**UFRRJ**
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

# UMA INTRODUÇÃO DA TEORIA DOS JOGOS PARA TURMAS FINAIS DO ENSINO MÉDIO

**Gilmar Dos Santos Leandro**

**2018**

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

# UMA INTRODUÇÃO DA TEORIA DOS JOGOS PARA TURMAS FINAIS DO ENSINO MÉDIO

GILMAR DOS SANTOS LEANDRO

Sob a Orientação do Professor

Prof. Dr. André Luiz Martins Pereira

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ

Outubro de 2018

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Leandro, Gilmar dos Santos , 1988-
L437i Uma introdução da teoria dos jogos para turmas finais do ensino médio / Gilmar dos Santos Leandro. 2018.
39 f.: il.

Orientador: André Luiz Martins Pereira.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2018.

1. Teoria dos jogos . I. Pereira, André Luiz Martins , 1980-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional III. Título.

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO**
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

**GILMAR DOS SANTOS LEANDRO**

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 30/10/2018

André Luiz Martins Pereira. Dr. UFRRJ
(Orientador)

Cláudio Cesar Saccomori Júnior. Dr. UFRRJ

André Luiz Cordeiro dos Santos. Dr. CEFET-RJ

Dedico este trabalho a minha família,
minha esposa e principalmente a minhas
avós por ser o fruto da dedicação
incondicional na minha formação.

# AGRADECIMENTOS

A Deus, por mesmo quando estive desmotivado e desacreditado em muitos momentos, me guiou pelos caminhos que conduziram ao caminho certo.

Aos meus pais Jorge Marcelino Leandro e Ana Glória dos Santos Leandro que sempre me apoiaram, oraram muito por mim e acreditaram na minha vida pessoal e acadêmica, dando o melhor de si e abrindo mão de metas e sonhos pessoais para ver meu sucesso.

À minha esposa Patrícia Ferreira Vieira por sempre estar ao meu lado, me dando palavras de conforto e ser compreensiva mesmo nos momentos mais difíceis.

À minha avó Maria Antônia da Costa Leandro por todos os seus conselhos e palavras que sempre me mostrava o quando seu amor e vontade me despertava a vontade de superar as adversidades.

Ao professor André Luiz Martins Pereira por mesmo com todas as adversidades ocorridas durante a pesquisa, esteve sempre disposto a ajudar, orientar e contribuir com sua enorme sabedoria e experiência acadêmica.

Aos meus amigos Pablo Mendes Peres de Sousa, Robson Miranda, Vitor Hugo Justino Carvalho, Érica Azevedo e Igor Martins por todas as motivações, conselhos, sugestões e broncas quando necessários e suas contribuições diretas e indiretas.

Aos meus amigos da turma, que desde o começo ajudaram com conselhos, dúvidas e grupos de estudos que foram imprescindíveis para a aprovação no ENQ e diversas disciplinas durante o curso.

A todos os professores do curso que sempre estiveram dispostos a esclarecerem os conteúdos e as dúvidas, contribuindo para meu crescimento profissional e acadêmico.

Aos meus alunos que muitas das aulas me cobravam o desenvolvimento deste trabalho que é tão importante para meu currículo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001.

*“Educação não transforma o mundo. Educação muda as pessoas. Pessoas transformam o mundo.”*

*Paulo Freire*

# Resumo

LEANDRO, Gilmar Dos Santos. **Uma introdução da teoria dos jogos para turmas finais do ensino médio**. 2018. 39p Dissertação (Mestrado em Matemática). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2018.

O objetivo deste trabalho é construir um material destinado a turmas dos anos finais do ensino médio, apresentando a matemática de uma forma mais interessante a partir dos conceitos básicos teoria dos jogos. Entendido esses conceitos, o aluno poderá resolver situações-problemas utilizando instrumentos matemáticos, buscando a melhor escolha em determinadas interações e não tomar decisões de forma instintiva. Após estudar a pesquisa, o leitor terá a entenderá que a matemática pode ser mais atrativa e útil nas decisões a serem tomadas no seu cotidiano e ampliar sua visão crítica sobre assuntos da atualidade como a aplicação e importância da "delação premiada" nos processos judiciais que constantemente acontecem no Brasil. Será abordado um embasamento teórico com a resolução de algumas atividades apresentadas aos alunos, utilizando as estratégias que serão trabalhadas no texto. No final, são propostas duas atividades para que os alunos possam aplicar os conhecimentos adquiridos no desenvolvimento de todo o trabalho apresentado, com suas devidas soluções.

Palavras-Chave: teoria dos jogos, decisão, estratégia dominante, equilíbrio de nash, ganhos.

# Abstract

LEANDRO, Gilmar Dos Santos. **An introduction to game theory for high school graduates**. 2018. 39p Dissertation (Master in Mathematics). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2018.

The objective of this work is to construct a material destined to the classes of the final years of high school, presenting mathematics in a more interesting way from the basic concepts of game theory. Understanding these concepts, the student can solve problem situations using mathematical instruments, seeking the best choice in certain interactions and not making decisions instinctively. After studying the research, the reader will have to understand that mathematics can be more attractive and useful in the decisions to be taken in their daily life and broaden their critical view on current issues such as the application and importance of "awarding" in judicial processes that constantly happen in Brazil. It will be approached a theoretical basis with the resolution of some activities presented to the students, using the strategies that will be worked on in the text. In the end, two activities are proposed so that the students can apply the knowledge acquired in the development of all the presented work, with its due solutions.



Keywords: game theory, decision, dominant strategy, nash equilibrium, gains.

# LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE TABELAS

# SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

A matemática tem como uma de suas principais características o desenvolvimento e aperfeiçoamento do raciocínio lógico para o uso na interpretação, criação e resolução de problemas, tanto no âmbito concreto (matemática aplicada) quanto no abstrato (matemática pura).

Durante muito tempo, o ensino de matemática no Brasil vem passando por constantes mudanças. Para Lima (2007) essas mudanças ocorreram desde o movimento da matemática moderna - onde a matemática formal, dada de forma geral e abstrata era considerada melhor e mais atrativa em relação a matemática aplicada, contextualizada e de casos particulares - até o momento que se poderia chamar “Reform Mathematics”, onde há a predominância do construtivismo e das tecnologias utilizadas em sala de aula.

Atualmente a matemática do nível médio trabalhada nas salas de aula, é abordada de forma metódica, destacando a memorização de fórmulas e executam-se exercícios com soluções já estabelecidas com pouca aplicação e criatividade. Segundo Lima (2007):

> A matemática do ensino médio, conforme praticada nas escolas brasileiras, embora aborde temas relevantes, trata esses assuntos de maneira bastante insatisfatória, enfatizando aspectos manipulativos e fórmulas, deixando de lado interessantes aplicações e interpretações relevantes daqueles tópicos das outras Ciências e no dia-a-dia da sociedade em que vive o jovem de hoje.

A partir de todos os aspectos que compõe a trajetória da educação matemática no Brasil, alguns alunos questionam a abordagem de tantos conteúdos do ensino médio que não tem uma relação direta na vida cotidiana e assim perdendo interesse em aprendê-la.

Baseado na necessidade de apresentar um conteúdo basicamente satisfatório e diretamente ligado as tomadas de decisões diárias, a Teoria dos Jogos é aplicada nesta pesquisa como um instrumento matemático que transforma a decisão não em algo instintivo, mas sim, uma conclusão feita a partir de conceitos puramente matemáticos que conduzem as melhores escolhas, dadas as condições numa determinada situação.

Com os conceitos de Teoria dos Jogos, veremos que é possível o aluno fazer uma escolha em que pode ser mais vantajosa para si, ou em determinados momentos uma opção que seja melhor para todos os indivíduos envolvidos em uma interação.

Para alcançarmos esse objetivo, alguns conceitos e exemplos foram escritos de forma mais clara e simples, a fim de que os professores possam trabalhar o conteúdo de maneira mais fácil e os alunos dos anos finais do ensino médio possam de fato, entender os conceitos básicos que fundamentam a teoria dos jogos e como são analisadas as tomadas de decisões.

O capítulo dois começa com uma breve introdução da história da teoria dos jogos, destacando os principais trabalhos elaborados pelos precursores desse estudo, em seguida são dadas as definições, os modelos de jogos que estruturam as situações e quais são as estratégias que nos auxiliam na tomada de decisões.

No capítulo também são resolvidas algumas situações problemas utilizando as técnicas e conceitos apresentados nos exemplos resolvidos.

No capítulo três são destacados os parâmetros curriculares nacionais do ensino médio, ressaltando a importância dessa contextualização no ensino da matemática estudada nessa etapa do ensino. Em seguida, são propostas duas atividades para que os alunos possam resolver construindo as soluções e utilizando as ferramentas estratégicas fornecidas, assim consolidando a importância do novo conceito apresentado.

Por fim no capítulo quatro são sugeridas as soluções de cada uma dos itens das atividades propostas aos alunos no capítulo três de forma simples e direta, que podem ser feitas de acordo com a escolha do professor que ministrará as atividades.

# 2 TEORIA DOS JOGOS

Nesse capítulo, serão abordados alguns fatos históricos importantes sobre a teoria dos jogos, seus principais elementos, como interpretar e estruturar uma situação de interação estratégica. Será apresentado um embasamento teórico afim de obter os resultados que possam concluir as situações propostas. Utilizaremos as referências [5] e [9] como base teórica.

## 2.1 História da Teoria dos Jogos

Para entendermos o atual estágio da aplicação e desenvolvimento da Teoria dos Jogos, precisamos conhecer, pelo menos de maneira superficial, o contexto histórico do processo de desenvolvimento dessa teoria principalmente na economia e nas aplicações das diversas situações de interações sociais atuais.

Num primeiro instante, a ideia de Teoria dos Jogos veio do estudo de estratégias para melhor compreensão e decisões, relacionadas ao mercado econômico e em jogos estratégicos. Porém todos esses conceitos não formaram uma teoria geral que criasse uma nova linha de pesquisa.

Em 1838 o matemático Antonie Augustin Cournot, no livro Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses, elabora elementos importantes do método que seria no futuro aplicado na solução de um jogo. Neste livro, Cournot cria um modelo de interação definido como duopólio, onde duas empresas produzindo um produto comum decidiam que quantidade cada iria produzir, sabendo que a decisão de uma poderia afetar os ganhos da outra:

> [...] o método empregado por Cornot para a solução de seu modelo de duopólio foi considerado por alguns economistas não apenas um precursor da análise de equilíbrio em jogos não-cooperativos (isto é, situações de interação estratégica em que não há possibilidade de os agentes estabelecem acordos acerca do seu comportamento durante a interação antes de ela ocorrer), mas verdadeiramente uma aplicação do mesmo método que John Nash, [...] desenvolveria mais tarde. (Fiani, 2009. p.34)

FIGURA 1: Antonie Augustin Cournot

Fonte: Disponível em: <http://www.hetwebsite.net/het/profiles/cournot.htm>. Acesso em: 28/09/2018

Em 1913 o matemático alemão Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo publicou um teorema matemático considerado o primeiro da Teoria dos Jogos, onde demonstrou que:

> “o jogo de xadrez é estritamente determinado, isto é, em cada estágio do jogo pelo menos um dos jogadores tem uma estratégia em mão que lhe dará a vitória ou conduzirá o jogo ao empate.”(Zarmelo,1913)

FIGURA 2: Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo

Fonte: Disponível em: <http://fizyka.net.pl/ciekawostki/ciekawostki_aou7.html#5>. Acesso em: 28/09/2018

O matemático francês Félix Edouard Justin Emile Borel é outro precursor da Teoria dos Jogos e publicou quatro artigos sobre o que chamamos de jogos estratégicos e foi o primeiro a utilizar os termos utilizados na Teoria dos Jogos:

> [...] Borel foi o primeiro a formular o conceito moderno de estratégia, à qual denominou "método de jogo", e que definiu com um código que determina para cada circunstância possível (supostamente finita em número) exatamente o que a pessoa deve fazer".[...]. John Von Neumann daria crédito a Borel, mais tarde, pelo pioneirismo na formulação do conceito de estratégia. (Fiani, 2009. p.35)

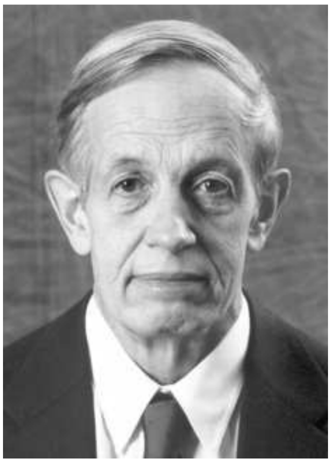
FIGURA 3: Félix Eduard Justin Emile Borel

Fonte: Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/%C3%89mile_Borel>. Acesso em: 12/12/2018

A teoria dos jogos começou a ter um destaque e formalização pelo húngaro John Von Neumann, considerado pai da teoria dos jogos, tendo publicado em 1944 o livro The Theory of Games and Economic Behavior com coautoria do economista alemão Oscar Morgenstern desenvolvendo os jogos considerados de soma zero. Além disso definiu a representação de jogos de forma extensiva, isto é, são identificadas as decisões de cada jogador em cada estágio do jogo.

Apesar de Von Neumann ter sido o primeiro a pensar em formalização e publicações em relação exclusivamente a Teoria dos Jogos, os jogos de soma zero limitavam as possibilidades de interações. Porém em 1950, essas estratégias para ampliar a teoria a jogos além dos de soma zero foram criados pelos matemáticos John Forbes Nash Jr., que criou uma estratégia chamada Equilíbrio de Nash, usada quando o jogador busca a decisão que é a melhor estratégia dentre as escolhidas pelos outros jogadores.

FIGURA 4: John Forbes Nash Jr



Fonte: Disponível em: < https://www.nobelprize.org/prizes/economics/1994/nash/auto-biography/ >. Acesso em: 28/09/2018

E essa ferramenta foi de grande importância:

> A contribuição de Nash foi fundamental para o desenvolvimento da teoria dos jogos. A partir de sua noção de equilíbrio foi possível estudar uma classe de jogos muito mais ampla que os jogos de soma zero. Foi possível também demonstrar que, em alguns casos, quando o jogador escolhe racionalmente aquela estratégia que seria a melhor resposta em relação às estratégias dos demais, pode ocorrer que o resultado final para todos os jogadores seja insatisfatório e que, portanto, nem sempre a busca de cada indivíduo pelo melhor para si resulta no melhor para todos. (Fiani, 2009. p.36)

O economista húngaro John Charles Harsanyi contribuiu para a teoria dos jogos ampliando o equilíbrio de Nash a situações em que alguns jogadores possuem informações privilegiadas, gerando uma situação chamada informação assimétrica. De acordo com:

> Antes da contribuição de Harsanyi, os economistas não dispunham de instrumental adequado para tratar da situação de interação estratégica em que a assimetria da informação produzia incerteza [...]. A partir da contribuição de Harsanyi, os economistas se viram em condições de tratar formalmente situações de interação estratégica envolvendo assimetria de informação. (Fiani 2009 p.37)

O matemático e economista Reinhard Justus Reginald Selten refinou o equilíbrio de Nash que segundo Fiani (2009) ficou conhecido como “equilíbrio perfeito em sub jogos”, significando que uma determinada estratégia, para ser considerada um equilíbrio perfeito em sub jogos, tem de ser ótima considerando-se todos os possíveis desdobramentos do processo de interação estratégica.

Com essas importantes e decisivas contribuições John F. Nash Jr, John C. Harsanyi e Reinhard J. R. Selten obtiveram o prêmio Nobel em economia no ano de 1994. Hoje a teoria dos jogos é aplicada em várias áreas como economia, direito, ciências sócias e em várias outras áreas em que ocorrem a interação entre grupos de indivíduos onde suas decisões influenciam mutuamente entre si.

## 2.2 Definições e elementos na Teoria dos Jogos

Nesta seção vamos elucidar o embasamento teórico necessário para a compreensão de atividades que podem ser implementadas no ensino médio que envolvam à teoria dos jogos, para tal não vamos nos preocupar no rigor matemático que está por trás dessa teoria e sim numa apresentação mais informal, objetivando a compreensão dos professores e alunos do ensino médio. Para o leitor interessado numa abordagem mais rigorosa, destacamos as seguintes referências [5] e [9].

A teoria dos jogos pode ser definida como uma ferramenta puramente matemática utilizada na tomada de decisões onde dois ou mais indivíduos, empresas ou organizações, atuam numa situação de conflito ou interação estratégica. Sendo assim, analisam de forma racional as possibilidades de escolhas a serem tomadas por cada um e a partir daí escolhem a melhor estratégia para si a fim de um ganho.

Nos jogos de estratégia, ou simplesmente jogos, existe um conjunto de indivíduos ou instituições que chamamos de jogadores, elementos que participam das interações estratégicas realizando as tomadas de decisões. Na situação, cada jogador possui um número de decisões que podem ser tomadas de forma estratégica a fim de obter seu resultado. Após cada jogador escolher sua estratégia, é montado uma situação ou perfil onde todas os resultados possíveis são colocados. Cada jogador terá uma função utilidade relacionando cada situação a um ganho ou payoff do jogador, que será representado por um número real.

Quando todas as possibilidades são analisadas, é montada uma matriz ou tabela relacionando todos os resultados relacionados a cada uma das escolhas de cada jogador e mostrando o resultado obtidos das decisões tomadas e que influencia tem uma em relação a outra.

Utilizando notações matemáticas temos os seguintes elementos num jogo: existe um conjunto finito de jogadores, representado por $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Cada jogador $g_i \in G$ possui um conjunto finito $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im_i}\}$ de opções, denominadas estratégias puras do jogador $g_i (m_i \geq 2)$. Um vetor $s = (s_{1j_1,} s_{2j_2}, \dots, s_{ij_i})$, onde $s_{ij_i}$ é uma estratégia pura para o jogador $g_i \in G$, é denominado um perfil de estratégia pura. O conjunto de todos os perfis de estratégia pura formam, portanto, o produto cartesiano

$$S = \prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n,$$

denominado espaço de estratégia pura do jogo. Para jogador $g_i \in G$, existe uma função utilidade

$$u_i: \begin{matrix} S \longrightarrow R \\ s \longmapsto u_i(s) \end{matrix}$$

que associa o ganho (payoff) $u_i(s)$ do jogador $g_i$ a cada perfil de estratégia pura $s \in S$.

Para os casos com dois jogadores temos existe um conjunto finito de jogadores, representado por $G = \{g_1, g_2\}$. Cada jogador $g_1, g_2 \in G$ possui um conjunto $S_1 = \{s_{11}, s_{12}\}$ e $S_2 = \{s_{21}, s_{22}\}$ de duas opções, denominadas estratégias puras dos jogadores $g_1$ e $g_2$. Um vetor $s = (s_{1j_1}, s_{2j_2})$, onde $s_{ij_i}$ é uma estratégia pura para o jogador $g_1 \in G$ e $s = (s_{1j_1}, s_{2j_2})$, onde $s_{ij_i}$ é uma estratégia pura para o jogador $g_2 \in G$, é denominado um perfil de estratégia pura. O conjunto de todos os perfis de estratégia pura formam, portanto, o produto cartesiano

$$S = \prod_{i=1}^{2} S_i = S_1 \times S_2$$

denominado espaço de estratégia pura do jogo. Para jogador $g_1 \in G$, existe uma função utilidade

$$u_1: \begin{matrix} S \longrightarrow R \\ s \longmapsto u_1(s) \end{matrix}$$

que associa o ganho (payoff) $u_1(s)$ do jogador $g_1$ a cada perfil de estratégia pura $s \in S$. De análoga, para jogador $g_2 \in G$, existe uma função utilidade

$$u_2: \begin{matrix} S \longrightarrow R \\ s \longmapsto u_2(s) \end{matrix}$$

que associa o ganho (payoff) $\mathrm{u}_2(\mathrm{s})$ do jogador $\mathrm{g}_2$ a cada perfil de estratégia pura $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$.

**Exemplo 1:** (Brincadeira do par ou ímpar) É muito comum em brincadeiras com crianças ocorrer uma preferência nas escolhas após uma disputa de par ou ímpar. A disputa acontece entre duas crianças onde o objetivo é acertar a paridade do número resultado da soma de todos os dedos colocados por ambos os jogadores. Dessa forma temos que, dadas as crianças $C_1$ e $C_2$ sendo, considerando $C_1$ a criança que optou pelo resultado ímpar e $C_2$ a criança que optou pelo resultado par, os jogadores desse jogo. Assim, $C_1$ e $C_2$ elementos do conjunto $G$ de jogadores é dado por $G = \{C_1, C_2\}$ onde cada criança pode optar em por um número ímpar ou par, ou seja, o conjunto de estratégias puras da criança é $C_1 = \{ímpar, par\}$ e o conjunto de estratégias puras da criança é $C_2 = \{ímpar, par\}$. Dessa forma é gerado o espaço de estratégias puras $S = C_1 \times C_2$ sendo, $S = \{(ímpar, par), (ímpar, ímpar), (par, ímpar), (par, par)\}$ com cada um dos perfis de cada criança. As funções utilidades de cada uma das crianças são:

$$u_{C_1}: S \longrightarrow R \text{ e } u_{C_2}: S \longrightarrow R,$$

representadas por $u_{C_1}(ímpar, par) = 1$; $u_{C_1}(ímpar, ímpar) = 0$; $u_{C_1}(par, ímpar) = 1$; $u_{C_1}(par, par) = 0$, os possíveis resultados (payoffs) obtidos pela criança $C_1$ e

$u_{C_2}(ímpar, par) = 0$; $u_{C_2}(ímpar, ímpar) = 1$; $u_{C_2}(par, ímpar) = 0$; $u_{C_2}(par, par) = 1$, os possíveis resultados (payoffs) obtidos pela $C_2$. Para analisarmos de uma forma mais simplificada, montaremos a matriz de payoffs abaixo onde a primeira coordenada de cada par ordenado é associada a criança $C_1$ e a segunda coordenada do par ordenado é associada a criança $C_2$:

Tabela 1: Payoffs – Par ou Ímpar

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $C_2$ | | |
| $C_1$ | | ímpar | par |
| | Ímpar | (0,1) | (1,0) |
| | par | (1,0) | (0,1) |

Podemos observar na matriz de payoffs que o valor um é atribuído a criança que ganhou a disputa de par ou ímpar e zero a criança que perdeu a disputa, por exemplo, quando a criança $C_1$ escolher por um valor ímpar de dedos e a criança $C_2$ também escolher um valor ímpar de dedos, a soma obtida é um número par, sendo vitoriosa a criança $C_2$ associada ao valor 1 e o valor 0 associado a criança $C_1$ ao par ordenado (0,1).

**Exemplo 2:** (A Batalha de Bismarck) Em dezembro de 1942 o alto comandante de guerra japonês decidiu transferir um maciço reforço da China e do Japão para Lae, em Papua-Nova Guiné. Isso permitiria aos japoneses se recuperarem da derrota de Guadacanal e se prepararem para nova ofensiva aliada. Contudo, a movimentação de um volume grande de tropas por mar tinha um risco elevado: o poderio aéreo aliado na área era fortíssimo.

Um dado importante da situação era o fato de que o comboio japonês dispunha de duas rotas alternativas: a rota pelo sul, que apresentava tempo bom e boa visibilidade, e a rota pelo norte, que apresentava tempo ruim e baixa visibilidade. As forças aliadas, por outro lado, somente possuíam aviões de reconhecimento para pesquisar uma rota por vez, sendo que a busca em qualquer uma das rotas consumia um dia inteiro.

Dessa forma, se as forças aliadas enviassem seus aviões de reconhecimento para a rota certa, poderiam começar o ataque em seguida. Porém, se mandassem os aviões para a rota errada, perderiam um dia de bombardeios. Os aliados também sabiam que se os japoneses escolhessem a rota sul e fossem localizados de imediato, o bom tempo garantiria três dias de bombardeio. Todavia, se os japoneses tivessem escolhido a rota norte, mesmo que os aliados os localizassem no primeiro dia de buscas, o mau tempo permitiria apenas dois dias de bombardeio.

Observando os dados dessa situação, podemos modelar essa interação da seguinte forma: o conjunto de jogadores é dado por $G = \{F, J\}$, onde $F$ representam as forças aliadas e $J$ o comboio japonês. Assim, o conjunto de estratégias puras das forças aliadas é $F = \{N, S\}$ e o conjunto de estratégias puras dos comboios japonêses é $J = \{N, S\}$, tal que $N$ representa escolha da rota Norte no primeiro dia e $S$ escolha da rota Sul no primeiro dia. O espaço de estratégias puras $S = F \times J$ onde $S = \{(N, S), (N, N), (S, N), (S, S)\}$ aplicadas as funções utilidades $u_F: S \longrightarrow R$ e $u_J: S \longrightarrow R$ podem ser representadas na matriz de payoffs a seguir:

Tabela 2: Payoffs – Batalha de Bismarck

| | | Comboio japonês | |
|---|---|---|---|
| | | Rota Sul no primeiro dia | Rota Norte no primeiro dia |
| Frotas aliadas | Rota Sul no primeiro dia | (3,-3) | (1,-1) |
| | Rota Norte no primeiro dia | (2,-2) | (2,-2) |

Nesse caso os valores positivos na primeira coordenada de cada entrada da matriz, representam a quantidade de dias que as forças aliadas terão para atacar o comboio japonês e os valores negativos na segunda coordenada de cada entrada da matriz, representa a quantidade de dias que o comboio japonês será bombardeado e prejudicado pelas forças aliadas.

Podemos observar que os japoneses podem optar pela rota norte contando que as forças aéreas percam um dia procurando pela rota sul e um dia no mau tempo dessa rota, porém, se os batedores optarem também pela rota norte não poderão sofrer a menor possibilidade de dano que é desejado pelos japoneses. Já se os japonese decidirem pela rota sul, podem ser muito prejudicados por serem atacados duramente os três dias. Mais à frente vamos estruturar as características de cada jogo e tipos de estratégias que podem definir as soluções a serem utilizadas.

## 2.3 Modelos de jogos

Nessa seção vamos definir alguns tipos de jogos que irão esclarecer as diferenças entre as características das diversas interações estratégicas. Para modelar um jogo precisamos saber do quanto se tem disponível de informações, da relação entre os jogadores e em que momento as decisões serão tomadas.

### 2.3.1 Jogos não-coperativos

Um jogo é considerado como não-cooperativo quando os indivíduos ou instituições participantes são impedidos de fazer acordos ou alianças, ou seja, tomam suas decisões sem conhecimento da tomada de decisão dos outros jogadores.

### 2.3.2 Jogos de soma zero

Também conhecidos como jogos estritamente competitivos, é o jogo em que o prejuízo ou perda causado a um dos jogadores é exatamente o ganho de outro jogador, sendo assim, os jogadores tentam causar o maior dano possível para que consequentemente tenha o máximo de ganho.

### 2.3.3 Jogo simultâneo

É o jogo em que um ou vários jogadores tomam suas decisões sem dispor de informações sobre as decisões de outros jogadores. Quando as decisões são feitas simultaneamente, não significa ser no mesmo tempo, mas sem privilégio ou conhecimento de alguma ação feita por outro jogador.

### 2.3.4 Jogo sequencial

Diferente dos jogos simultâneos, os sequenciais são aqueles em que o jogador envolvido nas tomadas de decisões tem conhecimento de alguma ação feita por algum jogador anteriormente. Dessa forma, as decisões feitas pelos demais jogadores são feitas a partir da primeira a ser realizada.

### 2.3.5 Jogos cooperativos

Ao contrário dos jogos não-cooperativos, os jogadores estabelecem acordos garantindo que suas decisões são conhecidas previamente por outros indivíduos que comprometem-se em garantir os acordos feitos previamente.

Por último, vale salientar que a informação num determinado jogo pode ser classificada de duas formas: quando todos os jogadores que participam do jogo têm conhecimento de todas as etapas e acontecimentos das informações dispostas na história do jogo e tais jogadores, sabem que todos tem conhecimento dessas informações, é dito que o jogo é de informações perfeitas, caso contrário, se não for de conhecimento alguma informação para algum jogador, será um jogo de informações imperfeitas.

## 2.4 Escolhendo a melhor estratégia

As melhores soluções para um jogador são as opções que proporcionam maiores ganhos ou, se necessário as menores perdas. Porém a escolha dessa estratégia de maior valor de ganho, pode não ser a melhor em relação as possíveis estratégias a serem escolhidas pelos demais jogadores. Para isso vamos definir duas estratégias básicas: as estratégias dominantes e o equilíbrio de Nash, que levam um jogador a melhor ou as melhores decisões que resultem em um resultado equilibrado, porém, durante um jogo estratégico nem sempre existe uma decisão que leva o jogador ao seu maior ganho.

### 2.4.1 Dominância ou Estratégia dominante

A estratégia dominante acontece quando um jogador possui a melhor estratégia, pois independente das estratégias escolhidas pelos outros jogadores não afeta o ganho.

Em termos matemáticos temos a seguinte definição para estratégia dominante:

Seja $s_{-i}$ uma escolha de estratégia para todos os jogadores menos o jogador $g_i$ onde:

$$\mathrm{s_{-i}} = \left(\mathrm{s_{1_{j_1}}}, \dots, \mathrm{s_{(i-1)_{j_{i-1}}}}, \mathrm{s_{(i+1)_{j_{i+1}}}}, \dots, \mathrm{s_{n_{j_n}}}\right) \in \mathrm{S_{-i}} = \mathrm{S_1} \times \dots \times \mathrm{S_{i-1}} \times \mathrm{S_{i+1}} \times \dots \times \mathrm{S_n}$$

Daí temos que:

**Definição:** Uma estratégia pura $s_{ik} \in S_i$ do jogador $g_i \in G$ é estritamente dominada pela estratégia $s_{ik'} \in S_i$ se

$$u_i(s_{ik'}, s_{-i}) > u_i(s_{ik}, s_{-i}),$$

para todo $s_{-i} \in S_{-i}$. A estratégia $s_{ik} \in S_i$ é fracamente dominada pela estratégia $s_{ik'} \in S_i$ se $u_i(s_{ik'}, s_{-i}) \geq u_i(s_{ik}, s_{-i})$, para todo $s_{-i} \in S_{-i}$. Desta maneira um perfil de estratégia pode ser denotado por

$$s = \left(s_{i_{j_i}}, s_{-i}\right) = \left(s_{1_{j_1}}, \dots, s_{(i-1)_{j_{i-1}}}, s_{i_{j_i}}, s_{(i+1)_{j_{i+1}}}, \dots, s_{n_{j_n}}\right)$$

Um exemplo de estratégia dominante é o jogo da publicidade em que ocorre a seguinte situação:

**Exemplo 3**: Considere duas instituições de ensino, o Colégio A e o Colégio B, com 300 e 100 alunos respectivamente, situados na mesma região e que competem entre si na captação de 400 alunos de uma região. Para isso devem decidir se é vantajoso ou não, investir em propagandas que possam aumentar o número de matrículas e assim, aumentando seus lucros. A partir dessa situação podemos imaginar as seguintes possibilidades:

1ª possibilidade: Um dos colégios decide investir em publicidade e o outro não;

2ª possibilidade: Nenhum dos colégios investirem em publicidade e;

3ª possibilidade: Ambos os colégios investem simultaneamente em publicidade.

Analisando as possibilidades de decisões de ambas as instituições temos o conjunto dos jogadores $G = \{A, B\}$ de forma que A representa o colégio A e B representando o colégio B. O Colégio A com seu conjunto de estratégias puras $A = \{investir, nãoinvestir\}$ e o Colégio B com o conjunto de estratégias puras $B = \{investir, nãoinvestir\}$. Assim temos o espaço de estratégias puras: $S = A \times B = \{(investir, investir),\ (investir, nãoinvestir),\ (nãoinvestir, investir),\ (nãoinvestir, nãoinvestir)\}$. As funções utilidades de cada uma das instituições são:

$$u_A: S \longrightarrow R \text{ e } u_B: S \longrightarrow R,$$

representadas por $u_A(investir, investir) = 500$; $u_A(investir, nãoinvestir) = 600$; $u_A(nãoinvestir, investir) = 400$; $u_A(nãoinvestir, nãoinvestir) = 400$ os ganhos do Colégio A e $u_B(investir, investir) = 300$; $u_B(investir, nãoinvestir) = 200$; $u_B(nãoinvestir, investir) = 400$; $u_B(nãoinvestir, nãoinvestir) = 200$ os ganhos do Colégio B. Daí podemos estruturar a seguinte matriz de payoffs:

Tabela 3: Payoffs – jogo da publicidade

| | | Colégio B | |
|---|---|---|---|
| | | Investir | Não investir |
| Colégio A | Investir | (500,300) | (600,200) |
| | Não investir | (400,400) | (400,200) |

Os valores da matriz de payoffs são atribuídos ao número de alunos que podem ser matriculados conforme as decisões tomadas. O ganho de alunos aumenta ou diminui de acordo com os investimentos feitos.

Podemos observar na matriz de payoffs que se o Colégio A optar em não investir na publicidade obterá os menores números de matrículas, assim se o Colégio B optar em investir na publicidade, terá a possibilidade de igualar o número de matrículas e ambos possuirão o mesmo número de alunos. Porém, mesmo se o Colégio A decidir investir, existe a possibilidade de não alcançar seu número máximo de matrículas que seria de 600 alunos, pois o Colégio B poderia optar em também investir.

Por outro lado, se o Colégio B decidir não investir teria seus menores números de matrículas e seus piores resultados pois o Colégio A teria sempre resultados expressivamente maiores, mas, se optar em investir, pode chegar a um número de alunos pouco menor ou até igual em relação ao Colégio A.

Utilizando as matrizes e eliminando as estratégias dominadas, podemos representar da seguinte forma:

1° Analisando os ganhos do colégio B podemos observar que a estratégia não investir é estritamente dominada pela estratégia investir, logo, eliminamos a segunda coluna de ganhos da matriz;

Tabela 4: Payoffs – jogo da publicidade – eliminando estratégias dominadas 1

| | | |
|---|---|---|
| | | Investir |
| A | Investir | (500,300) |
| | Não investir | (400,400) |

2° Após a eliminação, podemos observar que para o colégio A o ganho com a estratégia investir é maior que o ganho com a estratégia não investir, dessa forma eliminando a segunda linha da matriz e assim obtendo a estratégia dominante do jogo.

Tabela 5: Payoffs – jogo da publicidade – eliminando estratégias dominadas 2

| | | |
|---|---|---|
| | | B |
| | | Investir |
| A | Investir | (500,300) |

Após analisar as possibilidades de decisão de cada um das instituições e eliminar cada uma das estratégias estritamente dominadas em cada caso, podemos concluir que a estratégia dominante é investir para ambas as instituições, pois caso uma das instituições decida não investir ficará dependendo da decisão do outro e não garantirá seu melhor resultado na interação.

### 2.4.2 Equilíbrio de Nash

Um conjunto de estratégias é chamado Equilíbrio de Nash quando todos os jogadores possuem uma estratégia em que é considerada sua melhor decisão em relação as decisões tomadas todos os demais jogadores. Dessa forma, existirá um conjunto de estratégias que levará todos os participantes da interação ao melhor resultado e assim equilibrando os ganhos de forma que todos possam ganhar ou, ao menos, minimizar suas perdas.

Com a existência de uma melhor estratégia, não importa se algum jogador pensar em mudar sua estratégia, pois ainda sim o equilíbrio garante que manter a estratégia que leva ao equilíbrio garantirá o melhor resultado.

Em termos matemáticos temos a seguinte definição para Equilíbrio de Nash:

**Definição**: Dizemos que um perfil de estratégia $s^* = \left(s_1^*, \dots, s_{(i-1)}^*, s_i^*, s_{(i+1)}^*, \dots, s_n^*\right) \in S$ é um equilíbrio de Nash se

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i\left(s_{i_{j_i}}, s_{-i}^*\right)$$

para todo $i = 1,2, \dots, n$ e para todo $j_i = 1, \dots, m_i$, com $m_i \geq 2$.

Para modelar uma aplicação do Equilíbrio de Nash, vamos analisar o seguinte exemplo clássico utilizado na teoria dos jogos chamado: "Dilema do prisioneiro". A interação é uma das mais conhecido de teoria dos jogos, proposta por Albert W. Tucker em 1950, onde apresentou num seminário na Universidade de Stanford com o intuito de mostrar que analisar alguns jogos pode ser uma tarefa complexa.

Na situação dois ladrões Al e Bob são presos e acusados do mesmo crime. São colocados em selas separadas e sem nenhuma possibilidade de comunicação entre ambos. O delegado faz a mesma proposta a ambos na qual diz: cada um pode optar por negar ou confessar o crime, porém, se ambos confessarem cumprirão uma pena de 5 anos. Caso ambos não confessem cada um cumprirá apenas 1 ano de prisão. Mas se um confessar e o outro negar, o que confessou será libertado e o outro que não confessou cumprirá uma sentença de 10 anos.

Analisando a situação podemos montar o seguinte modelo de jogo: o conjunto de jogadores $G = \{Al, Bob\}$, cada uma com as seguintes estratégias puras, $S_{Al} = \{confessar, negar\}$ e $S_{Bob} = \{confessar, negar\}$ gerando o conjunto de estratégias puras S={(confessar,confessar),(confessar,negar),(negar,confessar),(negar,negar)}. As duas funções utilidades:

$$u_{Al}: S \longrightarrow R \quad \text{e} \quad u_{Bob}: S \longrightarrow R$$

são dadas por

$u_{Al}(confessar, confessar) = -5$, $u_{Al}(confessar, negar) = 0$, $u_{Al}(negar, confessar) = -10$, $u_{Al}(negar, negar) = -1$, representando os ganhos do Al e $u_{Bob}(confessar, confessar) = -5$,$u_{Bob}(confessar, negar) = -10$, $u_{Bob}(negar, confessar) = 0$, $u_{Bob}(negar, negar) = -1$, representando os ganhos do Bob. Daí podemos representar a matriz de ganhos:

Tabela 6: Payoffs – Dilema do prisioneiro

| | | Bob | |
|---|---|---|---|
| | | Confessar | Negar |
| Al | Confessar | (-5,-5) | (0,-10) |
| | Negar | (-10,0) | (-1,-1) |

Na matriz de payoffs, os números negativos representam o tempo em que ficarão presos de acordo com cada escolha. Dessa forma, é evidente que os Al e Bob busquem resultados mais próximos de zero, garantindo sua liberdade o mais breve possível.

Analisando a matriz podemos ver que existe um perfil que garantiria o melhor resultado para ambos os prisioneiros, onde ambos negariam seus crimes, porém se um dos prisioneiros confessar o crime e o outro negar, o que negou pegará 10 anos de prisão e o que confessou sairá livre. Logo confessar é a melhor estratégia a ser escolhida.

No próximo capítulo será detalhado cada uma das escolhas a serem analisadas por ambos os acusados.

# 3 IMPORTÂNCIA DA APLICAÇÃO DA TEORIA DOS JOGOS EM SALA DE AULA

Neste capítulo iremos discutir o quão interessante pode ser apresentar, mesmo de forma rudimentar, os conceitos da Teoria dos Jogos no Ensino Médio. Para isso iremos elaborar duas atividades que poderão ser ministradas em aulas extras (sem comprometer o ensino do conteúdo de matemática do ano letivo), estas atividades serão inspiradas no Dilema do Prisioneiro (nada mais é que A Delação Premiada tão comentada nos dias atuais) e a outra atividade será a Batalha de Bismarck (famoso problema da Segunda Guerra Mundial e que pode ser adaptado para jogos como Batalha Naval).

## 3.1 Importância do estudo da teoria dos jogos no ensino médio

O ensino médio é um estágio da aprendizagem importantíssimo para o desenvolvimento e aprimoramento de um pensamento lógico. É nele onde os alunos deverão ter contato com uma educação mais dinâmica e inovadora, tornando-se parte atuante num processo de emancipação do conhecimento e livrando-se do pensamento metódico, memorização de fórmulas e adquirindo um pensamento crítico. Segundo o PCNEM:

> “Propõe-se, no nível do Ensino Médio, a formação geral, em oposição à formação específica; o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização.” (BRASIL, 2000, p.5)

Através da Teoria dos jogos, é possível perceber a importância do raciocínio lógico dedutivo atuando em situações de interações entre indivíduos ou instituições que, aparentemente seriam consideradas instintivas ou sem fundamentos matemáticos específicos.

Conhecendo conceitos básicos de jogos, o aluno desenvolve a capacidade de tomar conhecimento de todas as informações possíveis para que sua decisão seja precisa, organizar os dados de forma estratégica, afim de obter conclusões a partir de estratégias matemáticas que darão exatidão aos resultados.

> Ao se estabelecer um primeiro conjunto de parâmetros para a organização do ensino de Matemática no Ensino Médio, pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional. Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional. (BRASIL, 2000, p.40)

A teoria dos jogos mostra ao aluno do ensino médio que a matemática vai muito além de conceitos que precisão ser decorados e aplicados apenas no ambiente escolar, para modelar algumas interações é preciso interpretar as informações e representar de acordo com as estratégias propostas para obtenção de resultados.

Apresentar um conceito novo e diferente nas séries finais do ensino médio pode ajudar a compreender o mundo em que a matemática atua como uma ciência, quantificando situações de escolhas.

O PCN+ apresenta como um dos objetivos da educação básica no ensino médio:

> Adquirir uma compreensão do mundo da qual a Matemática é parte integrante, através dos problemas que ela consegue resolver e dos fenômenos que podem ser descritos por meio de seus modelos e representações. (BRASIL, 2002, p. 117)

Aprender a coletar, organizar, modelar, apresentar as soluções e interpretar os resultados e tomar a melhor decisão, assim a teoria dos jogos tem condições de contribuir para a construção do aluno que futuramente será um cidadão, responsável por suas decisões e de sua sociedade.

### 3.2 Aplicação em sala de aula: Tomada de decisões

Agora que o dilema do prisioneiro foi apresentado no item 2.4.2, vamos solucioná-lo utilizando os conceitos apresentados no mesmo.

Observando a matriz de payoffs apresentada no exemplo dilema do prisioneiro, temos as seguintes possíveis decisões a serem tomadas:

1° Um deles confessa e o outro nega;

2° Os dois acusados negam o crime;

3° Ambos os acusados confessam o crime.

A primeira opção como resultado seria perfeita para apenas um dos acusados, visando reduzir suas penas ao máximo. Suponha que Al negue o crime acreditando que Bob também tomará a mesma decisão, mas caso Bob pense em si mesmo e opte em confessar, Al pagará 10 anos de prisão e Bob sairá livre. Caso contrário, Al confesse e Bob negue as acusações, confiando que Al também negará, Bob será condenado a 10 anos de prisão e Al fica livre da prisão.

Dessa forma podemos observar que negar não é a melhor decisão, já que para obter o melhor resultado um terá que confiar no outro cegamente e não garantindo seu menor tempo de prisão.

No segundo caso, ambos poderiam negar as acusações, mas as decisões não seriam feitas de forma racional, isto é, sem levar em conta sentimentos, afetos ou ideias, fazendo com que a incerteza resultasse em um possível aumento da pena.

Porém no terceiro resultado fica claro que confessar é a melhor escolha para ambos, se Al confessar o crime garantirá que mesmo Bob também confessando, não seja punido da pior forma possível, pagando apenas 5 anos de prisão. De forma análoga, Bob optando por confessar o crime garantirá uma punição menos grave e garantindo o melhor resultado possível.

Matematicamente, vamos analisar de forma mais clara a matriz de payoffs e utilizar o símbolo "■" para representar a escolha a feita por um dos jogadores durante análise de cada uma das possibilidades:

1° Para cada uma das escolhas de Al será escolhida como melhores as seguintes escolhas de Bob, caso Al confesse, Bob terá como melhor escolha confessar também e se Al negar ainda será melhor para Bob continuar confessando, ou seja;

Tabela 7: Payoffs – Dilema do prisioneiro – decisões de Al

| | | Bob | |
|---|---|---|---|
| | | Confessar | Negar |
| Al | Confessar | (-5,-5) ■ | (0,-10) |
| | Negar | (-10,0)■ | (-1,-1) |

2° Analogamente, caso Bob confesse, Al terá como melhor escolha confessar também e se Bob negar ainda será melhor para Al continuar confessando, ou seja;

Tabela 8: Payoffs – Dilema do prisioneiro – decisões de Bob

| | | Bob | |
|---|---|---|---|
| | | Confessar | Negar |
| Al | Confessar | ■(-5,-5) | ■(0,-10) |
| | Negar | (-10,0) | (-1,-1) |

Podemos ver que ambos confessarem é de fato a melhor decisão a ser tomada pelos jogadores, garantindo assim o melhor resultado diante de todas as decisões que o oponente possa tomar.

Tabela 9: Payoffs – Dilema do prisioneiro – Equilibrio de Nash

| | | Bob | |
|---|---|---|---|
| | | Confessar | Negar |
| Al | Confessar | ■(-5,-5) ■ | ■(0,-10) |
| | Negar | (-10,0)■ | (-1,-1) |

Portanto, o perfil (confessar, confessar) representa o equilíbrio de Nash nessa interação.

## 3.3 Atividade 1: Dilema da "cola"

Numa prova, o professor verificou que os alunos Alberto e Bruno, fizeram todas as questões exatamente iguais, inclusive apresentando os mesmos erros. O professor encaminhou o caso ao diretor da escola e este chamou os dois alunos para se apresentarem em salas diferentes, não havendo qualquer contato entre eles, para evitar qualquer tipo de acordo prévio no momento em que fossem indagados sobre a situação ocorrida.

Foi proposto aos alunos que se nenhum dos dois confessarem a cola, terão suas provas zeradas, se ambos confessarem poderão refazer a prova. Porém se um confessar e o outro não, quem confessar terá uma nova oportunidade e o outro será reprovado na disciplina.

Após montada a tabela de payoffs responda os itens abaixo:

Tabela 10: Payoffs – Dilema da "Cola"

| | | Bruno | |
|---|---|---|---|
| Alberto | | Confessar | Negar |
| | Confessar | (10,10) | (10,-10) |
| | Negar | (-10,10) | (0,0) |

Nesse caso o resultado -10 representa a reprovação do aluno, 0 representa a nota atribuída ao ser zerada a prova e 10 a chance de uma nova prova tendo a possibilidade de uma pontuação entre 0 e 10.

Item 1: Qual é o conjunto G de jogadores?

___________________________________________________________________

Item 2: Qual é o perfil de estratégias $S_{Alberto}$ de Alberto?

______________________________________________________________

Item 3: Qual é o perfil de estratégias $S_{Bruno}$ de Bruno?

______________________________________________________________

Item 4: Qual é o espaço de estratégias puras $S$ com todas as possibilidades?

______________________________________________________________

______________________________________________________________

Item 5: Complete as funções utilidades de Alberto e Bruno abaixo:

$u_{Alberto}$(________, ________) = __ $u_{Bruno}$(________, ________) = __

$u_{Alberto}$(________, ________) = __ $u_{Bruno}$(________, ________) = __

$u_{Alberto}$(________, ________) = __ $u_{Bruno}$(________, ________) = __

$u_{Alberto}$(________, ________) = __ $u_{Bruno}$(________, ________) = __

Item 6: Existe uma estratégia dominante nesse jogo? Justifique.

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

Item 7: Existe um equilíbrio de Nash nesse jogo? Justifique.

__________________________________________________________________

__________________________________________________________________

## 3.4 Atividade 2: Resolvendo a Batalha de Bismarck

Após apresentada a situação envolvendo a Batalha de Bismarck e sua matriz de payoffs abaixo, vamos utilizar as estratégias apresentadas para responder os itens abaixo:

Tabela 11: Payoffs – Resolvendo a Batalha de Bismarck

| | | Comboio japonês | |
|---|---|---|---|
| | | Rota Sul no primeiro dia | Rota Norte no primeiro dia |
| Frotas aliadas | Rota Sul no primeiro dia | (3,-3) | (1,-1) |
| | Rota Norte no primeiro dia | (2,-2) | (2,-2) |

Item 1: Qual é o conjunto G de jogadores?

____________________________________________________________

Item 2: Qual é o perfil de estratégias $S_J$ do comboio japonês?

____________________________________________________________

____________________________________________________________

Item 3: Qual é o perfil de estratégias $S_F$ das forças aliadas?

____________________________________________________________

____________________________________________________________

Item 4: Qual é o espaço de estratégias puras $S$ com todas as possibilidades?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

Item 5: Complete as funções utilidades de Alberto e Bruno abaixo:

$u_J($_________, _________$) =$ __ $u_F($_________, _________$) =$ __

$u_J($_________, _________$) =$ __ $u_F($_________, _________$) =$ __

$u_J($_________, _________$) =$ __ $u_F($_________, _________$) =$ __

$u_J($_________, _________$) =$ __ $u_F($_________, _________$) =$ __

Item 6: Verifique se existe uma estratégia estritamente dominante.

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

Item 7: Existe um equilíbrio de Nash nesse jogo? Justifique.

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

# 4 SOLUÇÃO DAS ATIVIDADES

## 4.1 Solução da atividade 1: Dilema da "cola"

Item 1: Qual é o conjunto G de jogadores?

Resposta:

O conjunto de jogadores é $G = \{Alberto, Bruno\}$

Item 2: Qual é o perfil de estratégias $S_{Alberto}$ de Alberto?

Resposta:

O perfil de Alberto é dado pelo conjunto $S_{Alberto} = \{confessar, negar\}$

Item 3: Qual é o perfil de estratégias $S_{Bruno}$ de Bruno?

Resposta:

O perfil de Bruno é dado pelo conjunto $S_{Bruno} = \{confessar, negar\}$

Item 4: Qual é o espaço de estratégias puras $S$ com todas as possibilidades?
Resposta:

O conjunto de estratégias puras é dado pelo conjunto S={(confessar,confessar),(confessar,negar),(negar,confessar),(negar,negar)}

Item 5: Complete as funções utilidades de Alberto e Bruno abaixo:

$u_{Alberto}(confessar, confessar) = 10$ $u_{Bruno}(confessar, confessar) = 10$

$u_{Alberto}(confessar, negar) = 10$ $u_{Bruno}(confessar, negar) = -10$

$u_{Alberto}(negar, confessar) = -10$ $\quad$ $u_{Bruno}(negar, confessar) = 10$

$u_{Alberto}(negar, negar) = 0$ $\quad$ $u_{Bruno}(negar, negar) = 0$

Item 6: Existe uma estratégia estritamente dominante nesse jogo? Justifique.

Resposta:

Para Bruno a estratégia negar é estritamente dominada pela estratégia confessar, fazendo Bruno obter maiores payoffs e a estratégia negar para Alberto é estritamente dominada pela estratégia confessar, assim obtendo seus maiores payoffs. Dessa forma confessar é uma estratégia dominante para ambos os alunos. Na matriz de payoffs temos:

1° Para Bruno a estratégia Negar é estritamente dominada pela estratégia Confessar por obter payoffs maiores;

Tabela 12: Payoffs – Dilema da “cola” – eliminando estratégias dominadas 1

| | | Bruno |
|---|---|---|
| | | Confessar |
| Alberto | Confessar | (10,10) |
| | Negar | (-10,10) |

2° Para Alberto após a eliminação da segunda coluna sua melhor estratégia ocorre se ele confessar, logo a estratégia Negar é estritamente dominada pela estratégia Confessar, sendo assim, a estratégia dominante é ambos confessarem.

Tabela 13: Payoffs – Dilema da “cola” – eliminando estratégias dominadas 2

| | | Bruno |
|---|---|---|
| Alberto | | Confessar |
| | Confessar | (10,10) |

Item 7: Existe um equilíbrio de Nash nesse jogo? Justifique.

Resposta:

Supondo que Alberto negue a participação na cola, para Bruno a melhor estratégia seria confessar pois dessa forma garante seu melhor ganho. Mesmo que confesse, Bruno obtém seu melhor resultado confessando. Analisando de forma análoga, se Bruno decidir negar o ocorrido, Alberto alcança seu melhor ganho confessando a cola. Mesmo se Bruno optar em confessar a cola, Alberto obtém seu melhor resultado confessando a infração. Portanto ambos confessarem é o equilíbrio de Nash nessa interação. Utilizando a matriz de payoffs temos:

1° Se Alberto confesse ou não, para Bruno a melhor opção é confessar, caso contrário Bruno confessando ou Negando a melhor decisão para Alberto é Confessar;

Tabela 14: Payoffs – Dilema da “cola” – Equilíbrio de Nash

| | | Bruno | |
|---|---|---|---|
| Alberto | | Confessar | Negar |
| | Confessar | ■(10,10)■ | ■(10,-10) |
| | Negar | (-10,10)■ | (0,0) |

Portanto ambos confessarem representa o equilíbrio de Nash.

## 4.2 Solução da atividade 2: Batalha de Bismarck

Item 1: Qual é o conjunto G de jogadores?

Resposta:

O conjunto de jogadores é $G = \{F, J\}$ onde F representa as forças aliadas e J representa o comboio japonês.

Item 2: Qual é o perfil de estratégias $S_J$ das forças aliadas?

Resposta:

O perfil das forças aliadas é dado pelo conjunto $S_F = \{Sul, Norte\}$

Item 3: Qual é o perfil de estratégias $S_J$ do comboio japonês?

Resposta:

O perfil do comboio japonês é dado pelo conjunto $S_J = \{Sul, Norte\}$

Item 4: Qual é o espaço de estratégias puras $S$ com todas as possibilidades? Resposta:

O espaço de estratégias puras é dado pelo conjunto

$$S = \{(Sul, Sul), (Sul, Norte), (Norte, Sul), (Norte, Norte)\}$$

Item 5: Complete as funções utilidades referentes as forças aliadas e ao comboio japonês abaixo:

$u_F(Sul, Sul) = 3$ $\quad$ $u_J(Sul, Sul) = -3$

$u_F(Sul, Norte) = 2$ $u_J(Sul, Norte) = -2$

$u_F(Norte, Sul) = 1$ $u_J(Norte, Sul) = -1$

$u_F(Norte, Norte) = 2$ $u_J(Norte, Norte) = -2$

Item 6: Existe uma estratégia dominante nesse jogo? Justifique.

Resposta:

Utilizando a estratégia de eliminação das estratégias dominadas temos:

1° Para o comboio japonês a estratégia Rota Sul é estritamente dominada pela estratégia Rota Norte, assim, eliminando a estratégia iniciar pela Rota Sul do comboio japonês temos;

Tabela 15: Payoffs – Batalha de Bismarck – eliminando estratégias dominadas 1

| | | Comboio japonês |
|---|---|---|
| | | Rota Norte no primeiro dia |
| Frotas aliadas | Rota Sul no primeiro dia | (1,-1) |
| | Rota Norte no primeiro dia | (2,-2) |

2° Após a eliminação da segunda coluna, a estratégia Rota Sul é estritamente dominada pela estratégia Rota Norte, assim, eliminando a estratégia iniciar pela Rota Sul das frotas aliadas temos;

Tabela 16: Payoffs – Batalha de Bismarck – eliminando estratégias dominadas 2

| | | Comboio japonês |
|---|---|---|
| | | Rota Norte no primeiro dia |
| Frotas aliadas | Rota Norte no primeiro dia | (2,-2) |

Item 7: Existe um equilíbrio de Nash nesse jogo? Justifique.

Resposta:

Supondo que as forças aliadas decidam começar pela Rota Sul, para o comboio japonês a melhor decisão é ir pela Rota Norte, caso as forças aliadas comecem pela Rota Norte é indiferente para o comboio japonês que será bombardeado a mesma quantidade de dias. Agora suponha que o comboio japonês decida iniciar pela Rota Sul, a melhor estratégia para as forças aliadas seria também seguir pela rota sul, porém, se o comboio japonês começasse pela Rota Norte a melhor decisão para as forças aliadas seria também iniciar pela Rota Norte, daí temos a seguinte analise da matriz de payoffs:

Tabela 17: Payoffs – Batalha de Bismarck – Equilíbrio de Nash

| | | Comboio japonês | |
|---|---|---|---|
| | | Rota Sul no primeiro dia | Rota Norte no primeiro dia |
| Frotas aliadas | Rota Sul no primeiro dia | ■(3,-3) | (1,-1)■ |
| | Rota Norte no primeiro dia | (2,-2)■ | ■(2,-2)■ |

Portanto a estratégia ir pela Rota Norte é o equilíbrio de Nash nessa interação.

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base na proposta apresentada neste trabalho, esperamos conseguir contribuir para a construção do pensamento lógico e racional dos alunos, mostrando a importância da matemática como ferramenta fundamental na tomada de decisões que podem ocorrer no cotidiano e em qualquer etapa de suas vidas.

Utilizando as atividades na sequência formada na pesquisa, foram apresentados o dilema do prisioneiro, atualmente sendo aplicado na delação premiada e a batalha de Bismarck, podendo ser trabalhada tanto no 2° quanto no 3° ano do ensino médio.

Somos levados a acreditar que com a aplicação dessa atividade, possa ser despertada uma motivação nos alunos e o interesse em aprender outros conceitos, a fim de que possam aumentar o interesse pela matemática e entender que, os conteúdos aprendidos no ensino médio os levem a desenvolver, mesmo que indiretamente, seu modo de lidar com suas decisões.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] A. A. Cournot, **Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses**, 1838. Traduzido por N. T. Bacon em Researches into the Mathematical Principles of the Theoty of Wealth, McMillan, New York, 1927.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC, 2000.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) – Ciências da Natureza e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2002.

[4] E. ZERMELO, **Über eine Anwendung der Mengdenlehre auf die theories des Schachspiels**. Atas do décimo Quinto Congresso Internacional de Matemáticos, vol. 2, pp. 501-504, 1913.

[5] FIANI, R. **Teoria dos Jogos**, 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

[6] J. VON NEUMANN e O. MORGENSTERN, **Theory of Games and Economic Behavior**. Princeton University Press, 1944.

[7] LIMA, ELON LAGES, **Matemática e Ensino**, 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[8] PEREIRA, S. B. **Introdução à Teoria dos Jogos e a Matemática no Ensino Médio**. 2014. 68 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014

[9] SARTINI, A.B.; GARBUGGIO, G.; BORTOLOSSI, H.J.; SANTOS, P.A.; BARRETO, L.S. Uma Introdução a Teoria dos Jogos. In: II Bienal da SBM, 2004, Salvador. **Anais...** Salvador: UFBA, 2004, p. 1-61.