente dividido. Logo, um círculo não é um polígono de muitos lados. O método de exaustão é então usado para mostrar o seguinte resultado:

Teorema 3.4: Dado um círculo C e um erro ϵ, existe um polígono regular P, inscrito em C tal que $a(C) - a(P) < \epsilon$.

Demonstração. Comecemos com um quadrado $P_0 = EFGH$ e tomemos a grandeza $M_0 = a(C) - a(P_0)$. Tomemos agora P_1 o octógono construído sobre os pontos médios dos arcos do círculo, e $M_1 = a(C) - a(P_1)$ e assim sucessivamente, obtendo as sequências P_0,P_1,P_2,...,P_n,..., onde P_n tem 2^{n+2} lados e $M_n = a(C) - a(P_n)$.

Precisamos mostrar que $M_n - M_{n+1} > \frac{1}{2}M_n$ e logo $M_{n+1} < \frac{1}{2}M_n$, de modo que, pelo método da exaustão, existe N tal que $a(C) - a(P_N) < \epsilon$.

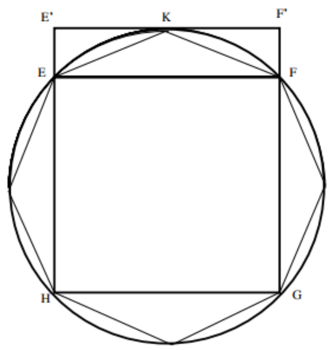


Figura 3.1

Anotando por $\widetilde{EKF}$ a área entre a corda EKF e o círculo temos

$$\begin{aligned} M_0 - M_1 &= a(C) - a(P_0) - a(C) + a(P_1) = a(P_1) - a(P_0) \\ &= 4a(\triangle\ EFK) = 2a(EE'FF') > 2a(\widetilde{EKF}) \\ 2a(\widetilde{EKF}) &= \frac{1}{2}4a(\widetilde{EKF}) = \frac{1}{2}(a(C) - a(P_0)) = \frac{1}{2}M_0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Logo

$$M_0 - M_1 > \frac{1}{2}M_0. \tag{3.4}$$

O mesmo raciocínio mostra que

$$M_n - M_{n+1} = a(P_{n+1}) - a(P_n) > \frac{1}{2}(a(C) - a(P_n)) = \frac{1}{2}M_n. \tag{3.5}$$

e concluímos que existe N tal que $a(C) - a(P_N) < \epsilon$. □

Usando o método de exaustão, os gregos determinaram a área do círculo. No livro XII dos elementos de Euclides, [10] encontramos o seguinte teorema:

Teorema 3.5: Dados dois círculos C_1 e C_2 de raios r_1 e r_2 então a razão entre suas áreas é a mesma que a razão entre as áreas dos quadrados de lados r_1 e r_2, ou seja

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \tag{3.6}$$

Demonstração. Para as quatro grandezas $a(C_1)$, $a(C_2)$, r_1 e r_2 temos 3 opções:

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{ou} \quad \frac{a(C_1)}{a(C_2)} > \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{ou} \quad \frac{a(C_1)}{a(C_2)} < \frac{r_1^2}{r_2^2}. \tag{3.7}$$

Se provarmos que as duas últimas não valem, o teorema estará provado (este é um típico modo de demonstração dos gregos, chamado de *dupla redução ao absurdo*). Suponhamos primeiro que

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} < \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{ou} \quad a(C_2) > \frac{a(C_1)r_2^2}{r_1^2} = S \tag{3.8}$$

e seja $\epsilon = a(C_2) - S > 0$. Pelo resultado anterior, existe um polígono regular P_2 inscrito em C_2 tal que $a(C_2) - a(P_2) < \epsilon = a(C_2) - S$. Logo, $a(P_2) > S$. Seja P_1 um polígono regular, inscrito em C_1 e semelhante a P_2. Não é difícil mostrar que

$$\frac{a(P_1)}{a(P_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{a(C_1)}{S}. \tag{3.9}$$

Segue-se que

$$\frac{S}{a(P_2)} = \frac{a(C_1)}{a(P_1)} > 1. \tag{3.10}$$

Logo, $a(P_2) < S$, o que é um absurdo. Assim, a hipótese de que $\frac{a(C_1)}{a(C_2)} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$ é falsa.

Invertendo os papéis dos dois círculos, vemos que a outra desigualdade também é falsa. Portanto, obtemos que:

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \tag{3.11}$$

□

Repare que os gregos não acham uma fórmula para o cálculo da área do círculo. Eles não fazem o que nós fazemos, que é reescrever a equação (3.6) como:

$$\frac{a(C_1)}{r_1^2} = \frac{a(C_2)}{r_2^2} \tag{3.12}$$

e chamar de π o valor comum da razão entre a área e o quadrado do raio de um círculo qualquer. Os gregos não podiam fazê-lo porque (3.6) é uma proporção entre áreas e não uma igualdade numérica.

3.1 A área de um círculo

Nessa seção, que também será baseada em [7], vamos provar novamente, mas agora usando ideias e conceitos mais novos, o resultado de Eudoxo e Euclides de que, dados dois círculos C_1 e C_2 de raios r_1 e r_2, a razão entre suas áreas é a mesma que a razão entre as áreas dos quadrados de lados r_1 e r_2, ou seja, que

$$\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \tag{3.13}$$

Vamos usar a proposta de Antifonte, isto é, tomaremos polígonos com cada vez mais lados, de maneira a estar cada vez mais perto da área do círculo.

Dado um círculo C de raio R, começamos o processo construindo um quadrado inscrito. Tomando o ponto médio de cada arco ligando dois vértices construímos um octógono inscrito e assim sucessivamente vamos construindo polígonos regulares inscritos p_n com 2^n lados, $n \geq 2$. Temos que p_2 é o quadrado inscrito, p_3 é o octógono, p_4 é o polígono regular inscrito com $2^4 = 16$ lados (um hexadecágono) e assim por diante.

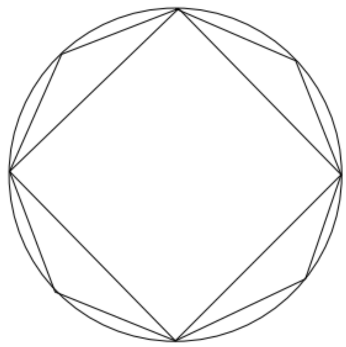


Figura 3.2

Seja a_n a área de p_n. Por construção temos que

$$0 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots \tag{3.14}$$

A área $a(C)$ do círculo é definida como sendo o $\lim_{n\to\infty} a_n$ se este limite existir, ou seja, se este processo infinito nos fornece um número real.

Ora, a sequência $\{a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots\}$ é crescente, como mostra a relação (1), e só tem duas opções: ou cresce, sem parar, ou, ao aumentarmos o n, chegamos cada vez mais perto de um número, o que garantirá que o limite existe.

Tomemos então o quadrado P_2 circunscrito ao círculo. Temos que sua área, $(2R)^2 = 4R^2$, é maior do que a área de qualquer polígono inscrito. Logo

$$0 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots < 4R^2 \tag{3.15}$$

e a sequência $\{a_n\}$ não pode crescer indefinidamente, ou seja $\{a_n\}$ é uma sequência crescente e limitada, logo $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe e $a(C)$ é um número bem definido, verificando $a(C) \leq 4R^2$.

Para calcularmos este limite, observemos que o polígono regular inscrito p_n tem 2^n lados e, assim, é a união de 2^n triângulos isósceles idênticos. Chamemos o comprimento do lado de l_n e de h_n a altura relativa ao lado. Como o ângulo do vértice oposto ao lado do polígono vale $\frac{360}{2^n}$ e usando as definições de seno (cateto oposto/hipotenusa) e cosseno (cateto adjacente/hipotenusa) obtemos

$$l_n = 2R\,\mathrm{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right) \quad \text{e} \quad h_n = R\cos\left(\frac{180}{2^n}\right) \tag{3.16}$$

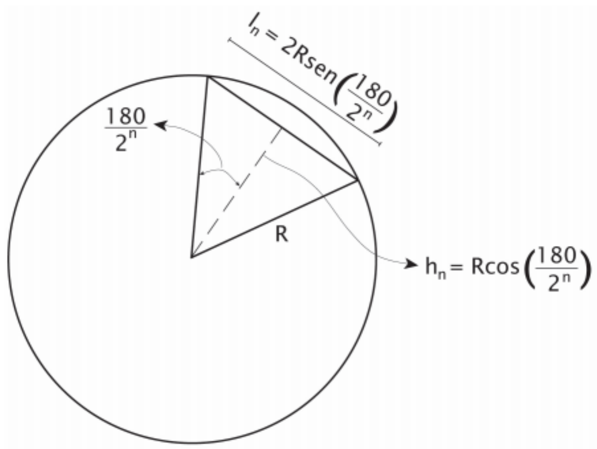


Figura 3.3

Assim

$$a_n = 2^n\left(\frac{1}{2}l_n h_n\right) = 2^n R^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right)\cos\left(\frac{180}{2^n}\right), \tag{3.17}$$

a área do círculo é

$$a(C) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(2^n R^2\,\mathrm{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right)\cos\left(\frac{180}{2^n}\right)\right) \tag{3.18}$$

e como

$$\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{180}{2^n}\right) = \cos\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{180}{2^n}\right)\right) = 1 \tag{3.19}$$

temos que

$$a(C) = R^2\lim_{n\to\infty}\left(2^n\,\mathrm{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right)\right). \tag{3.20}$$

Se um círculo C_1 tem raio R_1 então $a_n = 2^n R_1^2 \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right)\cos\left(\frac{180}{2^n}\right)$ e sua área é $a(C_1) = R_1^2 \lim_{n\to\infty}\left(2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right)\right)$.

Para um círculo C_2, que tem raio R_2, a área é $a(C_2) = R_2^2 \lim_{n\to\infty}\left(2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right)\right)$.

Logo,

$$\frac{a(C_1)}{R_1^2} = \lim_{n\to\infty} 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right) = \frac{a(C_2)}{R_2^2}, \tag{3.21}$$

ou seja, $\frac{a(C)}{R^2}$ **dá sempre o mesmo número, qualquer que seja o círculo.**

Esta constante universal dos círculos, o número $\lim_{n\to\infty}\left(2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180}{2^n}\right)\right) = \frac{a(C)}{R^2}$ é o que convencionamos chamar de π. Usando esta convenção, obtemos a tradicional fórmula

$$a(C) = \pi R^2. \tag{3.22}$$

Nessa seção calculamos a área do círculo usando polígonos regulares inscritos no círculo, porém vale ressaltar que em [7], encontramos, também, esse calculo usando polígonos regulares circunscritos a um círculo. Além disso a autora em [7], apresenta o calculo da área do círculo usando polígonos não regulares.

4

Atividade

Neste capítulo apresentaremos uma atividade que será realizada em uma turma do 8ª ano do ensino fundamental. No entanto, vale salientar que tal atividade pode ser realizada em turmas do 9º ano ou ainda em turmas do ensino médio. Isso porque a partir dos anos finais do ensino fundamental os estudantes já possuem certa familiaridade com a geometria e o conhecimento aritmético se expande para além dos números naturais e inteiros. Com isso, a compreensão de certos elementos geométricos juntamente com imersão dos alunos nos conjuntos dos números irracionais e reais, faz com que esses alunos sejam suscetíveis a atividade de investigação sobre nosso trabalho.

Nossa atividade terá como objetivo principal o uso da ideia intuitiva de limite para o cálculo da área da circunferência por aproximações sucessivas de polígonos. Além disso, utilizaremos a História da Matemática como recurso didático, possibilitando aos alunos uma participação ativa, investigando, formulando hipóteses e testando conjecturas, de forma muito semelhante à ocorrida ao longo do desenvolvimento histórico da Matemática. E ainda utilizaremos material concreto como auxílio metodológico, o que será facilitador para a compreensão dos alunos, uma vez que a atividade de manipulação desenvolve a percepção espacial .

4.1 Sobre a História da Matemática

Para [17], o uso da História da Matemática como metodologia de ensino além de ser um elemento motivador, é um recurso didático que favorece a compreensão da construção do conhecimento ao longo dos tempos. Possibilitando que a matemática possa ser vista por uma ótica positiva e construtiva.

É inegável a relevância da História da Matemática, uma vez que ela proporciona aos estudantes a percepção do papel da matemática ao longo do tempo. O conhecimento histórico auxilia na compreensão da evolução científica, tecnológica e da sociedade em geral, mostrando que todos esses avanços são resultados de conhecimentos matemáticos historicamente acumulados. Acerca dessa importância D'Ambrosio, afirma que:

> As práticas educativas se fundam na cultura, em estilos de aprendiza-

gem e nas tradições e a história compreende o registro desses fundamentos. Portanto, é praticamente impossível discutir educação sem recorrer a esses registros e a interpretações dos mesmos. Isso é igualmente verdade ao se fazer o ensino das várias disciplinas. Em especial da Matemática, cujas raízes se confundem com a história da humanidade, [8].

4.2 Sobre o material concreto

Quanto a utilização de material concreto [18], temos que ressaltar que é uma importante ferramenta pedagógica, pois permite que o aluno desenvolva o raciocínio e o pensamento lógico matemático. Ademais, desperta a curiosidade e estimula o estudante a fazer questionamentos, descobrindo diferenças e semelhanças, criando hipóteses e concluindo a suas próprias soluções. Além disso, facilita a relação professor/aluno/conhecimento, pois a partir da observação e manipulação deve haver um diálogo entre alunos e professor, possibilitando que as relações matemáticas comecem a ser percebidas, enunciadas e os professores aos poucos, devem ir organizando esse conhecimento, sempre valorizando os conhecimentos prévios dos alunos a fim de que o processo de aprendizagem seja prazeroso e eficaz. Paulo Freire, em [9], lembra que "ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção".

Os Parâmetros Curriculares Nacionais também destacam a utilização de materiais concretos pelos professores como um recurso alternativo que pode tornar bastante significativo o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

4.3 Sobre a ideia intuitiva de limite

Para [7], o primeiro encontro dos estudantes com a ideia do infinito ocorre com o estudo da área e do perímetro de um círculo. Além disso, por causa dessa ideia de infinito, normalmente só são apresentadas as fórmulas πr^2 e $2\pi r$, sem maiores comentários e explicações.

Ao introduzirmos esses assuntos nos anos finais do ensino fundamental, podemos explorar o forte vínculo existente entre a estrutura da reta real e a definição e o cálculo de área e perímetro do círculo.

Em suma, o enfoque histórico proporcionará aos alunos a construção do entendimento das noções e das dificuldades que estão por trás destas definições da área e do perímetro do círculo e o material concreto proporcionará uma aula mais dinâmica e interativa.

4.4 Sobre a metodologia

Metodologicamente, objetiva-se propor uma atividade que será dividida em três partes. A primeira parte constará de uma aula expositiva em que exploraremos a parte histórica. Serão apresentados conceitos como o surgimento dos incomensuráveis, a origem da noção de limites (neste momento, será mencionado que tal conteúdo é estudado no ensino superior) e a descoberta do cálculo da área do círculo por aproximações de polígonos.

Na segunda parte utilizaremos o material concreto como atividade exploratória, que consistirá na construção dos polígonos inscritos na circunferência, observações, medições, discussões e anotações de dados nas tabelas.

Já a terceira parte será composta pelo preenchimento de um questionário que tem por objetivo que os alunos expressem suas próprias conclusões acerca da ideia de limites e de como essa ideia foi fundamental para que obtivessem as fórmulas para o cálculo da área e do perímetro da circunferência. Além disso, tal atividade proporcionará aos alunos a possibilidade deles mesmos deduzirem essas fórmulas, ao invés de simplesmente se preocuparem com a memorização sem entendimento.

4.5 Explorando a atividade

A área de um círculo é dada pela fórmula $A_c = \pi r^2$ onde r é o raio do círculo e π é uma constante, que usualmente é dada por $\pi \simeq 3{,}14$. Já o comprimento da circunferência é dado por $C = 2\pi r$.

Vamos entender como podemos obter a fórmula da área do círculo fazendo aproximações por polígonos inscritos em uma circunferência.

É interessante saber que essa fórmula e essa maneira de pensar foram desenvolvidas há muitos anos, lá por volta do século V a.C, por Antifonte, Eudoxo e outros matemáticos.

Antifonte, que nasceu por volta de 460 a.C., era geômetra e operava com construções com régua e compasso. Um dos problemas tratados naquela época era denominado como a quadratura do círculo, isto é, determinar o lado do quadrado cuja área fosse equivalente a área de um círculo dado, que era uma maneira grega de dizer que queremos calcular a área do círculo.

Antigamente, na Matemática grega, não se media áreas de regiões poligonais da maneira como fazemos hoje. Não havia, por exemplo, a fórmula que conhecemos para o cálculo da área do triângulo de base b e altura h que é dada por $A_\triangle = \frac{1}{2}\, b\, h$.

Naquela época, calculava-se a área de regiões poligonais na prática. Para o cálculo dessas áreas usava-se a comparação.

Por exemplo, imagine que fosse necessário dividir um terreno plano poligonal em dois terrenos, para distribuí-los a dois herdeiros. Por se tratar de dois terrenos planos poligonais com formatos diferentes, mas com mesma área, o caminho seria transformá-los em quadrados equivalentes, podendo assim comparar se os dois tinham mesmo tamanho, tamanhos diferentes ou até mesmo se havia uma proporção entre eles.

Esse processo de transformar uma região poligonal em um quadrado equivalente é conhecido como "quadratura de uma região poligonal". Foi daí que surgiu a expressão "fazer a quadratura do círculo", um dos três problemas clássicos dos gregos, cuja solução é impossível com régua e compasso.

Antifonte que sabia calcular a área de triângulos e a área de polígonos regulares, pois podia decompor qualquer polígono regular em triângulos, criou o seguinte método para quadrar o círculo: tome um círculo e inscreva nele um quadrado; sobre cada lado do quadrado, coloque um triângulo isósceles cujos vértices estão sobre o círculo e no centro do círculo. Tome o ponto médio de cada arco desse círculo, ligando dois vértices consecutivos, obtemos um octógono; sobre cada lado do octógono, coloque um triângulo isósceles cujos vértices estão sobre o círculo e no centro do círculo. Repita todo o processo anterior, obtendo um polígono de 16 lados e assim por diante.

Para Antifonte um círculo é um polígono regular com um número (grande) de lados, pois para ele um segmento de reta tem um número finito de pontos, então um círculo também terá um número finito de pontos. Este número de pontos será então o maior número de lados que posso ter num polígono inscrito num círculo. Sendo assim, como ele sabia quadrar qualquer polígono ele também poderia quadrar um círculo.

Esta solução apresentada por Antifonte causou muita polêmica, pois se ela é verdadeira, teríamos um arco de círculo coincidindo com um segmento de reta. Mas se ela fosse falsa significaria assumir a infinita divisibilidade de uma linha, pois poderemos sempre tomar o ponto médio do arco de círculo e traçar um polígono com um número maior de lados. No entanto, naquela época não se admitia essa divisibilidade infinita.

Zenão de Eléia ($\sim 450a.C.$), afirmava que admitindo a infinita divisibilidade da reta, para irmos de um ponto a outro teríamos que passar pelo ponto médio. Se existem infinitos pontos médios, nunca chegaremos ao fim do segmento (este paradoxo é enunciado por Zenão como a história de Aquiles e o estádio). Logo uma reta não pode ser dividida infinitamente, se acreditamos na realidade do movimento.

Zenão e os matemáticos daquela época se depararam com um grande problema, que só foi resolvido recentemente, no século XIX: a questão da continuidade, ligada à questão do cálculo infinitesimal e do limite.

Eudoxo ($\sim 408\,a.C.- \sim 355\,a.C.$), que adimitia a infinita divisibilidade da reta criou o *Método de Exaustão* para calcular a área do círculo. Eudoxo utilizou a mesma ideia de Antifonte, porém ao supor que o segmento de reta pudesse ser dividido infinitamente, afirmou que os polígonos se aproximavam do círculo mas nunca coincidiam com ele. Isto implica que não se pode calcular a área do círculo com um número finito de cálculos.

Observe a figura abaixo, é uma circunferência de raio r e centro o e nela está inscrito um quadrado de lado l, que foi dividido em 4 triângulos isósceles congruentes.

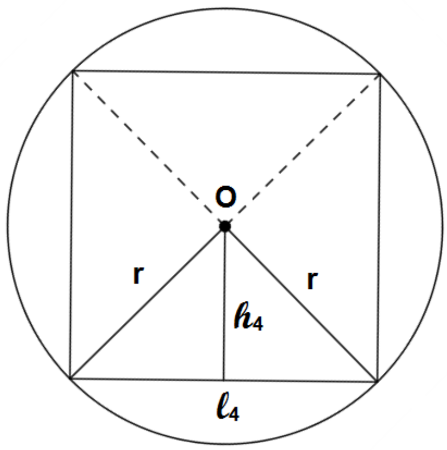


Figura 4.1: Quadrado inscrito na circunferência.

Observe que a área do quadrado (A_4) pode ser obtida como: $A_4 = 4\,A_{\triangle}$, onde $A_{\triangle} = \frac{1}{2}\,l_4 h_4$, onde h_4 é a altura do triângulo. Logo

$$A_4 = 4\,\frac{1}{2}\,l_4\,h_4. \tag{4.1}$$

E o perímetro do quadrado será $P_4 = 4\,l_4$.

Agora vamos pegar *os pontos médios* dos arcos e fazer um octógono (polígono de 8 lados).

Novamente podemos dividir o octógono em 8 triângulos isósceles congruentes.

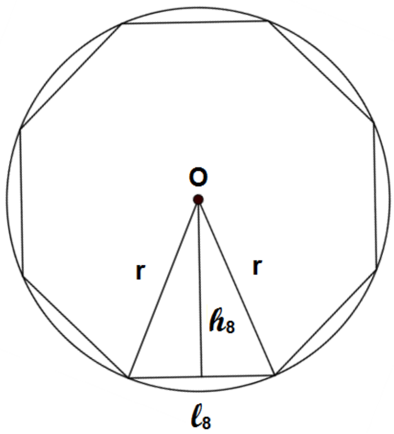


Figura 4.2: Octógono inscrito na circunferência.

Logo a área do octógono (A_8) será:

$$\begin{aligned} A_8 &= 8\,A_\triangle \\ A_8 &= 8\,\frac{1}{2}\,l_8\,h_8. \end{aligned} \tag{4.2}$$

e o perímetro $P_8 = 8\,l_8$.

Usando o mesmo processo para um hexadecágono (polígono de 16 lados).

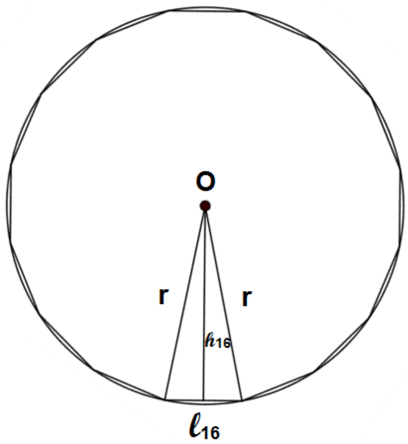


Figura 4.3: Hexadecágono inscrito na circunferência.

Teremos sua área A_{16}:

$$\begin{aligned} A_{16} &= 16\,A_\triangle \\ A_{16} &= 16\,\frac{1}{2}\,l_{16}\,h_{16}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

e o perímetro $P_{16} = 16\,l_{16}$.

Procedendo do mesmo modo para um dotriacontágono (polígono de 32 lados), teremos:

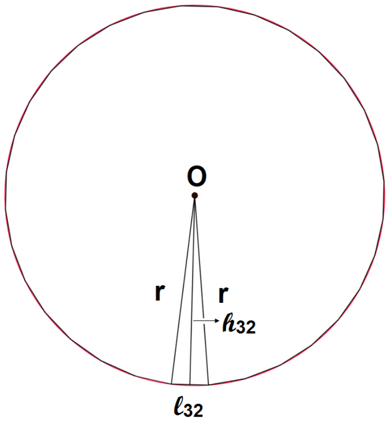


Figura 4.4: Dotriacontágono inscrito na circunferência.

Teremos sua área A_{32}:

$$\begin{aligned} A_{32} &= 32\, A_{\triangle} \\ A_{32} &= 32\, \frac{1}{2}\, l_{32}\, h_{32}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

e o perímetro $P_{32} = 32\, l_{32}$.

Generalizando para um polígono de n lados obtemos sua área A_n:

$$\begin{aligned} A_n &= n\, A_{\triangle} \\ A_n &= n\, \frac{1}{2}\, l_n\, h_n. \end{aligned} \tag{4.5}$$

e o perímetro $P_n = n\, l_n$.

Imagine, agora, que a quantidade n de lados seja tão grande que mal podemos visualizá-los. O que você imagina que irá acontecer?

Para melhor entendimento da situação e responder a pergunta anterior teremos o auxílio do material concreto: circunferência de isopor com 32 alfinetes igualmente distribuídos, gominhas coloridas, régua e calculadora.

As tabelas serão preenchidas conforme as devidas orientações:

- Medir o raio da circunferência utilizando a régua;
- Utilizar o valor aproximado para $\pi \sim 3{,}14$ e calcular o comprimento e a área da circunferência dada;
- Anotar esses resultados na tabela 1.

Raio (r)	Comprimento ($C = 2\pi r$)	Área ($A = \pi r^2$)

Figura 4.5: Tabela 1

Número de lados (n)	Lado (l_n)	Altura (h_n)	Área (A_n)	Perímetro (P_n)
4				
8				
16				
32				

Figura 4.6: Tabela 2

- Usar gominhas amarelas, para reproduzir a figura (4.1);
- Medir a altura (h_4) do triângulo e o lado do quadrado (l_4);
- Usar as gominhas vermelhas para reproduzir a figura (4.2);
- Medir a altura (h_8) desse novo triângulo e a lado (l_8) do octógono.
- Usar as gominhas verdes para reproduzir a figura (4.3);
- Medir a altura (h_{16}) desse novo triângulo e a lado (l_{16}) desse polígono;
- Usar as gominhas lilás para reproduzir o polígono de 32 lados (figura 4.4);
- Medir a altura (h_{32}) desse novo triângulo e a lado (l_{32}) desse polígono;
- Anote todos os dados encontrados na tabela 2.
- Com os dados da tabela, calcular a área e o perímetro dos quatro polígonos regulares construídos anteriormente;
- Anote os resultados na tabela 2.

Observando as construções poligonais feitas e os dados da tabela responda:

1. O que está acontecendo com os valores das alturas dos triângulos, que formam os polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

2. O que você imagina que irá acontecer com esses valores das alturas se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

3. O que está acontecendo com os valores dos lados dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

4. O que você imagina que irá acontecer com os valores desses lados, se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

5. O que esta acontecendo com os valores dos perímetros dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

6. O que você imagina que irá acontecer com os valores dos perímetros se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

7. O que esta acontecendo com os valores das áreas dos dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

8. O que você imagina que irá acontecer com os valores das áreas se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

Observe que:

- Todos os polígonos P_n estão inscritos na circunferência, isto é, todos os seus vértices estão no círculo.
- O número de lados (ou de vértices) cresce indefinidamente com n.
- O comprimento dos lados dos polígonos tendem a zero à medida que n tende a ∞

Logo podemos concluir que em relação ao polígono P_n, o lado l_n tende a zero, a altura h_n dos triângulos isósceles, que formam o polígono, tende ao raio r da circunferência, o perímetro P_n tende ao comprimento da circunferência e a área A_n tende a área da circunferência A_c à medida que n tende ao ∞.

Ou seja,

$$l_n \to 0, \quad h_n \to r, \quad P_n \to 2\,\pi\, r \quad \text{e} \quad A_n \to A_c = \pi r^2. \tag{4.6}$$

mas

$$A_n = n\,\frac{1}{2}\,l_n\ h_n \quad \text{e} \quad P_n = n\,l_n \tag{4.7}$$

Logo

$$\begin{aligned}
A_c &= A_n \\
A_c &= n\,\frac{1}{2}\,l_n\,h_n \\
A_c &= \frac{1}{2}\,(n\,l_n\,)h_n \\
A_c &= \frac{1}{2}\,P_n\,h_n \\
A_c &= \frac{1}{2}\,2\,\pi\,r\,r \\
A_c &= \pi\,r^2
\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.6 Relato da aula prática

Antes de relatar como foi a aula prática, acho necessário apresentar o contexto pelo qual surgiu a ideia e os objetivos da atividade aplicada.

Há três anos sou professora da rede municipal de Belo Horizonte, e atualmente, leciono para turmas dos 8º e 9º anos. Antes disso, já havia lecionado em escolas da rede particular, tanto no Ensino Básico, quanto no Ensino Médio, também lecionei na PUC Minas, por dois anos, disciplinas dos ciclos iniciais dos cursos de Engenharias, dentre elas, Cálculo 1, Matemática Básica e Pré-Cálculo. A experiência como professora dessas disciplinas e como professora do Ensino Médio, me fizeram ter interesse pelo tema, "Limites: História e aplicações", proposto pelo professor Justino Muniz.

Um dos motivos da escolha desse tema se deu, pelo fato, de eu já conhecer algumas das dificuldades apresentadas pelos alunos do Ensino Superior, em lidar com as ideias e situações que surgem ao estudarem o conteúdo de limites. Um exemplo disso, ocorre quando eles se deparam com uma soma de infinitas parcelas e o resultado dessa soma não necessariamente será infinito, podendo, em algumas situações, ser uma constante. Essa mesma dificuldade aparece no Ensino Médio, quando ensinamos que a soma de uma Progressão Geométrica de razão com módulo menor que um, será um número e não infinito. Em geral, os alunos apresentam dificuldades em lidar com o infinitamente grande, com o infinitamente pequeno, com a soma infinita e etc.

Então, ao escolher limites, logo pensei em elaborar alguma atividade para alunos do 3º ano do Ensino Médio, que já soubessem Progressões, Geometria Plana, Geometria Espacial e etc. Porém, para isso eu teria que aplicar a atividade para alunos que não eram os meus, em alguma escola que não era o meu local de trabalho.

Em paralelo a isso, ao estudar várias bibliografias para elaboração desta dissertação, percebi que o conceito de limites, surgiu nas dificuldades dos povos da antiguidade em lidar com os incomensuráveis, ou seja, com o descobrimento dos irracionais, simultaneamente, enquanto realizava essas leituras bibliográficas, eu lecionava o conteúdo Conjunto dos Irracionais para meus alunos do 8º ano.

Dentre as bibliografias que estudei, estava um trabalho, [7], da professora Sônia da UFMG, instituição que me graduei. Nesse trabalho, era apresentada uma demonstração para a fórmula da área do círculo, feita por Eudoxo, usando o Método da Exaustão. Na mesma época, eu estava trabalhando geometria com meus alunos, e estava prestes a introduzir o conteúdo de área do círculo e comprimento da circunferência, sendo que já havia trabalhado triângulos e polígonos. A partir disso, percebi que seria possível elaborar uma atividade para os meus alunos do 8º ano.

Mediante o exposto, nesta dissertação, proponho uma atividade que aborda a ideia intuitiva de limites, uma vez que nessa atividade mostraremos uma maneira de encontrar a fórmula da área do círculo por aproximações de polígonos regulares inscritos em uma circunferência. Essa mesma atividade foi aplicada em duas turmas do 8º ano, da Escola Municipal Josefina Sousa Lima, situada na região norte de Belo Horizonte. Uma das turmas possui 19 alunos frequentes, e a outra 21, nesta turma temos dois alunos especiais, que possuem uma acompanhante, ressalta-se que as turmas são reduzidas e tranquilas de trabalhar. Apesar de alguns alunos apresentarem certas dificuldades com o conteúdo de matemática a turma assimila bem os conteúdos ministrados.

A ideia inicial era aplicar a atividade em duas aulas de 60 minutos, porém, foram necessárias três aulas, isso porque foi pedido aos alunos que fizessem todas as contas em um rascunho, sem o uso da calculadora, assim eles praticaram as quatro operações com números reais, e só no último dia, permitiu-se que conferissem os resultados utilizando a calculadora.

A primeira parte do trabalho foi uma aula expositiva, na qual foi distribuído um texto aos alunos, o qual se encontra em anexo nesta dissertação, que explora a parte histórica da matemática. A aula transcorreu de maneira tranquila, mesmo com algumas poucas inquietações, pois era a primeira vez que eles me viam dando uma aula "diferente" segundo eles. Nessa aula, tive a oportunidade de relembra-los das nossas aulas sobre números irracionais do início do ano. Também tive a oportunidade de falar sobre os paradoxos de Zenão. Em uma das turmas, essa aula gerou uma discussão de como as ideias para a resolução de problemas podem partir de conhecimentos prévios, como foi o caso, dos matemáticos daquela época, tentarem quadrar o círculo, já que sabiam quadrar polígonos.

Em sequência, na segunda parte do trabalho, foram formados grupos de três alunos, e cada aluno recebeu um material impresso. Foi entregue aos grupos uma circunferência de isopor com, aproximadamente, 7 cm de raio e com 32 alfinetes, igualmente, distribuídos em seu comprimento, gominhas coloridas, régua e folhas para rascunho.

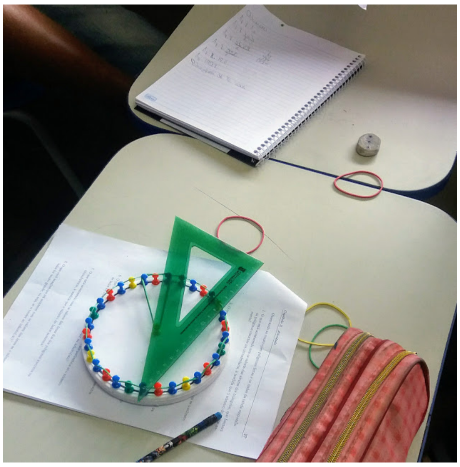


Figura 4.7: Material entregue aos alunos.

Usando esse material, os alunos mediram o raio da circunferência dada e calcularam, usando as fórmulas apresentadas nas aulas anteriores $A = \pi r^2$ e $C = 2\pi r$, a área do circulo e o comprimento da circunferência. De posse desses dados preencheram a tabela 1, ilustrada abaixo:

Raio (r)	Comprimento ($C = 2\pi r$)	Área ($A = \pi r^2$)
7,0 cm	43,96 cm	153,86 cm²

Figura 4.8: Tabela 1 preenchida.

Posteriormente, reproduziram quatro polígonos inscritos na circunferência, um de cada vez, o quadrado, o octógono, o hexadecágono (polígono de 16 lados) e o dotriacontágono (polígono de 32 lados), dentro de cada polígono construíram um dos triângulos da sua decomposição. Com essas reproduções, mediram os lados dos polígonos e as alturas dos triângulos e calcularam a área dos triângulos, a partir dessas áreas, calcularam também a área dos polígonos e o perímetro de cada polígono. Com esses dados preencheram a tabela 2 do trabalho, ilustrada a seguir:

Número de lados (n)	Lado (l_n)	Altura (h_n)	Área (A_n)	Perímetro (P_n)
4	10 cm	5,0 cm	100 cm²	40
8	5,3cm	6,5 cm	137,80 cm²	41,8
16	2,9 cm	7,0 cm	162,40 cm²	46,4
32	1,5 cm	7,2 cm	172,8 cm²	48,0

Figura 4.9: Tabela 2 preenchida.

Número de lados (n)	Lado (l_n)	Altura (h_n)	Área (A_n)	Perímetro (P_n)
4	10	5,3	106	40
8	5,5	6,9	149,4	44
16	3	6,8	163,2	48
32	1,5	6,9	165,6	48

Figura 4.10: Tabela 2 preenchida.

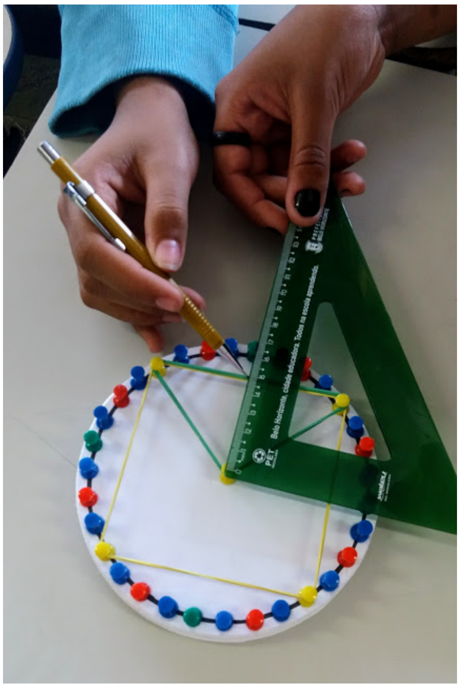


Figura 4.11: Alunos colhendo medidas do quadrado inscrito na circunferência.

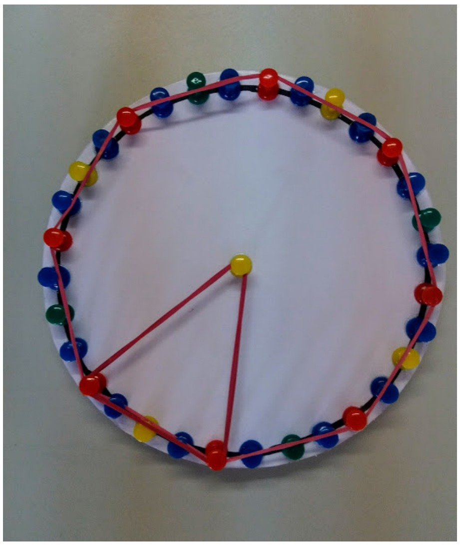


Figura 4.12: Octógono e triângulo construídos com o material concreto .

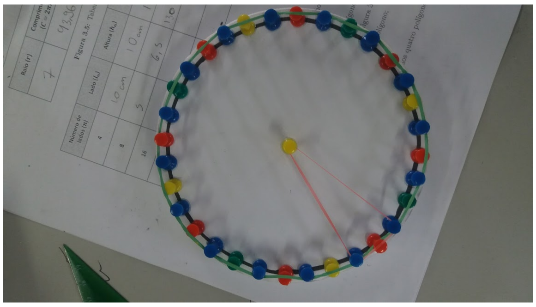


Figura 4.13: Hexadecágono e triângulo construídos com o material concreto .

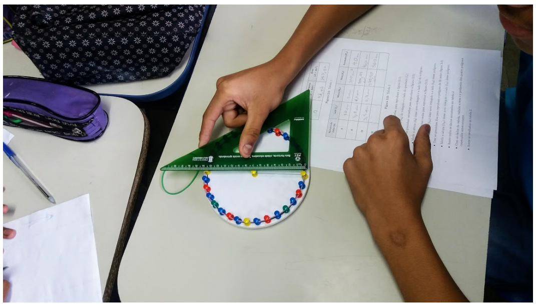


Figura 4.14: Alunos colhendo medidas do dotriacontágono inscrito na circunferência.

A partir da análise das tabelas preenchidas, bem como do material concreto, ambos entregues aos alunos, nota-se que eles responderam de modo muito satisfatório o questionário presente no material observado, o qual se encontra em anexo, nesta dissertação. É importante salientar que, mesmo usando matérias manuais, para as medições e coleta dos dados, a maioria dos alunos obteve boas aproximações no preenchimento das tabelas, segue em anexo uma tabela preenchida usando um recurso computacional, o Geogebra, a título de comparação.

A maioria dos alunos conseguiu concluir que à medida que aumentávamos o número de lados do polígono, fazendo esse número de lados tender ao infinito, as alturas dos triângulos, formados pela decomposição dos polígonos, tendiam ao raio da circunferência, o lado dos polígonos tendia a zero, o perímetro do polígono de n lados tende ao comprimento da circunferência e a soma das áreas dos infinitos triângulos, que formam o polígono de n lados, ou seja, a área do polígono tende a área do círculo. Com essas discussões e observações foi possível trabalhar de forma intuitiva o conceito de limite.

Ressalta-se que alguns alunos tiveram dificuldades em entender que lado iria tender a zero, pois diziam que "o lado iria medir 0,1"; outros disseram que o perímetro e a área dos polígonos iriam "crescer, crescer, crescer, sem parar". A vantagem de aplicar a atividade em uma turma que já leciono foi a de que, por eu já conhecer os alunos, pude formar os grupos de modo a colocar alunos com dificuldades, juntamente, com os que não apresentam tanta dificuldade. Também foi possível percorrer os grupos de forma tranquila e sanar todas as dúvidas, fazendo em cada visita aos grupos, uma pequena discussão com os membros daquele grupo em separado, além disso, usamos o material concreto para visualizar que a altura máxima que o triângulo poderia ter era o tamanho do raio, que não teria como o perímetro ser infinito uma vez que o polígono estava limitado pela circunferência e que o mesmo ocorria com a área dos polígonos, logo essas áreas não poderiam ser infinitas. Sendo assim, todos tiveram a oportunidade de escrever com suas próprias palavras suas conclusões de forma correta.

Por apresentarem dificuldades em escrever o que pensam e de expor na forma escrita suas conclusões, percebi, ao ler as respostas de alguns alunos, que as explicações e conclusões que eles me apresentaram verbalmente, durante a atividade foram mais satisfatórias e melhor explicitadas do que na forma escrita. Os alunos ficaram entusiasmados em entender como se deu a fórmula da área do círculo e com as aulas "diferentes" que tivemos.

Por último, destaca-se a minha satisfação com o resultado dessa atividade, pois além de introduzir, de maneira lúdica e intuitiva, o conceito de limites, tive a oportunidade de fixar conteúdos que já havia trabalhado com essas turmas, tais como: números irracionais, operações com números reais, cálculo da área de triângulo, área e perímetro de polígonos, comprimento da circunferência e área do círculo. Percebi que essas aulas exploratórias foram muito produtivas. Constatei que o conteúdo limite mesmo sendo, tradicionalmente, introduzido no ensino superior, pode sim, de maneira intuitiva ser trabalhado no Ensino Básico e que, se assim fosse, provavelmente, os alunos chegariam para cursar as disciplinas do ensino superior com menos dificuldades.

5

Conclusões

Concluímos como muito satisfatórios os resultados obtidos neste trabalho, pois alcançamos os objetivos propostos. Houve uma grande interação entre os membros dos grupos formados, para a execução da atividade proposta e os alunos se sentiram desafiados a fazer os cálculos sem o uso da calculadora, mesmo o uso dessa sendo permitido. Foi possível a realização de pequenos debates em cada grupo, afim de que os alunos compreendessem os resultados e o material concreto foi um grande facilitador, pois com ele, os alunos conseguiram visualizar perfeitamente o resultado de cada um dos limites propostos. Mesmo sem utilizarmos a teoria de limites, foi possível compreender a ideia intuitiva de limites.

A utilização da História da Matemática como metodologia de ensino possibilitou debates sobre os números irracionais, conteúdo já trabalhado com os alunos anteriormente, mas que sempre gera muitas dúvidas. Os alunos gostaram muito de entender como surgiu a fórmula para o cálculo da área do círculo, e ficaram muito intrigados com a possibilidade de somarmos infinitas parcelas e o resultado não ser infinito.

Observamos, ainda, que os alunos mesmo utilizando medições com régua e fazendo aproximações com apenas uma casa decimal, conseguiram bons resultados para o preenchimento das tabelas e cálculos dos lados, apótemas áreas e perímetros dos polígonos propostos, o que pode ser comparado com os resultados obtidos por meios computacionais, ambos demonstrados nos anexos.

Diante do exposto, espera-se que este trabalho seja um instrumento facilitador e encorajador para professores do ensino básico, possibilitando que não só as ideias intuitivas do limite, mas também, a demonstração da fórmula da área do círculo possam ser trabalhadas com os alunos de maneira interativa e lúdica. Espera-se também provocar reflexões sobre a importância do uso da História da Matemática como metodologia de ensino, principalmente, em temas complexos para entendimento dos alunos do Ensino Básico como é o caso dos números irracionais. Uma sugestão é que os números irracionais possam ser introduzidos sob uma perspectiva histórica, assim, os alunos poderão perceber que tal assunto que os perturbam e é de difícil entendimento para eles, também perturbaram grandes homens da matemática por vários tempos.

Com relação aos alunos, esperamos que este trabalho possa colaborar e despertar a curiosidade dos mesmos para a ideia intuitiva de limite, para o infinitamente pequeno, para o infinitamente grande e para as somas infinitas, objetivando que desde as series inicias, eles façam reflexões sobre esses temas e, assim sendo, acreditamos que não apresentarão tantas dificuldades quando forem estudar tais assuntos, seja no Ensino Médio com as progressões, ou no Ensino Superior com os cálculos, por exemplo.

A

Apêndice da aula exploratória

1

Atividade

1.1 Explorando a atividade

A área de um círculo é dada pela fórmula $A_c = \pi r^2$ onde r é o raio do círculo e π é uma constante, que usualmente é dada por $\pi \simeq 3{,}14$. Já o comprimento da circunferência é dado por $C = 2\pi r$.

Vamos entender como podemos obter a fórmula da área do círculo fazendo aproximações por polígonos inscritos em uma circunferência.

É interessante saber que essa fórmula e essa maneira de pensar foram desenvolvidas há muitos anos, lá por volta do século V a.C, por Antifonte, Eudoxo e outros matemáticos.

Antifonte, que nasceu por volta de 460 a.C., era geômetra e operava com construções com régua e compasso. Um dos problemas tratados naquela época era denominado como a quadratura do círculo, isto é, determinar o lado do quadrado cuja área fosse equivalente a área de um círculo dado, que era uma maneira grega de dizer que queremos calcular a área do círculo.

Antigamente, na Matemática grega, não se media áreas de regiões poligonais da maneira como fazemos hoje. Não havia, por exemplo, a fórmula que conhecemos para o cálculo da área do triângulo de base b e altura h que é dada por $A_{\triangle} = \frac{1}{2}\, b\, h$.

Naquela época calculava-se a área de regiões poligonais na prática. Para o cálculo dessas áreas usava-se a comparação.

Por exemplo, imagine que fosse necessário dividir um terreno plano poligonal em dois terrenos, para distribuí-los a dois herdeiros. Por se tratar de dois terrenos planos poligonais com formatos diferentes, mas com mesma área o caminho seria transformá-los em quadrados equivalentes, podendo assim comparar se os dois tinham mesmo tamanho, tamanhos diferentes ou até mesmo se havia uma proporção entre eles. Esse processo de transformar uma região poligonal em um quadrado equivalente é conhecido como "quadratura de uma região poligonal". Foi daí que surgiu a expressão "fazer a quadratura do círculo", um dos três problemas clássicos dos gregos, cuja solução é impossível com régua e compasso.

Antifonte que sabia calcular a área de triângulos e a área polígonos regulares, pois podia decompor qualquer polígono em triângulos, criou o seguinte método para

1

Figura A.1: Material entregue aos alunos. Página 1.

quadrar o círculo: tome um círculo e inscreva nele um quadrado. Sobre cada lado do quadrado, coloque um triângulo isósceles cujos vértices estão sobre o círculo, obtendo um octógono. Continue o processo sobre os lados do octógono, obtendo um polígono de 16 lados e assim por diante.

Para Antifonte um círculo é um polígono regular com um número (grande) de lados, pois para ele um segmento de reta tem um número finito de pontos, então um círculo também terá um número finito de pontos. Este número de pontos será então o maior número de lados que posso ter num polígono inscrito num círculo. Sendo assim, como ele sabia quadrar qualquer polígono ele também poderia quadrar um círculo.

Esta solução apresentada por Antifonte causou muita polêmica, pois se ela é verdadeira, teríamos um arco de círculo coincidindo com um segmento de reta. Mas se ela fosse falsa significaria assumir a infinita divisibilidade de uma linha, pois poderemos sempre tomar o ponto médio do arco de círculo e traçar um polígono com um número maior de lados. No entanto, naquela época não se admitia essa divisibilidade infinita.

Zenão de Eléia ($\sim 450 a.C.$), afirmava que admitindo a infinita divisibilidade da reta, para irmos de um ponto a outro teríamos que passar pelo ponto médio. Se existem infinitos pontos médios, nunca chegaremos ao fim do segmento (este paradoxo é enunciado por Zenão como a história de Aquiles e o estádio). Logo uma reta não pode ser dividida infinitamente, se acreditamos na realidade do movimento.

Zenão e os matemáticos daquela época se depararam com um grande problema, que só foi resolvido recentemente, no século XIX: a questão da continuidade, ligada à questão do cálculo infinitesimal e do limite.

Eudoxo ($\sim 408\, a.C. - \sim 355\, a.C.$), que adimitia a infinita divisibilidade da reta criou o *Método de Exaustão* para calcular a área do círculo. Eudoxo utilizou a mesma ideia de Antifonte, porém ao supor que o segmento de reta pudesse ser dividido infinitamente, afirmou que os polígonos se aproximavam do círculo mas nunca coincidiam com ele. Isto implica que não se pode calcular a área do círculo com um número finito de cálculos.

Observe a figura abaixo, é uma circunferência de raio r e centro o e nela está inscrito um quadrado de lado l, que foi dividido em 4 triângulos isósceles congruentes.

Observe que a área do quadrado (A_4) pode ser obtida como: $A_4 = 4\, A_\triangle$, onde $A_\triangle = \frac{1}{2}\, l_4 h_4$, onde h_4 é a altura do triângulo. Logo

$$A_4 = 4\,\frac{1}{2}\, l_4\, h_4. \tag{1.1}$$

E o perímetro do quadrado será $P_4 = 4\, l_4$.

Figura A.2: Material entregue aos alunos. Página 2.

Atividade **3**

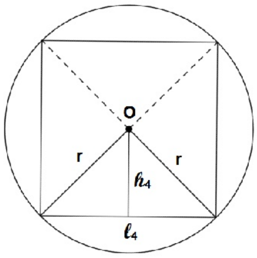


Figura 1.1: Quadrado inscrito na circunferência.

Agora vamos pegar *os pontos médios* dos arcos e fazer um octógono (polígono de 8 lados).

Novamente podemos dividir o octógono em 8 triângulos isósceles congruentes.

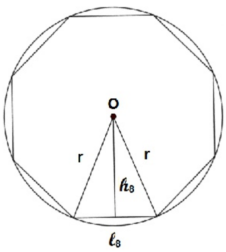


Figura 1.2: Octógono inscrito na circunferência.

Logo a área do octógono (A_8) será:

$$\begin{aligned} A_8 &= 8\,A_\triangle \\ A_8 &= 8\,\frac{1}{2}\,l_8\,h_8. \end{aligned} \tag{1.2}$$

e o perímetro $P_8 = 8\,l_8$.

Usando o mesmo processo para um hexadecágono (polígono de 16 lados).

Teremos sua área A_{16}:

$$\begin{aligned} A_{16} &= 16\,A_\triangle \\ A_{16} &= 16\,\frac{1}{2}\,l_{16}\,h_{16}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

e o perímetro $P_{16} = 16\,l_{16}$.

Figura A.3: Material entregue aos alunos. Página 3.

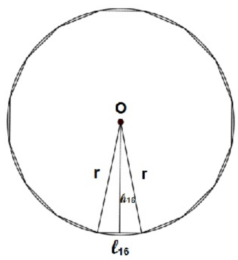


Figura 1.3: Hexadecágono inscrito na circunferência.

Procedendo do mesmo modo para um dotriacontágono (polígono de 32 lados), teremos:

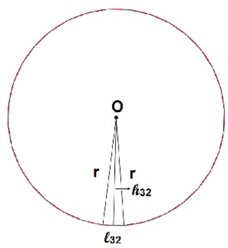


Figura 1.4: Dotriacontágono inscrito na circunferência.

Teremos sua área A_{32}:

$$\begin{aligned} A_{32} &= 32\,A_{\triangle} \\ A_{32} &= 32\,\frac{1}{2}\,l_{32}\,h_{32}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

e o perímetro $P_{32} = 32\,l_{32}$.

Generalizando para um polígono de n lados obtemos sua área A_n:

$$\begin{aligned} A_n &= n\,A_{\triangle} \\ A_n &= n\,\frac{1}{2}\,l_n\,h_n. \end{aligned} \tag{1.5}$$

e o perímetro $P_n = n\,l_n$.

Figura A.4: Material entregue aos alunos. Página 4.

Imagine, agora, que a quantidade n de lados seja tão grande que mal podemos visualizá-los. O que você imagina que irá acontecer?

Para melhor entendimento da situação e responder a pergunta anterior teremos o auxílio do material concreto: circunferência de isopor com 32 alfinetes igualmente distribuídos, gominhas coloridas, régua e calculadora.

As tabelas serão preenchidas conforme as devidas orientações:

Raio (r)	Comprimento ($C = 2\pi r$)	Área ($A = \pi r^2$)

Figura 1.5: Tabela 1

- Medir o raio da circunferência utilizando a régua;
- Utilizar o valor aproximado para $\pi \simeq 3{,}14$ e calcular o comprimento e a área da circunferência dada;
- Anotar esses resultados na tabela 1.

Número de lados (n)	Lado (l_n)	Altura (h_n)	Área (A_n)	Perímetro (P_n)
4				
8				
16				
32				

Figura 1.6: Tabela 2

- Usar gominhas amarelas, para reproduzir a figura (3.1);
- Medir a altura (h_4) do triângulo e o lado do quadrado (l_4);
- Usar as gominhas vermelhas para reproduzir a figura (3.2);
- Medir a altura (h_8) desse novo triângulo e a lado (l_8) do octógono.

Figura A.5: Material entregue aos alunos. Página 5.

Atividade 6

- Usar as gominhas verdes para reproduzir a figura (3.3);
- Medir a altura (h_{16}) desse novo triângulo e a lado (l_{16}) desse polígono;
- Usar as gominhas lilas para reproduzir o polígono de 32 lados (figura 3.4);
- Medir a altura (h_{32}) desse novo triângulo e a lado (l_{32}) desse polígono;
- Anote todos os dados encontrados na tabela 2.
- Com os dados da tabela, calcular a área e o perímetro dos quatro polígonos construídos anteriormente;
- Anote os resultados na tabela 2.

Figura A.6: Material entregue aos alunos. Página 6.

Atividade 7

Observando as construções poligonais feitas e os dados da tabela responda:

1. O que está acontecendo com os valores das alturas dos triângulos, que formam os polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

2. O que você imagina que irá acontecer com esses valores das alturas se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

3. O que está acontecendo com os valores dos lados dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

4. O que você imagina que irá acontecer com esses valores das alturas se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

5. O que está acontecendo com os valores dos perímetros dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

6. O que você imagina que irá acontecer com os valores dos perímetros se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

7. O que está acontecendo com os valores das áreas dos dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

8. O que você imagina que irá acontecer com os valores das áreas se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

Figura A.7: Material entregue aos alunos. Página 7.

Atividade **8**

Observe que:

- Todos os polígonos P_n estão inscritos na circunferência, isto é, todos os seus vértices estão no círculo.
- O número de lados (ou de vértices) cresce indefinidamente com n.
- O comprimento dos lados dos polígonos tendem a zero à medida que n tende ao ∞

Logo podemos concluir que em relação ao polígono P_n, o lado l_n tende a zero, a altura h_n dos triângulos isósceles, que formam o polígono, tende ao raio r da circunferência, o perímetro P_n tende ao comprimento da circunferência e a área A_n, do polígono de n lados, tende a área da circunferência A_c à medida que n tende ao ∞.

Ou seja,

$$l_n \to o, \quad h_n \to r, \quad P_n \to 2\,\pi\, r \quad \text{e} \quad A_n \to A_c = \pi r^2. \tag{1.6}$$

mas

$$A_n = n\,\frac{1}{2}\,l_n\,h_n \quad \text{e} \quad P_n = n\,l_n \tag{1.7}$$

Logo

$$\begin{aligned} A_c &= A_n \\ A_c &= n\,\frac{1}{2}\,l_n\,h_n \\ A_c &= \frac{1}{2}\,2\,\pi\,r\,r \\ A_c &= \pi\,r^2 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Figura A.8: Material entregue aos alunos. Página 8.

B

Apêndice dos Resultados

B.1 Algumas tabelas preenchidas pelos alunos

Raio (r)	Comprimento ($C = 2\pi r$)	Área ($A = \pi r^2$)
7	43,96	153,86

Figura 3.5: Tabela 1

Número de lados (n)	Lado (l_n)	Altura (h_n)	Área (A_n)	Perímetro (P_n)
4	9,5	5	95	38
8	5,5	6,5	153,86	44
16	3	7	168	48
32	1,7	7	153,86	54.4

Figura B.1: Tabelas preenchidas pelos alunos.

Raio (r)	Comprimento ($C = 2\pi r$)	Área ($A = \pi r^2$)
7	43,96	153,82

Figura 3.5: Tabela 1

Número de lados (n)	Lado (l_n)	Altura (h_n)	Área (A_n)	Perímetro (P_n)
4	10cm	5cm	100cm²	40 cm
8	5,8 cm	6,6 cm	153,12 cm	46,4 cm
16	3,2 cm	6,7 cm	181,52 cm	51,2 cm
32	1,6 cm	7,0 cm	179,2 cm	51, 2 cm

Figura B.2: Tabelas preenchidas pelos alunos.

Raio (r)	Comprimento ($C = 2\pi r$)	Área ($A = \pi r^2$)
7,0	19,60	153,86

Figura 3.5: Tabela 1

Número de lados (n)	Lado (l_n)	Altura (h_n)	Área (A_n)	Perímetro (P_n)
4	10	5	40	400
8	5,5	6.6	145,2	44
16	3,1	6.9	171,12	49,6
32	1, 6	7	179, 2	51,2

Figura B.3: Tabelas preenchidas pelos alunos.

B.2 Resultados do Geogebra

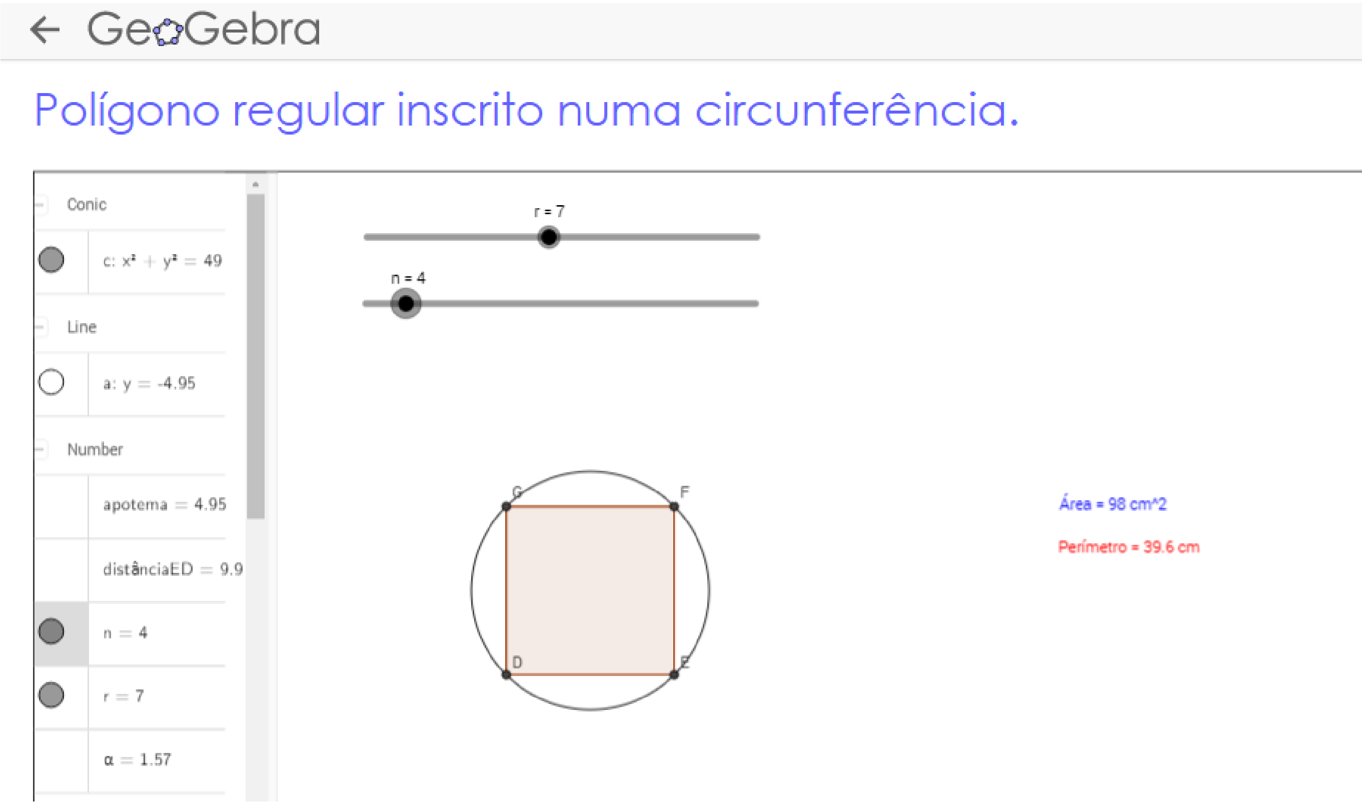


Figura B.4: Resultados para: lado, apótema, área e perímetro do quadrado inscrito numa circunferência de raio 7cm, obtidos pelo Geogebra

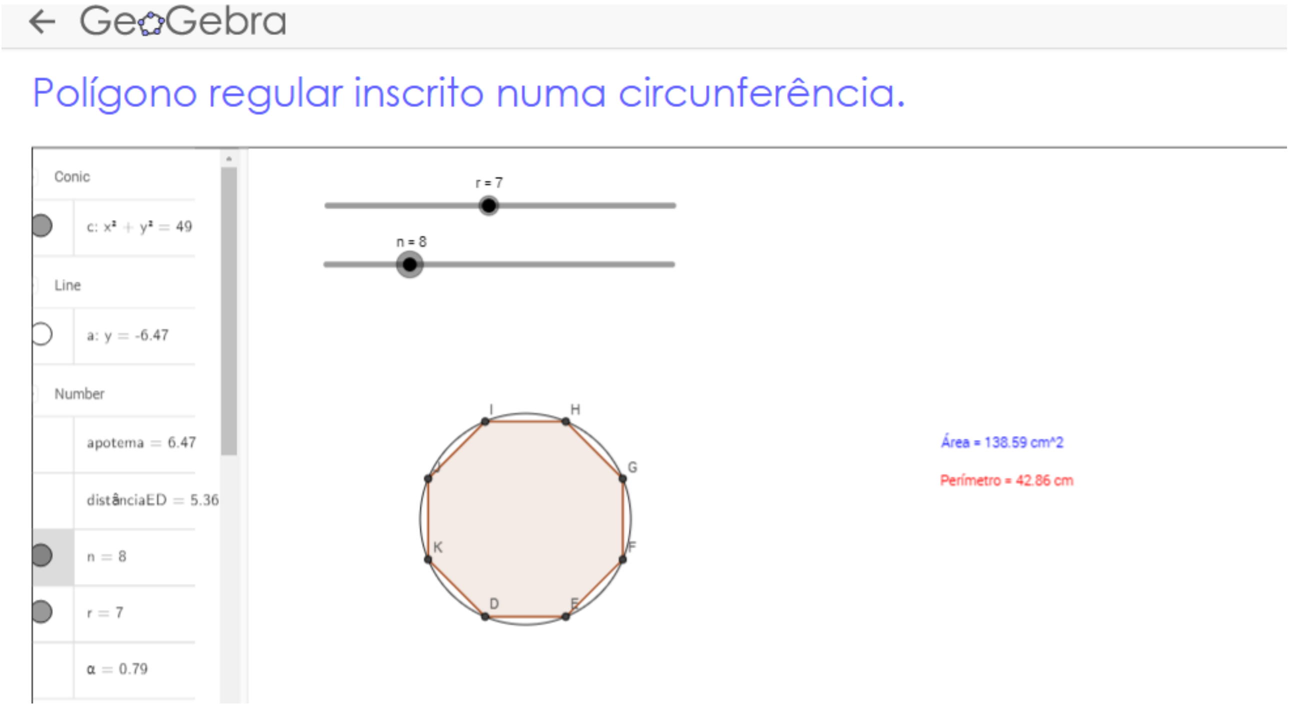


Figura B.5: Resultados para: lado, apótema, área e perímetro do octógono inscrito numa circunferência de raio 7cm, obtidos pelo Geogebra.

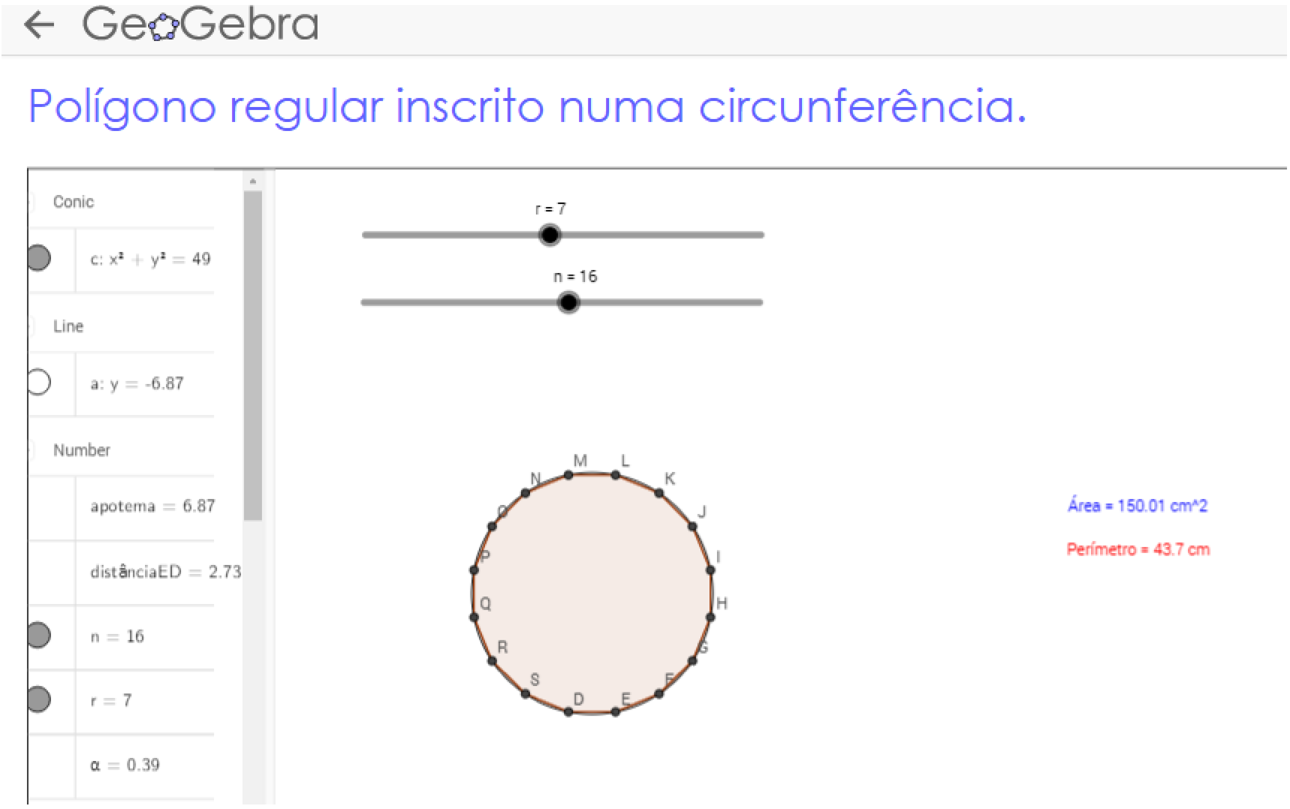


Figura B.6: Resultados para: lado, apótema, área e perímetro do hexadecágono inscrito numa circunferência de raio 7cm, obtidos pelo Geogebra.

B.3 Alguns dos questionários preenchidos pelos alunos

Observando as construções poligonais feitas e os dados da tabela responda:

1. O que está acontecendo com os valores das alturas dos triângulos, que formam os polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta? de acordo com o aumento dos lados, eles vão aumentando o valor da altura

2. O que você imagina que irá acontecer com esses valores das alturas se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

   Só irá aumentar a probabilidade de se formar um raio

3. O que está acontecendo com os valores dos lados dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

   Ele está diminuindo.

4. O que você imagina que irá acontecer com esses valores ~~das alturas~~ dos lados. se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

   Diminuiria até o zero, ou até virar um pontinho só

5. O que está acontecendo com os valores dos perímetros dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

   Está aumentando

6. O que você imagina que irá acontecer com os valores dos perímetros se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

   Vai aumentar até ficar parecendo um circulo

7. O que está acontecendo com os valores das áreas dos dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

   Esta aumentando

8. O que você imagina que irá acontecer com os valores das áreas se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

   virará a área do circulo

Figura B.7: Questionário preenchido pelos alunos.

Observando as construções poligonais feitas e os dados da tabela responda:

1. O que está acontecendo com os valores das alturas dos triângulos, que formam os polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

Com a quantidade de lados que existem no poligno acaba aumentando a altura do triangulo

2. O que você imagina que irá acontecer com esses valores das alturas se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

A altura aumentara até chegar no fim do raio

3. O que está acontecendo com os valores dos lados dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

Sendo menor a quantidade de lados os valores almentam, e se for maior os valores diminuem.

4. O que você imagina que irá acontecer com esses valores ~~das alturas~~ dos lados se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

Irá diminuir cada vez mais. ate chegar no zero

5. O que está acontecendo com os valores dos perímetros dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

Ele vai se submeter a quantidade de lados e aumentara parecendo um circulo

6. O que você imagina que irá acontecer com os valores dos perímetros se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

Ele vai parecer cada vez mais um circulo e aumenta o valor.

7. O que está acontecendo com os valores das áreas dos dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

A area vai aumentando o numero de lados e parecendo um circulo formando a circunferencia

8. O que você imagina que irá acontecer com os valores das áreas se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

Vai aumentar até ficar parecido a area do circulo.

Figura B.8: Questionário preenchido pelos alunos.

Observando as construções poligonais feitas e os dados da tabela responda:

1. O que está acontecendo com os valores das alturas dos triângulos, que formam os polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

   A altura muda, aumentando

2. O que você imagina que irá acontecer com esses valores das alturas se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

   Ficará cada vez mais perto do Raio.

3. O que está acontecendo com os valores dos lados dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

   O lado vai se diminuindo

4. O que você imagina que irá acontecer com esses valores dos lados se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

   Ele irá diminuir até ficar 0, ou seja, sumir.

5. O que está acontecendo com os valores dos perímetros dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

   Vão se aumentando.

6. O que você imagina que irá acontecer com os valores dos perímetros se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

   Eles vão ficando maiores, ficando na circunferência de raio = 7

7. O que está acontecendo com os valores das áreas dos dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?

   Vão se aumentar.

8. O que você imagina que irá acontecer com os valores das áreas se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?

   Vão ficar parecido com áreas do círculo.

Figura B.9: Questionário preenchido pelos alunos.

Observando as construções poligonais feitas e os dados da tabela responda:

1. O que está acontecendo com os valores das alturas dos triângulos, que formam os polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta? Quanto maior o lado maior a altura.

2. O que você imagina que irá acontecer com esses valores das alturas se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?
   Quanto mais a altura aumenta, vai chegando perto do raio 1.

3. O que está acontecendo com os valores dos lados dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?
   O valor dos lados está diminuindo de acordo que a medida

4. O que você imagina que irá acontecer com esses valores das alturas se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?
   Vai diminuindo até chegar no 0.

5. O que está acontecendo com os valores dos perímetros dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?
   O perímetro aumenta com o número de lados aumenta

6. O que você imagina que irá acontecer com os valores dos perímetros se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?
   O valor vai aumentando e forma uma circunferência.

7. O que está acontecendo com os valores das áreas dos dos polígonos inscritos na circunferência, à medida que o número de lados aumenta?
   A área vai aumentando e forma circunferência.

8. O que você imagina que irá acontecer com os valores das áreas se o número de lados for muito grande, ou seja, se n tender ao infinito(∞)?
   A área do polígono vai ficar o mesmo valor da circunferência

Figura B.10: Questionário preenchido pelos alunos.

B.4 Alguns dos rascunhos utilizados para os cálculos

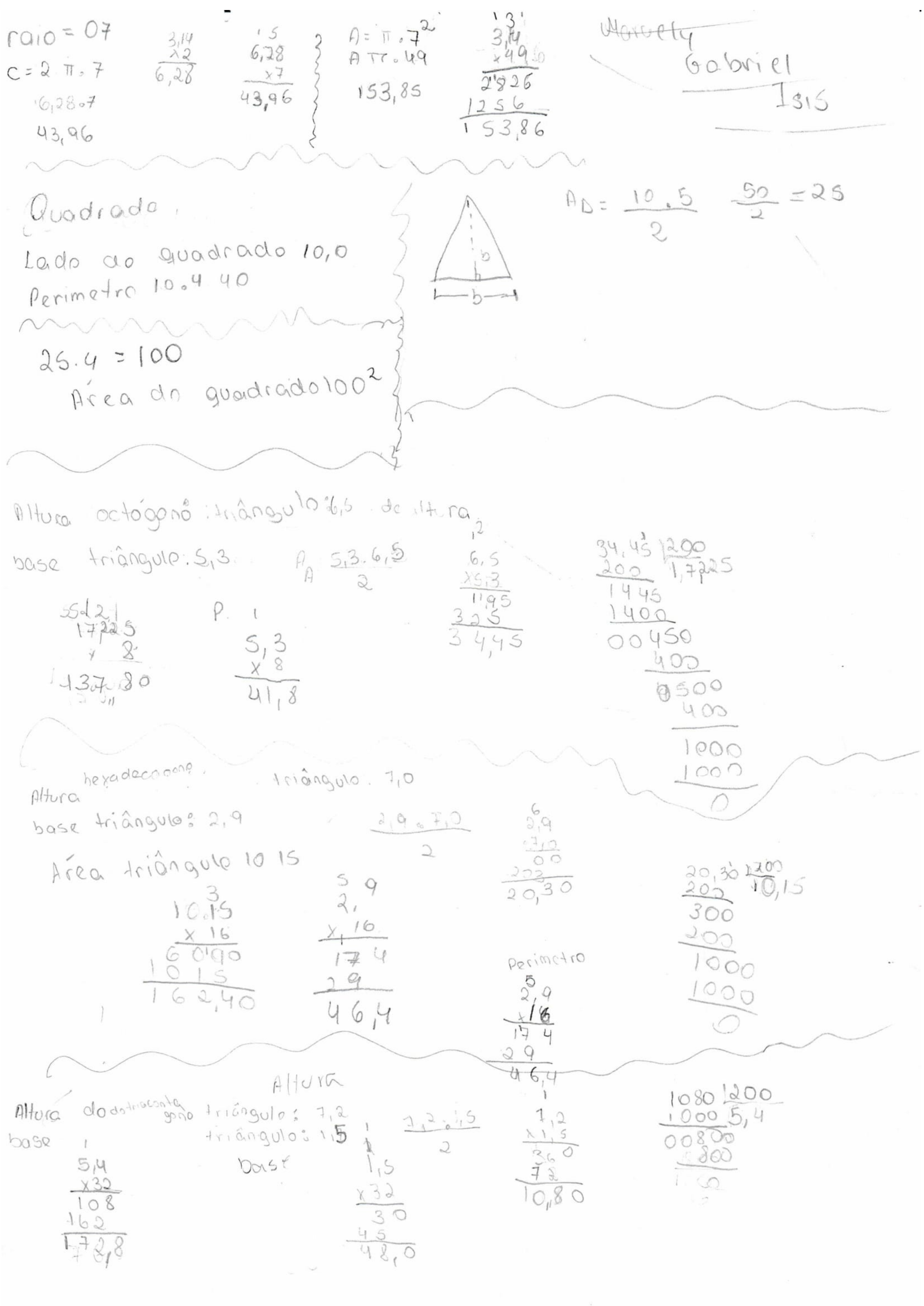


Figura B.11: Rascunho utilizado para os cálculos.

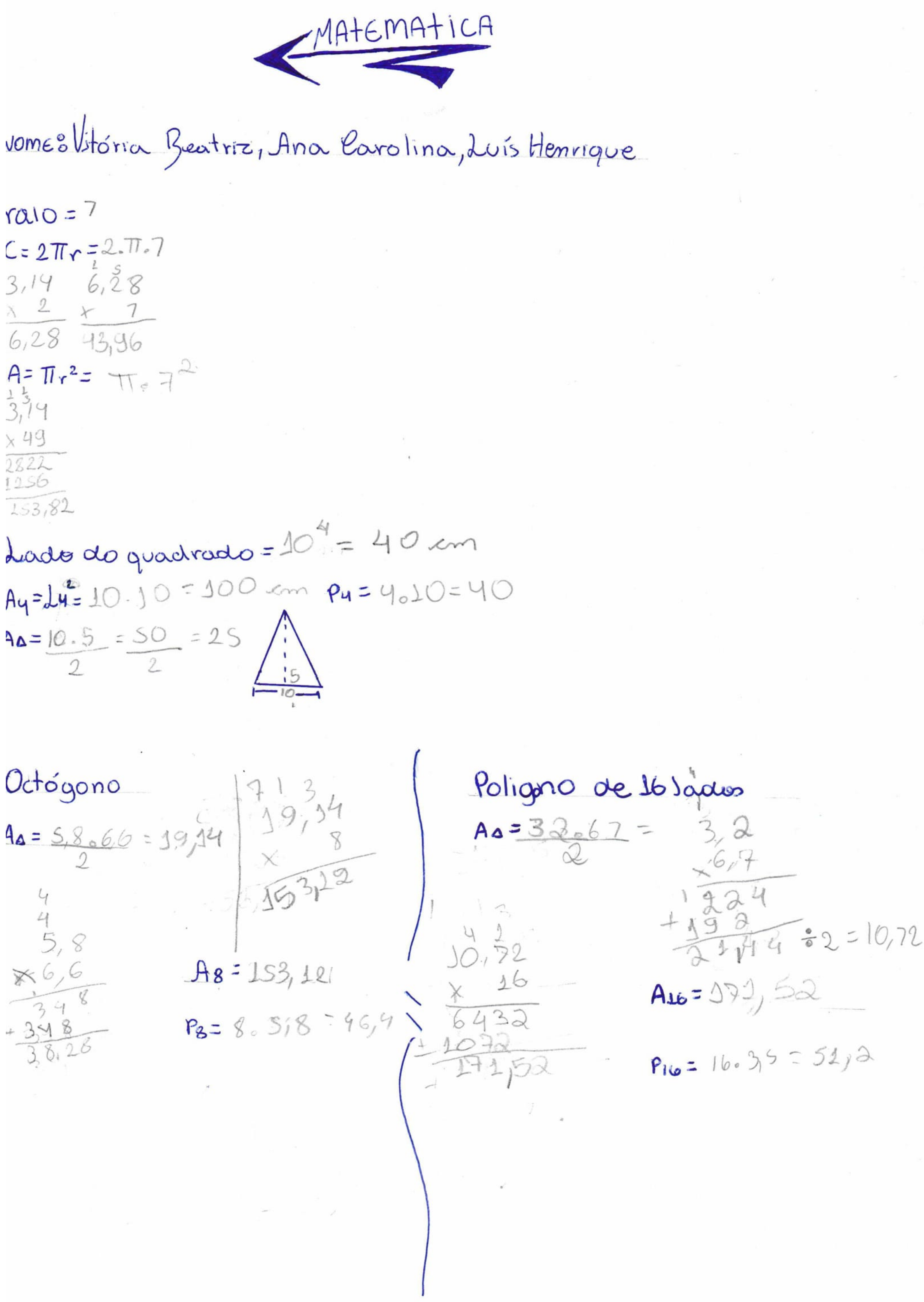
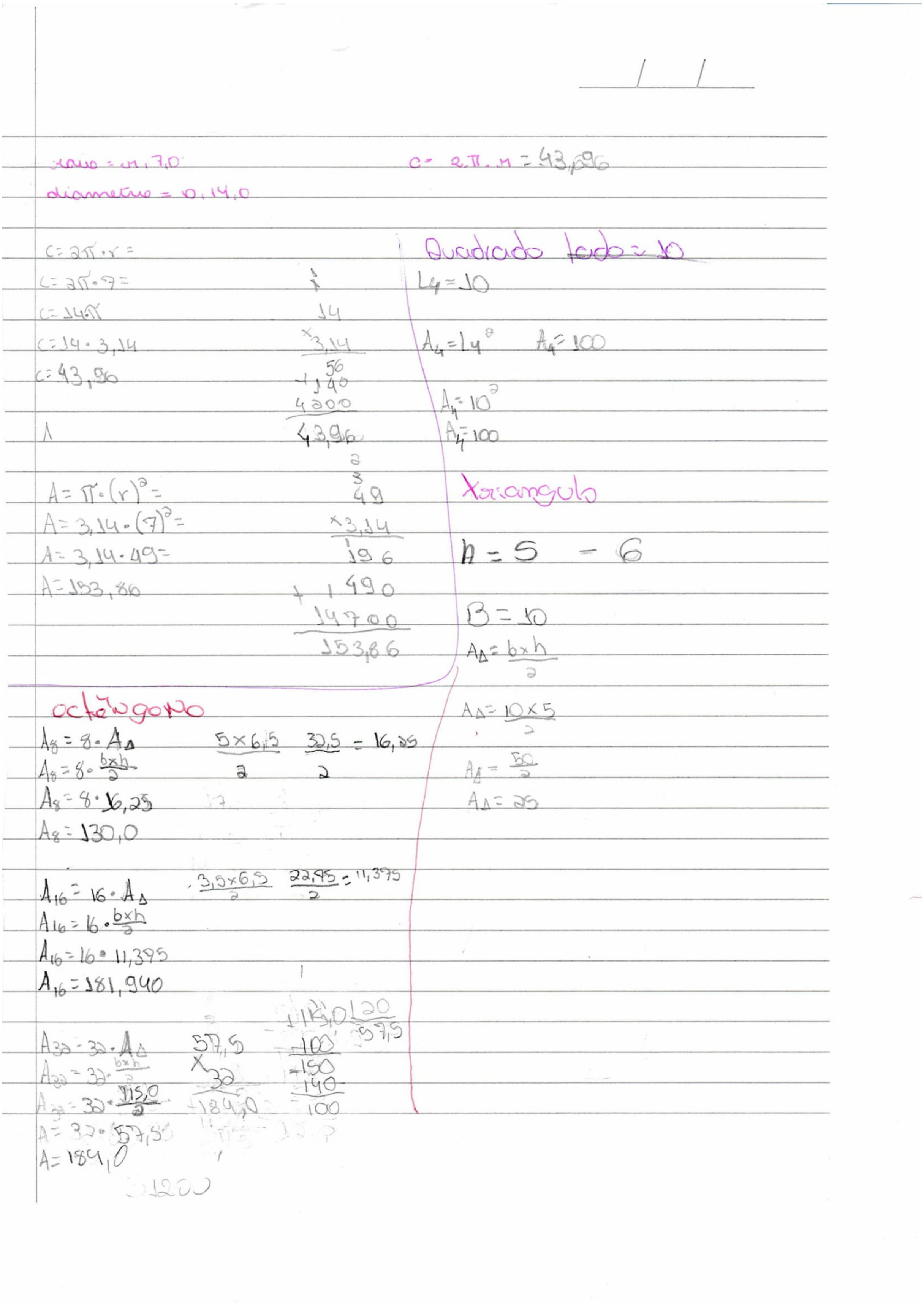


Figura B.12: Rascunho utilizado para os cálculos.



raio = r. 7,0
diametro = D. 14,0
c = 2.π.r = 43,96

$c = 2\pi \cdot r =$
$c = 2\pi \cdot 7 =$
$c = 14\pi$
$c = 14 \cdot 3{,}14$
$c = 43{,}96$

$A = \pi \cdot (r)^2 =$
$A = 3{,}14 \cdot (7)^2 =$
$A = 3{,}14 \cdot 49 =$
$A = 153{,}86$

Quadrado lado = 10
$L_4 = 10$
$A_4 = L_4^2$ $A_4 = 100$
$A_4 = 10^2$
$A_4 = 100$

Triangulo
$h = 5 - 6$
$B = 10$
$A_\Delta = \frac{b \times h}{2}$
$A_\Delta = \frac{10 \times 5}{2}$
$A_\Delta = \frac{50}{2}$
$A_\Delta = 25$

octógono
$A_8 = 8 \cdot A_\Delta$
$A_8 = 8 \cdot \frac{b \times h}{2}$
$A_8 = 8 \cdot 16{,}25$
$A_8 = 130{,}0$
$\frac{5 \times 6{,}5}{2}$ $\frac{32{,}5}{2} = 16{,}25$

$A_{16} = 16 \cdot A_\Delta$
$A_{16} = 16 \cdot \frac{b \times h}{2}$
$A_{16} = 16 \cdot 11{,}375$
$A_{16} = 181{,}940$
$\frac{3{,}5 \times 6{,}5}{2}$ $\frac{22{,}75}{2} = 11{,}375$

$A_{32} = 32 \cdot A_\Delta$
$A_{32} = 32 \cdot \frac{b \times h}{2}$
$A_{32} = 32 \cdot \frac{115{,}0}{2}$
$A = 32 \cdot 57{,}5$
$A = 184{,}0$

Figura B.13: Rascunho utilizado para os cálculos.

Bibliografia

[1] Amadei, F.L.: *O Infinito: um Obstáculo no Estudo da Matemática.* Tese de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica - SP, 2005.

[2] Amorim, L.I.F.: *A (Re) Construção do Conceito de Limite do Cálculo para a Análise: um Estudo com Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática.* Tese de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, 2011.

[3] Baron, M.E.: *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Fundamentos. Trad. de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Unidade 4.* Universidade de Brasília, 1985d.

[4] Boyer, C.B.: *História da Matemática.* Blucher, 2ª ed. edição, 1996.

[5] Caraça, B.J.: *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Gradiva, 1951.

[6] Carvalho, T. F.; D'Ottaviano, I. M. L.: *Sobre Leibniz, Newton e Infinitésimos, das Origens do Cálculo Infinitesimal aos Fundamentos do Cálculo Diferencial Paraconsistente.* Educação Matemática Pesquisa, 8(1):13–43, 2006.

[7] Carvalho, S.P.: *A área e o perímetro de um círculo*, 2011. 1º Colóquio da Região Sudeste.

[8] D'Ambrosio, U.: *A História da Matemática: Questões Historiográficas e Políticas e Reflexos na Educação Matemática.* Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas, org. Maria Aparecida Viggiani Bicudo, páginas 97–115, 1999.

[9] Freire, P.: *Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa.* Paz e Terra, 1996.

[10] Heath, T. L.: *The Thirteen Books of the Elements.* Dover, 1956.

[11] Morris, R.: *Uma Breve História do Infinito: dos Paradoxos de Zenão ao Universo Quântico.* Zahar, 1998.

[12] Pétin, P.: *Tópicos de História da Matemática através de Problemas.* Notas de aula.

[13] Rezende, W.M.: *Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite.* Tese de Mestrado, Universidade Santa Úrsula, 1994.

[14] Rezende, W.M.: *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.* Tese de Doutoramento, Universidade de São Paulo, 2003.

[15] Roque, T.M.; Carvalho, J. B. P.: *Tópicos de História da Matemática.* Coleção PROFMAT. SBM, 2012.

[16] Roque, T.M.: *História da matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Zahar, 2012.

[17] Sá, I. P.: *Arquimedes de Siracusa e o seu Método da Exaustão: uma Atividade Didática para o Cálculo de π.* Revista Eletrônica TECCEN, 4(3):15–24, 2011.

[18] Santos, A. O.; Oliveira, C. R.; Oliveira G. S.: *Material Concreto: uma Estratégia Pedagógica para Trabalhar Conceitos Matemáticos nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental.* Itinerarius Reflectionis, 9(1), 2013.

[19] Zuchi, I.: *A Abordagem do Conceito de Limite via Sequência Didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional.* Tese de Doutoramento, Universidade Federal de Santa Catarina, 2005.

[20] Zumpano, A.: *Os Limites da Matemática Clássica.* Ciência Hoje, páginas 77–79, 2001.