Universidade Federal de Juiz de Fora
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Henrique Aparecido Maurício

Da equação do 2º grau aos métodos numéricos para resolução de equações

Juiz de Fora

2013

Henrique Aparecido Maurício

Da equação do 2º grau aos métodos numéricos para resolução de equações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, na Área de Matemática.

Orientador: Sandro Rodrigues Mazorche

Juiz de Fora

2013

Maurício, Henrique Aparecido.

Da equação do 2º grau aos métodos numéricos para resolução de equações / Henrique Aparecido Maurício. - 2013.
64f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Matemática. 2. Equações. 3. Raízes de equações. 4. Métodos numéricos. I. Título.

Henrique Aparecido Maurício

Da equação do 2º grau aos métodos numéricos para resolução de equações

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche
(Orientador)
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Rogério Casagrande
PROFMAT
UFJF

Prof. Dr. Marcelo Oliveira Veloso
UFSJ - Campus Paraopeba

Juiz de Fora, 16 de março de 2013.

Ao Senhor Jesus Cristo

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por esta conquista. Por ter me proporcionado a oportunidade, a capacitação e todas as outras condições para cursar este mestrado.

À minha amada esposa Rafaela, pelo amor e apoio incondicionais. Por muitas vezes ajudar-me com orações, incentivos, companheirismo, compreensão.

À minha família, pela constante confiança depositada em mim em todos os momentos. Em particular meus pais pelo esforço que tiveram para que eu alcançasse meus objetivos.

Ao meu orientador, Professor Sandro Rodrigues Mazorche, pelas orientações na produção deste trabalho.

A todos os professores do Profmat da UFJF, pelo ensino e empenho.

Aos professores Marcelo Oliveira Veloso e Rogério Casagrande, por aceitarem avaliar minha dissertação. Pelas contribuições para enriquecimento do trabalho.

Aos meus colegas do mestrado, pelo companheirismo nestes dois anos de muito estudo e esforço.

Aos colegas do Núcleo de Matemática do IFET câmpus Juiz de Fora, pelo apoio e importantes contribuições.

À Capes, por me conceder a bolsa de estudos para este curso de mestrado.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos alguns métodos aproximativos como alternativa para a obtenção de soluções de equações do tipo $f(x) = 0$, onde $f(x)$ é uma função. Iniciamos apresentando algumas maneiras de se resolver as equações do 2º grau. Em seguida, introduzimos os métodos numéricos da Bissecção, Falsa Posição e Ponto Fixo e propomos atividades para serem realizadas numa turma de ensino básico.
Palavras-Chave: Equações. Raízes de equações. Métodos numéricos.

ABSTRACT

In this work, we present some approximation methods as an alternative to obtain solutions of equations of type $f(x) = 0$, where $f(x)$ is a function. We begin presenting some ways to solve the equations of the 2nd degree. Then we introduce the numerical methods of Bisection, False Position and Fixed Point and propose activities to be performed in a class of basic education.
Key-words: Equations. Roots of equations. Numerical methods.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

A resolução de equações é um dos temas estudados no ensino básico. Em geral, essas equações são do tipo $f(x) = 0$, onde $f(x)$ é uma função. Resolver uma equação equivale a encontrar as suas raízes. Um valor c é chamado raiz da função $f(x)$ quando $f(c) = 0$. Essa busca de raízes normalmente é tratada de forma analítica, ou seja, são usados métodos algébricos de forma a encontrar a solução exata das equações. Para a equação do 1º grau $ax + b = 0$, com $a \neq 0$, a raiz é dada por $x = -\frac{b}{a}$. Já a equação geral do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ é resolvida pela fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

comumente chamada de *Fórmula de Bhaskara.* Para a resolução da equação do 3º grau há um argumento conhecido, devido a Viète, usando substituição de variáveis, obtendo uma expressão com radicais. De modo análogo, é possível reduzir uma equação completa do 4º grau numa do 3º grau e, a partir daí, chegar também a uma expressão com radicais. Acerca das equações polinomiais de grau maior do que ou igual a 5, Galois provou que nem todas podem ser resolvidas por meio de radicais. Um estudo mais aprofundado acerca das equações polinomiais de grau maior que 2 pode ser encontrado em [4]. No ensino básico, são vistos apenas alguns casos mais simples de equações polinomiais de grau maior que 2, cujas manipulações algébricas são mais simples e, portanto, acessíveis ao aluno.

Neste trabalho, estudaremos alguns métodos numéricos para a obtenção de raízes de equações. As técnicas numéricas nos fornecem soluções próximas da solução exata. De modo geral, esses métodos geram uma sequência de números reais, que se aproximam de uma raiz exata da equação. Assim, ampliamos o conjunto de tipos de equações a serem trabalhadas, como as equações envolvendo polinômios, funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, tais como: $x \log x - 1 = 0$, $x^2 = 2^x$, $\cos x = e^x$, $x^3 + x - 1000 = 0$.

Os métodos numéricos não funcionam em qualquer situação. As funções devem satisfazer determinadas condições. Há resultados que mostram em quais casos as sequências de aproximações convergem para a solução. Optamos por restringir nosso estudo aos seguintes métodos: Bissecção, Falsa Posição e Ponto Fixo. O motivo de nossa escolha é que, para sua utilização, o aluno não necessita de conhecimentos de matemática além do ensino básico. No entanto, para garantir a funcionalidade dos métodos, veremos resultados mais avançados que, embora possam ser omitidos ao aluno, darão uma base melhor para o professor que vier a trabalhar esse assunto em sala de aula. Existem outros métodos que exigem mais embasamento teórico por parte do aluno. O método de Newton, por exemplo, é muito eficiente, mas utiliza cálculo de derivadas.

Para a aplicação dos métodos, usaremos recursos computacionais acessíveis e de fácil manuseio, como a planilha eletrônica e o software *Geogebra*, que é gratuito.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 1, mostramos as maneiras como foi resolvida a equação do 2º grau ao longo da história. Apresentamos problemas antigos cuja resolução recaem na equação do 2º grau, uma fórmula completando quadrados, bem como os métodos de Viète e Euler para a resolução da equação quadrática. Também apresentamos uma resolução geométrica e outra baseada em aproximações sucessivas com o intuito de introduzir a ideia dos métodos iterativos.

No capítulo 2, apresentaremos alguns conceitos importantes para o estudo de métodos numéricos: sequências e séries de números reais, noções topológicas sobre conjuntos, limites, derivadas e continuidade de funções. Este capítulo contém referencial teórico destinado ao professor, não sendo necessário ser trabalhado com os alunos.

No capítulo 3, apresentamos os Métodos da Bissecção, da Falsa Posição e do Ponto Fixo. Em cada um deles, mostramos teoremas acerca da funcionalidade dos métodos além de exemplos. Também demonstramos o Teorema do Ponto Fixo e o Teorema do Ponto Fixo das Contrações que garantem a existência e a unicidade do ponto fixo em determinados casos. Vale ressaltar que, para o aluno, é suficiente trabalhar os algoritmos utilizados nos exemplos.

No capítulo 4, finalizamos com uma proposta de atividade a ser aplicada em sala de aula enfatizando a resolução de equações com o uso dos métodos numéricos apresentados. Buscamos detalhar a resolução usando as justificativas matemáticas e também os recursos computacionais.

1 A EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Neste capítulo, apresentamos algumas formas de resolução da equação do 2º grau. Iniciamos com alguns problemas antigos e uma resolução completando quadrados. Em seguida, mostramos como obter as raízes com o uso de régua e compasso. Os matemáticos Euler e Viète apresentaram resoluções baseadas em substituição de variáveis. Viète também teve participação em métodos para se resolver equações de 3º e de 4º graus, sempre usando as substituições.

As expressões algébricas para se obter as raízes das equações de 2º, 3º e 4º graus possuem radicais, isto é, raízes *n-ésimas* de expressões algébricas. Entretanto, para equações polinomiais de grau maior do que ou igual a 5, Galois provou que, nem sempre, é possível chegar a soluções por meio de radicais. Sendo assim, os métodos numéricos são uma boa alternativa para se resolver equações, polinomiais ou não. Por esta razão, encerraremos o capítulo propondo uma resolução numérica para a equação do 2º grau. Queremos, com isso, motivar um estudo mais detalhado dos métodos aproximativos, que serão tema central de nosso trabalho.

Os métodos de resolução apresentados neste capítulo têm como referência textos de [1], [2], [3], [6] e [8].

1.1 UM PROBLEMA MILENAR

Um dos problemas mais antigos da Matemática consiste em achar dois números, sendo conhecidos sua soma s e seu produto p. Assim, se os números são x e y, temos $x + y = s$ e $xy = p$. Da 1ª equação, vem $y = s - x$. Substituindo na 2ª, obtemos $x(s - x) = p$, que acarreta $x^2 - sx + p = 0$. Na Antiguidade e na Idade Média, trabalhava-se com números positivos de modo que a equação quadrática $x^2 - sx + p = 0$ poderia ser reescrita em um dos tipos:

$$1) x^2 + sx = p,$$
$$2) x^2 = sx + p,$$
$$3) x^2 + p = sx.$$

Os três tipos acima são encontrados em textos babilônios de cerca de 2000 anos antes de Cristo. A maneira de se resolver equações era bem diferente da atual. Até o século XVI não se usavam letras para expressar os coeficientes das equações. Logo, não se usava uma fórmula para obtenção das raízes. O matemático francês François Viète, que viveu de 1540 a 1603, é que começou a usar as fórmulas usando letras. Sendo assim, exemplificando o 2º tipo, um problema pede o lado do quadrado sabendo que a área menos o lado é igual a 870. A solução deste problema equivale a resolver $x^2 - x = 870$. A regra para resolver este problema era dada pelo texto abaixo:

Tome a metade de 1 que é 0,50 e multiplique por 0,50, o que dá 0,25. Some isto a 870, o que dá 870,25. Isto é o quadrado de 29,50. Agora some 0,50 a 29,50 e o resultado é 30, o lado do quadrado.

De modo geral, para se achar dois números positivos de soma s e produto p, era dada a regra:

Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.

Podemos traduzir a regra acima na expressão $\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} + \frac{s}{2} = x$. Ao desenvolvê-la, obtemos $\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} = x - \frac{s}{2}$. Sendo x o maior dos números, segue que o lado direito da última expressão é positivo e, assim, elevando ambos os membros ao quadrado, segue:

$$\frac{s^2}{4} - p = x^2 - sx + \frac{s^2}{4}, \text{ que equivale a } x^2 - sx + p = 0,$$

que é a equação quadrática correspondente ao problema.

Vários métodos já foram utilizados para se obter as raízes de uma equação do 2º grau. Neste capítulo, mostraremos alguns. Apresentaremos agora o método de completar quadrados.

Sabe-se que $\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = x^2 - sx + \frac{s^2}{4}$. Então, na equação $x^2 - sx + p = 0$, somamos

$\dfrac{s^2}{4}$ em ambos os membros e obtemos

$$x^2 - sx + \frac{s^2}{4} = \frac{s^2}{4} - p, \text{ que equivale a } \left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2 - 4p}{4}.$$

Desta última expressão, obtemos $x - \dfrac{s}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{s^2 - 4p}{4}}$, ou ainda, $x = \dfrac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$.

No ensino básico, é apresentada a equação geral do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Esta última equação pode ser reduzida a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

já que $a \neq 0$. Pondo $\dfrac{b}{a} = -s$, $\dfrac{c}{a} = p$ e substituindo em $x = \dfrac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$, obtemos:

$$x = \frac{(-b/a) \pm \sqrt{(-b/a)^2 - 4\,(c/a)}}{2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Podemos verificar a existência de raízes reais da equação a partir da fórmula obtida acima. Para tanto, estudamos o sinal da expressão $b^2 - 4ac$ chamada discriminante e que costuma ser representada pela letra grega Δ (delta). Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais; se $\Delta = 0$, apenas uma raiz real; se $\Delta < 0$, não possui raízes reais. Para o caso $\Delta = 0$, dizemos que a equação possui, na verdade, duas raízes reais e iguais ou ainda que a raiz possui multiplicidade 2.

A fórmula que obtivemos é comumente chamada *Fórmula de Bhaskara* em homenagem ao indiano Bhaskara (1114-1185), o mais importante matemático do século XII. Neste tempo, os indianos usavam a mesma técnica utilizada pelos babilônios, ou seja, regras em forma de palavras. Como mencionado no texto acima, somente a partir do século XVI, com Viète, é que as fórmulas com uso de letras foram introduzidas. Sendo assim, embora Bhaskara resolvesse problemas que recaíam em equações do 2º grau, muito provavelmente, ele não deve ter usado a famosa fórmula que leva seu nome.

1.2 RESOLUÇÃO GEOMÉTRICA DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU COM USO DE RÉGUA E COMPASSO

Vamos buscar agora uma forma para se obter as raízes de uma equação do 2º grau usando régua e compasso.

Inicialmente, consideremos a equação

$$Ax^2+Bx+C=0, \quad \text{com} \quad A\neq 0. \tag{1.1}$$

Podemos dividir ambos os membros da igualdade por A e obter $x^2+(B/A)x+(C/A)=0$. Chamando $B/A=b$ e $C/A=c$, chegamos em

$$x^2+bx+c=0. \tag{1.2}$$

Como as equações (1.1) e (1.2) possuem as mesmas raízes, determinaremos as raízes de (1.2). Vamos supor $c\neq 0$, pois se $c=0$, as raízes serão 0 e $-b$. Separaremos nosso estudo em dois casos: $c>0$ e $c<0$.

1º caso: $c>0$.

Neste caso, as raízes x_1 e x_2 possuem mesmo sinal, pois $x_1\cdot x_2=c>0$. Se x_1 e x_2 são negativas então $x_1+x_2=-|x_1|-|x_2|=-b$, isto é, $|x_1|+|x_2|=b>0$. Sendo $b>0$, temos $|b|=b$ e podemos escrever $|x_1|+|x_2|=|b|$. Também temos que $x_1\cdot x_2=c$ equivale a $(-|x_1|)\cdot(-|x_2|)=c$, ou ainda, $|x_1|\cdot|x_2|=c$.

Por outro lado, se x_1 e x_2 são positivas então $x_1+x_2=|x_1|+|x_2|=-b>0$. Assim $b<0$, então $|b|=-b$. Logo $|x_1|+|x_2|=|b|$. E tem-se $x_1\cdot x_2=c$ que equivale a $|x_1|\cdot|x_2|=c$.

Então $|x_1|+|x_2|=|b|$ e $|x_1|\cdot|x_2|=c$, se x_1 e x_2 possuem mesmo sinal. Assim, nosso problema consiste em determinar dois segmentos de reta cuja soma das medidas seja $|b|$ e produto seja c. Passemos à construção das raízes.

Tracemos uma reta r e sobre ela marquemos os segmentos MN, NO e OP de comprimentos, respectivamente, iguais a c, 1 e $|b|$. Em seguida, traçamos as semicircunferências de diâmetros MO e OP.

Por N, traçamos a reta s perpendicular à reta r, que intersecta a semicircunferência de diâmetro MO em Q. O ângulo MQO é reto, pois está inscrito no diâmetro. Logo, o triângulo MQO é retângulo em Q e usando as relações métricas, temos $\overline{NQ}^2=\overline{MN}\cdot\overline{NO}=c\cdot 1=c$.

Agora, por Q, traçamos a reta t paralela à reta r, que intersecta a semicircunferência de diâmetro OP em U. Por U, traçamos a reta v perpendicular à r, determinando G em r. Com esta construção, $\overline{NQ}=\overline{GU}$. Analogamente ao raciocínio para o triângulo MQO, o triângulo OUPé retângulo e $\overline{GU}^2=\overline{OG}\cdot\overline{GP}$ Como $\overline{NQ}=\overline{GU}$, segue que

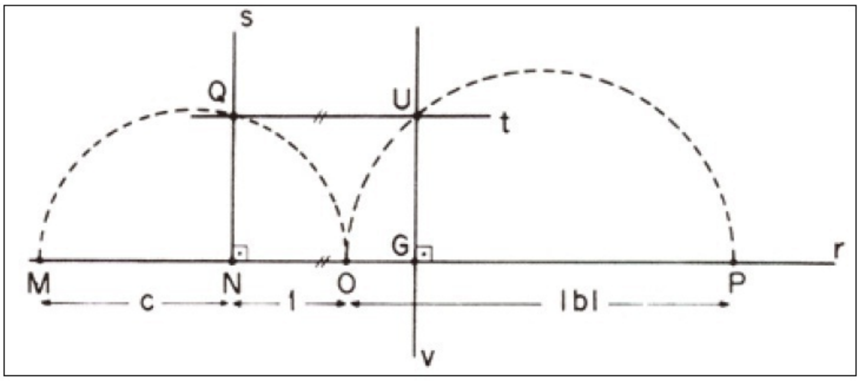

Figura 1: Resolução geométrica - 1º caso

$\overline{NQ}^2 = \overline{GU}^2 = \overline{OG} \cdot \overline{GP} = c$. Mas $\overline{OG} + \overline{GP} = |b|$

Então OG e GP são tais que sua soma é $|b|$ e seu produto é c. Se $b < 0$ então $\overline{OG} \cdot \overline{GP} = |b| = -b$ e OG e GP são as raízes da equação (1.2). Mas se $b > 0$ então $|b| = b$ e $-OG$ e $-GP$ são as raízes de (1.2).

Vale ressaltar que, se a reta t intersectar a semicircunferência de diâmetro OP em apenas um ponto T, a perpendicular à r por T passará pelo ponto médio de OP e, neste caso, determinaremos duas raízes reais e iguais para a equação (1.2), a saber, OH e HP ou $-OH$ e $-HP$, onde H é o ponto médio de OP.

E se a reta t não intersectar a semicircunferência de diâmetro OP, as raízes da equação (1.2) serão imaginárias, não podendo ser construídas geometricamente.

2º caso: $c < 0$.

Neste caso, as raízes x_1 e x_2 possuem sinais contrários, pois $x_1 \cdot x_2 = c < 0$. Seja x_1 a raiz de maior valor absoluto, isto é, $|x_1| > |x_2|$.

Se $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$ então $x_1 + x_2 = |x_1| - |x_2| = -b > 0$, pois $|x_1| > |x_2|$. Assim $b < 0$, então $|b| = -b$. Logo $|x_1| - |x_2| = |b|$. E $c < 0$ implica $|c| = -c$ e $|x_1| \cdot |x_2| = |c|$.

De outro modo, se $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ então $x_1 + x_2 = -|x_1| + |x_2| = -b < 0$, pois $|x_1| > |x_2|$. Então $b > 0$, logo $|b| = b$. Segue que $|x_1| - |x_2| = b = |b|$. E $|x_1| \cdot |x_2| = -x_1 \cdot x_2 = -c > 0$, donde $|x_1| \cdot |x_2| = |c|$.

De $|x_1| - |x_2| = b = |b|$ e $|x_1| \cdot |x_2| = |c|$, concluímos que, neste caso, nosso problema será obter dois segmentos de reta cuja diferença das medidas seja $|b|$ e produto seja $|c|$.

Iniciamos nossa construção como no 1º caso, determinando os pontos M, N, O e P

sobre a reta r e o ponto Q. Agora vale $\overline{NQ}^2 = |c|$.

Tracemos uma paralela à r por Q e uma perpendicular à r por O, obtendo o ponto U. Assim, $\overline{NQ} = \overline{OU}$. Liguemos U ao centro I da circunferência determinando o diâmetro GH.

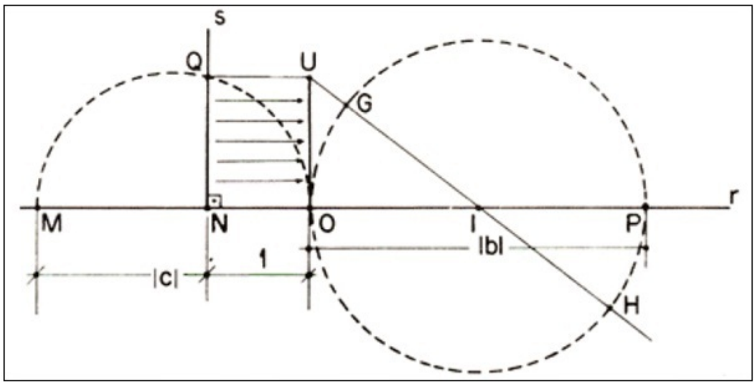

Figura 2: Resolução geométrica - 2º caso

Observemos que $\overline{UH} - \overline{UG} = \overline{GH} = \overline{OP} = |b|$. Por outro lado, como OU é tangente e UH é secante à circunferência de diâmetro $|b|$, segue que $\overline{UH} \cdot \overline{UG} = \overline{OU}^2 = \overline{NQ}^2 = |c|$.

Então UH e UG são tais que sua soma é $|b|$ e seu produto é $|c|$. Se $b < 0$ então $\overline{UH} - \overline{UG} = |b| = -b > 0$ e fazemos $x_1 = \overline{UH}$ e $x_2 = -\overline{UG}$. Mas se $b > 0$ então $\overline{UH} - \overline{UG} = |b| = b > 0$ ou ainda $-\overline{UH} + \overline{UG} = -b$ e fazemos $x_1 = -\overline{UH}$ e $x_2 = \overline{UG}$.

Consideremos ainda que se $b = 0$ então os pontos G, I, H e O coincidem. Então $\overline{UH} = \overline{UG} = \overline{OU}$. Teremos então $x_1 = \overline{OU}$ e $x_2 = -\overline{OU}$.

1.3 MÉTODO DE EULER PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Leonhard Euler (1707-1783) nasceu na Suíça e, provavelmente, foi o mais importante matemático suíço de sua época - ou de qualquer outra. Em 1727, foi fazer parte da Academia de São Petersburgo, na Rússia. Mais tarde, em 1741, foi para a Academia de Berlim, retornando a São Petersburgo em 1966. Euler escreveu muitos artigos matemáticos. Mesmo quando perdeu a visão do olho direito em 1735, dizia-se por excesso de trabalho, sua produção de pesquisa não diminuiu. Durante sua vida, ele publicou mais de 500 livros e artigos. Sua pesquisa matemática chegava a cerca de 800 páginas por ano, não tendo nenhum matemático que superasse sua produção.

Euler contribuiu em quase todos os ramos da matemática pura e aplicada, desde os mais elementares aos mais avançados, escrevendo, em quase tudo, na linguagem e notação que usamos hoje. Em geometria, álgebra, trigonometria e análise, encontramos símbolos de Euler. A letra e para representar a base do logaritmo decimal, a letra grega π para representar a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro da mesma e o símbolo i para $\sqrt{-1}$ foram, em grande parte, suas contribuições. Esses três símbolos mais os inteiros 0 e 1 são combinados na relação $e^{\pi i}+1=0$. Também usou as letras minúsculas a, b e c para os lados de um triângulo e as maiúsculas A, B e C para os ângulos opostos, além da letra Σ para indicar soma. Mas talvez a mais importante de todas seja a notação $f(x)$ para uma função de x.

Vamos descrever, a partir de agora, a forma como Euler resolveu a equação do 2º grau.

Consideremos a equação $ax^2+bx+c=0, \quad a \neq 0$. Euler usou o método de substituição, fazendo $x=u+z$ e, em seguida, $x^2=(u+z)x$. Assim, obteve o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax^2+bx+c & = & 0 \\ x-(u+z) & = & 0 \\ x^2-(u+z)x & = & 0 \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Multiplicando ambos os membros das equações de (1.1) por x, chegou ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax^3+bx^2+cx & = & 0 \\ x^2-(u+z)x & = & 0 \\ x^3-(u+z)x^2 & = & 0 \end{array}\right. \tag{1.2}$$

O sistema (1.2) é linear homogêneo nas incógnitas x, x^2 e x^3. Logo uma solução é a trivial. Para que (1.2) tivesse soluções não triviais, Euler considerou a teoria de determinantes, levando em conta que um sistema linear homogêneo só possui soluções não triviais se o determinante da matriz dos coeficientes for nulo. Então fez $detA=0$, onde

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & -(u+z) \\ 1 & -(u+z) & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando o determinante segundo a 1ª linha de A, vem:

$$a[-(u+z)^2]-b(u+z)+c(-1)=0 \quad \text{ou} \quad -au^2-2auz-az^2-bu-bz-c=0,$$

que leva a

$$au^2 + (2az + b)u + az^2 + bz + c = 0 \qquad (1.3)$$

que é uma equação do 2º grau na variável u.

A fim de transformar (1.3) numa equação incompleta do 2º grau, Euler anulou o coeficiente de u, escolhendo $z = -\dfrac{b}{2a}$. Substituindo em (1.3), segue:

$$au^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0 \quad \text{ou} \quad au^2 - \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

ou ainda $au^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$.

Isolando u, temos $u = \pm\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$, que equivale a $u = \pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Por fim, substituindo os valores de z e u em $x = u + z$, chegamos em

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

concluindo a demonstração.

1.4 MÉTODO DE VIÈTE PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU

François Viète foi um matemático francês que viveu entre 1540 e 1603. Estudou e exerceu Direito, chegando a tornar-se membro do Parlamento da Bretanha. Não era matemático de profissão, mas dedicava-se à matemática por lazer, dando importantes contribuições à Geometria, Trigonometria, Aritmética e, principalmente, à Álgebra. Em sua obra, foi encontrada, pela primeira vez, uma distinção clara entre o conceito de parâmetro e a ideia de quantidade desconhecida (incógnita). Viète usou vogais para representar quantidades desconhecidas e consoantes para representar grandezas ou números supostamente conhecidos. Embora em sua época, na Álgebra árabe, já se resolvesse equações cúbicas e quárticas com uso de símbolos, Viète participou efetivamente na renovação do simbolismo e na resolução de equações quadráticas, cúbicas e quárticas, desenvolvendo novos métodos de resolução.

Vamos apresentar o Método de Viète para resolução da equação do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \qquad (1.1)$$

O método consiste na mudança da variável x para novas variáveis auxiliares u e v. Inicialmente fazemos $x = u + v$ na equação (1.1), obtendo:

$$a\,(u+v)^2 + b\,(u+v) + c = 0 \quad \text{ou} \quad au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c = 0.$$

Reescrevemos a igualdade acima como uma equação na variável v:

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0. \tag{1.2}$$

Viète transformou a equação (1.2) numa equação incompleta do 2º grau, anulando o coeficiente de v, $2au + b$, escolhendo $u = -\dfrac{b}{2a}$. Assim, a equação (1.2) fica:

$$av^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0 \Longleftrightarrow av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \Longleftrightarrow av^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = 0.$$

Isolando v, chega-se em $v = \pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, se $b^2 - 4ac \geq 0$. Como já mencionado na sessão anterior, a expressão $b^2 - 4ac$ é chamada discriminante.

Lembrando que $x = u + v$, $u = -\dfrac{b}{2a}$ e $v = \pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, segue a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.3}$$

Como exemplo, vamos resolver a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, usando o Método de Viète.

Inicialmente, substituímos $x = u + v$ na equação dada, obtendo:

$$(u+v)^2 - 5(u+v) + 6 = 0 \Longleftrightarrow u^2 + 2uv + v^2 - 5u - 5v + 6 = 0.$$

Reescrevendo na variável v, temos $v^2 + (2u - 5)v + u^2 - 5u + 6 = 0$. Escolhemos $u = \dfrac{5}{2}$ para anular o coeficiente $2u - 5$ de v, chegando em

$$v^2 + \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = 0 \quad \text{ou ainda} \quad v = \pm\frac{1}{2}.$$

Então, de $x = u + v$, $u = \dfrac{5}{2}$ e $v = \pm\dfrac{1}{2}$, vem $x = \dfrac{5 \pm 1}{2}$. Daí, chegamos às soluções da equação, $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

O Método de Viète é uma opção para quem não quiser "decorar" a famosa fórmula (1.3), tendo que, no entanto, operar com o produto notável $(u + v)^2$. Também é uma opção de demonstração de como se obter (1.3).

É interessante discutir, em sala de aula, a mudança de variáveis $x = u + v$ e a escolha $u = -b/a$. O uso da mudança para as variáveis auxiliares não altera o valor das raízes da equação original em x. É apenas um artifício com o objetivo de facilitar a resolução. A escolha $u = -b/a$ pode levar o aluno a pensar que "sumiu" algo no meio da equação e, com isso, o resultado final ficará comprometido. No entanto, deve-se ressaltar que u é uma variável auxiliar e poderíamos escolher outras expressões para ela, mas a escolha sugerida pelo Método de Viète é a melhor pois transforma uma equação completa numa incompleta do 2º grau, que é notoriamente mais fácil de se resolver.

Em [4], há um argumento para resolução da equação do 3º grau, devido à Viète, também com substituição de variáveis. A obtenção de raízes pode ser uma tarefa difícil dependendo da equação e do método a ser usado. Na próxima seção, introduziremos um método via aproximações sucessivas como alternativa para a busca de soluções de uma equação.

1.5 APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Nesta seção, voltaremos ao problema inicial deste capítulo: achar dois números cuja soma é s e produto é p. Isto equivale a resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} x + y &= s \\ xy &= p \end{cases}$$

A primeira equação corresponde a uma reta no plano xy, que intersecta os eixos coordenados nos pontos $(s, 0)$ e $(0, s)$.

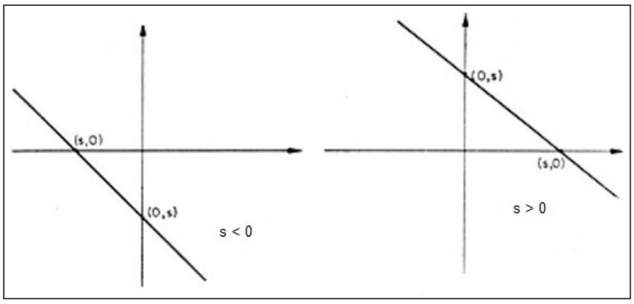

Figura 3: Reta $x + y = s$

Já a equação $xy = p$ corresponde a uma hipérbole no plano xy, se $p \neq 0$.

Achar os dois números x e y corresponde, geometricamente, a encontrar os pontos de

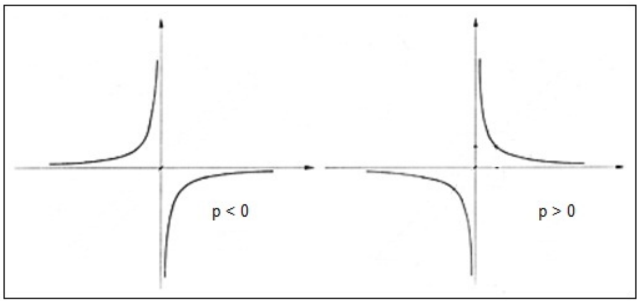

Figura 4: Hipérbole $xy = p$

interseção da reta com a hipérbole. Por outro lado, conforme tratado na seção 1.1, esses dois números são as soluções da equação $x^2 - sx + p = 0$. Para fixar as ideias, vamos estudar o caso em que $s > 0$ e $p > 0$. Assim, as raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$ são positivas ou, equivalentemente, os pontos (x, y), interseção entre a reta e a hipérbole, estão no 1º quadrante.

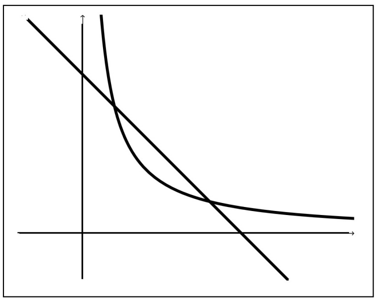

Figura 5: Reta e hipérbole no 1º quadrante

A equação $x^2 - sx + p = 0$ pode ser escrita como $x(x - s) + p = 0$ e daí temos:

$$x = s - \frac{p}{x} \quad \text{ou} \quad x = \frac{p}{s - x}$$

As fórmulas acima fornecem métodos iterativos para calcular valores tão próximos quanto desejarmos das raízes da equação dada. Assim, começando com certo valor x_0 candidato a raiz da equação $x^2 - sx + p = 0$, podemos construir uma sequência $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$, onde $x_{n+1} = s - \dfrac{p}{x_n}$. Se a sequência x_n convergir (se aproximar) de algum valor limite x, este valor será uma raiz de $x^2 - sx + p = 0$. Analogamente, pode-se usar o algoritmo iterativo $x_{n+1} = \dfrac{p}{s - x_n}$ para construir uma sequência de modo a buscar uma raiz da equação, caso a sequência convirja.

É claro que se a equação $x^2 - sx + p = 0$ não tiver raízes reais, a sequência x_n não irá convergir para valor algum.

Comecemos o processo iterativo com um valor x_0 tal que $x_0^2 - sx_0 + p < 0$. Esta escolha é conveniente, pois se α e β são as raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$ e $\alpha < x_0 < \beta$ então $x_0^2 - sx_0 + p < 0$, já que o coeficiente de x^2 é positivo. Logo, já sabemos que a iteração iniciou com um valor localizado entre as raízes.

Na figura 6, vemos o processo graficamente iniciando no ponto $(x_0, p/x_0)$. Depois, a seta segue verticalmente para cima até atingir a reta $x + y = s$ no ponto $(x_0, s - x_0)$. Em seguida, vai horizontalmente para a esquerda até atingir a hipérbole no ponto $(x_1, p/x_1)$. Mas os pontos $(x_0, s - x_0)$ e $(x_1, p/x_1)$ possuem a mesma ordenada, de modo que $s - x_0 = p/x_1$, donde $x_1 = p/(s - x_0)$. Continuando o raciocínio, tem-se $x_2 = p/(s - x_1), x_3 = p/(s - x_2)$ e assim por diante.

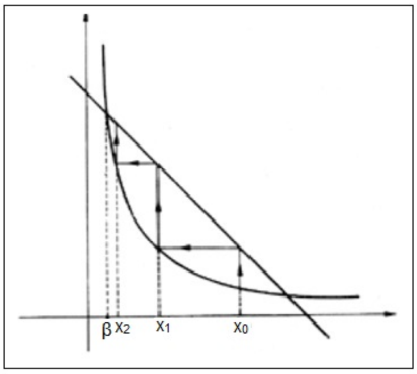

Figura 6: Convergência para o ponto de abscissa β

Então, usando o algoritmo $x_{n+1} = \dfrac{p}{s - x_n}$, convergimos para o ponto de interseção da reta com a hipérbole cuja abscissa é β. Para obter a outra raiz α, fazemos $s - \beta$.

Se usássemos o outro algoritmo, $x_{n+1} = s - \dfrac{p}{x_n}$, iniciando também em x_0 tal que $x_0^2 - sx_0 + p < 0$, obteríamos uma sequência que convergiria para a raiz α.

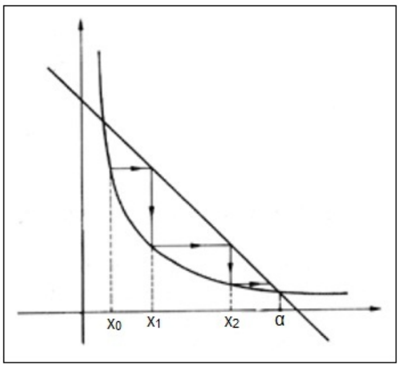

Figura 7: Convergência para o ponto de abscissa α

Consideramos aproximações a partir de um valor x_0 tal que $x_0^2 - sx_0 + p < 0$. Se tivéssemos começado por x_0 tal que $x_0^2 - sx_0 + p > 0$, os dois processos iterativos também convergiriam, porém a alternância de pontos, ora na reta ora na hipérbole, poderia atingir os dois ramos da hipérbole.

O método aproximativo que apresentamos nesta seção é chamado Método do Ponto Fixo e será mais bem abordado no capítulo 3 deste trabalho. Existem outros métodos aproximativos. Vamos descrever alguns mais adiante. Os métodos iterativos, embora na maioria das vezes forneçam um valor aproximado para as raízes, podem ser muito úteis na resolução de equações que envolvem funções de tipos diferentes, como por exemplo, $x^2 = 2^x$, que envolve a função quadrática e a exponencial, ou mesmo equações polinomiais de grau maior do que ou igual a 3. Em muitos problemas práticos, a obtenção de aproximações para as raízes pode ser tão boa quanto obter o valor exato.

Nos próximos capítulos, vamos concentrar nossas atenções nos métodos iterativos ou aproximativos.

2 ALGUNS RESULTADOS IMPORTANTES PARA O ESTUDO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, apresentaremos resultados que serão importantes para o desenvolvimento do capítulo 3, onde mostraremos alguns métodos numéricos para resolução de equações do tipo $f(x) = 0$. Para a utilização desses métodos, a função $f(x)$ deve ser contínua num intervalo que contenha uma raiz. Para garantir a existência dessa raiz, usamos o Teorema do Valor Intermediário. Em seguida, estabelecemos uma sequência de aproximações sucessivas para chegarmos na solução. Assim, faremos um estudo introdutório sobre sequências e séries de números reais, algumas noções topológicas, limites e derivadas de funções, além de resultados sobre funções contínuas. Este estudo é direcionado ao professor, podendo ser omitido aos alunos. Todos os resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados em [5], inclusive os que não forem demonstrados aqui.

2.1 SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE NÚMEROS REAIS

Definição 2.1. Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado *n-ésimo termo* da sequência. Denotamos a sequência por $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou apenas (x_n).

Exemplo 2.2. A progressão geométrica $(1, 1/2, 1/4, 1/8, \cdots)$, cujo n-ésimo termo é $x_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$, é uma sequência de números reais.

Definição 2.3. Uma sequência (x_n) diz-se limitada superiormente (respectivamente, inferiormente) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente, $x_n \geq c$) para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência (x_n) é dita limitada quando é limitada superior e inferiormente.

Definição 2.4. Uma subsequência da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a restrição da função x acima a um subconjunto infinito $\mathbb{N}'$ de $\mathbb{N}$. Denotamos a subsequência $x' = x|\mathbb{N}'$ por $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots)$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$.

Definição 2.5. (Limite de sequência) Seja (x_n) uma sequência de números reais e a um número real. Dizemos que (x_n) converge para a ou que a é o limite de (x_n) quando, para todo número real $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo termo x_n, com $n > n_0$, cumpre a condição $|x_n - a| < \epsilon$. Escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ou apenas $\lim x_n = a$.

A definição acima significa que, para valores muito grandes de n, os termos x_n tornam-se tão próximos de a quanto se deseje. A sequência que possui limite é dita convergente. Caso contrário, ela é dita divergente.

Teorema 2.6. O limite de uma sequência, quando existe, é único.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência e suponhamos, por absurdo, que $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$. Logo, para todo número real $\epsilon > 0$, existem $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_1$ então $|x_n - a| < \epsilon$ e se $n > n_2$ então $|x_n - b| < \epsilon$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, segue que $n > n_0$ implica que todo termo x_n pertence aos intervalos abertos $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e $J = (b - \epsilon, b + \epsilon)$. Tomando $\epsilon > 0$, tal que os intervalos I e J sejam disjuntos, teremos que se $x_n \in I$ então $x_n \notin J$. Absurdo, pois $\lim x_n = b$. Analogamente, $x_n \in J$, chega-se a um absurdo. Portanto, o limite da sequência (x_n) é único. $\square$

Teorema 2.7. Se $\lim x_n = a$ então toda subsequência de (x_n) converge para o limite a.

Demonstração. Seja $(x_{n_k})k \in \mathbb{N}$ uma subsequência de (x_n). Como $\lim x_n = a$ então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todo termo x_n, com $n > n_0$, pertence ao intervalo $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Assim, todo termo x_{n_k} da subsequência, com $n_k > n_0$, também pertence a I. Logo $\lim x_{n_k} = a$. $\square$

Teorema 2.8. Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser obtida em [5], pág. 24. $\square$

Definição 2.9. Uma sequência (x_n) é chamada monótona quando se tem $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (neste caso (x_n) é dita monótona não-decrescente) ou então $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (neste caso (x_n) é dita monótona não-crescente).

Teorema 2.10. Toda sequência monótona limitada é convergente.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser obtida em [5], pág. 25. $\square$

Corolário 2.11. (Teorema de Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser obtida em [5], pág. 25. □

Proposição 2.12. (Operações com limites de sequências) Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$ então

i) $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$;

ii) $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

iii) $\lim(x_n/y_n) = a/b$, se $b \neq 0$.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser obtida em [5], pág. 27. □

Exemplo 2.13. Seja a sequência (x_n), em que $x_n = \dfrac{n^3+4n+1}{2n^3-n^2}$. Temos:

$$\lim x_n = \lim \frac{n^3+1}{2n^3-n^2} = \lim \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(2-\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim 1 + \lim \frac{1}{n^3}}{\lim 2 - \lim \frac{1}{n}} = \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

Definiremos agora série de números reais. Uma série é construída a partir de uma sequência (a_n) da seguinte forma:
O primeiro termo é $S_1 = a_1$; o segundo é $S_2 = a_1 + a_2$; o terceiro é $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ e, assim, sucessivamente.

Definição 2.14. Uma série é uma soma $s = S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, com um número infinito de parcelas. Denotamos por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ou simplesmente $\sum a_n$, a série cujo n-ésimo termo é $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. O termo a_n é chamado *termo geral da série*. A sequência (S_n) é chamada *sequência das somas parciais (ou reduzidas) da série*. Definimos $\lim S_n = s$. Quando este limite existe, a série é dita *convergente* ou que *converge* para s. Se o limite não existe, dizemos que a série *diverge* ou que é *divergente*.

Exemplo 2.15. Dada a sequência $(1, 1/2, 1/4, 1/8, \cdots)$, onde $x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, temos $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$, que é a conhecida soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente e infinita. Logo, $s = S_n = \frac{1}{1-1/2} = 2$, ou seja, a série converge para o valor 2..

Exemplo 2.16. A sequência $(3, 7, 11, \cdots)$, onde $x_n = 4n-1$, é uma progressão aritmética crescente. Temos $s = 3 + 7 + 11 + \cdots = \lim \frac{(3+(4n-1))n}{2} = \lim n + 2n^2$. Como este limite é infinito, a série diverge.

Existem vários critérios ou testes para definir se uma série converge ou diverge. No entanto, apresentaremos apenas um que é usado para um tipo de série, a absolutamente convergente, que definiremos a seguir.

Definição 2.17. Uma série $\sum a_n$ é dita absolutamente convergente quando $\sum |a_n|$ converge.

Teorema 2.18. Toda série absolutamente convergente é convergente.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser obtida em [5], pág. 40. $\square$

Teorema 2.19. (Teste de d'Alembert) Seja $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se existir uma constante c tal que $\lim |\frac{a_n+1}{a_n}| \leqslant c < 1$ então a série $\sum a_n$ será absolutamente convergente.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser obtida em [5], pág. 41. $\square$

2.2 NOÇÕES TOPOLÓGICAS

Nesta seção, abordaremos alguns tópicos acerca da topologia que nos ajudarão nas seções seguintes. Usaremos a terminologia "ponto" ao invés de "número real".

Definição 2.20. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é chamado aberto quando para todo ponto $a \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ está contido em A.

Definição 2.21. Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é chamado fechado quando todo ponto que é limite de uma sequência de pontos de F pertence a F.

Exemplo 2.22. O intervalo aberto $I = (1, 3)$ é um conjunto aberto. Notemos que a sequência (a_n) cujo n-ésimo termo é $a_n = 1 + 1/n$, também representada por $(2, 3/2, 4/3, 6/5, \cdots)$, é tal que todos os seus termos pertencem ao intervalo I. Além do mais, (a_n) converge para 1, pois $\lim a_n = 1$. Então o número 1 é limite de uma sequência de pontos do conjunto I, mas 1 não pertence a I. Logo I não pode ser fechado.

Definição 2.23. Uma cisão de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma decomposição $X = A \cup B$ que cumpre as seguintes condições:

i) Para todo elemento $a \in A$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $(a-\delta_1, a+\delta_1) \cap B = \varnothing$;

ii) Para todo elemento $b \in B$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $(b-\delta_2, b+\delta_2) \cap A = \varnothing$.

As condições acima significam que, em particular, A e B são disjuntos. A decomposição $X = X \cup \varnothing$ é chamada cisão trivial.

Proposição 2.24. Um intervalo da reta só admite a cisão trivial.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser obtida em [5], pág. 51. □

Definição 2.25. Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando todo intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, onde $\epsilon > 0$, contém algum ponto de X diferente do próprio a. O conjunto dos pontos de acumulação de X é denotado por X'.

Exemplo 2.26. Dado o intervalo aberto $I = (1, 3) = (2 - 1, 2 + 1)$, o ponto 2.9 é um ponto de acumulação, pois $\forall\ \epsilon > 0$ o intervalo $J = (2.9 - \epsilon, 2.9 + \epsilon)$ contém pontos de I diferentes de 2. Já o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ não possui pontos de acumulação. De fato, tomando $\epsilon < 1$, para todo $a \in A$, o intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ não possui pontos de A diferentes de a.

Definição 2.27. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é chamado compacto quando é limitado e fechado.

Teorema 2.28. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser obtida em [5], pág. 53. □

Proposição 2.29. Todo conjunto compacto possui um elemento mínimo e um elemento máximo.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser obtida em [5], pág. 54. □

2.3 LIMITES DE FUNÇÕES

Definição 2.30. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real e a um ponto de acumulação de X. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende para a é igual ao número L quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$. Este limite, em símbolos, escreve-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

O limite acima significa que $f(x)$ pode se tornar tão próximo de L quanto se queira desde que se tome x suficientemente próximo de a, porém diferente de a.

O próximo teorema faz uma relação entre limite de função real e sequência de números reais.

Teorema 2.31. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real e a um ponto de acumulação de X. Então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, tenha-se $\lim f(x_n) = L$.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser obtida em [5], pág. 64. $\square$

Teorema 2.32. O limite de uma função, quando existe, é único.

Demonstração. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real e $a \in X'$, com $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$. Então podemos tomar uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$. Assim, $\lim f(x_n) = L$ e $\lim f(x_n) = M$. Pela unicidade do limite da sequência $f(x_n)$, segue que $L = M$. $\square$

Proposição 2.33. (Operações com limites de funções) Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$, com $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Então

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$;

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$;

iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = L/M$, se $M \neq 0$.

Demonstração. Este resultado também pode ser lido em [5], pág. 65. $\square$

2.4 FUNÇÕES CONTÍNUAS

As funções contínuas são muito importantes em matemática. Muitos resultados são válidos apenas para funções deste tipo. No próximo capítulo, apresentaremos alguns métodos de resolução de equações que são aplicados aos casos que envolvem funções contínuas.

Definição 2.34. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita contínua no ponto $a \in X \cap X'$ quando $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Quando f não é contínua em a, dizemos que é descontínua em a. A função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua quando f é contínua em todos os pontos de X.

Exemplo 2.35. Seja a função $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{x-2}$. Quando $x \neq 2$, $\frac{x^3-2x^2}{x-2} = \frac{x^2(x-2)}{x-2} = x^2$. Assim, o gráfico de $f(x)$ é igual ao de $y = x^2$, quando $x \neq 2$. Temos que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$, mas $f(2)$ não está definido. Assim, $f(x)$ não é contínua em $x = 2$.

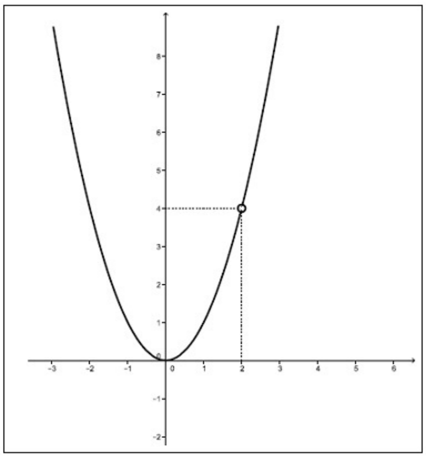

Figura 8: Gráfico de $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{x-2}$

Teorema 2.36. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$, com $f(a) < g(a)$. Então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tal que se $x \in X \cap (a-\delta_1, a+\delta_1)$ então $f(x) \in I = (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$ e se $x \in X \cap (a-\delta_2, a+\delta_2)$ então $g(x) \in J = (g(a)-\epsilon, g(a)+\epsilon)$. Tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que se $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$ então $f(x) \in I$ e $g(x) \in J$. Tomando $\epsilon < \frac{|f(a)-g(a)|}{2}$ os intervalos I e J serão disjuntos, acarretando $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$. $\square$

Teorema 2.37. (Teorema do valor intermediário) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração. Sejam os conjuntos $A = \{x \in [a, b]; f(x) \leq d\}$ e $B = \{x \in [a, b]; f(x) \geq d\}$. Tem-se que $[a, b] = A \cup B$. Se $A \cap B \neq \varnothing$ então para todo $c \in A \cap B$ tem-se $f(c) \leq d$ e $f(c) \geq d$, o que implica $f(c) = d$. Se $A \cap B = \varnothing$ então $[a, b] = A \cup B$ seria uma cisão não trivial, já que A e B são não vazios ($a \in A \quad \text{e} \quad b \in B$). Isto é um absurdo, pois um intervalo da reta só admite a cisão trivial. Logo, $A \cap B \neq \varnothing$, ou seja, existe c tal que $f(c) = d$. $\square$

O Teorema do Valor Intermediário é muito importante para o estudo dos métodos numéricos. Isto porque, sob certas condições, ele assegura a existência de uma raiz para uma equação. Vejamos, no exemplo seguinte, uma aplicação deste teorema.

Exemplo 2.38. Seja a função $f : X \to \mathbb{R}$, onde $X = (0, +\infty)$ definida por
$f(x) = x\log(x) - 1$. Essa função é contínua em seu domínio. Além do mais, temos que

$f(2) = -0,3979 < 0$ e $f(3) = 0,4314 > 0$. Então, analisando a função f no intervalo fechado $[2,3]$, temos $f(2) < 0 < f(3)$. Assim, f restrita ao intervalo fechado $[2,3]$ satisfaz às hipóteses do Teorema do Valor Intermediário. Logo existe uma raiz de f no intervalo $(2,3)$.

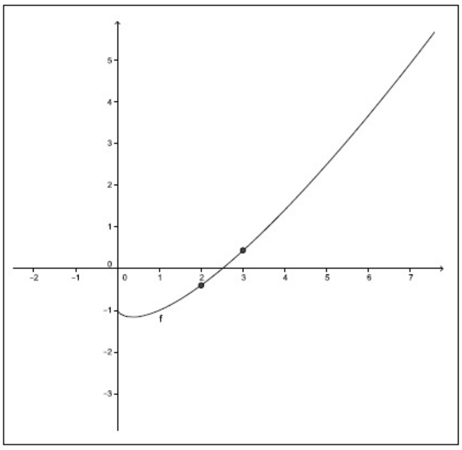

Figura 9: Gráfico de $f(x) = x\log(x) - 1$

Teorema 2.39. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto então sua imagem $f(X)$ também é um conjunto compacto.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser obtida em *ELON*, pág. 81. $\square$

Corolário 2.40. (Teorema de Weierstrass) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua no conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$. Então existem x_0 e $x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. A imagem $f(X)$ do conjunto compacto X é um conjunto compacto. Pela proposição 2.29, o conjunto compacto $f(X)$ possui um valor mínimo e um máximo, digamos $f(x_0)$ e $f(x_1)$, respectivamente. $\square$

2.5 DERIVADAS DE FUNÇÕES REAIS

Definição 2.41. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A derivada da função f no ponto a é o limite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, denotado por $f'(a)$. Quando o limite existe, dizemos que f é derivável no ponto a. Quando $f'(x)$ existe para todo $x \in X \cap X'$, dizemos que a função $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável no conjunto X. Usamos a notação $f''(x)$ para indicar a derivada segunda de f, quando f for duas vezes derivável em $x \in X \cap X'$.

Proposição 2.42. (Operações com derivadas de funções) Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ deriváveis em $a \in X \cap X'$. Então

i) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;

ii) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$;

iii) $(f/g)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$, se g(a) $\neq 0$.

Demonstração. Este resultado também pode ser lido em [5], pág. 93. □

Teorema 2.43. (Regra da Cadeia) Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'$, $b \in Y \cap Y'$, $f(X) \subset Y$ e $f(a) = b$. Se f é derivável em a e g é derivável em b então a função composta $gof : X \to \mathbb{R}$ é derivável em a e $(gof)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser obtida em [5], pág. 93. □

Teorema 2.44. (Teorema de Rolle) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração. Pelo Teorema de Weierstrass, a função f possui valor mínimo m e máximo M em $[a, b]$. Se esses valores forem a e b então $m = M$. Assim f será constante. Logo $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Por outro lado, se um dos valores, mínimo ou máximo, digamos c, estiver em (a, b) então $f'(c) = 0$. □

Exemplo 2.45. Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Ela é contínua e derivável em todo o seu domínio. Além disso, $f(0) = 4 = f(5)$. Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (0, 5)$ tal que $f'(c) = 0$. De fato, pois $f'(x) = 2x - 5$. Fazendo $f'(x) = 0$, vem $x = 2,5$. Logo, $c = 2,5$. A reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $2,5$ é paralela ao eixo x. Isto ocorre, pois $f'(2,5) = 0$.

Teorema 2.46. (Teorema do Valor Médio) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$.

Demonstração. Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - dx$, com $g(a) = g(b)$. Esta função é contínua, pois $f(x)$ e dx são contínuas. Além disso, g é derivável em (a, b). Portanto, pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Como $g(x) = f(x) - dx$, segue que $g'(x) = f'(x) - d$ e já que $g'(c) = 0$ temos $f'(c) = d$. Para mostrar que $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$, consideremos que $g(a) = g(b)$. Assim, $g(a) = f(a) - da = f(b) - db = g(b)$. De $f(a) - da = f(b) - db$, vem $d = f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b - a)$. □

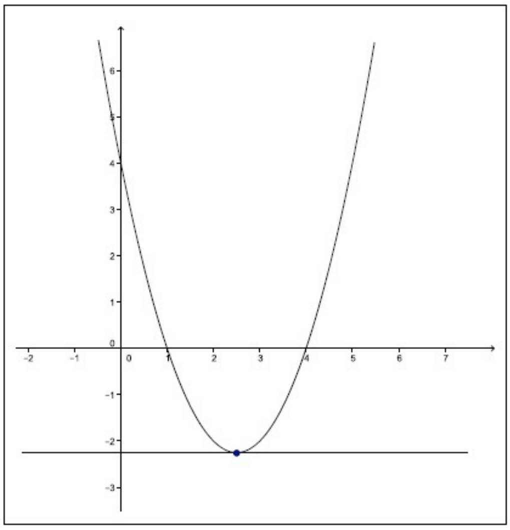

Figura 10: Exemplo do Teorema de Rolle

Exemplo 2.47. Ainda considerando a função f do exemplo 2.45, seja o intervalo $(2,5)$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (2,5)$ tal que $f'(c) = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{4-(-2)}{3} = 2$. Procuremos c tal que $f'(c) = 2$. De $f'(c) = 2$, vem $2c - 5 = 2$ que implica $c = 3,5$. A reta

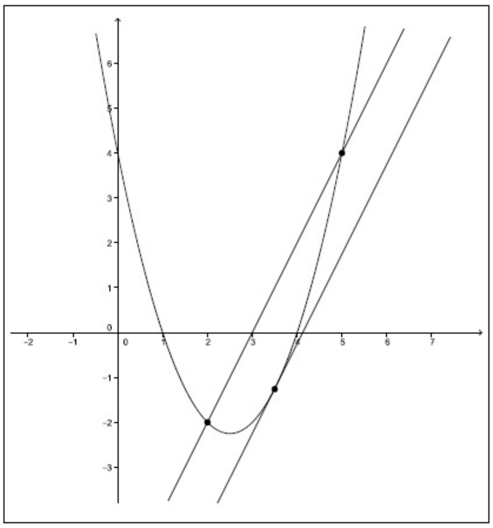

Figura 11: Exemplo do Teorema do Valor Médio

tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $3,5$ é paralela à reta secante pelos pontos $(2, f(2))$ e $(5, f(5))$, conforme figura 11.

Definição 2.48. Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I. Se o gráfico de f se situa sempre acima (respectivamente, abaixo) das retas tangentes no intervalo I, dizemos que o gráfico de f tem concavidade para cima (respectivamente, para baixo) em I.

Proposição 2.49. Seja f uma função duas vezes derivável no intervalo aberto I. Se $f''(x) > 0$ (respectivamente, $f''(x) < 0$) para todo $x \in I$ então o gráfico de f tem concavidade para cima (respectivamente, para baixo) em I.

Demonstração. A demonstração deste resultado pode ser obtida em [5], pág. 110. $\square$

3 MÉTODOS ITERATIVOS: BISSECÇÃO, FALSA POSIÇÃO E PONTO FIXO

Neste capítulo, apresentaremos alguns métodos numéricos como alternativa na resolução de equações. Esses métodos são aproximativos, isto é, são feitas algumas repetições de cálculos, chamadas iterações, que vão fornecendo soluções tão próximas da solução exata quanto queiramos. Como mencionamos no capítulo 1, numa situação prática, chegar bem próximo da solução exata pode ser tão bom quanto a raiz exata. Por exemplo, suponhamos que uma máquina industrial opere com um braço mecânico que possua uma agulha cuja ponta tenha um diâmetro de um centímetro. Assim, ao mirar o braço numa peça, dependendo da situação, não haverá problema se o centro da ponta da agulha acertar um milímetro fora do ponto certo.

Os métodos iterativos são aplicados em resoluções de equações do tipo $f(x) = 0$ em que f é uma função contínua. Os resultados que abordamos no capítulo anterior servirão de base para os conceitos que passaremos a apresentar. Em cada seção, vamos mostrar um método, sempre com justificativas e exemplos. A escrita deste capítulo tem referência em [7].

3.1 MÉTODO DA BISSECÇÃO

O Método da Bissecção é um método numérico simples para obtenção de raízes de uma função real. Para iniciar nosso estudo, vamos considerar uma brincadeira entre duas pessoas, onde uma delas tem que acertar qual número entre 0 e 100 a outra pessoa escolheu. Numa primeira escolha, a pessoa escolhe 50, média aritmética entre 0 e 100. Se ela não acerta, então pergunta à outra se o número é menor ou maior que 50. Se a outra pessoa diz que é maior, então o novo palpite é 75, média aritmética entre 50 e 100. É claro que esta brincadeira terá um fim. A ideia na escolha dos números é ir reduzindo os intervalos onde está o número procurado. O Método da Bissecção é parecido com a brincadeira acima. Determinamos um intervalo inicial que contenha uma raiz. Em seguida, vamos reduzindo a amplitude do intervalo usando médias aritméticas conforme veremos a seguir.

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. O Teorema do Valor Intermediário garante que existe ao menos um $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = 0$. O objetivo deste método é reduzir a amplitude do intervalo que contém uma raiz de $f(x)$. Ele é um método iterativo, isto é, consiste de uma sequência de instruções executadas passo a passo. Cada execução é chamada iteração. Cada iteração usa resultados das iterações anteriores. Os métodos iterativos são aproximativos. Então o que obtemos são valores próximos da solução exata. Assim, deve-se estabelecer, inicialmente, uma precisão ou tolerância, para se ter um critério para encerrar as iterações.

Existem dois critérios de parada para métodos iterativos. Se a raiz exata de $f(x)$ em (a, b) é c então $\overline{x}$ é raiz aproximada com precisão ϵ se:

i) $|\overline{x} - c| < \epsilon$;

ii) $|f(\overline{x})| < \epsilon$.

Mesmo sem conhecer a raiz exata c, é possível estabelecer o critério i). De fato, pois se $\overline{x}$ e c pertencem a (a, b) então $|\overline{x} - c| < b - a$. Assim, basta reduzir o intervalo $[a, b]$ até que se consiga $b - a < \epsilon$.

Vamos descrever o Método da Bissecção. Para simplificar, vamos supor que haja apenas uma raiz c em (a, b).

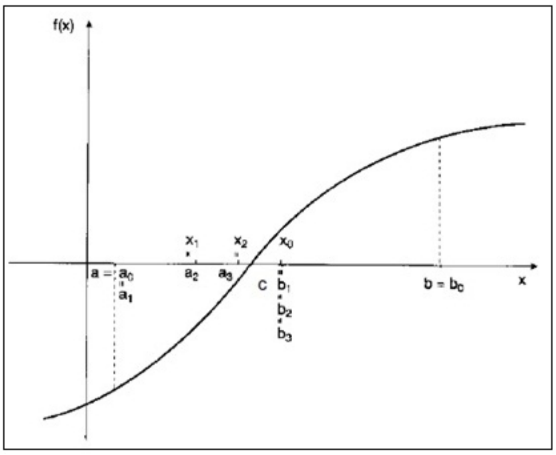

Figura 12: Sequência de aproximações no Método da Bissecção

Fazemos as iterações tomando, inicialmente, $a = a_0$, $b = b_0$, $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Se $f(a_0) < 0$,

$f(b_0) > 0$ e $f(x_0) > 0$ então $c \in (a_0, x_0)$, pois $f(a_0) \cdot f(x_0) < 0$. Escolhemos então $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_0$. Em seguida, $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Se $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$ e $f(x_1) < 0$ então $c \in (x_1, b_1)$. Escolhe-se agora $a_2 = x_1$ e $b_2 = b_1$. O processo continua até que o critério de parada escolhido seja satisfeito.

O Método da Bissecção gera as sequências a_n , b_n e, por construção, $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Mas essas sequências sempre vão convergir? O método funciona em qualquer caso? O teorema seguinte responderá a essas perguntas.

Teorema 3.1. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a)f(b) < 0$, então o Método da Bissecção gera uma sequência c_n que converge para $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demonstração. Sejam as sequências a_n, não decrescente e limitada superiormente por b_0, e b_n, não crescente e limitada inferiormente por a_0. Então existem r e s tais que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = r$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = s$. Como o comprimento de cada intervalo é sempre metade do intervalo anterior, temos que

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Então $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_0 - a_0}{2^n} = 0$. Como a_n e b_n são convergentes segue que

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Logo, $r = s$. Seja $r = s = c$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{c + c}{2} = c,$$

provando a primeira parte do teorema.

Em cada iteração n, tem-se que $f(a_n)f(b_n) < 0$. Como f é contínua, vem

$$0 \geq \lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

De $0 \geq f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) \cdot f\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$, vem

$$0 \geq f(r)f(s) = f(c)f(c) = [f(c)]^2 \geq 0,$$

que acarreta $f(c) = 0$, completando a demonstração. □

Como ilustração do Método da Bissecção, apresentamos o exemplo abaixo.

Exemplo 3.2. Seja a função $f(x) = x\log(x) - 1$ contínua se $x > 0$.
Temos $f(1) = -1$, $f(2) = -0,3979$, $f(3) = 0,4314$. Como $f(2) < 0$ e $f(3) > 0$, existe uma raiz c de $f(x)$ no intervalo $(2,3)$. Iniciamos o método da bissecção fazendo

$$a_0 = 2,\ b_0 = 3 \text{ e } x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{2+3}{2} = 2,5.$$

Temos $f(2) = -0,3979 < 0$, $f(2,5) = -5,15 \cdot 10^{-3} < 0$ e $f(3) = 0,4314 > 0$. Logo, $c \in (2.5, 3)$. Tomamos

$$a_1 = 2,5,\ b_1 = 3 \text{ e } x_1 = \frac{2,5+3}{2} = 2,75.$$

Temos $f(2,5) < 0$, $f(2,75) = 0,2082 > 0$ e $f(3) > 0$. Daí, $c \in (2.5, 2.75)$. O processo segue conforme tabela abaixo:

$x_2 = 2,625$	$x_3 = 2,5625$	$x_4 = 2,5312$	$x_5 = 2,5156$	$x_6 = 2,5078$
$f(x_2) = 0,1002$	$f(x_3) = 0,0472$	$f(x_4) = 0,0209$	$f(x_5) = 7,85 \cdot 10^{-3}$	$f(x_6) = 1,35 \cdot 10^{-3}$

Considerando o intervalo $(2.5, 2.5078)$, temos as precisões

$$\epsilon_1 = |2,5078 - 2,5| = 0,078 < 0,1 \text{ e } \epsilon_2 = |f(x_6)| = 1,35 \cdot 10^{-3} < 0,01.$$

3.2 MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

O Método da Falsa Posição é outro método iterativo usado para obtenção de soluções de equações. No entanto, suas origens remontam ao Egito e à China antiga. Os procedimentos que serão aqui apresentados foram inspirados nas técnicas antigas para resolução de problemas.

Analisando historicamente o método da falsa posição, podemos citar o papiro Rhind, um documento com registros deixados por escribas do Egito antigo. Nele há 85 problemas, dentre os quais destacamos o de número 26:
Uma quantidade e o seu quarto adicionado tornam-se 15. Qual é esta quantidade?

A técnica usada pelo escriba consistia em escolher um valor inicial, que não precisava ser o verdadeiro. Em seguida, eram feitas devidas correções na escolha inicial com o objetivo de se chegar à solução do problema. O enunciado do problema menciona a fração "um quarto". No entanto, para evitar a fração, o escriba escolhia inicialmente o número 4 e raciocinava da seguinte forma: 4 mais um quarto de 4 é igual a 5. Como o resultado deve ser 15, o triplo de 5, a escolha inicial era multiplicada por 3, ou seja, $4 \cdot 3 = 12$. O número 12 é a solução do problema.

Observemos que o problema é traduzido pela equação linear

$$x + \frac{x}{4} = 15.$$

Assim, o uso de proporções entre os resultados das somas e os valores das incógnitas nos leva à solução correta. De fato, pois dado um x_0 tal que $x_0 + \frac{x_0}{4} = c$, onde $c \cdot \lambda = 15$. Assim, multiplicando ambos os membros da equação por λ, obtemos

$$x_0 \cdot \lambda + \frac{x_0 \cdot \lambda}{4} = c \cdot \lambda = 15.$$

Então, a solução verdadeira é $x_1 = \lambda \cdot x_0$.

A ideia da falsa posição, usada por civilizações antigas, foi sendo aprimorada para o problema de obtenção das raízes de equações. Vamos agora apresentar o método.

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Suponhamos, por simplicidade, que haja apenas uma raiz c da equação $f(x) = 0$ em (a, b). No método da bissecção, tomamos o valor inicial x_0 tal que $x_0 = \frac{a+b}{2}$. No entanto, se $|f(a)| < |f(b)|$, é provável que a raiz esteja mais próxima de a do que de b. Isto pode ocorrer se, no intervalo $[a, b]$, o gráfico de $f(x)$ for parecido com o de uma função linear.

Desta forma, o método da falsa posição toma como valor inicial x_0, média ponderada entre a e b com pesos, respectivamente, iguais a $|f(b)|$ e $|f(a)|$. Assim

$$x_0 = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(a)| + |f(b)|}.$$

Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, a última igualdade fica

$$x_0 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Mesmo se $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, o resultado será o mesmo.

Graficamente, o valor x_0 é a interseção da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ com o eixo x.

Basta considerarmos que a equação da reta é $f(x) = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.
Fazendo $x = x_0$ e isolando x_0 vem $x_0 = a + \dfrac{-f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$, pois $f(x_0) = 0$. Daí então $x_0 = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$.

Fazemos as iterações de modo semelhante ao método da bissecção. Escolhemos $a = a_0$, $b = b_0$ e obtemos x_0. Se $f(a_0) < 0$, $f(b_0) > 0$ e $f(x_0) > 0$ então $c \in (a_0, x_0)$. Escolhemos

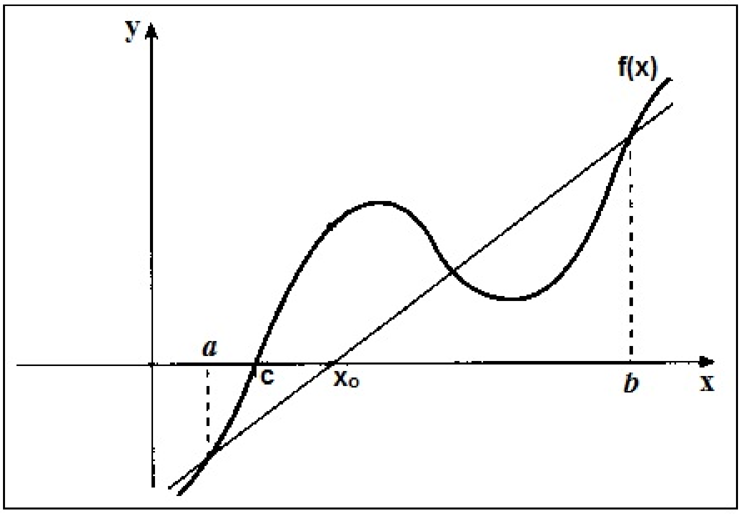

Figura 13: Método da Falsa Posição

então $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_0$. Calculamos x_1 e seguimos com o processo.

Acerca da convergência do método da falsa posição, apresentamos o resultado seguinte.

Teorema 3.3. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a)f(b) < 0$, então o Método da Falsa Posição gera uma sequência convergente.

Demonstração. Sejam as sequências a_n e b_n como no Teorema 3.1. Então existem r e s tais que $\lim a_n = r$ e $\lim b_n = s$. Os comprimentos dos intervalos (a_n, b_n) podem se tornar tão pequenos quanto queiramos, bastando tomar n suficientemente grande. Assim, $\lim(b_n - a_n) = 0$. Como a_n e b_n são convergentes, de forma análoga ao Teorema 3.1, $\lim b_n = \lim a_n = c$. Por construção, seja $c_n = \dfrac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$. Logo

$$\lim c_n = \lim \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} = \lim \frac{c f(b_n) - c f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} = c.$$

Portanto c_n é convergente. □

No exemplo seguinte, vamos buscar uma raiz para a mesma equação do exemplo 3.2, resolvido pelo método da bissecção.

Exemplo 3.4. Seja a função $f(x) = x\log(x) - 1$ contínua se $x > 0$. Já sabemos que existe uma raiz c de $f(x)$ no intervalo $(2,3)$ e que $f(2) = -0,3979$ e $f(3) = 0,4314$. Iniciamos o método da falsa posição fazendo

$$a_0 = 2,\ b_0 = 3 \text{ e } x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = 2,4798.$$

Como $f(x_0) = -0,0219 < 0$ e $f(b_0) = 0,4314 > 0$, tomamos $a_1 = x_0$, $b_1 = b_0$ e obtemos $x_1 = 2,5049$ e, por conseguinte, $f(x_1) = -0,0011$. Observemos que, mais rapidamente, chegamos às precisões

$$\epsilon_1 = |2,5049 - 2,5| = 0,049 < 0,1 \text{ ou } \epsilon_2 = |f(x_1)| = 0,0011 < 0,01.$$

Então, neste exemplo, a convergência foi mais rápida do que no exemplo 3.2.

Na maioria dos casos, a convergência com o método da falsa posição é mais rápida do que com a bissecção.

Encerramos esta seção, considerando alguns casos especiais.

Se a derivada segunda de $f(x)$ existe em $[a, b]$ e não muda de sinal neste intervalo então uma das extremidades $(a, f(a))$ ou $(b, f(b))$ fica sempre fixa. A figura seguinte mostra os quatro casos.

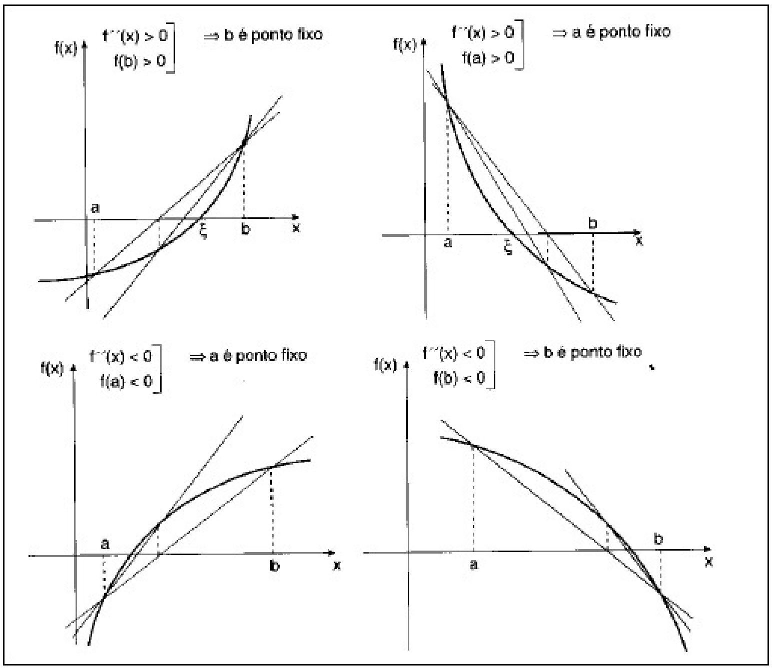

Figura 14: Método da Falsa Posição

3.3 MÉTODO DO PONTO FIXO

O Método do Ponto Fixo é um método iterativo que envolve conceitos matemáticos bem interessantes. Na seção 1.5 deste trabalho, usamos o método do ponto fixo para resolver uma equação. Nesta seção, começaremos apresentando o teorema do ponto fixo e, em seguida, o método iterativo.

3.3.1 Teorema do Ponto Fixo

Definição 3.5. Seja $f : X \to X$ uma função. Um ponto $a \in X$ é chamado ponto fixo de f se $f(a) = a$. Assim, uma função f admite ponto fixo se, e somente se, a equação $f(x) = x$ admite solução.

Teorema 3.6. (Teorema do Ponto Fixo) Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Então f admite ponto fixo.

Demonstração. Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ nada temos a provar. Suponhamos então $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$, o que acarreta $f(a) > a$ e $f(b) < b$, pois como $f(a) \in [a, b]$ e $f(b) \in [a, b]$ não pode ocorrer $f(a) < a$ nem $f(b) > b$. Definimos agora $g : [a, b] \to [a, b]$, tal que $g(x) = f(x) - x$. A função g é contínua, pois é a diferença entre as funções contínuas f e x. Além do mais, $g(a) = f(a) - a > 0$, pois $f(a) > a$ e $g(b) = f(b) - b < 0$, pois $f(b) < b$. Assim, $g(b) < 0 < g(a)$, ou seja, zero é um número entre $g(a)$ e $g(b)$. O teorema do valor intermediário garante que existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$, donde $f(c) - c = 0$, isto é, $f(c) = c$. Logo c é um ponto fixo de f. $\square$

O teorema acima, embora muito importante, não garante que o ponto fixo da função contínua é único. Com o teorema que apresentaremos em seguida, teremos a unicidade. Mas antes, precisamos definir *função de contração.*

Definição 3.7. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se uma contração quando existe uma constante $k \in [0, 1)$ tal que $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$ para quaisquer $x, y \in X$.

Teorema 3.8. (Ponto Fixo das contrações) Se $X \subset \mathbb{R}$ é fechado então toda contração $f : X \to X$ possui um único ponto fixo. Mais precisamente, fixando qualquer $x_0 \in X$, a sequência das aproximações sucessivas

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots, x_{n+1} = f(x_n), \cdots$$

converge para o único ponto $a \in X$ tal que $f(a) = a$.

Demonstração. Seja f uma função de contração. Então

$$|f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}|, \text{ isto é, } |x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|,$$

onde $0 \leq k < 1$. Logo, pelo Teste de convergência de d'Alembert, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$ converge. A soma dos n primeiros termos desta série é

$$(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = s_n.$$

Seja $\lim s_n = s$. Então $\lim x_n = \lim(s_n + x_o) = s + x_0 = a$, onde $a \in X$, pois sendo X fechado, a sequência x_n de pontos de X converge para um ponto de X. Como f é contínua, ao tomarmos o limite para $n \to \infty$ na igualdade $x_{n+1} = f(x_n)$, obtemos $a = f(a)$. Com isto, demonstramos que a sequência das aproximações sucessivas

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots, x_{n+1} = f(x_n), \cdots$$

converge para o ponto $a \in X$ tal que $f(a) = a$. Para mostrarmos a unicidade de $a = f(a)$, suponhamos que exista $b \in X$ tal que $f(b) = b$. Então

$$|b - a| = |f(b) - f(a)| \leq k|b - a|.$$

Logo

$$|b - a| - k|b - a| \leq 0, \text{ isto é,} (1 - k)|b - a| \leq 0.$$

Daí, $b = a$, pois sendo $0 \leq k < 1$, tem-se $1 - k > 0$. Portanto, $a \in X$ é o único ponto fixo de f em X. □

3.3.2 O Método do Ponto Fixo

Passamos agora à apresentação do método iterativo. Para tanto, seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$, intervalo que contém uma raiz da equação $f(x) = 0$.

O método do ponto fixo transforma esta equação em uma equivalente $x = \varphi(x)$ e, a partir de uma aproximação inicial x_0, gera a sequência de aproximações x_n usando a relação $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. A função $\varphi(x)$ é tal que $f(c) = 0$ se, e somente se, $\varphi(c) = c$. Desta forma, o problema de procurar uma raiz de $f(x) = 0$ equivale a encontrar um ponto fixo de $\varphi(x)$. Esta função $\varphi(x)$ é chamada *função de iteração* para a equação $f(x) = 0$.

Dada uma equação $f(x) = 0$, existem várias funções de iteração $\varphi(x)$. Vejamos o exemplo.

Exemplo 3.9. Dada a equação $x\log(x) - 1 = 0$ temos

$$x\log(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\log(x)}$$

que nos dá a função de iteração $\varphi_1(x) = \dfrac{1}{\log(x)}$. Por outro lado,

$$x\log(x) = 1 \Leftrightarrow \log(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt[x]{10}$$

que nos dá $\varphi_2(x) = \sqrt[x]{10}$.

Graficamente, uma raiz da equação $x = \varphi(x)$ é a abscissa do ponto de interseção da reta $y = x$ com a curva $y = \varphi(x)$. Nos gráficos da figura seguinte, mostramos alguns casos, onde ξ é a raiz exata.

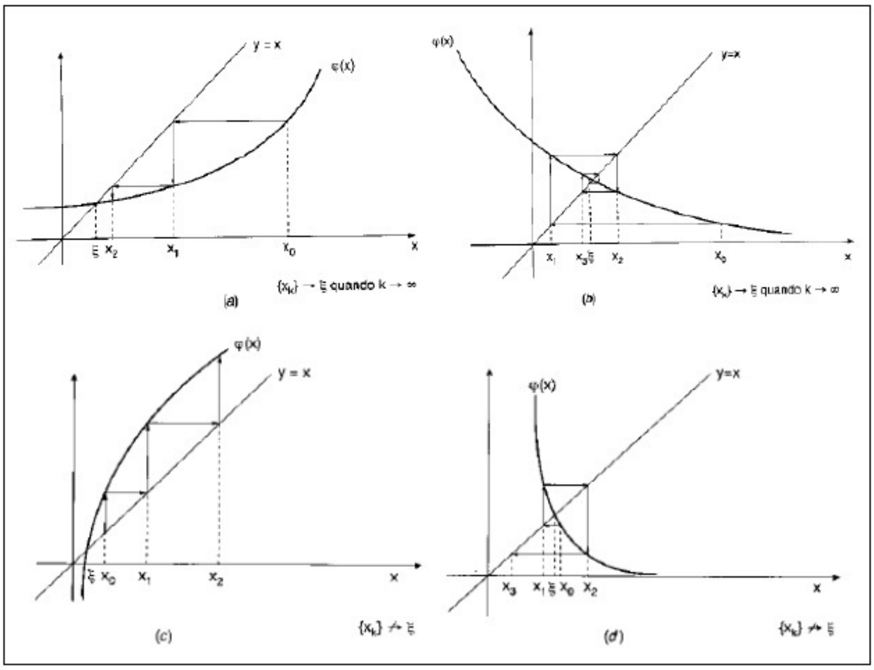

Figura 15: Método do Ponto Fixo

Temos convergência apenas nos gráficos (a) e (b).

Exemplo 3.10. Vamos buscar raízes para a equação $x\log(x) - 1 = 0$ usando as funções de iteração obtidas no exemplo 3.9. Em $f(x) = x\log(x) - 1$ tem-se $f(2) < 0$ e $f(3) > 0$. Assim, iniciaremos o processo iterativo com $x_0 = 2,5$ (média aritmética entre 2 e 3). Usaremos a precisão $\epsilon = |x_{n+1} - x_n| < 0,001$ como critério de parada.

Primeiro, consideremos $\varphi_1(x) = \frac{1}{\log(x)}$. As iterações ficam assim:

$x_1 = \varphi_1(x_0) = 2,5129, \epsilon = 0,0129$

$x_2 = \varphi_1(x_1) = 2,4989, \epsilon = 0,0141$

$x_3 = \varphi_1(x_2) = 2,5142, \epsilon = 0,0153$

$x_4 = \varphi_1(x_3) = 2,4975, \epsilon = 0,0167$

$x_5 = \varphi_1(x_4) = 2,5157, \epsilon = 0,0182$
Percebemos que, em cada iteração, $|x_{n+1} - x_n|$ vai ficando cada vez maior, sugerindo que a sequência de aproximações não converge.

Consideremos agora $\varphi_2(x) = \sqrt[x]{10}$. As iterações ficam assim:
$x_1 = \varphi_1(x_0) = 2,5119, \epsilon = 0,0119$
$x_2 = \varphi_1(x_1) = 2,5010, \epsilon = 0,0109$
$x_3 = \varphi_1(x_2) = 2,5110, \epsilon = 0,0100$
$x_4 = \varphi_1(x_3) = 2,5018, \epsilon = 0,0092$
Neste caso, $|x_{n+1} - x_n|$ vai diminuindo e, após a quarta iteração, já obtemos
$\epsilon = 0,0092 < 0,01$.

Pelos exemplos acima, constatamos que, diferente dos métodos da bissecção e da falsa posição, que sempre geram sequências convergentes (desde que certas condições sejam atendidas), o método do ponto fixo pode gerar sequências convergentes ou divergentes. A convergência deste método é tratada no teorema seguinte.

Teorema 3.11. Seja c uma raiz da equação $f(x) = 0$, num intervalo I centrado em c e $\varphi(x)$ uma função de iteração para a equação $f(x) = 0$. Se

i) $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I;

ii) $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in I$ e

iii) $x_o \in I$

então a sequência (x_n) gerada pelo processo iterativo $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge para c.

Demonstração. 1ª parte: mostrar que se $x_0 \in I$ então $x_n \in I, \forall n$;
2ª parte: mostrar que $\lim x_n = c$.
Prova da 1ª parte: Seja c uma raiz exata de $f(x) = 0$. Então $f(c) = 0$ se, e somente se, $c = \varphi(c)$. Para todo n, tem-se $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ou ainda

$$x_{n+1} - c = \varphi(x_n) - \varphi(c) \tag{1}$$

Sendo $\varphi(x)$ contínua e derivável em I, o Teorema do Valor Médio afirma que se $x_n \in I$ então existe c_n entre x_n e c tal que $\varphi'(c_n)(x_n - c) = \varphi(x_n) - \varphi(c)$.

Logo, temos

$$x_{n+1} - c = \varphi(x_n) - \varphi(c) = \varphi'(c_n)(x_n - c), \forall n.$$

Assim, $x_{n+1} - c = \varphi'(c_n)(x_n - c)$. Então,

$$\forall n, |x_{n+1} - c| = |\varphi'(c_n)||(x_n - c)| < |(x_n - c)|,$$

pois $|\varphi'(c_n)| < 1$ por hipótese. Logo a distância entre x_{n+1} e c é estritamente menor que a distância entre x_n e c e, como I está centrado em c, segue que se $x_n \in I$ então $x_{n+1} \in I$.

Por hipótese $x_0 \in I$. Pelo exposto acima, podemos concluir que

$$x_1 \in I, x_2 \in I, \cdots, x_n \in I, \forall n.$$

Prova da 2ª parte: De (1), segue que

$$|x_1 - c| = |\varphi(x_0) - \varphi(c)| = |\varphi'(c_0)||(x_0 - c)| \leq M|(x_0 - c)|,$$

pois $|\varphi'(c_0)| \leq M$ e $x_0 < c_0 < c$. E

$$|x_2 - c| = |\varphi(x_1) - \varphi(c)| = |\varphi'(c_1)||(x_1 - c)| \leq M|(x_1 - c)| \leq M^2|(x_0 - c)|,$$

pois $|\varphi'(c_1)| \leq M$ e $x_1 < c_1 < c$.
Prosseguindo o raciocínio, chegamos em:

$$|x_n - c| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(c)| = |\varphi'(c_{n-1})||(x_{n-1} - c)| \leq M|(x_{n-1} - c)| \leq M^n|(x_0 - c)|,$$

pois $|\varphi'(c_n)| \leq M$ e $x_n < c_n < c$.
Logo, $0 \leq \lim |x_n - c| \leq \lim M^n|(x_0 - c)| = 0$, pois $0 < M < 1$.
Portanto, $\lim |x_n - c| = 0$ e, por consequência, $\lim x_n = c$. $\square$

Exemplo 3.12. Podemos agora analisar as funções de iteração do exemplo 3.10 com o uso do Teorema 3.11.

De $\varphi_1(x) = \dfrac{1}{\log(x)}$, vem $\varphi_1'(x) = -\dfrac{1}{x(\log(x))^2}$. As funções $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas para $x > 0$ e $x \neq 1$. Logo, $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas no intervalo $I = (2, 3)$, onde já constatamos que existe uma raiz de $f(x) = 0$, pois $f(2) \cdot f(3) < 0$.

Por outro lado,

$$|\varphi_1'(x)| < 1 \Leftrightarrow |-\frac{1}{x(\log(x))^2}| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{1}{x(\log(x))^2} < 1.$$

Como $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas, com $x > 0$ e $x \neq 1$, segue que x e $(\log(x))^2$ são positivos.

Logo, tem-se

$$0 < \frac{1}{x(\log(x))^2} < 1 \Leftrightarrow x(\log(x))^2 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}\log(x) > 1.$$

Mas, como $\sqrt{x}$ e $\log(x)$ são crescentes, segue que

$$x \in (2,3) \Leftrightarrow \sqrt{2}\log(2) < \sqrt{x}\log(x) < \sqrt{3}\log(3) \Leftrightarrow 0,4 < \sqrt{x}\log(x) < 0,8.$$

Logo não ocorre $\sqrt{x}\log(x) > 1$ em $I = (2,3)$, ou seja, $|\varphi_1'(x)| \geq 1$ em $I = (2,3)$. Assim, a condição ii) da hipótese do Teorema 3.11 não foi satisfeita, não sendo possível garantir a convergência da sequência gerada por $\varphi_1(x)$ a partir de $x_o = 2,5$.

Analisando $\varphi_2(x) = \sqrt[x]{10}$, temos $\varphi_2'(x) = -\dfrac{\sqrt[x]{10}}{x^2}$. E $\varphi_2(x)$ e $\varphi_2'(x)$ são contínuas para $x \neq 0$. Olhando para $\varphi_2'(x)$, vem

$$|-\frac{\sqrt[x]{10}}{x^2}| < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{\sqrt[x]{10}}{x^2} < 1,$$

pois $\sqrt[x]{10} = 10^{1/x}$ e x^2 são estritamente positivos se $x \neq 0$. Daí, segue: $10^{1/x} < x^2$. Sendo $10^{1/x}$ decrescente e x^2 crescente em $I = (2,3)$, temos que, em I,

$$10^{1/3} < 10^{1/x} < 10^{1/2} \text{ ou ainda } 2,15 < 10^{1/x} < 3,16 \text{ e } 4 < x^2 < 9.$$

Concluímos que $10^{1/x} < x^2, \forall x \in I$ ou, equivalentemente, $|\varphi_2'(x)| < 1$ em I.

Por fim, $x_o = 2,5 \in I$. Logo, as três condições da hipótese do Teorema 3.11 foram satisfeitas e, portanto, a sequência gerada por $\varphi_2(x)$ a partir de $x_o = 2,5$ converge.

No próximo capítulo, vamos propor uma atividade que consiste na resolução de uma equação com o uso dos 3 métodos.

4 ATIVIDADE PROPOSTA: RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES COM O USO DE MÉTODOS ITERATIVOS

Neste capítulo, vamos colocar em prática o que foi desenvolvido no capítulo 3. Desenvolveremos uma atividade sobre busca de raízes de equações. Focaremos uma atividade que, julgamos, possa ser aplicada numa turma do ensino médio cujos alunos já tenham conhecimento prévio sobre funções elementares tais como: afim, quadrática, exponencial, logarítmica e as trigonométricas: seno, cosseno e tangente. Vamos lançar mão de alguns recursos computacionais: calculadora, planilha eletrônica e o software Geogebra (ambiente de geometria dinâmica).

Nesta atividade, apresentamos um roteiro de como uma equação pode ser resolvida a partir dos métodos numéricos estudados neste trabalho. O software Geogebra será usado para plotar os gráficos e, com isso, facilitar a localização de intervalos que contenham raízes das equações. Com a planilha eletrônica, podemos realizar algumas operações de maneira mais rápida e eficiente.

Apresentaremos, para conhecimento do professor que for aplicar a atividade, justificativas formais para os resultados obtidos, baseadas nos teoremas vistos anteriormente. Mas também faremos uso dos recursos computacionais com o intuito de dar uma explicação mais próxima do nível dos alunos.

4.1 ATIVIDADE: RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $x^2 = 2^x$

A equação $x^2 = 2^x$ equivale à equação $x^2 - 2^x = 0$. Assim, definiremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 - 2^x$ e passaremos a buscar as raízes de $f(x)$. Notemos, inicialmente, que f é contínua em todo o seu domínio. Assim, o teorema do valor intermediário poderá ser aplicado. Não é tão difícil observar que 2 e 4 são raízes de $f(x) = 0$, mas

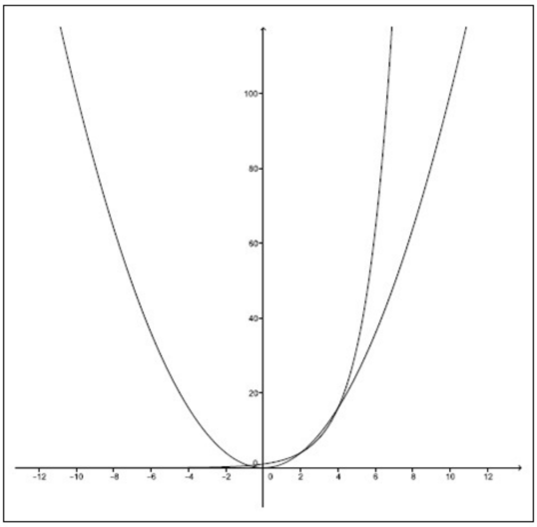

Figura 16: Gráficos de $y = x^2$ e $y = 2^x$

será que estas são as únicas raízes? Para responder a esta pergunta, usamos o Geogebra chegando aos gráficos de $y = x^2$ e $y = 2^x$.

Na figura, estão representados os gráficos das funções $y = x^2$ e $y = 2^x$. As interseções dos gráficos correspondem às raízes de $f(x)$. Observamos que há uma raiz entre - 2 e 0. Como $f(-2) = 3,75 > 0$ e $f(0) = -1 < 0$, o teorema do valor intermediário confirma a existência desta raiz. Vamos procurar essa raiz negativa, usando os métodos da bissecção, falsa posição e ponto fixo. Adotaremos, como critério de parada, $|x_n - x_{n-1}| < 0,001$ ou $|f(x_n)| < 0,001$.

4.1.1 Resolução com o Método da Bissecção

Se f contínua em $[a, b]$ com $f(a)f(b) < 0$ então há uma raiz no intervalo (a, b). O algoritmo que utilizaremos é o seguinte:

i) Escolher $a_0 = a$ e $b_0 = b$ e precisões ϵ_1 e ϵ_2;

ii) Calcular $x_0 = (a_0 + b_0)/2$ e $f(x_0)$;

iii) Se $f(x_0)f(a_0) > 0$, ou seja, $f(x_0)$ e $f(a_0)$ possuem mesmo sinal, escolha $a_1 = x_0$ e $b_1 = b_0$. Caso contrário, $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_0$;

iv) Calcular x_1 e $f(x_1)$.

O processo segue até que se obtenha $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon_1$ ou $|f(x_n)| < \epsilon_2$. Deve-se lembrar que $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Nesta atividade, já constatamos que o intervalo $[a, b] = [-2, 0]$ contém uma raiz. Assim, tomamos $a = a_0 = -2$, $b = b_0 = 0$ e $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = -1$. Temos $f(a_0) = 3,75 > 0$, $f(b_0) = -1 < 0$ e $f(x_0) = 0,5 > 0$. Como $f(a_0)f(x_0) > 0$, tomamos $a_1 = x_0$, $b_1 = 0$ e $x_1 = \frac{a_1+b1}{2} = -0,5$. Daí, $f(x_1) = -0,46 < 0$.

Para seguir com as iterações, usaremos a planilha eletrônica, criando a seguinte tabela:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
2	0	– 2	0	=MÉDIA(B2;C2)	=B2^2-2^B2	=C2^2-2^C2	=D2^2-2^D2	
3	1	=SE(E2*G2 > 0; D2; B2)	=SE(E2*G2 > 0; C2; D2)					=ABS(G3-G2)

Figura 17: Tabela inicial no Método da Bissecção

Na tabela acima, já informamos os valores iniciais $a_0 = -2$ e $b_0 = 0$. Indicamos, em algumas células, as fórmulas que iremos usar. Vale ressaltar que:

a) *MEDIA(B2;C2)* calcula a média aritmética entre os valores lançados em $B2$ e $C2$;

b) *=SE(E2∗G2 > 0; D2; B2)* é uma fórmula condicional que possui a seguinte estrutura: *=SE(teste lógico; valor se verdadeiro; valor se falso)*. No caso, se $E2 \cdot G2 > 0$ for verdadeiro (isto é, $f(x_0)f(a_0) > 0$), então a célula $B3$ receberá o valor da célula $D2$ (isto é, $a_1 = x_0$). Mas se $E2 \cdot G2 > 0$ for falso (isto é, $f(x_0)f(a_0) < 0$), então a célula $B3$ receberá o valor da célula $B2$ (isto é, $a_1 = a_0$);

c) *=ABS(G3−G2)* calcula o módulo da diferença entre $G3$ e $G2$ (isto é, entre x_n e x_{n-1}).

Após serem lançados os valores iniciais, a linha $n = 0$ fica assim:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
2	0	-2	0	-1	3,75	-1	0,5	

Figura 18: Linha $n = 0$

Para dar o próximo passo, inserimos as fórmulas em $B3$ e em $C3$, conforme mencionado acima e obtemos a planilha da figura 19.

Para obter x_n, $f(a_n)$, $f(b_n)$ e $f(x_n)$, selecionamos as células $D2$ até $G2$, clicamos no canto inferior direito de $G2$ e arrastamos uma linha para baixo. Automaticamente, as fórmulas das células se converterão para as células $D3$ até $G3$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
2	0	-2	0	-1	3,75	-1	0,5	
3	1	-1	0					

Figura 19: Linha $n = 1$

Logo depois, já poderemos inserir a fórmula da célula $H3$ para obter $|x_1 - x_0|$. Assim, completa-se a linha $n = 1$ conforme a figura 20.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
2	0	-2	0	-1	3,75	-1	0,5	
3	1	-1	0	-0,5	0,5	-1	-0,4571	0,95711

Figura 20: Linha $n = 1$ completa

Para serem exibidos os resultados a partir da linha $n = 4$, selecionamos as células $B3$ até $H3$, clicamos no canto inferior direito de $H3$ e arrastamos para baixo quantas linhas quisermos. Aqui, mostraremos os resultados até a linha $n = 11$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
2	0	-2	0	-1	3,75	-1	0,5	
3	1	-1	0	-0,5	0,5	-1	-0,4571	0,95711
4	2	-1	-0,5	-0,75	0,5	-0,4571	-0,0321	0,425
5	3	-1	-0,75	-0,875	0,5	-0,0321	0,22037	0,25247
6	4	-0,875	-0,75	-0,8125	0,22037	-0,0321	0,09076	0,12961
7	5	-0,8125	-0,75	-0,7813	0,09076	-0,0321	0,02849	0,06227
8	6	-0,7813	-0,75	-0,7656	0,02849	-0,0321	-0,002	0,03051
9	7	-0,7813	-0,7656	-0,7734	0,02849	-0,002	0,01318	0,0152
10	8	-0,7734	-0,7656	-0,7695	0,01318	-0,002	0,00557	0,00761
11	9	-0,7695	-0,7656	-0,7676	0,00557	-0,002	0,00177	0,0038
12	10	-0,7676	-0,7656	-0,7666	0,00177	-0,002	-0,0001	0,0019
13	11	-0,7676	-0,7666	**-0,7671**	0,00177	-0,0001	0,00083	0,00095

Figura 21: Tabela final no Método da Bissecção

Como $|x_{11} - x_{10}| = 0,00095 < 0,001$ e $|f(x_{11})| = 0,00083 < 0,001$, podemos encerrar as aproximações. Portanto $c = -0,7671$ é o valor aproximado obtido para a raiz negativa.

Numa atividade em sala, é interessante o professor ir comentando os resultados, a cada linha, com os alunos.

Na próxima subseção, usaremos o método da falsa posição para obter a raiz negativa.

4.1.2 Resolução com o Método da Falsa Posição

No método da falsa posição, podemos chegar mais rápido num valor de x que atenda à precisão exigida. No entanto, as operações para a obtenção dos $x_{i's}$ requerem um esforço computacional maior. Sendo assim, continuaremos usando os recursos da planilha eletrônica.

Tendo o intervalo inicial (a_0, b_0), para a aproximação inicial, usaremos x_0 tal que $x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$. Neste caso, o algoritmo para geração das iterações será:

i) Escolher $a_0 = a$ e $b_0 = b$ e precisões ϵ_1 e ϵ_2;

ii) Calcular $x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$ e $f(x_0)$;

iii) Se $f(x_0)f(a_0) > 0$, ou seja, $f(x_0)$ e $f(a_0)$ possuem mesmo sinal, escolha $a_1 = x_0$ e $b_1 = b_0$. Caso contrário, $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_0$;

iv) Calcular x_1 e $f(x_1)$.

O processo segue até que se obtenha $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon_1$ ou $|f(x_n)| < \epsilon_2$.

Na planilha eletrônica, a tabela será a seguinte:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
2	0	− 2	0	=(B2*E2-C2*D2)/(E2-D2)	=B2^2-2^B2	=C2^2-2^C2	=D2^2-2^D2	
3	1	=SE(E2*G2 > 0; D2; B2)	=SE(E2*G2 > 0; C2; D2)					=ABS(G3-G2)
4	2							

Figura 22: Tabela inicial no Método da Falsa Posição

Em relação ao método da bissecção, o que mudou foi apenas a fórmula para cálculo de x_n. Os procedimentos para geração dos valores na planilha são os mesmos que fizemos antes. Desta forma, exibiremos logo a tabela final na figura 23.

Na linha $n = 8$, temos $|x_8 - x_7| = 0,0004 < 0,001$ e $|f(x_7)| = 0,0002 < 0,001$. Portanto, $x_8 = -0,7665$ é uma boa aproximação para a raiz dentro da precisão desejada.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	a_n	b_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
2	0	-2	0	3,75	-1	-0,4211	-0,5696	
3	1	-2	-0,4211	3,75	-0,5696	-0,6293	-0,2505	0,31905
4	2	-2	-0,6293	3,75	-0,2505	-0,7151	-0,0978	0,15276
5	3	-2	-0,7151	3,75	-0,0978	-0,7478	-0,0364	0,0614
6	4	-2	-0,7478	3,75	-0,0364	-0,7598	-0,0133	0,02309
7	5	-2	-0,7598	3,75	-0,0133	-0,7642	-0,0048	0,00847
8	6	-2	-0,7642	3,75	-0,0048	-0,7658	-0,0017	0,00308
9	7	-2	-0,7658	3,75	-0,0017	-0,7663	-0,0006	0,00112
10	8	-2	-0,7663	3,75	-0,0006	**-0,7665**	-0,0002	0,0004

Figura 23: Tabela final no Método da Falsa Posição

Neste caso, o número de iterações foi menor e, com a ajuda da planilha eletrônica, otimizamos o tempo gasto para a resolução da equação. Passaremos agora ao método do ponto fixo.

4.1.3 Resolução com o Método do Ponto Fixo

O Método do Ponto Fixo apresenta uma vantagem computacional em relação aos métodos da bissecção e falsa posição: em cada iteração, usamos o resultado anterior sem que seja preciso fazer uma análise de sinais. Entretanto, este método possui restrições quanto à sua funcionalidade. Além de garantir a existência de uma raiz num determinado intervalo (o mesmo ocorre com os outros métodos), temos que estar atentos às condições exigidas acerca da função de iteração que escolhermos.

O algoritmo para as iterações no ponto fixo é descrito por:

i) Escolher aproximação inicial x_0 e precisões ϵ_1 e ϵ_2;

ii) Se $|f(x_0)| < \epsilon_1$, faça $\overline{x} = x_0$, ou seja, $\overline{x}$ é a raiz. Caso contrário, vá ao próximo passo;

iii) Calcular $x_1 = \varphi(x_0)$;

iv) Se $|f(x_1)| < \epsilon_1$ ou se $|x_1 - x_0| < \epsilon_2$, faça $\overline{x} = x_1$. Caso contrário, vá ao próximo passo;

v) $x_n = x_{n+1}$. Volte ao passo 3.

Assim, o processo iterativo que gera a sequência de aproximações é dado por $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

Passemos agora à obtenção de uma função de iteração para a equação $x^2 = 2^x$. Podemos isolar o x do 1º membro obtendo $x = \pm\sqrt{2^x}$. Como estamos procurando uma raiz negativa, usaremos $x = -\sqrt{2^x} = -2^{x/2}$. Logo, $\varphi_1(x) = -2^{x/2}$ é uma função de iteração.

Podemos escolher outra maneira para isolar x. De $x^2 = 2^x$, vem $\log_2 2^x = \log_2 x^2$ que equivale a $x = \log_2 x^2$. Assim, $\varphi_2(x) = \log_2 x^2$ é outra função de iteração.

Vamos resolver $x^2 - 2^x = 0$ usando as duas funções de iteração obtidas acima. Inicialmente, tomando $\varphi_1(x) = -2^{x/2}$. Para gerar as iterações na planilha eletrônica, inserimos o valor inicial x_0 e $|f(x_0)|$, conforme a tabela abaixo:

	A	B	C	D
1	n	$x_n = \varphi_1(x) = -$ 2^(x/2)	$\|f(x_n)\|$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
2	0	x_0	=ABS(B2^2-2^B2)	

Figura 24: Tabela inicial no Método do Ponto Fixo

Inserindo o valor inicial $x_0 = -1$ (média aritmética entre - 2 e 0), a linha $n = 0$ fica:

	A	B	C	D
1	n	$x_n = \varphi_1(x) = -$ 2^(x/2)	$\|f(x_n)\|$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
2	0	-1	0,5	

Figura 25: Linha $n = 0$

Para obtermos x_1, inserimos a fórmula de recorrência $\varphi_1(x) = -2^{x/2}$:

	A	B	C	D
1	n	$x_n = \varphi_1(x) = -$ 2^(x/2)	$\|f(x_n)\|$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
2	0	-1	0,5	
3	1	=-1*2^(B2/2)		

Figura 26: Inserindo fórmula de recorrência

Em seguida, para ser exibido o valor de $|f(x_1)|$, clicamos na célula $C2$, onde está $|f(x_2)|$, e arrastamos uma linha abaixo. Neste momento, já podemos obter $|x_1 - x_0|$.

	A	B	C	D
1	n	$x_n = \varphi_1(x) = -2$^(x/2)	$\|f(x_n)\|$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
2	0	-1	0,5	
3	1	-0,707106781	=ABS(B3^2-2^B3)	=ABS(B2-B3)

Figura 27: Linha $n = 1$

Com as fórmulas lançadas na planilha, temos a tabela até a linha $n = 1$:

	A	B	C	D
1	n	$x_n = \varphi_1(x) = -2$^(x/2)	$\|f(x_n)\|$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
2	0	-1	0,5	
3	1	-0,707106781	0,112547	0,292893

Figura 28: Linha $n = 1$ completa

Para obtermos as próximas linhas, selecionamos as células $B3$, $C3$ e $D3$, clicamos no canto inferior direito de $D3$ e arrastamos para baixo.

Exibimos, em seguida, a tabela com as sequências de resultados obtidos até a aproximação desejada:

	A	B	C	D
1	n	$x_n = \varphi_1(x) = -2$^(x/2)	$\|f(x_n)\|$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
2	0	-1	0,5	
3	1	-0,707106781	0,112547	0,292893
4	2	-0,782654027	0,031251	0,075547
5	3	-0,762427989	0,008207	0,020226
6	4	-0,76779124	0,002187	0,005363
7	5	-0,766365425	0,000581	0,001426
8	6	-0,766744218	0,000154	0,000379

Figura 29: Tabela final no Método do Ponto Fixo

Na linha $n = 6$, chegamos em $|f(x_6)| = 0,000154 < 0,001$ e $|x_6 - x_5| = 0,000379 < 0,001$. É claro que já poderíamos encerrar as iterações na linha anterior, pois $|f(x_5)| = 0,000581 < 0,001$.

Para entender melhor a sequência de aproximações obtida pelo processo iterativo acima, exibiremos os gráficos da reta $r : y = x$ e da função de iteração $\varphi : \varphi_1(x) = -2^{x/2}$ no mesmo sistema cartesiano. O ponto inicial da iteração é $A(-1, \varphi(-1))$, marcado no gráfico de φ, ou seja, $A(x_0, \varphi(x_0)) = A(x_0, x_1)$. Em seguida, na reta r, marcamos o ponto $B(x_1, x_1)$. Depois, no gráfico de φ, o ponto $C(x_1, \varphi(x_1)) = C(x_1, x_2)$. Este processo converge para o ponto $P(\overline{x}, \overline{x})$, interseção dos gráficos. O valor $\overline{x}$ é a raiz exata da equação $x^2 = 2^x$.

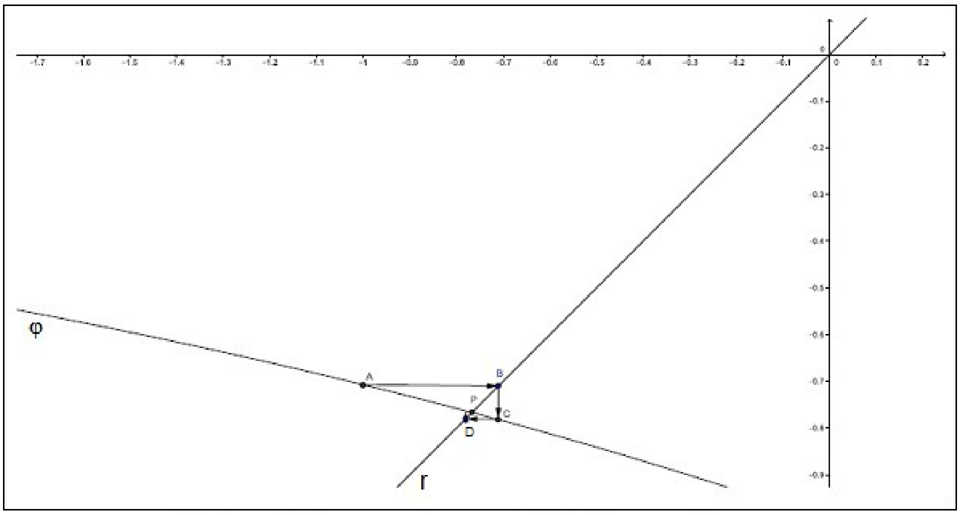

Figura 30: Aproximações usando $\varphi_1(x) = -2^{x/2}$

Justificaremos o fato de termos encontrado uma boa aproximação para a raiz usando o Teorema 3.11 do capítulo 3 que afirma que a sequência (x_n), gerada pelo processo iterativo, converge para a raiz quando são satisfeitas as condições: o valor inicial x_0 pertence ao intervalo $(-2, 0)$ e, além disso, em $(-2, 0)$, $\varphi_1(x)$ e $\varphi_1'(x)$ são contínuas e $|\varphi_1'(x)| < 1$.

Tem-se que $x_0 = -1 \in (-2, 0)$. Além disso, $\varphi_1(x) = -2^{x/2}$ e $\varphi_1'(x) = -2^{x/2} \cdot \frac{\ln 2}{2}$ são funções contínuas em $(-2, 0)$. Analisando $|\varphi_1'(x)|$, obtemos:
$|\varphi_1'(x)| < 1 \Rightarrow 2^{x/2} \cdot \frac{\ln 2}{2} < 1 \Rightarrow 2^{x/2} < \frac{2}{\ln 2} = 2,885$, pois $2^{x/2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. De $2^{x/2} < 2,885$ vem:
$\frac{x}{2} < \log_2 2,885 \Rightarrow x < 3,057$.
Como $x < 3,057$, $\forall x \in (-2, 0)$, temos que $|\varphi_1'(x)| < 1$, concluindo nossa justificativa.

Em seguida, usamos a outra função de iteração, $\varphi_2(x) = \log_2 x^2$. Porém, temos que fazer algumas considerações antes. Se escolhermos $x_0 = -1$, teremos $x_1 = 0$. Como o logaritmo só está definido para valores positivos, a planilha dará uma informação de erro no lugar onde deveria informar o valor de x_2.

Escolhendo $x_0 = -0,5$ a sequência dos $x_{i's}$, a partir de x_0, será $(-0,5; -2; 2; 2; 2; \cdots)$, que converge para a raiz positiva $\overline{x} = 2$.

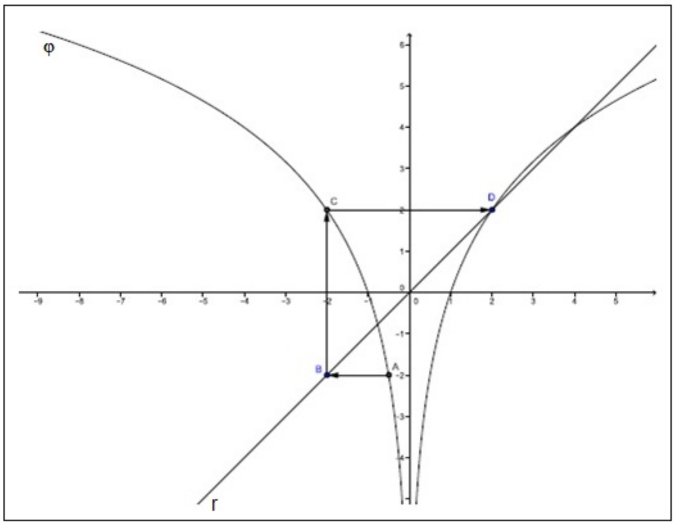

Figura 31: Aproximações usando $\varphi_2(x) = \log_2 x^2$ com $x_0 = -0,5$

Se a escolha inicial for $x_0 = -1,5$, teremos

$$(-1,5; 1,169925; 0,452832; -2,2859; 2,385529; 2,508619; 2,653787; \cdots ; 3,999; \cdots),$$

que converge para a raiz positiva $\overline{x} = 4$.

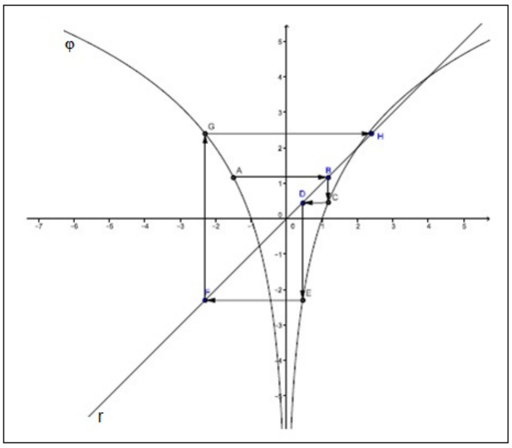

Figura 32: Aproximações usando $\varphi_2(x) = \log_2 x^2$ com $x_0 = -1,5$

Aplicamos um zoom para visualizarmos a continuação do processo, conforme a figura 33.

As duas sequências acima não convergem para um valor entre - 2 e 0. Mas analisando melhor a função de iteração, $\varphi_2(x) = \log_2 x^2$, vemos que quando x assume um valor tal

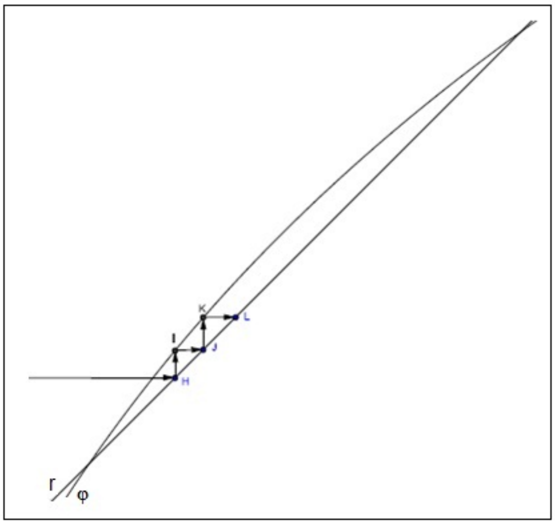

Figura 33: Aproximações usando $\varphi_2(x) = \log_2 x^2$ com $x_0 = -1,5$ - zoom

que $-0,5 \leq x < 0$ tem-se $0 < x^2 \leq 0,25$ e, consequentemente, $\log_2 x^2 \leq -2$.

Quando $x \leq -2$, $\log_2 x^2 \geq 2$. A partir daí, os valores dos $x_{i's}$ serão sempre maiores do que ou iguais a 2. Também, se $x^2 > 1$ então $\log_2 x^2 > 0$, isto é, os valores dos $x_{i's}$ serão positivos e, portanto, estarão fora do intervalo $(-2, 0)$.

As justificativas acima para a não convergência da sequência para a raiz negativa são baseadas em argumentos acessíveis ao aluno do ensino médio. Mas, para o professor, apresentamos uma conclusão usando o Teorema 3.11. Inicialmente, vemos que as escolhas para x_0 são valores no intervalo $(-2, 0)$. Além disso, $\varphi_2(x) = \log_2 x^2$ e $\varphi_2'(x) = \frac{2}{x \ln 2}$ são contínuas em $(-2, 0)$. Verifiquemos, por fim, os valores de x tais que $|\varphi_2'(x)| < 1$: $\left|\dfrac{2}{x\ln 2}\right| < 1 \Rightarrow -1 \leq \dfrac{2}{x\ln 2} < 1 \Rightarrow \dfrac{2}{x\ln 2} > -1$ e $\dfrac{2}{x\ln 2} < 1$. Consideremos dois casos:

1º caso: $\dfrac{2}{x\ln 2} > -1$.

$\frac{2}{x\ln 2} > -1 \Rightarrow \frac{2}{x\ln 2} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{2+x\ln 2}{x\ln 2} > 0 \Rightarrow (2 + x\ln 2 > 0$ e $x\ln 2 > 0)$ ou $(2 + x\ln 2 < 0$ e $x \ln 2 < 0)$.

i) $2 + x\ln 2 > 0$ e $x\ln 2 > 0 \Rightarrow x > -2/\ln 2$ e $x > 0 \Rightarrow x > 0$.

ii) $2 + x\ln 2 < 0$ e $x\ln 2 < 0 \Rightarrow x < -2/\ln 2$ e $x < 0 \Rightarrow x < -2/\ln 2 = -2,885$.

Logo, obtemos $x < -2,885$ ou $x > 0$.

2º caso: $\dfrac{2}{x\ln 2} < 1$.

$\frac{2}{x\ln 2} < 1 \Rightarrow \frac{2}{x\ln 2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{2 - x\ln 2}{x\ln 2} < 0 \Rightarrow (2 - x\ln 2 < 0$ e $x\ln 2 > 0)$ ou $(2 - x\ln 2 > 0$ e $x\ln 2 < 0)$.

i) $2 - x\ln 2 < 0$ e $x\ln 2 > 0 \Rightarrow x > 2/\ln 2$ e $x > 0 \Rightarrow x > 2/\ln 2 = 2,885$.

ii) $2 - x\ln 2 > 0$ e $x\ln 2 < 0 \Rightarrow x < 2/\ln 2$ e $x < 0 \Rightarrow x < 0$.

Logo, obtemos $x < 0$ ou $x > 2,885$.

Assim, $|\varphi_2'(x)| < 1$ quando são atendidos ambos os casos, isto é, ($x < -2,885$ ou $x > 0$) e ($x < 0$ ou $x > 2,885$), o que implica $x < -2,885$ ou $x > 2,885$. Mas então, chegamos que $x \notin (-2,0)$. Portanto, $|\varphi_2'(x)|$ não é menor que 1 em $(-2,0)$. Por esta razão, o processo iterativo usando $\varphi_2(x) = \log_2 x^2$, não nos levou para a raiz que está em $(-2,0)$.

Nesta atividade que acabamos de propor, nos preocupamos em apresentar um modelo de resolução. Qualquer outra equação que satisfaça às condições necessárias para aplicação dos métodos numéricos, pode ser feita seguindo os passos descritos neste capítulo. Se a instituição de ensino, onde for realizada a tarefa, dispor de um laboratório com número adequado de computadores, o professor poderá explorar mais os recursos computacionais com seus alunos para discutir os resultados obtidos nas equações. Mas é possível usar os métodos aproximativos mesmo sem uso de tecnologias em sala de aula. Os gráficos podem ser entregues impressos e, para as planilhas, podem ser feitas tabelas no caderno onde os resultados de cada iteração vão sendo anotados.

Após o desenvolvimento da atividade, compreendemos que o Método da Bissecção pode ser aplicado numa turma de 8º ou 9º ano por ser de fácil de entendimento (as iterações são geradas através de médias aritméticas). Já o Método da Falsa Posição, envolve o conceito de reta secante ao gráfico. Sendo assim, entendemos que a implementação deste método é mais recomendada para turmas a partir do 1º ano do ensino médio. Por fim, o Método do Ponto Fixo, por ser mais elaborado (há a dificuldade em se obter uma função de iteração adequada), sugerimos que seja realizado num grupo menor de alunos do 3º ano do ensino médio em que o professor tenha condições de trabalhar, previamente, alguns temas mais avançados como continuidade e derivadas de funções reais.

Ao realizar as operações, mesmo com uso de calculadora ou planilha eletrônica, é importante atentar para os possíveis erros decorrentes de arredondamentos. Por exemplo, a fração $\frac{25}{9}$ gera a dízima $2,777\cdots$. Então $x = 2,777\cdots$ é o valor que deve ser multiplicado por 9 para se obter 25. Se porém multiplicarmos por 9 o valor arredondado $x = 2,7777$, obteremos $24,9993$, que gera um erro $d = 0,0007$. Assim, se a precisão exigida for $\epsilon = 0,001$, este erro $d = 0,0007$ estará dentro da margem aceitável.

A dinâmica da sala de aula pode proporcionar experiências interessantes. Por isso, é importante o professor buscar diferentes tipos de equações, discutir as dúvidas que surgirem. A proposta que apresentamos pode ser apenas uma motivação para futuros trabalhos e atividades relacionadas ao ensino de matemática.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, iniciamos fazendo um estudo histórico da equação do 2º grau abordando diferentes formas de resolvê-la. Mas nosso tema central foi apresentar os métodos numéricos como alternativa para se poder trabalhar equações diferentes das comumentes estudadas no ensino básico. Fizemos uso dos recursos computacionais, pois entendemos que assim o ensino fica mais ilustrativo e dinâmico. Embora sejamos favoráveis ao uso das tecnologias no ensino de matemática, ressaltamos que é importante ter o conhecimento matemático até mesmo para termos condições de analisar criticamente os resultados obtidos. As tecnologias devem ser utilizadas como recurso de modo a agilizar os cálculos, mas elas não podem encaradas como o objeto central do ensino. Os conceitos matemáticos continuam tendo e merecendo grande importância.

Esperamos que este trabalho sirva como material de pesquisa ou estudo para o professor do ensino básico interessado em incrementar suas aulas com tópicos alternativos dentro da matemática. É importante, no entanto, que o professor faça uma análise prévia acerca da continuidade das funções. Dependendo do nível da turma, é possível fazer uma discussão sobre funções contínuas. Mas é claro, usando termos e conceitos acessíveis aos alunos.

REFERÊNCIAS

[1] AMARAL, J. T. Método de Viète para resoluções de equações do 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 13, [199?]

[2] ASSIS, C. A. M. Como Euler resolveu a equação do 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 64, [200?]

[3] BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1974.

[4] GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[5] LIMA, E. L. **Análise Real**. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, 2009.

[6] LIMA, E. L. A equação do 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 13, [199?]

[7] RUGGIERO, M. A.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. São Paulo: Makron Books, 1998.

[8] TUNALA, N. Resolução geométrica da equação do 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 12, [199?]

[9] **Geogebra**. Disponível em <http://www.geogebra.org/cms/pt.BR>. Acesso em 18 mar. 2013.

[10] **BrOffice**. Disponível em <http://ultradownloads.com.br/download/BrOfficeorg/>. Acesso em 20 mar. 2013.