UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIANGULO MINEIRO - UFTM

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

Um estudo sobre Exponenciais e Logaritmos e aplicações.

Girlene Firmina Diniz

Uberaba - Minas Gerais

Novembro de 2018

Um estudo sobre Exponenciais e Logaritmos e aplicações

Girlene Firmina Diniz

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFTM como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Nelson Fernando Inforzato

Uberaba - Minas Gerais

Novembro de 2018

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

	Diniz, Girlene Firmina
D611e	Um estudo sobre exponenciais e logaritmos e aplicações / Girlene Firmina Diniz. -- 2018.
	79 f. : il., fig., graf., tab.
	Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2018
	Orientador: Prof. Dr. Nelson Fernando Inforzato
	1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Cálculo. 3. Funções exponenciais. 4. Equações. 5. GeoGebra (Programa de computador). I. Inforzato, Nelson Fernando. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.
	CDU 51(07)

Girlene Firmina Diniz

Um estudo sobre Exponenciais e Logaritmos e aplicações

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

23 de NOVEMBRO 2018 .

Banca Examinadora

Prof. Dr. Nelson Fernando Inforzato
Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM

Bruno Nunes de Souza

Prof. Dr. Bruno Nunes de Souza
Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM

Raquel Oliveira Bodart

Profa. Msc. Raquel Oliveira Bodart
Instituto Federal do Triângulo Mineiro - IFTM - Uberaba

Aos meus filhos, Gustavo Diniz Silva e Yngrid Martins Diniz, para que o exemplo lhes sirvam sempre de estímulo, os quais agradeço pelo companheirismo, incentivo e paciência, pois muitas vezes não pude ouvi-los, dedicando-me aos estudos.

Agradecimentos

Para a realização deste trabalho, tive apoio de muitas pessoas, por isso, agradeço a Deus por tê-las colocado em meu caminho tornando possível este trabalho.

Agradeço a meus filhos que tiveram paciência e me auxiliaram nos estudos, aos familiares e amigos que rezaram, oraram e desejaram tanto quanto eu esta conquista.

Aos colegas de trabalho, em especial a Sinthia pelo auxílio nas correções ortográficas.

Ao meu orientador, Professor Doutor Nelson Fernando Inforzato, pelos atendimentos e observações realizadas em todo este trabalho.

Ao corpo docente do PROFMAT pelos valorosos ensinamentos.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos colegas do curso de mestrado da UFTM pelo apoio e incentivo recebido.

A todas as pessoas, que de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

"Os números governam o mundo".

Platão

Resumo

O ensino da matemática tem desafiado educadores na busca de estratégias para apresentar a matemática de forma que instigue a curiosidade e o espírito exploratório de nossos alunos, mostrando que existe uma relação entre os conteúdos estudados e a vida prática.

Neste trabalho, procuramos condensar assuntos relacionados a exponencial e logaritmos, bem como suas respectivas funções, equações e inequações e suas respectivas aplicações abordando a história do surgimento das exponenciais e logaritmos e apresentando uma construção didática utilizando o GeoGebra para mostrar os gráficos. Desenvolvemos um trabalho voltado a professores do ensino médio e cursos iniciais das áreas de exatas, constituindo material básico para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Mostramos a construção passo a passo, demonstrando assim algumas propriedades e exemplos. Ao final, propomos aplicações voltadas a outras áreas do conhecimento, confirmando a importância das funções exponenciais e logarítmicas como ferramentas nas resoluções de problemas.

Palavras-chave: Exponencial, Logaritmo, Equações, Inequações.

Abstract

The teaching of mathematics has challenged educators in the search for strategies to present mathematics in a way that instigates our students' curiosity and the exploratory spirit, showing that there is a link between the studied contents and the practical life.

In this work, we attempt to compile exponential and logarithmic subjects, as well as their respective functions, equations and inequalities - and their respective applications-discoursing the history of exponential and logarithmic emergence and presenting a didactic construction using GeoGebra to show the graphs. We developed a work for both high school teacher and initial courses in the areas of exact, constituting basic material for Differential and Integral Calculus subject. We show the construction step by step, demonstrating some properties and examples. In the end, we propose applications focused on other areas of knowledge, confirming the importance of exponential and logarithmic functions as tools in problem solving.

Keywords: Exponential, Logarithmic, Equations, Inequalities.

Sumário

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

INTRODUÇÃO

A matemática dever ser entendida como parte do nosso cotidiano e o ensino de exponencial e logaritmos, bem como suas respectivas funções, deve se relacionar à vida dos alunos. Nesse trabalho, será abordado a história do surgimento desses conteúdos, apresentando uma construção didática para exponencial e logaritmos, bem como suas respectivas funções, equações e inequações, com aplicações em problemas voltados ao cotidiano dos alunos do ensino médio e em diversos cursos das áreas de exatas, constituindo material básico para a disciplina Cálculo Diferencial e Integral.

Conversando com colegas de profissão, percebe-se as dificuldades apresentadas pelos alunos quanto ao estudo ora mencionado, porque a abordagem metodológica de ensino desses conteúdos é feita de forma abstrata, utilizando-se muito a álgebra para manipulação das propriedades decorrentes da definição e a solução de equações através de tábuas logarítmicas, muitas vezes pouco entendida pelos alunos.

As mudanças na educação ocorrem a todo momento e a relação ensino/aprendizagem deve-se adequar à essas alterações, bem como o processo de conhecimento e aprendizagem ora decorrente como tema deste trabalho em tela.

Assim buscamos em documentos normativos a nível estadual e federal informações que norteariam o ensino desses conteúdos, os quais definem diretrizes e objetivos que visam universalizar o ensino da matemática.

A Proposta Curricular do Conteúdo Básico Comum - CBC (CARNEIRO; SPIRA; SABATUCCI, 2011) para o ensino de Matemática no Ensino Médio em todo Estado de Minas Gerais está subdividido em eixos temáticos e com relação aos conteúdos, exponenciais e logaritmos está no eixo funções elementares e modelagem, no qual objetiva que os alunos sejam capazes de ler e interpretar tabelas, gráficos, diagramas, fórmulas, equações ou representações geométricas; seja capaz também de traduzir matematicamente alguns fenômenos, estabelecendo uma relação de dependência, por exemplo, a velocidade de espalhamento de uma epidemia, depende, entre outras coisas, do número de pessoas infectadas; ou ainda, a absorção de um remédio depende da sua concentração, do peso do individuo e do tempo. Para o conteúdo de exponencial, espera-se que os alunos sejam capazes de:

> identificar exponencial crescente e exponencial decrescente; resolver problemas que envolvam uma função do tipo $y = ka^x$; reconhecer uma progressão geométrica como função da forma $y = ka^x$ definida no conjunto dos números inteiros positivos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's, ensino médio, (BRASIL, 2000), trazem orientações educacionais, organizados sob a forma de tópicos para cada área do conhecimento, elaborados de acordo com o Plano Nacional de Educação - PNE e definem os direitos de aprendizagem em cada etapa do ensino. Em matemática, organizados sob a seguinte forma: competências em matemática, temas estruturadores do ensino de matemática, organização do trabalho escolar e estratégias para ação, com sugestões metodológicas para orientar o trabalho do professor em sala de aula. De acordo com os PCN's, as funções exponenciais e logarítmicas são usadas para descrever a variação de grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, como por exemplo o crescimento de populações, sendo também aplicadas em áreas do conhecimento como matemática financeira.

O livro didático Matemática, Contexto e Aplicações, (DANTE, 2012) inicia os conteúdos através de situações-problemas motivadoras, usando exemplos de fácil entendimento, traz também, menção a parte histórica. Com relação ao estudo de funções exponenciais, $f(x) = \alpha^x$, faz uma revisão de potenciação, porém, sem fazer uma análise das variações de α através de representações gráficas. Quanto ao estudo dos logaritmos, existe um rigor desde as definições que são abordadas numa linguagem matemática até o entendimento das propriedades. Em sua aplicação na resolução de equações exponenciais e de problemas, utiliza-se calculadora substituindo as tábuas logarítmicas. Observa-se também, problemas aplicados a outras áreas de conhecimento, porém a exploração da representação gráfica das funções logarítmicas, em bases diversas não é contemplado e também não é mencionado a função logarítmica como inversa da função exponencial.

A partir dessa análise, algumas perguntas são importantes: Como ensinar de forma significativa desses conteúdos? Quais pontos básicos? Por onde iniciar? A partir dessas indagações propomos a construção dessa pesquisa sob uma perspectiva conceitual e gráfica, relevando de forma significativa com a preocupação o estudo sobre exponenciais e logaritmos e suas respectivas funções, equações, inequações e aplicações, utilizando uma sequência didática que possa mostrar o entendimento da conceituação desses conteúdos, com propriedades, demonstrações, exemplos, gráficos e aplicações.

A proposta desta pesquisa é a construção didática, buscando uma metodologia envolvendo a parte conceitual e gráfica das funções exponenciais e logarítmicas como ferramenta para a resolução de problemas.

Para isso, foram elaborados capítulos, os quais serão apresentados da seguinte forma: na Introdução, um breve relato da motivação para a pesquisa, no Capítulo 1, um pouco de história da origem das exponenciais e logaritmos, os primeiros relatos sobre cálculos, como eram abordados, nomenclaturas, notações e suas aplicações da época. No Capítulo 2, abordamos como surgiu o cálculo da exponencial, partindo do conceito de potências com números naturais e construindo os conceitos através dos conjuntos Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais, esse último será melhor abordado no capítulo 4, onde falaremos das funções exponenciais. Será pontuado também nesse capítulo, as propriedades de potências, com demonstração de algumas delas, equações e inequações exponenciais com exemplos resolvidos aplicando as propriedades necessárias. No Capítulo 3, sobre os logaritmos, surgidos da necessidade de resolver problemas simples do tipo $2^x = 3$, conceitos de antilogaritmo, cologaritmo, logaritmo decimal e logaritmo natural. Abordando também, as propriedades de logaritmos, com demonstrações; a forma de calcular a característica e mantissa de um número; apresentação de tábuas de logaritmos e exemplos de aplicação das tábua de logaritmos utilizado a característica e mantissa; equações e inequações logarítmicas com exemplos resolvidos. No Capítulo 4, definições e gráficos de funções exponenciais e logarítmicas, observando para quais valores as funções são crescentes e decrescentes, com exemplos de gráficos das funções, 2^x, 10^x, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $\left(\frac{1}{10}\right)^x$, apresentando variações dos expoentes e translações. No Capítulo 5, alguns problemas de modelagem matemática utilizando funções exponenciais e logarítmica.

Para construir didaticamente o presente trabalho, faremos um compêndio de vários materiais disponíveis, de vários autores que trabalham com o tema, buscando desenvolver uma linguagem simples, com aplicações em várias áreas do conhecimento, para subsidiar aos professores do Ensino Básico e alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral com o objetivo de trabalharem e entenderem os conteúdos de exponenciais e logaritmos, bem como suas respectivas funções, equações, inequações e aplicações.

1 Um pouco de História

Neste item vamos apresentar um pouco da história de como surgiram as exponenciais e os logaritmos, buscando nos livros de história da matemáticas os primeiros relatos sobre os conteúdos.

Segundo o livro (BOYER, 1974) a exponencial e logaritmos eram usados em problemas juntamente a outros conteúdos, para resolver questões bem específicas da época e não possuíam a notação existente hoje.

1.1 A origem das exponenciais

Livros de história da matemática trazem relatos dos primeiros conceitos sobre a exponencial, ideias com relação ao significado e que foram transmitidos de época em época. Sabe-se que muitos ficaram perdidos, uma vez que muitas obras desaparecem no decorrer dos tempos. Serão citadas passagens com menção da época em que os relatos aconteceram.

Fala-se que o problema 79 do papiro Ahmes, copiado por volta de 1650 a.C., "sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2401 espigas de trigo, 16807 hectares", encontrado no livro (BOYER, 1974), o qual transcrevo:

> ... foi presumível que o escriba estava tratando de um problema, talvez bem conhecido, em que em cada uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão, ...

nos remetendo uma primeira ideia de exponencial.

Na Grécia, encontramos relatos que existia dois sistemas principais de numeração, o sistema ático e o jônio (alfabético), um mais antigo, o ático, conhecido como notação ática, com representação de potências da base (dez), representados pelas letras iniciais, em maiúsculas, das palavras correspondentes, Δ para deka (dez), H para hekaton (cem) e X para khilioni (mil) e M para myrioi (dez mil).

No livro Introductio de Nicômaco, traduzido em 1926, livro caracterizado por ser um manual dos elementos de matemática, foi descrito uma classificação dos números, parmente ímpares e parmente pares (potências de dois), atribuindo a construção dos números a potências de dois.

Nas obras de Diofante, considerado o pai da álgebra, por volta do fim do século quinze e começo do século dezessete, na Europa, aparece notações para operações e relações, bem como, notação exponencial, provavelmente uma das primeiras notações citadas nos livros.

Por volta de 1.202, Fibonacci propõe um problema semelhante ao problema descrito no papiro Ahmes, "sete velhas foram a Roma; cada uma tinha sete mulas; cada mula carregava sete sacos; cada saco continha sete pães; e com cada pão havia sete facas; cada faca estava dentro de sete bainhas".

Percebe-se que ao longo do livro (BOYER, 1974), são apresentados vários problemas resolvidos por vários estudiosos da época, dando mais ou menos ênfase a algumas propriedades. Percebe-se também uma grande disputa entre os povos com relação a criação da matemática, sendo que muitos dos problemas se perderam ao longo do tempo.

1.2 A origem dos logaritmos

Na Mesopotâmia, a meados do quarto milênio antes de nossa era, entre as tabletas babilônias encontram-se tabelas contendo potências sucessivas de um dado número, semelhantes às nossas tabelas de logaritmos, ou mais propriamente, de antilogaritmos. Tabelas exponenciais (ou logarítmicas) foram encontradas em que são dadas as dez primeiras potências para as bases 9 e 16 (todos quadrados perfeitos).

A questão posta num problema "a que potência deve ser elevado um certo número para fornecer um número dado", livro (BOYER, 1974, p.22) , equivale à nossa, qual o logaritmo de um número dado num sistema com um certo número como base.

As diferenças principais entre as tabelas antigas e as nossas, além de linguagem e notação, é o não uso de um número único, sistematicamente, como base em variadas situações e que as lacunas entre os número que constam das tabelas antigas são muito maiores que nas nossas, até então não eram usadas para fins gerais de cálculo, mas para resolver certas questões bem específicas, como por exemplo tabelas exponenciais num problema que pergunta quanto tempo levaria uma quantia em dinheiro para dobrar, a 20 por cento ao ano, problema esse que hoje aplicamos a utilização de tabelas de logaritmos para resolver.

Na Europa do século dezesseis eram usadas fórmulas de transformação de "produto por soma", uma delas, $2cos(x).cos(y) = cos(x + y) - cos(x - y)$, introduzida por Ibn-Yunus (morreu em 1008), contemporâneo de Alhazen, que, mais tarde, com a invenção dos logaritmos, foi substituída.

No livro Logaritmos de (LIMA, 2016, p.1), vemos que no fim do século XVI, o desenvolvimento da Astronomia e da navegação exigia longos e laboriosos cálculos aritméticos. Um auxílio precioso já tinha sido obtido com a invenção das frações decimais. Mesmo assim, achar um método que permitisse efetuar com presteza multiplicações, divisões, potenciações e extrações de raízes era, nos anos próximos de 1600, um problema fundamental.

Segundo o grau de dificuldade, (LIMA, 2016) classificou as operações aritméticas em 3 grupos:

1) operações de 1^a espécie: adição e subtração;

2) operações de 2^a espécie: multiplicação e divisão;

3) operações de 3^a espécie: potenciação e radiciação.

Procurava-se então um processo que permitisse reduzir cada operação de 2^a ou 3^a espécie a uma de espécie inferior e portanto mais simples e o meio que os estudiosos da época encontraram foi o cálculo através de logaritmos.

Jost Bürgi (1552 - 1632) suíço, relojoeiro, matemático e inventor; e John Napier (1550 - 1617), um nobre escocês, teólogo e matemático, cada uma deles desconhecendo inteiramente um ao outro, publicaram as primeiras tábuas de logaritmos. As tábuas de Napier foram publicadas em 1614 e as de Bürgi em 1620. Logo depois do aparecimento da primeira tábua de logaritmos de Napier, o matemático inglês Henry Briggs (1561 - 1631), professor da Universidade de Londres, e depois em Oxford, elaborou, juntamente com Napier, uma nova tábua, de mais fácil utilização, contendo os chamados logaritmos decimais, ou logaritmos ordinários, que tiram proveito do fato de usar o sistema de numeração decimal.

Recentemente, com a utilização cada vez mais divulgada dos computadores, sendo este cada vez com maior velocidade de processamento de dados, as tábuas de logaritmos perderam algo do seu poder como instrumento de cálculo, o mesmo acaba acontecendo com outras tabelas matemáticas. O estudo dos logaritmos ainda é e continuará a ser de fundamental importância. Com efeito, embora eles tenham sido inventados como acessório para facilitar operações aritméticas, o desenvolvimento da matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversas leis matemáticas e vários fenômenos naturais e mesmo sociais são estreitamente relacionados com os logaritmos. Assim sendo, os logaritmos, que no princípio eram importantes apenas por causa das tábuas, mostraram seu apreciável valor intrínseco.

2 Exponenciais

Do dicionário da língua portuguesa, (AURÉLIO. . . ,) exponencial é: "que tem expoente variável ou indeterminado, relativo a expoente". Em matemática, o estudo com expoentes partem das potências, as quais, partiremos delas para o estudo das exponenciais, funções exponenciais, gráficos, equações e inequações exponenciais.

Para iniciarmos faremos algumas definições de potências no conjunto dos números naturais, posteriormente, nos inteiros, racionais e irracionais, partindo para um entendimento do comportamento de potências com expoentes reais.

Definição 2.1. *Seja α um número real positivo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência α^n, de base α e expoente n é definida como o produto de n fatores iguais a α, ou seja*

$$\alpha^n = \alpha.\alpha.\alpha.....\alpha$$

Observemos que para $n = 1$, como não há produto de um só fator, põe-se $\alpha^1 = \alpha$, por definição.

A definição indutiva de α^n é: $\alpha^1 = \alpha$ e $\alpha^{n+1} = \alpha.\alpha^n$.

Para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$ tem-se $\alpha^m.\alpha^n$=α^{m+n}. Essa afirmação é verdadeira, uma vez que ambos os membros desta igualdade temos o produto de $m + n$ fatores iguais a α.

Assim, para $m_1, m_2, m_3, ..., m_k \in \mathbb{N}$ temos: $\alpha^{m_1}.\alpha^{m_2}.\alpha^{m_3}.....\alpha^{m_k} = \alpha^{m_1+m_2+m_3+...+m_k}$.

Em particular se $m_1 = m_2 = m_3 = ... = m_k = m$ temos $(\alpha^m)^k = \alpha^{m.k}$

Podemos observar o comportamento de α, se $\alpha > 1$ ou se $0 < \alpha < 1$.

Se $\alpha > 1$, multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por α^n, obtemos $\alpha^{n+1} > \alpha^n$. Portanto,

$$\alpha > 1 \Rightarrow 1 < \alpha < \alpha^2 < \alpha^3 < ... < \alpha^n < \alpha^{n+1} < ....$$

Além disso, pode-se observar que multiplicando ambos os membros da desigualdade $\alpha < 1$ pelo número positivo α^n, obtemos $\alpha^{n+1} < \alpha^n$. Portanto,

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow 1 > \alpha > \alpha^2 > \alpha^3 > ... > \alpha^n > \alpha^{n+1} > ....$$

Exemplos:

1. Seja $\alpha = 1,000001$ (um inteiro e um milionésimo). As potências sucessivas α, α^2, α^3 , . . . , α^n a princípio próximas de 1, podem tornar-se tão grandes quanto se deseje, desde que o expoente seja tomado suficientemente grande. Observe:
   $1,000001^{10} = 1,000010000045$
   $1,000001^{100} = 1,000001^{10^2} = 1,00010000495$

$1,000001^{1.000} = 1,000001^{10^3} = 1,0010004996$
$1,000001^{10.000} = 1,000001^{10^4} = 1,010005016$
$1,000001^{100.000} = 1,000001^{10^5} = 1,10517086$
$1,000001^{1.000.000} = 1,000001^{10^6} = 2,71828046$
$1,000001^{10.000.000} = 1,000001^{10^7} = 22.026,35566282$
$1,000001^{20.000.000} = 1,000001^{2.10^7} = 22.026,35566282^2 = 485.160.343,203664$

Observando as potências acima percebemos que os valores das potências crescem a medida que o expoente cresce.

Se usar o argumento acima podemos obter uma potência de α que seja superior a 1 bilhão, devemos calcular o expoente para ter $(1,000001)^n >$ um bilhão.

Portanto as potências sucessivas de um número maior do que 1 crescem acima de qualquer limite prefixado, bastando tomarmos um expoente suficientemente grande.

2. Seja $\alpha = 0,999$ (novecentos e noventa e nove milésimos). As potências sucessivas α, α^2, α^3 , . . . ,α^n a princípio próximas de 1, podem tornar-se tão pequenas quanto se deseje, desde que o expoente seja tomado suficientemente grande. Observe:
$(0,999)^2 = 0,998001$
$(0,999)^5 = 0,995009$
$(0,999)^{10} = 0,990044$
$(0,999)^{50} = 0,951205$
$(0,999)^{100} = 0,904792$

Portanto a sequência cujo n-ésimo termo é α^n é crescente quando $\alpha > 1$, logo, $\alpha^n < \alpha^m$, se $\alpha > 1$ e $n < m$ e decrescente se $0 < \alpha < 1$, logo, $\alpha^n > \alpha^m$, se $0 < \alpha < 1$ e $n < m$. Para $\alpha = 1$, esta sequência é constante, com todos os seus termos iguais a 1.

Procuremos agora atribuir um significado à potência α^n , quando $n \in \mathbb{Z}$ é um número inteiro, que pode ser negativo ou zero. Isto deve ser feito de modo que seja mantida a regra fundamental,

$$\alpha^{n+1} = \alpha.\alpha^n$$

Em primeiro lugar, qual deve ser o valor de α^0? Para responder a questão observemos que como,

$$\alpha^0.\alpha^1 = \alpha^{0+1},$$

teremos $\alpha^1 = \alpha$, como $\alpha > 0$, logo $\alpha^0 = 1$.

Em seguida, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, devemos ter $\alpha^{-n}.\alpha^n = \alpha^{-n+n} = \alpha^0 = 1$, logo,

$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}.$$

Assim para estender a definição de potências para números inteiros, preservando que $\alpha^m.\alpha^n = \alpha^{m+n}$, acrescentaremos a seguinte definição:

Definição 2.2. *Seja α um número real positivo. Para todo m e $n \in \mathbb{Z}$, definimos α^0=1 e $\alpha^{-n}= \frac{1}{\alpha^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim temos que $\alpha^m.\alpha^n = \alpha^{m+n}$ e $(\alpha^m)^n = \alpha^{m.n}$.*

Com as definições de potências de expoente natural e potência de expoente inteiro, podemos estabelecer a seguinte definição:

Definição 2.3. *Se α um número real positivo e $n \in \mathbb{Z}$ então*

$$\alpha^n = \begin{cases} 1 \quad se \quad n = 0 \\ \alpha^{n-1}.\alpha \quad se \quad n > 0 \\ \frac{1}{\alpha^n} \quad se \quad n < 0 \quad e\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Agora prosseguindo vejamos que sentido pode ser dado à potência α^r, quando $r = \frac{m}{n}$ é um número racional (onde m $\in \mathbb{Z}$ e n $\in \mathbb{Z}^*$), de modo que continua válida a regra $\alpha^r.\alpha^s = \alpha^{r+s}$ onde r e s $\in \mathbb{Q}$. Dessa igualdade resulta, que se deve ter, para

$$\text{para } r = \frac{m}{n} \Rightarrow nr = n\left(\frac{m}{n}\right) = m.$$

$$(\alpha^r)^n = \underbrace{\alpha^r.\alpha^r.\alpha^r.....\alpha^r}_{n\ vezes} = \alpha^{r+r+r+....+r} = \alpha^{n.r} = \alpha^m$$

.

Portanto α^r é um número real positivo cuja n-ésima potência é igual a α^m, ou seja, $(\alpha^r)^n = \alpha^m$, o que nos motiva a definição a seguir.

Definição 2.4. *Definimos a potência α^r, com $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$ por $\alpha^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^m}$.*

As potências α^r, com expoente racional, embora não contenha todos os números reais positivos, estão espalhados por toda a parte em $\mathbb{R}_+$, desde que $\alpha \neq 1$.

Dados um número real positivo α e um número irracional a, podemos construir, as potências α^a, por exemplo a potência $3^{\sqrt{2}}$. Calculamos o valor real de $\sqrt{2}$ e achamos os arredondamentos mais próximos a casa das unidades, aos décimos, aos centésimos, aos milésimos e aos décimos de milésimos. Os valores abaixo e acima nos arrendondamentos dessas casas, chamaremos de valores racionais aproximados por falta e ou por excesso de $\sqrt{2}$, e usando uma calculadora obtemos em correspondência os valores aproximados por falta ou por excesso de $3^{\sqrt{2}}$ (potência de base 3 e expoente racional, já definidos anteriormente).

Exemplo 2.0.1. *Vamos construir uma tabela para a aproximação de* $3^{\sqrt{2}}$.

Tabela 1 – Tabela indicando as aproximações para $\sqrt{2}$ e para $3^{\sqrt{2}}$

A_1	A_2	B_1	B_2	Valor de B_1	Valor de B_2
1	2	3^1	3^2	3	9
$1,4$	$1,5$	$3^{1,4}$	$3^{1,5}$	$4,6555$	$5,1961$
$1,41$	$1,42$	$3^{1,41}$	$3^{1,42}$	$4,7069$	$4,7589$
$1,414$	$1,415$	$3^{1,414}$	$3^{1,415}$	$4,7277$	$4,7329$
$1,4142$	$1,4143$	$3^{1,4142}$	$3^{1,4143}$	$4,7287$	$4,7292$
$\downarrow$	$\downarrow$			$\downarrow$	$\downarrow$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$			$3^{\sqrt{2}}$	$3^{\sqrt{2}}$

Observe que o para valores próximos de $\sqrt{2}$, o valor de $3^{\sqrt{2}}$ está entre $4,7287$ e $4,7292$ (valores aproximados por falta ou por excesso de $3^{\sqrt{2}}$).

Definição 2.5. *Definimos a potência* α^a, *com* $\alpha > 0$ *e* $a \in \mathbb{I}$, *considerando os conjuntos*

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < a\} \text{ e } A_2 = \{s \in \mathbb{Q} \mid s > a\}.$$

Notemos que:

- *a) todo número de* A_1 *é menor que qualquer número de* A_2.
- *b) existem dois racionais* r *e* s *tais que* $r < a < s$ *e a diferença* $r - s$ *é menor que qualquer número positivo e arbitrário.*

Em correspondência aos conjuntos A_1 *e* A_2 *consideremos os conjuntos*

$$B_1 = \{\alpha^r \mid r \in A_1\} \text{ e } B_2 = \{\alpha^s \mid s \in A_2\}$$

. *Nota-se que:*

- *a) todo número de* B_1 *é menor que qualquer número de* B_2.
- *b) existem dois números* α^r *e* α^s *tais que a diferença* $\alpha^r - \alpha^s$ *é menor que qualquer número positivo e arbitrário.*

Nessas condições, dizemos que α^r *e* α^s *são aproximações por falta e por excesso, respectivamente de* α^a *e que* B_1 *e* B_2 *são classes que definem* α^a.

Obtemos assim, por aproximação de racionais, as potências α^a, com $\alpha > 0$ e $a \in \mathbb{I}$. As potências α^a om $\alpha > 0$ e $a \in \mathbb{I}$ podem ser obtidas envolvendo o conceito de limites de sequências, que não é abordado na Educação Básica, mas que os professores podem consultar em vários materiais disponíveis.

Agora, naturalmente deveríamos o conceito de α^x para x um número real qualquer (inclusive irracional). Este conceito requer algum resultado mais refinado que não se encaixam no 2º grau, por isso ele será abordado no Capítulo 4, em funções exponenciais.

2.1 Propriedades das potências

Seja α *e* $b \in \mathbb{R}^*$; m *e* $n \in \mathbb{N}$ valem as seguintes propriedades:

Propriedades:

1) $\alpha^m.\alpha^n = \alpha^{m+n}$

Demonstração. Demonstraremos P_1 por indução sobre n, para isso consideremos m fixo.

- i) A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois $\alpha^{m+0} = \alpha^m = \alpha^m.1 = \alpha^m.\alpha^0$
- ii) Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, $\alpha^m.\alpha^p = \alpha^{m+p}$, e mostraremos que é verdadeira para $n = p + 1$, isto é, $\alpha^m.\alpha^{p+1} = \alpha^{m+p+1}$.
  De fato: $\alpha^m.\alpha^{p+1} = \alpha^m.\left(\alpha^p.\alpha\right) = \underbrace{\left(\alpha^m.\alpha^p\right)}_{HI}.\alpha = \alpha^{m+p}.\alpha = \alpha^{m+p+1}$.

□

2) $\frac{\alpha^m}{\alpha^n} = \alpha^{m-n},\ \alpha \neq 0\ e\ m \geq n$

Demonstração. Para P_2, o raciocínio é análogo e será feita por indução sobre n, para isso consideremos m fixo.

- i) A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois

$$\alpha^{m-0} = \alpha^m = \frac{\alpha^m}{1} = \frac{\alpha^m}{\alpha^0}$$

- ii) Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, $\frac{\alpha^m}{\alpha^p} = \alpha^{m-p}$, e mostraremos que é verdadeira para $n = p + 1$, isto é, $\frac{\alpha^m}{\alpha^{p+1}} = \alpha^{m-p-1}$.
  De fato:
  $\frac{\alpha^m}{\alpha^{p+1}} = \frac{\alpha^m}{(\alpha^p.\alpha)} = \alpha^m.\left(\frac{1}{\alpha^p}.\frac{1}{\alpha}\right) = \underbrace{\left(\frac{\alpha^m}{\alpha^p}\right)}_{HI}.\frac{1}{\alpha} = \alpha^{m-p}.\frac{1}{\alpha} = \alpha^{m-p}.\alpha^{-1} = \alpha^{m-p-1}$.

□

3) $(\alpha.b)^n = \alpha^n.b^n$

Demonstração. A demonstração de P_3 também será feita por indução sobre n, para isso consideremos m fixo.

- i) A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois

$$(\alpha.b)^0 = 1 = 1.1 = \alpha^0.b^0$$

- ii) Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, $(\alpha.b)^p = \alpha^p.b^p$, mostraremos que é verdadeira para $n = p + 1$, isto é, $(\alpha.b)^{p+1} = \alpha^{p+1}.b^{p+1}$.
  De fato:
  $(\alpha.b)^{p+1} = \underbrace{(\alpha.b)^p}_{HI}.(\alpha.b) = (\alpha^p.b^p).(\alpha.b) = (\alpha^p.\alpha).(b^p.b) = \alpha^{p+1}.b^{p+1}$.

$\square$

4) $\left(\frac{\alpha}{b}\right)^n = \frac{\alpha^n}{b^n},\ b \neq 0$

Demonstração. A demonstração de P_4 será feita por indução sobre n, para isso consideremos m fixo.

- i) A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{\alpha^0}{b^0}$$

- ii) Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, $\left(\frac{\alpha}{b}\right)^p = \frac{\alpha^p}{b^p}$, mostraremos que é verdadeira para $n = p + 1$, isto é, $\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{p+1} = \frac{\alpha^{p+1}}{b^{p+1}}$.
  De fato:
  $\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{p+1} = \underbrace{\left(\dfrac{\alpha}{b}\right)^p}_{HI}.\left(\frac{\alpha}{b}\right) = \left(\frac{\alpha^p}{b^p}\right).\left(\frac{\alpha}{b}\right) = \frac{(\alpha^p.\alpha)}{(b^p.b)} = \frac{\alpha^{p+1}}{b^{p+1}}$.

$\square$

5) $(\alpha^m)^n = \alpha^{m.n}$

Demonstração. A demonstração de P_5 também será feita por indução sobre n, para isso consideremos m fixo.

- i) A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois

$$(\alpha^m)^0 = 1 = \alpha^0 = \alpha^{m.0}$$

- ii) Supondo que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, $(\alpha^m)^p = \alpha^{m.p}$, mostraremos que é verdadeira para $n = p + 1$, isto é, $(\alpha^m)^{p+1} = \alpha^{m.(p+1)}$.
  De fato:
  $(\alpha^m)^{p+1} = \underbrace{(\alpha^m)^p}_{HI}.(\alpha^m) = \alpha^{m.p}.\alpha^m = \alpha^{(m.p)+m} = \alpha^{m(p+1)}$.

$\square$

Para α e $b \in \mathbb{R}^*$; m e $n \in \mathbb{Z}$ valem as propriedades:

Propriedades:

1) $\alpha^m.\alpha^n = \alpha^{m+n}$

2) $\frac{\alpha^m}{\alpha^n} = \alpha^{m-n}$, $\alpha \neq 0$ e $m \geq n$

3) $(\alpha.b)^n = \alpha^n.b^n$

4) $\left(\frac{\alpha}{b}\right)^n = \frac{\alpha^n}{b^n}$, $b \neq 0$

5) $(\alpha^m)^n = \alpha^{m.n}$

As demonstrações para os números inteiros são análogas para os números naturais, através de indução sobre n.

No conjunto dos racionais, para α e $b \in \mathbb{R}^*$; m e $n \in \mathbb{Q}$ tomemos $m = \frac{p}{q}$ e $n = \frac{r}{s}$, então as propriedades P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 são válidas e utilizaremos a definição 2.4 para demonstrar as propriedades P_1 a P_5, como segue:

Propriedades:

1) $\alpha^{\frac{p}{q}}.\alpha^{\frac{r}{s}} = \alpha^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$

Demonstração.

$$\alpha^{\frac{p}{q}}.\alpha^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{\alpha^p}.\sqrt[s]{\alpha^r} = \sqrt[q.s]{\alpha^{p.s}}.\sqrt[q.s]{\alpha^{r.q}} = \sqrt[q.s]{\alpha^{p.s}.\alpha^{r.q}} = \sqrt[q.s]{\alpha^{p.s+r.q}} = \alpha^{\frac{ps+rq}{qs}} = \alpha^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$$

Observe que: (*)

$\alpha^{\frac{p}{q}} = \alpha^{\frac{p.s}{q.s}} = \sqrt[q.s]{\alpha^{p.s}}$

$\alpha^{\frac{r}{s}} = \alpha^{\frac{r.q}{s.q}} = \sqrt[q.s]{\alpha^{r.q}}$

□

2) $\frac{\alpha^{\frac{p}{q}}}{\alpha^{\frac{r}{s}}} = \alpha^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$, $\alpha \neq 0$, $q \neq 0$ e $s \neq 0$

Demonstração.

$$\frac{\alpha^{\frac{p}{q}}}{\alpha^{\frac{r}{s}}} = \frac{\sqrt[q]{\alpha^p}}{\sqrt[s]{\alpha^r}} \overbrace{=}^{*} \frac{\sqrt[q.s]{\alpha^{p.s}}}{\sqrt[q.s]{\alpha^{r.q}}} = \sqrt[q.s]{\frac{\alpha^{p.s}}{\alpha^{r.q}}} = \sqrt[q.s]{\alpha^{p.s-r.q}} = \alpha^{\frac{ps-rq}{qs}} = \alpha^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$$

□

3) $(\alpha.b)^{\frac{p}{q}} = \alpha^{\frac{p}{q}}.b^{\frac{p}{q}}$

Demonstração.

$$(\alpha.b)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(\alpha.b)^p} = \sqrt[q]{\alpha^p.b^p} = \sqrt[q]{\alpha^p}.\sqrt[q]{b^p} = \alpha^{\frac{p}{q}}.b^{\frac{p}{q}}$$

□

4) $\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{\alpha^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}, b \neq 0 \ e \ q \neq 0$

Demonstração.

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{p}} = \sqrt[q]{\frac{\alpha^p}{b^p}} = \frac{\sqrt[q]{\alpha^p}}{\sqrt[q]{b^p}} = \frac{\alpha^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$$

□

5) $\left(\alpha^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \alpha^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$

Demonstração.

$$\left(\alpha^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\alpha^{\frac{p}{q}}\right)^{r}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{\alpha^p}\right)^{r}} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{\alpha^{p.r}}} = \sqrt[q.s]{\alpha^{p.r}} = \alpha^{\frac{p.r}{q.s}} = \alpha^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$$

Observe que:
$\left(\alpha^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \left(\alpha^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}\right) = \left(\alpha^{\frac{p.r}{q.s}}\right) = \sqrt[q.s]{\alpha^{p.r}}$

□

Para $\alpha \in \mathbb{R}^*; m \ e \ n \in \mathbb{I}$, também são válidas as propriedades:

Propriedades:

1) $\alpha^m.\alpha^n = \alpha^{m+n}$
2) $\frac{\alpha^m}{\alpha^n} = \alpha^{m-n}, \ \alpha \neq 0 \ e \ m \geq n$
3) $(\alpha.b)^n = \alpha^n.b^n$
4) $\left(\frac{\alpha}{b}\right)^n = \frac{\alpha^n}{b^n}, \ b \neq 0$
5) $(\alpha^m)^n = \alpha^{m.n}$

Portanto qualquer número $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$, α^x é uma exponencial. Em números, podemos dizer que $2^x, 3^x, 4^x, ..., \alpha^x$ são exponenciais. Para $x \in \mathbb{I}$, utilizamos a definição 2.5 e exemplificamos em 2.0.1 e para $x \in \mathbb{R}$ os exemplos serão melhor abordadas no Capítulo 4 desse trabalho.

2.2 Equações exponenciais

Equação exponencial é uma igualdade, onde a variável é o expoente. Existem dois métodos fundamentais para resolução das equações exponenciais: se as bases forem iguais, essas poderão ser canceladas e o outro para bases diferentes, que está ligado ao estudo de logaritmos e será abordado no Capítulo 3.

Vejamos como resolver equações reduzindo a uma base comum: este método, como o próprio nome já diz, consiste em escrever ambos os membros da equação na mesma base (se possível) com as transformações convenientes baseadas nas propriedades de potências de mesma base α ($\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$). Assim, do fato da função exponencial ser injetora temos que:

$$\alpha^b = \alpha^c \Leftrightarrow b = c \ (\alpha > 0 \ e \ \alpha \neq 1)$$

Exemplos:

1. $8^x = \sqrt[3]{16}$
   Resolução: $(2^3)^x = \sqrt[3]{2^4} \Rightarrow (2^3)^x = 2^{\frac{3}{4}} \Rightarrow 2^{3x} = 2^{\frac{3}{4}}$, cancelando a base 2, pois a função exponencial é injetora, teremos $3x = \frac{3}{4}$, ou seja, $x = \frac{1}{4}$
   $S = \left\{x = \frac{1}{4}\right\}$

2. $2^x = 64$
   Resolução: Fatorando o 64 temos: $2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$
   $S = \{x = 6\}$

3. $8^x = \frac{1}{32}$
   Resolução: Fatorando o 32 e aplicando as propriedades temos:
   $(2^3)^x = 2^{-5} \Rightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$
   $S = \left\{x = \frac{-5}{3}\right\}$

4. $\left(\sqrt{3}\right)^x = \sqrt[3]{81}$
   Resolução: Fatorando o 81 e aplicando as propriedades temos:
   $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \sqrt[3]{3^4} \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{4}{3}} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$
   $S = \left\{x = \frac{8}{3}\right\}$

2.3 Inequações exponenciais

Inequações exponenciais são inequações que envolvem incógnitas no expoente, ou seja, desigualdades entre números, cujo expoente é uma incógnita.

Assim como em equações exponenciais, existem dois métodos fundamentais para resolução das inequações exponenciais. Faremos a apresentação agora do primeiro método e o segundo no estudo de logaritmos.

Redução a uma base comum: este método será aplicado quando ambos os membros da inequação puderem ser representados como potências de mesma base, com as transformações convenientes baseadas nas propriedades de potências de mesma base α ($\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$). Lembremos que a função exponencial $f(x) = \alpha^x$ é crescente se $\alpha > 1$ e decrescente se $0 < \alpha < 1$, portanto se b e c são números reais, então:

$$\text{para } \alpha > 1 \text{ tem-se } \alpha^b > \alpha^c \Leftrightarrow b > c;$$
$$\alpha^b < \alpha^c \Leftrightarrow b < c;$$
$$\text{para } 0 < \alpha < 1 \text{ tem-se } \alpha^b > \alpha^c \Leftrightarrow b < c;$$
$$\alpha^b < \alpha^c \Leftrightarrow b > c;$$

Exemplos:

1. $2^x > 128$
   Solução: Observe que $\alpha > 1$, fatorando o 128 temos: $2^x > 128 \Leftrightarrow 2^x > 2^7$. Como a base é maior que um, temos $x > 7$.
   $\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$

2. $\left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \frac{125}{27}$
   Solução: Observe que $\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < 1$ e aplicando as propriedades temos que: $\left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \frac{5^3}{3^3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$. Como a base está compreendida ente 0 e 1, temos $x \leq -3$
   $\mathrm{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$

3. $\left(\sqrt[3]{2}\right)^x < \left(\sqrt[4]{8}\right)$
   Solução: Observe que $\left(\sqrt[3]{2}\right)^x < \left(\sqrt[4]{8}\right) \Leftrightarrow \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^x < \left(\sqrt[4]{2^3}\right) \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{3}} < 2^{\frac{3}{4}}$. Como a base é maior que 1, temos: $\frac{x}{3} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow x < \frac{9}{4}$
   $\mathrm{S} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{9}{4}\right\}$

4. Resolver $x^{2x^2-9x+4} < 1$ em $\mathbb{R}_+$
   Solução: Devemos considerar três casos:
   1º Caso:
   Devemos verificar se 0 ou 1 são soluções particulares da inequação.
   Fazendo $x = 0$ e $x = 1$, temos:
   $x = 0 \Rightarrow 0^4 < 1$ (verdadeira) $\Rightarrow x = 0$ é solução
   $x = 1 \Rightarrow 1^{-3} < 1$ (falsa) $\Rightarrow x = 1$ não é solução
   A solução neste caso é $S_1 = \{0\}$

   2º Caso:
   A base da potência é maior que um.
   Se $x > 1$ (I), temos:
   $x^{2x^2-9x+4} < 1 \Rightarrow x^{2x^2-9x+4} < x^0 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 4$ (II)
   A solução desse caso é dada por $(I) \cap (II)$
   $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$

   3º Caso:
   A base da potência é positiva, mas menor que um.
   Se $0 < x < 1$ (III), temos:
   $x^{2x^2-9x+4} < 1 \Rightarrow x^{2x^2-9x+4} < x^0 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$ *ou* $x > 4$ (IV)
   A solução desse caso é dada por $(III) \cap (IV)$
   $S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$
   A solução da inequação proposta é:
   $\mathrm{S} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ ou } 1 < x < 4\right\}$

3 Logaritmos

Os logaritmos foram criados como instrumento para tornar mais simples cálculos aritméticos complicados. Posteriormente verificou-se que a importância dos logaritmos na Matemática e nas Ciências em geral era bem maior do que se pensava. Com efeito, diversos fatos matemáticos, bem como fenômenos naturais e até mesmo sociais, podem ser expressos quantitativamente através dos logaritmos.

Uma das primeiras motivações para o ensino de logaritmos, parte do estudo de equações exponenciais, onde teremos, por exemplo, que calcular o valor que assume o x, se $2^x = 3$, ou seja, resolver equação exponencial com bases diferentes. Sabemos que x assume um valor entre 1 e 2, pois $2^1 < 2^x < 2^2$, mas com o conhecimento que temos até aqui não saberíamos qual é esse valor e nem o processo para determiná-lo. A fim de que possamos resolver este e outros problemas, vamos iniciar o estudo de logaritmos.

Definição 3.1. *Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a, o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b. Em símbolos: $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ $a \neq 1$ e $b > 0$, então*

$$log_a b = x \Leftrightarrow \ a^x = b$$

.

Em $log_a b = x$, dizemos: a é a base do logaritmo, b é o logaritmando, x é o logaritmo.

Conheçamos também o que é antilogaritmo e cologaritmo. O número b é o logaritmando ou também chamado antilogaritmo de x na base a.

Definição 3.2. *Sejam a e b números reais positivos com $a \neq 1$, se o logaritmo de b na base a é x, então b é o antilogaritmo de x na base a. Em símbolos: $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ $a \neq 1$ e $b > 0$, então $log_a b = x \Leftrightarrow \ b = antilog_a x$.*

Definição 3.3. *Chama-se cologaritmo de um número b ($b \in \mathbb{R}$ e $b > 0$), numa base a ($a \in \mathbb{R}, a > 0$ $a \neq 1$), ao oposto do logaritmo de b na base a. Em símbolos: se $a > 0$ $a \neq 1$ e $b > 0$ então $colog_a b = -log_a b$. Considerando que $log_a b = -log_a \frac{1}{b}$ então $colog_a b = log_a \frac{1}{b}$.*

3.1 Sistema de logaritmos

Ao conjunto dos logaritmos de todos os números positivos, em certa base α, chamamos sistema de logaritmos de base α. Assim, o conjunto dos logaritmos, na base 2, de todos os números positivos constitui o sistema de logaritmos de base 2. Entre a infinidade de valores que a base pose assumir, são particularmente importante dois sistemas de logaritmos a seguir.

3.1.1 Sistema de Logaritmos Decimais

Sistema de logaritmo decimal é o sistema de base 10, também chamado sistema de logaritmos comuns, ou vulgares, ou de Briggs (Henry Briggs, matemático Inglês (1561 – 1630), foi quem primeiro destacou a vantagem do emprego dos logaritmos de base 10 para os cálculos).

Dentre os diversos sistemas de logaritmos (diversas bases), vamos agora estudar, com particular interesse, o sistema de logaritmos de base 10.

Lembremos as principais propriedades dos logaritmos de base 10:

1) $log 1 = 0$

2) $log 10 = 1$

3) $x > 1 \Rightarrow logx > 0 \ e \ se \ 0 < x < 1 \Rightarrow logx < 0$

3.1.2 Sistema de Logaritmos Neperianos

É o sistema de base e (e = 2,718 ..., número irracional), também chamado sistema de logaritmos naturais. O nome neperiano lembra John Neper, matemático escocês (1.550 - 1.617), autor de um dos primeiros trabalhos desenvolvendo a teoria dos logaritmos. Diz-se também sistema de logaritmos naturais, uma vez que no estudo de fenômenos naturais surge, muitas vezes, uma lei exponencial de base e. Os logaritmos neperianos são usados na Análise Matemática e em assuntos técnicos.

Indica-se, em geral, com um dos símbolos : $log_e x$, ou lnx, ou dependendo do texto, usa-se lgx, $logx$ ou Lx.

No livro do ensino médio (DANTE, 2012) o logaritmo natural é definido como o logaritmo que tem base e e lembrado como uma importante ferramenta nas aplicações de logaritmos, as quais intitula de "A matemática e as práticas sociais".

Para (LIMA, 2016) o logaritmo natural de x, x um número real positivo, é definido como a área da faixa delimitada pelo eixo x e a função $\frac{1}{x}$, designada Área (H_1^x), com x variando de 1 a x. Assim, quando $x > 0$, escrevendo ln x para indicar o logaritmo natural de x, temos: $lnx =$ Área (H_1^x), mostrada no esquema abaixo.

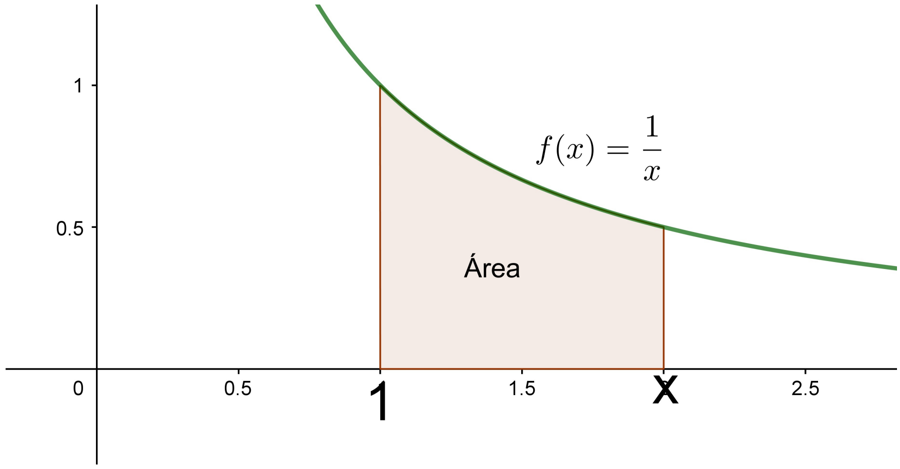

Figura 3.1 – Figura esquema para indicar o logaritmo natural a partir do cálculo da área

3.2 Propriedades de logaritmos

Notemos que, com as propriedades operatórias de logaritmos, podemos transformar uma multiplicação em uma soma, uma divisão em uma subtração e uma potência em uma multiplicação, isto é, com o emprego da teoria de logaritmos podemos transformar uma operação em outra mais simples de ser realizada ou de ordem inferior.

Seja a, b e $c \in \mathbb{R}, a > 0\ a \neq 1,\ b > 0\ e\ c > 0$ são válidas as seguintes propriedades:

- 1ª) Logaritmo do produto:

  Em qualquer base a $(a > 0\ a \neq 1)$, o logaritmo do produto de dois números reais positivos é igual a soma dos logaritmos dos fatores.

  Em símbolos: $a, b\ e\ c \in \mathbb{R}_+, a > 0\ a \neq 1,\ b > 0\ e\ c > 0$, então

  $$log_a(b.c) = log_a b + log_a c$$

  Demonstração. Fazendo $log_a b = x$ e $log_a c = y$ e $log_a(b.c) = z$, provaremos que $z = x + y$.

  De fato:

  $$\begin{cases} log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ log_a(b.c) = z \Rightarrow a^z = b.c \end{cases} \Longrightarrow \quad a^z = a^x.a^y \quad \Rightarrow \quad a^z = a^{x+y} \quad \Rightarrow \quad z = x + y \qquad \square$$

  OBSERVAÇÕES:

  1) Esta propriedade pode ser entendida para o caso do logaritmo do produto de n $(n \geq 2)$ fatores reais e positivos, isto é: Se $a > 0,\ a \neq 1$ e $b_1, b_2, b_3, ..., b_n \in \mathbb{R}_+^*$ então $log_a(b_1.b_2.b_3.....b_n) = log_a b_1 + log_a b_2 + log_a b_3 + ... + log_a b_n$.

  2) Devemos observar que se $b > 0\ e\ c > 0$ então $b.c > 0$ e vale a identidade: $log_a(b.c) = log_a b + log_a c$ com $a > 0,\ a \neq 1$, mas se soubermos apenas que $b.c > 0$

então, temos: $log_a(b.c) = log_a|b| + log_a|c|$ com $a > 0,\ a \neq 1$, uma vez que o logaritmo só está definido para valores positivos.

- 2ª) Logaritmo do quociente:
  Em qualquer base a ($a > 0$ $a \neq 1$), o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual a diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor.
  Em símbolos: a, b e $c \in \mathbb{R}_+, a > 0$ $a \neq 1,\ b > 0$ e $c > 0$, então

$$log_a(\frac{b}{c}) = log_a b - log_a c$$

Demonstração. Fazendo $log_a b = x$ e $log_a c = y$ e $log_a(\frac{b}{c}) = z$, mostraremos que $z = x - y$.
De fato:

$$\begin{cases} log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ log_a(\frac{b}{c}) = z \Rightarrow a^z = \frac{b}{c} \end{cases} \Longrightarrow \quad a^z = \frac{a^x}{a^y} \quad \Rightarrow \quad a^z = a^{x-y} \quad \Rightarrow \quad z = x - y \qquad \square$$

OBSERVAÇÕES:
1) Fazendo $b = 1$, escrevemos $log_a(\frac{1}{c}) = log_a 1 - log_a c \Longrightarrow log_a(\frac{1}{c}) = -log_a c$.
2) Se $b > 0$ e $c > 0$ então $\frac{b}{c} > 0$ e vale a identidade: $log_a(\frac{b}{c}) = log_a b - log_a c$ com $a > 0,\ a \neq 1$, mas se soubermos apenas que $\frac{b}{c} > 0$ então, temos:
$log_a(\frac{b}{c}) = log_a|b| - log_a|c|$ com $a > 0,\ a \neq 1$, uma vez que o logaritmo só está definido para valores positivos.

- 3ª) Logaritmo da potência
  Em qualquer base a ($a > 0$ $a \neq 1$), o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.
  Em símbolos: $a, b \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R}, a > 0$ $a \neq 1,\ b > 0$, então

$$log_a b^\alpha = \alpha.log_a b$$

Demonstração. Fazendo $log_a b = x$ e $log_a b^\alpha = y$, provaremos que $y = \alpha.x$.
De fato:

$$\begin{cases} log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ log_a b^\alpha = y \Rightarrow a^y = b^\alpha \end{cases} \Longrightarrow \quad a^y = (a^x)^\alpha \quad \Rightarrow \quad a^y = a^{\alpha.x} \quad \Rightarrow \quad y = \alpha.x \qquad \square$$

OBSERVAÇÕES:
1) Decorre da 3ª propriedade que em qualquer base a ($a > 0$ $a \neq 1$), o logaritmo da raiz enésima de um número real positivo é igual ao produto do inverso do índice da raiz pelo logaritmo do radicando.
Em símbolos: $a, b \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}^*, a > 0$ $a \neq 1,\ b > 0$, então,

$$log_a \sqrt[n]{b} = log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.log_a b$$

2) Se $b > 0$ então $b^\alpha > 0$ para todo α real e vale a identidade: $log_a b^\alpha = \alpha.log_a b$, mas se soubermos apenas que $b^\alpha > 0$ então, temos: $log_a b^\alpha = \alpha.log_a |b|$, uma vez que o logaritmo só está definido para valores positivos.

As propriedades vistas anteriormente, válidas com as devidas restrições impostas aos números reais a, b, c e α, nos permitem obter o logaritmo de um produto, de um quociente ou de uma potência, conhecendo somente os logaritmos dos termos do produto, dos termos do quociente ou da base da potência.

Notemos a impossibilidade de obter o logaritmo de uma soma ou de uma diferença, por meio de regras semelhantes às dadas. Assim, para encontrarmos $log_a(b + c)$ e $log_a(b - c)$, devemos, calcular inicialmente $(b + c)$ e $(b - c)$ respectivamente.

Observe que até o momento tratamos de logaritmos de bases iguais, caso essas bases sejam diferentes, procederemos uma a mudança de base para uma base conveniente. Vejamos o processo que permite transformar o logaritmo de um número positivo em uma certa base para outro em base conveniente, aqui vamos considerar como uma 4ª propriedade.

- 4ª) Mudança de base:
  Se a, b e c são números reais positivos ($a \neq 1$ e $c \neq 1$), então tem-se:

$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$$

Demonstração. Considerando $log_a b = x$, $log_c b = y$ e $log_c a = z$, e notemos que $z \neq 0$, pois $a \neq 1$. Provaremos que $x = \frac{y}{z}$.
De fato:

$$\begin{cases} log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ log_c b = y \Rightarrow c^y = b \\ log_c a = z \Rightarrow c^z = a \end{cases} \Longrightarrow (c^z)^x = (a^x) = b = c^y \Rightarrow \ (c^z)^x = c^y \Rightarrow \ zx = y \ \Rightarrow x = \frac{y}{z}$$

□

3.3 Como calcular logaritmos?

Nessa seção vamos falar como eram feitos os cálculos de logaritmos no passando, com o uso de tábuas. Hoje com o avanço da computação essas tábuas perderam a utilidade, ficando registradas na história da matemática.

Para calcular logaritmos podemos usar uma tábua de logaritmos. Essa tábua consiste essencialmente de duas colunas de números. A cada número da coluna à esquerda corresponde um números à sua direita, chamado de logaritmo. A tábua de logaritmos é uma tabela de valores que possibilita determinar o valor do logaritmo decimal de qualquer número real positivo na base decimal. Se houver necessidade de determinar o valor de um logaritmo não decimal, deve-se antes transformá-lo em logaritmo decimal para depois procurar o valor na tabela.

Com as tábulas podemos calcular por exemplo o produto de dois números, basta somar seus logaritmos, o resultado é o logaritmo do produto e assim encontrar o valor na tabela do produto.

Vejamos uma tabela de logaritmos decimais dos números naturais de 1 a 300, os valores são aproximações até a quinta casa decimal, para ser utilizada como exemplo para o cálculo do produto de dois números.

L. 00-47 N 0 - 300

N	Log	N	Log	N	Log	N	Log	N	Log
0	—	60	77815	120	07918	180	25527	240	38021
1	00000	61	78533	121	08279	181	25768	241	38202
2	30103	62	79239	122	08636	182	26007	242	38382
3	47712	63	79934	123	08991	183	26245	243	38561
4	60206	64	80618	124	09342	184	26482	244	38739
5	69897	65	81291	125	09691	185	26717	245	38917
6	77815	66	81954	126	10037	186	26951	246	39094
7	84510	67	82607	127	10380	187	27184	247	39270
8	90309	68	83251	128	10721	188	27416	248	39445
9	95424	69	83885	129	11059	189	27646	249	39620
10	00000	70	84510	130	11394	190	27875	250	39794
11	04139	71	85126	131	11727	191	28103	251	39967
12	07918	72	85733	132	12057	192	28330	252	40140
13	11394	73	86332	133	12385	193	28556	253	40312
14	14613	74	86923	134	12710	194	28780	254	40483
15	17609	75	87506	135	13033	195	29003	255	40654
16	20412	76	88081	136	13354	196	29226	256	40824
17	23045	77	88649	137	13672	197	29447	257	40993
18	25527	78	89209	138	13988	198	29667	258	41162
19	27875	79	89763	139	14301	199	29885	259	41330
20	30103	80	90309	140	14613	200	30103	260	41497
21	32222	81	90849	141	14922	201	30320	261	41664
22	34242	82	91381	142	15229	202	30535	262	41830
23	36173	83	91908	143	15534	203	30750	263	41996
24	38021	84	92428	144	15836	204	30963	264	42160
25	39794	85	92942	145	16137	205	31175	265	42325
26	41497	86	93450	146	16435	206	31387	266	42488
27	43136	87	93952	147	16732	207	31597	267	42651
28	44716	88	94448	148	17026	208	31806	268	42813
29	46240	89	94939	149	17319	209	32015	269	42975
30	47712	90	95424	150	17609	210	32222	270	43136
31	49136	91	95904	151	17898	211	32428	271	43297
32	50515	92	96379	152	18184	212	32634	272	43457
33	51851	93	96848	153	18469	213	32838	273	43616
34	53148	94	97313	154	18752	214	33041	274	43775
35	54407	95	97772	155	19033	215	33244	275	43933
36	55630	96	98227	156	19312	216	33445	276	44091
37	56820	97	98677	157	19590	217	33646	277	44248
38	57978	98	99123	158	19866	218	33846	278	44404
39	59106	99	99564	159	20140	219	34044	279	44560
40	60206	100	00000	160	20412	220	34242	280	44716
41	61278	101	00432	161	20683	221	34439	281	44871
42	62325	102	00860	162	20952	222	34635	282	45025
43	63347	103	01284	163	21219	223	34830	283	45179
44	64345	104	01703	164	21484	224	35025	284	45332
45	65321	105	02119	165	21748	225	35218	285	45484
46	66276	106	02531	166	22011	226	35411	286	45637
47	67210	107	02938	167	22272	227	35603	287	45788
48	68124	108	03342	168	22531	228	35793	288	45939
49	69020	109	03743	169	22789	229	35984	289	46090
50	69897	110	04139	170	23045	230	36173	290	46240
51	70757	111	04532	171	23300	231	36361	291	46389
52	71600	112	04922	172	23553	232	36549	292	46538
53	72428	113	05308	173	23805	233	36736	293	46687
54	73239	114	05690	174	24055	234	36922	294	46835
55	74036	115	06070	175	24304	235	37107	295	46982
56	74819	116	06446	176	24551	236	37291	296	47129
57	75587	117	06819	177	24797	237	37475	297	47276
58	76343	118	07188	178	25042	238	37658	298	47422
59	77085	119	07555	179	25285	239	37840	299	47567
60	77815	120	07918	180	25527	240	38021	300	47712
N	Log	N	Log	N	Log	N	Log	N	Log

66

Figura 3.2 – Tabela de logaritmo decimais dos números naturais de 1 a 300

Exemplo 3.3.1. *Retirando dados da tabela Figura 3.2, log3 $\approx$ 0,47712 e log5 $\approx$ 0,69897, logo log3+log5 $\approx$ 1,17609. Observe que consultado a tabela citada, o valor 0,17609 corresponde a coluna de log 15. O número 1 é a característica do número 15, logo, log 15 $\approx$ 1 + 0,17609 = 1,17609.*

Exemplo 3.3.2. *Vamos calcular o log 1024 de três formas diferentes:*

- *log 1024 = log 2.512*

  Consultando a tabela de logaritmo Figura 3.2, log 2 $\approx$ 0,30103 e consultando a tabela Figura 3.5 log 512 $\approx$ 0,70927. Somando as mantissas 0,30103 + 0,70927 = 1,0103. Logo a mantissa de 2.512 é 0,0103. Como $10^3 < 1024 < 10^4$, *a caraterística é 3. Portanto log 1024 $\approx$ 3 + 0,0103 = 3,0103*

- *log 1024 = log 4.256*

  Consultando a tabela Figura 3.2, log 4 $\approx$ 0,60206 e log 256 $\approx$ 0,40824. Somando as mantissas 0,60206 + 0,40824 = 1,0103. Logo a mantissa de 4.256 é 0,0103. Como $10^3 < 1024 < 10^4$, *a caraterística é 3. Portanto log 1024 $\approx$ 3 + 0,0103 = 3,0103*

- *log 1024 = log* 2^{10} *= 10. log 2*

  Consultando a tabela Figura 3.2, log 2 $\approx$ 0,30103. Portanto log 1024 $\approx$ 10.0,30103 = 3,0103.

Os exemplos acima foram calculados com números pequenos, mas as tabelas envolviam números grandes. Poderia-se também aplicar algumas propriedades e encontrar uma vasta quantidade de resultados. Na época em que não existia calculadoras esses cálculos se tornaram bem interessantes.

Os escritos que encontramos nos contam que levamos 20 anos para construir a primeira tábua de logaritmos dos números, o que mostra as dificuldades que tiveram aqueles que se dedicaram a esta tarefa, pois tudo tinha que ser feito apenas com a disponibilidade do conhecimento matemático, lápis e papel e uma infinita paciência. A construção da tábua parte do grau de aproximação desejada para o cálculo dos logaritmos de um número, digamos que seja a quarta casa decimal, para isso, dividindo o eixo x (logaritmos dos números) no intervalo entre 0 e 1 em 2^{20} partes, ou seja, $\frac{1}{1048576}$ será a menor parte, o qual correspondente a uma progressão aritmética. Para cada correspondente de y (números aos quais se pesquisem os logaritmos) $y = 10^{\frac{n}{1048576}}$ correspondem a uma progressão geométrica. Se conhecermos dois pontos consecutivos de uma PA e PG já teremos definido suas respectivas razões e isso é suficiente para traçar todos os pontos da PA e PG no intervalo definido. Podemos colocar em correspondência os pontos da PG e PA, e para os mesmos valores de n ir anotando os resultados dos números para a construção da tábua de logaritmos.

Vale lembrar também que é importante para nós professores insistirmos para que os alunos conheçam a história da matemática, como eram os cálculos com utilização das tabelas, conhecer como foi construído os conteúdos matemáticos e como este foi mudando com a utilização das tecnologias. Conhecer as propriedades de logaritmos se torna interessante para a realização de provas de acesso às universidades, Exame Nacional do Ensino Médio, ou concurso público, onde não é permitida a utilização de calculadoras.

Segue abaixo um modelo de tabela (cópia retirada do Livro), utilizada em 1977, publicada no livro (SERRÃO, 1977) que era utilizada para achar o valor do logaritmo de alguns números usuais.

Números Usuais e Seus Logaritmos

Números	Log.	Números	Log.
$\frac{1}{2}=0,5$	$\overline{1},69897$	$2\pi=6,28319$	$0,79818$
$\frac{3}{2}=1,5$	$0,17609$	$\frac{\pi}{4}=0,78540$	$\overline{1},89509$
$\frac{1}{4}=0,25$	$\overline{1},39794$	$\frac{\pi}{6}=0,52360$	$\overline{1},71900$
$\frac{3}{4}=0,75$	$\overline{1},87506$	$\frac{4\pi}{3}=4,18879$	$0,62209$
$\frac{1}{8}=0,125$	$\overline{1},09691$	$\frac{\pi}{360}=0,00873$	$\overline{3},94085$
$\frac{1}{12}=0,08333$	$\overline{2},92082$	$\pi^2=9,86960$	$0,99430$
$\sqrt{2}=1,41421$	$0,15051$	$\sqrt{\pi}=1,77245$	$0,24857$
$\sqrt{3}=1,73205$	$0,23856$	$\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}=0,80600$	$\overline{1},90633$
$\sqrt{6}=2,44949$	$0,38908$	$\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}=1,61199$	$0,20736$
$\sqrt{5}=2,23607$	$0,34949$	Circunferência... $360°$	$2,55630$
$\sqrt{10}=3,16228$	$0,50000$	$21600'$	$4,33445$
$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}=0,38268$	$\overline{1},58284$	$1296000''$	$6,11261$
$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)=0,30902$	$\overline{1},48998$	Raio ...... $57,2958°$	$1,75812$
$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=0,58779$	$\overline{1},76922$	$3437,75'$	$3,53627$
$\sqrt[3]{2}=1,25992$	$0,10034$	$206265''$	$5,31443$
$\sqrt[3]{3}=1,44225$	$0,15904$	$\frac{1}{100}$ do quadr. $=0,9°$	$\overline{1},95424$
$\sqrt[3]{6}=1,81712$	$0,25938$	$\frac{1}{10000}$ — $=0,54'$	$\overline{1},73239$
$\pi=3,14159$	$0,49715$	$\frac{1}{1000000}$ — $=0,324''$	$\overline{1},51055$
		$e=2,71828$	$0,43429$
		M = log vulg. $e=0,43429$	$\overline{1},63778$

60

Figura 3.3 – Tabela 1 - Apresenta os resultados de logaritmos dos números decimais, irracionais, medidas na circunferência (π, medida de ângulos (°) e raio)

Números Usuais e Seus Logaritmos

Números	Log.	Números	Log.
$\frac{1}{8}=0,33333$	$\bar{1},52288$	$\frac{1}{2\pi}=$ 0,15915	$\bar{1},20182$
$\frac{2}{3}=0,66667$	$\bar{1},82391$	$\frac{4}{\pi}=$ 1,27324	0,10491
$\frac{1}{6}=0,16667$	$\bar{1},22185$	$\frac{6}{\pi}=$ 1,90986	0,28100
$\frac{4}{8}=1,33333$	0,12494	$\frac{3}{4\pi}=$ 0,23873	$\bar{1},37791$
$\frac{1}{9}=0,11111$	$\bar{1},04576$	$\frac{360}{\pi}=114,59156$	2,05915
$\frac{1}{24}=0,04167$	$\bar{2},61979$	$\frac{1}{\pi^2}=$ 0,10132	$\bar{1},00570$
$\sqrt{\frac{1}{2}}=0,70711$	$\bar{1},84949$	$\sqrt{\frac{1}{\pi}}=$ 0,56419	$\bar{1},75143$
$\sqrt{\frac{1}{8}}=0,57735$	$\bar{1},76144$	$\sqrt[8]{\frac{6}{\pi}}=$ 1,24070	0,09367
$\sqrt{\frac{1}{6}}=0,40825$	$\bar{1},61092$	$\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}=$ 0,62035	$\bar{1},79264$
$\sqrt{\frac{1}{5}}=0,44721$	$\bar{1},65051$	Dia ...... 24^h	1,38021
$\sqrt{15}=3,87298$	0,58805	1440^m	3,15836
$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}=0,92388$	$\bar{1},96562$	86400^s	4,93651
$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)=0,80902$	$\bar{1},90796$	$1^\circ =$ 0,017453	$\bar{2},24188$
$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=0,95106$	$\bar{1},97821$	$1' =$ 0,000291	$\bar{4},46373$
$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=0,79370$	$\bar{1},89966$	$1'' =$ 0,000005	$\bar{6},68557$
$\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=0,69336$	$\bar{1},34096$	$1^\circ =$ 1,11111 gr	0,04576
$\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=0,55032$	$\bar{1},74062$	$1' =$ 1,85185$'$	0,26761
$\frac{1}{\pi}=0,31831$	$\bar{1},50285$	$1'' =$ 3,08642$''$	0,48945
		log. nat. π = 1,14473	0,05870
		$\frac{1}{M}$ = log nat. 10 = 2,30259	0,36222

61

Figura 3.4 – Tabela 2 de logaritmo de números usuais

As tábuas apresentadas nas tabelas (Figura 3.3) e (Figura 3.4) são números, cujo logaritmos não poderiam ser obtidos através de aplicação de propriedades. São apresentados com uma notação não usual. Nesse caso, o símbolo barra, acima do número, por exemplo no cálculo de $log(\frac{1}{2})$, $\bar{1}$ quer dizer característica + mantissa, $\bar{1}, abcd = 0, abcd - 1$, onde 0,abcd é a mantissa e -1 é a característica de $\frac{1}{2}$, a maneira de calcular será vista logo a seguir. Mas como calcular os logaritmos de um número utilizando os dados da tabela? E quando o números não forem inteiros?

A seguir veremos mais uma tabela, trata-se de tábuas de logaritmos decimais dos números inteiros de 300 até 600 com cinco decimais. A tabela completa está publicada no livro (SERRÃO, 1977) e vai de 1 até dez mil.

N 300 - 600 L. 47-77

N	Log	N	Log	N	Log	N	Log	N	Log	P P
300	47712	360	55630	420	62325	480	68124	540	73239	
301	47857	361	55751	421	62428	481	68215	541	73320	
302	48001	362	55871	422	62531	482	68305	542	73400	
303	48144	363	55991	423	62634	483	68395	543	73480	
304	48287	364	56110	424	62737	484	68485	544	73560	
305	48430	365	56229	425	62839	485	68574	545	73640	
306	48572	366	56348	426	62941	486	68664	546	73719	
307	48714	367	56467	427	63043	487	68753	547	73799	
308	48855	368	56585	428	63144	488	68842	548	73878	
309	48996	369	56703	429	63246	489	68931	549	73957	
310	49136	370	56820	430	63347	490	69020	550	74036	
311	49276	371	56937	431	63448	491	69108	551	74115	
312	49415	372	57054	432	63548	492	69197	552	74194	
313	49554	373	57171	433	63649	493	69285	553	74273	
314	49693	374	57287	434	63749	494	69373	554	74351	
315	49831	375	57403	435	63849	495	69461	555	74429	
316	49969	376	57519	436	63949	496	69548	556	74507	
317	50106	377	57634	437	64048	497	69636	557	74586	
318	50243	378	57749	438	64147	498	69723	558	74663	
319	50379	379	57864	439	64246	499	69810	559	74741	
320	50515	380	57978	440	64345	500	69897	560	74819	
321	50651	381	58092	441	64444	501	69984	561	74896	
322	50786	382	58206	442	64542	502	70070	562	74974	
323	50920	383	58320	443	64640	503	70157	563	75051	
324	51055	384	58433	444	64738	504	70243	564	75128	
325	51188	385	58546	445	64836	505	70329	565	75205	
326	51322	386	58659	446	64933	506	70415	566	75282	
327	51455	387	58771	447	65031	507	70501	567	75358	
328	51587	388	58883	448	65128	508	70586	568	75435	
329	51720	389	58995	449	65225	509	70672	569	75511	
330	51851	390	59106	450	65321	510	70757	570	75587	
331	51983	391	59218	451	65418	511	70842	571	75664	
332	52114	392	59329	452	65514	512	70927	572	75740	
333	52244	393	59439	453	65610	513	71012	573	75815	
334	52375	394	59550	454	65706	514	71096	574	75891	
335	52504	395	59660	455	65801	515	71181	575	75967	
336	52634	396	59770	456	65896	516	71265	576	76042	
337	52763	397	59879	457	65992	517	71349	577	76118	
338	52892	398	59988	458	66087	518	71433	578	76193	
339	53020	399	60097	459	66181	519	71517	579	76268	
340	53148	400	60206	460	66276	520	71600	580	76343	
341	53275	401	60314	461	66370	521	71684	581	76418	
342	53403	402	60423	462	66464	522	71767	582	76492	
343	53529	403	60531	463	66558	523	71850	583	76567	
344	53656	404	60638	464	66652	524	71933	584	76641	
345	53782	405	60746	465	66745	525	72016	585	76716	
346	53908	406	60853	466	66839	526	72099	586	76790	
347	54033	407	60959	467	66932	527	72181	587	76864	
348	54158	408	61066	468	67025	528	72263	588	76938	
349	54283	409	61172	469	67117	529	72346	589	77012	
350	54407	410	61278	470	67210	530	72428	590	77085	
351	54531	411	61384	471	67302	531	72509	591	77159	
352	54654	412	61490	472	67394	532	72591	592	77232	
353	54777	413	61595	473	67486	533	72673	593	77305	
354	54900	414	61700	474	67578	534	72754	594	77379	
355	55023	415	61805	475	67669	535	72835	595	77452	
356	55145	416	61909	476	67761	536	72916	596	77525	
357	55267	417	62014	477	67852	537	72997	597	77597	
358	55388	418	62118	478	67943	538	73078	598	77670	
359	55509	419	62221	479	68034	539	73159	599	77743	
360	55630	420	62325	480	68124	540	73239	600	77815	
N	Log	N	Log	N	Log	N	Log	N	Log	P P

67

Figura 3.5 – Tabela de logaritmo decimais dos números naturais de 300 a 600

Se quisermos calcular o logaritmo de um número não natural e que este não esteja em tabelas, observaremos a característica e a mantissa. Para isso veremos abaixo como encontrar a característica e a mantissa e utilizar as tabelas de mantissa.

3.3.1 Característica e Mantissa

Qualquer que seja o número real positivo x, considere $n = [x]$ (parte inteira de x). Se n tiver $k+1$ dígitos então $10^k \leq n \leq 10^{(k+1)}$ e a mesma coisa acontece para x, ou seja, x estará necessariamente compreendido entre duas potências de 10 com expoentes inteiros consecutivos.

Exemplo 3.3.3. *Se* $x = 0,04 \Rightarrow 10^{-2} < 0,04 < 10^{-1}$.

Assim, dado $x > 0$, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que: $10^c \leq x < 10^{c+1} \Rightarrow \log 10^c \leq \log x < \log 10^{c+1}$ $\Rightarrow c \leq \log x < c+1$, pois, $\log x$ é crescente.

Podemos afirmar que:

$$\log x = c + m \ onde \ c \in Z \ e \ 0 \leq m < 1$$

isto é, o logaritmo decimal de x é a soma de um número inteiro c com um número decimal m não negativo e menor que 1.

O número inteiro c é por definição a característica do logaritmo de x e o número decimal m $(0 \leq m < 1)$ é por definição a mantissa do logaritmo de x.

Em geral, a mantissa é um número irracional, as tábuas de logaritmos nos fornecem valores aproximados dos logaritmos dos números inteiros, geralmente de 1 a 10.000.

Ao procurarmos a mantissa do logaritmo decimal de x, devemos lembrar a seguinte propriedade:

Propriedade 01: A mantissa do logaritmo decimal de x não se altera se multiplicarmos x por uma potência de 10 com expoente inteiro.

Demonstração. Para demonstrarmos essa propriedade mostraremos que se p $\in \mathbb{Z}$ então

$$(\log(x.10^p) - \log x) \in \mathbb{Z}$$

De fato:

$$(\log(10^p.x) - \log x) = \log(\frac{10^p.x}{x}) = \log 10^p = p \in \mathbb{Z}$$

□

Uma consequência importante é:

"Os logaritmos de dois números cujas representações decimais diferem apenas pela posição da vírgula tem mantissas iguais."

Assim os logaritmos decimais dos números: 2, 200, 2000, 0,2; 0,002 tem todos a mesma mantissa 0,3010; mas com características diferentes, ou seja, iguais a 0, 2, 3, -1 e -3, respectivamente.

Segue abaixo tabelas de mantissas dos logaritmos dos números inteiros de 100 a 999, encontradas no livro (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 1985, p.113-114).

Mantissas										
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7464	7372	7380	7388	7396
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Figura 3.6 – Tabela de mantissas de números naturais de 100 a 549

Na tabela 3.6 a mantissa pode ser encontrada localizando o número pela linha e coluna, por exemplo o número 517, a mantissa está na linha 51 coluna 7. A mantissa juntamente com a característica nos fornece o logaritmo do número procurado.

Mantissas										
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9150	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Figura 3.7 – Tabela de mantissas de números naturais de 550 a 999

3.3.2 Exemplos de aplicação das tábua de logaritmos utilizando a característica e mantissa

1. Calcular $\log 23,4$

   Como $10 < 23,4 < 100$, a característica é 1 e a mantissa é 0,3692 que é a mesma do número 234 (basta verificar na tabela Figura 3.6 na linha 23, coluna 4). Temos então:

$$\log 23,4 = 1 + 0,3692 = 1,3692$$

2. Calcular $\log 0,042$

   Como $10^{-2} < 0,042 < 10^{0}$, logo a característica é -2 e a mantissa é 0,6232 que é a mesma do número 420 (vide Figura 3.6). Temos, então:

   $$\log 0,042 = -2 + 0,6232 = -1,3768.$$

   Entretanto, é usual escrevermos -2+0,6232 sob a forma $\overline{2},6232$; onde figura explicitamente a mantissa do logaritmo e a característica -2 é substituída pela notação $\overline{2}$.

   Dizemos que $\overline{2},6232$ é a forma mista ou preparada do $\log 0,042$ e que -1,3768 é a forma negativa de $\log 0,042$.

3. Calcular $\log 314,3$

   Para calcularmos $\log 314,3$ usaremos um processo de interpolação linear.

   Como $10^2 < 314,3 < 10^3$, logo a característica é 2 e consideremos os valores de mantissa (vide Figura 3.6), mostrados na tabela abaixo:

x	y= $\log x$
314	y= $\log 314$ = 2,4969
315	y= $\log 315$ = 2,4983

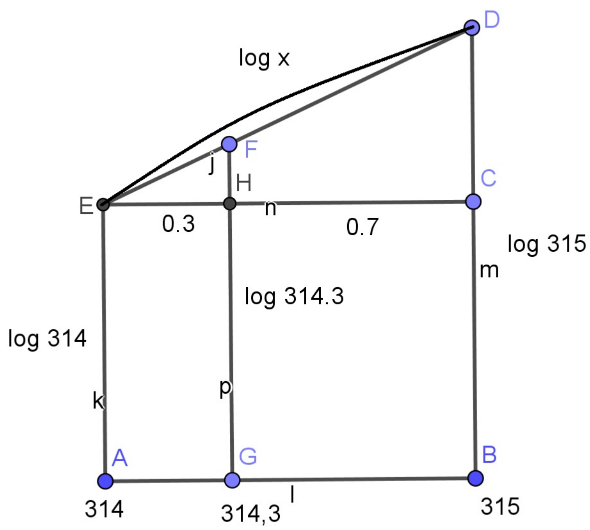

Figura 3.8 – Figura esquema para interpolação

A variação da função logarítmica não é linear, mas podemos aceitar como uma boa aproximação de $\log 314,3$, a ordenada y do ponto F sobre a reta DE. Para determinarmos o valor de y, consideremos os triângulos ECD e EHF. Como os triângulos ECD e EHF são semelhantes, temos:

$\frac{FH}{DC} = \frac{EH}{EC}$, onde FH = y, DC = $\log 315 - \log 314$, EH=0,3 e EC=1, logo

$\frac{y}{\log 315 - \log 314} = \frac{0{,}3}{1}$
$\frac{y}{2{,}4983 - 2{,}4969} = 0,3$
$y = 0,0004$

Portanto $\log 314,3 = \log 314 + y =$ 2,4969 + 0,0004 = 2,4973

4. Calcular antilog -1,3716
Fazendo $x =$ antilog -1,3716, e aplicando a definição do antilogaritmo $\log_a b = x \Leftrightarrow b = antilog_a x$ temos:
$\log x =$ -1,3716
Observe que:
$-1,3716 = -1 - 0,3716 = -1 - 1 + 1 - 0,3716 = -2 + 0,6284 = \overline{2},6284.$
Com a mantissa 0,6284 encontramos o número 425, mas como a característica do $\log x$ é -2, duas casas decimais, temos $x =$ 0,0425.

Os exemplos a seguir não são para resolver o cálculo de logaritmo, mas para usar o logaritmo para o cálculo de potências e raízes.

5. Calcular a potência $(1,12)^{20}$
Fazendo $x = (1,12)^{20}$, podemos aplicar log em ambos os membros da igualdade, assim teremos: $\log x = \log(1,12)^{20} \Rightarrow \log x = 20.\log(1,12) \Rightarrow \log x = 20.0,0492 \Rightarrow \log x = 0,9840.$
Portanto $x = antilog 0,9840 = 10^{0,9840} \approx 9,638.$

6. Calcular $x = \sqrt[7]{1969}$
Aplicando log e suas propriedades, temos: $\log x = \log(1969)^{\frac{1}{7}} \Rightarrow \log x = \frac{1}{7}.\log 1969 \Rightarrow \log x = \frac{1}{7}.3,2943 \Rightarrow \log x = \frac{3{,}2943}{7} \Rightarrow \log x = 0,4806.$
Portanto $x = antilog 0,4806 = 10^{0,4806} \approx 3,024.$

Em problemas, utilizaremos da modelagem matemática e as funções exponenciais e logarítmicas como ferramentas de resolução.

3.4 Equações logarítmicas

Para resolver equações logarítmicas é importante lembrar do conceito de logaritmo, $a, b \in \mathbb{R}, a > 0\ a \neq 1\ e\ b > 0$, então

$$\log_a b = x \Leftrightarrow\ a^x = b.$$

Observe que a base e o logaritmando sempre são positivos, ou seja, uma condição de existência para os mesmos.

Se $\log_a x = \log_a y$, aplicando a definição temos:
$\log_a x = z \Leftrightarrow a^z = x$
$\log_a y = z \Leftrightarrow a^z = y$
Portanto, se $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$.

Podemos classificá-las em três tipos:

1º Tipo: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

É a equação que apresenta ou é redutível a uma igualdade entre dois logaritmos de mesma base a, $(a > 0\ e\ a \neq 1)$.

A resolução de uma equação deste tipo baseia-se na consequência da definição.

Não devemos esquecer das condições de existência do logaritmo, isto é, a base do logaritmo deverá ser positiva e diferente de um e o logaritmando deverá ser positivo. Assim sendo, os valores encontrados na solução da equação só serão considerados solução da equação logarítmica proposta se for um valor qe satisfaz as condições de existência do logaritmo.

Esquematicamente, temos: Se $a > 0\ e\ a \neq 1$ então

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Longrightarrow f(x) = g(x) \quad (f(x) > 0\ e\ g(x) > 0)$$

2º Tipo: $\log_a f(x) = \alpha$

É a equação que apresenta ou é redutível a uma igualdade ente um logaritmo e um número real.

A resolução de uma equação deste tipo é simples, basta aplicarmos a definição de logaritmo.

Esquematicamente, temos: Se $a > 0,\ a \neq 1\ e\ \alpha \in \mathbb{R}$ então

$$\log_a f(x) = \alpha \Longrightarrow f(x) = a^\alpha$$

Não precisamos nos preocupar com a condição de existência do logaritmo, sendo $a > 0,\ a \neq 1$, temos $a^\alpha > 0$ para todo α real e consequentemente $f(x) = a^\alpha > 0$.

3º Tipo: incógnita auxiliar

São as equações que resolvemos fazendo inicialmente uma mudança de incógnita. Ex: $(\log_2 x)^2 - \log_2 x = 2$, ou seja, devemos resolver fazendo $\log_2 x = y$, assim sendo, iremos resolver a equação em y, $y^2 - y - 2 = 0$.

Exemplos:

Resolver as seguintes equações:

1. $\log_2(3x-5) = \log_2 7$
   Solução: $\log_2(3x-5) = \log_2 7 \Rightarrow (3x-5) = 7 > 0$
   Resolvendo $3x - 5 = 7 \Rightarrow x = 4$. Logo $x = 4$ é solução da equação proposta e não há necessidade de verificarmos pois $7 > 0$ é satisfatória para todo x real.
   $S = \{4\}$

2. $\log_3(2x-3) = \log_3(4x-5)$
   Solução: $\log_3(2x-3) = \log_3(4x-5) \Rightarrow (2x-3) = (4x-5) > 0$
   Resolvendo $2x - 3 = 4x - 5 \Rightarrow x = 1$. Observe que $x = 1$ não pode ser solução da equação proposta pois fazendo $x = 1$ em $4x - 5$ encontramos $4.1 - 5 = -1 < 0$, logo a equação proposta não tem solução. Chegaríamos a mesma conclusão se ao invés de fazer $x = 1$ em $4x - 5$, o fizéssemos em $2x - 3$, já que $2x - 3 = 4x - 5$.
   $S = \emptyset$

3. $\log_5(x^2 - 3x - 10) = \log_5(2 - 2x)$
   Solução: $\log_5(x^2 - 3x - 10) = \log_5(2 - 2x) \Rightarrow (x^2 - 3x - 10) = (2 - 2x) > 0$
   Resolvendo $x^2 - 3x - 10 = 2 - 2x \Rightarrow x^2 - 3x - 12 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -3$. Observe que $x = 4$ não pode ser solução da equação proposta pois fazendo $x = 4$ em $2 - 2x$ encontramos $2 - 2.4 = -6 < 0$. Fazendo $x = -3$ em $2 - 2x$ ou em $x^2 - 3x - 10$ encontramos $2 - 2.(-3) = 8 > 0$ ou $(-3)^2 - 3.(-3) - 10 = 8 > 0$. Portanto $x = -3$ é solução da equação proposta.
   $S = \{-3\}$

4. $\log_2(3x+1) = 4$
   Solução: Aplicando a definição de logaritmo temos: $\log_2(3x+1) = 4 \Rightarrow 3x + 1 = 2^4 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$
   $S = \{5\}$

5. $\log_3(x^2 + 3x - 1) = 2$
   Solução: Aplicando a definição de logaritmo temos: $\log_3(x^2 + 3x - 1) = 2 \Rightarrow x^2 + 3x - 1 = 3^2 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -5$.
   $S = \{2, -5\}$

6. $\log_2 [1 + \log_3(1 - 2x)] = 2$
   Solução: Aplicando a definição de logaritmo temos: $\log_2 [1 + \log_3(1 - 2x)] = 2 \Rightarrow 1 + \log_3(1 - 2x) = 2^2 \Rightarrow \log_3(1 - 2x) = 3 \Rightarrow 1 - 2x = 3^3 \Rightarrow -2x = 26 \Rightarrow x = -13$.
   $S = \{-13\}$

7. $(\log_2 x)^2 - \log_2 x = 2$
   Solução: Fazendo uma mudança de variável temos: $\log_2 x = y$, assim sendo, iremos

resolver a equação em y, $y^2 - y - 2 = 0$.
Resolvendo $y^2 - y - 2 = 0$ temos $y = 2$ ou $y = -1$.
Mas, $\log_2 x = y$, então $\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 \Rightarrow x = 4$
$\log_2 x = -1 \Rightarrow x = 2^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
$S = \left\{4, \frac{1}{2}\right\}$

8. $\frac{2+\log_3 x}{\log_3 x} + \frac{\log_3 x}{1+\log_3 x} = 2$
Solução: Fazendo $\log_3 x = y$, temos:
$\frac{2+y}{y} + \frac{y}{1+y} = 2 \Rightarrow (2+y)(1+y) + y^2 = 2y(1+y) \Rightarrow 2y^2 + 3y + 2 = 2y^2 + 2y \Rightarrow$ $3y + 2 = 2y \Rightarrow y = -2$
Substituindo em $\log_3 x = y$, temos: $\log_3 x = -2 \Rightarrow x = 3^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$
$S = \left\{\frac{1}{9}\right\}$

9. $\log_3 x = \log_2 10$
Solução: Aplicando a propriedade de mudança de base, temos:
$\frac{\log_{10} x}{\log_{10} 3} = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 2}$
Consultando a tabela Figura 3.2 temos:
$\log_{10} 3 \approx 0,47712$
$\log_{10} 10 = 1$
$\log_{10} 2 \approx 0,30103$
Fazendo as substituições temos:
$\frac{\log_{10} x}{0,47712} = \frac{1}{0,30103}$
$\log_{10} x = \frac{0,47712}{0,30103}$
$\log_{10} x = 1,5849 \rightarrow x = 10^{1,5849} \rightarrow x \approx 38,45$
$S = \{x \approx 38,45\}$

3.5 Inequações logarítmicas

Assim como classificamos as equações logarítmicas em três tipos básicos, vamos também classificar as inequações logarítmicas em três tipos:

Tipo I: $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

É a inequação que é redutível a uma desigualdade entre dois logaritmos de mesma base a, ($a > 0$ e $a \neq 1$).

Como a função logaritmo é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, devemos considerar dois casos:

- 1º Caso: Quando a base é maior que 1, a relação de desigualdade existente entre os logaritmandos é de mesmo sentido que o dos logaritmos, ou seja, cresce (ou decresce) conforme a variável cresce (ou decresce). Não devemos esquecer que, para existirem o logaritmos em $\mathbb{R}$, os logaritmandos deverão ser positivos.

Esquematicamente, temos: Se $a > 1$ então,

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x) > g(x) \quad (f(x) > 0 \ e \ g(x) > 0)$$

- 2º Caso: Quando a base é positiva e menor que 1, a relação de desigualdade existente entre os logaritmandos é de sentido contrário a dos logaritmos, ou seja, cresce (ou decresce) conforme a variável decresce (ou cresce). Também, não devemos esquecer que os logaritmandos deverão ser positivos para que os logaritmos sejam reais.

  Esquematicamente, temos: Se $0 < a < 1$ então,

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Longleftrightarrow f(x) < g(x) \quad (f(x) > 0 \ e \ g(x) > 0)$$

Agrupando os dois casos num só esquema temos:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) > 0 \ se \ a > 1 \\ \quad ou \\ 0 < f(x) < g(x) \ se \ 0 < a < 1 \end{cases}$$

Não devemos esquecer das condições de existência do logaritmo, isto é, a base do logaritmo deverá ser positiva e diferente de um e o logaritmando também deverá ser positivo. Assim sendo, os valores encontrados na solução da equação só serão considerados solução da equação logarítmica proposta se for um valor que satisfaz as condições de existência do logaritmo.

Tipo II: $\log_a f(x) > k$ e $\log_a f(x) < k$

É quando a inequação logarítmica é redutível a uma desigualdade entre um logaritmo e um número real.

Para resolvermos uma inequação deste tipo, basta notarmos que o número real k pode ser expresso $k = k.\log_a a = \log_a a^k$.

Portanto, são equivalentes as inequações:

$$\log_a f(x) > k \Longleftrightarrow \log_a f(x) > \log_a a^k$$

$$\log_a f(x) < k \Longleftrightarrow \log_a f(x) < \log_a a^k$$

Pelo estudo feito no Tipo I, temos esquematicamente:

$$\log_a f(x) > k \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^k \ se \ a > 1 \\ \quad ou \\ 0 < f(x) < a^k \ se \ 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\log_a f(x) < k \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^k \ se\ a > 1 \\ \quad ou \\ f(x) > a^k \ se\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

Tipo III: incógnita auxiliar

São as inequações que resolvemos fazendo inicialmente uma mudança de incógnita. Ex: $(\log_3 x)^2 - 3.\log_3 x + 2 > 0$, ou seja, a resolução será $\log_3 x = y$, assim sendo, iremos resolver a equação em y, $y^2 - 3y + 2 > 0$.

Exemplos:

Resolva as seguintes equações:

1. $\log_2(2x-1) < \log_2 6$
   Solução: Observe que a base é maior que um, logo a desigualdade entre os logaritmando tem o mesmo sentido dos logaritmos, ou seja, cresce (ou decresce) conforme a variável cresce (ou decresce).
   $\log_2(2x-1) < \log_2 6 \Rightarrow 0 < 2x - 1 < 6 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$
   $S = \left\{x \in \mathbb{R} | \frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}\right\}$

2. $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x) > \log_{\frac{1}{3}} 5$
   Solução: Observe que a base é menor que um, logo a desigualdade entre os logaritmando tem o sentido contrário dos logaritmos, ou seja, cresce (ou decresce) conforme a variável decresce (ou cresce).
   $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x) > \log_{\frac{1}{3}} 5 \Rightarrow 0 < x^2 - 4x < 5 \Rightarrow$
   $$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x > 0 \Rightarrow x < 0 \ ou\ x > 4\ (I) \\ \quad e \\ x^2 - 4x < 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow -1 < x < 5\ (II) \end{cases}$$
   Fazendo $(I) \cap (II)$ temos: $-1 < x < 0$ ou $4 < x < 5$
   $S = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 0 \ ou\ 4 < x < 5\}$

3. $\log_5(x^2 - 2x - 6) \geq \log_5 2$
   Solução: $\log_5(x^2 - 2x - 6) \geq \log_5 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 6 \geq 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 \geq 0 \Rightarrow x \leq -2 \ ou\ x \geq 4$
   $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -2 \ ou\ x \geq 4\}$

4. $\log_3(3x+2) < 2$
   Solução: $\log_3(3x+2) < 2 \Rightarrow 0 < 3x + 2 < 3^2 \Rightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{7}{3}$
   $S = \left\{x \in \mathbb{R} | -\frac{2}{3} < x < \frac{7}{3}\right\}$

5. $\log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 3x) > -1$
Solução: $\log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 3x) > -1 \Rightarrow 0 < 2x^2 - 3x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Rightarrow 0 < 2x^2 - 3x < 2$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x < 0 \ ou \ x > \frac{3}{2} \ (I) \\ \quad e \\ 2x^2 - 3x < 2 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 2 \ (II) \end{cases}$$
Fazendo $(I) \cap (II)$ temos: $-\frac{1}{2} < x < 0$ ou $\frac{3}{2} < x < 2$
$S = \left\{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{2} < x < 0 \ ou \ \frac{3}{2} < x < 2\right\}$

6. $\log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 7x + 5) \leq -2$
Solução: $\log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 7x + 5) \leq -2 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow x^2 - 7x + 5 \geq 9 \Rightarrow$ $x^2 - 7x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2}$ ou $x \geq 4$
$S = \left\{x \in \mathbb{R} | x \leq -\frac{1}{2} \ ou \ x \geq 4\right\}$

7. $(\log_3 x)^2 - 3.\log_3 x + 2 > 0$
Solução: Resolver $(\log_3 x)^2 - 3.\log_3 x + 2 > 0$, fazemos $\log_3 x = y$, e temos que resolver a equação em y, $y^2 - 3y + 2 > 0 \Rightarrow y < 1$ ou $y > 2$. Fazendo $y = \log_3 x$ obteremos:
$$\begin{cases} \log_3 x < 1 \Rightarrow 0 < x < 3^1 \\ \quad ou \\ \log_3 x > 2 \Rightarrow x > 3^2 \Rightarrow x > 9 \end{cases}$$
$S = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 3 \ ou \ x > 9\}$

8. $\log_x(2x^2 - 5x + 2) > 1$
Solução: Antes de resolver a inequação, devemos levantar a condição para existência do logaritmo.
$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \ ou \ x > 2 \\ \qquad e \\ 0 < x \ e \ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 < x < \frac{1}{2} \ ou \ x > 2 \ (I)$$
Como a base x poder ser maior ou menor que um, devemos examinar dois casos:

1º Caso: Se $x > 1$ (II)
$\log_x(2x^2 - 5x + 2) > 1 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 > x \Rightarrow 2x^2 - 6x + 2 > 0 \Rightarrow x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (III)
Fazendo $(I) \cap (II) \cap (III)$ teremos: $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} | x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

2º Caso: Se $0 < x < 1$ (IV) temos:
$\log_x(2x^2 - 5x + 2) > 1 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 < x \Rightarrow 2x^2 - 6x + 2 < 0 \Rightarrow x\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x <$ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (V)

Fazendo $(I) \cap (IV) \cap (V)$ teremos: $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2}$
$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} | \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2}\right\}$

Portanto a solução geral será dada por: $S_1 \cup S_2 = S$
$S = \left\{x \in \mathbb{R} | \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2}\right\}$

4 Função Exponencial e Função Logarítmica

Nesse capítulo falaremos sobre as funções exponenciais e logarítmicas. Para esse estudo, consideramos os conceitos já conhecidos e que serão utilizados como por exemplo domínio, contradomínio, imagem de função, função injetora, função sobrejetora, função bijetora e função inversa.

4.1 Função Exponencial

Por que estudar funções exponenciais? Dado um problema contextualizado, como saber se a função exponencial é o modelo matemático mais adequado?

As perguntas acima serão introduzidas, através das definições e características das funções nessa seção e respondidas na próxima seção, onde trataremos dos modelos/aplicações, identificando se um determinado problema poderá ser modelado por uma função exponencial, dados sua caracterização matemática.

Trataremos nessa seção de funções exponenciais, conceituando e mostrando seu comportamento, crescimento, decrescimento e translações, gráficos apresentados utilizando o GeoGebra.

Definição 4.1. *Para todo número real y positivo, $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$, existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha^x = y$, ou seja $f(x) = \alpha^x$.*

A unicidade do número $x \in \mathbb{R}$ vem da função logarítmica ser injetora e pode ser mostrada da seguinte forma: Seja $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$, $m, n \in \mathbb{R}$, se $a^m = a^n$, aplicando $\log_a$ a ambos os membros da equação, temos:

$$\log_a a^m = \log_a a^n \Rightarrow m = n$$

.

Sabemos que o conjunto imagem da função exponencial,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to y = \alpha^x,$$

com $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$, é o conjuntos dos números reais positivos $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$. Portanto, f não é sobrejetora uma vez que $\alpha^x > 0$. Assim, se considerarmos a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, com $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$, f será sobrejetora pois o conjunto de chegada (contradomínio) é igual ao seu conjunto imagem.

Essa função exponencial também é injetora pois para $x_1 \neq x_2$ corresponde $\alpha^{x_1} \neq \alpha^{x_2}$.

Portanto a função exponencial é bijetora, logo exite $f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, que é a função inversa de f.

Essa função inversa é o logaritmo de x na base α e é indicado por $f^{-1}(x) = \log_\alpha x$. Assim: logaritmo de x na base α é o expoente y que se deve dar a base α a fim de obter x, ou seja,

$$y = \log_\alpha x \Leftrightarrow \alpha^y = x, \text{com } \alpha > 0 \; e \; \alpha \neq 1.$$

Portanto a função inversa da função exponencial, $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ onde $x \to y = \log_\alpha x$, é a função logarítmica e será definida na próxima seção.

Com relação aos gráficos da função $f(x) = \alpha^x$ toma um dos aspectos das figuras abaixo, dependendo do valor de α:

Para $\alpha > 0$, ou seja, $\alpha = 2, \alpha = 3, \alpha = 5 \; e \; \alpha = 50$ temos:

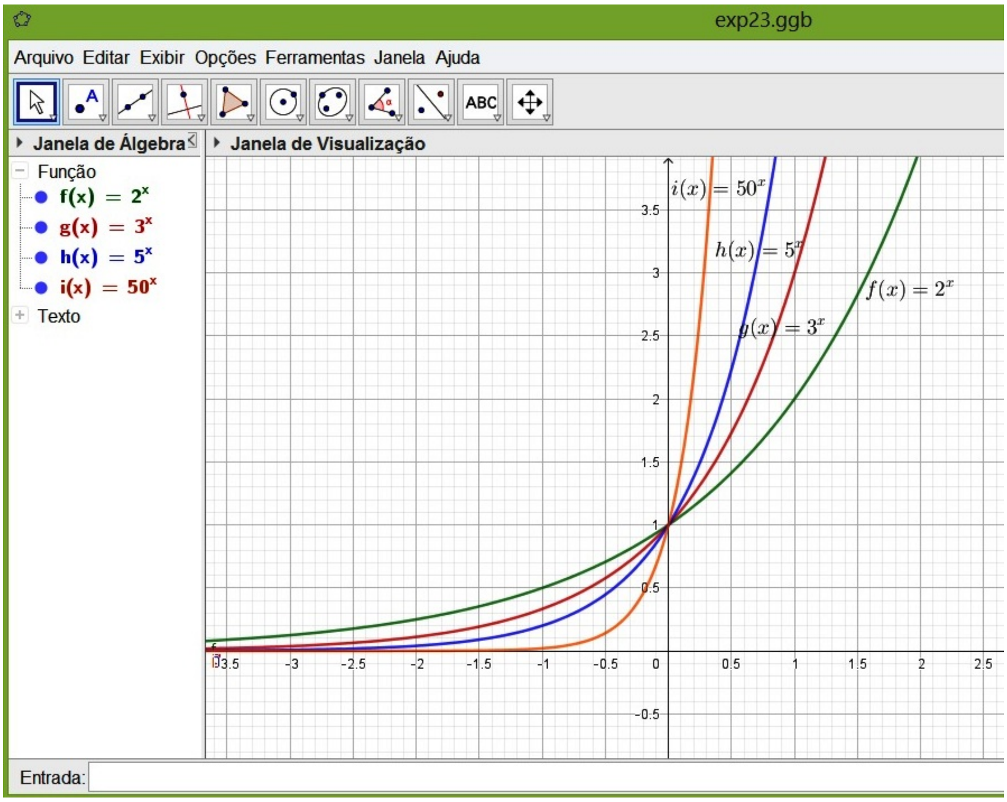

Figura 4.1 – Funções: $f(x) = 2^x, g(x) = 3^x, h(x) = 5^x \; e \; i(x) = 50^x$

Pode ser observado nos gráficos da figura 4.1 que para $\alpha > 0$, as funções exponenciais são crescentes e se comportam de forma semelhantes na variação dos valores de α.

Para $0 < \alpha < 1$, ou seja, por exemplo $\alpha = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{1}{3}, \alpha = \frac{1}{5} \; e \; \alpha = \frac{1}{50}$ temos:

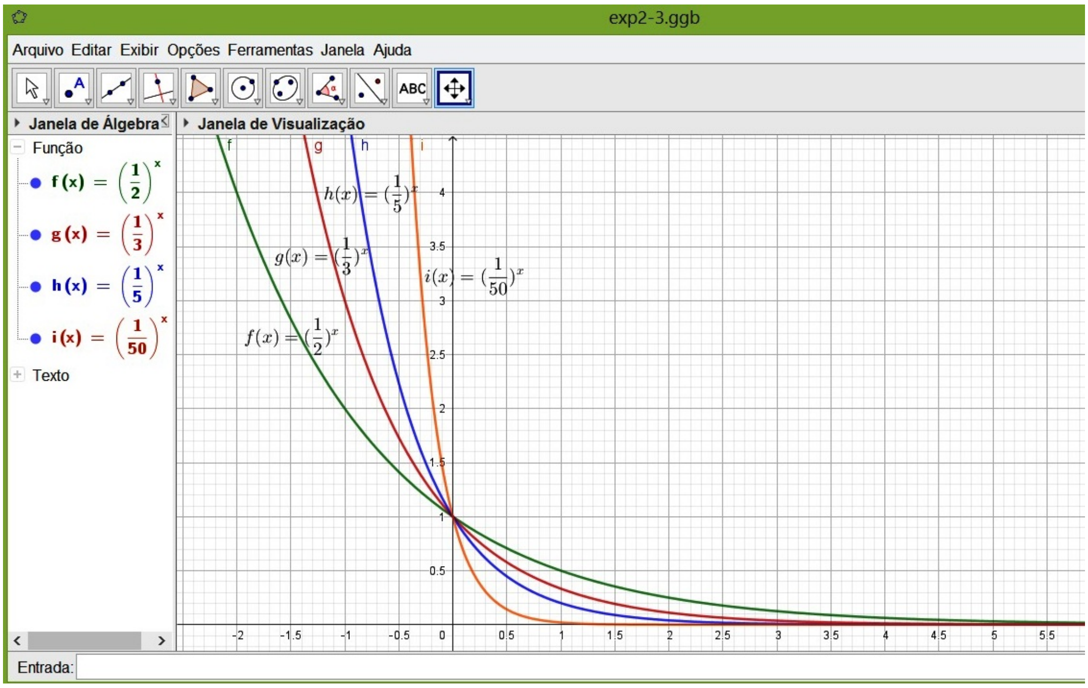

Figura 4.2 – Funções $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, h(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ e $i(x) = \left(\frac{1}{50}\right)^x$

Observamos nos gráficos da figura 4.2 que para $0 < \alpha < 1$, as funções exponenciais são decrescentes e se comportam de forma semelhante na variação dos valores de α.

Vejamos mais alguns gráficos de exponenciais para $\alpha > 1$ e $0 < \alpha < 1$, mostrando deslocamento e translação:
Para $\alpha > 1$

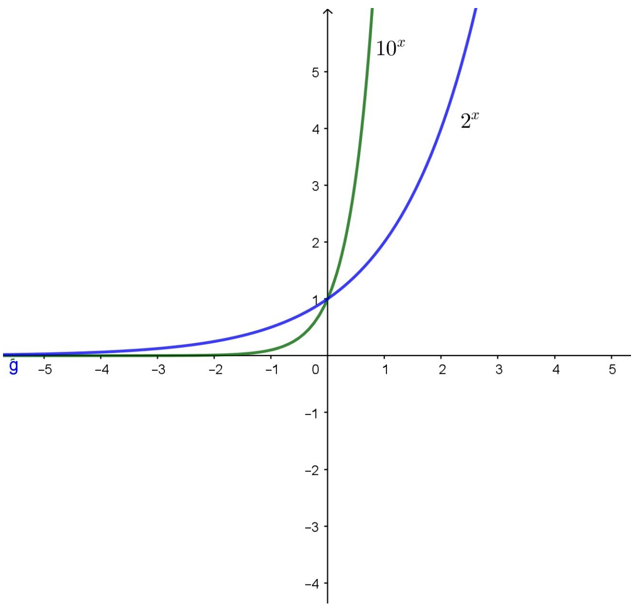

Figura 4.3 – Gráficos de 2^x e 10^x

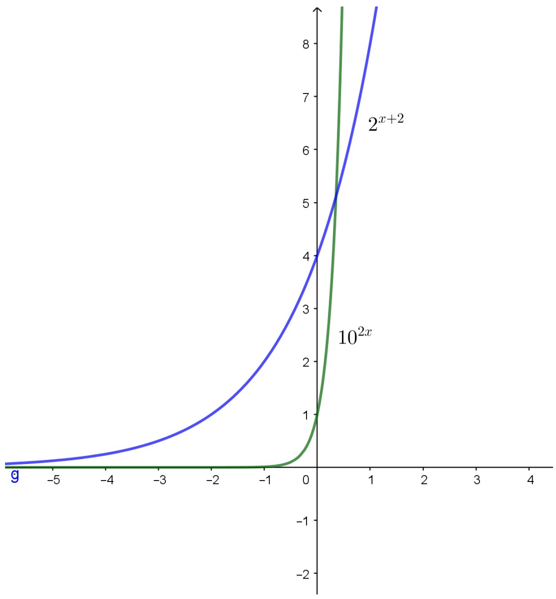

Figura 4.4 – Gráficos de 2^{x+2} e 10^{2x}

Observa-se que os gráficos, figuras 4.3 e 4.4 há variação da amplitude em virtude da variação dos expoentes, onde no gráfico figura 4.3 o expoente é x e no gráfico figura 4.4 é $x+2$ e $2x$.

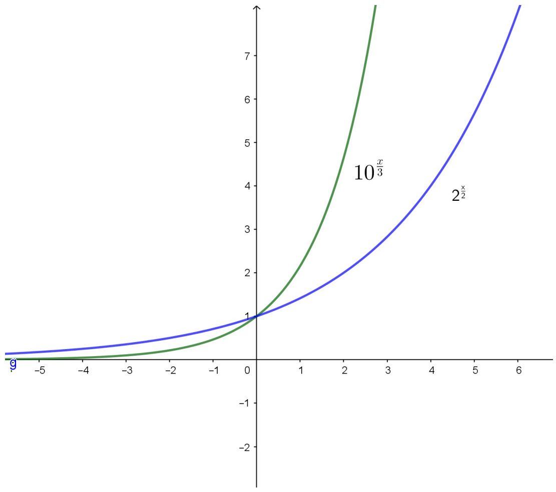

Figura 4.5 – Gráficos de $2^{\frac{x}{2}}$ e $10^{\frac{x}{3}}$

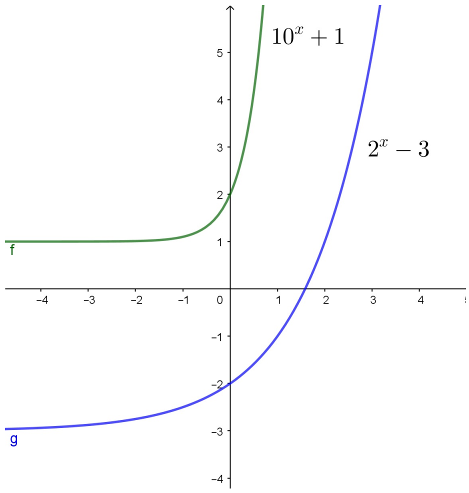

Figura 4.6 – Gráficos de 2^x-3 e 10^x+1

Observa-se que os gráficos da figura 4.5 houve mudança nos expoentes, se comparar com os gráficos figura 4.3 os expoentes foram divididos por 2 e por 3 respectivamente, fazendo com que a amplitude das funções também sofressem alterações. Nos gráficos da figura 4.6, 2^x-3 translada no sentido negativo no eixo y, em 3 unidades e 10^x+1 translada no eixo y, sentido positivo, em 1 unidade.

Em todos os gráficos, com $\alpha > 1$ observa-se que as exponenciais são crescentes, independentemente da variação dos expoentes.

Para $0 < \alpha < 1$

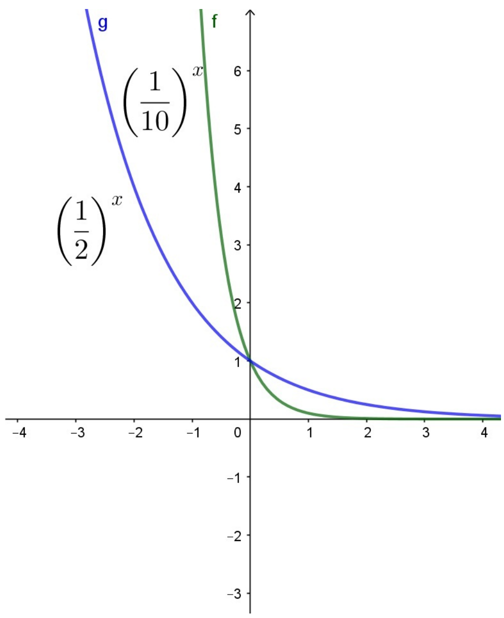

Figura 4.7 – Gráficos de $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $\left(\frac{1}{10}\right)^x$

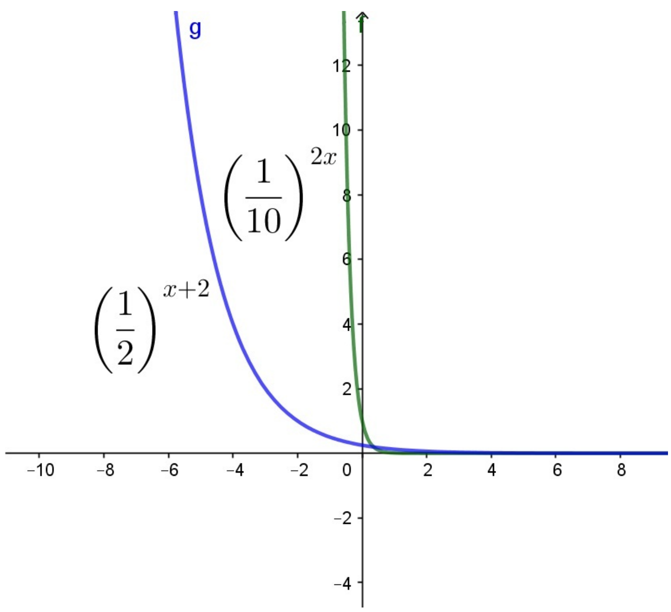

Figura 4.8 – Gráficos de $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ e $\left(\frac{1}{10}\right)^{2x}$

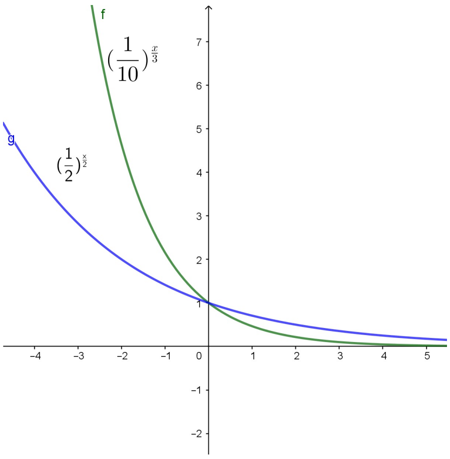

Figura 4.9 – Gráficos de $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}}$ e $\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{x}{3}}$

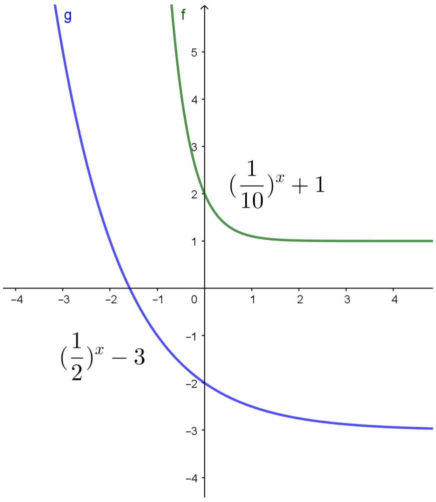

Figura 4.10 – Gráficos de $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 3$ e $\left(\frac{1}{10}\right)^{x} + 1$

Da mesma forma, utilizamos a mesma variação dos expoentes dos gráficos das figuras 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6, para construção dos gráficos das figuras 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10 trocando as bases de 2^x e 10^x para $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $\left(\frac{1}{10}\right)^x$.

Observa-se que para $0 < \alpha < 1$ as exponenciais são decrescentes e a variação do expoentes provocam apenas mudanças na amplitude e translação.

Se $\alpha = e$ (número irracional aproximadamente igual a $2,7182$), que é base do sistema de logaritmos naturais. Vejamos os gráficos abaixo das funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$.

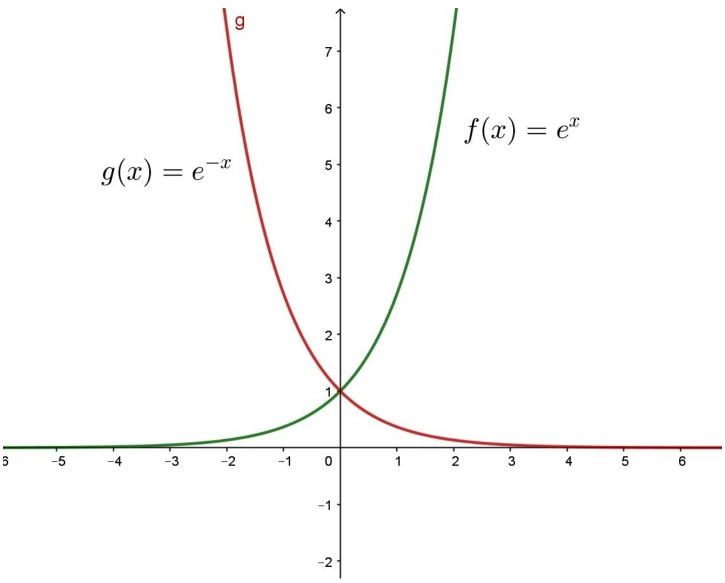

Figura 4.11 – Funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-x}$

Observa-se nos gráficos da figura 4.11 que a função $f(x) = e^x$ é crescente e a função $g(x) = e^{-x}$ é decrescente, mas com comportamento semelhante a função α^x, $0 < \alpha < 1$ e $\alpha > 1$.

4.2 Função Logarítmicas

Definição 4.2. *Para todo número real x positivo, $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$, existe um único $y \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\to y = \log_\alpha x, \end{aligned}$$

Se $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$ então as funções f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_\alpha x$ e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = \alpha^x$ são inversas uma da outra. Logo f é bijetora e, portanto, a imagem de f é $\mathbb{R}$.

A função logarítmica $f(x) = \log_\alpha x$ é crescente se, e somente se, $\alpha > 1$ e é decrescente se, e somente se $0 < \alpha < 1$.

Observações:

1. Quando a base é maior que um, a relação de desigualdade existente entre os logaritmos de dois números positivos tem mesmo sentido que a relação entre esses números.

$$\alpha > 1, x > 0, y > 0, \log_\alpha x > \log_\alpha y \Rightarrow x > y$$

$$\alpha > 1, x > 0, y > 0, \log_\alpha x < \log_\alpha y \Rightarrow x < y$$

2. Quando a base é positiva e menor que um, a relação de desigualdade existente entre os logaritmos de dois números positivos é de sentido contrário à que existe entre esses números.

$$0 < \alpha < 1, x > 0, y > 0, \log_\alpha x > \log_\alpha y \Rightarrow x < y$$

$$0 < \alpha < 1, x > 0, y > 0, \log_\alpha x < \log_\alpha y \Rightarrow x > y$$

3. Se a base é maior que um, então os números positivos menores que um têm logaritmos negativos e os números maiores que um têm logaritmos positivos. Se $\alpha > 1$,

$$0 < x < 1 \Rightarrow \log_\alpha x < \log_\alpha 1 \Rightarrow \log_\alpha x < 0$$

$$x > 1 \Rightarrow \log_\alpha x > \log_\alpha 1 \Rightarrow \log_\alpha x > 0$$

4. Se a base é positiva e menor que um, então os números positivos menores que um têm logaritmos positivos e os números maiores que um têm logaritmos negativos. Se $0 < \alpha < 1$,

$$0 < x < 1 \Rightarrow \log_\alpha x > \log_\alpha 1 \Rightarrow \log_\alpha x > 0$$

$$x > 1 \Rightarrow \log_\alpha x < \log_\alpha 1 \Rightarrow \log_\alpha x < 0$$

Com relação ao gráfico da função $f(x) = \log_\alpha x$ ($\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$), podemos dizer:
1º) está todo a direita do eixo y ($x > 0$);
2º) corta o eixo x no ponto de abscissa 1 ($\log_\alpha 1 = 0$ para todo $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$);
3º) Se $\alpha > 1$, então $f(x) = \log_\alpha x$ é de uma função crescente e se $0 < \alpha < 1$, então $f(x) = \log_\alpha x$ é de uma função decrescente;
4º) é simétrico em relação a reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares do gráfico da função $g(x) = \alpha^x$;
5º) toma aspectos das figuras abaixo: vejamos o comportamento das funções logarítmicas, considerando a variação de α.
Para $\alpha > 1$ temos:

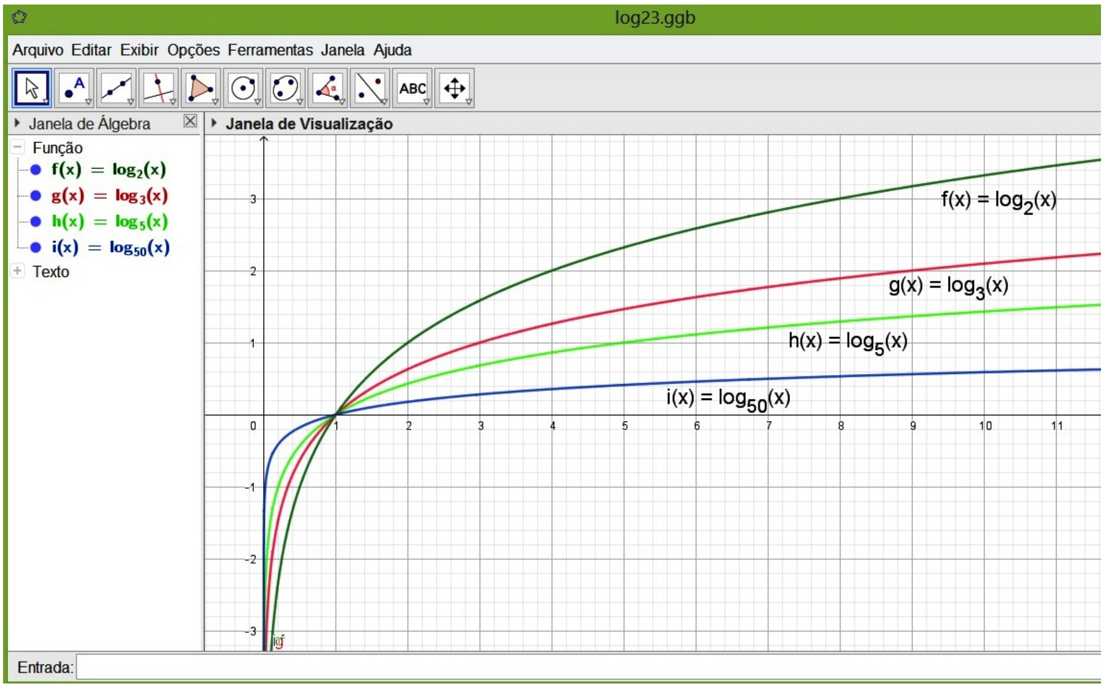

Figura 4.12 – Funções $f(x) = \log_2 x, g(x) = \log_3 x, h(x) = \log_5 x$ e $i(x) = \log_{50} x$

Pode ser observado nos gráficos da figura 4.12 que para $\alpha > 1$, as funções logarítmicas são crescentes e se comportam de forma semelhantes na variação dos valores de α.

Para $0 < \alpha < 1$ temos:

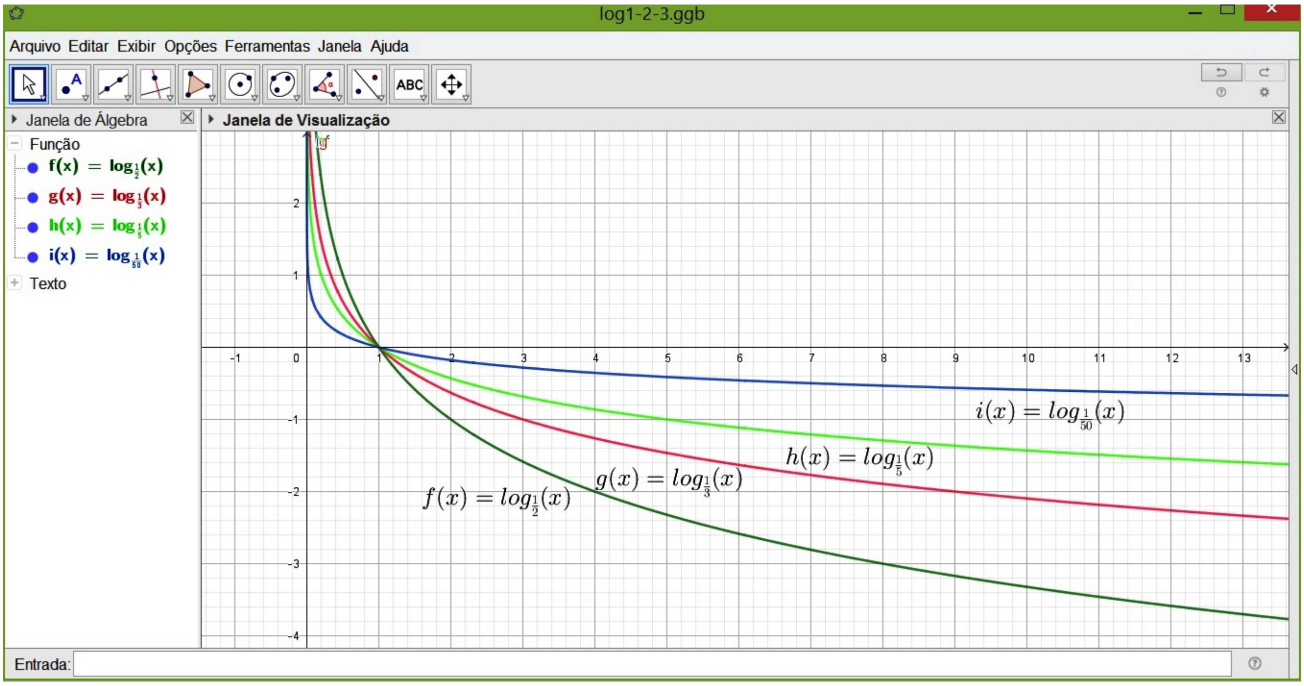

Figura 4.13 – Funções $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x, h(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ e $i(x) = \log_{\frac{1}{50}} x$

Pode ser observado nos gráficos da figura 4.13 que para $0 < \alpha < 1$, as funções logarítmicas são decrescentes e se comportam de forma semelhantes na variação dos valores de α.

Vejamos mais alguns gráficos com deslocamento e translação para as funções logarítmicas:

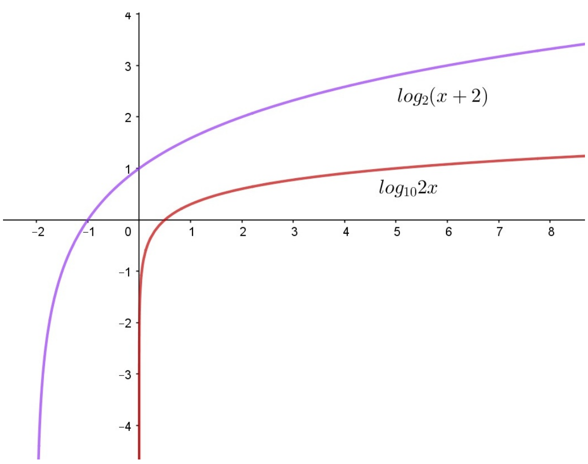

Figura 4.14 – Gráficos de $\log_2(x+2)$ e $\log_{10}(2x)$

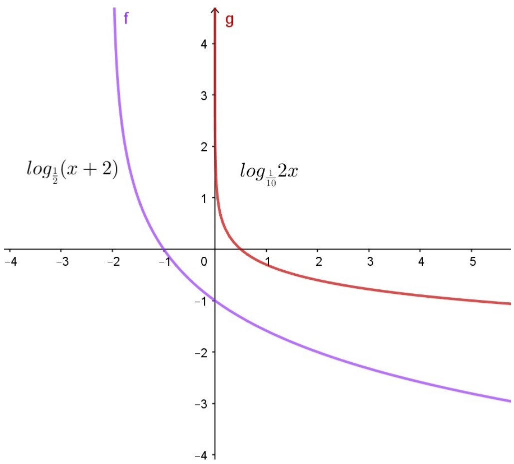

Figura 4.15 – Gráficos de $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ e $\log_{\frac{1}{10}} 2x$

Nas figuras 4.14 e 4.15 observa se o deslocamento da função logarítmica, sendo a função crescente para base maior que 1, $\alpha > 1$ e decrescente se a base for maior que 0 e menor que 1, $0 < \alpha < 1$.

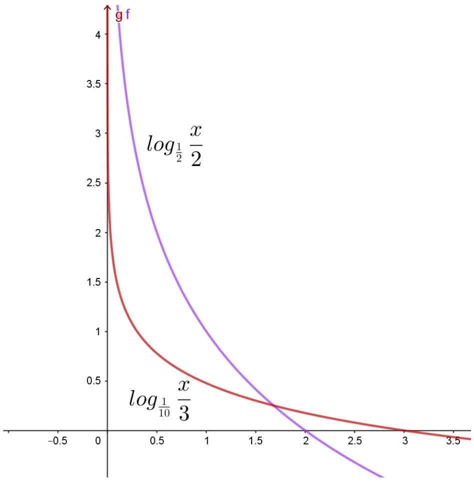

Figura 4.16 – Gráficos de $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{2}$ e $\log_{\frac{1}{10}} \frac{x}{3}$

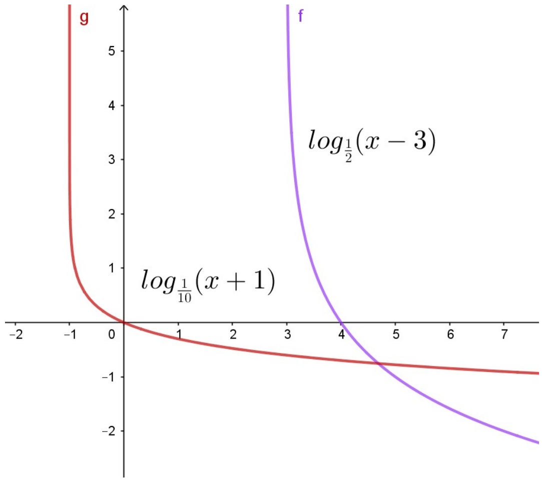

Figura 4.17 – Gráficos de $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$ e $\log_{\frac{1}{10}}(x+1)$

Na figura 4.16, observa-se que os gráficos das funções $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)$ e $\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{x}{3}\right)$ há mudança na amplitude e na figura 4.17 a função $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$ translada sentido positivo no eixo x, em 3 unidades e $\log_{\frac{1}{10}}(x+1)$ translada no eixo x, sentido negativo, em 1 unidade.

Se $\alpha = e$ (número irracional igual a $2,7182$), que é base do sistema de logaritmos naturais. Vejamos o gráfico abaixo da função $f(x) = lnx$

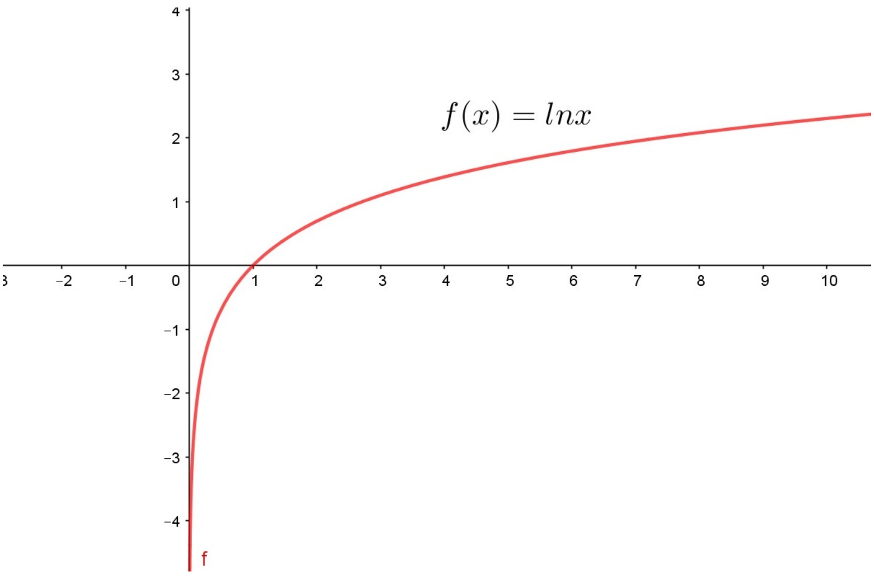

Figura 4.18 – Função $f(x) = lnx$

Nesse capítulo abordamos as funções exponenciais e logarítmicas como inversas, vejamos os gráficos abaixo das funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \log_3 x$.

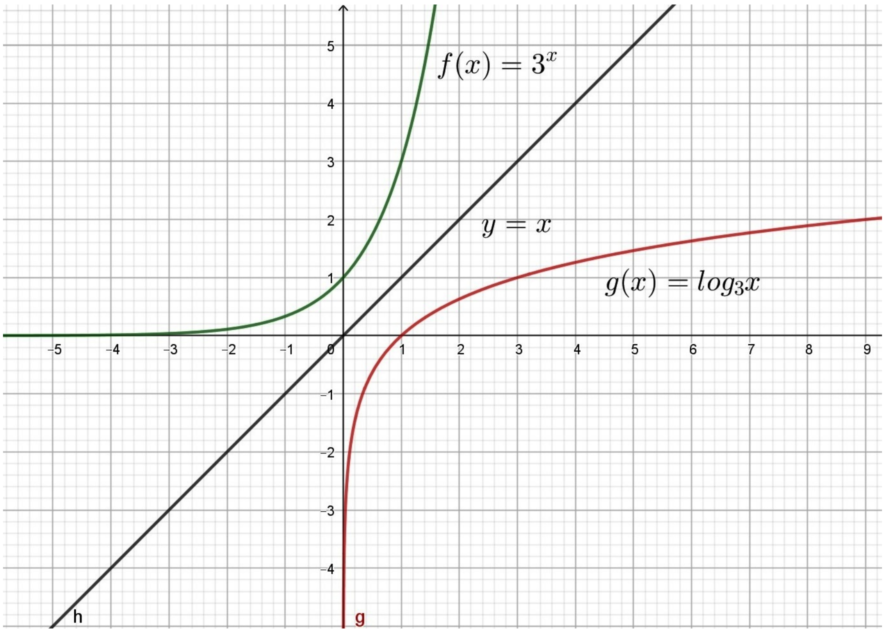

Figura 4.19 – Funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \log_3 x$

Observe que na figura 4.19 as funções $f(x)$ e $g(x)$ são inversas e pode ser observado também uma simetria com relação a reta $y = x$.

Pode ser observado também o comportamento das funções quando os valores de x crescem infinitamente positivo ou infinitamente negativo, ou seja, $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ e nas proximidades de $x = 0$.

Observe que a função $f(x) = 3^x$, quando $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$.

Observe também que a função $g(x) = \log_3 x$, quando $x \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ e quando $x \to 0$, $g(x) \to -\infty$.

Se observarmos essas funções em $x = 0$, $f(x) = 3^x$, logo $f(0) = 3^0 = 1$ e $g(x) = \log_3 x$, logo $g(0) = \log_3 0 = 1$,

Quando $0 < \alpha < 1$ as funções $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ também são inversas e observa-se uma simetria com relação a reta $y = x$.

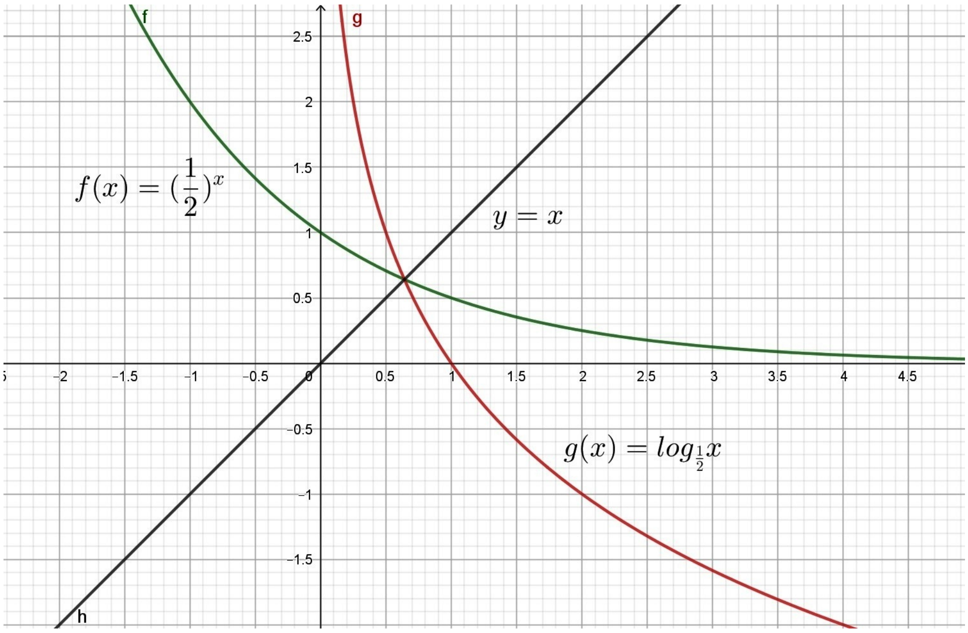

Figura 4.20 – Funções $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Observe que na figura 4.20 as funções $f(x)$ e $g(x)$, apesar de decrescentes, também são inversas e pode ser observado também uma simetria com relação a reta $y = x$.

Nessas duas últimas figuras 4.19 e 4.20 os gráficos são apresentados com malha, no qual o leitor pode observar a simetria com relação a reta $y = x$.

5 Aplicações

Dada uma situação real, esta pode ser representada por uma equação ou um sistema de equações, as quais chamamos de modelos matemáticos, ou seja, modelar um fenômeno ou um experimento qualquer do dia a dia.

(BASSANEZI; JR., 1988) cita por exemplo: "quando observamos a desintegração (variação) de uma substância radioativa constatamos que o número de desintegrações por unidade de tempo é proporcional à quantidade de substância presente em cada instante"e "quando analisamos a variação de uma população", a qual depende das taxas de natalidade e mortalidade no decorrer do tempo, são fenômenos que podemos modelar matematicamente.

Cada processo de modelagem pode ser remetido a um modelo existente e com solução única, já demonstrada.

Em (BASSANEZI; JR., 1988) alguns modelos são relevantes a esse trabalho:

Modelo I:

Sempre que uma lei afirma que a taxa de variação de uma quantidade $y(t)$ é proporcional a esta mesma quantidade, estamos diante de uma equação diferencial da forma:

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

onde $f(y) = ky$.

Como $f(0) = 0$, $y = 0$ é um ponto singular e, portanto, devemos considerar a equação separadamente nos intervalos $-\infty < y < 0$ e $0 < y < +\infty$ e no ponto $y = 0$.

Considere então o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky \\ y(t_0) = y_0 \quad y_0 > 0 \end{cases}$$

e o problema inverso:

$$\begin{cases} \frac{dt}{dy} = \frac{1}{ky} \\ t(y_0) = t_0 \end{cases}$$

cuja única solução sabemos ser:

$$t(y) = t_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{ks} = t_0 + \frac{1}{k}\left(lny - lny_0\right).$$

Invertendo a função $t(y)$, temos:

$$y(t) = y_0.e^{k(t-t_0)} \qquad -\infty < t < +\infty,$$

que é a solução única do problema.

Nesse trabalho chamemos de Modelo 1: $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky \\ y(t_0) = y_0 \quad y_0 > 0 \end{cases}$, cuja solução é dada por: $y(t) = y_0.e^{k(t-t_0)} \quad -\infty < t < +\infty$, que será melhor entendida nos exemplos abaixo.

Exemplos:

1. Crescimento de uma planta

   Se uma planta de massa $m = 100$ g cresce 4 g nas próximas 24 horas, queremos determinar:

   i) Em quanto tempo se tornará uma árvore de 100 kg?

   ii) Quanto aumentará sua massa por dia quando a planta estiver com 100kg?

   Resolução:

   i) A taxa de crescimento é de $\frac{4g}{24h} = \frac{1g}{6h}$.

   Supondo que esta taxa varie com o tempo, podemos considerar que $\frac{1}{6}g/h$ seja uma boa aproximação de $\frac{dm}{dt}$ (taxa de crescimento instantâneo).

   A taxa de crescimento específico, definida por $\frac{1}{m_0}.\frac{dm}{dt} = k$, nesse caso $m_0 = 100$ g, então: $k = \frac{\frac{1}{6}g/h}{100g} = \frac{1}{600h}$

   Logo: Como $m_0 = 100g = 0,1$ kg, então: $\frac{dm}{dt} = m_0.k \Rightarrow \frac{dm}{dt} = 0,1.k \Rightarrow m = 0,1.\frac{1}{600h}.t \Rightarrow m = \frac{0,1}{600h}.t \Rightarrow m = \frac{1}{6000h}.t$, como foi dado que $m = 100$ kg, logo: $100 = \frac{1}{6000h}.t \Rightarrow t = 60000h \Rightarrow t = 25000$ dias $\Rightarrow t = 68,49$ anos.

   Portanto a árvore atingirá 100 kg em $68,49$ anos.

   ii) A solução para a equação $\frac{dm}{dt} = m.k$ é dada por $m(t) = m_0.e^{k(t-t_0)}$, de acordo com o Modelo I.

   Temos que $m_0 = 100$ kg; $k = \frac{1}{600h}$; $t = 24$ h e $t_0 = 0$, logo:
   $m(t) = 100.e^{\frac{24h}{600h}} \Rightarrow m(t) = 100.e^{0,04} \Rightarrow m(t) = 100.1,0408 \Rightarrow m(t) = 104,08$

   A planta após atingir 100 kg aumentará 4,08 kg por dia.

   OBS: Observemos que o crescimento de uma planta não é tão simples como descrito acima. A divisão das células não é sempre um processo contínuo, e se considerar uma divisão não contínua, será proposto um outro modelo, envolvendo outra variável, que não será abordado nesse trabalho.

2. Juros Compostos

   Em um hipotético país instável economicamente, onde a inflação ultrapassa a casa dos 200% ao ano, um problema sério, é como "investir"as economias, pelo menos para que não seja corroída pela própria desvalorização do dinheiro. Para isso vamos considerar que um típico investidor "bem-sucedido"recebeu em junho/84 o valor de 3 milhões de cruzeiros. Neste mês a BANCA estava pagando $9,7\%$ de correção monetária ao mês. Nosso amigo resolveu colocar seu capital na BANCA, na esperança de dias melhores. Supondo que nosso investidor não necessitou fazer retiradas e que o dinheiro depositado, permaneceu rendendo normalmente na mesma taxa. Se a inflação acumulada nos 12 meses seguintes foi de 230%, o investidor teve lucro ou prejuízo?

Resolução:
Para a solução desse problema vamos calcular valor investido no tempo de 12 meses, através de juros compostos, comparar com o valor do dinheiro em termos do percentual de inflação observada nesse mesmo período e comparar também com correção contínua, nos moldes do Modelo I, abordado nesse capítulo.

Observemos que para calcular o capital no primeiro mês de investimento e nos subsequentes, consideraremos C para capital, $C_0 = 3$ milhões de cruzeiros para capital inicial e i para taxa e procedemos da seguinte forma:

$C(1) = C_0 + i.C_0 \Rightarrow C(1) = C_0.(1+i)$
$C(1) = C_0.(1+i)$
$C(2) = (C_0 + i.C_0) + i.(C_0 + i.C_0) \Rightarrow$
$C(2) = C_0.(1+i) + i.C_0(1+i) \Rightarrow$
$C(2) = (1+i).(C_0 + i.C_0) \Rightarrow$
$C(2) = (1+i).C_0.(1+i) \Rightarrow$
$C(2) = C_0.(1+i)^2$
$\vdots \quad \vdots$

Para um tempo qualquer t temos:
$C(t) = C_0.(1+i)^t$

No caso do nosso exemplo: $C_0 = 3$; $t = 12$ e $i = 9,7\% = 0,097$ temos:
$C(12) = C_0.(1+i)^{12}$
$C(12) = 3.(1+0,097)^{12}$
$C(12) = 3.1,097^{12}$ (Para esse cálculo foi utilizado a exponencial)
$C(12) = 3.3,0372 \approx 9,112$ milhões de cruzeiros.

Calculando o montante em 12 meses, a juros composto, o valor investido mais os juros seriam aproximadamente $9,112$ milhões de cruzeiros.

Agora, considerando a pergunta se o investidor teve lucro e prejuízo, teremos que observar a taxa anual de 230% de infração. Transformemos essa taxa anual em taxa mensal, logo as taxas devem ser equivalentes, e portanto teremos:
$(1+I)^n = (1+i)^{12n}$, onde n número de anos, I é a taxa anual e i é a taxa mensal, no nosso exemplo $I = 230\% = 2,3$; logo:
$(1+2,3)^1 = (1+i)^{12}$
$(3,3)^{\frac{1}{12}} = (1+i)$ (Nesse, utilizamos o cálculo de uma equação exponencial)

$1+i=1,10461 \Rightarrow i=10,461\%$. Portanto para o investidor não ter prejuízos a taxa mensal deveria ser de $i=10,461\%$.

Agora fazendo os cálculos para $i=10,461\%$, seremos capazes de calcular o prejuízo nesse investimento. Logo:
$C(12)=3.\,(1+0,10461)^{12}$
$C(12)=3.1,10461^{12}$
$C(12)=3.3,2999 \approx 9,899$ milhões de cruzeiros.

No primeiro cálculo, obtivemos $9,112$ milhões de cruzeiros e no segundo cálculo $9,899$ milhões de cruzeiros. Fazendo a diferença, teremos 788 mil cruzeiros. Portanto o investidor terá prejuízo de 788 mil cruzeiros se deixar o dinheiro investido.

Agora pensando em uma correção contínua teremos:

Observando $C(t)=C_0.\,(1+i)^t$, nos fornece o capital acumulado até o mês t, mas se a correção for feita duas vezes ao mês, teremos:
$C(t)=C_0.\left[\left(1+\frac{i}{2}\right).\left(1+\frac{i}{2}\right)\right]^t$
$C(t)=C_0.\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2t}$ e, em geral se a correção for feita n vezes ao mês, o capital será:
$C(t)=C_0.\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$

Se aproximarmos a situação real por um modelo matemático no qual considera a correção composta contínua, poderíamos propor como lei de investimento que: "A razão de variação do capital é proporcional ao próprio capital em cada instante"e portanto $\frac{dC}{dt}=i.C$ (sendo i a taxa de correção mensal).

Se C_0 for o capital inicial, a solução será dada por $C(t)=C_0.e^{it}$ e voltando ao nosso problema, teremos:
$C(t)=3.e^{0,097.12}$
$C(t)=3.e^{1,164} \Rightarrow C(t)=3.3,2026 \Rightarrow C(t)=9,6078$ milhões de cruzeiros.

Portanto nesse modelo o investidor terá aproximadamente $9,6078$ milhões de cruzeiros no final dos 12 meses, tendo novamente prejuízo com relação a inflação proposta da época.

3. Ainda dentro de juros compostos, se o problema envolvesse o cálculo do tempo de uma aplicação, por exemplo, se aplicarmos um capital inicial de 1.000 reais, a taxa de 1% ao mês, qual seria o tempo necessário dessa aplicação para produzir um montante de 50.000 reais?

   Resolução:
   Sabemos que $C(t)=C_0.\,(1+i)^t$, substituindo os dados do problema temos:
   $50000=1000.\,(1+0,01)^t$
   $\frac{50000}{1000}=(1,01)^t$
   $50=(1,01)^t$ (aplicando log a ambos os membros da equação e aplicando as propriedades resolvemos a equação logarítmica)

$log 50 = log\,(1,01)^t$
$log 50 = t.log\,(1,01)$
$1,69897 = 0,0043.t$
$t = \frac{1,69897}{0,0043}$
$t = 395,10$ meses
$t \approx 33$ anos

Portanto para produzir um montante de 50.000 reais seriam necessários aproximadamente 33 anos.

4. Em 2018 os rendimentos da poupança são calculados através da TR + 0,5%, a taxa de inflação prevista é de 3,8% e a TR é de 0%. (Fonte: Banco Central e Portal Brasil, acesso em 02/06/2018). Com esses dados, a poupança hoje está dando lucro ou prejuízo?

   Resolução:
   Transformemos a taxa anual em taxa mensal, logo as taxas devem ser equivalentes, e portanto teremos:
   $(1 + I)^n = (1 + i)^{12n}$, onde n número de anos, I é a taxa anual e i é a taxa mensal, no nosso exemplo $I = 3,8\% = 0,038$; logo:
   $(1 + 0,038)^1 = (1 + i)^{12}$
   $(1,038)^{\frac{1}{12}} = (1 + i)$
   $1 + i = 1,003112 \Rightarrow i = 0,31\%$.

   Portanto a poupança hoje ainda é um investimento que está tendo lucro, mesmo que mínimo.

5. Crescimento populacional
   Segundo o Banco Mundial, a previsão do crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população da América Latina vai dobrar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

   Resolução:
   População do ano-base = P_0
   População após um ano = $P_1 = P_0.(1 + 0,012)$
   População após dois ano = $P_2 = P_1.(1 + 0,012) = P_0.(1 + 0,012).(1 + 0,012) = P_0.(1 + 0,012)^2$
   $\vdots$
   População após t anos = $P_t = P_0.\,(1,012)^t$
   Supondo que a população dobrará em relação ao ano-base após t anos, temos:
   $P_t = 2.P_0 \Rightarrow P_0.\,(1,012)^t = 2.P_0 \Rightarrow (1,012)^t = 2$
   Aplicando logaritmos e resolvendo a equação logarítmica temos:

$log\,(1,012)^t = log2$
$t.log1,012 = log2$
$t = \frac{log2}{log1,012} = \frac{0,30103}{0,00518}$
$t \approx 58$ anos
Portanto a população dobrará em 58 anos, aproximadamente.

6. Um meio de cultura é infectado por N_0 bactérias. As células das bactérias se dividem a cada duas horas.
   i) Quantas bactérias estarão no meio, 24 h mais tarde?
   ii) Em que instante o número de bactérias alcançou 25% do total anterior?

   Resolução:
   Seja N_t o número de bactérias no tempo t, t contados a cada intervalos de 2 horas, N_0 o número inicial de bactérias, logo:
   Bactérias após as 2 primeiras horas: $N_1 = N_0.2$
   Bactérias após as 4 horas: $N_2 = N_1.2 = N_0.2.2 = N_0.2^2$
   $\vdots$
   Bactérias após t intervalos: $N_t = N_0.2^t$

   i) Para 24 h mais tarde, $t = 12$, logo: $N_t = N_0.2^{12}$
   ii) Inicialmente vamos encontrar 25% de $N_0.2^{12}$
   $\frac{25}{100}.N_0.2^{12} = \frac{1}{4}.N_0.2^{12} = \frac{1}{2^2}.N_0.2^{12} = N_0.2^{10}$
   Logo: $N_t = N_0.2^{10}$ e $N_t = N_0.2^t$, igualando as equações temos:
   $N_0.2^t = N_0.2^{10}$, como $N_0 \neq 0$, logo:
   $2^t = 2^{10}$ (equação exponencial de mesma base, cancelando as bases temos:)
   $t = 10$
   Portanto será alcançado em 20 horas, pois cada intervalo de tempo é contado de 2 horas.

Modelo II:

Ainda com relação aos modelos apresentados, citemos a desintegração de substância radioativa.

A atividade de uma substância radioativa é medida pelo número de desintegrações por unidade de tempo. Este fenômeno é devido à emissão de radiações e é uma atividade proporcional ao número de átomos radioativos presentes em cada instante.

Se $N = N(t)$ é o número de átomos radioativos na amostra no instante t e N_0 a quantidade inicial destes átomos, isto é, $N(0) = N_0$, então:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

onde $\lambda > 0$ é a constante de desintegração (usamos o sinal negativo porque o número de átomos diminui com o passar do tempo e portanto $\frac{dN}{dt} < 0$), onde a solução particular é dada por: $N(t) = N_0.e^{-\lambda.t}$, assim em termos de massa do material radioativo, podemos expressar a solução por:

$$m(t) = m_0.e^{-\lambda.t} \quad \text{(Modelo II)}.$$

Exemplos:

1. Em quantos anos 500 g de uma substância radioativa, que se desintegra a uma taxa de 3% ao ano, se reduzirá a 100 g? Dados que $Q(t) = Q_0.e^{-rt}$, em que Q é a massa da substância, r é a taxa de desintegração e t é o tempo em anos.

   Resolução:
   Sabemos que $Q(t) = 100$, $Q_0 = 500$, $r = 0,03$, logo:
   $Q(t) = Q_0.e^{-rt}$
   $100 = 500.e^{-0,03t}$
   $\frac{100}{500} = e^{-0,03t}$
   $\frac{1}{5} = e^{-0,03t}$ (aplicando ln a ambos os membros da equação temos:)
   $ln\left(\frac{1}{5}\right) = ln\left(e^{-0,03t}\right)$
   $-0,03t = ln\left(\frac{1}{5}\right) = -ln5$
   $0,03t = ln5$
   $t = \frac{ln5}{0,03} = \frac{1,6094}{0,03}$
   $t \approx 53,6$ anos

   Portanto 500 g de substância radioativa se desintegra em aproximadamente $53,6$ anos nas condições do problema.

2. Várias cadeias de vírus do tabaco, tal como Aucuba, em folhas de Nicotiana sylvestris e outras plantas de tabaco foram expostas a raios X de diferentes comprimentos de ondas. Por radiação, parte das partículas de vírus ficou inativada, de tal forma que a reprodução cessou. Gowen (1964) declara que o número y de partículas sobreviventes decresce exponencialmente com a dosagem de roentgen, r, aplicada. Consequentemente, com a aproximação satisfatória $y(t) = y_0.e^{-ar}$, onde a é uma constante positiva, dependente do material biológico. Podemos perguntar: qual é a dosagem apropriada para inativar 90% do vírus?

   Resolução:
   Sabemos que $y(t) = 10\%.y_0 = 0,1.y_0$, logo:
   $y(t) = y_0.e^{-ar}$
   $0,1.y_0 = y_0.e^{-ar}$
   $e^{-ar} = 0,1$ (aplicando ln e resolvendo a equação temos:)
   $lne^{-ar} = ln0,1$
   $-ar = -2,3025$
   $r = \frac{2,3025}{a}$

A dosagem apropriada para inativar 90% do vírus é $r = \frac{2{,}3025}{a}$, onde a é uma constante positiva, dependente do material biológico.

3. A lei de resfriamento de Newton afirma que a diferença de temperatura entre um corpo e o meio que o contém decresce a uma taxa de variação proporcional à diferença de temperatura. Considerando $\Delta T(0)$ a diferença de temperatura no instante t = 0 e $\Delta T(t)$, a diferença em um instante t qualquer, essa lei se traduz pela expressão $\Delta T(t) = \Delta T(0).e^{-kt}$, em que a constante k depende do corpo. Suponha que, em uma cozinha, cuja temperatura ambiente constante é de 30^oC, um bolo é retirado do forno e colocado sobre a pia. Nesse momento, a temperatura do bolo é de 100^oC. Após 5 minutos, verifica-se a temperatura do bolo e o termômetro marca 65^oC. Se o bolo estiver no ponto para servir quando sua temperatura atingir 37^oC, depois de quanto tempo, a partir do momento em que foi colocado sobre a pia, ele estará pronto para ser servido?

   Resolução:
   Sabendo que $\Delta T(0) = 100^oC - 30^oC = 70^oC$, $\Delta T(t) = 65^oC - 30^oC = 35^oC$ e $\Delta T(t) = \Delta T(0).e^{-kt}$, para $t = 5$ temos:
   $\Delta T(t) = \Delta T(0).e^{-kt}$
   $35 = 70.e^{-k5}$
   $\frac{1}{2} = e^{-k5}$ (aplicando ln e resolvendo a equação logarítmica temos:)
   $ln\frac{1}{2} = lne^{-k5}$
   $-5k = -ln2$
   $k = \frac{ln2}{5}$
   Agora, para achar o tempo para servir, $\Delta T(t) = 37^oC - 30^oC = 7^oC$, logo:
   $\Delta T(t) = \Delta T(0).e^{-kt}$, $k = \frac{ln2}{5}$
   $7 = 70.e^{-\frac{ln2}{5}.t}$
   $\frac{1}{10} = e^{-\frac{ln2}{5}.t}$ (aplicando ln e resolvendo a equação logarítmica temos:)
   $ln\frac{1}{10} = lne^{-\frac{ln2}{5}.t}$
   $-\frac{ln2}{5}.t = -ln10$
   $ln2.t = 5.ln10$
   $t = \frac{5.ln10}{ln2}$
   $t = \frac{5.2{,}3025}{0{,}6931}$
   $t \approx 16,61$

   Portanto $t = 16$ minutos e 37 segundos.

Podemos citar também como uma importante aplicação dos logaritmos é a escala Richter na área da sismologia, que fornece as magnitudes dos terremotos. Desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Francis Richert e Beno Gutenberg, é uma escala logarítmica. No início, a escala Richter era graduada de 1 a 9, já que terremotos mais fortes não eram comuns na Califórnia (local onde Richter e Gutenberg faziam seus estudos). Mas teoricamente não existia limite para essa medida. A magnitude de Richter corresponde ao logaritmo da medida da amplitude das ondas sísmicas de tipo P (primárias, mais rápidas) e S (secundárias, mais lentas) a 100 km do epicentro. A fórmula utilizada é $M_L = logA - logA_0$, sendo log a abreviação de logaritmo, A a amplitude máxima medida no simógrafo e A_0 uma amplitude de referência.

Exemplo:

(Cesgranrio-RJ) As indicações R_1 e R_2, na escala Richter, de dois terremotos estão relacionados pela fórmula $R_1 - R_2 = log_{10}\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$, em que M_1 e M_2 medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Houve dois terremotos: um correspondente a $R_1 = 8$ e outro correspondente a $R_2 = 6$. A razão $\frac{M_1}{M_2}$ é:

Resolução:

Sabemos da definição de logaritmos que $log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, substituindo os dados do problema temos:

$R_1 - R_2 = log_{10}\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$

$8 - 6 = log_{10}\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$

$log_{10}\left(\frac{M_1}{M_2}\right) = 2$ aplicando a definição de logaritmos temos:

$10^2 = \frac{M_1}{M_2}$

Portanto a razão $\frac{M_1}{M_2}$ é 10^2.

Em (BATSCHELET, 1978) os problemas de crescimento foram abordados como sequências, envolvendo funções exponenciais e logarítmicas, por exemplo, o crescimento de um potro, assumindo que o peso aumentava numa média de 20% durante intervalos de tempo consecutivos e iguais, sendo w o peso inicial e p a média de crescimento, os pesos no final de $0, 1, 2, ...$ intervalos de tempo são:

$$w, w.\left(1 + \frac{p}{100}\right), w.\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2, w.\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3, ...$$

Usando $q = 1 + \frac{p}{100}$, os pesos do potro são respectivamente:

$$w, w.q, w.q^2, w.q^3, ...$$

Essa sequência pode ser encarada como uma função exponencial e pode ser escrita da forma: $f(x) = w.q^x$, $x \in \{0, 1, 2, ...\}$.

Exemplos:

1. A quantidade de madeira em uma floresta jovem cresce quase exponencialmente. Podemos admitir que a média anual é $3,5\%$. Que crescimento é esperado no prazo de 10 anos?

Resolução:
Sabemos que $q = 1 + \frac{p}{100}$, onde $p = 3,5$, logo $q = 1,035$ e para achar o crescimento em dez anos, esse é determinado pelo fator q^{10} e para determinar numericamente este valor, aplicamos logaritmos:
$logq^{10} = 10.logq = 10.log1,035 = 10.0,01494 = 0,1494$
$q^{10} = 10^{0,1494} = 1,41$, ou seja 1,41 é o antilogaritmo de q^{10}. Consequentemente, a quantidade de madeira aumentará de 41% em dez anos.

2. Admitindo novamente que a média de crescimento da madeira é de $3,5\%$. Quantos anos decorrerão para que a quantidade de madeira duplique?

   Resolução:
   Seja n o número de anos procurado e $q = 1 + \frac{p}{100}$. Então, obtemos a equação $q^n = 2$, que é uma equação exponencial, aplicando logaritmos à equação teremos:
   $logq^n = n.logq = log2$
   $n = \frac{log2}{logq}$. Como $q = 1,035$, obtemos:
   $n = \frac{0,30103}{0,01494}$
   $n \approx 20,1$. Consequentemente, decorrerão um pouco mais de 20 anos até que a quantidade de madeira duplique.

3. O rio Nilo Branco, acima da represa em Jebel Aulia, foi infestado por uma vegetação conhecida como "jacinto aquático". Em 1958 a planta cobriu somente $12km^2$, mas o aumento anual foi de 50%.
   i) Que área foi coberta $1, 2, ..., n$ anos mais tarde?
   ii) Quanto tempo levou para que toda a área represada, medindo $200km^2$, fosse coberta?

   Resolução:
   i) No primeiro ano, $n = 1$, $A = 12.1,5 = 18km^2$, $n = 2$, $A = 12.1,5^2 = 27km^2$, ...
   Para n anos temos: Área $A = 12.(1,5)^n\ km^2$

   ii) $12.(1,5)^n = 200$
   $(1,5)^n = \frac{200}{12}$, aplicando logaritmos, resolveremos uma equação logarítmica:
   $log\,(1,5)^n = log\frac{200}{12}$
   $n.log1,5 = log200 - log12$
   $n.0,17609 = 2,30102 - 1,07918$
   $n = \frac{1,22184}{0,17609}$
   $n \approx 6,9$ anos

   Logo, a água represada foi completamente coberta em 1965.

Uma importante aplicação biológica de funções exponenciais e logarítmicas teve lugar em 1846 quando E. H. Weber estudou a resposta dos seres humanos a estímulos físicos.

Admitimos que uma pessoa mantenha um peso de $20g$ em sua mão e que seja testada sua habilidade em distinguir entre esse peso e um peso um pouco superior. As experiências mostram que uma pessoa não é capaz de discriminar entre $20,5g$ e $20g$, mas que, na maioria das vezes, ela acha $21g$ mais pesado que $20g$. O aumento de estímulo requedido é de $1g$. Com um peso inicial de $40g$, o resultado é bem diferente. Uma pessoa não pode realmente disciminar ente $41g$ e $40g$. O aumento deveria ser de $2g$ ao invés de $1g$. Da mesma forma, a experiência mostra que $63g$ pode ser discriminado de $60g$, $84g$ de $80g$ e $105g$ de $100g$, mas que os intervalos não podem ser reduzidos. A partir desses dados conclui-se que discriminação é possível se a magnitude de discriminação é aumentada de um vinte avos ou 5% do valor original.

Resultados análogos foram encontrados para as percepções de som, luz, olfato e gustação. Assim, seja s a magnitude de um estímulo mensurável e Δs o aumento requerido para a discriminação. Então a proporção:

$$r = \frac{\Delta s}{s}$$

é constante, isto é, não depende de s. Em outras palavras: diferenças marcantes na sensação ocorrem quando o aumento de estímulo é uma porcentagem constante do próprio estímulo. Esta é a lei de Weber. A seguinte tabela de proporções aproximadas $\frac{\Delta s}{s}$ pode ilustrar a sensibilidade dos sentidos humanos:

Tabela 2 – Tabela indicando as proporções aproximadas da magnitude do estímulo de acordo com o tipo de estímulo

Estímulo	**Proporção**	
Claridade visual	1:50	(s = intensidade de luz)
Tons musicais	1:10	(s = intensidade de som)
Olfato para borracha	1:8	(s = número de moléculas)
Gosto por solução salina	1:4	(s = concentração da solução)

Exemplos:

1. Consideremos três tons que são igualmente espaçados na escala de frequência, os três tons com frequências 300 Hz, 600 Hz, 900 Hz. As pessoas que ouvem esses tons concordam unanimemente que o intervalo entre o segundo e o terceiro tom é consideravelmente menor que entre o primeiro e o segundo. Portanto, nossa sensação para nível musical não é proporcional à frequência. Para termos dois intervalos consecutivos, que sejam percebidos como iguais em magnitude, temos que adotar uma sequência geométrica. Por exemplo, 300 Hz, 600 Hz, 1200 Hz diferem em intervalos de oitavas. Uma escala adequada para o nível musical é baseada no logaritmo da frequência.

2. No Brasil, a unidade mais usada para medir ruídos é o decibel (dB), que equivale a um décimo do bel, O decibel é uma homenagem a Graham Bell, o inventor do telefone.

60 dB é a intensidade do som de uma conversa, e 140 dB, a de um avião a jato. A escala que mede a intensidade ou volume do som é uma escala logarítmica. A escala de uma aparelho para medir ruídos é definida da seguinte forma: $R = 12 + log_{10}l$, onde R é a medida do ruído em bel e l é a intensidade sonora em W/m^2.
i) Qual seria a medida em decibéis de um trombone de intensidade sonora $l = 10^{-2}$ W/m^2?
ii) Sabendo que o nível máximo de ruído que a orelha humana pode suportar sem sofrer danos é de 120 dB, qual é a intensidade sonora equivalente em W/m^2 que podemos suportar sem termos a saúde prejudicada?

Resolução:
i) Sabemos que $R = 12 + log_{10}l$ e como $l = 10^{-2}$ W/m^2, logo:
$R = 12 + log_{10}10^{-2}$
$R = 12 - 2$
$R = 10$ bel

Para saber em decibel, devemos fazer uma conversão:
1 decibel é $\frac{1}{10}$ do bel, se temos 10 bel, logo, teremos 100 decibéis.

Portanto a medida de um trombone é de 100 decibéis.

ii) Como 1 decibel é $\frac{1}{10}$ do bel, se temos 120 decibéis, então teremos 12 bel, logo, se $R = 12 + log_{10}l$ e $R = 12$, então:
$12 = 12 + log_{10}l$
$log_{10}l = 0$ Aplicando a definição de logaritmos temos:
$l = 10^0$
$l = 1$ W/m^2

Logo suportamos 1 W/m^2

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É de suma importância a contextualização dos conteúdos exponenciais e logaritmos, propostos pelos livros didáticos. Com base na relevante frase citada anteriormente, o presente trabalho teve início com a parte histórica, onde foi descrito o surgimento do assunto em tela, com o objetivo de condensar assuntos relacionados aos mesmos.

Foi estudado de forma intrínseca a construção das exponenciais com inicio no conjunto dos números naturais até o conjuntos dos reais, onde foi trabalhado definições, propriedades, equações, inequações e funções, bem como, aplicações práticas, visualizações do comportamento das funções através de softwares (foi utilizado o (GEOGEBRA,), por ser um software livre), assunto esse que foi ponto de partida do referido trabalho ora apresentado.

Verifica-se no Apêndice o número e, importante irracional utilizado na resolução de problemas, sob a perspectiva de vários autores, trabalhado a título de complementação.

É necessário que o aluno esteja em contato direto com os cálculos de exponenciais e logaritmos, acima de tudo, quando esses cálculos são números inteiros, onde consiga realizar esses cálculos mentalmente, sem a utilização de calculadoras científicas ou dispositivos similares.

É necessário também que os alunos despertem o interesse pelo estudo da matemática como um todo, percebendo a aplicação dos conteúdos estudados em sala de aula na vida prática.

Portanto, este estudo pode contribuir para a melhoria da compreensão sobre exponenciais e logaritmos como ferramenta na resolução de problemas.

Dessa forma, espera-se que esse trabalho possa ser utilizado como material básico de consulta sobre exponenciais e logaritmos nos anos finais do ensino médio e em cursos iniciais das áreas de exatas.

Referências

AURÉLIO Online. ⟨https://dicionariodoaurelio.com/exponencial⟩, Acesso em: 25/10/2017.

BASSANEZI, R. C.; JR., W. C. F. **Equações Diferenciais com Aplicações**. [S.l.]: Editora HARBRA Ltda, 1988. 1–572 p.

BATSCHELET, E. **Introdução à Matemática para Biocientistas**. 2. ed. [S.l.]: Editora Interciência da Universidade Federal de São Paulo, 1978. v. 1. 1–565 p.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 1. ed. [S.l.]: Editora da Universidade Federal de São Paulo, 1974. v. 1. 12–300 p.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN+ - Ensino Médio**. [S.l.]: Ministério da Educação - Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000. ⟨https://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf⟩, Acesso em: 23/03/2018.

CARNEIRO, M. J. D.; SPIRA, M.; SABATUCCI, J. **Currículo Básico Comum**. [S.l.]: Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais, 2011. ⟨https://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/disciplinas/2016.2/esp00001/biblioteca/2011-minas-gerais-ensino-medio.pdf⟩, Acesso em: 23/03/2018.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto e Aplicações**. 1. ed. [S.l.]: Editora Ática, 2012. v. 1. 1–504 p.

DJAIRO, G. D. F. **Números Irracioanis e Transcedentes**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985. 1–101 p.

GEOGEBRA. ⟨https://www.geogebra.org/download⟩, Acesso em: 28/06/2017.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos Editora Nacional - LTC, 2001. v. 1. 1–634 p.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Matemática Elementar**. 7. ed. [S.l.]: Atual Editora Ltda, 1985. v. 1. 1–176 p.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. 6. ed. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2016. v. 1. 1–122 p.

SERRÃO, A. N. **Tábua de Logaritmos**. 8. ed. [S.l.]: Fundação Nacional de Material Escolar - FENAME, 1977. v. 1. 1–170 p.

A O número e

A.1 Introdução

É difícil abordar a história do número e, cuja aproximação mais usual é 2,7182 sem se referir ao seu parente mais famoso, o número π.

Devido a simplicidade do aparecimento do π, quociente do comprimento pelo diâmetro de uma dada circunferência, sua história se reporta à antiguidade, inclusive com citações bíblicas e de uma forma bem consciente nos trabalhos de Arquimedes (287 a 212 a.C.). O número e por sua vez, só foi reconhecido, praticamente, cem anos após a criação do cálculo diferencial e integral.

Estudos recentes dão conta de que a primeira vez que o número e apareceu na matemática foi no início do século XVII em problemas práticos sobre juros compostos e, com situação típica de acumulação capitalista. Aparece na matemática, especialmente no Cálculo Diferencial e Integral, em conceitos fundamentais para o seu desenvolvimento é uma das grandes invenções no campo computacional, foram os logaritmos de Napier (1550-1617), os quais são abordados nessa pesquisa.

A definição tradicional de e, faz-se pondo:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

.

A expressão acima significa que, fazendo sucessivamente $n = 1, 2, 3, 4, ...$, as potências 1, $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$, ... aproximam-se cada vez mais do número e, podendo a diferença $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (que é um número positivo tão pequeno quanto se deseje, bastando para isso tomar n suficientemente grande).

Em virtude do Teorema, "Toda função logarítmica L é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real c, existe sempre um (único) número real positivo x tal que $L(x) = c$", existe um único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a 1. Tal número é representado pela letra e. Ele é a base do sistema de logaritmos naturais.

Portanto, as afirmações "$lnx = 1$"e "$x = e$"são equivalentes. Em símbolos, temos: $lnx = 1 \Leftrightarrow x = e$.

Imediatamente temos $e > 1$, pois os números reais positivos menores que 1 tem logaritmos negativos. Lembrando em (LIMA, 2016) o significado geométrico dos logaritmos naturais, vemos que a faixa H_1^e tem área 1. Podemos observar que a faixa H_1^2 tem área menor do que 1, enquanto que H_1^3 tem área maior que 1, logo, $ln2 < 1 < ln3$, concluindo assim que $2 < e < 3$, ou seja, o número e está compreendido entre 2 e 3.

O número e em (GUIDORIZZI, 2001) é definido através de uma sequência de termo geral $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ que é convergente, então, o número e é o limite da sequência

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

.

Para provar a convergência de tal sequência, é suficiente provar que ela é crescente e que existe $M > 0$ tal que $a_n < M$ para todo $n \geq 1$.

Primeiro, vamos provar que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ para todo $n \geq 1$. Temos:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{1} \left(\frac{1}{n}\right)^i = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + ... + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2}.\frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}.\frac{1}{3!} + ... + \frac{n!}{n^n}.\frac{1}{n!},$$

logo,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$$

Como $2^n \leq (n+1)!$ (*) para todo $n \geq 1$ resulta que: $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $n \geq 1$, segue que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$$

e como

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + ... = 2$$

, que é uma série geométrica, resulta

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 < 3$$

para todo $n \geq 1$.

Vamos provar agora que a sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente.

Seja n e m naturais maiores que 1, tais que $n < m$, temos:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{1} \left(\frac{1}{n}\right)^i = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2}.\frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}.\frac{1}{3!} + ... + \frac{n!}{n^n}.\frac{1}{n!}$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{1} \left(\frac{1}{m}\right)^i = 1+1+\frac{m(m-1)}{n^2}.\frac{1}{2!}+\frac{m(m-1)(m-2)}{m^3}.\frac{1}{3!}+...+\frac{m!}{m^m}.\frac{1}{m!}$$

Se $n < m$ resulta: $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$, multiplicando por (-1) temos: $-\frac{1}{n} < -\frac{1}{m}$, logo:

$$1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{m} \text{ (somando 1 a cada membro)}$$

$$\frac{n-1}{n} < \frac{m-1}{m} \text{ (tirando o m.m.c)}$$
$$\frac{n}{n}.\frac{n-1}{n} < \frac{m}{m}.\frac{m-1}{m} \text{ (com um pouco de manipulação)}$$

$\dfrac{n(n-1)}{n^2} < \dfrac{m(m-1)}{m^2}$, que é o segundo termo do desenvolvimento da sequência $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
.

Observe que: $1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{m}$ e $-\frac{1}{n} < -\frac{1}{m}$, somando membro a membro temos:

$$1-\frac{2}{n} < 1-\frac{2}{m}$$

.

Se multiplicarmos membro a membro $1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{m}$ por $1-\frac{2}{n} < 1-\frac{2}{m}$, temos:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right).$$

Assim:

$$\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n} < \frac{(m-1)}{m}\frac{(m-2)}{m}$$
$$\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n} < \frac{m}{m}\frac{(m-1)}{m}\frac{(m-2)}{m}$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} < \frac{m(m-1)(m-2)}{m^3},$$

que é o terceiro termo do desenvolvimento da sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Usando isso, segue que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ se $n < m$. Concluindo a sequência é crescente.

Portanto $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é convergente, como queríamos provar.

Observação (*): A afirmação $2^n \leq (n+1)!$ pode ser demonstrada através de indução finita.

Demonstração. Demonstraremos $2^n \leq (n+1)!$ por indução sobre n para $n \geq 1$.

- i) A propriedade é verdadeira para $n = 1$, pois

$$2^1 \leq (1+1)! = 2!$$

- ii) Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, $2^p \leq (p+1)!$, e mostraremos que é verdadeira para $n = p+1$, isto é, $2^{p+1} \leq (p+1+1)! = (p+2)!$. De fato: $2^{p+1} = 2^p.2 = \underbrace{(2^p)}_{HI}.2 \leq (p+1)!.2 = 2(p+1)! = 2(p+1).p! = (2p+2).p! \leq (p^2+p+2p+2).p! = (p+2)(p+1)p! = (p+2)!$.

□

A.2 O número e é irracional

Como e é um número irracional, podemos encontrar um valor, de acordo com a definição de (LIMA, 2016) dando valores para n.

Em (DJAIRO, 1985) podemos ver uma demostração de que tal número e é irracional, a qual segue adaptada.

O número e, que aparece no estudo de função logarítmica, é definido como o número tal que a área hachurada abaixo é igual a 1, conforme mostra a figura A.1 abaixo:

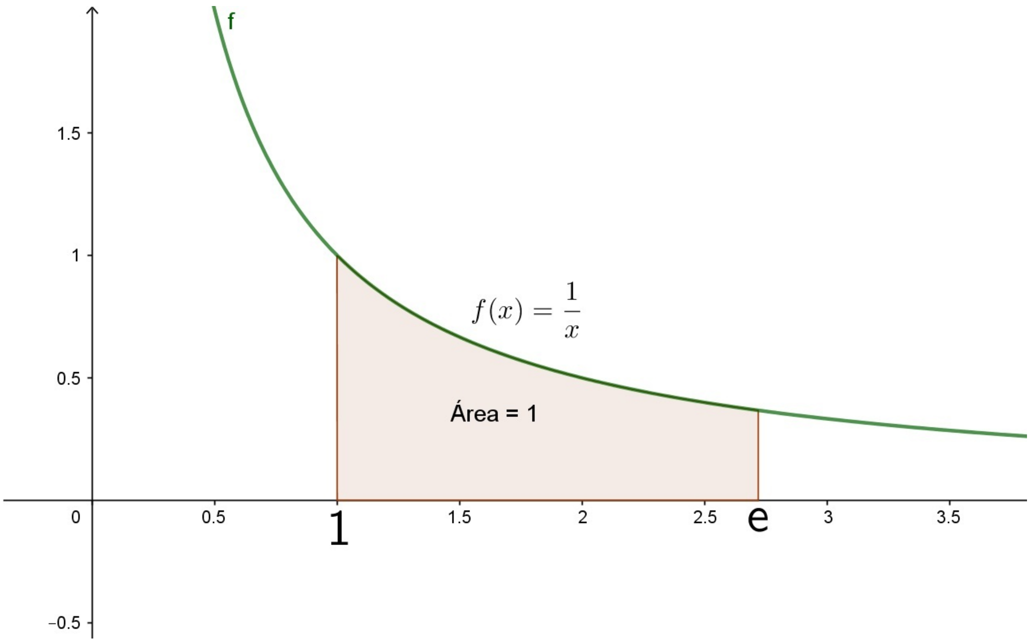

Figura A.1 – Área hachurada abaixo da função $f(x) = \frac{1}{x}$ é igual a 1

A curva da figura A.1 é o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x > 0$

.

Demonstra-se nos textos de cálculo que:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... \tag{A.1}$$

Suponha que e fosse um número racional, isto é, $e = \frac{p}{q}$, onde p, $q \in \mathbb{N}$, são primos ente si. De (A.1) segue-se:

$$\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{q!}\right) = \sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \tag{A.2}$$

Agora, faremos uma estimativa do segundo membro de (A.2):

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + ...$$

Colocando na expressão anterior $\frac{1}{(q)!}$ em evidência temos e considerando que:

$$(q+1)(q+2) > (q+1).(q+1) = (q+1)^2 \Rightarrow \frac{1}{(q+1)(q+2)} < \frac{1}{(q+1)^2}$$

Logo,

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + ...\right) < \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + ...\right) \tag{A.3}$$

A expressão entre parêntese no último membro de (A.3) é uma série geométrica da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n,$$

a qual para $0 < r < 1$, tem soma igual a $\frac{r}{1-r}$. Usando esse fato em (A.3) e $r = \frac{1}{q+1}$, ou seja:
$\frac{r}{1-r} = \frac{\frac{1}{q+1}}{1-\frac{1}{q+1}} \underbrace{=}_{calculando\ o\ m.m.c} \frac{\frac{1}{q+1}}{\frac{q+1-1}{q+1}} = \frac{\frac{1}{q+1}}{\frac{q}{q+1}} = \frac{1}{q+1}.\frac{q+1}{q} = \frac{1}{q}$, obtemos:

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} < \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + ...\right) < \frac{1}{q!}.\frac{1}{q} \tag{A.4}$$

Voltando a (A.2) com a estimativa (A.4) temos:

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!}.\frac{1}{q}$$

logo:

$$0 < q!\left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - .... - \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q} \tag{A.5}$$

$$\left(\frac{q!p}{q} - q! - \frac{q!}{1!} - \frac{q!}{2!} - \frac{q!}{3!} - ..... - \frac{q!}{(q-2)!} - \frac{q!}{(q-1)!} - \frac{q!}{q!}\right)$$

$$\left(p.(q-1)! - q! - q! - \frac{q!}{2!} - \frac{q!}{3!} - .... - q(q-1) - q - 1\right)$$

Observe (A.5), o termo do meio é inteiro pois $q!$ cancela todos os denominadores das frações nele presentes. Mas isso é impossível, pois sendo $\frac{1}{q} < 1$, a expressão (A.5) diria que o termo médio é um inteiro positivo estritamente menor que 1, o que é um absurdo.

Logo, e é irracional.