UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Gilvan da Silva Passos

MANAUS

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Gilvan da Silva Passos

ANÁLISE COMBINATÓRIA: TEORIA E APLICAÇÕES PARA O ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS
2018

GILVAN DA SILVA PASSOS

ANÁLISE COMBINATÓRIA: TEORIA E APLICAÇÕES
PARA O ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 28 de março de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Universidade Federal do Amazonas (Orientador – Presidente)

Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral
Universidade Federal do Amazonas – Membro

Profª. Drª. Nadime Mustafa Moraes
Universidade do Estado Amazonas – Membro Externo

AGRADECIMENTOS

A Deus primeiramente, por me conceder o dom da vida e me proporcionar mais um momento de vitória, a Ele dedico minha vida e tudo que conquistei.

Agradeço a meus pais que sempre estiveram ao meu lado em minhas conquistas e falhas, eles são a base de quem sou hoje, a eles agradeço imensamente pelo incentivo aos estudos e a cada passo que dei em favor de ser um cidadão de bem.

A minha esposa pelo apoio nessa caminhada e por compreender as minhas ausências e ao meu amado filho pela força e encorajamento.

A meu orientador pela paciência e pelos ensinamentos.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo estudar Análise Combinatória, que é um importante ramo da matemática que normalmente não é tratado com sutileza e transmitida ao longo dos anos através de memorização mecânica deixando o processo aprendizagem, auto-aprendizagem e construção lógica de lado. É importante enfatizar a aplicação da Análise Combinatória nas teorias dos conjuntos e teoria das probabilidades que muitas vezes se fazem presentes nas resoluções de problemas. Se faz necessário apresentar para nossos alunos o potencial e a beleza da construção lógica de ideias que a Análise Combinatória proporciona não excluindo as aplicações de fórmulas mas que elas possam ser usadas quando os conceitos e a estrutura forem bem assimiladas. Apresentamos métodos de contagem além dos usados no ensino básico como permutações caóticas combinações com repetição, princípio da inclusão e exclusão, lemas de Kaplansky e de Dirichlet mas também destacamos os métodos básicos como arranjos simples, combinações simples e permutações simples. Além disso, para apresentamos uma generalização dos números fatoriais definida pela função Gama e resoluções de problemas de olimpíadas.

Palavras-chave: Combinatória, Arranjos, Combinações, Permutações caóticas, princípio da exclusão e inclusão.

ABSTRACT

This work aims to study combinatorial analysis, which is an important branch of mathematics which is not usually subtly treated and through many years was teached as the mechanical memorization, leaving aside the learning process, self-learning and logical construction. It is important to emphasize the application of combinatorial analysis in set theory and probabilities theory that are often present in problem solving. It is necessary to present to our students the potential and beauty of the logical construction of ideas of combinatorial analysis, not excluding formulas applications, that can be used when the concepts and structure is well assimilated. We present counting methods beyond those used in basic education such as repetition chaotic permutations combinations, inclusion and exclusion principles, Kaplansky and Dirichlet lemmas, but we also highlight basic methods such as simple arrangements, simple combinations, and simple permutations. Beyond that, we present a generalization of the factorial numbers through the Gamma function besides olympics problems resolutions.

Keywords: Combinatorial, Arrangements, Combinations, Chaotic permutations, Olympics Problems, Inclusion and Exclusion Principles.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\geq$	Maior ou igual.
$\leq$	Menor ou igual.
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}$	Somatório variando de 1 a n.
$\displaystyle\prod_{i=1}^{n}$	Produto variando de 1 a n.
$\in$	Pertence.
$\notin$	Não pertence.
$\cup$	União.
$\cap$	Interseção.
$\#$	Número de elementos.
Γ	Função Gama.
$\displaystyle\int_0^\infty$	Integral
$\Big\vert_0^\infty$	$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to 0} f(x)$
$\square$	Indica o fim de uma demonstração.
$N(X)$	Quantidade de elementos do conjunto X.

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

P289a

Passos, Gilvan da Silva

Análise Combinatória: Teoria e Aplicações para o Ensino Básico / Gilvan da Silva Passos. 2017

100 f.: 31 cm.

Orientador: Nilomar Vieira de Oliveira

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Análise Combinatória. 2. Permutação. 3. Arranjo. 4. Combinação. I. Oliveira, Nilomar Vieira de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Sumário

Introdução

Neste trabalho apresentamos os métodos de contagem que são estudados no ensino médio e outros métodos que não são apresentados para nossos alunos, mas se mostram de grande importância tanto para resolução de problemas aparentemente complicados como as aplicações em funções, teoria dos conjuntos e teoria das probabilidades. A escolha do tema teve como principal objetivo criar um modelo e linguagem que pudesse facilitar a construção lógica para contagem que muitas vezes podem ser feitas sem fórmulas, porém não ignoramos em nenhum momento o uso das mesmas se fazendo necessária em muitos problemas, além disso, queremos contribuir com alunos e professores de todos os níveis mostrando importância da Análise Combinatória no currículo acadêmico.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro comentamos os aspectos históricos da Análise Combinatória, como ela esta sendo apresentada para nossos alunos. A apresentação e construção dos métodos de contagem é apresentado nos dois capítulos seguintes. O segundo capítulo é voltado aos métodos de contagem estudados no ensino médio, destacamos para o princípio fundamental da contagem para que a ideia apresentada seja melhor absorvida, em seguida a formalização de números fatoriais e sua relação com a função Gama, neste também é apresentado os métodos mais comuns de permutação de elementos, além de arranjos e combinações. No terceiro abordamos métodos diferenciados de contagem que usam os conceitos básicos e suas relações com a teoria dos conjuntos como princípio da inclusão e exclusão, permutações caóticas, os Lemas de Kaplansky e o princípio de Dirichlet. Finalmente, no último capítulo apresentamos problemas olímpicos os e aplicações em teoria das probabilidades.

Capítulo 1

Análise Combinatória

1.1 O que é Análise Combinatória

Analisar e contar as possibilidades que satisfazem critérios específicos de um acontecimento é o principal objetivo da Análise Combinatória, trata-se de resolver problemas relacionados a contagem finita direta ou indiretamente e basicamente envolve conceitos já estudados como por exemplo conjuntos finitos e contagem numérica. De uma forma mais geral, a Análise Combinatória é um ramo da Matemática que analisa, conta e estrutura elementos de um certo conjunto de acordo com os critérios determinados. Problemas que envolvem contagem muitas vezes são sutis em seu desenvolvimento exigindo quase sempre lógica e compreensão dos critérios apresentados, esse talvez seja o principal motivo o qual torne este conteúdo tão complicado para aprendizagem e, que muitas vezes é transmitido de forma mecânica, limitando o aluno apenas a decorar fórmulas (técnicas de contagem) nem sempre úteis em todas as resoluções.

Conceitos como permutação simples, arranjo, combinação, permutação com repetição e circular são apenas algumas técnicas que são apresentadas, porém, não é a solução de todos os problemas de Análise Combinatória e a utilidade de cada uma é inquestionável, no entanto, técnicas comuns como o princípio da inclusão e exclusão de elementos de um subconjunto,conjuntos complementares, princípio de Dirichlet, associados a um raciocínio lógico e capacidade de interpretação torna-se a maior das ferramentas para resolução dos problemas.

Da mesma forma que a Análise Combinatória causa desgosto para uns, causa encanto para outros. As aplicações no cotidiano são tantas, que se bem aplicadas, instigam o aluno ao raciocínio e cria interesse nas resoluções muitas vezes solucionadas sem auxílio de fórmulas. Formalizar o uso das diferentes formas de contagem com técnicas e raciocínio permite que os problemas sejam mais facilmente resolvidos.

As atividades contextualizadas auxiliam no interesse e despertam a curiosidade dos alunos e na Análise Combinatória não é diferente, ela é base para tratamento de dados, cálculos relativos a probabilidade e noções de estruturação, além de ser parte fundamental teoria dos grupos e topologia. O estudo da Análise Combinatória também desenvolve habilidades cognitivas como organização de dados, agrupamento de objetos de mesma natureza e operações básicas como soma e multiplicação que são os princípios mais importantes para o entendimento do conteúdo.

1.2 Tratamento da combinatória no ensino básico

A aprendizagem matemática que envolve problemas, rotineiros ou não, sempre é vista com dificuldade pelo aluno seja pela metodologia aplicada pelo professor ou mesmo dificuldade de interpretação. Tomando este fato como ponto de partida para este trabalho e tomando conhecimento da dificuldade de aprendizagem em Análise Combinatória tanto dos alunos da rede pública como também da rede privada vamos abordar conceitos, modelos e técnicas de resolução de problemas que nos permitirá um novo olhar para este ramo da aritmética tão importante e de grande utilidade no meio estatístico com o objetivo de conquistar o aluno e reverter a ideia que criam da Análise Combinatória e também da matemática como um todo.

Os problemas que envolvem lógica-matemática ainda apresenta resistência por parte da maioria dos alunos, pois sempre requerem algo mais na resolução do que apenas decorar uma fórmula e aplicá-la é necessário interpretar e organizar informações para que assim desenvolva a solução adequada. Na Análise Combinatória a ferramenta interpretativa é constante, visto que, todos os problemas envolvem, de alguma forma, o raciocínio lógico e noções de organização, isto talvez, junto com a metodologia aplicada torne o assunto chato, difícil e sem fundamentos na visão do aluno.

A resolução de problemas que envolvem combinatória apresentam conceitos fundamentais como conjuntos, organização de dados, entre outros e um raciocínio lógico único para cada problema apresentado e que muitas vezes não são explorados pelo professor que geralmente trabalha neste assunto apenas fórmula e aplicação tornando o trabalho mecânico, sem sentido e sem compreensão do que é arranjo, combinação e permutação. Visando uma metodologia de ensino que permita melhor compreensão vamos nos apropriar de técnicas comuns em Análise Combinatória e modelos de resolução utilizando conceitos citados como conjuntos, complementar, além de, inclusão e exclusão explorando cada um deles para criar uma solução para os problemas sem utilização de fórmulas no primeiro momento e as formalizando para consolidar a aprendizagem com problemas que podem fazer parte da rotina do aluno.

Uma das principais dificuldades em apresentar e ensinar o conteúdo é resgatar, recuperar ou até mesmo criar o raciocínio lógico-interpretativo na maioria dos alunos, que naturalmente é essencial para trabalhar os problemas, podemos então dizer que a maneira que se apresenta a Análise Combinatória é o motivo o qual seu aluno poderá se interessar ou não. É fácil, para nós professores, apenas mostrar o básico de cada conceito e, até mesmo em poucas aulas finalizá-lo, no entanto, se faz necessário um tempo maior para que o próprio aluno crie sua linha de raciocínio, seus próprios métodos e suas ideias, assim, para quem sabe lhe interessar os conceitos futuros.

O tratamento deve ser cauteloso e deve seguir uma linha suave e contínua de construções de ideias. O princípio da contagem ou principio multiplicativo é um conceito que chega a nos iludir pela facilidade de apenas realizar o produto do número de elementos de cada conjunto, claro que é necessário para que se entenda a harmonia que será criada a partir de um simples conceito. Ocorre, que a partir desse ponto as dificuldades aparecem quando apresentamos problemas que envolvem pequenas restrições e esse é o momento que devemos ir devagar construindo as ideias, juntamente com os alunos, de maneira que fique claro que a Análise Combinatória não se trata de um conteúdo qualquer, mas sim, de um conteúdo que é rico em aplicabilidade tornando-se um perfeito contextualizador de inúmeras formas. É possível usar de exemplos de simples aplicabilidade e ainda contextualizados para conquistar o aluno, tornando assim, o conteúdo mais leve e um ótimo jogo de raciocínio.

1.3 Aspectos históricos

Existem várias teorias que relatam o surgimento da Análise Combinatória entre elas a disposição de n números naturais num quadrado de ordem n de modo que a linha, coluna e diagonal tenham a mesma soma. Este quadrado é conhecido como quadrado mágico (WIELEITNER,1932). Para exemplificar usaremos o quadrado mágico 3x3 o qual é proposto dispor os algarismos de 1 a 9 de modo que a soma da linha, coluna e diagonal seja sempre 15. Este problema sugere o arranjo dos algarismos para que resulte em tal soma, porém como tal problema envolve a Análise Combinatória que estudamos hoje?

Analisando o problema devemos explorar os detalhes:

1. Por que a soma dos algarismos deve ser 15?

   Resposta: O número é chamado de constante mágica e decorre da soma dos n primeiros números naturais. Considerando:

   $$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

   e aplicando para o caso $k=n^2$, temos que a soma dos n^2 primeiros números naturais é:

   $$1+2+3+...+n^2=\frac{(n^2+1)n^2}{2}$$

   onde devemos dividir por n pois no quadrado mágico existem n linhas de mesma soma portando a constante mágica é dada por:

   $$1+2+3+...+n^2=\frac{(n^2+1)n}{2}$$

portanto um quadrado mágico de ordem 3:

$$\frac{(3^2+1)3}{2} = 15$$

2. Quando a soma de três algarismos naturais distintos resulta em ímpar?

   Resposta: Aqui começa a parte da Análise Combinatória propriamente dita. Devemos combinar 3 algarismos de modo que a soma resulte em um número ímpar e sem saber dos conceitos conseguimos dizer facilmente que a soma resultante é ímpar se: - Somarmos dois números pares e um ímpar ou - Somarmos três números ímpares.

3. Quando a soma de três algarismos naturais resulta em 15?

   Resposta: Considerando a ordem das parcelas existem 48 maneiras de somarmos três algarismos naturais distintos que resulte em 15, no entanto, somente 8 são combinações distintas.

Este pequeno mas desafiador problema envolve conceitos que vão além dos estudados na Análise Combinatória, nele exploramos conjuntos, subconjuntos e indução. Retornaremos a resolução deste problema quando os conceitos de combinatória forem fundamentados.

Outra teoria sugere que o estudo da Análise Combinatória iniciou-se meramente entre os jogos de azar envolvendo cartas ou dados. O estímulo pela vitória e o fascínio das apostas podem ter sido os principais precursores para o estudo mais aprofundado deste conteúdo que naturalmente se originou em problemas relacionados à probabilidade. O livro de Jerônimo Cardano (1501-1576), Liber De Ludo Aleae - 1526, (Sobre os Jogos de Azar) é conhecido como a primeira obra em que se faz o estudo das probabilidades, Cardano escreveu este livro com o intuito se ser um manual para jogadores e é considerado iniciador da teoria das probabilidades, mais tarde em 1657, Christian Hygens (1629-1695), publicou o primeiro tratado da teoria das probabilidades que menciona, além da probabilidade, o cálculo estatístico, só então em 1713 foi publicado o livro de Jacob Bernoulli (1654-1705), Ars Conjectandi (A arte de conjecturar) que relaciona jogos de azar com permutações e combinações, além disso, detalha o estudo sobre distribuições binomiais conhecido como Teorema de Bernoulli. O teorema foi a primeira tentativa de deduzir medidas estatísticas a partir de probabilidades, ele permite deduzir qual a probabilidade de cada evento acontecer, sabendo como se comportaram em um grande número de experimentos. Outros matemáticos da época fizeram suas contribuições para a teoria das probabilidades e estatística como John Graunt (1620 - 1674) que utilizava os registros de falecimentos para determinar a taxa de mortalidade em Londres. Os primeiros resultados estatísticos que serão realmente utilizados são as tabelas de falecimento calculadas por Richard Price (1723 - 1791) em 1780, em Northampton.

Capítulo 2

Conceitos da Análise Combinatória

2.1 Princípio fundamental da contagem

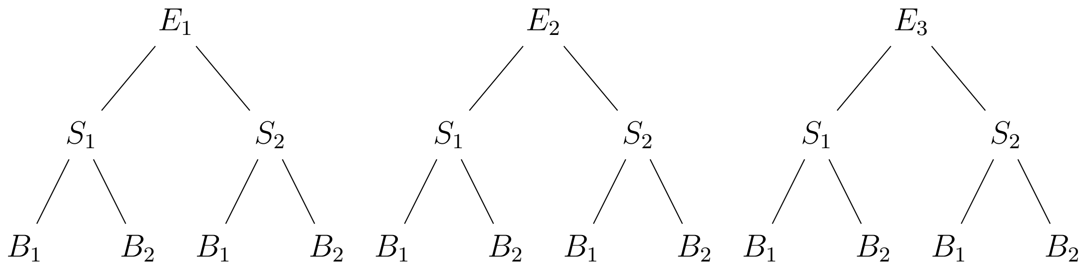
No princípio fundamental é onde se inicia uma jornada para construir raciocínios flexíveis que não precisam ser rápidos, entendemos que é necessário parar, refletir, discutir e aplicar para que se tenha um aprendizado satisfatório. Um bom método a se aplicar durante a apresentação de novos problemas é o *brainstorming* ligado ao mundo MBA que tem como objetivo apresentar ideias novas para o mercado, produtos ou serviços mas aplicado a matemática se resume em criar um raciocínio construtivo de pensamento lógico.

O princípio fundamental da contagem (PFC) é um modelo que está diretamente ligado às situações que envolvem as possibilidades de um determinado evento ocorrer, trabalharemos em paralelo com o conceito de conjuntos e elementos para que seja melhor compreendido. O princípio fundamental da contagem, diferentemente dos demais conceitos, que ainda serão estudados, não possui fórmula, a resolução de seus problemas serão restritos a lógica e fundamentação de conceitos de anos anteriores. Vamos nos apropriar de um modelo de contagem a partir de "casas"simbolizadas por traços $(-)$ que nos servirá como base para resolução dos problemas que, por sua vez, vai ser a nossa mais importante ferramenta para se compreender a análise. De uma maneira mais geral é como se fossem tomadas decisões onde cada uma pode ser tomada de formas diferentes.

Considere os seguintes exemplos:

Exemplo 2.1. *Um restaurante dispõe, em seu cardápio, entrada, sobremesas e bebidas. Sabendo que são oferecidos três diferentes pratos de entrada, duas sobremesas distintas e duas bebidas também distintas. Quantas são as possíveis combinações de entrada, sobremesa e bebida?*

Solução: Primeiramente vamos entender a construção lógica para esse problema usando contagem direta. Vamos denominar por A o conjunto de pratos de entrada, logo $A = \{E_1, E_2, E_3\}$, o conjunto B sendo sobremesas e C como conjunto de bebidas, dessa forma, temos que $B = \{S_1, S_2\}$ e $C = \{C_1, C_2\}$. Suponha que você esteja indo pela primeira vez a esse restaurante, portanto deverá escolher um entre os três pratos de entrada disponíveis, isto é, um dos três elementos pertencentes ao conjunto A, feita à decisão do prato de entrada agora deve-se escolher um entre os dois tipos de sobremesas e por fim um dos dois tipos de bebidas. Abaixo está um diagrama que representa as possibilidades de escolhas de acordo com as combinações possíveis e, que no total são doze, para chegar a essa conclusão basta contarmos a quantidade de combinações na última fileira.



Com isso podemos concluir que o total de combinações possíveis são doze. O modelo que usaremos consiste basicamente na ideia acima, porém apenas usando traços para nos auxiliar. Voltando ao item anterior vamos imaginar que devemos tomar três decisões:

1º) Prato de entrada: três diferentes tipos.

2º) Sobremesa: dois diferentes tipos.

3º) Bebida: dois diferentes tipos.

Vamos representar essas decisões por casas:

$$\underbrace{\underline{\quad\quad}}_{\text{Entrada}}\ \underbrace{\underline{\quad\quad}}_{\text{Sobremesa}}\ \underbrace{\underline{\quad\quad}}_{\text{Bebida}}$$

Em seguida vamos completar as casas com o numeral que representa a quantidade de escolhas que podemos tomar, ou seja:

$$\overbrace{\underbrace{\underline{\quad 3 \quad}}_{\text{Entrada}}\ \underbrace{\underline{\quad 2 \quad}}_{\text{Sobremesa}}\ \underbrace{\underline{\quad 2 \quad}}_{\text{Bebida}}}^{\text{Quantidade de escolhas para cada decisão}}$$

Portanto, se multiplicarmos os números acima teremos como resultado doze.

$$\underline{\quad 3 \quad}\ \underline{\quad 2 \quad}\ \underline{\quad 2 \quad} = 12$$

Exemplo 2.2. *As placas de automóveis no Brasil eram compostas de duas letras de nosso alfabeto(num total de 26 letras) seguidas de quatro algarismos. Em 1990, um sistema com três letras e quatro algarismos foi implantado. Determine quantos automóveis a mais poderiam ser emplacados a partir de 1990.*

Solução: Vamos resolver esse problema em duas etapas: a primeira consiste em calcular quantas placas podiam ser formadas antes de 1990 e quantas podem ser formadas depois de 1990.

Etapa 1: O problema nos diz que antes de 1990 era usado a configuração de duas letras e quatro algarismos como sistema de emplacamento. Podemos então criar seis casas, onde as duas primeiras são compostas por letras e as quatro últimas por números, temos então que:

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

simbolizam nossas casas. Agora que o modelo está pronto devemos partir para a resolução em si.

A primeira e a segunda casa são compostas por letras, vamos admitir que o alfabeto é um conjunto $A = \{A, ..., Z\}$ que possui 26 elementos distintos, portanto, as duas primeiras casas comportam 26 letras, então temos que:

$$\underbrace{\underline{26}\,\underline{26}}_{\text{letras}}\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{\text{algarismos}}$$

Agora devemos preencher as quatro últimas casas com os algarismos de 0 a 9, vamos chamá-lo de conjunto B, ou seja, cada uma das quatro casas admite um dos dez algarismos disponíveis, logo teremos que:

$$\underbrace{\underline{26}\,\underline{26}}_{\text{letras}}\underbrace{\underline{10}\,\underline{10}\,\underline{10}\,\underline{10}}_{\text{algarismos}}$$

usando o mesmo princípio que usamos no item anterior, multiplicaremos e teremos que o total de placas até 1990 eram de $26^2.10^4$ num total de $6.760.000$ placas.

Etapa 2: Vamos agora calcular o total de placas a partir de 1990 que passou a ter 3 letras seguidas de quatro algarismos. Usando o mesmo modelo acima adicionando apenas uma casa para as letras teremos que o total de placas a partir de 1990 eram de:

$$\underbrace{\underline{26}\,\underline{26}\,\underline{26}}_{\text{letras}}\underbrace{\underline{10}\,\underline{10}\,\underline{10}\,\underline{10}}_{\text{algarismos}}$$

sendo igual a $26^3.10^4$ num total de $175.760.000$ placas. Concluímos então que poderiam ser emplacados $169.000.000$ novos carros.

Exemplo 2.3. *Uma prova de matemática consiste em quatro questões cada uma com quatro alternativas cada. Quantas são as maneiras possíveis de responder a essa prova?*

Solução: Sabendo que são quatro questões e cada uma 4 alternativas teremos basicamente uma relação entre conjuntos e subconjuntos. A primeira questão pode ser respondida de 4 maneiras, a segunda pode ser respondida de 4 maneiras, a terceira e a quarta da mesma forma, ou seja temos que a prova pode ser respondida da seguinte forma:

$$\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4} = 256$$

A aplicação do PFC ligado com o modelo proposto através de casas será nosso principal meio de resolução dos problemas, vamos deduzir as fórmulas posteriores de arranjo e combinação através do conceito aqui apresentado.

É comum que problemas, bem desenvolvidos, apresentem certos tipos de restrições no desenvolvimento, restrições essas, que necessitam de atenção e reflexão para que a resolução seja feita de forma correta. Analise os enunciados a seguir:

Exemplo 2.4. *Quantos números de três algarismos posso formar usando os algarismos de 1 à 9?*

Exemplo 2.5. *Quantos números de três algarismos posso formar usando os algarismos de 0 à 9?*

É natural que o aluno aplique a mesma ideia para ambas soluções, porém vamos analisar cuidadosamente estes enunciados e também suas resoluções para se retirar o que há de mais importante para se prosseguir nos conceitos de Análise Combinatória. No item 3 queremos contar quantos números de três algarismos podemos formar com um conjunto A de nove elementos, ou seja, $A = \{1, ...9\}$ neste caso teremos:

$$\underbrace{\underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9}}_{\text{três algarismos}} = 729$$

já no item 4 é tendencioso que o aluno aplique usando o mesmo caminho do item anterior, assim ficando na forma:

$$\underline{10}\,\underline{10}\,\underline{10} = 1000$$

já que o conjunto agora é de 10 elementos. Entretanto, a solução é errônea pelo simples fato de se ter incluído o elemento $\{0\}$ no conjunto A. Esta solução apresentada inclui todas as combinações possíveis de números, em particular, todas as combinações que se iniciam por zero, ou seja, são números que na verdade seriam de dois algarismos já que o zero à frente não influencia, logo, existe uma restrição na primeira casa e portanto concluímos que ela permite apenas os algarismos de um a nove, então sua resolução correta seria:

$$\underbrace{\underline{9}}_{\neq 0}\ \underline{10}\,\underline{10} = 900$$

nos levando ainda a conclusão que para resolução de certos problemas teremos que usar relação de inclusão e exclusão de elementos do conjunto como se fez necessário neste item. Agora que nos apropriamos do modelo que nos auxilia na resolução avançaremos em exemplos mais elaborados que será analisado de forma mais cautelosa.

Exemplo 2.6. *Quantos são os números pares de quatro algarismos podemos formar com os algarismos de 1 à 9?*

Solução: Faremos uma solução mais abreviada já que nos apropriamos de modelo e linha de raciocínio. Vejamos que há, neste exemplo, queremos um número que seja par, isto é, que o algarismo da unidade seja par, portanto admite apenas os números $2, 4, 6$ e 8, assim temos que:

$$\underline{\ 9\ }\,\underline{\ 9\ }\,\underline{\ 9\ }\,\underbrace{\underline{\ 4\ }}_{\text{par}} = 2916$$

É bom lembramos que os números acima das casas são a quantidade e não o algarismo, por exemplo, na última casa aparece o número 4 pois temos quatro números pares disponíveis.

Exemplo 2.7. *Quantos são os números pares de quatro algarismos podemos formar com os algarismos de 0 à 9?*

Um caso que aparece zero deve sempre ser tratado com delicadeza, em particular nesse exemplo já que zero é par e não pode iniciar o número. Então, neste momento vamos aprofundar nossos conhecimentos e elaborar uma linha de raciocínio para a resolução desse problema.

Solução: Seria natural que o aluno apresentasse a seguinte resolução:

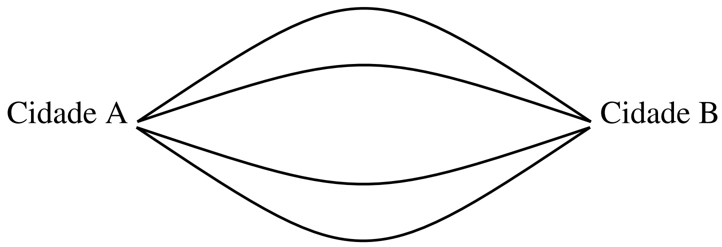
$$\underbrace{\underline{\ 9\ }}_{\neq 0}\,\underline{\ 10\ }\,\underline{\ 10\ }\,\underbrace{\underline{\ 5\ }}_{\text{par}} = 4500$$

Chegamos a essa conclusão pelo raciocínio que para preencher a casa das unidades devemos escolher apenas algarismos pares no total de cinco, já na casa das dezenas e centenas não temos restrição alguma sendo possível escolher qualquer um entre os dez e por fim na casa dos milhares temos a restrição de não começar por zero, sendo assim, possível escolher qualquer um entre os nove restantes.

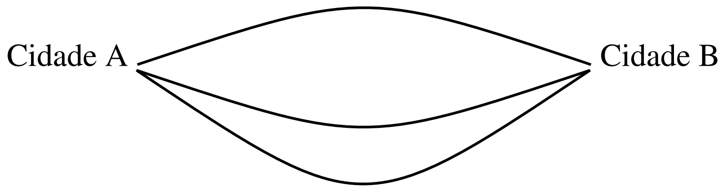
Uma condição muito importante que deve ser considerada como restrição é o fato de que em certos casos não poderemos repetir elementos, ou seja, cada casa deverá ser preenchida por um elemento distinto de qualquer outro já usado. Vejamos o item abaixo:

Exemplo 2.8. *Uma família pretende viajar de carro da cidade A para a cidade B voltando para a cidade A ao fim das férias. Sabe-se que há quatro estradas que ligam as duas cidades. De quantas maneiras essa família pode ir e voltar de forma que a volta seja por uma estrada distinta da que foi usada na viagem de ida?*

Solução: Vamos representar pelo diagrama abaixo para melhor entendimento:



As curvas que ligam as cidades A e B são as quatro estradas possíveis. Note que para fazer a viagem de ida devemos escolher uma dentre as quatro possíveis, ou seja, podemos ir de quatro maneiras diferentes da cidade A para cidade B, no entanto, na volta, não poderemos retornar pela que escolhemos na ida, sobrando assim, apenas três possíveis, isto é:



portanto, concluímos que para fazer a viagem de ida e volta entre as cidades temos 4 x $3 = 12$ maneiras distintas. Usando o modelo que propomos teremos a seguinte solução:

$$\underbrace{\underline{\ 4\ }}_{\text{Ida}}\ \underbrace{\underline{\ 3\ }}_{\text{Volta}} = 12$$

Exemplo 2.9. *Cinco amigos, em um encontro, vão ao cinema onde na sala há apenas cinco poltronas vazias, uma ao lado da outra. De quantas maneiras os cinco amigos poderão se organizar nas poltronas da sala do cinema?*

Solução: Vamos imaginar a seguinte situação. O primeiro indivíduo ao entrar na sala, depara-se com as poltronas vazias e possui cinco opções de escolha,já o segundo indivíduo possui apenas quatro, o terceiro apenas três, o quarto apenas duas e o último indivíduo terá a única opção restante. Portanto, o total de maneiras que os amigos podem se organizar nas poltronas vazias é de:

$$\underline{\ 5\ }\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 2\ }\ \underline{\ 1\ } = 120$$

O exemplo acima é de fácil compreensão para darmos continuidade aos conceitos que estudaremos no decorrer deste trabalho e como vamos fundamentar a ideia de permutação, arranjo e combinação.

Exemplo 2.10. *Quantos são os números pares que podemos formar com quatro algarismos distintos?*

Neste item temos o pequeno problema de não podermos repetir algarismos e o zero. Sabemos que existem cinco algarismos pares disponíveis, no entanto, imagine que nosso número termine em zero, então teríamos nove algarismos disponíveis para primeira casa, caso zero não terminasse nosso número então a primeira casa teria oito algarismos disponíveis (não admitiria zero nem um dos usados na última casa). Neste problema temos duas restrições importantes sendo a maior delas na primeira casa. Para resolver esta dificuldade vamos resolver em duas etapas: a primeira imaginando que o número termina em zero já a segunda que o número não termina em zero. Além disso, neste item vamos fazer um *link* maior com teoria dos conjuntos.

Solução: Primeiramente vamos considerar nosso conjunto $A = \{0, 1, ..., 9\}$ e também utilizar o "princípio da adição de conjuntos":

Se A e B são conjuntos disjuntos, respectivamente, com p e q elementos, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

Dessa maneira estaremos trabalhando o problema dividindo-o em dois casos, como foi dito acima, faremos as duas etapas e somaremos ao final.

Etapa 1: Considerando que nosso número termina em zero, a escolha do algarismo da última casa já foi feita, isto é, temos apenas uma escolha que é o algarismo zero. Na primeira casa podemos usar qualquer algarismo de 1 à 9, ou seja, 9 escolhas, como são elementos distintos na segunda casa teremos 8 escolhas e na terceira apenas 7. No nosso modelo temos que:

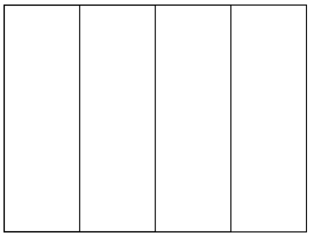
$$\underline{9}\,\underline{8}\,\underline{7}\,\underbrace{\underline{1}}_{\text{zero}} = 504$$

Etapa 2:Agora vamos considerar que nosso número não termina em zero, ou seja, termina em 2, 4, 6 ou 8, isto nos dá a possibilidade de quatro escolhas para a última casa. Na primeira casa não podemos usar o algarismo zero e nem o que foi usado na última casa, isto nos dá apenas oito escolhas, novamente oito escolhas para segunda casa (não podemos escolher o algarismo usado na primeira e nem última casa mas agora podemos usar o zero) e por fim sete escolhas para a terceira casa, ou seja:

$$\underbrace{\underline{8}}_{\neq 0}\,\underline{8}\,\underline{7}\,\underbrace{\underline{4}}_{\text{4 escolhas}} = 1792$$

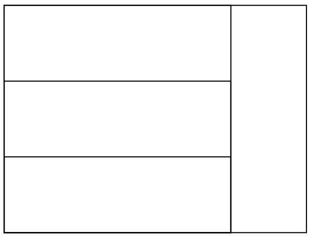
Somando os dois casos teremos $504 + 1792 = 2296$ números pares de quatro algarismos distintos.

Exemplo 2.11. *Dispondo de 6 cores distintas de quantas maneiras podemos pintar a bandeira abaixo de modo que não se repita nenhuma cor?*



Solução: Para pintar a primeira faixa dispomos de seis cores, a segunda faixa de cinco (já que não podemos repetir a cor usada na primeira), na terceira quatro cores e na última faixa três cores, ou seja; 6 x 5 x 4 x 3 = 360 maneiras distintas.

Exemplo 2.12. *Dispondo de 6 cores distintas de quantas maneiras podemos pintar a bandeira abaixo de modo que regiões adjacentes não sejam da mesma cor?*



Note que o problema permite que cores sejam repetidas desde que não estejam em regiões adjacentes.

Solução: Lembremos que é necessário começar nossa resolução partindo das restrições, se existirem. Neste problema, vamos identificar primeiramente a faixa que possui mais regiões adjacentes que é a horizontal central ou a vertical, ambas possuem três regiões de contato, enquanto as restantes apenas duas. Dispondo de seis cores podemos pintar a região central de seis maneiras, a região vertical de cinco maneiras, a primeira faixa horizontal apenas quatro (não podemos repetir a cor da horizontal central e nem da vertical) e por último a terceira faixa horizontal que também são quatro, isto porque a primeira faixa horizontal não faz contato, logo temos 6 x 5 x 4 x 4 = 480 maneiras de pintar a bandeira.

Exemplo 2.13. *Dado o conjunto A com n elementos e o conjunto B com m elementos, onde $n \leq m$ quantas são as funções $f : A \to B$ que são injetoras?*

Solução: Tomando elementos $a_i \in A$ e $b_j \in B$ onde $i = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $j = \{1, 2, \ldots, m\}$ temos que $f(a_1)$ pode ser igual a qualquer um dos m elementos de B, e que $f(a_2)$ pode ser igual a um dos $m - 1$ elementos de B, sendo f é injetiva então $f(a_1) \neq f(a_2)$. Podemos então supor que:

$f(a_1)$ pode chegar em m elementos de B;
$f(a_2)$ pode chegar em $m-1$ elementos de B;
$f(a_3)$ pode chegar em $m-2$ elementos de B;
$\vdots$
$f(a_n)$ pode chegar em $m-(n-1)$ elementos de B,

logo o total de funções injetoras de A em B que existem são:

$m.(m-1).(m-2).\cdots.(m-n+1)$.

Exemplo 2.14. *Quantos são os divisores positivos de 180 que são pares?*

Solução: Primeiramente vamos decompor 180 em fatores primos, temos então que: $2^2.3^2.5 = 180$, podemos expressar também da seguinte maneira: $2^x.3^y.5^z = 180$, isto é, todas as possibilidades de combinarmos os valores de x, y e $z \in \mathbb{N}$ onde $x \in \{0, 1, 2\}$, $y \in \{0, 1, 2\}$ e $z \in \{0, 1\}$, logo 180 admite $3.3.2 = 18$ divisores positivos, como queremos apenas divisores pares, basta que 2 apareça no produto, isto é, $x \in \{1, 2\}$, logo temos $2.3.2 = 12$ divisores pares de 180.

Retomando agora ao problema do quadrado mágico, para que a soma seja 15, apenas utilizando os algarismos de 1 a 9, temos as possibilidades:

$(1,5,9)$	$(1,6,8)$	$(2,4,9)$	$(2,5,8)$
$(2,6,7)$	$(3,4,8)$	$(3,5,7)$	$(4,5,6)$

2.2 Fatorial

O fatorial de um número natural n, onde $n \geq 2$ representado atualmente por $n!$ é o produto de todos os números inteiros positivos menores ou iguais a n. O fatorial de um número natural n, sendo $n \geq 2$ também pode ser definido pela função:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

portanto:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 ... \times n$$

dessa maneira concluímos que fatorial é uma função definida por recorrência onde:

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

Veja que:

$2! = 2 \times 1 = 2$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

Outra maneira de apresentar a função fatorial, porém, estendendo para não-inteiros é definindo pela função Gama:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

Vamos calcular sua integral para mostrar que a função Gama é uma função que generaliza a função fatorial.

Aplicaremos para $n+1$ a fim de verificar a recorrência, temos que:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^{n+1-1} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^{n} e^{-x} dx$$

Utilizando integração por partes:

$u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1}dx$ e

$dv = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$

Teremos que:

$$\int udv = uv - \int vdu \Rightarrow [-x^n e^{-x}]\Big|_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

Notemos primeiramente que:

$$[-x^n e^{-x}]\Big|_0^\infty = 0$$

Portanto:

$$\Gamma(n+1) = n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

Assim podemos concluir que:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

É fácil verificar que igualdade $\Gamma(2) = 1\Gamma(1)$ = 1 x 1 = 1 quando $n = 1$, ou seja, $1! = 1$. Partindo desse ponto temos a recorrência:

$\Gamma(3) = 2\Gamma(2)$ = 2 x 1

$\Gamma(4) = 3\Gamma(3)$ = 3 x 2 x 1

$\Gamma(5) = 4\Gamma(4)$ = 4 x 3 x 2 x 1

Em particular podemos provar, usando a função gama, que $0! = 1$. Uma maneira simples de se provar a afirmação acima para alunos do ensino médio é usar a demostração abaixo:

Como $(n + 1)!$ = $(n + 1)$ x $n!$, usaremos $n = 0$ e portanto teremos que $(0 + 1)!$ = $(0 + 1)$ x $0!$, logo $1!$ = 1 . $0!$, como $1! = 1$ então podemos concluir que $0! = 1$.

2.2.1 Operações com fatorial

Algumas operações, comumente aplicadas, não são válidas na função fatorial:

Sendo x e y pertencentes aos naturais então **não** é válido que:

1. $x! + y!$ = $(x + y)!$
2. $x! - y!$ = $(x - y)!$
3. $x!$. $y!$ = $(x.y)!$

A nossa maior ferramenta ao usar o fatorial, no momento, será reescrever um número fatorial em relação a outro, como por exemplo, podemos escrever $8!$ = 8 . 7 . $6!$, isto é, escrevemos $8!$ em relação a $6!$.

Propriedade 2.1. *Dado n e k pertencentes aos naturais , com $k < n$ então, $n! = n(n-1)\ldots(n-k)!$*

Como $k < n$ então teremos que exatamente um dos fatores de $n!$ é igual a $n - k$, ou seja:

$$n! = n(n-1)\ldots\overbrace{(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\ldots 1}^{\text{(n-k)!}}.$$

$$n! = n(n-1)\ldots(n-k)!$$

Exemplo 2.15. *Calcule $\dfrac{8!}{6!}$.*

Solução: Podemos fazer de duas maneiras, a primeira de maneira mais demorada que consiste em calcular o numerador e o denominador, já a segunda aplicando a ideia acima mostrada. Vejamos as duas formas:

$$\frac{8!}{6!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{6.5.4.3.2.1} = \frac{40320}{720} = 56 \text{ ou simplesmente } \frac{8!}{6!} = \frac{8.7.6!}{6!} = 8.7 = 56.$$

Exemplo 2.16. *Calcule* $\dfrac{12!}{10!.2!}$.

Solução: Usando o mesmo método acima mostrado vamos escrever na forma $\dfrac{12.11.10!}{10!.2!} = \dfrac{12.11}{2!} = \dfrac{12.11}{2} = 66.$

Vamos verificar outros exemplos.

Exemplo 2.17. *Calcule* $\dfrac{6! + 4!}{5!}$.

Solução: Vamos escrever em um único fatorial comum, ou seja:

$$\frac{6! + 4!}{5!} = \frac{6.5.4! + 4!}{5.4!} = \frac{4!(30 + 1)}{5.4!} = \frac{31}{5}.$$

Exemplo 2.18. *Calcule* $\dfrac{7! + 5!}{7! - 6!}$.

Solução: Escrevendo todos em relação a $5!$ que é o menor número, temos que:

$$\frac{7! + 5!}{7! - 6!} = \frac{7.6.5! + 5!}{7.6.5! - 6.5!} = \frac{5!(42 + 1)}{5!(42 - 6)} = \frac{43}{36}.$$

Exemplo 2.19. *Calcule* $\dfrac{6!^2}{7!.5!}$.

Solução: $\dfrac{6!^2}{7!.5!} = \dfrac{6!.6!}{7!.5!} = \dfrac{6!.6.5!}{7.6!.5!} = \dfrac{6}{7}$

Note que $(n!)^2 \neq (n^2)!$.

Além disso, podemos nos deparar com expressões e equações fatoriais que não diferencia a ideia até aqui usada.

Exemplo 2.20. *Simplifique a expressão* $\dfrac{(n + 2)!}{n!}$.

Solução: Basta escrevermos $(n + 2)!$ em relação a $n!$, isto é:

$$\frac{(n + 2)!}{n!} = \frac{(n + 2).(n + 1).n!}{n!} = (n + 2).(n + 1).$$

Exemplo 2.21. *Simplifique a expressão* $\dfrac{(n - 1)! + n!}{(n + 1)!}$.

Solução: $\dfrac{(n - 1)! + n!}{(n + 1)!} = \dfrac{(n - 1)! + n.(n - 1)!}{(n + 1).n.(n - 1)!} = \dfrac{(n - 1)!.(n + 1)}{(n + 1).n.(n - 1)!} = \dfrac{1}{n}.$

Exemplo 2.22. *Calcule o valor de n para que* $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30.$

Solução: $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30 \Rightarrow \dfrac{(n+1).n.(n-1)!}{(n-1)!} = 30 \Rightarrow (n+1).n = 30 \Rightarrow n^2+n-30 = 0.$

Calculando as raízes da equação de segundo grau acima encontramos $n_1 = 5$ e $n_2 = -6$, temos então que $n = 5$.

Exemplo 2.23. *Quantos são os divisores positivos de 5!?*

Solução: Basta calcularmos a maior potência de cada fator primo menor ou igual que 5. Vamos representar por $\left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor$ a parte inteira da divisão de n por p. Temos:

Maior potência de 2 que divide $5!$ é $\left\lfloor \dfrac{5}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{5}{4} \right\rfloor = 3$

Maior potência de 3 que divide $5!$ é $\left\lfloor \dfrac{5}{3} \right\rfloor = 1$

Maior potência de 5 que divide $5!$ é $\left\lfloor \dfrac{5}{5} \right\rfloor = 1$

Portanto $2^3.3.5 = 5!$. Logo podemos escrever $2^x.3^y.5^z = 5!$ onde $x \in \{0,1,2,3\}$, $y \in \{0,1\}$ e $z \in \{0,1\}$ concluímos então que $5!$ admite $4 \times 2 \times 2 = 16$ divisores positivos.

2.3 Permutações

No ensino básico normalmente são apresentados aos nossos alunos apenas as permutações simples e com repetição de elementos. Neste artigo vamos, além de nos apropriar desses conceitos básicos, estudar também a relevância das permutações circulares e mais adiante as caóticas como métodos de contagem.

Permutação é o ato de trocar a posição de dois ou mais elementos entre si a fim de que se encontre uma nova ordem para esses elementos.

2.3.1 Permutações Simples

O conceito de permutação simples parte naturalmente da ideia de fatorial. Suponhamos que queremos ordenar n objetos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ todos distintos, então temos n casas para dispor os n objetos. Para preenchermos a primeira casa temos n escolhas possíveis, a segunda casa temos $n-1$ possibilidades de escolha e assim por diante. Vamos representar através do nosso modelo para melhor visualização:

$$\underbrace{\underline{n}}_{\text{1º Escolha}} \; \underbrace{\underline{n-1}}_{\text{2º Escolha}} \; \underbrace{\underline{n-2}}_{\text{3º Escolha}} \cdots \underbrace{\underline{1}}_{\text{Última Escolha}} = n!$$

Definição 2.1. *Dados n objetos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ todos distintos, então a quantidade de maneiras que podemos permutá-los é dado por $P_n = n!$.*

Vamos considerar o conjunto $A = \{a, b, c\}$, com três elementos,logo podemos ordená-los de seis maneiras diferentes: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$, isto é, $P_3 = 3! = 6$.

Exemplo 2.24. *Um grupo de oito pessoas, onde metade são homens, esperam sentados em fila para uma entrevista de emprego. De quantas maneiras podem se sentar:*

(a) Em qualquer ordem?

(b) Homens e mulheres sempre juntos?

(c) Mulheres sempre juntas?

(d) Mulheres e homens intercalados?

Solução *(a)*: Como podem se sentar em qualquer ordem podemos, simplesmente, usar a definição para calcular o total de permutações de 8 elementos, ou seja, $P_8 = 8!$

Solução *(b)*: Neste caso usaremos nosso modelo para a resolução. Vamos criar nossas oito casas, onde as quatro primeiras serão ocupadas pelos homens e as quatro últimas pelas mulheres. Distribuindo os elementos teremos que:

$$\underbrace{\overbrace{\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}}^{P_4}}_{\text{Homens}}\ \underbrace{\overbrace{\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}}^{P_4}}_{\text{Mulheres}}$$

Além disso, podemos ter que as mulheres ocupam os quatro primeiros lugares e os homens os quatro últimos, sendo assim, também temos:

$$\underbrace{\overbrace{\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}}^{P_4}}_{\text{Mulheres}}\ \underbrace{\overbrace{\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}}^{P_4}}_{\text{Homens}}$$

Portanto, concluímos que os grupos também permutam, logo homens e mulheres juntos podem se sentar de $P_2 \times P_4 \times P_4 = 2! \cdot 4! \cdot 4! = 1152$ maneiras.

Solução *(c)*: Neste item queremos que o grupo de mulheres sempre estejam juntas, independente se os homens estão juntos ou não. Neste caso, vamos considerar o grupo de mulheres como um único elemento (esse método poderia ser aplicado no item b), temos abaixo uma possível combinação:

$$\underbrace{\underline{\quad}}_{\text{Mulheres}}\ \underbrace{\underline{\quad}}_{\text{Homem}}\ \underbrace{\underline{\quad}}_{\text{Homem}}\ \underbrace{\underline{\quad}}_{\text{Homem}}\ \underbrace{\underline{\quad}}_{\text{Homem}}$$

Com isso temos P_4 das mulheres, P_4 dos homens e outras 5 possibilidades de ordenar o grupo das mulheres: $MHHHH, HMHHH, HHMHH, HHHMH$ e $HHHHM$, portanto temos $5.P_4.P_4$ maneiras.

Solução *(d)*: Neste caso temos apenas duas situações a considerar: $HMHMHMHM$ ou $MHMHMHMH$, portanto, teremos em ambos os casos a mesma formação abaixo:

$$\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{1}$$

Sendo a nossa resposta $2 \cdot 24 \cdot 24 = 1152$.

Exemplo 2.25. *Três casais, em um encontro de amigos, sentam-se no banco de um parque. Quantas são as maneiras que os amigos podem se acomodar de modo que os casais sempre fiquem juntos?*

Solução: Considere os três casais c_1, c_2, c_3 sendo que para cada casal temos duas possibilidades de acomodação: HM ou MH, isto é, cada casal pode se acomodar de P_2 modos, além disso, pode ocorrer a permuta de casais, ou seja, P_3 e portanto temos $P_2.P_2.P_2.P_3 = 48$ maneiras.

Exemplo 2.26. *Considere a palavra PERNAMBUCO:*

(a) Quantos são os anagramas?

(b) Quantos anagramas começam por A?

(c) Quantos anagramas começam por PER nessa ordem?

(d) Quantos anagramas tem-se as letras PER juntas em qualquer ordem?

(e) Quantos anagramas começam por vogal?

(f) Quantos anagramas começam por consoante?

Anagramas são permutações das letras que compõe uma palavra fazendo elas sentido ou não.

Solução *(a)*: Tendo a nossa palavra 10 letras distintas temos que a quantidade de permutações de 10 elementos é P_{10}.

Solução *(b)*: Para resolver este problema basta fixarmos a primeira letra como sendo A, e calcular a quantidade de permutações das letras restantes, ou seja, temos P_9 anagramas que começam por A.

Solução *(c)*: Semelhante ao item anterior. Neste caso vamos fixar as três primeiras letras e calcular a quantidade de permutações das letras restantes, ou seja, temos P_7 anagramas que começam por PER nessa ordem.

Solução *(d)*: Neste item queremos as letras PER juntas em qualquer ordem e em qualquer posição. Consideremos PER uma única letra que pode ocupar uma das 8 posições:

$$\underline{PER}\ \_\ \ \_\ \ \_\ \ \_\ \ \_\ \ \_\ \ \_$$

Logo teremos P_7 das letras restantes, P_3 da permutação das letras de PER, portanto temos $8.P_7.P_3$ anagramas.

Solução *(e)*: De maneira análoga aos itens b e c vamos fixar a primeira letra sendo vogal, logo temos 4 possibilidades para a primeira casa e temos P_9 das letras restantes, logo são $4.P_9$ anagramas.

Solução *(f)*: Análogo ao item anterior. Fixando a primeira letra sendo consoante temos $6.P_9$ anagramas.

Exemplo 2.27. *Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, \ldots, n$, nas quais o elemento que ocupa a k-ésima posição é inferior a $k + 3$ para todo k?*

Solução: Sendo $k = 1$, a primeira posição, $k = 2$ a segunda e assim por diante, temos 3 possibilidades para a primeira casa, pois o número que deve aparecer é menor que 4. Para a segunda posição o elemento escolhido deve ser um número menor que 5 e diferente do usado na primeira casa, logo temos 3 possibilidades, essa configuração se repete até a posição $k = n-2$. Note que quando $k = n - 2$ então todo número nesta posição deve ser menor que $n + 1$, logo temos n possibilidades menos os $n - 3$ elementos usados anteriormente, ou seja, temos $n-(n-3)$, isto é, 3 possibilidades. Quando $k = n-1$, então todo elemento nessa posição deve ser menor que $n + 2$, onde da mesma forma temos n possibilidades, no entanto, subtraído dos $n - 2$ elementos usados anteriormente, portanto temos 2 possibilidades e, quando $k = n$ temos $n - (n - 1)$, apenas 1 possibilidade. Portanto, concluímos que existem 2.3^{n-2} permutações.

Proposição 2.1. *As permutações simples dos números $1, 2, \cdots, n$, nas quais o elemento que ocupa a k-ésima posição é inferior a $k + p$, para todo $p \leq n$, é dada por $p^{n-p+1}.(p-1)!$.*

Demonstração. Tomando $k = 1$ temos que todo número nessa posição deve ser menor que $1+p$ logo teremos p possibilidades. Agora tomando $k = 2$ temos que todo número nessa posição deve ser menor que $2+p$, teríamos então $p+1$ possibilidades, porém, um elemento já foi usado na casa anterior, sendo assim, temos $(p+1)-1$, ou seja, p números disponíveis para a segunda casa. No caso de $k = 3$ teríamos $p + 2$ possibilidades menos os dois números já usados e, portanto p números disponíveis. Note que esse comportamento se repete até a casa $k = n-p+1$ onde todo número nesta posição deve ser menor que $n+1$, ora, se temos n possibilidades e $n-p$ números já usados, então, temos p números disponíveis, portanto, temos p^{n-p+1} permutações.

Verificando agora para $k = n - p + 2$ então todo número nesta posição deve ser menor que $n + 2$, logo temos $n - (n - p + 1) = p - 1$ números disponíveis. Note que para as próximas casas sempre teremos um elemento a menos, teríamos então, $(p - 1)(p - 2). \ldots .1 = (p - 1)!$. Logo, as permutações são $p^{n - p + 1}.(p - 1)!$. $\square$

Exemplo 2.28. *De quantos maneiras podemos dividir n pessoas em dois grupos de modo que em um grupo haja exatamente k pessoas com $0 < k < n$?*

Solução *(a)*: Sabendo que há n pessoas teremos, inicialmente, P_n maneiras de organizá-los. Entretanto consideremos a divisão dos grupos: $G_1 = \#k$ e $G_2 = \#n - k$ onde a ordem dos grupos nem a disposição dos indivíduos fazem diferença, isto é, formar :

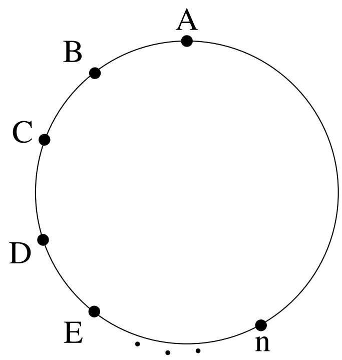
$$\underbrace{G_1}_{\text{k elementos}} \quad \underbrace{G_2}_{\text{n-k elementos}} = \underbrace{G_2}_{\text{n-k elementos}} \quad \underbrace{G_1}_{\text{k elementos}}$$

.

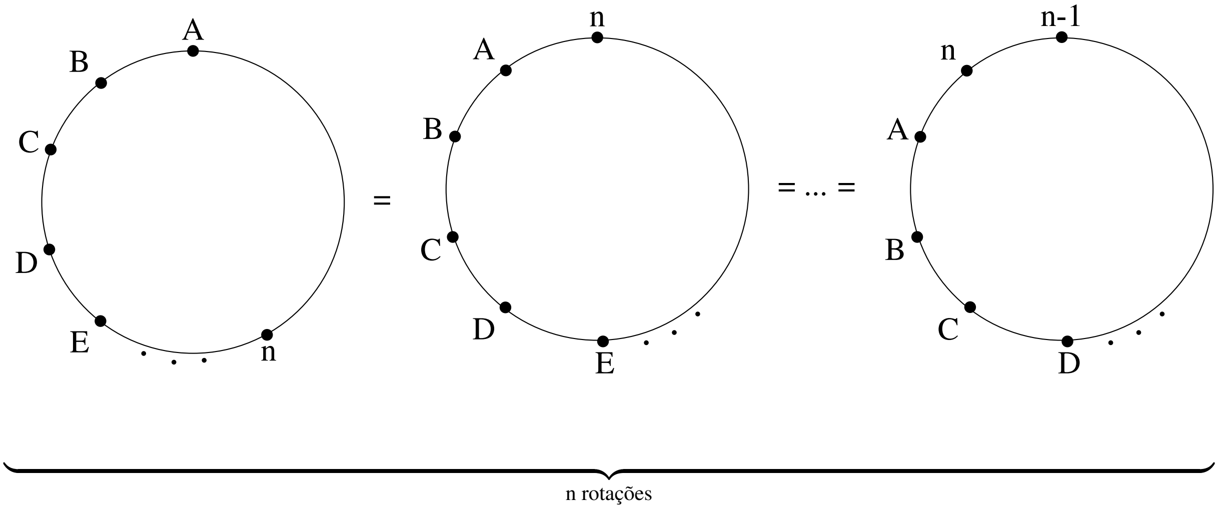
Significa que a ordem de formação dos grupos não diferem, portanto estaremos contanto duas vezes e assim, vamos retirar dividindo por P_2. Além disso, a disposição dos indivíduos de cada grupo também não diferem, logo devemos retirar as formações iguais que são P_k e P_{n-k}. Então concluímos que a quantidade de maneiras que podemos dividir n pessoas em dois grupos são: $\dfrac{n!}{2.k!.(n-k)!}$.

2.3.2 Permutações Circulares

Vamos determinar de quantas maneiras podemos dispor n objetos distintos em n posições de mesmo espaçamento pertencentes a um círculo. Considere o conjunto de pontos $A, B, C, ..., n$:



Queremos permutar a ordem de n pontos pertencentes a uma mesma circunferência, logo teremos $P_n = n!$ formas de fazê-lo, no entanto, algumas disposições não diferem uma da outra, uma vez que podemos obtê-las por rotação. Considerando a figura acima como a primeira possibilidade de disposição dos elementos temos que:



Assim, devemos retirar as n disposições iguais, portanto, temos que a permutação circular de n elementos é dada por: $PC_n = \dfrac{n!}{n}$, ou seja, $PC_n = (n-1)!$.

Tomando $n = 1$, temos apenas um elemento para permutar e portanto temos apenas uma disposição, isto é, $PC_n = \dfrac{1!}{1} = 1$. Suponha que para n seja verdade, vamos provar para $n+1$. Tomando $n+1$ elementos, então temos que a quantidade de permutações são: $P_{n+1} = (n+1)!$, além disso, temos $n+1$ disposições iguais por rotação. Portanto, a permutação de $n+1$ elementos dispostos em uma circunferência é: $PC_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{n+1} \Rightarrow PC_{n+1} = n!$.

Exemplo 2.29. *De quantos modos n casais podem formar uma roda de oração de modo que cada homem permaneça ao lado de sua esposa?*

Solução: Considerando as n pessoas do sexo masculino temos que $PC_n = (n-1)!$ é a quantidade de permutações circulares dos homens, como suas respectivas esposas permanecem ao lado, para cada esposa teremos uma única possibilidade, no entanto, devemos considerar a permutação do casal temos 2^n formas de fazê-lo, ou seja, teremos $2^n.(n-1)!$ modos.

Exemplo 2.30. *De quantos modos n crianças podem se sentar em uma brincadeira de roda se p crianças, com $p < n$, devem ficar juntas?*

Solução: Vamos considerar p um único elemento de n, portanto teremos uma permutação circular de $n-p+1$ elementos, além disso, podemos permutar as p crianças, logo, temos: $p!PC_{n-p+1}$, ou seja, $p!(n-p)!$ modos.

2.4 Arranjos Simples

Considere um conjunto de n elementos, todos distintos, do qual devemos escolher k elementos, $k \leq n$, para formar um novo agrupamento, devemos então, determinar quantos agrupamentos distintos podemos formar tomando sempre k elementos. Esse tipo de formação se diferencia pela disposição de seus elementos. Normalmente, nossos alunos confundem arranjos e combinações, porém, vale comentar que formações as quais devemos atentar para a harmonia em que os elementos estão dispostos são consideradas distintas.

Seja A um conjunto com n elementos, todos distintos, no qual vamos escolher apenas k para compor uma formação:

$$\underbrace{\_\_ \quad \_\_ \quad \_\_ \quad \cdots \quad \_\_}_{\text{k casas}}$$

Temos n escolhas para a primeira casa, $n-1$ para a segunda, $n-2$ para a terceira e assim sucessivamente. Perceba que na casa k já teremos usado $k-1$ elementos, logo a quantidade de escolhas possíveis será $n-(k-1)=n-k+1$ e, portanto, teremos o produto $n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1)$. Vamos chamar de $A_{n,k}$ o arranjo de n elementos tomados k a k, ou seja:

$$A_{n,k} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1)$$

Vamos reescreve-la para chegarmos na fórmula apresentada para nossos alunos. Devemos multiplicar e dividir por $(n-p)!$ logo:

$$\begin{aligned}
A_{n,k} &= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1)\frac{(n-k)!}{(n-k)!} \\
A_{n,k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} && \text{(Pela propriedade 2.1)} \\
A_{n,k} &= \frac{n!}{(n-k)!}
\end{aligned}$$

Com intuito de apenas relacionar os conceitos perceba que: $A_{n,k} = \dfrac{P_n}{P_{n-k}}$.

Exemplo 2.31. *Em uma prova de natação três atletas ingleses, dois brasileiros e dois argentinos buscam o pódio. De quantas maneiras é possível fazer a premiação (ouro, prata e bronze):*

(a) O pódio é formado por um de cada país?

(b) Entre os atletas?

(c) Se um brasileiro é ouro?

(d) Se apenas um brasileiro recebe medalha?

(e) Se nenhum brasileiro recebe medalha?

Primeiramente notemos que determinamos uma ordem (primeiro, segundo e terceiro colocado), esse fato torna que as formações criadas são distintas, ou seja, trata-se de um arranjo.

Solução *(a):* Vamos resolver por permutação. Sendo o pódio formado por um de cada país temos:

$$\underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{2} \quad P_3$$

Onde 3 é o total de ingleses, 2 brasileiros e 2 argentinos, já P_3 são as permutações possíveis de premiação, logo temos 72 pódios com um de cada país.

Solução *(b)*: Como não há restrições a premiação deve ser considerada entre os oito atletas. Sendo assim:

$$\underline{\ 8\ } \quad \underline{\ 7\ } \quad \underline{\ 6\ } \quad \text{ou} \quad A_{8,3} = \frac{8!}{5!}$$

Solução *(c)*: Como um brasileiro é ouro temos 2 atletas para a primeira posição, em seguida temos 7 e por fim 6. Logo temos:

$$\underline{\ 2\ } \quad \underline{\ 7\ } \quad \underline{\ 6\ } \quad \text{ou} \quad 2.A_{7,2} = 2.\frac{7!}{5!}$$

Solução *(d)*: Temos que considerar um dos brasileiros em qualquer das três posições e excluir a possibilidade do outro brasileiro receber medalha, portanto temos:

$$3.2.A_{6,2} = 6.\frac{6!}{4!}$$

Solução *(e)*: Basta excluir os brasileiros das formações, ou seja, basta calcular $A_{6,3} = \dfrac{6!}{3!}$.

Exemplo 2.32. *Serão escolhidos três dos 10 alunos de uma sala para formar uma banca onde figura um líder, um auxiliar e um assistente. Quantas são as maneiras de criar este grupo?*

Solução: Como figura uma ordem para formação e não pode haver acúmulo de cargo então basta calcular $A_{10,3} = \dfrac{10!}{7!}$.

2.5 Arranjo com repetição

Considere um conjunto de n elementos, todos distintos, do qual devemos escolher k elementos onde existe a possibilidade de repeti-los os para formar um novo agrupamento. Sendo assim, temos n escolhas para a casa $k = 1$, para casa $k = 2$ temos a possibilidade de repetir o elemento usado na casa anterior e, portanto, temos n escolhas. Seguindo esse raciocínio teremos k casas cada uma com n escolhas possíveis, ou seja, n^k formações. Chamaremos de $AR_{n,k} = n^k$ os arranjos em que são possíveis repetir elementos.

Exemplo 2.33. *De quantas formas podemos pintar uma bandeira de cinco faixas dispondo de quatro cores distintas?*

Solução: Vamos usar nosso modelo para representar a fórmula:

$$\underbrace{\underline{\ 4\ }}_{\text{Faixa 1}} \quad \underbrace{\underline{\ 4\ }}_{\text{Faixa 2}} \quad \underbrace{\underline{\ 4\ }}_{\text{Faixa 3}} \quad \underbrace{\underline{\ 4\ }}_{\text{Faixa 4}} \quad \underbrace{\underline{\ 4\ }}_{\text{Faixa 5}} = AR_{4,5} = 4^5$$

Exemplo 2.34. *Determine quantas formações com três elementos do conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ apresenta pelos menos um elemento repetido.*

Solução: Basta calcularmos o total de formações possíveis usando os quatro elementos, isto é, considerando repetição e subtrair das formações que são compostas por elementos diferentes. Portanto, devemos calcular $AR_{4,3} - A_{4,3}$ que é igual a 40.

Exemplo 2.35. *Uma prova objetiva é composta por seis questões de verdadeiro ou falso. Quantas são as modos de responder a essa prova se devo acertar pelo menos uma questão?*

Solução: Cada questão pode ser respondida de duas maneiras V(verdadeiro) ou F(falso), ou seja, temos 2^6 modos de responder, no entanto, deve-se acertar pelo menos uma questão, portanto, devemos subtrair a possibilidade de se errar todas. Conclui-se que temos $2^6 - 1$ formas.

2.6 Combinações simples

Considere um conjunto de n elementos distintos e todos os subconjuntos com k elementos, $k \leq n$, devemos então, determinar quantos subconjuntos distintos podemos formar tomando sempre k elementos. Esse tipo de formação não se diferencia pela disposição de seus elementos, uma vez que a ordem dos elementos não figura mudança no subconjunto, isto é, dado os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, a, c\}$ e $C = \{a, c, b\}$, temos que $A = B = C$.

É importante observar a diferença entre arranjos e combinações, mesmo que seja possível em quase todos os casos se resolver sem usar as fórmulas, no entanto, existem exercícios que admite o uso da fórmula como maneira mais simples de resolução já outros é preferível nosso modelo apresentado até o momento. Na maioria dos casos essa dúvida é eliminada quando o aluno pergunta a si mesmo se a ordem é importante. Definimos arranjo quando a ordem dos elementos configura uma nova roupagem, ou seja, quando trocamos elementos de posição percebemos que a mudança afeta de alguma maneira a formação. Vamos observar os itens abaixo:

1. Estão disponíveis três vagas em um pequeno hotel para os cargos de gerente, vice gerente e assistente. Quantas são as formações possíveis se oito pessoas se candidataram a essas vagas?

2. Estão disponíveis três vagas em um pequeno hotel para o cargo de assistente. Quantas são as formações possíveis se oito pessoas se candidataram a essas vagas?

Conseguimos perceber a clara diferença na escrita mas a ideia aparentemente é a mesma nos dois itens e somos induzidos a criar três casas e simplesmente calcular $8.7.6$ para ambos os casos. O ponto que queremos destacar: o primeiro item impomos cargos o que caracteriza diferença, seja ela salarial ou por outro motivo, entretanto, no item 2 estão disponíveis três vagas para o mesmo cargo, isto é, quando houver a permuta dos indivíduos que compõe os cargos não vamos considerar uma nova formação, portanto, estaremos contanto mais de uma vez a mesma formação.

Vamos determinar quantos subconjuntos com k elementos é possível formar dispondo de um conjunto A com n elementos onde $k \leq n$. Aplicaremos a mesma ideia usada na dedução da fórmula do arranjo:

Temos n escolhas para a primeira casa, $n-1$ para a segunda, $n-2$ para a terceira e assim sucessivamente. Perceba que na casa k já teremos usado $k-1$ elementos, logo a quantidade de escolhas possíveis será $n-(k-1) = n-k+1$ e, portanto, teremos o produto $n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-k+1)$, porém, as permutações dos k elementos devem ser retiradas, pois configuram o mesmo subconjunto de A, ou seja, devemos dividir o produto por $k!$. Vamos chamar de $C_{n,k}$ todos os subconjuntos com k elementos. Logo,

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Vamos reescreve-la para chegarmos na fórmula apresentada para nossos alunos. Devemos multiplicar e dividir por $(n-p)!$ logo:

$$\begin{aligned}
C_{n,k} &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{(n-k)!}{(n-k)!} \\
C_{n,k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} && \text{(Pela propriedade 2.1)} \\
C_{n,k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}
\end{aligned}$$

Podemos relacionar os conceitos para percebermos que $k!$ representa as permutações de mesma formação, pois:

$$C_{n,k} = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}}$$

Uma outra maneira que podemos representar a combinação de n elementos tomados k a k é: $\binom{n}{k}$, ou seja,

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

.

Exemplo 2.36. *De uma turma de oito alunos, entre eles Amanda e Bruno, três serão escolhidos para representar a turma em uma gincana escolar. Sabendo que Amanda e Bruno não se dão* *bem e, portanto, não ficarão juntos quantos são os grupos que podem ser formados?*

Solução: Temos três formas para formar o grupo, a primeira considerando que Amanda está e Bruno não, a segunda que Bruno está e Amanda não e a terceira que ambos não estejam. Vamos calcular as três etapas e somar os resultados já que as formações são disjuntas.

Etapa 1: Considerando que Amanda está no grupo e excluindo a possibilidade de bruno está sobram duas vagas para preencher, portanto teremos $C_{6,2}$.

Etapa 2: Considerando que Bruno está no grupo e excluindo a possibilidade de Amanda está sobram duas vagas para preencher, portanto teremos $C_{6,2}$.

Etapa 3: Considerando que Amanda e bruno não estão no grupo temos as três vagas para preencher, portanto teremos $C_{6,3}$. Temos $C_{6,2} + C_{6,2} + C_{6,3} = 15 + 15 + 20 = 50$ grupos.

Exemplo 2.37. *Um concurso oferece sete vagas onde se inscreveram 8 homens e 7 mulheres. De quantas maneiras as vagas podem ser preenchidas se pelo menos uma mulher e um homem devem ser contratados?*

Solução: Se deve configurar pelo menos uma mulher e um homem temos as possíveis formações e suas respectivas combinações:

$$\overbrace{\underline{H}}^{C_{8,1}}\ \overbrace{\underline{M}\ \underline{M}\ \underline{M}\ \underline{M}\ \underline{M}\ \underline{M}}^{C_{7,6}}$$

$$\overbrace{\underline{H}\ \underline{H}}^{C_{8,2}}\ \overbrace{\underline{M}\ \underline{M}\ \underline{M}\ \underline{M}\ \underline{M}}^{C_{7,5}}$$

$$\overbrace{\underline{H}\ \underline{H}\ \underline{H}}^{C_{8,3}}\ \overbrace{\underline{M}\ \underline{M}\ \underline{M}\ \underline{M}}^{C_{7,4}}$$

$$\overbrace{\underline{H}\ \underline{H}\ \underline{H}\ \underline{H}}^{C_{8,4}}\ \overbrace{\underline{M}\ \underline{M}\ \underline{M}}^{C_{7,3}}$$

$$\overbrace{\underline{H}\ \underline{H}\ \underline{H}\ \underline{H}\ \underline{H}}^{C_{8,5}}\ \overbrace{\underline{M}\ \underline{M}}^{C_{7,2}}$$

$$\overbrace{\underline{H}\ \underline{H}\ \underline{H}\ \underline{H}\ \underline{H}\ \underline{H}}^{C_{8,6}}\ \overbrace{\underline{M}}^{C_{7,1}}$$

Equivalente a:

$$\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{6} + \binom{8}{2}\cdot\binom{7}{5} + \binom{8}{3}\cdot\binom{7}{4} + \binom{8}{4}\cdot\binom{7}{3} + \binom{8}{5}\cdot\binom{7}{2} + \binom{8}{6}\cdot\binom{7}{1} =$$

$$8.7 + 28.21 + 56.35 + 70.35 + 56.21 + 28.7 =$$

$$56 + 588 + 1960 + 3450 + 1176 + 196 =$$

$$7426$$

Exemplo 2.38. *Em um acampamento jovem quatro homens e três mulheres dispõe de três barracas para acampar, uma com capacidade para três pessoas e as outras duas com capacidade para duas pessoas. De quantas maneiras podem se organizar na barraca de forma que homens e mulheres não fiquem juntos?*

Solução: Para que a condição seja atendida os homens devem se organizar nas barracas que dispões de duas vagas. Podemos combinar 4 homens para duas vagas na primeira barraca, logo, temos $C_{4,2}$, para a segunda barraca que possui duas vagas teremos dois homens, logo temos $C_{2,2}$ e por fim restam as três vagas na última barraca, isto é, $C_{3,3}$. Portanto, teremos $C_{4,2}.C_{2,2}.C_{3,3} = 6$.

Exemplo 2.39. *Considere um conjunto A com 20 pontos no espaço que tem um subconjunto A_1 formado por 8 pontos coplanares. Sabe-se que toda vez que 4 pontos de A são coplanares, então eles são pontos de A_1. Quantos são os planos que contêm pelo menos três pontos de A.*

Solução: Vamos numerar as formas de determinar um plano.

1. Três pontos de A.
2. Dois pontos de A e um de A_1.
3. Um ponto de A e dois de A_1.
4. Três pontos de A_1, no entanto, as combinações representam um único plano, pois são coplanares.

$$C_{12,3} + C_{12,2}.C_{8,1} + C_{12,1}.C_{8,2} + 1 = 220 + 528 + 336 + 1 = 1085$$

Exemplo 2.40. *Sejam $I_m = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, com $m \leq n$ quantas são as funções $f : I_m \to I_n$ estritamente crescentes ?*

Solução: Para que tenhamos uma função todo elemento $x \in I_m$ tem-se exatamente um elemento $y \in I_n$ associado, isto é, todo elemento de I_m deve ser combinado com um elemento de I_n. Vamos primeiramente calcular a quantidade de funções possíveis: selecionando um elemento de I_m temos n possibilidades para associá-lo. Selecionando o segundo elemento de I_m temos $n - 1$ possibilidades para associá-lo. Seguindo o raciocínio o m-ésimo elemento de I_m teremos $n - m + 1$ possibilidades. Logo podemos formar $A_{n,m}$ funções. No entanto, queremos funções crescentes, para isso basta dividir por $m!$ e, portanto, teremos $C_{n,m}$ funções estritamente crescentes.

Exemplo 2.41. *O conjunto A possui p elementos e o conjunto B possui n elementos. Determine o número de funções $f : A \to B$ que são sobrejetoras quando:*
(a) $p = n$
(a) $p = n + 1$

Vale lembrar que para uma função ser sobrejetora é necessário que para todo elemento $y \in B$ exista um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Solução *(a):* Selecionando o primeiro elemento de A temos n possibilidade para associá-lo. Selecionando o segundo elemento de A temos $n - 1$ possibilidades, ou seja, teremos $n!$ funções sobrejetoras.

Solução *(b):* Como temos $n + 1$ elementos no domínio então, dois deles serão associados a um mesmo elemento de B portanto, temos, $C_{n+1,2}$ subconjuntos com dois elementos de A que podem ser associados a um elemento de B. Considerando os possíveis subconjuntos como único elemento, então, teremos $n!$ possibilidades e, portanto, temos $n!C_{n+1,2}$

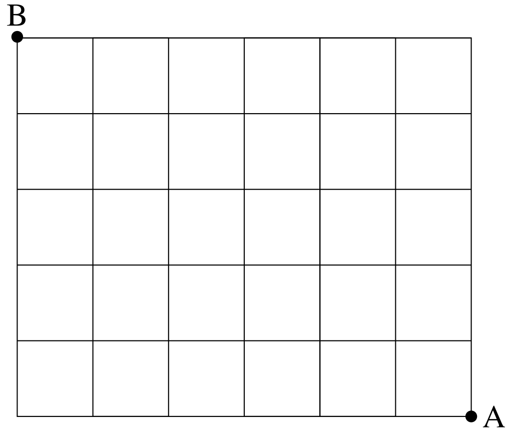
Exemplo 2.42. *Em uma empresa estão abertas cinco vagas onde figura um gerente, um auxiliar e o restante das vagas para assistentes. Sabendo que 10 pessoas se candidataram as vagas quantas são as possíveis formações?*

Solução: Notemos que este problema envolve arranjo e combinação. Temos 10 maneiras de escolher o gerente e 9 maneiras o auxiliar, ou seja, $A_{10,2}$. O restante das vagas devem ser preenchidas entre as 8 pessoas, no entanto, por não diferenciar as formações teremos $C_{8,3}$. Portanto, temos $A_{10,2}C_{8,3} \Rightarrow 90 \times 56 \Rightarrow 5040$.

Exemplo 2.43. *Considere n, com $n > 2$, ponto em um plano no qual há exatamente p pontos colineares, com $p \leq n$. Quantas são as retas que podemos formar com estes pontos?*

Solução: Podemos formar $C_{n,2}$ retas com n pontos dados e como p pontos são colineares então $C_{p,2}$ vale por 1 plano. Portanto, temos: $C_{n,2} - C_{p,2} + 1$.

Exemplo 2.44. *A malha abaixo representa o movimento de uma partícula do ponto A ao B podendo se locomover apenas para a esquerda e para cima. Quantos são os possíveis caminhos da partícula?*



Solução: Notemos que o menor caminho é aquele que a partícula percorre onze arrestas. Para tal feito é necessário que ande 6 casas para a esquerda e 5 para cima, isto é, das 11 arrestas tomaremos 6 e, portanto temos, $C_{11,6}$ caminhos. Note que também poderíamos ter tomando $C_{11,5}$ já que $\binom{11}{6} = \binom{11}{5}$.

Exemplo 2.45. *Formam-se as combinações de classe 5 dos elementos $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ as quais são escritas em ordem crescente de índices. Quantas são as combinações nas quais o elemento a_7 aparece na terceira posição?*

Solução: Tendo cinco casas, sendo a terceira ocupada pelo elemento a_7 restam duas casas a esquerda as quais devem ser preenchidas por elementos menores que a_7, portanto temos, $C_{6,2}$ e duas casas a direita preenchidas por elementos maiores que a_7, ou seja, $C_{5,2}$. Logo, temos $\binom{6}{2}\binom{5}{2}$ combinações.

Exemplo 2.46. *Em um certo país há 21 cidades e o governo pretende construir n estradas (todas de mão dupla), sendo que cada estrada liga exatamente duas das cidades do país. Qual o menor valor de n para que, independente de como as estradas sejam construídas, seja possível viajar entre quaisquer duas cidades passando, possivelmente, por uma única cidade intermediária?*

Solução: Note que não queremos saber quantas são as estradas que ligam 21 cidades, para isso, bastaria $C_{21,2}$. Nosso problema pede a menor quantidade de estradas para que seja possível viajar de carro para qualquer outra diretamente ou passando por uma única cidade intermediária. Para que isso ocorra imaginemos que ainda não seja possível chegar em uma cidade e, portanto, teremos $C_{20,2}$ estradas. Agora, para que possamos chegar na cidade que resta basta apenas uma estrada a mais, sendo possível partir de qualquer ponto com chegada nela. logo, temos $C_{20,2} + 1 = 191$ estradas.

Exemplo 2.47. *O dominó mais conhecido tem como maior peça o duplo 6. Neste dominó são empregadas 28 peças diferentes. Quantas peças tem o dominó cuja maior peça é um duplo n?*

Solução: Um dominó é composto de peças que variam de zero a seis combinados 2 a 2, isso significa que podemos formar $C_{7,2}$ e mais as 7 peças duplas. Logo um dominó que tem a maior dupla um 6 tem-se $C_{7,2} + 7 = 28$ peças. Agora um dominó que possui a maior dupla um n tem-se $C_{n+1,2} + n + 1 \Rightarrow \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ peças.

Exemplo 2.48. *Sendo A um subconjunto de n elementos quantos são os subconjuntos de A?*

Solução: Um conjunto de n elementos admite subconjuntos do vazio até o próprio A, isto é, temos que calcular as combinações de n *zero* a *zero*, *um* a *um* até *n* a *n*, ou seja:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

.

Temos conhecimento que o total de subconjuntos de um conjunto é dado por 2^n, isto é, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Este resultado segue do princípio da contagem, já que para cada elemento temos duas escolhas, ele pertence ou não ao subconjunto, logo temos, 2^n maneiras.

Exemplo 2.49. *Prove que $C_{m,n}C_{n,r} = C_{m,r}C_{m-r,n-r}$.*

Prova: Multiplicamos e dividimos a primeira parte da igualdade por $\dfrac{(m-r)!}{(m-r)!}$:

$$\begin{aligned} C_{m,n}C_{n,r} &= \frac{m!}{n!(m-n)!}\frac{n!}{r!(n-r)!}.\frac{(m-r)!}{(m-r)!} \\ &= \frac{m!}{r!(m-r)!}\frac{(m-r)!}{(n-r)!(m-n)!} \\ &= \frac{m!}{r!(m-r)!}\frac{(m-r)!}{(n-r)![(m-r)-(n-r)]!} = C_{m,r}C_{m-r,n-r} \end{aligned}$$

Exemplo 2.50. *Mostre que $\binom{1000}{500}$ não é divisível por 7.*

Solução: Para isso basta calcular a maior potência de 7 que divide $1000!$ e $500!$

Maior potência de 7 que divide $1000!$ é $\left\lfloor \dfrac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{142}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{20}{7} \right\rfloor = 164$

Maior potência de 7 que divide $500!$ é $\left\lfloor \frac{500}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{71}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{7} \right\rfloor = 82$

Portanto temos $\frac{7^{164}}{7^{2.82}} = 7^0 = 1$, ou seja, 7 não divide $\binom{1000}{500}$.

2.7 Permutações com Repetição de Elementos

Considere um conjunto de n elementos nem todos distintos onde existe repetição de $\alpha, \beta, \ldots, \kappa, \lambda$ objetos. Devemos determinar quantas são as formações dos n elementos sendo $\alpha + \beta + \ldots + \kappa + \lambda = n$. A ordem de formação difere se, e somente se, a permutação é feita em elementos distintos. Logo, temos $n!$ permutações sendo necessário retirar as repetições, ou seja, devemos dividir pela quantidade que $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ aparecem e denotamos por $P_n^{\alpha,\beta,\ldots\,\kappa,\lambda}$.

Temos n casas disponíveis nas quais um certo elemento aparece α vezes, isto é, temos $C_{n,\alpha}$. Agora temos $n - \alpha$ casas disponíveis para um outro elemento que se repete β vezes e, portanto, temos $C_{n-\alpha,\beta}$. Seguindo o raciocínio para o último elemento que aparece λ vezes temos $C_{n-\alpha-\beta-\ldots-\kappa,\lambda}$, portanto teremos:

$$\begin{aligned} P_n^{\alpha,\beta,\ldots\,\kappa,\lambda} &= C_{n,\alpha}C_{n-\alpha,\beta}\ldots\,C_{n-\alpha-\beta-\ldots-\kappa,\lambda} \\ &= \frac{n!}{\alpha!(n-\alpha!)}\frac{(n-\alpha)!}{\beta!(n-\alpha-\beta!)}\cdots\frac{(n-\alpha-\beta-\ldots-\kappa)!}{\lambda!(n-\alpha-\beta-\ldots-\kappa-\lambda)} \\ &= \frac{n!}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} \end{aligned}$$

Exemplo 2.51. *Considere a palavra MATEMÁTICA determine:*

(a) Quantos são os anagramas?

(b) Quantos são os anagramas que começam por E?

(c) Quantos são os anagramas que começam por A e terminam por A?

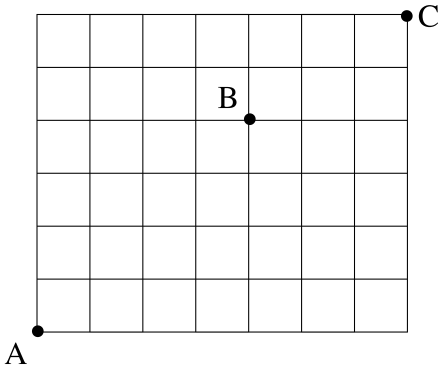
Obs.: Não consideramos os acentos

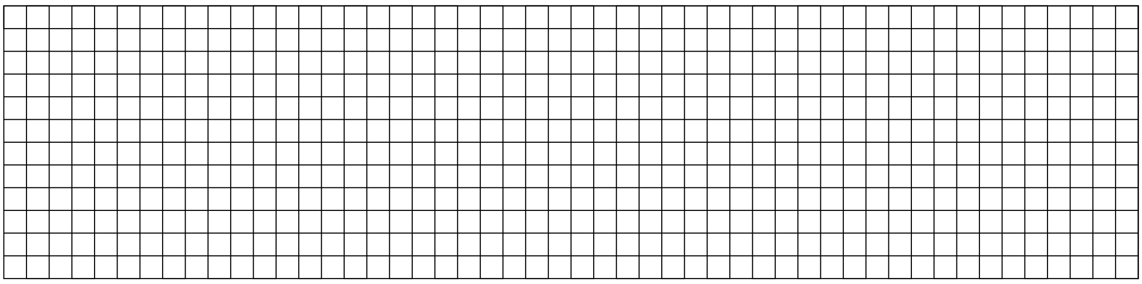
Solução *(a):* Na palavra MATEMATICA temos as letras A, M e T que se repetem respectivamente $3, 2$ e 2 vezes e portanto teremos $\frac{P_{10}}{P_3P_2P_2} = 151200$.

Solução *(b):* Considerando a letra E fixa na primeira posição nos restam 9 casas entre as letras $M, A, T, M, A, T, I, C, A$ logo, teremos $\frac{P_9}{P_3P_2P_2} = 15120$.

Solução *(c):* Retirando duas letras A nos restam 8 casas entre as letras M, A, T, E, M, T, I, C e, portanto, temos $\frac{P_8}{P_2P_2} = 10080$.

Exemplo 2.52. *A figura abaixo representa o mapa de uma cidade, na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção leste-oeste. Quantos são os trajetos mínimos de A até C passando por B?*





Solução: Partindo de A e chegando em B temos 8 avenidas sendo 4 norte-sul e 4 leste-oeste, portanto temos $\dfrac{8!}{4!4!}$. Agora, partindo de B e chegando em C temos 5 avenidas sendo 2 norte-sul e 3 leste-oeste, portanto temos $\dfrac{5!}{2!3!}$. Concluímos então que a quantidade de formas é: $\dfrac{8!}{4!4!}\dfrac{5!}{2!3!} = 700$.

Exemplo 2.53. *Uma partícula, estando no ponto (x, y), pode mover-se para o ponto $(x + 1, y)$ ou para o ponto $(x, y+1)$. Quantos são os caminhos que a partícula pode tomar para, partindo do ponto $(0, 0)$, chegar ao ponto (a, b), onde $a > 0$ e $b > 0$?*

Solução: Note que $(x + 1, y)$ significa mover-se para direita e $(x, y + 1)$ para cima, como queremos chegar no ponto (a, b) então temos $a+b$ movimentos sendo a movimentos para direita e b movimentos para cima e portanto, temos $\dfrac{(a + b)!}{a!b!}$.

Exemplo 2.54. *Dispondo dos algarismos $1, 1, 1, 1, 2$ e 3 quantos números podemos formar de:*

(a) seis algarismos

(b) cinco algarismos

Solução *(a)*: Dispondo de 6 casas e 6 algarismos nos basta calcular $\dfrac{6!}{4!} = 30$.

Solução *(b)*: Devemos considerar 3 casos:
1. O algarismo 2 não é incluído
2. O algarismo 3 não é incluído
3. Um algarismo 1 não é incluído

No primeiro caso basta calcularmos $\dfrac{5!}{4!} = 5$, idem para o segundo caso, basta $\dfrac{5!}{4!} = 5$. Para o terceiro caso teremos $\dfrac{5!}{3!} = 20$. Concluímos que temos 30 números.

2.8 Combinações Completas ou com Repetição

Combinações completas são todas as possibilidades de se escolher k elementos de um subconjunto com n elementos sendo possível escolher o mesmo até k vezes. Vamos primeiramente perceber a diferença entre os dois tipos de combinações analisando os itens abaixo:

1. De quantos modos é possível comprar 2 sorvetes distintos em uma loja que oferece 3 sabores?

2. De quantos modos é possível comprar 2 sorvetes em uma loja que oferece 3 sabores?

Notemos que no item 1 não é possível repetirmos sabores, ou seja, temos uma combinação simples $C_{3,2}$, pois escolhido o primeiro sabor deve-se escolher outro para compor a combinação. Agora no item 2 podemos repetir sabores de forma que a quantidade sempre seja 2, isto é, temos uma combinação com repetição $CR_{3,2}$. Neste caso, vamos representar por a_1 a quantidade do primeiro sabor, a_2 do segundo e a_3 do terceiro, temos uma equação linear:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2$$

Vamos considerar as soluções naturais dessa equação na forma (a_1, a_2, a_3), são elas: $(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$. Note que a quantidade de soluções para uma combinação completa é sempre maior que a simples.

O modelo abaixo representa as soluções da equação acima onde cada ponto representa uma unidade do sorvete e a barra representa a divisão dos sabores:

$$
\begin{array}{ccccc}
a_1 & & a_2 & & a_3 \\
\bullet\bullet & | & & | & \\
\bullet & | & \bullet & | & \\
\bullet & | & & | & \bullet \\
 & | & \bullet\bullet & | & \\
 & | & \bullet & | & \bullet \\
 & | & & | & \bullet\bullet
\end{array}
$$

Perceba que as soluções acima são permutações de barras e pontos num total de 4 símbolos, duas barras e dois pontos e, portanto, temos $\dfrac{4!}{2!2!} = C_{4,2} = 6$. Podemos generalizar o caso para uma equação linear de soluções naturais com n variáveis:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$$

Note que para solução desta equação teremos k pontos e $n - 1$ barras e, portanto, $n + k - 1$ símbolos. Concluímos que temos uma permutação com repetição calculada por $\dfrac{(n + k - 1)!}{k!(n - 1)!}$, ou seja, $C_{n+k-1,k}$.

Exemplo 2.55. *Quantas são as soluções naturais da equação $x + y + z + t \leq 6$?*

Solução: As soluções são todas as que resolvem $x + y + z + t = 6$, ou $x + y + z + t = 5$, ou $x + y + z + t = 4, \ldots, x + y + z + t = 0$. Temos então:

$$CR_{4,6} + CR_{4,5} + CR_{4,4} + CR_{4,3} + CR_{4,2} + CR_{4,1} + CR_{4,0} =$$

$$C_{9,6} + C_{8,5} + C_{7,4} + C_{6,3} + C_{5,2} + C_{4,1} + C_{3,0} =$$

$$84 + 56 + 35 + 20 + 10 + 4 + 1 = 210$$

Exemplo 2.56. *Quantas são as soluções inteiras positivas da equação $x + y + z = 8$?*

Solução: Primeiramente devemos atentar que soluções com $x = 0$, ou $y = 0$, ou $z = 0$ são descartadas, ou seja, $x, y, z \geq 1$. Para resolvermos esse problema basta escrevermos $x = a + 1$, $y = b + 1$ e $z = c + 1$, portanto, agora nossa equação é $a + b + c = 5$ e conclui-se que o temos $C_{7,5} = 21$ soluções.

Exemplo 2.57. *Sejam A e B conjuntos de números naturais com p e n elementos respectivamente.*

(a) Quantas são as funções $f : A \to B$?

(b) Quantas são as funções injetoras $f : A \to B$?

(c) Quantas são as funções, estritamente crescentes, $f : A \to B$?

(d) Quantas são as funções, não decrescentes, $f : A \to B$?

Solução *(a)*: Podemos ter cada elemento de A ligado a um único elemento de B, isto é, para cada elemento $p_i \in A$, tem-se n possibilidades. Trata-se então de um arranjo com repetição $AR_{n,p} = n^p$.

Solução *(b)*: Para que se tenha uma função injetora tem-se que $p_1 \neq p_2 \Rightarrow f(p_1) \neq f(p_2)$, isto é, não podemos repetir elementos. Trata-se então de um arranjo simples $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Solução *(c)*: Para que tenhamos funções estritamente crescentes basta retirarmos as p funções repetidas logo, temos $C_{n,p}$.

Solução *(d)*: Consideramos aqui funções constantes, constantes em algum intervalo e as estritamente crescentes, isto é, podemos repetir elementos e, portanto, temos $CR_{n,p}$.

Exemplo 2.58. *Seis alunos de Manaus foram vencedores de um torneio de Matemática - três da escola A, dois da escola B e um da escola C. Na cerimônia de premiação, eles foram colocados em fila, um ao lado do outro, de forma aleatória. Quantas formações existem se alunos de mesma escola não podem ficar juntos?*

Solução: Vamos determinar todas as possibilidades que alunos da escola A não fiquem juntos utilizando o modelo abaixo que representa uma possibilidade:

$$\_\_\ \underline{B}\ \_\_\ \underline{B}\ \_\_\ \underline{C}\ \_\_$$

Agora temos que posicionar as letras A nos espaços vagos. Veja primeiramente que podemos permutar as letras acima entre si, ou seja, temos P_3^2, além disso, temos $C_{4,3}$ maneiras de posicionar as letras A, logo temos $P_3^2 C_{4,3}$, no entanto, estamos contanto as possibilidades, também, que alunos da escola B fiquem juntos e, portanto, devemos subtrair essas formações. Usando o mesmo modelo temos uma possível formação:

$$\_\_\ \underline{B\,B}\ \_\_\ \underline{C}\ \_\_$$

Considerando BB como uma única letra temos P_2 que são as permutações de B com C, além disso, vamos posicionar as letras A nos espaços vagos, isto é, $C_{3,3}$. Concluímos então que temos $P_3^2 C_{4,3} - P_2 C_{3,3} = 10$ formações.

Exemplo 2.59. *Quantos números inteiros entre 1 e 100000 têm soma dos algarismos igual a 6?*

Solução: Vamos considerar x_1 o primeiro algarismo até x_5 já que 100000 não soma 6. Sendo assim, temos as seguintes possibilidades:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = 6\\
&x_1 + x_2 = 6\\
&x_1 + x_2 + x_3 = 6\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6
\end{aligned}
$$

No entanto, $x_1 \geq 1$ e, portanto, teremos:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = 5\\
&x_1 + x_2 = 5\\
&x_1 + x_2 + x_3 = 5\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5
\end{aligned}
$$

Com isso temos as combinações:

$$\binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5} = 210$$

Podemos generalizar este problema quando queremos a soma de algarismos de 1 até $1\underbrace{00\ldots00}_{\text{n-1 zeros}}$ igual a p, sendo $p \geq 2$ dado por $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \binom{k+p-1}{p-1}$, com $n \geq 2$.

Demonstração. Tome $n = 2$ então queremos que a soma dos algarismos de 1 a 10 seja p, temos então uma única equação dada por $x_1 = p$, sendo $x_1 \geq 1$ nossa equação passa a ser $x_1 = p - 1$ e, portanto, temos uma única solução. Suponha que seja verdadeiro para $n \geq 2$ qualquer, vamos provar para $n + 1$ algarismos. Agora, se temos $n + 1$ algarismos temos n zeros e portanto, n equações com n variáveis:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = p - 1\\
&x_1 + x_2 = p - 1\\
&x_1 + x_2 + x_3 = p - 1\\
&\qquad\vdots\\
&x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = p - 1
\end{aligned}
$$

Temos então:

$$\binom{(p-1)+1-1}{p-1}+\binom{(p-1)+2-1}{p-1}+\binom{(p-1)+3-1}{p-1}+\ldots+\binom{(p-1)+n-1}{p-1}=$$

$$\binom{0+(p-1)}{p-1}+\binom{1+(p-1)}{p-1}+\binom{2+(p-1)}{p-1}+\ldots+\binom{n-1+(p-1)}{p-1}=$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+(p-1)}{p-1}=\sum_{k=0}^{(n+1)-2}\binom{k+(p-1)}{p-1}$$

$\square$

Exemplo 2.60. *De quantos modos podemos escolher três números, não necessariamente distintos, no conjunto* $A=\{1,2,3,\ldots,150\}$ *de modo que a soma dos números escolhidos seja divisível por* 3*?*

Solução: Vamos considerar os conjuntos:
$B=\{x\in A\,/\,x\equiv 0\,mod\,3\}$
$C=\{x\in A\,/\,x\equiv 1\,mod\,3\}$
$D=\{x\in A\,/\,x\equiv 2\,mod\,3\}$
Temos então que B, C e D, possui cada um 50 elementos. Temos então as possibilidades de somarmos três números, não necessariamente distintos, abaixo:
∘ 3 elementos de B
∘ 3 elementos de C
∘ 3 elementos de D
∘ 1 elemento de B, 1 elemento de C e 1 elemento de D
Com isso temos:
$CR_{50,3}+CR_{50,3}+CR_{50,3}+C_{50,1}C_{50,1}C_{50,1}=$
$C_{52,3}+C_{52,3}+C_{52,3}+C_{50,1}C_{50,1}C_{50,1}=$
$22100+22100+22100+125000=191300$

Pudemos perceber que nas resoluções de muitos exercícios se fez presente o uso de fórmulas, como enfatizamos desde o início, elas são extremamente úteis e necessárias para que a solução seja rápida e direta. No próximo capítulo vamos nos apropriar de métodos mais aprofundados em teoria dos conjuntos e métodos diferentes de se fazer contagem.

Capítulo 3

Outras formas de contagem

Enfatizamos em alguns problemas o conceito de conjuntos, que nos permitiu visualizar a resolução de maneira mais clara, definimos também conjuntos disjuntos, princípio aditivo e multiplicativo até nos permitimos resolver certos problemas usando o conceito de complementar. Neste capítulo utilizamos mais profundamente estes conceitos na resolução dos problemas.

3.1 Princípio da exclusão e inclusão

Naturalmente usamos estes conceitos em alguns dos problemas propostos até aqui, no entanto, não como método de contagem mas como ferramenta para nos apropriar do modelo defendido. O princípio da exclusão e inclusão é usado em conjuntos não disjuntos e tem forte aplicação na teoria das probabilidades. Nosso primeiro contato com essa forma de contagem se dá exatamente na teoria dos conjuntos que afirma:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

Sendo $N(X)$ o número de elementos do conjunto X. Além disso, note que esta fórmula é usada apenas para dois conjuntos. No caso de três conjuntos teríamos:

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$$

Uma demostração para o caso de n conjuntos encontra-se no apêndice. Note que a quantidade de elementos da união dos conjuntos pode ser descrito como soma dos elementos de cada conjunto, subtraindo as interseções dois a dois, somando as interseções três a três e assim até até somar ou subtrair a interseção dos n conjuntos. Veja abaixo para o caso de quatro conjuntos:

$$\begin{aligned} N(A \cup B \cup C) = {} & N(A) + N(B) + N(C) + N(D) \\ & - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(A \cap D) - N(B \cap C) - N(B \cap D) - N(C \cap D) \\ & + N(A \cap B \cap C) + N(A \cap B \cap D) + N(A \cap C \cap D) + N(B \cap C \cap D) \\ & - N(A \cap B \cap C \cap D) \end{aligned}$$

Considere uma coleção de subconjuntos $A_1, A_2 \ldots , A_n$ de A e Q_0 a quantidade de elementos de A, além disso:

Q_1 é igual a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} N(A_i)$;

Q_2 é igual a $\displaystyle\sum_{1\le i_1<i_2\le n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2})$;

$\vdots$

Q_p é igual a $\displaystyle\sum_{1\le i_1<i_2<i_3<\ldots<i_p\le n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_p})$

Q_n é igual a $N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_p} \cap \ldots \cap A_{i_n})$

Sendo :

$\binom{n}{1}$ parcelas em Q_1

$\binom{n}{2}$ parcelas em Q_2

$\vdots$

$\binom{n}{p}$ parcelas em Q_p

$\binom{n}{n}$ parcelas em Q_n

Podemos reescrever na forma :

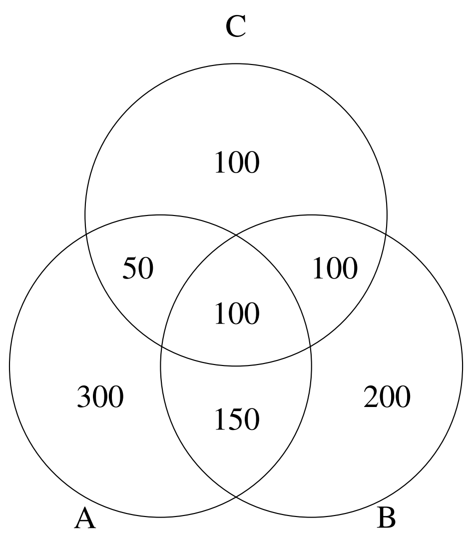
$Q_0 = Q_1 - Q_2 + Q_3 + \ldots + (-1)^{n-1} Q_n$

Note que se quisermos Q_0 temos o próprio conjunto A, agora se quisermos elementos que pertençam a exatamente um subconjunto, isto é, Q_1 então Q_2 é contado $duas$ vezes, Q_3 é contado três $vezes$, … , Q_p é contado p vezes e, portanto, temos que o número de elementos que pertencem a exatamente p conjuntos é:

$$
\begin{aligned}
N(X_1) &= 1.Q_1 - 2Q_2 + 3Q_3 + 4Q_4 + \ldots + (-1)^{n-1}C_{n,n-1}Q_n \\
&= \binom{1}{0}.Q_1 - \binom{2}{1}Q_2 + \binom{3}{2}Q_3 + \binom{4}{3}.Q_4 + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}Q_n \\
N(X_2) &= 1Q_2 - 3Q_3 + 6Q_4 - 10Q_5 + \ldots + (-1)^{n-2}C_{n,n-2}Q_n \\
&= \binom{2}{0}.Q_2 - \binom{3}{1}Q_3 + \binom{4}{2}Q_4 + \binom{5}{3}.Q_5 + \ldots + (-1)^{n-2}\binom{n}{n-2}Q_n \\
N(X_3) &= 1Q_3 - 4Q_4 + 10Q_5 - 20Q_6 + \ldots + (-1)^{n-3}C_{n,n-3}Q_n \\
&= \binom{3}{0}.Q_3 - \binom{4}{1}Q_4 + \binom{5}{2}Q_5 - \binom{6}{3}.Q_6 + \ldots + (-1)^{n-3}\binom{n}{n-3}Q_n \\
&\vdots \\
N(X_p) &= \binom{p}{0}.Q_p - \binom{p+1}{1}Q_{p+1} + \binom{p+2}{2}Q_{p+2} + \ldots + (-1)^{n-p}\binom{n}{n-p}Q_n \\
N(X_p) &= \sum_{i=0}^{n-p}(-1)^i\binom{p+i}{i}Q_{p+i}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.1. *Em um concurso público três questões A, B e C foram analisadas quanto a quantidade de acertos. Verificou-se que 600 pessoas acertaram o item A, 550 o item B, 350 o item C, 250 os itens A e B, 200 os itens B e C, 150 os itens A e C e 100 os três itens. Pede-se:*
(a) Quantos acertaram exatamente dois itens?
(b) Quantos acertaram exatamente um item?
(c) Quantos acertaram pelo menos dois itens?

Neste item vamos propor a resolução de diferentes maneiras para melhor compreensão. Inicialmente vamos elaborar um diagrama que represente as informações dadas.



Solução (a): Verificando no diagrama percebemos que $50 + 100 + 150 = 300$ pessoas acertaram exatamente duas questões. Agora, utilizando da nossa fórmula teríamos:

$$N(X_2) = \sum_{i=0}^{1}(-1)^i\binom{2+i}{i}Q_{2+i} = \binom{2}{0}Q_2 - \binom{3}{1}Q_3$$

$$N(X_2) = 1.(250 + 150 + 200) - 3(100) = 300$$

Solução (b): Pelo diagrama verificamos a soma $100 + 300 + 200 = 600$. A mesma resposta se encontra usando a fórmula:

$$N(X_1) = \sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{1+i}{i}Q_{1+i} = \binom{1}{0}Q_1 - \binom{2}{1}Q_2 + \binom{3}{2}Q_3 =$$

$$N(X_1) = 1.(600 + 550 + 350) - 2(250 + 200 + 150) + 3(100) = 600$$

Solução (c): Analisando o diagrama somamos $150 + 100 + 50 + 100 = 400$. Neste caso temos uma repetição de elementos, logo podemos mudar nossa fórmula para:

$$N(X_p) = \sum_{i=0}^{n-p}(-1)^i\binom{p+i-1}{i}Q_{p+i} \Rightarrow n(X_1) = \sum_{i=0}^{1}(-1)^i\binom{2+i-1}{i}Q_{2+i} =$$

$$N(X_1) = \binom{1}{0}Q_2 - \binom{2}{1}Q_3 \Rightarrow 1.(250 + 150 + 200) - 2(100) = 400.$$

Claro que a fórmula apresentada é apenas um auxílio para itens mais elaborados, no entanto, alguns problemas se resolvem facilmente sem a aplicação da mesma, apenas aplicando nosso modelo apresentado como é o *caso do exemplo 3.1.* Enumerar os conjuntos possíveis se torna um verdadeiro trabalho principalmente quando nos deparamos com interseções de vários conjuntos, por isso, enfatizamos que não condenamos o uso das fórmulas uma vez que o conceito foi bem assimilado. Perceba que o modelo de contagem abordado nos auxilia a criar uma recorrência e por fim induzir a fórmula.

Exemplo 3.2. *Considere a palavra $PERNAMBUCO$. Quantos são os anagramas em que A aparece na primeira posição, ou E na segunda ou O na terceira?*

solução: Considere A_1 os anagramas em que A aparece na primeira posição, A_2 os anagramas em que E aparece na segunda posição e A_3 os anagramas em que O aparece na terceira posição, temos que:

$$Q_1 = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_1 \to \underline{A}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad} = 9!$$

$$A_2 \to \underline{\quad}\,\underline{E}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad} = 9!$$

$$A_3 \to \underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{O}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad} = 9!$$

$$Q_2 = A_1 \cap A_2 + A_1 \cap A_3 + A_2 \cap A_3$$

$$A_1 \cap A_2 \to \underline{A}\,\underline{E}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad} = 8!$$

$$A_1 \cap A_3 \to \underline{A}\,\underline{\quad}\,\underline{O}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad} = 8!$$

$$A_2 \cap A_3 \to \underline{\quad}\,\underline{E}\,\underline{O}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad} = 8!$$

$$Q_2 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \to \underline{A}\,\underline{E}\,\underline{O}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad}\,\underline{\quad} = 7!$$

Logo:

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3.9! - 3.8! + 7! = 972720.$$

Exemplo 3.3. *Quantos são os números inteiros* $1 \leq x \leq 500$*, que são divisíveis por exatamente dois dos números* $2, 3, 5$ *e* 7*?*

solução: Vamos considerar A_1 múltiplos de 2, A_2 múltiplos de 3, A_3 múltiplos de 5 e A_4 múltiplos de 7. Temos que:

$$\begin{array}{llll}
N(A_1) = 250 & N(A_1 \cap A_2) = 83 & N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 16 & N(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 2 \\
N(A_2) = 166 & N(A_1 \cap A_3) = 50 & N(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = 11 & \\
N(A_3) = 100 & n(A_1 \cap A_4) = 35 & N(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = 7 & \\
N(A_4) = 71 & n(A_2 \cap A_3) = 33 & N(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 4 & \\
 & N(A_2 \cap A_4) = 23 & & \\
 & N(A_3 \cap A_4) = 14 & &
\end{array}$$

$Q_1 = 250 + 166 + 100 + 71 = 587$
$Q_2 = 83 + 50 + 35 + 33 + 23 + 14 = 238$
$Q_3 = 16 + 11 + 7 + 4 = 38$
$Q_4 = 2$

Como queremos elementos que sejam divisíveis por exatamente dois dos números temos:

$$N(X_2) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \binom{2+i}{i} Q_{2+i} = \binom{2}{0} Q_2 - \binom{3}{1} Q_3 + \binom{4}{2} Q_4 =$$

$1.Q_2 - 3Q_3 + 6Q_4 = 238 - 114 + 12 = 136.$

Exemplo 3.4. *Lançam-se três dados. Em quantos resultados possíveis a soma é igual a 12?*

solução: Note que formamos uma equação dada por: $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ sendo os $x_i \geq 1$. Fazendo $x_1 = a + 1$, $x_2 = b + 1$, $x_3 = c + 1$, nossa equação passa a ser: $a + b + c = 9$ que tem por solução $C_{11,9}$. No entanto, devemos tirar as possibilidades em que $x_1 \geq 7$, $x_2 \geq 1$ e $x_3 \geq 1$, ou $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 7$ e $x_3 \geq 1$ ou $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 1$ $x_3 \geq 7$, logo temos, para cada caso, a equação dada por $a + b + c = 3$ que tem por solução $C_{5,3}$. Logo nossa resposta é: $C_{11,9} - 3C_{5,2} = 55 - 30 = 25.$

3.2 Permutações Caóticas

Permutações caóticas, mais conhecidas como desarranjos as quais denotaremos por D_n, são ordenações de n elementos onde nenhum deles venha a se posicionar no seu espaço de origem em nenhuma das ordenações. Exemplificando: vamos considerar o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, as formações possíveis são $123, 132, 213, 231, 312, 321$, mas só 231 e 312 são consideradas caóticas. Esse método de formação está relacionada totalmente ao conceito do princípio da exclusão e inclusão.

Considere um conjunto A com n elementos queremos calcular a quantidade de formações em que nenhum elemento pertença ao seu lugar de origem. Partimos do princípio da contagem e percebemos que temos $n!$ permutações o que representa Q_0. Vamos agora calcular a quantidade de formações que tem exatamente um elemento em sua posição de origem e vamos considerar valor 1:

O primeiro elemento está na sua posição inicial, perceba que temos $n - 1$ maneiras de escolher o segundo elemento, $n - 3$ maneiras de escolher o terceiro elemento e assim por diante até o último elementos que apenas terá uma escolha, ou seja, temos:

$$\underline{n-1}\,\underline{n-2}\,\underline{n-3}, \ldots, \underline{\ 1\ }$$

Note que essa contagem se repete até o último elemento e, portanto temos $\binom{n}{1}$ parcelas iguais a $(n-1)!$, neste caso estamos contanto Q_1, ou seja, temos $n(n-1)!$ formações em que exatamente um elemento está na sua posição inicial. Agora, vamos contar a quantidade de formações em que exatamente $dois$ elementos estão em sua posição inicial, primeiramente note que a quantidade de parcelas são $\binom{n}{2}$ e iguais a $(n-2)!$, ou seja, estamos contando Q_2. Seguindo a contagem até todos os elementos estarem em sua posição inicial temos:

$$D_n = \binom{n}{0}n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + \binom{n}{n}(-1)^n$$

$$D_n = \frac{n!}{0!} - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$D_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

$$D_n = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

Exemplo 3.5. *Quantas são as permutações caóticas dos elementos 1,2,3,4 e 5?*

solução: Vamos calcular diretamente pela fórmula, neste caso teremos:

$$D_n = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} \Rightarrow D_5 = 5!\sum_{i=0}^{5}\frac{(-1)^i}{i!}$$

$$D_5 = 5!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)$$

$$D_5 = 120\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}\right)$$

$$D_5 = 44$$

Exemplo 3.6. *Quantas são as permutações em que exatamente três dos elementos 1,2,3,4 e 5 estão em sua posição original?*

solução: Como queremos exatamente 3 elementos em sua posição original temos $\binom{5}{3}(5-3)!$ parcelas iguais as permutações caóticas dos elementos restantes, ou seja, temos $\binom{5}{3}2!D_2$, portanto temos: $20\left(\frac{1}{2}\right) = 10$.

Exemplo 3.7. *Um grupo de oito amigos brincam entre si de amigo secreto. Cada nome é escrito em pedaço de papel, que é colocado em um pote e cada participante retira um deles ao* *acado. Quantas são as formas de realizar a brincadeira de modo que nenhum deles tire seu próprio nome?*

solução: Note que estamos diante de um desarranjo de 8 elementos, para calcularmos vamos utilizar a fórmula:

$$D_n = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} \Rightarrow D_8 = 8!\sum_{i=0}^{8}\frac{(-1)^i}{i!}$$

$$D_8 = 8!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}\right)$$

$$D_8 = 40320\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}\right)$$

$$D_8 = 14833.$$

3.3 Princípio da Reflexão e os Lemas de Kaplansky

3.3.1 Primeiro e Segundo Lema de Kaplansky

Considere um conjunto $A = \{1, 2, 3 \ldots, n\}$ do qual queremos contar todos os subconjuntos com k elementos não consecutivos com $k \leq n$. Para isso vamos associar os n elementos representando-os por $(+)$ e $(-)$, onde o número que pertence ao subconjunto é representado por $(+)$ e o que não pertence por $(-)$. Com isso teremos k sinais $(+)$ e $n-k$ sinais menos $(-)$ não sendo possível sinais $(+)$ consecutivos, isto é, devemos posicionar os elementos que pertencem ao subconjunto entre os quais não pertencem, concluímos então que temos $n-k+1$ espaços disponíveis para k elementos. Vamos criar uma representação em forma de uma equação, para isso, escolhidos os k elementos do conjunto temos que x_1 é a quantidade de símbolos $(-)$ antes do primeiro elemento do conjunto, x_2 é a quantidade de $(-)$ entre o primeiro e o segundo elemento do conjunto, por fim, x_{k+1} a quantidade de símbolos depois do k-ésimo elemento escolhido, como estamos contando, nesse caso, a quantidade de sinais $(-)$ temos a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{k+1} = n - k$$

Temos que x_1,$x_{k+1} \geq 0$ e $x_2, \ldots , x_k \geq 1$ podemos reescrever nossa equação na forma:

$$y_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + \ldots + y_k + 1 + y_{k+1} = n - k$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_k + y_{k+1} + k - 1 = n - k$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_k + y_{k+1} = n + 1 - 2k$$
$$\binom{n+1-2k+k+1-1}{n+1-2k} \Rightarrow \binom{n-k+1}{n+1-2k}$$

Podemos facilmente mostrar que:

$$\binom{n-k+1}{n+1-2k} = \binom{n-k+1}{k}$$

Denotaremos por

$f(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$ como primeiro Lema de Kaplansky.

Para que fique claro vamos exemplificar: Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Todos os subconjuntos de três elementos não consecutivos é apenas: $1, 3, 5$ que seria representado por $+ - + - +$. Considerando o mesmo conjunto A vamos enumerar os subconjuntos de dois elementos não consecutivos e suas representações:

$\{1,3\}$	$+ - + - -$
$\{1,4\}$	$+ - - + -$
$\{1,5\}$	$+ - - - +$
$\{2,4\}$	$- + - + -$
$\{2,5\}$	$- + - - +$
$\{3,5\}$	$- - + - +$

Notemos que para um valor elevado de k não haverá subconjuntos sem consecutivos o que neste caso $k \geq 3$, logo $k \leq \dfrac{n+1}{2}$, para chegarmos a essa conclusão basta calcularmos $n - k + 1 \geq k$.

Exemplo 3.8. *Um atleta tem os* 10 *primeiros dias de um mês para treinar. Ele decide não treinar em dias seguidos, para obter melhor desempenho, mas treinará em quatro dias. De quantas formas ele pode organizar seus dias de treino?*

solução: Resolvermos este problema apenas utilizando a fórmula de Kaplansky:

$$f(n,k) = \binom{n-k+1}{k} \Rightarrow f(10,4) = \binom{7}{4} \Rightarrow f(10,4) = 35.$$

Exemplo 3.9. *Em quantos anagramas da palavra ABACAXI nos quais duas letras A nunca apareçam juntas?*

solução: Dispondo de 7 casas devemos escolher 3 não consecutivas, temos $f(7,3)$ maneiras, ou seja, 10 formas de organizar as letras A de modo que não sejam consecutivas, além disso, devemos organizar as letras restantes o que pode ser calculado por $4!$. Logo, concluímos que são possíveis 240 anagramas.

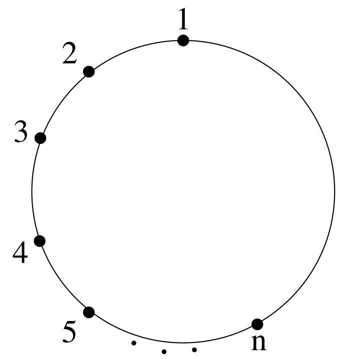
Exemplo 3.10. *Um campeonato de futebol é realizado em 8 dias seguidos. Carlos participará, porém, não pode jogar dois dias seguidos e sabe que irá jogar em pelo menos uma partida. De quantas maneiras Carlos pode escolher em quais dias jogar?*

solução: Primeiramente Carlos pode jogar até quatro partidas, esse fato decorre que se $k > \dfrac{n+1}{2}$ não há solução, portanto temos $f(8,k)$ onde $k = 1, 2, 3$ ou 4. Logo:

$$f(8,1) + f(8,2) + f(8,3) + f(8,4) = \binom{8}{1} + \binom{7}{2} + \binom{6}{3} + \binom{5}{4} = 8 + 21 + 20 + 1 = 50.$$

Agora considere um conjunto de n elementos $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, dispostas em uma circunferência, queremos contar quantas são as possibilidades de tomar k elementos não consecutivos observando que 1 é sucessor de n e, portanto, consecutivos. Vamos considerar dois casos para formar o subconjunto:

Primeiro caso: o elemento 1 está no subconjunto, neste caso 2 e n não podem ser escolhidos nos restando os elementos $\{3, 4, 5, \ldots, , n-1\}$. Observemos o diagrama abaixo:



Note então que o problema recai sobre o *primeiro Lema de Kaplansky*, logo temos $f(n-3, k-1)$ maneiras.

Segundo caso: o elemento 1 não está no subconjunto, neste caso nos resta escolher k4 elementos de $\{2, 3, 4, 5, \ldots, , n-1, n\}$, o que novamente recai para o primeiro lema, dessa forma, temos

$f(n-1,k)$ maneiras. Somando os casos pois são conjuntos disjuntos temos:

$$f(n-3,k-1)+f(n-1,k) = \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k}{k}$$

$$f(n-3,k-1)+f(n-1,k) = \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} + \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}$$

$$f(n-3,k-1)+f(n-1,k) = \frac{k(n-k-1)!+(n-k)(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}$$

$$f(n-3,k-1)+f(n-1,k) = \frac{n(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}$$

Multiplicando e dividindo por (n-k)

$$f(n-3,k-1)+f(n-1,k) = \frac{n(n-k)(n-k-1)!}{(n-k)k!(n-2k)!}$$

$$g(n,k) = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$$

Exemplo 3.11. *Um professor de academia instrui seus alunos novatos treinarem três vezes por semana nos primeiros meses. De quantas formas um iniciante pode escolher treinar entre os dias da semana se não pode ir em dois dias seguidos?*

solução: É bem comum confundirmos este problema como aplicação direta do primeiro Lema de Kaplansky, no entanto, não sabemos o dia em que começará seu treino e como se trata de um ciclo nos basta aplicar o segundo lema:

$$g(7,3) = \frac{7}{4}\binom{4}{3} \Rightarrow g(7,3) = 7.$$

Exemplo 3.12. *Uma empresa reúne semanalmente seus associados em uma mesa redonda com capacidade para 12 pessoas onde discutem novos métodos de venda para seus produtos. Em uma certa reunião apenas cinco dos membros compareceram. De quantas maneiras podem se sentar de forma que nenhum associado fique em cadeiras adjacentes?*

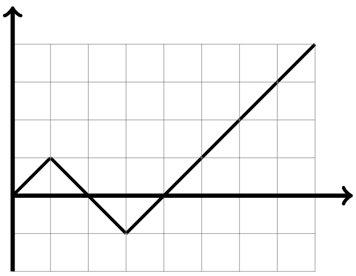
solução: Basta usarmos a fórmula de Kaplansky:

$$g(12,5) = \frac{12}{7}\binom{7}{5} \Rightarrow g(12,5) = 36.$$

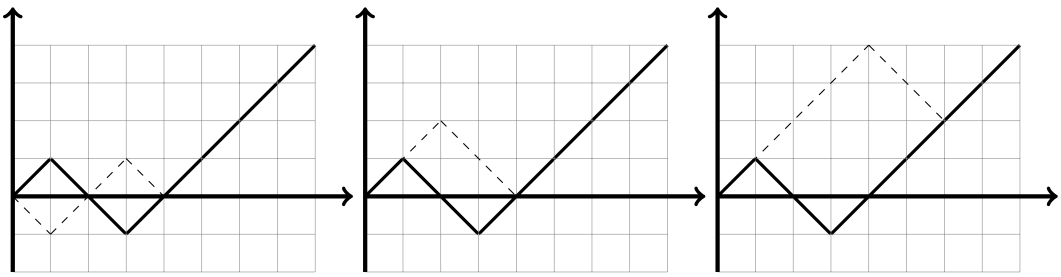
Note que, assim como o primeiro lema possui sua restrição quando k é muito alto, no segundo lema temos $k < n - k \Rightarrow k < \dfrac{n}{2}$.

3.3.2 Princípio da Reflexão

O princípio da reflexão é uma técnica elegante de contagem que utiliza gráficos simples de crescimento e decrescimento em linhas diagonais como auxílio e seu método está totalmente firmado nos conceitos até aqui estudados. Imagine um jogo o qual você parte de um certo ponto (x, y) no plano cartesiano e deve chegar ao seu destino no ponto $(x + a, y + b)$ com $a, b \in \mathbb{N}$, porém os movimentos só podem ser realizados nas diagonais e sempre avançando, ou seja, $(x + 1, y + 1)$ ou $(x + 1, y - 1)$.



O gráfico acima é a representação do jogo no qual você parte do ponto $(0, 0)$ e deve chegar até o ponto $(8, 4)$. Note que temos apenas dois movimentos que vamos chamar de subidas (S) e descidas (D), isto é, o gráfico foi construído pelos movimentos $SDDSSSSS$. Perceba que podemos permutar os movimentos, ou seja, partindo do ponto $(0, 0)$ e chegando no ponto $(8, 4)$ temos $\dfrac{P_8}{P_6 P_2} = 28$ caminhos. Abaixo está representada outros caminhos possíveis:



Note que em todos os casos $S = 6$ e $D = 2$, além disso, em qualquer movimento a abscissa aumenta em uma unidade, isto é, $S + D = 6$, porém, a ordenada varia em uma unidade a cada S ou D, logo $S - D = 2$, portanto:

$$\begin{cases} S + D = 8 \\ S - D = 4 \end{cases}$$

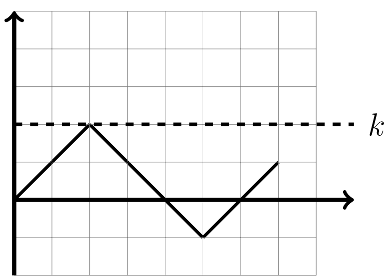
Conclui-se que $S = 6$ e $D = 4$. Podemos generalizar para:

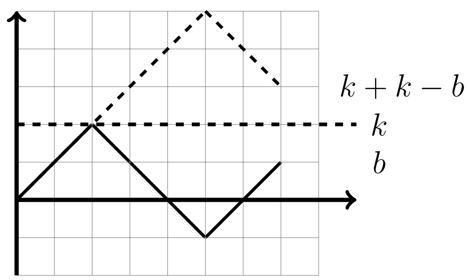
$$\begin{cases} S + D = a \\ S - D = b \end{cases}$$

As soluções são $S = \dfrac{a+b}{2}$ e $D = \dfrac{a-b}{2}$. Note que para as soluções existam e sejam positivas

deve-se ter $a > b$ e que $\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}\right) \in \mathbb{N}$, logo temos que o total de trajetórias T é dada por $T_{a,b} = \dfrac{a!}{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)!\left(\dfrac{a+b}{2}\right)!}$.

Agora vamos considerar uma reta $r : y - k = 0$ a qual vamos contar todas as trajetórias que passam por r. Primeiramente vamos considerar uma das possibilidades em que apenas toca k e uma de suas reflexões:





Note que o ponto de chegada é uma reflexão em torno da reta $y = k$ de coordenadas $(a, 2k - b)$, ou seja, vamos contar as trajetórias de $(0, 0)$ até $(a, 2k - b)$, concluímos que o total de trajetórias que passam pela reta $y = k$ é dado por $T_{a,2k-b}$.

Exemplo 3.13. *Quantas são as trajetórias da origem do plano até o ponto* $(10, 4)$ *que tocam a reta* $y = -1$*?*

solução: Vamos calcular, primeiramente, todas as trajetórias de $(0, 0)$ até $(10, 4)$. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} S + D = 10 \\ S - D = 4 \end{cases}$$

Encontramos as soluções $S = 7$ e $S = 3$. Poderíamos também ter usado a fórmula aplicada em $T_{10,4}$ de ambas as formas encontramos $\dfrac{10!}{7!3!} = 120$.

Agora para encontrarmos as trajetórias que tocam $y = -1$ que iniciam em $(0, 0)$ podemos usar a fórmula $T_{a,2k-b} = T_{10,-6}$ note que $T_{10,-6} = T_{10,6}$, por reflexão, logo temos, $\dfrac{10!}{8!2!} = 45$. Uma forma mais direta seria analisar o ponto de reflexão em relação a reta, no caso, o ponto de reflexão do ponto $(0, 0)$ em relação a reta $y = -1$ é o ponto $(0, -2)$, logo estaremos calculando as trajetórias de $(0, -2)$ até $(10, 4)$ que será igual a 45.

Exemplo 3.14. *Numa fila de cinema há m pessoas tem notas de R\$ 5,00 e n $(n < m)$ pessoas tem notas de R\$ 10,00. Sabendo que a entrada custa R\$ 5,00 responda:*

(a) Se o caixa do cinema sempre dispõe de troco quantas são as filas possíveis?

(b) Se o caixa do cinema inicia sem troco quantas são as filas que terão problema com troco?

(c) Se o caixa do cinema inicia com duas notas de R\$ 5,00 quantas são as filas que terão problema com troco?

solução (a): Vamos imaginar que notas de R\$ 5,00 são as subidas (S) e notas de R\$ 10,00 são as descidas (D), note que a fila pode ser considerada um trajeto de $(0, 0)$ até $(m+n, m-n)$ e, portanto, teremos:

$$\begin{cases} S + D = m + n \\ S - D = m - n \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $S = m$ e $D = n$ logo, teremos $\dfrac{(m+n)!}{m!n!}$ filas.

solução (b): Basta calcularmos todas as filas que tocam a reta $y = -1$, uma vez que o trajeto toque a reta ele terá -1 notas de R\$5,00, logo vamos calcular todas as trajetórias de $(0, -2)$ até $(m + n, m - n)$. Teremos o sistema:

$$\begin{cases} S + D = m + n \\ S - D = m - n + 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $S = m+1$ e $D = n-1$, logo teremos $\dfrac{(m+n)!}{(m+1)!(n-1)!}$ filas com problemas de troco.

solução (c): Se o caixa inicia com duas notas de R\$ 5,00 nossa trajetória começa no ponto $(0, 2)$ como queremos determinar a quantidade de filas que terão problemas com troco basta encontrar o ponto de reflexão de $(0, 2)$ em relação a reta $y = -1$ que é $(0, -4)$, ou seja, vamos calcular as trajetórias de $(0, -4)$ até $(m + n, m - n)$ de sistema:

$$\begin{cases} S + D = m + n \\ S - D = m - n + 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $S = m + 2$ e $D = n - 2$ e, portanto, $\dfrac{(m+n)!}{(m+2)!(n-2)!}$ filas com problemas de troco.

3.4 Princípio de Dirichlet

Neste artigo, até o momento, nos apropriamos de métodos de contagem com a ideia simples de calcular quantas são as possibilidades dado um conjunto e uma certa condição. O princípio de Dirichlet mais conhecido como Princípio das Gavetas ou casa dos pombos, não é exatamente uma forma de contagem, mas é uma poderosa ferramenta para problemas que aparentemente não se encontra um caminho para solução. Diferentemente dos métodos de contagem anteriores o princípio visa a existência ou não de um conjunto que assume certa propriedade.

Princípio das Gavetas de Dirichlet *Se n objetos forem colocados, em no máximo, $n-1$ gavetas então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.*

Demonstração. Por absurdo: Se em cada gaveta há exatamente um objeto então teremos no máximo $n-1$ objetos, o que é uma contradição. □

Para relacionarmos com contagem vamos exemplificar de maneira mais objetiva. Suponha que em um grupo de pessoas pelo menos quatro fazem aniversário no mesmo mês. Qual o mínimo de pessoas?

Solução: Considerando as gavetas como meses do ano temos 12 gavetas se dispormos exatamente 3 em cada gaveta teremos o total de 36 pessoas como queremos que pelo menos uma gaveta tenha 4 pessoas basta 37 para que ocorra.

Exemplo 3.15. *Todos os pontos de um plano são pintados de azul ou vermelho. Prove que podemos encontrar dois pontos da mesma cor equidistantes.*

solução: Vamos lembrar que para se determinar um plano é necessário que se tenha três pontos não colineares, além disso, podemos supor que esses pontos são vértices de um triângulo equilátero é claro que podemos ter pontos todos de mesma cor ou dois ponto de uma cor e o terceiro ponto de cor diferente sendo, em qualquer caso pontos equidistantes.

Exemplo 3.16. *Quantos pontos são necessários para que em um quadrado de área 16 pelo menos dois deles tenham distância menor ou igual a $\sqrt{2}$?*

solução: Imaginemos o quadrado dividido em 16 partes iguais, ou seja, temos 16 quadrados menores de aresta 1, tendo como maior distância os vértices que formam a diagonal que é igual a $\sqrt{2}$. Pelo princípio de Dirichlet temos 16 casas, isto é, com 17 pontos pelo menos dois estarão no mesmo quadradinho, segue que a distância de pelo menos dois é menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Exemplo 3.17. *Em uma urna contém 4 bolas vermelhas, 8 bolas azuis, 7 bolas verdes e 6 amarelas. Qual o menor número de bolas que devemos retirar, sem olhar, para que se tenha certeza que pelo menos 3 delas são de mesma cor?*

solução: Imaginando que temos três gavetas onde vamos dispor as bolas retiradas uma a uma e como temos um total de 25 bolas pelo menos uma gaveta terá 9 bolas e com isso garantimos que em 9 retiradas pelo menos três são de mesma cor.

Exemplo 3.18. *Em uma reunião há n pessoas presentes. Mostre que existem duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de outros participantes (admita que conhecer seja uma relação simétrica, ou seja, se a conhece b, então b conhece a).*

solução: Para isso basta pensarmos em um n-ágono convexo e admitindo que os vértices são participantes e a relação de *conhecer* são os segmentos de retas que ligam os vértices façamos duas considerações: partindo de um vértice podemos ter no mínimo 0 e no máximo $n-1$ ligações e que se pelo menos uma pessoa conhece todos os outros $n-1$ participantes então todos conhecem pelo menos uma pessoa. Pelo Princípio de Dirichlet teremos n pessoas distribuídas em no máximo $n-1$ gavetas já que as gavetas citadas acima não podem ser ocupadas simultaneamente.

Exemplo 3.19. *Uma prova possui 5 questões de múltipla escolha, com 4 alternativas cada. Qual é o menor número de alunos para o qual podemos garantir que pelo menos dois deles deram exatamente as mesmas respostas para todas as questões?*

solução: Note que a prova pode ser realizada de 4^5 maneiras, logo para que existam duas provas iguais teremos que ter 4^5+1 alunos, ou seja, 1025 alunos.

Capítulo 4

Problemas selecionados e aplicações

Questão 1. (Olimpíada Belga) Um número inteiro não-negativo é dito palíndromo se ele lido da esquerda para a direita é igual quando lido da direita para a esquerda. Por exemplo 121, 0, 2002 e 4 são palíndromos. O número de palíndromos que são menores que 1.000.000:

Solução: Perceba que todos os números de um dígito são palíndromos, logo contamos 10. Agora, temos apenas 9 números de dois dígitos são palíndromos, uma vez que 00 não conta. Vejamos agora que os números de três dígitos e quatro dígitos tem a mesma quantidade de palíndromos que são 90, neste caso vamos exemplificar. Temos:

$$\underbrace{\underline{\ 9\ }}_{\neq 0}\ \underline{\ 10\ }\ \underline{\ 1\ } = 90$$

$$\underbrace{\underline{\ 9\ }}_{\neq 0}\ \underline{\ 10\ }\ \underline{\ 1\ }\ \underline{\ 1\ } = 90$$

Perceba que para termos números palíndromos os extremos e os centrais devem ser iguais, por isso aparece o número 1. Vamos agora contar a quantidade de palíndromos de cinco e seis dígitos. Temos:

$$\underbrace{\underline{\ 9\ }}_{\neq 0}\ \underline{\ 10\ }\ \underline{\ 10\ }\ \underline{\ 1\ }\ \underline{\ 1\ } = 900$$

$$\underbrace{\underline{\ 9\ }}_{\neq 0}\ \underline{\ 10\ }\ \underline{\ 10\ }\ \underline{\ 1\ }\ \underline{\ 1\ }\ \underline{\ 1\ } = 900$$

Somando todos os casos temos $10 + 9 + 180 + 1800 = 1999$ números palíndromos menores que $1.000.000$.

Questão 2. Quantos quadrados perfeitos são divisores do produto $1!2!3!\dots 9!$?

Solução: Primeiramente vamos fatorar os números:

$1! = 1$
$2! = 2$
$3! = 2.3$
$4! = 2^3.3$
$5! = 2^3.3.5$
$6! = 2^4.3^2.5$
$7! = 2^4.3^2.5.7$
$8! = 2^7.3^2.5.7$
$9! = 2^7.3^4.5.7$

Temos o valor correspondente a $2^{30}3^{13}5^57^3$ como queremos que seja divisível por um quadrado perfeito este produto pode ser escrito na forma $(2^2)^{15}.(3^2)^6.(5^2)^2.(7^2)^2 3.5.7$, isto é, podemos realizar uma combinação um a um até $quatro$ a $quatro$ com expoentes diferente de zero, ou seja:

$15+6+2+1+15.6+15.2+15.1+6.2+6.1+2.1+15.6.2+15.6.1+15.2.1+6.2.1+15.6.2.1+1$

O último 1 é o divisor quando todos os expoentes são zero. Fazendo os devidos cálculos teremos 672 divisores quadrados perfeitos.

Questão 3. (Olimpíada Brasileira) Um gafanhoto pula exatamente 1 metro. Ele está em um ponto A de uma reta, só pula sobre ela, e deseja atingir um ponto B dessa mesma reta que está a 5 metros de distância de A com exatamente 9 pulos. De quantas maneiras ele pode fazer isso?

Solução: Primeiramente note que ele deve fazer movimentos de volta para que complete o ciclo de 9 pulos. Vamos representar por (F) a quantidade de pulos para frente e por (V) a quantidade de pulos para trás, ou seja, teremos o sistema:

$$\begin{cases} F + V = 9 \\ F - V = 5 \end{cases}$$

Encontramos a solução $F = 7$ e $V = 2$ e, portanto, temos $\dfrac{9!}{7!2!} = 36$.

Questão 4. (Olimpíada grega) Determine o número de funções $f : \{1, 2, \ldots , n\} \to \{1995, 1996\}$ que satisfazem a condição de que $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)$ seja ímpar.

Solução: Para cada parcela temos duas possibilidades, ou seja, temos 2^n modos de somar, mesmo que apenas a resposta seja restrita a par ou ímpar a ordem que dispomos os números neste caso fará diferença, basta dividirmos por 2, assim, encontramos 2^{n-1}.

Questão 5. (Olimpíada de Moldova) Seja $n = 2^{13}.3^{11}.5^{7}$. Determine todos os divisores de n^2 que são menores que n mas não são divisores de n.

Solução: Primeiramente $n^2 = 2^{26}.3^{22}.5^{14}$. Um divisor de n^2 é da forma $2^a.3^b.5^c$, onde $14 \leq a \leq 26$, $12 \leq b \leq 22$ e $8 \leq c \leq 14$, no entanto, devemos considerar certas condições para que seja menor que n e divisor de n^2:

(i) Se $14 \leq a \leq 26$ então $b \leq 11$ e $c \leq 7$, ou seja, temos $13.11.7 = 1001$ divisores. Analogamente para os outros dois casos, conclui-se que temos 3003 divisores.

(ii) Se $14 \leq a \leq 26$ e $12 \leq b \leq 22$ e fazendo $c = 0$ temos $13.11 = 143$ divisores. Analogamente para os outros dois casos, sendo assim, encontramos $13.11+13.7+11.7 = 311$ divisores.

Note que não precisamos fazer o caso em que exatamente dois expoentes são zero, pois o caso *(i)* já abrange esses divisores. Concluímos que são $3003 + 311 = 3314$ divisores.

Questão 6. (Olimpíada Americana) Sete chocolates distintos devem ser distribuídos em três sacolas. A sacola vermelha e a sacola azul devem receber pelo menos um chocolate, enquanto a sacola branca pode eventualmente permanecer vazia. Quantas distribuições deste tipo são possíveis?

Solução: Perceba que para cada chocolate existe 3 possibilidades, isto é, temos 3^7 maneiras de distribuir entre as sacolas. Suponha que a sacola vermelha fique vazia então teremos 2^7 maneiras de distribuir os chocolates. Isso ocorre também se supomos que a sacola azul fique vazia. Agora, que ambas fiquem vazias temos 1^7 possibilidades, ou seja, temos $3^7-(2.2^7-1^7) = 1932$.

Questão 7. (Olimpíada brasileira) Cinco amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo, devem formar uma fila de modo que Arnaldo fique na frente de seus 4 amigos? (Os amigos não precisam ficar em posições consecutivas).

Solução: Note que existem $35!$ filas possíveis, dentre elas, considerando apenas os amigos podemos contar $5!$ formações sendo que em $4!$ Arnaldo está na frente dos demais, logo temos $35!\frac{4!}{5!}$, isto é, $\frac{35!}{5}$.

Questão 8. (Olimpíada Americana) Para quantos conjuntos de três inteiros positivos $\{a, b, c\}$ é verdade $a.b.c = 2310$?

Solução: Encontramos que $a.b.c = 2.3.5.7.11$ imaginando que a, b e c são *casas* onde devemos dispor os 5 fatores primos encontramos o total de 3^5 possibilidades, porém notemos que quando todos os fatores estão em uma só *casa* as outras assumem valor igual a 1, ou seja, devemos tirar esses casos que são *três* portanto, temos $3^5 - 3$ formações, no entanto, estamos considerando todos os casos com repetição logo, vamos retirar esses casos dividindo por $3!$, concluímos que temos $\dfrac{3^5 - 3}{3!} = 40$.

Questão 9. (Olimpíada Brasileira) Os doze alunos de uma turma de olimpíada saíam para jogar futebol todos os dias após a aula de matemática, formando dois times de 6 jogadores cada e jogando entre si. A cada dia eles formavam dois times diferentes dos times formados em dias anteriores. Ao final do ano, eles verificaram que cada 5 alunos haviam jogado juntos num mesmo time exatamente uma vez. Quantos times diferentes foram formados ao longo do ano?

Solução: Veja que não estamos interessados em saber quantos times de seis jogadores podemos fazer, para isso bastaria $C_{12,6}$. Estamos interessados em saber quantos quintetos podemos formar e, para isso, calculamos $C_{12,5}$ e retiramos todos os times formados pelos mesmos cinco jogadores, assim, temos $C_{6,5}$ logo $\dfrac{C_{12,5}}{C_{6,5}} = 132$.

Questão 10. (Olimpíada brasileira) Quantos números inteiros entre 10 e 1000 possuem seus dígitos em ordem estritamente crescente? (Por exemplo, 47 e 126 são números deste tipo mas 52 e 566 não).

Solução: Vamos contar primeiramente todos os números de dois algarismos logo temos $\dbinom{9}{2}$ e contamos todos os números de três algarismos, logo $\dbinom{9}{3}$, ou seja, $\dbinom{9}{2} + \dbinom{9}{3} = 36 + 84 = 120$.

Questão 11. (Olimpíada brasileira) Esmeralda, a digitadora, tentou digitar um número de seis algarismos, mas os dois algarismos 1 não apareceram (a tecla devia estar com defeito). O que apareceu foi 2004. Quantos são os números de seis algarismos que ela pode ter tentado digitar?

Solução: Os algarismos 1 podem ter sido digitados entre os algarismos de 2004, ou seja:

$$\_\_\ 2\ \_\_\ 0\ \_\_\ 0\ \_\_\ 4\ \_\_$$

Temos então duas possibilidades:
(i) Os dois algarismos 1 em uma única casa entre as 5.
(ii) Os algarismos 1 distribuídas em duas casas entre as 5. Logo, temos $\dbinom{5}{1} + \dbinom{5}{2} = 15$.

Questão 12. De quantas maneiras podemos colocar, em cada espaço abaixo, um entre os algarismos $4, 5, 6, 7, 8, 9$, de modo que todos os seis algarismos apareçam e formem, em cada membro, números de dois algarismos que satisfazem a dupla desigualdade?

$$\_\,\_ > \_\,\_ > \_\,\_$$

Solução: Note que podemos construir 30 números com os algarismos disponíveis, dentre estes, $\binom{6}{3}$ são crescentes. Segue que $\binom{6}{3}$ são as maneiras de escolhermos as dezenas de forma que sejam decrescentes. Feito isso temos:

$$\underline{X}\ \underline{3} > \underline{X}\ \underline{2} > \underline{X}\ \underline{1} = \binom{6}{3}.3! = 120.$$

Questão 13. (Olimpíada brasileira) Esmeralda tem cinco livros sobre heráldica em uma estante. No final de semana, ela limpou a estante e, ao recolocar os livros, colocou dois deles no lugar onde estavam antes e os demais em lugares diferentes de onde estavam. De quantas maneiras ela pode ter feito isso?

Solução: Como dois livros estão em sua posição original temos $\binom{5}{2}$ modos de escolher e como três livros não devem estar em sua posição original então devemos calcular D_3, ou seja, permutações caóticas de três elementos, $3!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)$ que é 2, ou seja, são $\binom{5}{2}.2 = 20$ maneiras.

Questão 14. (Olimpíada Mexicana) De quantas maneiras podemos encontrar 8 inteiros $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_8$ tais que $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_8$?

Solução: Cada incógnita a_i pode assumir valores de 1 até 8, ou seja, basta calcularmos as combinações com repetição de oito elementos, portanto, temos $\binom{8+8-1}{8} = \binom{15}{8} = 6435.$

Questão 15. (Olimpíada Brasileira/Nível Universitário - adaptada) Jogamos 10 dados comuns (com 6 faces numeradas de 1 a 6). De quantas maneiras podemos obter uma soma dos resultados igual a 20?

Solução: Os dez dados formam a equação abaixo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 20$$

Onde $1 \leq x_i \leq 6$. Como todas as variáveis são maiores ou iguais a 1, nossa equação recai para:

$$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' + x_6' + x_7' + x_8' + x_9' + x_{10}' = 10$$

A solução então é dada por $\binom{10+10-1}{10} = \binom{19}{10} = 92378$. No entanto, estamos considerando todos os casos em que x_i pode assumir valor maior ou igual a 7 e, portanto, devemos tirar essas possibilidades, para isso, basta calcularmos cada $x_i \geq 7$. Note que se $x_1 \geq 7$ tem-se:

$$x_1'' + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' + x_6' + x_7' + x_8' + x_9' + x_{10}' = 4$$

A solução dessa equação é dada por $\binom{10+4-1}{4} = \binom{13}{4} = 715$.

Analogamente para os demais casos e com isso conclui-se que são $92378 - 7150 = 85228$.

Questão 16. (Olimpíada Mexicana) De quantas formas podem ser acomodadas em linha reta sete bolas brancas e cinco negras, de tal maneira que não existam duas bolas negras juntas?

Solução: Basta aplicarmos o *Primeiro Lema de Kaplansky*:

$$f(n,k) = \binom{n-k+1}{k} = f(12,5) = \binom{8}{5} = 56$$

.

Questão 17. (Olimpíada brasileira) Um clube de tênis tem n jogadores canhotos e $2n$ jogadores destros e, ao todo, há menos do que 20 jogadores. No último campeonato interno, no qual cada jogador enfrentou cada um dos outros jogadores do clube exatamente uma vez, a razão entre número de jogos vencidos por jogadores canhotos e o número de jogos vencidos por jogadores destros foi 3 : 4. Qual é o valor de n?

Solução: Note primeiramente que $3n \leq 20 \Rightarrow n \leq 6$. Em segundo momento, note que temos a seguinte relação:

$$\underbrace{\binom{3n}{2}}_{\text{Total de jogos}} = \underbrace{\binom{2n}{2}}_{\text{Jogos entre destros}} + \underbrace{\binom{2n}{1}\binom{n}{1}}_{\text{Jogos entre destros e canhotos}} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{Jogos entre canhotos}}$$

Supondo que x jogos entre destros e canhotos foi vencido por canhotos temos:

$$\frac{\binom{n}{2} + x}{\binom{2n}{2} + \binom{2n}{1}\binom{n}{1} - x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{n^2 - n + 2x}{8n^2 - 2n - 2x} = \frac{3}{4}$$

Realizando os cálculos encontramos: $x = \dfrac{n(10n-1)}{7}$ tal que o menor valor de n é 5 para que seja natural. Concluímos então que $n = 5$.

Questão 18. Dizemos que uma palavra Q é $quase$-anagrama de outra palavra P quando Q pode ser obtida retirando-se uma letra de P e trocando a ordem das letras restantes, resultando em uma palavra com uma letra a menos do que P. Um quase-anagrama pode ter sentido em algum idioma ou não. Por exemplo, $RARO$, $RACR$ e $ARCO$ são quase-anagramas de $CARRO$. Quantos são os quase-anagramas da palavra $BACANA$ que começam com A?

Solução: Vamos dividir em 4 casos:
(i) Retirando-se a letra B e iniciadas por A - Nos restam as letras C, A, N, A que possui $\dfrac{4!}{2!}$ anagramas.
(ii) Retirando-se uma letra A e iniciadas por A - Nos restam as letras B, C, A, N que possui $4!$ anagramas.
(ii) Retirando-se a letra C e iniciadas por A - Nos restam as letras B, A, A, N que possui $\dfrac{4!}{2!}$ anagramas.
(ii) Retirando-se a letra N e iniciadas por A - Nos restam as letras B, A, C, A que possui $\dfrac{4!}{2!}$ anagramas.
Logo temos $4! + 3.\dfrac{4!}{2!} = 60$ $quase$-anagramas.

Questão 19. Uma sequência de letras, com ou sem sentido, é dita alternada quando é formada alternadamente por consoantes e vogais. Por exemplo, *EZEQAF*, *MATEMATICA*, *LEGAL* e *ANIMADA* são palavras alternadas, mas *DSOIUF*, *DINHEIRO* e *ORDINARIO* não são. Quantos anagramas da palavra *FELICIDADE* (incluindo a palavra *FELICIDADE*) são sequências alternadas?

Solução: Há somente dois casos o primeiro quando se inicia com consoante e o segundo quando se inicia por vogal, ambos com mesma contagem. Basta então permutar as consoantes e vogais, sendo $\dfrac{5!}{2!}$ das consoantes e $\dfrac{5!}{2!2!}$ das vogais e, portanto, temos $\dfrac{5!}{2!}.\dfrac{5!}{2!2!}.2 = 3600$ anagramas alternados.

Questão 20. Em um esporte de tiro um atleta deve acertar pelo menos 7 dos 10 tiros possíveis para que possa se classificar na primeira fase, após dias treinando percebeu que a chance de acertar o alvo era de 70%. Qual a probabilidade do atleta se classificar com a quantidade mínima de acertos?

Solução: Como o atleta deve acertar 7 tiros, logicamente deverá errar 3 e mesmo assim se classificar. Note que ele poderá errar os 3 tiros em qualquer momento, ou seja, podemos permutar os erros e acertos, portanto, temos $\frac{10!}{3!7!}$, no entanto, como queremos calcular a chance de se classificar temos $(70\%)^7$ a probabilidade de acertar os alvos e $(30\%)^3$ de errar os alvos. Concluímos que o atleta tem $\binom{10}{3}.(0,7)^7.(0,3)^3$ chance de classificação.

Questão 21. Em uma urna existem 6 bolas pretas, 5 bolas brancas e 4 azuis, todas de mesmo tamanho e peso. Retirando-se 3 bolas ao acaso e sem reposição qual a probabilidade de serem da mesma cor?

Solução: Vamos primeiramente calcular as possibilidades de se retirar bolas de mesma cor, para isso, basta calcularmos $\binom{6}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} = 34$. Agora, vamos calcular todas as formas de retirarmos três bolas de qualquer cor, isto é, $\binom{15}{3} = 455$ e, portanto, a probabilidade de se retirar bolas de mesma cor é de $\frac{34}{455}$.

Questão 22. Numa turma de curso de línguas onde existem 6 homens e 4 mulheres serão selecionados 4 pessoas para representar a turma em uma feira. Qual a probabilidade do grupo ser formado, pelo menos, por um representante masculino e um feminino?

Solução: Os grupos formados podem ser *HMMM*, *HHMM* ou *HHHM*, isto é, a probabilidade pode ser calculada por:

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{3} + \binom{6}{2}\binom{4}{2} + \binom{6}{3}\binom{4}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{97}{105}$$

.

Podemos calcular, também, retirando as possibilidades em que os grupos são formados por 4 homens e os grupos que são formados por 4 mulheres:

$$\frac{\binom{10}{4} - \binom{6}{4} - \binom{4}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{97}{105}$$

.

Considerações finais

Ao longo deste trabalho apresentamos vários conceitos e exemplos relacionados à Análise Combinatória e, mais especificamente, aos problemas envolvendo contagem, os quais apresentamos diferentes métodos de resolução.

Tal dissertação teve como motivação apresentar à Análise Combinatória, além de fórmulas, uma vez que a dificuldade de aprendizagem pelos alunos do ensino básico é notória, visto que é dada sem fundamentos, além disso, apresentar aos professores e colegas um material suplementar de qualidade com uma linguagem objetiva e abordagem didática que parte de exemplos simples para alguns que realmente merecem uma maior atenção para serem compreendidos. Pensamos assim, que estamos contribuindo para o ensino-aprendizagem deste componente curricular considerado difícil por alunos e professores.

Referências Bibliográficas

[1] GUICHARD, D. *An Introduction to Combinatorics and Graph Theory*. San francisco, 2018.

[2] HAZZAN S. *Fundamentos de Matemática Elementar*: combinatória probabilidade, v.5, 7.ed. São Paulo: Atual, 2007.

[3] MORGADO A. C.; CARVALHO J. B.; CARVALHO P. C.; FERNANDEZ P. *Análise Combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro, 2000.

[4] MELLO H. P. *Desmistificando o Ensino de Análise Combinatória*. Rio de Janeiro, 2017.

[5] MORGADO A. C.; CARVALHO P. C. *Matemática discreta*: Coleção ProfMat. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[6] FRANCO T. *Princípios de Combinatória e Probabilidade*. Salvador, 2017.

[7] CARVALHO P. C. *Métodos de Contagem e Probabilidade*. Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

[8] REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Rio de Janeiro, SBM, 2007. Edição Especial.

[9] RAMÍREZ J. P. *Função Gama*. Campinas, 2015.

Apêndice A

Enunciados e demonstrações de teoremas auxiliares

A.1 Princípio da Exclusão e Inclusão

Primeiramente vamos mostrar a proposição para 2 e 3 conjuntos.

Proposição A.1. *Sejam A e B dois conjuntos finitos, então $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$*

Tome $x \in A$ mas $x \notin B$ note que $x \in (A \cup B)$ mas $x \notin (A \cap B)$, note que o elemento x se conta uma vez em $N(A)$, em $N(B)$ se conta $zero$ e em $N(A \cap B)$ se conta $zero$, segue que $1 = 1 + 0 - 0$ portanto, $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$. Análogo para o caso $x \notin A$ mas $x \in B$.

Analisemos agora, o caso $x \in A$ e $x \in B$, isto é, quando $x \in (A \cap B)$, note que em em $N(A)$ o elemento x se conta uma vez, em $N(B)$ se conta uma e em $N(A \cap B)$ se conta uma, segue que $1 = 1 + 1 - 1$ portanto, $N(A \cup B) = N(A) + n(B) - N(A \cap B)$.

Proposição A.2. *Sejam A, B e C três conjuntos finitos, então $N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$*

Tome $x \in A$ mas $x \notin B$ e $x \notin C$, note que o elemento x em $N(A)$ se conta uma vez, em $n(B)$ se conta $zero$, em $n(C)$ se conta $zero$, em $N(A \cap B)$ se conta $zero$, em $N(A \cap C)$ se conta $zero$, em $N(B \cap C)$ se conta $zero$ e em $N(A \cap B \cap C)$ se conta $zero$, segue que $1 = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 - 0$ contado uma única vez em $N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$. Análogo para os casos em que x pertence unicamente a B ou unicamente a C.

Analisemos agora, o caso que x está em exatamente dois conjuntos. Tome $x \in (A \cap B)$ mas $x \notin C$, note que o elemento x em $N(A)$ se conta uma vez, em $N(B)$ se conta uma, em $N(C)$ se conta $zero$, em $N(A \cap B)$ se conta uma, em $N(A \cap C)$ se conta $zero$, em $N(B \cap C)$ se conta

$zero$ e em $N(A \cap B \cap C)$ se conta $zero$, segue que $1 = 1 + 1 + 0 - 1 - 0 - 0 - 0$ contado uma única vez em $N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$. Análogo para os casos em que $x \in (A \cap C)$ mas $x \notin B$ e $x \in (B \cap B)$ mas $x \notin A$.

Por fim, analisemos o caso em que x está exatamente em três conjuntos. Tome $x \in (A \cap B \cap C)$ note que o elemento x em $N(A)$ se conta uma vez, em $N(B)$ se conta uma, em $N(C)$ se conta uma, em $N(A \cap B)$ se conta uma, em $N(A \cap C)$ se conta uma, em $N(B \cap C)$ se conta uma e em $N(A \cap B \cap C)$ se conta uma, segue que $1 = 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1$ contado uma única vez em $N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$.

Teorema A.1. *Considere uma coleção de conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, então:*
$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} N(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \ldots + (-1)^{p-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_p \le n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_p}) + \ldots + (-1)^{n-1} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_n})$

Demonstração. Para provarmos devemos mostrar que dado $p = 1, 2, \ldots, n$ temos que cada elemento x que pertence a p dos conjuntos A_i's é contado exatamente uma vez em $N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$. Note que se x pertence a p dos conjuntos A_i's ele será contado $\binom{p}{1}$ vezes em $\sum_{i=1}^{n} N(A_i)$, $\binom{p}{2}$ em $\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2}), \ldots,$ $\binom{p}{p}$ em $\sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_p \le n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_n})$. Lembremos que se x não pertence a mais do que p conjuntos então ele é contado $zero$ nos demais conjuntos. Portanto, temos a seguinte expressão:

$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p}$. Devemos então, mostrar que a expressão dada é igual a 1. Para isso consideramos o binômio $(x+1)^p$. Temos que:

$$(x+1)^p = \binom{p}{0} + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \ldots + \binom{p}{p}x^p$$

fazendo $x = -1$ segue que:

$$0 = \binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \ldots + (-1)^p\binom{p}{p}$$

logo, tem-se que:

$$\binom{p}{0} = \binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} + \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p}$$

como $\binom{p}{0} = 1$ segue o resultado. □