

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

Luiz Arthur Dornelles Júnior

**CÁLCULO VARIACIONAL EM MECÂNICA ANALÍTICA
E TEOREMA DE LIOUVILLE**

Florianópolis

2018

Luiz Arthur Dornelles Júnior

**CÁLCULO VARIACIONAL EM MECÂNICA ANALÍTICA
E TEOREMA DE LIOUVILLE**

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática com área de concentração PROFMAT-UFSC associado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Orientador: Prof.Dr. Abdelmouline Amar Henni

Florianópolis

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Dornelles Júnior, Luiz Arthur
Cálculo Variacional em Mecânica Analítica e
Teorema de Liouville / Luiz Arthur Dornelles Júnior
; orientador, Abdelmoubine Amar Henni, 2018.
111 p.

Dissertação (mestrado profissional) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de
Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-
Graduação em Matemática Pura e Aplicada,
Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Mecânica
Analítica. 3. Teorema de Liouville. 4. cálculo
variacional. 5. Geometria simplética. I. Amar
Henni, Abdelmoubine. II. Universidade Federal de
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

**CÁLCULO VARIACIONAL EM MECÂNICA ANALÍTICA
E TEOREMA DE LIOUVILLE**

**por
Luiz Arthur Dornelles Jr**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática.

Prof.Dr. Celso Melchiades Doria
Coordenador do Curso

Banca Examinadora

Prof.Dr. Abdelmoubine Amar Henni
UFSC
Orientador

Prof.Dr. Fabiano Carlos Cidral
IFSC

Prof^a.Dr^a. Maria Inez Cardoso Gonçalves
UFSC

Prof.Dr. Ivan Pontual Costa e Silva
UFSC

Florianópolis, 22 de novembro 2018.

Aos meus filhos e minha esposa, a Edgar Hernades Cândia (Vô Diga), ao meu irmão José Antônio B. M. Mano e, em especial, à minha mãe, Profa. Dra. Heloisa Martins Mano Dornelles (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

Aos meus amigos/irmãos do IFSC que não mediram esforços para que eu pudesse levar adiante meu sonho de cursar o Profmat

Ao Clube dos Cinco, Miguel, Jomar, Anônio e Samir, que sempre estiveram ao meu lado e que sempre me apoiaram.

A todos meus colegas de curso, que lutaram juntos, desde o início e que formaram uma grande equipe e família.

Aos professores do curso, em especial à professora Maria Inez e ao professor Celso

Ao professor Amar, meu orientador e amigo.

Aos membros da banca por sua boa vontade e sugestões.

Aos amigos Eduardo (os dois) e, em especial, ao Airton Silva (*in memoriam*), saudoso amigo.

A CAPES pelo apoio que a mesma dispensa ao Profmat e dispensou a mim.

A SBM, IMPA e UFSC pela iniciativa na realização do Profmat e ao apoio na capacitação de professores de Matemática no Brasil.

A mente que se abre a uma nova ideia,
jamais volta ao seu tamanho original.

Albert Einstein

RESUMO

Em áreas como Geometria, Física em geral e Mecânica Analítica em particular, surgem uma ampla gama de exemplos e aplicações, culminando no que é conhecido como Geometria Simplética. Neste trabalho, exploramos como construir um modelo matemático da Mecânica Clássica usando o princípio variacional que leva ao formalismo Lagrangeano e Hamiltoniano. Finalmente estudamos o Teorema de Liouville sobre o volume invariante de regiões do espaço de fase sob algumas restrições.

Palavras-chave: Mecânica Analítica, equações diferenciais, cálculo variacional, Teorema de Liouville

ABSTRACT

In areas such Geometry, Physics in general and Analytical Mechanics in particular, there arise a wide range of examples and applications, culminating in what is know as Symplectic Geometry. In this work, we explore how to construct a mathematical model of Classical Mechanics by using the variational principle this leads to the Lagrangian and Hamiltonian formalisms. Finally we study the Liouville theorem about invariant volume of regions of the phase space under some restrictions.

Keywords: Analytical Mechanics, Differential Equations, Variational Calculus, Liouville's Theorem

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Trajectoria de uma partícula	23
Figura 2	Vínculo $f(x, y, z) = 0$	30
Figura 3	Moeda em um plano horizontal	31
Figura 4	Máquina de Atwood	31
Figura 5	Pêndulo simples plano	32
Figura 6	Forças que atuam no pêndulo simples	33
Figura 7	Máquina de Atwood	34
Figura 8	Pêndulo duplo acoplado por mola	35
Figura 9	Força restauradora da mola	37
Figura 10	Forças que atuam no pêndulo duplo	38
Figura 11	Possíveis movimentos dos pêndulos acoplados	40
Figura 12	Pêndulo duplo acoplado	42
Figura 13	Variação de uma curva	44
Figura 14	Construção da função h	46
Figura 15	Menor caminho	49
Figura 16	Construção da transformação de Legendre	56
Figura 17	Involutividade da transformação de Legendre	58
Figura 18	Fluxo de Fase	81
Figura 19	Conservação do volume	84
Figura 20	Teorema de Recorrência de Poincaré	86
Figura 21	Paradoxo do Teorema de Poincaré	87
Figura 22	Função convexa no \mathbb{R}^2	106

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	PRINCÍPIOS BÁSICOS DA MECÂNICA ANALÍTICA E O FORMALISMO DE NEWTON	23
2.1	POSIÇÃO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO	23
2.2	LEIS DO MOVIMENTO DE NEWTON	24
2.3	AS EQUAÇÕES DE NEWTON	25
2.4	CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E TRABALHO	26
2.5	SISTEMAS SUJEITOS A VÍNCULOS	29
2.6	APLICAÇÕES DO FORMALISMO DE NEWTON	32
3	PRINCÍPIOS VARIACIONAIS, A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE E AS EQUAÇÕES DE HAMILTON	41
3.1	COORDENADAS GENERALIZADAS E ESPAÇO DE CONFIGURAÇÃO	41
3.2	PRINCÍPIOS VARIACIONAIS E EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE	43
3.2.1	Funcionais e o cálculo variacional	43
3.2.2	Equação de Euler-Lagrange	49
3.2.3	Princípio da Ação Mínima de Hamilton e as equações de Euler-Lagrange	50
3.3	APLICAÇÕES DO FORMALISMO DE LAGRANGE ...	51
3.4	TRANSFORMAÇÃO DE LEGENDRE	55
3.4.1	Involutividade	57
3.4.2	Transformação de Legendre para mais de uma variável ...	59
3.5	AS EQUAÇÕES DE HAMILTON	62
3.5.1	A Função Hamiltoniana e a Energia Total	64
3.5.2	Coordenadas cíclicas	65
3.6	APLICAÇÕES DO FORMALISMO DE HAMILTON ...	67
4	O TEOREMA DE LIOUVILLE E A CONSERVAÇÃO DE VOLUME	73
4.1	AS EQUAÇÕES DE HAMILTON PELO PRINCÍPIO VARIACIONAL	73
4.2	TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS	74
4.2.1	Mudança de Variáveis no formalismo Hamiltoniano	75
4.2.2	Funções Geradoras	75
4.3	TEOREMA DE LIOUVILLE	80
4.4	APLICAÇÕES DO TEOREMA DE LIOUVILLE	85

5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
	Referências	91
	APÊNDICE A - Apêndice A	95
	APÊNDICE B - Apêndice B	103

1 INTRODUÇÃO

Os modelos matemáticos que surgem na Física e, mais precisamente na Mecânica Analítica, representam uma fonte abundante de exemplos para a construção de modelos geométricos e analíticos para descrever sistemas físicos.

Além disso, como motivação para este trabalho, podemos citar a associação entre a Física e a Matemática que, além de fomentar a formação e especialização de professores, disponibiliza ferramentas para uso em sala de aula e, ainda, proporciona interação entre diferentes componentes curriculares.

A geometrização na formalização da Mecânica é de grande importância para a construção da Geometria Simplética, pois, segundo [1]: "*A Geometria Simplética se originou no estudo dos sistemas Hamiltonianos, que descrevem a evolução de sistemas mecânicos de natureza conservativa*", ou ainda, segundo [2], a formulação Hamiltoniana é um caminho para a Mecânica Quântica e para a Mecânica Relativista.

Apresentaremos, neste trabalho, a construção destes modelos segundo os formalismos de Newton, de Lagrange e de Hamilton, comparando e mostrando, que ao passar de um para o outro, nesta ordem, o processo vai se tornando mais sistemático e econômico em termos da matemática envolvida.

Veremos que o formalismo de Newton "... *é basicamente vetorial, e nele o conceito de força desempenha um papel proeminente.*" [3]. Além disto, as equações de movimento para sistemas mecânicos, decorrentes deste formalismo, tem uma dependência mais explícita das forças de vínculo [4]. Estas equações são determinadas por soluções de equações diferenciais de segunda ordem envolvendo um número considerável de variáveis e análise vetorial.

Na construção dos modelos do formalismo de Lagrange [5], para sistemas mecânicos conservativos e sujeitos a vínculos holônomos, veremos que as equações são definidas usando o Cálculo Variacional, mais precisamente, pelo extremo de um funcional da função Lagrangeana, que por sua vez, é dada em termos de coordenadas e velocidades generalizadas (independentes), de onde decorrem as equações de Euler-Lagrange. As coordenadas generalizadas, em comparação com Newton, possibilitam um uso mínimo de coordenadas necessárias. Segundo [3], "... *o ponto de vista Lagrangeano dá mais relevo a uma função escalar.*"

Essas equações formam um sistema de n equações diferenciais de segunda ordem, a partir das quais podemos obter as mesmas equações

do formalismo Newtoniano, diferenciando-se pelo método de obtenção.

O formalismo de Hamilton[5], que descreve o movimento de um sistema mecânico conservativo usando um sistema de equações diferenciais de primeira ordem simétrico, obtido pela transformação de Legendre aplicada a função Lagrangeana. Estas equações são chamadas de equações de Hamilton ou equações canônicas, dadas em termos de coordenadas generalizadas e momentos associados (conjugados) [4].

Veremos que a função de Hamilton, dada sua natureza, pode ser associada à lei de conservação da energia[4, 5].

Poderemos observar que o formalismo Newtoniano é mais concreto e palpável, embora seja mais difícil pelo caráter vetorial, enquanto que, neste sentido, os formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano, de caráter escalar, são mais abstratos, mas abrem um leque de possibilidades maior tornando-os muito mais interessantes e fluidos.

É importante salientar que, neste trabalho, tanto o formalismo de Lagrange quanto o de Hamilton se aplicam para sistemas conservativos, sujeitos a vínculos holônimos. Em geral, para sistemas que não o são conservativos, existem outras técnicas para a obtenção das equações de movimento.

O estudo das equações das dinâmicas Lagrangeana e Hamiltoniana no espaço de fase se justifica, segundo [3], como segue:

- (i) Para a dinâmica Lagrangeana, uma das vantagens é poder determinar as integrais primeiras através das simetrias que eventualmente aparecem na variável q ;
- (ii) Para a dinâmica Hamiltoniana, para um espaço estendido para mais variáveis (q, p) , a princípio, teremos mais liberdade para encontrar as simetrias nestas variáveis, o que pode facilitar encontrar as integrais primeira.

Sendo assim, podemos identificar melhor a evolução temporal das trajetórias do sistema mecânico. Observamos que nem sempre existem essas simetrias, nem integrais primeiras.

Ainda sobre o formalismo Hamiltoniano, veremos que as equações de Hamilton são invariantes sob um determinado tipo de transformação no espaço de fase[3, 5, 6].

Além dessas transformações veremos, pelo Teorema de Liouville, que, em particular, um grupo a um parâmetro de transformações do espaço de fase, chamado de fluxo de fase, aplicado às equações de Hamilton preserva o volume infinitesimal[5].

As mais importantes aplicações desta associação entre o fluxo gerado pelas equações de Hamilton e a preservação de volume, além da

Geometria Simplética, estão no contexto da mecânica estatística e da mecânica quântica [3, 6].

Para tanto, este trabalho foi estruturado como segue:

No Capítulo 2, apresentaremos as definições e as noções básicas da física Newtoniana[7]. Abordaremos suas equações[5] e a lei de conservação da energia[4, 7]. Além disto, mostraremos aplicações à dinâmica, adaptadas de [4, 7].

No Capítulo 3, apresentaremos a definição de coordenadas generalizadas e espaço de configuração [4] e, a seguir, mostraremos como o Cálculo Variacional nos permite determinar as equações de Euler-Lagrange, fundamento do formalismo de Lagrange, o que, por sua vez, permite definir a função Lagrangeana[5]. Num segundo momento, no que diz respeito à dinâmica de Hamilton, vamos ver que a função de Hamilton é dada pela transformação de Legendre aplicada à função de Lagrange, onde formas quadráticas são levadas à formas quadráticas, o que nos proporciona determinar as equações de Hamilton[5]. Ainda temos nesse capítulo alguns exemplos de dinâmicas adaptados de [4, 7].

No capítulo 4, vamos definir as equações de Hamilton usando o princípio variacional[4, 6] para que possamos conhecer as transformações canônicas sobre as equações de Hamilton e mostrar que as mesmas são invariantes sob estas transformações o que é mostrado em uma aplicação [6]. Visto isto, abordaremos o Teorema de Liouville, que mostra, para um grupo a um parâmetro de transformações do espaço de fase, o volume é conservado[4, 5, 8–10]. Mostraremos, como aplicações, a dinâmica do pêndulo simples e o Teorema de Poincaré [6, 11].

2 PRINCÍPIOS BÁSICOS DA MECÂNICA ANALÍTICA E O FORMALISMO DE NEWTON

Neste capítulo veremos que o formalismo de Newton depende, além das coordenadas que definem a posição de uma partícula, de forças como vetores (forças internas, externas e de vínculo) que envolve o cálculo vetorial, tornando sua análise mais complexa, ainda que seja mais direta e intuitiva. As equações de Newton têm a forma de equações diferenciais de segunda ordem em termos de posição, velocidades e tempo.

Primeiro vamos apresentar alguns conceitos básicos da Física, bem como as leis de movimento de Newton (segundo [7, cap. 1]).

2.1 POSIÇÃO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

Consideremos um sistema de eixos coordenados, x , y e z , ortogonais, e, neste sistema, uma partícula desloca-se do ponto A para o ponto B, conforme a Figura 1.

A posição inicial da partícula é dada pelo vetor $\vec{x}(t)$ e a posição final por $\vec{x}(t + \Delta t)$. Logo, o vetor deslocamento é dado por

$$\Delta\vec{x}(t) = \vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t). \quad (2.1)$$

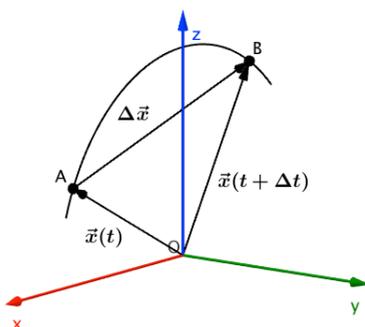


Figura 1 – Trajetória de uma partícula [7]

Com base na equação (2.1) podemos definir algumas grandezas físicas.

Definição 2.1. A velocidade média de uma partícula, em um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ (variação do tempo no intervalo $[t_1, t_2]$), é dada por:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}. \quad (2.2)$$

Definição 2.2. A velocidade instantânea num ponto qualquer da trajetória de uma partícula é dada por:

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}. \quad (2.3)$$

Definição 2.3. A aceleração média de uma partícula, em um intervalo de tempo Δt , é dada por:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad (2.4)$$

sendo $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$ a variação de velocidade entre t e $t + \Delta t$.

Definição 2.4. A aceleração instantânea num ponto qualquer da trajetória de uma partícula é dada por:

$$\ddot{\vec{x}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \ddot{\vec{x}} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}. \quad (2.5)$$

2.2 LEIS DO MOVIMENTO DE NEWTON

A formalização Newtoniana da Mecânica está baseada nas três leis do movimento de Newton, segundo [4, cap.1, seção 1.1]:

Primeira Lei de Newton: Existem sistemas de referência, ditos inerciais, em relação aos quais toda partícula isolada, isto é, sobre a qual não atuam forças, ou está em repouso ou em movimento retilíneo com velocidade constante.

Segunda Lei de Newton: Em qualquer referencial inercial o movimento de uma partícula é regido pela equação:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}, \quad (2.6)$$

sendo:

\vec{a} : aceleração da partícula

m : massa da partícula¹

\vec{F} : força total à qual ela está sujeita

Terceira Lei de Newton: Em um referencial inercial, a cada ação corresponde uma reação igual e oposta, isto é, se \vec{F}_{ij} é a força sobre a partícula i exercida pela partícula j e \vec{F}_{ji} é a força sobre a partícula j exercida pela partícula i , então:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \quad (2.7)$$

Para Newton, a existência de um referencial inercial, implica na existência de uma infinidade de outros referenciais inerciais e, ainda, para ele o tempo é absoluto, ou seja, flui uniformemente "sem relação com qualquer coisa externa".

A segunda lei de Newton ainda pode ser representada, segundo [7, cap.2], da seguinte forma:

Quando uma partícula interage, seu estado de movimento é alterado da seguinte maneira

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \text{sendo } \vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{x}} \quad (2.8)$$

onde

\vec{F} é a resultante das forças que atuam sobre a partícula
 \vec{p} é seu momento linear (quantidade de movimento da partícula)

m a massa da partícula

\vec{v} o vetor velocidade.

2.3 AS EQUAÇÕES DE NEWTON

Os movimentos de um sistema de N partículas são determinados, exclusivamente pelas posições iniciais e pelas velocidades iniciais, que determinam a aceleração, ou seja, existe uma função $F : U \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, ($U \subseteq \mathbb{R}^N$), tal que:

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t), \quad (2.9)$$

sujeita às condições iniciais $x(t_0) = x_0$ e $\dot{x}(t_0) = v_0$.

A equação (2.9) é chamada de Equação de Newton, cujas soluções, definem de forma única o movimento [5, cap.1, seção D].

¹Se a massa for constante. Para o caso de massa variável, temos $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$.

Para o sistema de N partículas citado, podemos escrever a equação de movimento da i -ésima partícula, conforme a segunda e a terceira leis de Newton da seguinte forma [4, cap.1, seção 1.1]:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N \left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} \right) + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)}, \quad (2.10)$$

onde:

\vec{p}_i : momento linear da i -ésima partícula

\vec{F}_{ij} e \vec{F}_{ji} : forças internas do sistema de N partículas

$\vec{F}_i^{(e)}$: representa a força total externa, isto é, de todo o sistema.

Note que da terceira lei de Newton podemos escrever:

$$\sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N \left(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} \right) = 0. \quad (2.11)$$

Na equação (2.10) o momento linear total é dado por:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{x}_i}{dt}, \quad (2.12)$$

onde:

\vec{P} : momento linear total do sistema

\vec{r}_i : vetor posição da i -ésima partícula

m_i : massa da i -ésima partícula

\vec{v}_i : vetor velocidade da i -ésima partícula

2.4 CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E TRABALHO

O estudo do movimento, sob o ponto de vista dos princípios de conservação, permite uma análise das mesmas equações de movimento vistas na seção anterior, só que com formatos diferentes. Para tanto, começamos definindo trabalho realizado pelas forças[4, cap.1, seção 1.1]:

Definição 2.5. *Sejam $A, B \in \mathbb{R}^3$ e γ um caminho de A a B . O trabalho W_{AB} realizado por todas as forças para levar o sistema de A para B , é definido pela integral de linha:*

$$W_{AB} = \int_{\gamma} \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N \vec{F}_{ij} \right) d\vec{x}_i = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma} \vec{F}_i^{(e)} d\vec{x}_i + \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N \int_{\gamma} \vec{F}_{ij} d\vec{x}_i, \quad (2.13)$$

temos, pelas equações (2.10) e (2.12):

$$W_{AB} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma} m_i \dot{\vec{v}}_i \vec{v}_i dt,$$

logo

$$W_{AB} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma} d \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right), \quad (2.14)$$

A equação (2.14) nos dá uma relação muito importante entre trabalho e a Energia Cinética, que é definida a seguir.

Definição 2.6. *A energia cinética de um sistema de N partículas é dada por:*

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^2. \quad (2.15)$$

Note que podemos associar as equações (2.14) e (2.15) e escrever o trabalho em termos da variação da energia cinética:

$$W_{AB} = T_B - T_A. \quad (2.16)$$

Note [4, cap.1, seção 1.1], que em muitos casos, as forças derivam de potenciais escalares. Estas forças são chamadas de conservativas. Vamos supor que as forças externas admitam uma função energia potencial $V^{(e)}$, tal que:

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\nabla V^{(e)}, \quad (2.17)$$

ou seja, $\vec{F}^{(e)}$ é o vetor gradiente da energia potencial externa.

Para forças internas, supondo que dependam somente das posições relativas $x_{ij} = x_i - x_j$ e, também, podemos deduzir que a função energia potencial $V_{ij}(x_{ij})$ sendo $V_{ij} = V_{ji}$, então:

$$\vec{F}_{ij} = -\nabla V_{ij}, \quad (2.18)$$

onde V_{ij} é a energia potencial interna, isto é, a F_{ij} é o vetor gradiente da energia potencial interna. Considerando um sistema de partículas que se move de A para B , sendo $A, B \in \mathbb{R}^3$ e γ um caminho de A a B , da terceira lei de Newton, temos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{i,j, \\ j \neq i}} \int_{\gamma} \vec{F}_{ij} d\vec{x}_i &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j, \\ j \neq i}} \int_{\gamma} (\vec{F}_{ij} d\vec{x}_i + \vec{F}_{ji} d\vec{x}_j) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j, \\ j \neq i}} \int_{\gamma} \vec{F}_{ij} d(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j, \\ j \neq i}} \int_{\gamma} \nabla V_{ij} d\vec{x}_{ij} \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j, \\ j \neq i}} V_{ij} \Big|_A^B.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Logo a **energia potencial** total é dada por:

$$V = V^{(e)} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} V_{ij}. \tag{2.20}$$

Logo, para forças conservativas atuando em um sistema, temos um importante teorema sobre conservação de energia:

Teorema 2.1 (Teorema da Conservação de Energia). [4, cap.1, seção 1.1] *Se todas as forças são conservativas, a energia total $E = T + V$ de um sistema de partículas é conservada*

Demonstração. *Da Definição 2.5 e da equação (2.15), para força resultante atuando sobre um corpo, independente se as forças são conservativas ou não, podemos escrever:*

$$dW = dT. \tag{2.21}$$

Caso a resultante seja conservativa, das equações (2.13), (2.17), (2.18) e (2.19), podemos escrever:

$$dW = -dV. \tag{2.22}$$

Das equações (2.21) e (2.22), temos:

$$dT = -dV \Rightarrow d(T + V) = 0 \Rightarrow T + V = CTE. \quad \blacksquare$$

No caso de somente forças conservativas atuarem no sistema, a energia total é constante de movimento.

2.5 SISTEMAS SUJEITOS A VÍNCULOS

As restrições, de natureza cinemática, associadas às posições e velocidades de uma sistema mecânico de partículas são chamadas de *vínculos*. Estas restrições, ou seja, os vínculos, devem ser levados em consideração na construção das equações que descrevem o movimento deste sistema.

É importante salientar que as restrições decorrentes das equações de movimento (restrições dinâmicas) não são vínculos, ou seja, se uma partícula se move devido à ação de uma força no plano, este plano fixo, não caracteriza um vínculo[4, cap.1, seção 1.2].

Definição 2.7. Chamamos de *vínculos holonômicos*²relações da forma:

$$f(\xi_1, \dots, \xi_N, t) = 0, \quad (2.23)$$

envolvendo somente ξ_1, \dots, ξ_N coordenadas das posições e, possivelmente, o tempo.

Analisando alguns exemplos, a definição de vínculos holonômicos fica mais clara:

Exemplo 2.1. *Uma partícula restrita à uma superfície*

A superfície $f(x, y, z) = 0$ na qual a partícula se movimentar, restringe o movimento da mesma (Figura 2).

Um exemplo de uma superfície pode ser uma esfera centrada na origem, de raio R , cuja equação de vínculo seria:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Neste exemplo, o vínculo é holônomo.

²Palavra de origem grega, holos (inteiro, completo) e nomos (regra, lei)

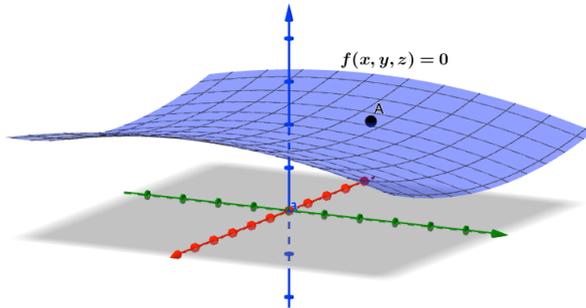


Figura 2 – Vínculo $f(x, y, z) = 0$

Exemplo 2.2. *Um pêndulo simples ideal (sem atrito e movimentando-se em um plano vertical fixo):*

Tem como equação de vínculo $x^2 + y^2 - l^2 = 0$, sendo l o comprimento da haste.

Neste exemplo, o vínculo também é holônomo.

Exemplo 2.3. *Um pêndulo duplo (sem atrito e movimentando-se em um plano vertical fixo):*

Tem como equações de vínculo:

$$x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0 \quad \text{e} \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0,$$

sendo l_1 o comprimento da haste que prende a primeira massa na origem do sistema e l_2 o comprimento da haste que prende a segunda massa na primeira massa.

Neste exemplo, o vínculo também é holônomo.

Exemplo 2.4. *[4, cap.1, seção 1.2] Moeda que rola, sem deslizar em um plano horizontal (sistema conforme figura abaixo - Figura 3):*

sendo:

$C' = (x, y)$: projeção da posição do centro de massa da moeda no plano

θ : ângulo do plano da moeda com o eixo x

ϕ : ângulo de rotação da moeda em torno de seu eixo de simetria

\vec{v} : velocidade do centro de massa

R : raio da moeda

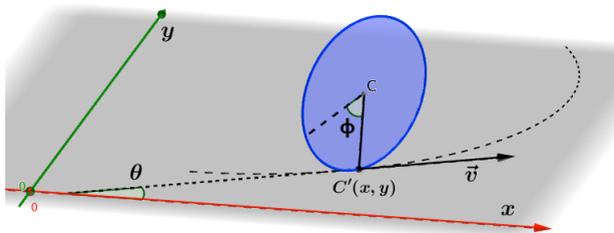


Figura 3 – Moeda em um plano horizontal

Logo as equações de vínculo são dadas por:

$$\dot{x} - R\dot{\phi} \cos \theta = 0 \quad \text{e} \quad \dot{y} - R\dot{\phi} \sin \theta = 0. \quad (2.24)$$

Neste caso, os vínculos não são holônomos, pois essas equações envolvem também velocidades e não somente as coordenadas. Além disso, não podemos "integra-las" para equações da forma 2.23.

Exemplo 2.5. *Maquina de Atwood (sistema conforme figura abaixo - Figura (4)):*

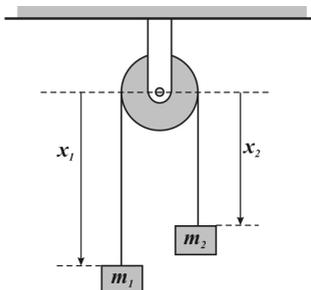


Figura 4 – Máquina de Atwood

Tem como equação de vínculo $x_1 + x_2 = l$, sendo l dada pelo raio da roldana e comprimento da corda, também classificado como holônomo.

2.6 APLICAÇÕES DO FORMALISMO DE NEWTON

Abaixo, temos alguns exemplos de aplicações da formalização Newtoniana.

Exemplo 2.6 (Pêndulo simples plano). *Uma partícula de massa m presa a um fio rígido, fixado em 0 e seu movimento é dado em um plano vertical fixo, descrevendo um arco s dado por θ (ângulo com a vertical) conforme mostrado na Figura 5.*

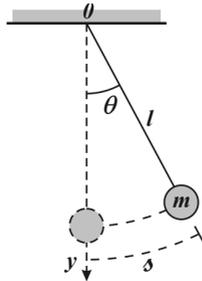


Figura 5 – Pêndulo simples plano

Análise do sistema:

- (i) Vínculos: $x^2 + y^2 = l^2$
- (ii) O arco s é dado por: $s = l\theta$
- (iii) O peso da partícula: $P = mg$, sendo g o valor (norma) da aceleração da gravidade.
- (iv) A velocidade: $\dot{s} = l\dot{\theta}$
- (v) A aceleração: $\ddot{s} = l\ddot{\theta}$

Seja F_0 a força restauradora do movimento de m , que é dada por (veja Figura 6):

$$F_0 = P \cdot \text{sen } \theta. \quad (2.25)$$

Substituindo $P = mg$ na equação (2.25):

$$F_0 = -mg \cdot \text{sen } \theta. \quad (2.26)$$

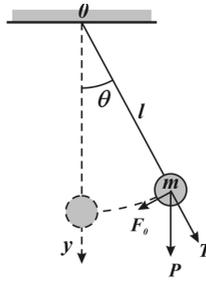


Figura 6 – Forças que atuam no pêndulo simples

Pela segunda lei de Newton, temos que

$$F_0 = m\ddot{s} = ml\ddot{\theta}. \quad (2.27)$$

Agora, de (2.26) e (2.27), temos:

$$ml\ddot{\theta} = -mg \cdot \text{sen } \theta.$$

Ou seja, para pequenas oscilações, vamos considerar $\text{sen } \theta \approx \theta$:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \theta = 0. \quad (2.28)$$

A solução desta EDO linear de segunda ordem pode ser obtida usando a equação característica:

$$r^2 = -\frac{g}{l} \Rightarrow r = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} i.$$

Considerando $\sqrt{\frac{g}{l}} = \omega$, θ é dado por:

$$\theta = A \cos(\omega t) + B \text{sen}(\omega t), \quad (2.29)$$

onde A e B são as constantes de integração.

Uma forma alternativa de representar estas soluções, usando o ângulo de fase (posição/localização angular) φ e uma nova constante K , dados por:

$$\begin{aligned} K^2 &= A^2 + B^2 \\ &\text{e} \\ \varphi &= \text{arctg} \left(\frac{A}{B} \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Logo, a forma alternativa para esta solução (2.29), usando (2.30), será:

$$\theta = K \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.31)$$

A equação (2.31) descreve o movimento do pêndulo simples plano.

Exemplo 2.7 (Máquina de Atwood). *Conforme Exemplo 2.5, a máquina de Atwood pode ser vista na Figura 7 abaixo.*

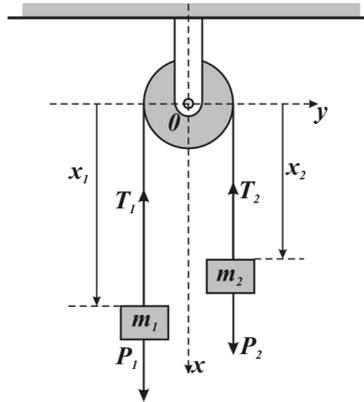


Figura 7 – Máquina de Atwood

Vínculos: $x_1 + x_2 = l$

Análise do sistema:

- (i) Consiste em uma roldana sem massa e sem atrito com seu eixo;
- (ii) O fio que prende as massas m_1 e m_2 , sem massa, não se estende;
- (iii) Sistema começa em repouso e somente começa o movimento ao soltarmos as duas massas;

Sejam: T_1 e T_2 : trações (tensões) das massas m_1 e m_2 sobre o fio, respectivamente; P_1 e P_2 : pesos das massas m_1 e m_2 , respectivamente.

Segue do fio ser "sem massa", as trações ao longo do eixo x podem ser escritas:

$$|T_1| = |T_2| = T. \quad (2.32)$$

Pela segunda lei de Newton, temos: $F = ma$, logo, para a massa m_1 temos:

$$P_1 - T = F_1 \Rightarrow m_1 g - T = m_1 a_1. \quad (2.33)$$

Para m_2 , temos:

$$T - P_2 = F_2 \Rightarrow T - m_2g = m_2a_2. \quad (2.34)$$

As acelerações podem ser escritas da seguinte forma:

$$|a_1| = |a_2| = a = \ddot{x}. \quad (2.35)$$

Sendo assim, de (2.33), (2.34) e (2.35) temos:

$$\begin{cases} T = m_1g - m_1\ddot{x} \\ T = m_2g + m_2\ddot{x} \end{cases}. \quad (2.36)$$

Igualando as duas equações, temos:

$$m_2g + m_2\ddot{x} = m_1g - m_1\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g. \quad (2.37)$$

Observe que podemos escrever esta última equação como:

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g, \quad (2.38)$$

a qual fornece a aceleração de m_1 , ou seja, descreve o movimento de m_1 , é se caracteriza por ser uma equação diferencial de segunda ordem.

Como consequência disto, temos que, para m_2 a aceleração será $\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1$.

Exemplo 2.8 (Pêndulos idênticos acoplados por mola). *Considere os pêndulos conforme Figura 8, abaixo:*

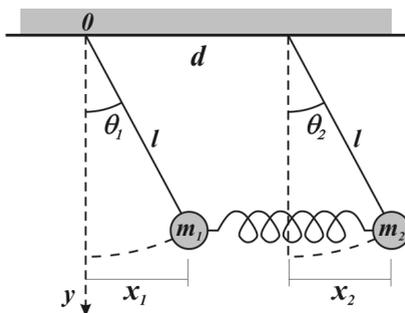


Figura 8 – Pêndulo duplo acoplado por mola

Análise do sistema:

- (i) São pêndulos idênticos;
- (ii) Fixos por hastes, de comprimento l , rígidas com massas desprezíveis;
- (iii) A distância entre os pontos de apoio é d ;
- (iv) As massas m_1 e m_2 , são conectadas por uma mola medindo, em equilíbrio, d de comprimento;
- (v) As massas m_1 e m_2 , por serem pêndulos idênticos, são iguais.

Analisando o sistema em repouso, vamos fazer as seguintes considerações.

A posição inicial da massa m_1 é de abscissa zero. Sendo assim, a posição inicial da massa m_2 é dada por $x_2 = x_1 + d$.

Usando coordenadas polares podemos representar x_1 e x_2 como segue:

$$\begin{aligned} x_1 &= l \operatorname{sen} \theta_1 \\ &\text{e} \\ x_2 &= d + l \operatorname{sen} \theta_2. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Para pequenos deslocamentos a partir do repouso, podemos aproximar $\operatorname{sen} \theta_1 \approx \theta_1$ e $\operatorname{sen} \theta_2 \approx \theta_2$, logo, temos de (2.39) que:

$$\begin{aligned} x_1 &= l\theta_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 = l\ddot{\theta}_1 \\ &\text{e} \\ x_2 &= d + l\theta_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 = l\ddot{\theta}_2. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Para determinar a força restauradora da mola, consideremos $x_0 = 0$ (posição da massa m_1 e $x_d = x_2 - x_1$ o comprimento da mola (referente à posição da massa m_2), ambas em repouso. Logo, a força restauradora da mola, F_M , é dada por:

$$F_M = k|x_d - d|, \tag{2.41}$$

onde:

F_M é a força restauradora da mola

x_d é dado por $x_2 - x_1$

d é a distância entre as massas com sistema em repouso

k é a constante elástica da mola.

Substituindo x_d em (2.41), temos:

$$F_M = k|x_2 - x_1 - d|. \quad (2.42)$$

Substituindo a equação (2.40) em (2.42):

$$F_M = k|d + l\theta_2 - l\theta_1 - d| \Rightarrow F_M = kl|\theta_2 - \theta_1|. \quad (2.43)$$

Como esta força age simultâneamente nas duas massas, de forma oposta, conforme Figura (9), temos:



Figura 9 – Força restauradora da mola

$$\begin{aligned} F_{M1} &= kl(\theta_2 - \theta_1) \\ &\text{e} \\ F_{M2} &= -kl(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Além da força restauradora da mola, as forças que agem em cada pêndulo são as mesmas que agem em um pêndulo simples. Vamos analisar conforme a Figura 10 abaixo, tomando como referência a massa m_1 .

Forças que atuam nas massas m_1 e m_2 , respectivamente:

- (i) P_1 e P_2 , pesos;
- (ii) T tração exercida pelas massas no fio;
- (iii) F_{R1} e F_{R2} resultante tangente ao arco definido pelo movimento (perpendicular a T);
- (iv) θ_1 e θ_2 são arcos que o fio faz com a vertical quando o sistema sai do repouso.

As forças F_{P1} e F_{P2} , decorrentes dos pesos, são dadas por:

$$\begin{aligned} F_{P1} &= -m_1g \text{ sen } \theta_1 \approx -m_1g\theta_1 \\ &\text{e} \\ F_{P2} &= -m_2g \text{ sen } \theta_2 \approx -m_2g\theta_2. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Sendo assim, pela segunda lei de Newton, temos:

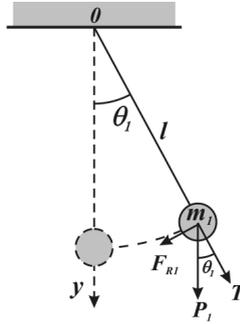


Figura 10 – Forças que atuam no pêndulo duplo

$$\begin{aligned}
 F_{R1} &= F_{P1} + F_{M1} \\
 &\quad \text{e} \\
 F_{R2} &= F_{P2} + F_{M2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

O que podemos escrever, substituindo as equações (2.44) e (2.45) em (2.46), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 m_1 l \ddot{\theta}_1 &= -m_1 g \theta_1 + kl(\theta_2 - \theta_1) \\
 &\quad \text{e} \\
 m_2 l \ddot{\theta}_2 &= -m_2 g \theta_2 - kl(\theta_2 - \theta_1).
 \end{aligned}
 \tag{2.47}$$

Como as massas m_1 e m_2 , são iguais, podemos escrever $m_1 = m_2 = m$, e isolando $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$ em (2.47), temos:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\theta}_1 &= -\frac{g}{l} \theta_1 + \frac{k}{m} (\theta_2 - \theta_1) \\
 &\quad \text{e} \\
 \ddot{\theta}_2 &= -\frac{g}{l} \theta_2 - \frac{k}{m} (\theta_2 - \theta_1).
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

Somando e subtraindo as equações de (2.48), temos o sistema:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 &= -\frac{g}{l} (\theta_2 + \theta_1) \\
 \ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1 &= -\frac{g}{l} (\theta_2 - \theta_1) - \frac{2k}{m} (\theta_2 - \theta_1)
 \end{aligned} \right. . \tag{2.49}$$

O que podemos escrever da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} (\theta_2 + \theta_1) + \frac{g}{l} (\theta_2 + \theta_1) = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} (\theta_2 - \theta_1) + \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right) (\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

Tomando $f = \theta_2 + \theta_1$ e $h = \theta_2 - \theta_1$, ficamos com duas equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem descritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{g}{l} f = 0 \\ \frac{d^2 h}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right) h = 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

Cujas soluções, dadas usando as equações características

$$r^2 = -\frac{g}{l}er^2 = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right).$$

Considerando $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$ e $\omega_2^2 = \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right)$, temos que f e h serão:

$$\begin{aligned} f &= A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t) \\ &\quad \text{e} \\ h &= C \cos(\omega_2 t) + D \sin(\omega_2 t). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Sendo, A , B , C e D , os parâmetros (constantes de integração).

Uma forma alternativa de representar estas soluções, usando os ângulos de fase (posição/localização angular) φ_1 e φ_2 e novas constantes K_1 e K_2 , dados por:

$$\begin{aligned} K_1^2 &= A^2 + B^2, \\ K_2^2 &= C^2 + D^2, \\ \varphi_1 &= \arctg\left(\frac{A}{B}\right) \\ &\quad \text{e} \\ \varphi_2 &= \arctg\left(\frac{C}{D}\right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Logo, a forma alternativa para estas soluções (2.52), usando (2.53), será:

$$\begin{aligned}
 f &= K_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\
 &\quad \text{e} \\
 h &= K_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).
 \end{aligned}
 \tag{2.54}$$

Como $f = \theta_2 + \theta_1$ e $h = \theta_2 - \theta_1$, precisamos determinar θ_1 e θ_2 .

$$\begin{aligned}
 f &= \theta_2 + \theta_1 = K_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\
 &\quad \text{e} \\
 h &= \theta_2 - \theta_1 = K_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).
 \end{aligned}
 \tag{2.55}$$

Somando f e h , temos:

$$\theta_2 = \frac{1}{2} [K_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + K_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)].
 \tag{2.56}$$

Subtraindo f e h , temos:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} [K_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - K_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)].
 \tag{2.57}$$

Que são as equações de movimento para o sistema de pêndulos idênticos acoplados por uma mola.

As possibilidades de movimento de m_1 e m_2 estão representadas abaixo, na Figura 11, que dependem das condições iniciais, ou seja, $\theta_1(0)$, $\theta_2(0)$, $\dot{\theta}_1(0)$ e $\dot{\theta}_2(0)$.

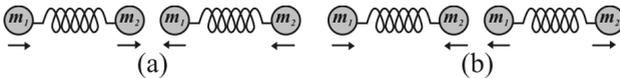


Figura 11 – Possíveis movimentos dos pêndulos acoplados

Na Figura 11(a), ocorre se uma das massas é puxa para fora, ou seja, ou m_1 para esquerda ou m_2 para direita. Na Figura 11(b), ocorre se uma das massas é empurrada para dentro, ou seja, ou m_1 para direita ou m_2 para esquerda.

3 PRINCÍPIOS VARIACIONAIS, A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE E AS EQUAÇÕES DE HAMILTON

No capítulo anterior vimos que o formalismo Newtoniano envolve grandezas vetoriais como posição, velocidade e aceleração, além de depender das forças de vínculo, o que deixa exaustivo e extenso o processo de modelagem e a descrição do movimento de um sistema mecânico.

Neste capítulo veremos outras formas mais convenientes de modelar e representar o movimento de um sistema de partículas, ou seja, as equações de Euler-Lagrange e as equações de Hamilton.

A mecânica de Lagrange e de Hamilton descrevem o movimento em um sistema mecânico sujeito à vínculos holônomos e trataremos somente o caso conservativo.

3.1 COORDENADAS GENERALIZADAS E ESPAÇO DE CONFIGURAÇÃO

Segundo [4, cap.1, seção 1.4], em sistemas holônomos é possível introduzir um certo número n de variáveis, independentes, denotadas por q_1, \dots, q_n e denominadas **coordenadas generalizadas**, de forma que: (a) o vetor posição de cada partícula é determinado univocamente em cada instante pelos valores dos q'_i 's; (b) os vínculos, supostos todos da forma (2.23), são identicamente satisfeitos se expressos em termos de q'_i 's.

Agora, sejam q_1, \dots, q_n coordenadas generalizadas, tal que, a posição de cada partícula do sistema seja definida univocamente por:

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_n, t), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

de forma que cada vínculo, a que este sistema esteja sujeito, seja identicamente satisfeito. Temos que n é o número total de coordenadas necessárias para identificar a posição de N partículas ($3N$ coordenadas) sujeitas a R vínculos, ou seja:

$$n = 3N - R, \quad (3.2)$$

sendo $3N$ as coordenadas $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_N, y_N, z_N)$.

O número de coordenadas generalizadas é chamada de **grau de liberdade do sistema - GL**.

Definição 3.1. As coordenadas generalizadas como eixos coordenados, definem um espaço cartesiano chamada de **espaço de configuração** de um sistema de N partículas com dimensão n (n coordenadas generalizadas).

Exemplo 3.1 (Pêndulo simples plano). Tomando como base o Exemplo 2.6 e a Figura 5, podemos observar que a posição da massa é dada por (x, y) (eixo oy com sentido positivo para baixo). Podemos representar a posição em função de θ , ou seja:

$$\begin{aligned}x &= l \cdot \text{sen } \theta \\y &= l \cdot \text{cos } \theta,\end{aligned}$$

logo, temos uma coordenada generalizada $q = \theta$, ou seja, este sistema tem 1 grau de liberdade.

Exemplo 3.2 (Pêndulos idênticos acoplados por mola). Considere os pêndulos conforme Figura 8 abaixo [4, cap.1, seção 1.4]:

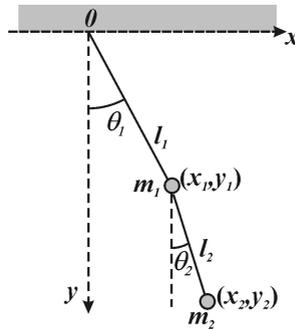


Figura 12 – Pêndulo duplo acoplado

Neste exemplo, temos as equações de vínculo dadas por:

$$\begin{aligned}x_1^2 + y_1^2 - l^2 &= 0 \text{ e} \\(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 &= 0.\end{aligned}$$

Podemos escrever as coordenadas x_1 e y_1 em termos de θ_1 :

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \cdot \text{sen } \theta_1 \\y_1 &= l_1 \cdot \text{cos } \theta_1,\end{aligned}$$

e as as coordenadas x_2 e y_2 em termos de θ_1 e θ_2 :

$$\begin{aligned}x_2 &= l_1 \cdot \text{sen } \theta_1 + l_2 \cdot \text{sen } \theta_2 \\y_2 &= l_1 \cdot \text{cos } \theta_1 + l_2 \cdot \text{cos } \theta_2,\end{aligned}$$

logo, temos duas coordenadas generalizadas $q_1 = \theta_1$ e $q_2 = \theta_2$, ou seja, este sistema tem 2 graus de liberdade.

Um sistema mecânico, sujeito a vínculos holônomos, é descrito usando coordenadas generalizadas, o que é uma condição indispensável na construção da equação de Euler-lagrange. Nas próximas seções detalharemos esta construção.

3.2 PRINCÍPIOS VARIACIONAIS E EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

Para que possamos definir a equação de Euler-Lagrange que descreve o movimento de um sistema mecânico holônomo, precisamos conhecer o cálculo de variação, também chamado de Princípio Variacional de Hamilton.

Visto que a equação de Euler-Lagrange vem do princípio de D'Alembert, sua dedução (sem rigor matemático) pode ser vista no Apêndice A.

3.2.1 Funcionais e o cálculo variacional

O cálculo de variações tem por objetivo estudar otimização de funcionais, ou seja, determinar máximos e mínimos de funções cujo domínio é um espaço vetorial, em particular, aqueles de dimensões infinitas. A seguir vamos introduzir alguns conceitos importantes de [12, cap. 2, seções 1.1 a 1.4].

Definição 3.2. *Uma curva em \mathbb{R}^n é função contínua $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde I é o intervalo $I = [a, b]$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$.*

Definição 3.3. *O espaço de curvas \mathcal{C} em \mathbb{R}^n , é $\mathcal{C} = \{\gamma | \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ é uma curva}\}$, onde I é o intervalo $I = [a, b]$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$. Note que a dimensão deste espaço é infinita.*

Definição 3.4. *Se X é um espaço linear normado sobre \mathcal{C} , um funcional linear em X é um mapa $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\Phi(\alpha x + \beta y) = \alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y)$ para todos os vetores x e y em X e todos escalares α e β .*

Definição 3.5. *Seja $\Phi(t)$ um funcional sobre o espaço de curvas \mathcal{C} . Dizemos que Φ é diferenciável (referência no Apêndice B.1.1) em γ se*

para qualquer deslocamento h no espaço de curvas \mathcal{C} temos que existem F e R , funcionais de \mathcal{C} em \mathbb{R} tais que:

- (1) $\Phi(\gamma + h) = \Phi(\gamma) + F(h) + R(h)$;
- (2) F é linear em h : $F(\alpha h + h') = \alpha F(h) + F(h')$;
- (3) R depende das ordens superiores em h , ou seja, $R = O(h^2)$.

Neste caso, F é dita diferencial de Φ em γ .

Note que \mathcal{C} é um espaço (métrico) normado e:

(i) $\|\gamma\|$ é comprimento $\int_0^1 \sqrt{1 + \gamma^2(t)} dt$;

(ii) Um deslocamento h é tal que: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid$ para $\|h\| < \delta$, $\|\gamma - h\| < \varepsilon$.

Exemplo 3.3. Segundo [5, cap.3, seção 12], um exemplo de um funcional é o comprimento de uma curva no plano euclidiano: se $\gamma = \{(t, q) : q = q(t)\}$, então $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + q^2} dt$, onde $q = x$ é uma coordenada generalizada.

Em geral, um funcional é qualquer mapeamento do espaço de curvas para os números reais.

Consideramos uma "aproximação" γ' para $\gamma' = \{(t, q) : q = q(t) + h(t)\}$. Vamos chamá-lo $\gamma' = \gamma + h$. Considere o incremento de Φ , $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma)$ (Figura 15).

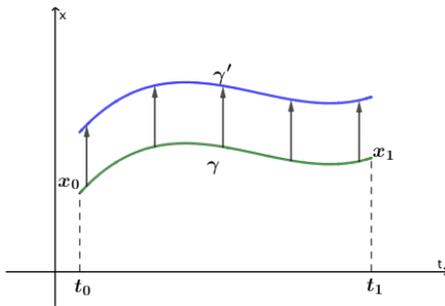


Figura 13 – Variação de uma curva

Para o caso de somente uma coordenada generalizada q para a função L , ou seja, $L(q(t), \dot{q}(t), t)$, onde $q = x$ é uma coordenada generalizada, temos, sobre diferenciabilidade, o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *O funcional $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$ é diferenciável e sua derivada é dada por:*

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) h \Big|_{t_0}^{t_1}, \quad (3.3)$$

Demonstração. *Da Definição 3.5, temos:*

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \left[L(q + h, \dot{q} + \dot{h}, t) - L(q, \dot{q}, t) \right] dt \\ &\stackrel{\frac{h}{h}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \left[h \frac{L(q + h, \dot{q} + \dot{h}, t) - L(q, \dot{q}, t)}{h} \right] dt \\ &= \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h} \right] dt}_{F(h)} + O(h^2) \\ &= F(h) + R, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde, da equação (3.4), temos:

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h} \right] dt \text{ e } R = O(h^2).$$

Note que na segunda igualdade multiplicamos por $\frac{h}{h}$ e a terceira igualdade foi obtida usando a expansão por série de Taylor.

Integrando $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h}$ por partes, tomando $u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ e $dv = \dot{h} dt$, temos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h} dt = \left(h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} h \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt. \quad (3.5)$$

Então, $F(h)$ será:

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) h \Big|_{t_0}^{t_1}. \quad \blacksquare \quad (3.6)$$

Sendo assim, podemos fazer a seguinte definição:

Definição 3.6. Com relação a γ , temos que:

- (i) γ é extremo de $F(h)$ se, e somente se, ela maximiza ou minimiza F ;
- (ii) γ é ponto crítico se, e somente se, $F(h) = 0$ para todo incremento h .

Em particular, se γ é um extremo, ela é um ponto crítico, o que vamos provar a recíproca.

Para tanto, vamos precisar do seguinte lema:

Lema 3.1. [5, cap.3, seção 12B] Se uma função contínua $f(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, satisfaz

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0,$$

para qualquer função contínua, $h(t)$ com $h(t_0) = h(t_1) = 0$, então $f(t) \equiv 0$.

Demonstração. Seja $f(t') > 0$ para algum t' , $t_0 < t' < t_1$. Dado que a função f é contínua e $f(t) > c$ na vizinhança Δ do ponto t' , tal que: $t_0 < t' - d < t < t' + d < t_1$ (veja Figura 14):

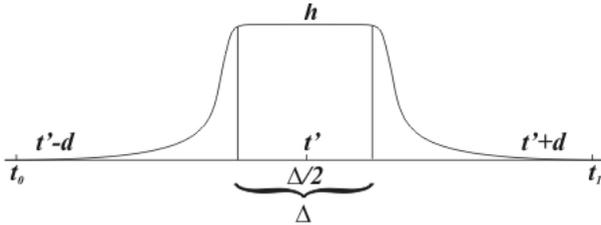


Figura 14 – Construção da função h

Fora da vizinhança Δ temos que $h(t) = 0$, na vizinhança Δ temos que $h(t) > 0$ e em $\frac{\Delta}{2}$, $h(t) = 1$, ou seja, para t , $t_0 < t' - \frac{1}{2}d < t < t' + \frac{1}{2}d < t_1$, então:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt \geq dc > 0,$$

o que contradiz a hipótese, mostrando que $f(t') = 0$ para todo t' , satisfazendo $t_0 < t' < t_1$. ■

Teorema 3.2. *Dado o funcional*

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad i = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

no espaço de curvas, que unem (t_0, q_1, \dots, q_n) e (t_1, q_1, \dots, q_n) . A curva γ é um extremo deste funcional se, e somente se,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$$

é satisfeita ao longo da curva γ .

Demonstração. *Seja $\gamma = \gamma(q_1, \dots, q_n)$ um extremo do funcional diferenciável $\Phi(\gamma)$. Como a derivada total $d\Phi(\gamma)$ é a soma das derivadas parciais (referências no Apêndice B.1.2), ou seja,*

$$d\Phi(\gamma) = \sum_{i=1}^n [\Phi(q_1, \dots, q_i + \delta_i, \dots, q_n) - \Phi(q_1, \dots, q_n)] dq_i + O(q_i^2),$$

logo, dos Teoremas 3.1 e 3.2, da Definição 3.6 e do Lema 3.1 temos:

$$d\Phi(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} d\Phi(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n [L(q_1, \dots, q_i + h_i, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \\ &\quad - L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)] \cdot \frac{h_i}{h_i} dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n [L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_i + \dot{h}_i, \dots, \dot{q}_n, t) \\ &\quad - L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)] \cdot \frac{h_i}{h_i} dt \\ &\stackrel{\text{teor. 3.1}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} h_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{h}_i \right] dt + O(h_i^2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Integrando $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{h}_i$ por partes, conforme equações (3.5) e (3.6),

tomando $u_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ e $dv_i = \dot{h}_i dt$, temos:

$$d\Phi(\gamma) \stackrel{\text{teor. 3.1}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h_i \right) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Como $h_i(t_0) = h_i(t_1) = 0$, o termo $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h_i \right) \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$, pelo Lema 3.1 e pela Definição 3.6, temos:

$$d\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] h_i dt = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \blacksquare \quad (3.9)$$

Exemplo 3.4. [5, cap.3, seção 12B] Seja $L = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$, vamos verificar que os extremos de comprimento são segmentos de retas.

Considere $L = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$, temos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}.$$

Derivando esta última, com relação ao tempo, e pelo Teorema 3.2, temos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \right) = 0.$$

Logo:

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = c \Rightarrow \dot{x} = c_1 \Rightarrow x = c_1 t + c_2.$$

Confirmando, assim, que os extremos são segmentos de retas.

Observação 3.1. Note que para t_0 e t_1 , não há variação, ou seja, $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Veja figura abaixo:

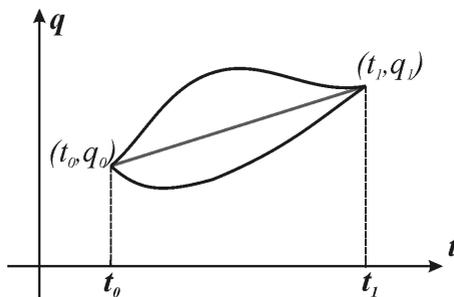


Figura 15 – Menor caminho

3.2.2 Equação de Euler-Lagrange

Do Teorema 3.2 temos uma importante definição:

Definição 3.7. Chamamos de equação de Euler-Lagrange para o funcional $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt$ a expressão dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (3.10)$$

onde:

q_i são coordenadas generalizadas e $i = 1, \dots, n$;

$\gamma = \{(t, q) : q(t) = q, t_0 \leq t \leq t_1\}$ uma curva no espaço de dimensão $n + 1$ ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$);

$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de $2n + 1$ variáveis.

A generalização do Teorema 3.2, ou seja, de $n = 1$ para n qualquer, é dada pelo próximo teorema:

Observação 3.2. As equações de Euler-Lagrange formam um sistema de equações diferenciais de segunda ordem de $2n$ variáveis, nas quais tem soluções dadas em $2n$ condições iniciais para determiná-las, do tipo $q(t_0) = q_0$ e $\dot{q}(t_0) = v_0$.

Em resumo, a curva γ é um extremo do funcional Φ se a equação de Euler-Lagrange é satisfeita ao longo de γ .

Note que podemos escolher o sistema de coordenadas independentes mais adequado, pois os extremos irão satisfazer a equação de Euler-Lagrange. Por exemplo, o comprimento de uma curva pode ser

determinado em função de coordenadas cartesianas ou polares, como por exemplo:

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt \quad \text{ou} \quad \Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} dt.$$

Neste caso os extremos são os mesmos e são segmentos de retas.

3.2.3 Princípio da Ação Mínima de Hamilton e as equações de Euler-Lagrange

Para sistemas conservativos, podemos observar, do Teorema 2.1 que:

$$dT = -dV,$$

que pode ser escrito da seguinte forma (não foi considerado a rotação):

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{q}_i) + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0. \quad (3.11)$$

Comparando com a dinâmica Lagrangeana, a equação:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (3.12)$$

nos remete a um importante teorema, chamado de Princípio da Ação Mínima de Hamilton [5, cap.3, seção 13A] que é uma aplicação do cálculo variacional na mecânica.

Teorema 3.3 (Princípio da Ação Mínima de Hamilton). *Movimentos do sistema mecânico (equação (3.11)), coincidem com extremos do funcional:*

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L dt,$$

onde $L = T - V$, é a diferença entre a energia cinética e potencial.

Demonstração. Como $V = V(q)$ e $T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{q}_i^2$, temos que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m_i \dot{q}_i \quad e \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}. \quad (3.13)$$

O resultado segue pelo Teorema 3.2. ■

Algumas notações que vamos utilizar deste ponto em diante:

- (i) $L(q, \dot{q}, t) = T - V$ é a **função de Lagrange ou Lagrangeana**;
- (ii) q_1, \dots, q_n chamadas de **coordenadas generalizadas**;
- (iii) $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ chamadas de **velocidades generalizadas**;
- (iv) A funcional $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$ é chamada **Ação**.

Introduziremos:

- (a) **momentos generalizados** definidos por

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i; \quad (3.14)$$

- (b) **forças generalizadas** definidas por

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i. \quad (3.15)$$

A equação de Euler-Lagrange, vista até o momento, tem como base o princípio variacional, mais precisamente, o princípio da Ação Mínima de Hamilton, que foi adaptado e resumido de [5, cap.3]. Note que as equações de Euler-Lagrange descrevem um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem a duas variáveis para cada equação, num total de $2n$ variáveis, ou seja, temos, para solucionar este sistema, $2n$ condições iniciais $q_i(0)$ e $\dot{q}_i(0)$.

3.3 APLICAÇÕES DO FORMALISMO DE LAGRANGE

Usando o formalismo Lagrangeano, nas aplicações abaixo, poderemos ver como o processo para determinar as equações de movimento é mais simples e econômico, em comparação ao visto na seção 2.6.

Exemplo 3.5 (Pêndulo simples plano). *Com base no Exemplo 2.6 e na Figura 5, temos uma partícula de massa m presa a um fio rígido, fixado na origem 0 e seu movimento é dado em um plano vertical fixo, descrevendo um arco s dado por θ (ângulo com a vertical).*

Precisamos usar um sistema de coordenadas adequado e que estas sejam independentes entre si. Sendo assim, usando coordenadas polares temos a posição da massa m dada por:

$$x = l \cdot \cos \theta \quad (3.16)$$

$$y = l \cdot \sin \theta. \quad (3.17)$$

As velocidades, derivando (3.16) e (3.17), são das por:

$$\dot{x} = -l\dot{\theta} \cdot \sin \theta \quad (3.18)$$

$$\dot{y} = l\dot{\theta} \cdot \cos \theta. \quad (3.19)$$

Podemos identificar que este sistema tem uma coordenada generalizada θ , ou seja, tem 1 grau de liberdade (G.L.=1). Neste caso temos que $q = \theta$ e $\dot{q} = \dot{\theta}$, coordenada e velocidade generalizadas.

A energia cinética é dada por:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

que das equações (3.18) e (3.19) resultam em:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 l^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \Rightarrow T = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 l^2. \quad (3.20)$$

A energia potencial é dada por:

$$V = -mgl \cos \theta. \quad (3.21)$$

Sendo assim, das equações (3.20) e (3.21), a Lagrangeana será dada por:

$$L = T - V \Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 l^2 + mgl \cos \theta. \quad (3.22)$$

Logo, pelo Teorema 3.2, temos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (3.23)$$

então precisamos calcular o que segue:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{\theta}l^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta. \quad (3.24)$$

Substituindo (3.24) em (3.23):

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\theta}l^2) + mgl \sin \theta = 0 \Rightarrow m\ddot{\theta}l^2 + mgl \sin \theta = 0. \quad (3.25)$$

Dividindo (3.25) por ml^2 , temos a equação que descreve o movimento de m (para pequenas oscilações, ou seja, $\sin \theta \approx \theta$):

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0. \quad (3.26)$$

Exemplo 3.6 (Máquina de Atwood). *Conforme Exemplo 2.7, a máquina de Atwood pode ser vista na Figura 7.*

Vínculos: $x_1 + x_2 = l$

Por se tratar de um sistema com 1 grau de liberdade, pois os vínculos são descritos por $x_1 + x_2 = l$, logo, $x_2 = l - x_1$. Tomando $x_1 = x$, onde $q = x$ é a coordenada generalizada do sistema.

A energia Cinética é dada por:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2. \quad (3.27)$$

A energia potencial é dada por:

$$V = -m_1gq - m_2g(l - q). \quad (3.28)$$

Sendo assim, temos a Lagrangeana:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 + m_1gq + m_2g(l - q). \quad (3.29)$$

Para que possamos determinar as equações de Euler-Lagrange, precisamos calcular:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (m_1 + m_2)\dot{q} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial q} = m_1g - m_2g = (m_1 - m_2)g. \quad (3.30)$$

Como as equações de Euler-Lagrange são da forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (3.31)$$

Substituindo (3.30) em (3.31):

$$\frac{d}{dt} [(m_1 + m_2)\dot{q}] - (m_1 - m_2)g = 0.$$

Logo, temos:

$$(m_1 + m_2)\ddot{q} = (m_1 - m_2)g.$$

O que resultam em:

$$\ddot{q} = \ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g. \quad (3.32)$$

Exemplo 3.7 (Pêndulos idênticos acoplados por mola). *Com base no Exemplo 2.8, considere os pêndulos conforme Figura 8.*

Este sistema tem grau de liberdade 2, ou seja, tem duas coordenadas generalizadas $q_1 = \theta_1$ e $q_2 = \theta_2$.

A energia Cinética é dada por:

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{\theta}_1^2 + m_2\dot{\theta}_2^2)l^2 = \frac{1}{2}ml^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2). \quad (3.33)$$

A energia potencial total é dada pela soma da energia potencial da mola e energia potencial de cada pêndulo:

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{Mola}} + V_{\text{Pêndulo}} \\ &= \frac{kl^2}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{mgl}{2}(\theta_2^2 + \theta_1^2). \end{aligned} \quad (3.34)$$

A Lagrangeana será dada por:

$$L = \frac{1}{2}ml^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{kl^2}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{mgl}{2}(\theta_2^2 + \theta_1^2). \quad (3.35)$$

Para que possamos determinar as equações de Euler-Lagrange, precisamos calcular:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= ml^2\dot{\theta}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= ml^2\dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = kl^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -kl^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_2.$$

Como as equações de Euler-Lagrange são da forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0. \quad (3.37)$$

Substituindo (3.36) em (3.37):

$$\frac{d}{dt} \left(ml^2 \dot{\theta}_1 \right) - kl^2(\theta_2 - \theta_1) + mgl\theta_1 = 0 \quad (3.38)$$

$$\frac{d}{dt} \left(ml^2 \dot{\theta}_2 \right) + kl^2(\theta_2 - \theta_1) + mgl\theta_2 = 0.$$

Logo, temos:

$$ml^2 \ddot{\theta}_1 - kl^2(\theta_2 - \theta_1) + mgl\theta_1 = 0 \quad (3.39)$$

$$ml^2 \ddot{\theta}_2 + kl^2(\theta_2 - \theta_1) + mgl\theta_2 = 0,$$

que são as equações de Euler-Lagrange que descrevem o movimento do sistema de dois pêndulos idênticos acoplados por mola. Note que são equações diferenciais de segunda ordem.

3.4 TRANSFORMAÇÃO DE LEGENDRE

Para conhecermos o formalismo Hamiltoniano, vamos abordar, agora, sobre a transformação de Legendre, o que, por sua vez, nos levará à equação ou função de Hamilton (Hamiltoniana) e, conseqüentemente, às equações do movimento de Hamilton.

Além disto, esta transformação, é, também, uma ferramenta matemática muito útil, pois transforma funções em um espaço vetorial em funções no espaço dual.

Segundo [5, cap.3, seção 14A], seja $y = f(x)$ uma função convexa¹(ou seja, $f''(x) > 0$), uma transformação de f é uma nova função g de uma nova variável p , que é construída da seguinte maneira (Figura 16):

Desenhamos o gráfico de f no plano xy . Seja p um número dado. Considere a reta $y = px$.

Tomamos o ponto $x = x(p)$ no qual a curva f está mais distante da reta y na direção vertical: para cada p a função $px - f(x) = F(p, x)$ tem um máximo em relação a x no ponto $x(p)$. Agora definimos

¹Referências no Apêndice B.1.7.1 e B.1.7.2.

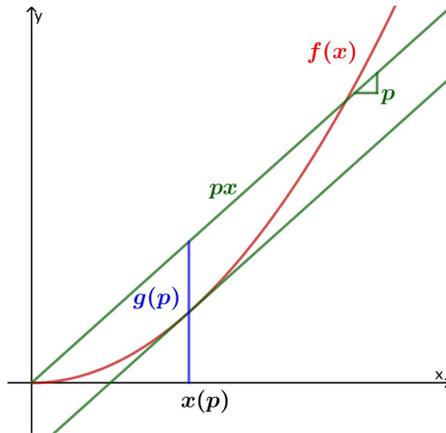


Figura 16 – Construção da transformação de Legendre

$g(p) = F(p, x(p))$. Esta transformação é chamada de *transformação de Legendre*.

O ponto $x(p)$ é definido pela condição de extremante $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, ou seja, $f'(x) = p$. Como f é uma função convexa, então $x(p)$ é único, se existir.

Exemplo 3.8. *Abaixo, alguns exemplos de funções $g(p)$:*

$$(i) \text{ Para } f(x) = x^2 \Rightarrow F(p, x) = px - x^2 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = p - 2x = 0 \\ \Rightarrow x(p) = \frac{1}{2}p \Rightarrow g(p) = F\left(p, \frac{p}{2}\right) = p \cdot \frac{1}{2}p - \left(\frac{1}{2}p\right)^2 \Rightarrow g(p) = \frac{p^2}{4}.$$

$$(ii) \text{ Para } f(x) = \frac{mx^2}{2} \Rightarrow F(p, x) = px - \frac{mx^2}{2} \Rightarrow f'(x) = mx = p \\ x(p) = \frac{p}{m} \Rightarrow g(p) = F\left(p, \frac{p}{m}\right) = p \cdot \frac{p}{m} - \frac{m\left(\frac{p}{m}\right)^2}{2} \Rightarrow g(p) = \frac{p^2}{2m}.$$

$$(iii) \text{ Para } f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha} \Rightarrow F(p, x) = px - \frac{x^\alpha}{\alpha} \Rightarrow f'(x) = x^{\alpha-1} = p \\ x(p) = p^{\frac{1}{\alpha-1}} \Rightarrow g(p) = F\left(p, p^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) = p \cdot p^{\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{p^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\alpha} \Rightarrow \\ g(p) = p \cdot p^{\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{p^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\alpha} = \frac{(\alpha-1)p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha}.$$

Que podemos escrever:

$$g(p) = \frac{p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha - 1}.$$

Tomando $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$, temos: $g(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$, desde que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

3.4.1 Involutividade

Para uma função f , diferenciável (referências no Apêndice B.1.1), quantas vezes forem necessárias, com $f''(x) > 0$ (referências no Apêndice B.1.7.1), veremos, no seguinte teorema, a involutividade, em geral², da transformação de Legendre.

Teorema 3.4. *A transformação de Legendre é involutiva, isto é, se sob a transformação de Legendre, f for levada para g , então a transformação de Legendre de g a levará para f .*

Demonstração. *Seja $g(p)$. Aplicando a transformação de Legendre, temos:*

$$G(x, p) = xp - g(p), \quad (3.40)$$

onde usamos uma nova variável x para determinar a nova função transformada G .

Como $\frac{\partial G}{\partial p} = 0 \Rightarrow g'(p) = x$, pois $p(x)$ é ponto de máximo de G , logo, a transformação de Legendre de $g(p)$, será em função em x , ou seja, $G(x, p(x))$. Chamaremos esta função transformada de $f(x)$, ou seja, $f(x) = G(x, p(x))$.

Note que, geometricamente, G é a ordenada do ponto de abscissa x na tangente ao gráfico de $f(x)$, com inclinação p .

A a função g é linear em x com $\frac{\partial G}{\partial x} = p$, pois p é fixo e, tomando $x = x(p)$, temos a transformação de Legendre, para $f(x)$:

$$f(x) = G(x, p) = px - g(p).$$

Veja Figura 17 abaixo:

²Por exemplo, no caso de eletromagnetismo, esta transformação deve ser tratada de forma diferente.

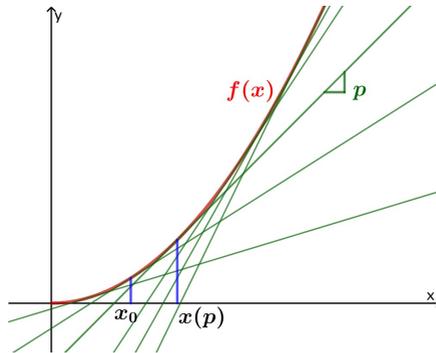


Figura 17 – Involutividade da transformação de Legendre [5, cap.3, seção 14C]

Com p variando e $x = x_0$ fixo, temos que $G(x, p)$ assume valores que são as ordenadas dos pontos de intersecção da reta $x = x_0$ com a reta tangente ao gráfico de $f(x)$, para cada inclinação p .

Usando convexidade (veja Teorema B.2, no Apêndice B.1.7.1), as tangentes estão abaixo de f , logo, o máximo de $G(x, p)$ para $x(p_0)$ é a função $f(x)$. ■

Corolário 3.1. *Seja uma determinada família de retas dadas por $y = px - g(p)$, então sua transformada tem a equação $y = f(x)$, onde f é a transformação de Legendre.*

Uma relação entre a função f e sua transformada pode ser vista abaixo [5, cap.3, seção 14]

Definição 3.8. *Sejam duas funções f e g , que são transformações de Legendre, uma da outra. Estas funções são chamadas de duais no sentido de Young.*

*Pela definição de transformasção de Legendre, temos que $F(x, p) = px - f(x)$ é menor ou igual a $g(p)$ para qualquer x e p , desta forma, temos a **desigualdade de Young**, dada por:*

$$px \leq f(x) + g(p). \quad (3.41)$$

Exemplo 3.9. *Abaixo, alguns exemplos da desigualde de Young:*

(i) Para $f(x) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow$ temos $g(p) = \frac{p^2}{2}$.

Então, $px \leq \frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{2}$ para todo x e p .

- (ii) Para $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ e $g(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$ onde $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ e $\alpha > 1$ e $\beta > 1$, temos a desigualdade de Young dada por $px \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}$ para todo $x > 0$ e $p > 0$.

3.4.2 Transformação de Legendre para mais de uma variável

Seja uma função $f(x)$ convexa e $x = (x_1, \dots, x_n)$, ou seja, a forma quadrática $\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dx, dx \right)$ é positiva, então a transformação de Legendre é a função $g(p)$ da variável vetorial $p = (p_1, \dots, p_n)$ sendo, a transformação de Legendre:

$$g(p) = F(p, x(p)) = \max_x F(p, x),$$

onde:

- (i) $F(p, x) = px - f(x)$ e $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, sendo px produto interno no espaço positivo definido no espaço euclidiano \mathbb{R}^n
- (ii) $\max_x F(p, x)$ é máximo da norma de F com relação a x no espaço \mathbb{R}^n

Sendo assim, a transformação de Legendre, quando estão envolvidas mais de uma variável, pode ser aplicada, inclusive a desigualdade de Young.

Teorema 3.5. *Seja f uma forma quadrática $f(x) = \sum f_{ij}x_ix_j$. A sua transformação de Legendre é, também uma forma quadrática $g(p) = \sum g_{ij}p_ip_j$, e que os valores de ambas as formas nos pontos correspondentes coincidem (Figura 17):*

$$f(x(p)) = g(p) \quad e \quad g(p(x)) = f(x).$$

Demonstração. *Seja $f(x)$ uma forma quadrática dada por $f(x) = \sum f_{ij}x_ix_j$, sendo $i, j = 1, \dots, n$, logo, derivando f com relação a x_i ,*

temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j,k} f_{jk} x_j x_k \right) \\ &= \sum_{j,k} f_{jk} \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i} \right) x_k + \sum_{j,k} f_{jk} x_j \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{j,k} f_{jk} \delta_{ji} x_k + \sum_{j,k} f_{jk} x_j \delta_{ki},\end{aligned}$$

sendo δ_{ji} e δ_{ki} chamados de Delta de Kronecker (ou símbolo de Kronecker), então $\frac{\partial x_j}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial x_k}{\partial x_i}$ são dadas por:

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad e \quad \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ki} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ 1 & \text{se } i = k \end{cases}, \quad (3.42)$$

então

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i} &= \sum_k f_{ik} x_k + \sum_j f_{ji} x_j \\ &= \sum_k f_{ik} x_k + \sum_k f_{ki} x_k \\ &= \sum_k (f_{ik} + f_{ki}) x_k.\end{aligned}$$

A transformação de Legendre para f fica:

$$F(p, x) = \sum_i p_i x_i - f(x) = \sum_i p_i x_i - \sum_{i,j} f_{ij} x_i x_j. \quad (3.43)$$

Derivando F :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k p_k x_k \right) - \sum_k (f_{ik} + f_{ki}) x_k \\ &\stackrel{\delta_{ki}}{=} p_i - \sum_k (f_{ik} + f_{ki}) x_k.\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$, para todo k , temos:

$$p_i = \sum_k (f_{ik} + f_{ki}) x_k \Rightarrow p_i = \sum_k C_{ik} x_k. \quad (3.44)$$

Note que (3.44) representa um sistema linear e supondo $f_{ik} + f_{ki} = C_{ik}$ invertível, dada a convexidade de f . Temos como solução deste sistema:

$$x_i = \sum_k \bar{C}_{ik} p_k. \quad (3.45)$$

Substituindo na equação (3.43), temos:

$$\begin{aligned} F(p, x) &= \sum_i p_i x_i - \sum_{kj} f_{kj} x_k x_j \\ &= \sum_i p_i \left(\sum_k \bar{C}_{ik} p_k \right) + \sum_{kj} f_{kj} \left(\sum_l \bar{C}_{kl} p_l \right) \times \left(\sum_m \bar{C}_{jm} p_m \right) \\ &= \sum_{ik} \bar{C}_{ik} p_i p_k + \sum_{kjl m} (f_{kj} \bar{C}_{kl} \bar{C}_{jm}) p_l p_m. \end{aligned}$$

Considerando $\bar{a}_{lm} = \sum_{kj} f_{kj} \bar{C}_{kl} \bar{C}_{jm}$, temos:

$$F(p, x) = \sum_{ik} (\bar{C}_{ik} + \bar{a}_{ik}) p_i p_k = \sum_{ik} g_{ik} p_i p_k = g(p) \quad (3.46)$$

ou

$$g(p) = \sum_{ij} g_{ij} p_i p_j, \quad (3.47)$$

ou seja, de (3.47), $g(p) = \sum_{ik} g_{ik} p_i p_k$, é uma forma quadrática.

Por outro lado, trocando x_k por p_k e f_{ik} por g_{ik} e usando o raciocínio anterior obtemos

$$f(x) = \sum_{ij} f_{ij} x_i x_j, \quad (3.48)$$

ou seja, de (3.48), $f(x) = \sum_{ij} f_{ij} x_i x_j$, é uma forma quadrática.

Desta forma temos que:

$$f(x(p)) = \sum_{kjl m} (f_{kj} \bar{C}_{kl} \bar{C}_{jm}) p_l p_m = \sum_{ij} g_{ij} p_i p_j = g(p),$$

sendo $f_{kj} \bar{C}_{kl} \bar{C}_{jm} = g_{ij}$ que, por sua vez,

$$g(p(x)) = \sum_{kjl m} (g_{kj} C_{kl} C_{jm}) x_l x_m = \sum_{ij} f_{ij} x_i x_j = f(x),$$

sendo $g_{kj} C_{kl} C_{jm} = f_{ij}$. ■

3.5 AS EQUAÇÕES DE HAMILTON

Como podemos observar, a transformação de Legendre nos leva do espaço de configuração, dado pelas coordenadas q 's e \dot{q} 's, a um novo espaço, dado pelas coordenadas p 's e q 's. Segue a definição deste espaço:

Definição 3.9. Chamamos de **Espaço de Fase**, o espaço dado pelas coordenadas $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, de dimensão $2n$. Sendo que q_i são as coordenadas generalizadas e p_i são os momentos associados (dados pela equação 3.14).

Desse jeito a transformação de Legendre nos leva do espaço de configuração para o espaço de fase.

Exemplo 3.10. Se $n = 1$ temos o plano de fase de equação $\dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial q}$.

O movimento de um sistema de partículas descrito pelo sistema de n equações de segunda ordem de Euler-Lagrange, pode ser transformado em um sistema simétrico de $2n$ equações de primeira ordem usando a transformação de Legendre. Este sistema é chamado de **Equações de Hamilton** ou **Equações Canônicas**.

Para que possamos entender a equivalência entre as equações de Euler-Lagrange e as de Hamilton, devemos considerar o sistema de equações de Euler-Lagrange, conforme equações (3.14) e (3.15):

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \text{onde} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \quad (3.49)$$

Vamos assumir que a função Lagrangeana $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

é convexa³ em relação a \dot{q} .

Teorema 3.6. *O sistema de n equações de segunda ordem de Euler-Lagrange é equivalente ao sistema de $2n$ equações de primeira ordem de Hamilton, dado por [5, cap.3, seção 15A]:*

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad e \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (3.50)$$

onde $H(p, q, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)$ é a transformação de Legendre da função Lagrangeana em função de \dot{q} .

Demonstração.

Dada a Lagrangeana $L(q, \dot{q}, t)$. A transformação de Legendre de L com relação a \dot{q} , é a função:

$$H(p) = p\dot{q} - L(\dot{q}). \quad (3.51)$$

Sendo que \dot{q} é dado em termos de p , que, por sua vez, é dado em termos de q e t , pois $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$.

Como o diferencial total de $H(p, q, t)$, que é dado por

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (3.52)$$

é igual ao diferencial total da equação (3.51) para $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, que é dada por:

$$dH = \dot{q} dp - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (3.53)$$

podemos comparar os coeficientes de dq , dp e dt , das equações (3.52) e (3.53), temos:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (3.54)$$

Como das equações (3.49) e (3.54):

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad e \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q},$$

³Função convexa é frequentemente dita quadrática positiva

então

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (3.55)$$

Sendo assim, das equações (3.54) e (3.55), temos um sistema de equações diferenciais de primeira ordem que são as **equações de Hamilton**:

Observe que se $q(t)$ satisfaz as equações de Euler-Lagrange, então, o par $(p(t), q(t))$ satisfaz as equações de Hamilton.

A demonstração da recíproca é análoga, e, portanto, os sistemas de equações de Euler-Lagrange e de Hamilton são equivalentes. ■

Das equações de Hamilton, temos que $-\frac{\partial H}{\partial q_i}$ e $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ determinam um campo vetorial e em cada ponto (p, q) do espaço de fase existe um vetor de dimensões \mathbb{R}^{2n} dado por $\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)$.

3.5.1 A Função Hamiltoniana e a Energia Total

Vamos supor que a Lagrangeana de um sistema mecânico seja da forma $L = T - V$, sendo T a energia cinética e V a energia potencial deste sistema. Vamos considerar que a energia cinética T tenha forma quadrática em relação a \dot{q} , ou seja,

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad \text{onde } a_{ij} = a_{ij}(q, t), \quad (3.56)$$

e a energia potencial não dependa de \dot{q} , mas somente de q , e seja da forma:

$$V = V(q). \quad (3.57)$$

Como a energia cinética T assume uma forma quadrática em \dot{q} , a Hamiltoniana também assume esta forma. Antes de relacionar a função Hamiltoniana à energia total de um sistema, precisamos do Teorema de Euler sobre funções homogêneas:

Teorema 3.7 (Teorema de Euler). *[4, Apêndice B] Se $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ é homogênea de grau k , então $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf(x_1, \dots, x_n)$.*

Agora sobre a relação entre a função Hamiltoniana e a energia total de um sistema, como T é uma função homogênea, temos o seguinte

teorema:

Teorema 3.8. *A Hamiltoniana H é a energia total do sistema, ou seja,*

$$H = T + V. \quad (3.58)$$

Demonstração.

Pela equação (3.51) e pelo Teorema 3.7, temos:

$$\begin{aligned} H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L &= \sum_i \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i - (T - V) = 2T - (T - V) \\ &\Rightarrow H = T + V. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A lei de conservação de energia fica melhor definida pelo próximo corolário:

Corolário 3.2. *Para o sistema Hamiltoniano temos $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$, em particular, para um sistema cuja a Hamiltoniana não dependa explicitamente do tempo, ou seja, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, a Hamiltoniana é constante de movimento:*

$$H(p(t), q(t)) = Cte.$$

Demonstração. *Considerando a variação de H ao longo da trajetória $H(p(t), q(t), t)$, temos:*

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \underbrace{\left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \right]}_0 + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t},$$

ou seja, se t não aparece em H , a energia é conservada. ■

3.5.2 Coordenadas cíclicas

Para o caso que alguma coordenada generalizada q_i não fizer parte da Lagrangeana o momento generalizado p_i é constante, ou seja, nos remete à lei de conservação do momento angular. Esta coordenada q_i é definida como segue:

Definição 3.10. *Uma coordenada generalizada q_i é chamada de cíclica, se não fizer parte da Lagrangeana, ou seja, $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.*

Teorema 3.9. *O momento generalizado correspondente a uma coordenada cíclica q_i é conservado, ou seja, p_i é constante de movimento.*

Demonstração. *Pela equação de Euler-Lagrange, temos que:*

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \text{o resultado segue.} \quad \blacksquare$$

À semelhança da função de Euler-Lagrange, a função de Hamilton pode ser determinada usando um sistema de coordenadas adequado com o objetivo de reduzir o sistema de equações de Hamilton e esta escolha pode ocasionar, muitas vezes, que a função Hamiltoniana seja independente de algumas delas (coordenadas) [5, cap.3, seções 13B e 15A].

Definição 3.11. *Se a função Hamiltoniana,*

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n, t),$$

*não depende de uma coordenada q_i , que a menos de uma permutação, podemos considerar, $i = 1$, ou seja, q_1 , é chamada de **cíclica**.*

Isto se deve ao fato de que q_1 também não faz parte da função Lagrangeana, isto é $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$, sendo assim, $\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$.

Quando temos coordenada cíclica envolvida, a função de Hamilton tem a forma conforme mostra o próximo corolário:

Corolário 3.3. *Considerando que q_1 é uma coordenada cíclica, temos que p_1 será a primeira integral determinada. Neste caso, para as coordenadas que restam, a variação no tempo é a equivalente a um sistema de $n - 1$ coordenadas independentes q_2, \dots, q_n . Logo a função de Hamilton tem a forma:*

$$H(p_2, \dots, p_n, q_2, \dots, q_n, t, c),$$

onde, H depende do parâmetro $c = p_1$, que é constante de movimento.

Demonstração.

Consideremos $P = (p_2, \dots, p_n)$ e $Q = (q_2, \dots, q_n)$. A função H varia ao longo da trajetória $H(p(t), q(t), t)$, logo as equações de Hamilton são das da seguinte forma:

Integrando $\frac{dp_1}{dt} = 0$ obtemos que $p_1 = \text{Cte}$, portanto, no sistema de equações para P e Q , o p_1 entra como parâmetro da função H .

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial P} & \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{dP}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial Q} & \frac{dp_1}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Neste sistema de $2n - 2$ equações a equação para a coordenada q_1 é da forma $\frac{dq_1}{dt} = f(t)$, onde $f(t) = \frac{\partial}{\partial p_1} H(p_1, P(t), Q(t), t)$, cuja integral é imediata. ■

Ainda sobre coordenadas cíclicas, temos o próximo corolário:

Corolário 3.4. *Todo sistema com grau de liberdade dois ($n = 2$) que possui uma coordenada cíclica é integrável.*

Demonstração. *Se o sistema tem uma coordenada cíclica e como $n = 2$, ele é unidimensional, logo, uma equação diferencial ordinária com condições iniciais fixas, ou seja, é integrável, então tem solução única, e resulta em:*

$$H(P, Q) = c. \quad \blacksquare$$

3.6 APLICAÇÕES DO FORMALISMO DE HAMILTON

Abaixo, temos alguns exemplos de aplicações da formalização Hamiltoniana.

Exemplo 3.11 (Pêndulo simples plano).

Sabemos, do Exemplo 3.5 que a Lagrangeana é dada por:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 l^2 + mgl \cos \theta.$$

Pelo Teorema 3.6, temos:

$$H(p, q, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t). \quad (3.59)$$

Sabemos que $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, então:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{\theta}l^2. \quad (3.60)$$

Logo, temos que $\dot{\theta} = \frac{p}{ml^2}$.

Substituindo (3.22) e (3.60) em (3.59), temos:

$$\begin{aligned}
 H &= p\dot{\theta} - \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2l^2 - mgl \cos \theta \\
 &= \frac{p^2}{ml^2} - \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2l^2 - mgl \cos \theta \\
 &= \frac{2p^2 - m\dot{\theta}^2l^4}{2ml^2} - mgl \cos \theta \\
 &= \frac{2p^2 - p^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta \\
 &= \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta \\
 &= \frac{1}{2} \frac{p^2}{ml^2} - mgl \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Para pequenas oscilações, temos que $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$, então:

$$H = \frac{1}{2} \frac{p^2}{ml^2} - mgl + \frac{mgl\theta^2}{2}. \tag{3.62}$$

Para determinar as equações de Hamilton, das equações (3.50), temos:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \end{cases}.$$

Logo as equações de Hamilton que descrevem o movimento para o pêndulo são dadas por ($\sin \theta_1 \approx \theta_1$):

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{p}{ml^2} \\ \dot{p} = -mgl\theta \end{cases}. \tag{3.63}$$

Estas equações são equações diferenciais de primeira ordem. Se derivar a primeira equação vamos obter:

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{p}}{ml^2} \Rightarrow \dot{p} = m\ddot{\theta}l^2.$$

Substituindo na segunda equação temos:

$$m\ddot{\theta}l^2 = -mgl\theta \Rightarrow m\ddot{\theta}l^2 + mgl\theta = 0.$$

Logo:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0. \quad (3.64)$$

Note que, nos três formalismos, chegamos às mesmas equações que descrevem o movimento de um pêndulo simples, conforme as equações (2.28), (3.26) e (3.64).

Exemplo 3.12 (Máquina de Atwood). *Conforme Exemplo 2.7, a máquina de Atwood pode ser vista na Figura 7, vamos construir as equações de Hamilton para descrever o movimento deste sistema.*

Sabemos, conforme a equação (3.29), que a Lagrangeana é dada por:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 + m_1gx + m_2g(l - q).$$

Logo, pelo Teorema 3.6, temos a Hamiltoniana:

$$H(p, x, t) = p\dot{q} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 - m_1gq - m_2g(l - q). \quad (3.65)$$

Como p é dado por:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (m_1 + m_2)\dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m_1 + m_2}. \quad (3.66)$$

Substituindo (3.66) em (3.65), temos:

$$\begin{aligned} H &= p\dot{q} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 - m_1gq - m_2g(l - q) \\ &= p \frac{p}{m_1 + m_2} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 - m_1gq - m_2g(l - q) \\ &= \frac{2p^2 - p^2}{2(m_1 + m_2)} - m_1gq - m_2g(l - q) \\ &= \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} - m_1gq - m_2g(l - q). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Calculando as derivadas de H , para determinar as equações de Hamilton, ou seja, $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ e $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$, temos:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{p}{m_1 + m_2} \\ \dot{p} = (m_1 - m_2)g \end{cases} . \quad (3.68)$$

De forma análoga aos itens a) e b) deste exemplo, devemos derivar a primeira equação, de (3.68), para substituir \dot{p} na segunda e vamos encontrar:

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m_1 + m_2} \Rightarrow \dot{p} = \ddot{q}(m_1 + m_2).$$

na segunda equação, temos:

$$\ddot{q}(m_1 + m_2) = (m_1 - m_2)g \Rightarrow \ddot{q} = \ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g \quad (3.69)$$

Veja que chegamos às mesmas equações nos três formalismos, ou seja, as equações (2.38), (3.32) e (3.69) são as mesmas equações.

Exemplo 3.13 (Pêndulos idênticos acoplados por mola). *Com base no Exemplo 2.8, considere os pêndulos conforme Figura 8.*

Para descrever o movimento para este sistema, usando o formalismo de Hamilton, vamos usar a Lagrangeana, já determinada no Exemplo 3.7, mostrado abaixo:

Sabemos, conforme a equação (3.35), que a Lagrangeana é dada por:

$$L = \frac{1}{2}ml^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{kl^2}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 - \frac{mgl}{2}(\theta_2^2 + \theta_1^2).$$

Logo, pelo Teorema 3.6, temos a Hamitoniana:

$$H = p_{\theta_1}\dot{\theta}_1 + p_{\theta_2}\dot{\theta}_2 - \frac{1}{2}ml^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{kl^2}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{mgl}{2}(\theta_2^2 + \theta_1^2). \quad (3.70)$$

Como p_{θ_1} , p_{θ_2} , $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ são dados por:

$$\begin{aligned} p_{\theta_1} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = ml^2\dot{\theta}_1 \Rightarrow \dot{\theta}_1 = \frac{p_{\theta_1}}{ml^2} \\ p_{\theta_2} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = ml^2\dot{\theta}_2 \Rightarrow \dot{\theta}_2 = \frac{p_{\theta_2}}{ml^2} \end{aligned} . \quad (3.71)$$

Substituindo (3.71) em (3.70), temos:

$$\begin{aligned}
H &= p_{\theta_1} \dot{\theta}_1 + p_{\theta_2} \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{kl^2}{2} (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{mgl}{2} (\theta_2^2 + \theta_1^2) \\
&= \frac{p_{\theta_1}^2}{ml^2} + \frac{p_{\theta_2}^2}{ml^2} - \frac{ml^2 \dot{\theta}_1^2}{2} - \frac{ml^2 \dot{\theta}_2^2}{2} + \frac{kl^2}{2} (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{mgl}{2} (\theta_2^2 + \theta_1^2) \\
&= \frac{2p_{\theta_1}^2 - p_{\theta_1}^2}{2ml^2} + \frac{2p_{\theta_2}^2 - p_{\theta_2}^2}{2ml^2} + \frac{kl^2}{2} (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{mgl}{2} (\theta_2^2 + \theta_1^2) \\
&= \frac{p_{\theta_1}^2}{2ml^2} + \frac{p_{\theta_2}^2}{2ml^2} + \frac{kl^2}{2} (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{mgl}{2} (\theta_2^2 + \theta_1^2). \tag{3.72}
\end{aligned}$$

Sendo assim, de (3.72), temos as equações de Hamilton:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_1}} = \frac{p_{\theta_1}}{ml^2} \\ \dot{p}_{\theta_1} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = kl^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_1 \\ \dot{\theta}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta_2}} = \frac{p_{\theta_2}}{ml^2} \\ \dot{p}_{\theta_2} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_2} = -kl^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_2 \end{array} \right. . \tag{3.73}$$

mais precisamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 = \frac{p_{\theta_1}}{ml^2} \\ \dot{p}_{\theta_1} = kl^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_1 \\ \dot{\theta}_2 = \frac{p_{\theta_2}}{ml^2} \\ \dot{p}_{\theta_2} = -kl^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_2 \end{array} \right. . \tag{3.74}$$

Nas aplicações, tanto da dinâmica Lagrangeana quanto Hamiltoniana, podemos observar que as formas como foram construídas são expressivamente mais simples com relação ao formalismo Newtoniano.

É importante salientar, de forma resumida, as principais diferenças entre os formalismos Newtoniano, Lagrangeano e Hamiltoniano, que está na tabela abaixo:

Tabela 1 – Principais diferenças entre Newton e Lagrange

Comparação entre os formalismos		
Newton	Lagrange	Hamilton
Equações de 2ª ordem e dependem da posição, velocidade e do tempo	n equações de 2ª ordem e dependem somente de coordenadas generalizadas ⁴ $n = 3N - K$ e, geralmente, do tempo	$2n$ equações de 1ª ordem e dependem de coordenadas e momentos generalizados e, geralmente do tempo
Equações do tipo vetorial	Equações do tipo escalar	Equações do tipo escalar
A dinâmica depende das forças atuando no sistema	A dinâmica depende do extremo de uma funcional a partir da Lagrangeana	A dinâmica depende da Hamiltoniana

Deste ponto em diante, vamos ver como o sistema Hamiltoniano se comporta, em um espaço $2n$ -dimensional, sob a ação de um grupo a um parâmetro que depende do tempo.

⁴Espaço de configuração de N partículas com dimensão $3N$ e K vínculos.

4 O TEOREMA DE LIOUVILLE E A CONSERVAÇÃO DE VOLUME

As transformações de coordenadas nos sistemas analisados sob o ponto vista tanto do formalismo Lagrangeano, quanto do formalismo Hamiltoniano, tem como principal objetivo simplificar as equações de movimento. Isto será mostrado usando o princípio variacional de Hamilton modificado.

Neste sentido, estas equações, são invariantes sob a transformação de Legendre.

Neste capítulo estudaremos as transformações que preservam as equações de Hamilton e o volume infinitesimal, o que será mostrado pelo Teorema de Liouville.

4.1 AS EQUAÇÕES DE HAMILTON PELO PRINCÍPIO VARIACIONAL

A descrição do movimento de um sistema mecânico, como visto na seção 3.2.2, segundo [6, cap.4, seção 4.5], é tal que a ação é um extremo. Pelo Teorema 3.2, temos o funcional:

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt.$$

independe de usar o formalismo Lagrangeano ou o Hamiltoniano, pois, a Hamiltoniana, como sabemos, é a transformação de Legendre da Lagrangeana e é dada por:

$$H(p_i, q_i, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t).$$

O que pode ser escrito da seguinte forma:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t). \quad (4.1)$$

Note que a Lagrangeana pode ser escrita em termos de p e q e \dot{q} deve ser escrito em termos de q e p (das equações de Hamilton (3.50)).

Logo, o princípio variacional é dado da seguinte forma:

$$d \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) \right) dt = 0. \quad (4.2)$$

Isto implica que teremos $2n$ equações de Euler-Lagrange, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial p_i} &= 0 \end{aligned}, \quad (4.3)$$

onde L é a Lagrangeana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$.

Então, vamos obter, de (4.3), as equações de Hamilton:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (p_i) + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 &\Rightarrow \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{d}{dt} (0) - \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 &\Rightarrow \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned}. \quad (4.4)$$

Esta versão do princípio variacional é chamada de **Princípio Variacional de Hamilton Modificado**.

4.2 TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS

Queremos encontrar transformações que deixam as equações movimento invariantes.

Fazendo uma transformação de coordenadas generalizadas, inversível (referências no Apêndice B.1.8), no espaço de configuração, do tipo:

$$q_i \longrightarrow Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_n, t),$$

logo, por ser inversível, existe uma transformação:

$$q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_n, t),$$

o que transforma $L(q_i, \dot{q}_i, t) \longrightarrow L(Q_i, \dot{Q}_i, t)$ e as equações de Euler-Lagrange tem a forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0.$$

4.2.1 Mudança de Variáveis no formalismo Hamiltoniano

No formalismo Hamiltoniano, temos $2n$ variáveis independentes $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$. Para que uma transformação de variáveis preserve as equações de Hamilton é necessária a escolha de uma transformação adequada [4, cap.8, seção 8.1].

Sendo assim, vamos considerar uma mudança de variáveis em que as novas coordenadas sejam da forma:

$$Q_k = Q_k(q_k, p_k, t) \quad \text{e} \quad P_k = P_k(q_k, p_k, t). \quad (4.5)$$

Sendo esta transformação inversível, queremos que exista uma função $K(Q_k, P_k, t)$, tal que, as equações de Hamilton sejam invariantes, ou seja:

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial K}{\partial P_k} \quad \text{e} \quad \dot{P}_k = \frac{\partial K}{\partial Q_k}, \quad (4.6)$$

que são da mesma forma das equações originais:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \text{e} \quad \dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad (4.7)$$

para qualquer H .

4.2.2 Funções Geradoras

Para determinar a transformação adequada a ser aplicada, de forma que as equações de Hamilton sejam invariantes, vamos utilizar o princípio variacional de Hamilton Modificado (4.2), por ser mais prático e eficiente.

Do princípio variacional temos [6, cap.5, seção 5.1]:

$$d \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - H(p_k, q_k, t) \right) dt = 0, \quad (4.8)$$

sendo assim, as novas equações, com as novas coordenadas, decorrem do princípio variacional:

$$d \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=1}^n P_k \dot{Q}_k - K(P_k, Q_k, t) \right) dt = 0, \quad (4.9)$$

sendo K a nova Hamitoniana.

Uma condição suficiente para a validade de (4.8) e (4.9), é a de que os integrandos difiram pela derivada total em relação ao tempo, ou seja, se:

$$f = g + \alpha \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx},$$

então, se existe $\Phi(q, p, t)$ que satisfaz:

$$d \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\Phi(q, p, t)}{dt} = d[\Phi(q(t_2), p(t_2), t_2) - \Phi(q(t_1), p(t_1), t_1)] = 0, \quad (4.10)$$

sendo que $dq_k(t_0) = dq_k(t_1) = 0$ e $dp_k(t_0) = dp_k(t_1) = 0$, então a transformação preserva a formas Hamitoniana das equações de movimento se a relação:

$$\sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - H = \sum_{k=1}^n P_k \dot{Q}_k - K + \frac{d\Phi(q, p, t)}{dt}, \quad (4.11)$$

está satisfeita. Ou seja, se as variações da ação (4.8) e (4.9) são zero, implica que os pontos críticos ficam invariantes sob esta transformação.

Definição 4.1. *Uma transformação inversível e diferenciável*

$(q, p) \longrightarrow (Q, P)$, *dados por* $Q_k = Q_k(q_k, p_k, t)$ *e* $P_k = P_k(q_k, p_k, t)$, *ambas diferenciáveis e inversíveis, é chamada de Transformação Canônica, se e somente se, existem funções* $\Phi(q, p, t)$ *e* $K(Q, P, t)$, *tal que:*

$$\sum_{k=1}^n (p_k \dot{q}_k - P_k \dot{Q}_k) + (K - H) = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.12)$$

que na forma diferencial é dada por:

$$\sum_{k=1}^n (p_k dq_k - P_k dQ_k) + (K - H) dt = d\Phi. \quad (4.13)$$

Agora, vamos tomar $Q_k = Q_k(q_k, p_k, t)$, que são n equações, que presumimos tenham solução para p_k 's, dados por $p_k = p_k(q, Q, t)$. Sendo assim, se possível, substituindo em (4.5), temos

$$P_k = P_k(q, f(q, Q, t), t).$$

Considerando a função $F_1(q, Q, t)$, dada por:

$$F_1(q, Q, t) = \Phi(q, p(q, Q, t), t). \quad (4.14)$$

O que substituindo em (4.13), resultam em:

$$\sum_{k=1}^n (p_k dq_k - P_k dQ_k) + (K - H) dt = dF_1. \quad (4.15)$$

Note que a diferencial total de F_1 é dada por:

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k} dQ_k \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (4.16)$$

Comparando as equações (4.16) e (4.15), temos:

$$p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k} \quad \text{e} \quad (4.17)$$

$$P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}. \quad (4.18)$$

Resultando, assim, na nova Hamiltoniana:

$$K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (4.19)$$

A equação (4.17) fornece uma função g_k em termos de q , Q e t , ou seja, $p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k} = g_k(q, Q, t)$. Pelo Teorema da Função Implícita (referências no Apêndice B.1.8), existe um domínio que possibilita escrevermos $Q_k = Q_k(q, p, t)$.

Por sua vez, substituindo Q_k em (4.18), obtemos $P_k = P_k(q, p, t)$, determinando a transformação canônica que leva $(q, p, t) \rightarrow (Q, P, t)$.

A partir deste ponto, substituiremos q_k e p_k em (4.19) para obter a nova Hamiltoniana $K(Q, P, t)$.

A função F_1 é chamada de **Função Geradora** de uma transformação canônica. Outras formas para a função geradora podem ser usadas, desde que as variáveis sejam independentes.

Alguns exemplos de formas para estas funções:

$$F_2(q, P, t), \quad F_3(p, Q, t) \quad \text{e} \quad F_4(p, P, t).$$

Vejamos uma transformação canônica em uma aplicação.

Exemplo 4.1 (Pêndulo simples plano).

Usando o Exemplo (3.11), temos que a função Hamitoniana é dada por:

$$H = \frac{1}{2} \frac{p^2}{ml^2} - mgl + \frac{mgl\theta^2}{2}. \quad (4.20)$$

Tomando $\omega^2 = \frac{g}{l}$ e $g = \omega^2 l$, vamos investigar uma transformação da forma:

$$p = f(P) \cos Q \quad (4.21)$$

$$\theta = \frac{f(P) \text{sen } Q}{m\omega l^2}. \quad (4.22)$$

O que nos leva à nova Hamitoniana, dada por:

$$K = \frac{f^2(P)}{2ml^2} - mgl.$$

Dividindo (4.21) por (4.22):

$$\frac{p}{\theta} = \frac{f(P) \cos Q}{\frac{f(P) \text{sen } Q}{m\omega l^2}},$$

definimos $\frac{\partial F_1}{\partial \theta}$ da seguinte forma:

$$p = \frac{m\omega l^2 \theta \cos Q}{\text{sen } Q} = \frac{\partial F_1}{\partial \theta}. \quad (4.23)$$

Então, F_1 é dada por:

$$F_1 = \frac{m\omega l^2 \theta^2 \cos Q}{2 \text{sen } Q}. \quad (4.24)$$

Logo, para determinar P :

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega l^2 \theta^2}{2 \text{sen}^2 Q}. \quad (4.25)$$

O que possibilita determinar θ :

$$\theta^2 = \frac{2P \text{sen}^2 Q}{m\omega l^2} \Rightarrow \theta = \sqrt{\frac{2P}{m\omega} \frac{\text{sen } Q}{l}}. \quad (4.26)$$

Substituindo em (4.23):

$$p = l\sqrt{2Pm\omega} \cos Q. \quad (4.27)$$

Das equações (4.22) e (4.26), temos:

$$\frac{f(P) \operatorname{sen} Q}{m\omega l^2} = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \frac{\operatorname{sen} Q}{l}.$$

Logo $f(P)$ é da por:

$$f(P) = l\sqrt{2Pm\omega}. \quad (4.28)$$

O que nos leva à nova Hamitoniana:

$$K(Q, P, t) = \omega P - m\omega^2 l^2, \quad (4.29)$$

e as novas equações de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega \\ \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \end{cases}. \quad (4.30)$$

Cujas soluções são:

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 + \omega t \\ P &= C \end{aligned}. \quad (4.31)$$

Como P é constante, temos que, a nova Hamitoniana também é constante de movimento, ou seja, nos dá a energia total do sistema:

$$K(Q, P, t) = E \Rightarrow \omega P - m\omega^2 l^2 = E \Rightarrow P = \frac{E + m\omega^2 l^2}{\omega}. \quad (4.32)$$

Substituindo (4.31) e (4.32) nas equações (4.26) e (4.27), temos:

$$\begin{aligned} \theta &= \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2 l^2} + 2} \operatorname{sen}(Q_0 + \omega t) \\ p &= l\sqrt{2Em + 2m^2\omega^2 l^2} \cos(Q_0 + \omega t) \end{aligned}. \quad (4.33)$$

Uma situação particular é quando f_1 (ou Φ) depende somente do tempo t . Neste caso definimos um grupo a um parâmetro, como será mostrado na próxima seção.

4.3 TEOREMA DE LIOUVILLE

Antes de vermos o Teorema de Liouville, precisamos de algumas definições, lemas e teoremas importantes, que veremos a seguir.

Vamos considerar, por conveniência, que H não dependa explicitamente do tempo¹, ou seja, $H = H(p, q)$.

As definições e teoremas que seguem, foram adaptadas de [5, cap.3, seção 16].

Definição 4.2. Chamamos de grupo a um parâmetro ao grupo abeliano² (referências no Apêndice B.13), dado por:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow G \\ t &\rightarrow g_t \end{aligned}$$

tal que:

- (i) para todo $g \in G$, existe $t \in \mathbb{R} \mid g = g_t$
- (ii) $Ig = f_0$
- (iii) $g_{(-t)} = (g_t)^{-1}$

Com isto, podemos definir Fluxo de Fase:

Definição 4.3. O grupo a um parâmetro de transformações do espaço de fase é chamado de **fluxo de fase**, denotado por g_t , ou seja,

$$g_t : (p(0), q(0)) \mapsto (p(t), q(t)) \quad (4.34)$$

onde $p(t)$ e $q(t)$ são as soluções das equações de Hamilton (veja Figura 18).

Isto quer dizer que estamos vendo o movimento ou a dinâmica sofrer uma certa deformação (ou transformação) de um ponto (ou domínio) do espaço de fase e, esta transformação depende do ponto inicial ou das condições iniciais. Em outras palavras, é um outro modo de descrever a evolução de uma sistema: o estado do sistema é uma transformação geométrica do estado inicial.

Agora, suponhamos um sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (4.35)$$

¹Presumimos, aqui, que todas as soluções das equações de Hamilton possam ser estendidas para todos os valores do tempo, isto é, seja solução global.

²Referências no Apêndice B.13.

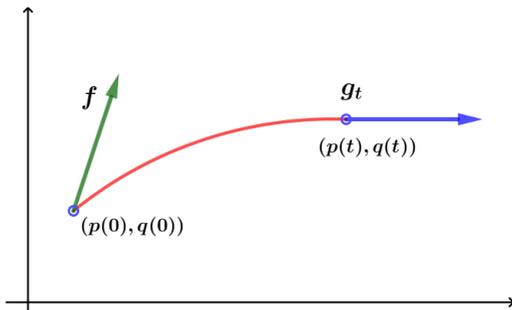


Figura 18 – Fluxo de Fase [5, cap.3, seção 16A]

cujas soluções podem ser estendidas para todo t e, em particular, se f é linear, então ela pode ser escrita como uma matriz, ou seja, para um vetor $x = (x_1, \dots, x_n)$, no espaço de fase podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = f(x) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

A partir desse ponto, vamos considerar f na forma (4.36)

Seja $\{g_t\}$ o grupo correspondente às transformações. Sua forma infinitesimal é dada por:

$$g_t(x) = x + f(x)t + O(t^2), \quad t \rightarrow 0. \quad (4.37)$$

Seja, também, $D(0)$ uma região no x -espaço e $V(0)$ seu volume:

$$v(t) = \text{volume de } D(t) \Rightarrow D(t) = g_t D(0),$$

isto é, aplicando g_t sobre cada ponto em $D(0)$.

Antes de enunciarmos o Teorema de Liouville, vamos precisar do lema abaixo além de um outro teorema a seguir, para que possamos demonstrar este teorema (de Liouville).

Lema 4.1. *Para qualquer matriz $A = (a_{ij})$, temos:*

$$\det(I + At) = 1 + t \operatorname{tr} A + O(t^2), \quad (t \rightarrow 0), \quad (4.38)$$

onde $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ é o traço da matriz A (soma dos elementos da diagonal principal) e I a matriz identidade.

Demonstração. Pela definição de determinante [9, cap.2, seção 2.1] de uma matriz $A = (a_{ij})$, temos:

$$\det(A) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \operatorname{sgn}(\Pi_{i_1, i_2, \dots, i_n}) \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

sendo:

$$\operatorname{sgn}(\Pi_{i_1, i_2, \dots, i_n}) = \begin{cases} +1 & \text{se } \Pi_{i_1, i_2, \dots, i_n} \text{ é uma permutação par} \\ -1 & \text{se } \Pi_{i_1, i_2, \dots, i_n} \text{ é uma permutação ímpar} \end{cases}.$$

Em particular, para a matriz $(I + At)$, dada por:

$$(I + At) = \begin{bmatrix} 1 + a_{11}t & a_{12}t & \cdots & a_{1n}t \\ a_{21}t & 1 + a_{22}t & \cdots & a_{2n}t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}t & a_{n2}t & \cdots & 1 + a_{nn}t \end{bmatrix}.$$

Para calcular o determinante $\det(I + At)$, vamos analisar da seguinte forma:

- (i) temos $2n$ produtos de n entradas da matriz, tal que, não há duas entradas de mesma linha ou mesma coluna;
- (ii) para o produto das entradas da matriz em que $i_1 = 1, \dots, i_n = n$, ou seja, $(1 + a_{11}t) \cdot (1 + a_{22}t) \cdots (1 + a_{nn}t)$, temos 1 , n termos lineares em t e os restantes em potências de t com expoentes maiores ou iguais a 2;
- (iii) para os demais $2n - 1$ produtos, temos termos em potências de t com expoentes maiores ou iguais a 2, pois os termos lineares se anulam devido a paridade das permutações.

Sendo assim, podemos escrever:

$$\det(I + At) = (1 + a_{11}t) \cdot (1 + a_{22}t) \cdots (1 + a_{nn}t) + O(t^2) \quad (4.39)$$

$$= 1 + (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})t + O(t^2). \quad (4.40)$$

Veja que em $O(t^2)$ é dado em termos de potências de t com expoentes maiores ou iguais a 2. ■

Para os lemas e teoremas que seguem, vamos considerar $f(x)$ a mesma função do sistema de equações diferenciais ordinárias (4.35).

Seja v o volume de uma região $D(0)$ do espaço de fase e suponhamos que cada pontos de $D(0)$ está evoluindo segundo (4.35), temos o seguintes resultados.

Lema 4.2. *A variação do volume v de uma região $D(0)$ é dada por:*

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \int_{D(0)} \operatorname{div} f dx \quad (dx = dx_1, \dots, dx_n),$$

sendo $\operatorname{div} f$ o divergente de f (referências no Apêndice B.14).

Demonstração.

Para qualquer t , a mudança de variável em uma integral é dada por:

$$\int_{D(0)} \det \frac{\partial g_t(x)}{\partial x} dt. \quad (4.41)$$

Determinando $\frac{\partial g_t(x)}{\partial x}$ pela equação (4.37), temos:

$$\frac{\partial g_t(x)}{\partial x} = I + \frac{\partial f}{\partial x} t + O(t^2), \quad (t \rightarrow 0). \quad (4.42)$$

Sendo assim, da equação (4.42) e do Lema 4.1, temos:

$$\det \frac{\partial g_t(x)}{\partial x} = 1 + t \operatorname{tr} \frac{\partial f}{\partial x} + O(t^2). \quad (4.43)$$

Mas $\operatorname{tr} \frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} f$, então:

$$v(t) = \int_{D(0)} [1 + t \operatorname{div} f + O(t^2)] dx. \quad \blacksquare$$

Teorema 4.1. *Se $\operatorname{div} f \equiv 0$, então g_t preserva o volume:*

$$v(t) = v(0). \quad (4.44)$$

Demonstração. Tomando $t = t_0$, então do Lema 4.2 temos:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=t_0} = \int_{D(0)} \operatorname{div} f dx,$$

se $\operatorname{div} f \equiv 0$, $\frac{dv}{dt} \equiv 0$. ■

Agora podemos enunciar o Teorema de Liouville, descrito abaixo:

Teorema 4.2 (Teorema de Liouville). *O fluxo de fase preserva o volume para qualquer região D , ou seja,*

$$\operatorname{Vol. de } g_t D = \operatorname{Vol. de } D \tag{4.45}$$

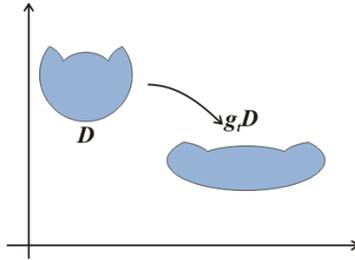


Figura 19 – Conservação do volume

Demonstração.

O Teorema de Liouville é um caso particular do Teorema 4.1, logo para as equações de Hamilton, temos:

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \equiv 0. \quad \blacksquare$$

Vejamos, agora, aplicações do Teorema de Liouville.

4.4 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE LIOUVILLE

Exemplo 4.2 (Pêndulo simples plano). *Sabemos que as equações de Hamilton são dadas pelo sistema de equações diferenciais abaixo:*

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \frac{p}{ml^2} \\ \dot{p} &= -mgl\theta \end{cases}. \quad (4.46)$$

Dadas condições iniciais $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$, cuja solução é $\theta(t) = K \cos(\omega t + \varphi)$.

Sendo assim, $\theta(0) = K \cos \varphi$.

O operador g_t aplicado a $\theta(0)$, nos dá:

$$g_t(\theta(0)) = \theta(t) = K \cos(\omega t + \varphi).$$

Agora para $t' \neq t$ temos que:

$$g_{t'}(\theta(t)) = \theta(t + t') = K \cos(\omega(t + t') + \varphi) = g_{t+t'}(\theta(0)).$$

Isto de forma geral. Agora, para deslocamento infinitesimal no tempo, ou seja, $t \rightarrow 0$, para o sistema (4.46) a transformação é dada por:

$$g_t \begin{pmatrix} \theta \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{ml^2} p \\ -m\omega^2 l^2 \theta \end{pmatrix} t,$$

pois,

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \theta \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{ml^2} p \\ -m\omega^2 l^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Note que $\text{div } f = \frac{\partial \theta}{\partial p} + \frac{\partial p}{\partial q} \equiv 0$ o que mostra que g_t preserva volume, segundo Teorema de Liouville. Neste caso, em particular, a transformação é uma rotação o que reafirma a preservação de volume.

Podemos, a seguir, conhecer outro teorema importante, em que tem como base o teorema de Liouville, que segundo [4, cap.8, seção 8.7] tem o seguinte enunciado:

Teorema 4.3 (Teorema de Recorrência de Poincaré). *Seja g uma aplicação bijetiva, contínua, que conserva volumes e deixa invariante um domínio limitado D do espaço de fase de um sistema mecânico $gD = D$, então, em qualquer vizinhança U de um ponto qualquer de D existe um ponto $x \in U$ que retorna a U depois de um número finito de aplicações de g , ou seja, $g_n x \in U$ para algum inteiro positivo n .*

Demonstração.

Como D é limitado, seu volume é finito. Considere as imagens de U na Figura 20, ou seja, $\underbrace{U, gU, g_2U, \dots, g_nU}_{n+1}$:

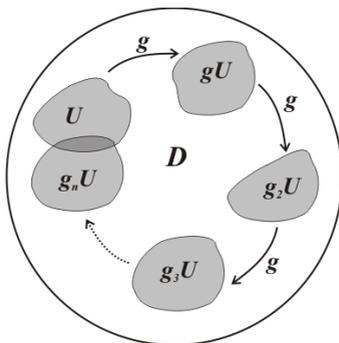


Figura 20 – Teorema de Recorrência de Poincaré

Como estes conjuntos tem o mesmo volume, eles não podem ser disjuntos para todo n , pois D tem volume finito (D é limitado), caso contrário, ou seja, se fossem disjuntos D seria ilimitado, o que contraria a hipótese. Sendo assim, existem k, l interiores positivos com $k > l$ tal que:

$$g_k U \cap g_l U \neq \emptyset \Rightarrow g_{k-l} U \cap U \neq \emptyset.$$

Se y estiver nesta intersecção, então:

$$y = g_n x, \text{ com } x \in U (n = k - l) \Rightarrow x \in U \text{ e } g_n x \in U (n = k - l). \quad \blacksquare$$

O Teorema de Poincaré aplica-se, por exemplo, ao fluxo de fase g_t mostrando que quase todos os pontos móveis retornam repetidamente à vizinhança de sua posição inicial.

A seguinte situação, paradoxal [11] decorrente dos Teoremas de Liouville e Poincaré, está descrita abaixo:

Em um recipiente com duas câmaras e um gás em uma delas. Se a divisória for aberta, depois de algum tempo as moléculas deste gás,

irão, novamente, acumular-se na primeira câmara, conforme xemplo-refparadoxo.



Figura 21 – Paradoxo do Teorema de Poincaré

Este paradoxo se deve ao fato de que "depois de algum tempo" pode ser mais longo que o "tempo de existência do universo".

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como vimos, a construção do modelo analítico da Mecânica é muito rica e bastante fértil. No caso deste trabalho, mostramos a construção dos formalismos analíticos para a mesma dinâmica, investindo em generalizações e abstrações, mas, por outro lado, resultando em métodos sistemáticos para alcançar as soluções geométricas que descrevam a evolução de sistemas físicos, em geral, e mecânicos, em particular.

As aplicações, mesmo algumas delas mais avançadas, proporcionam não só a formação e nivelamento do professor, mas disponibilizam ferramentas para uso em sala de aula, enriquecendo o dia a dia promovendo o aprendizado e a interação entre diferentes áreas do conhecimento.

Considerando sistemas mecânicos conservativos e sujeitos a vínculos holônomos, traçamos um comparativo entre os formalismos de Newton, de Lagrange e de Hamilton, em que foi possível visualizarmos a evolução no processo de construção dos modelos envolvidos, ficando evidente que, a medida que avançamos entre estes formalismos, este processo foi ficando cada vez mais econômico, esbelto e elegante.

Começamos com as equações de Newton, que envolvem um número expressivo de variáveis e forças de vínculo de forma explícita, decorrendo disto, a necessidade de análise vetorial, devido a natureza destas equações. Enquanto que as equações de Euler-Lagrange, de natureza escalar, dependem de um número reduzido de variáveis, equações estas, obtidas do extremo de um funcional.

Para o formalismo de Hamilton, vimos que o processo é ainda mais simples com relação ao formalismo de Lagrange e à função Hamiltoniana decore da transformação de Legendre, aplicada a Lagrangeana. Desta função obtemos um sistema simétrico de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem que, também, são de natureza escalar.

Além de tudo isto, mostramos que estas equações, sob uma transformação canônica, não singular, são invariantes, ou seja, uma transformação inversível dada por uma função geradora adequada. Para casos de transformações singulares, como por exemplo, no eletromagnetismo, o tratamento é diferente e requer mais aprofundamento [2].

As transformações canônicas são de grande importância, pois não servem somente para mudar as variáveis, tornando assim as equações mais simples na análise do movimento, mas também, por que abrem uma infinidade de possibilidades aplicáveis às diferentes áreas da Física, em particular na Mecânica.

Nesta "ramificação" de aplicações podemos citar, por exemplo, a Mecânica Quântica [2], em que o formalismo de Hamilton é o primeiro passo necessário na passagem de um sistema clássico para a teoria quântica correspondente, usando uma mudança de variáveis adequada.

Outra área de relevante importância seria a Mecânica Relativista. Claro que para ambas as áreas, seriam necessários um estudo e desenvolvimento mais detalhado das transformações canônicas.

O Teorema de Liouville, sobre conservação de volume infinitesimal de uma região no espaço de fase, quando as equações de Hamilton estão sob a ação do fluxo de fase, caso particular das transformações canônicas, mostrou como se comporta a evolução de um sistema mecânico conservativo, descrito por estas equações.

Os formalismos descritos neste trabalho, em particular, o formalismo Hamiltoniano, e o Teorema de Liouville são marcantes no processo de geometrização da Mecânica[2] e de fundamental importância na construção do estudo da Geometria Simplética. Este trabalho é um primeiro passo para este estudo, o que implicaria [5] aprofundamento em variedades diferenciáveis, espaço tangente, fibrado tangente, formas diferenciais, álgebra e geometria simplética, entre outros.

REFERÊNCIAS

- 1 BURSZTYN, H. **Introdução à Geometria Gimplética**. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
https://books.google.com.br/books?id=_ThwkgEACAAJ acessado em maio de 2018. ISBN 9788524402463.
- 2 DERIGLAZOV A. A.; FILGUEIRAS, J. G. **Formalismo hamiltoniano e transformações canônicas em mecânica clássica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. ISBN 9788578610241.
- 3 LOPES, A. O. **Introdução à Mecânica Clássica**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2006. ISBN 853140956X.
- 4 LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. ISBN 8588325241.
- 5 ARNOLD, V. I. **Mathematical methods of classical mechanics**. New York: Springer-Verlag, 1989. ISBN 03879698903.
- 6 AGUIAR, M. A. M. d. **Tópicos de Mecânica Clássica**. Rio de Janeiro: CBPF - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 2011. ISBN 9788578611019.
- 7 NETO, J. a. B. **Mecânicas Newtonian, Lagrangiana e Hamiltoniana**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004. ISBN 8588325268.
- 8 BARATA, J. a. C. A. **Notas para Cursos de Física-Matemática - USP**. São Paulo: [s.n.], 2018. <http://denebola.if.usp.br> acessado em maio de 2018.
- 9 ANTON, H. **Álgebra Linear com Aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2001. ISBN 8573078472.
- 10 STEWART, J. **Cálculo, volume 2**. São Paulo: Cengage Learnig, 2013. ISBN 9788522112593.
- 11 LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica - Universidade Federal Fluminense**. Rio de Janeiro - RJ: [s.n.], 2010.
<https://www.youtube.com/user/MecanicaAnaliticaUFF/featured>
 acessado em maio de 2018.

- 12 MACCLUER, A. D. **Elementary Functional Analysis**. New York: SpringerScience, BusinessMedia, 2009.
- 13 LEITHOLD, L. **O cálculo com Geometria Análítica. Volume 2**. São Paulo: Harbra, 1994.
- 14 BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra, 1986.
- 15 LIMA, E. L. **Análise real volume 1. Funções de uma variável**. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. ISBN 9788524400483.
- 16 LIMA, E. L. **Análise real volume 2. Funções de n variáveis**. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. ISBN 988524402210.

APÊNDICE A - Apêndice A

A.1 PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT E A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

A.1.1 Deslocamentos virtuais e o Princípio de d'Alembert

A análise do movimento de um sistema mecânico, ou seja, a configuração deste sistema, consiste em definir as posições das partículas que o compõe a cada momento. Associando isto aos vínculos que este sistema tem, podemos ter uma infinidade de configurações.

A análise infinitesimal deste sistema, consiste em estudar os deslocamentos infinitesimais de uma configuração para outra, infinitesimalmente próxima, num dado instante t . Estes deslocamentos infinitesimais são chamados de *deslocamentos virtuais* e são denotados por $\delta\vec{r}_i$, sendo $i = 1, \dots, N$ para um sistema de N partículas.

Os deslocamentos virtuais tem as seguintes características [4, cap.1, seção 1.4]:

- (i) são infinitesimais;
- (ii) ocorrem num instante fixo;
- (iii) não violam os vínculos.

Sendo assim, podemos afirmar que, os trabalhos virtuais das forças de vínculo são zero, ou seja,

$$W_{\text{virt}} = \sum_i \vec{f}_i \delta\vec{r}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (\text{A.1})$$

onde:

\vec{f}_i : forças de vínculo

$\delta\vec{r}_i$: deslocamentos virtuais

Partindo de que o sistema está em equilíbrio, ou seja, está em uma situação estática, podemos escrever:

$$\vec{F}_i = 0, \quad (\text{A.2})$$

onde:

\vec{F}_i : resultante das forças que atuam no sistema

Então:

$$W = \sum_i \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (\text{A.3})$$

onde:

\vec{F}_i : resultante das forças que atuam no sistema

$\delta\vec{r}_i$: deslocamentos virtuais

Como \vec{F}_i pode ser escrita em termos das forças ativas atuantes e das forças de vínculo, temos:

$$\sum_i \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \delta\vec{r}_i = \mathbf{0}, \quad (\text{A.4})$$

onde:

$\vec{F}_i^{(a)}$: forças ativas atuantes

\vec{f}_i : forças de vínculo

Então das equações (A.1), (A.2), (A.3) e (A.4), temos:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \delta\vec{r}_i = \mathbf{0}, \quad (\text{A.5})$$

onde:

$\vec{F}_i^{(a)}$: forças ativas atuantes

$\delta\vec{r}_i$: deslocamentos virtuais

Que é chamado de *princípio dos trabalhos virtuais*. Note que somente as forças ativas estão envolvidas nesta equação e que as forças de vínculo não, ou seja, permite descrever um sistema em equilíbrio somente em termos das forças atuantes, mesmo que ele tenha algum vínculo.

Agora, analisando o caso dinâmico, a equação de movimento de cada partícula, pela segunda lei de Newton, pode ser escrita:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i &\Rightarrow \dot{\vec{p}} - \vec{F}_i^{(a)} = \vec{f}_i \\ \Rightarrow \sum_i \left(\dot{\vec{p}} - \vec{F}_i^{(a)} \right) \delta\vec{r}_i &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A equação (A.6), é chamada de *princípio de d'Alembert*, que proporciona uma vantagem sobre formalização Newtoniana, pois as forças de vínculo não estão envolvidas.

A.1.2 Equação de Euler-Lagrange pelo Princípio de d'Alembert

Embora o princípio de d'Alembert apresente grande redução na descrição do movimento de um sistema, ainda não é o ideal, pois os deslocamentos virtuais $\delta\vec{r}_i$ não são todos independentes entre si, bem como, nem todas as posições \mathbf{r}_i .

Agora, sejam $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ coordenadas generalizadas, tais que:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.7})$$

Usando os deslocamentos virtuais, o princípio dos trabalhos virtuais e o princípio de d'Alembert, podemos ter uma outra dedução para a equação de Euler-Lagrange, bem como para a função Lagrangeana, representada abaixo.

Segundo [4, cap.1, seção 1.4], ao usar coordenadas generalizadas $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ podemos representar os deslocamentos virtuais em termos de deslocamentos virtuais independentes, expressos da seguinte forma:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial\mathbf{q}_k} \delta\mathbf{q}_k. \quad (\text{A.8})$$

Podemos representar o princípio de d'Alembert da seguinte forma:

$$\sum_i \left(m_i \dot{\mathbf{v}}_i - \vec{F}_i^{(a)} \right) \delta\vec{r}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_i m_i \dot{\mathbf{v}}_i \delta\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \delta\vec{r}_i. \quad (\text{A.9})$$

Usando uma notação abreviada $\vec{F}_i^{(a)} = \mathbf{F}_i$ e $\vec{r}_i = \mathbf{r}_i$, temos, das equações (A.8) e (A.9) temos:

$$\Rightarrow \sum_i \sum_k m_i \dot{\mathbf{v}}_i \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial\mathbf{q}_k} \delta\mathbf{q}_k = \sum_i \sum_k \mathbf{F}_i \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial\mathbf{q}_k} \delta\mathbf{q}_k = \sum_k \mathbf{Q}_k \delta\mathbf{q}_k, \quad (\text{A.10})$$

onde:

$$\mathbf{Q}_k = \sum_i \mathbf{F}_i \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial\mathbf{q}_k}. \quad (\text{A.11})$$

Sendo \mathbf{Q}_k chamado de força generalizada ou k -ésima componente da força generalizada

Observação A.1. Para as próximas equações usaremos $i = 1, \dots, N$ e $k = 1, \dots, n$.

Observe que:

$$\frac{d}{dt} \left(m_i v_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) = m_i \dot{v}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} + m_i v_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right),$$

que pode ser escrita:

$$m_i \dot{v}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(m_i v_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right) - m_i v_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right). \quad (\text{A.12})$$

Derivando a equação (A.7) com relação ao tempo, temos a velocidade:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_k} \dot{\mathbf{q}}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \quad (\text{A.13})$$

Observe que $\dot{\mathbf{q}}_k$ é chamada de *velocidade generalizada*.

Derivando com relação a $\dot{\mathbf{q}}_k$ (velocidade generalizada), temos:

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial r_i}{\partial q_k}. \quad (\text{A.14})$$

Das equações (A.10) e (A.12) temos:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \dot{v}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial q_k} \right] \\ &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}. \end{aligned}$$

Como sabemos, pela equação (2.15), T , a energia cinética é dada por:

$$T = \frac{1}{2} m_i v_i^2,$$

sendo $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, então:

$$\sum_i m_i \dot{v}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}. \quad (\text{A.15})$$

Das equações (A.8), (A.10), (A.11), (A.12), (A.13), e (A.15) temos:

$$\sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{k}}} \right) - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{k}}} - \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \right] \delta \mathbf{q}_{\mathbf{k}}, \quad (\text{A.16})$$

ou, ainda, podemos escrever:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{k}}} \right) - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{k}}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{0} \quad (\text{A.17})$$

Quando as forças \mathbf{F}_i derivam de um potencial escalar $\mathbf{V}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$, temos da equação (2.17):

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i \mathbf{V}, \quad (\text{A.18})$$

então as forças generalizadas, usando as equações (A.11) e (A.18) podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} &= \sum_i \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{k}}} = - \sum_i \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{k}}} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{y}_i} \frac{\partial \mathbf{y}_i}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{k}}} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{z}_i} \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{k}}} \right) \\ &\Rightarrow \mathbf{Q}_{\mathbf{k}} = - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{k}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Substituindo (A.19) em (A.17), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{k}}} \right) - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{k}}} &= - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{k}}} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{k}}} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{k}}} (\mathbf{T} - \mathbf{V}) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Agora, como:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{k}}} = \mathbf{0},$$

a equação (A.20) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{k}}} (\mathbf{T} - \mathbf{V}) \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{k}}} (\mathbf{T} - \mathbf{V}) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.21})$$

Desta equação vem a função de Lagrange $\mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, também chamada de Lagrangeana, definida por:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{T} - \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.22})$$

então, a equação (A.21) pode ser, finalmente escrita:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{k}}} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{k}}} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.23})$$

APÊNDICE B - Apêndice B

B.1 TEOREMAS E DEFINIÇÕES IMPORTANTES

Observação B.1. *As demonstrações e maiores aprofundamentos podem ser encontrados nas referências citadas em cada item.*

B.1.1 Diferenciabilidade

Definição B.1. [13, cap.16, seção 16.5] *Se f for uma função de n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n e \bar{P} for o ponto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, então o incremento de f em \bar{P} será dado por:*

$$\Delta f(\bar{P}) = f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2 + \Delta x_1, \dots, \bar{x}_n + \Delta x_n) - f(\bar{P})$$

Definição B.2. [13, cap.16, seção 16.5] *Se f for uma função de n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n e o incremento de f no ponto \bar{P} for escrito como:*

$$\begin{aligned} \Delta f(\bar{P}) &= D_1 f(\bar{P}) \Delta x_1 + D_2 f(\bar{P}) \Delta x_2 + \dots + f(\bar{P}) \Delta x_n \\ &\quad + \epsilon \Delta x_1 + \dots + \epsilon \Delta x_n, \end{aligned}$$

onde $\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 \rightarrow 0, \dots, \epsilon_n \rightarrow 0$, quando:

$$(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0),$$

então f será diferenciável em \bar{P} .

B.1.2 Diferencial total

Definição B.3. [13, cap.16, seção 16.5] *Se f for uma função de n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n e f for diferenciável em P , então a diferencial total de f será a função df tendo valores funcionais dados por:*

$$df(P, \Delta x_1, \dots, \Delta x_n) = D_1 f(P) \Delta x_1 + \dots + f(P) \Delta x_n,$$

B.1.3 Espaço vetorial

Definição B.4. [14, cap.4, seção 4.2] Um espaço vetorial real é um conjunto V , não vazio, com duas operações: soma, $V \times V \rightarrow V$ e multiplicação por escalar, $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$, tais que, para qualquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$, as propriedades abaixo sejam satisfeitas:

- (i) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (associativa);
- (ii) $u + v = v + u$ (comutativa);
- (iii) $0 \in V$ tal que $0 + u = u + 0 = u$ (vetor nulo);
- (iv) Existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$ (simétrico e inverso aditivo);
- (v) Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot (u + v) = au + av$ (distributiva 1);
- (vi) Existe $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $(a + b)u = au + bu$ (distributiva 2);
- (vii) Existe $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $(ab)u = a(bu)$;
- (viii) Existe $1 \cdot u = u$.

B.1.4 Combinação Linear [14, cap.4, seção 4.4]

Definição B.5. Sejam V , um espaço vetorial real (ou complexo), $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e a_1, a_2, \dots, a_n números reais (ou complexos). Então, o vetor:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

é um elemento de V ao que chamamos de combinação linear de v_1, v_2, \dots, v_n .

B.1.5 Dependência Linear [14, cap.4, seção 4.5]

Definição B.6. Sejam V , um espaço vetorial, e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Dizemos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente (LI), ou que os vetores v_1, v_2, \dots, v_n são LI, se a equação:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$$

implica que $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \cdots = \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$. No caso em que exista algum $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$ dizemos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ é linearmente dependente (LD), ou que os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ são LD.

B.1.6 Transformação Linear [14, cap.4, seção 5.1]

Definição B.7. *Seja V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de V em W , $F : V \rightarrow W$, que satisfaz as seguintes condições:*

(i) *Quaisquer que sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} em V , $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$;*

(ii) *Quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} \in V$, $f(k\mathbf{v}) = kF(\mathbf{v})$.*

B.1.7 Funções Convexas

B.1.7.1 Funções convexas no \mathbb{R}^2 [15, cap.9, seção 8]

Definição B.8. *Se $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, a reta que liga os pontos (\mathbf{a}, A) e (\mathbf{b}, B) no plano \mathbb{R}^2 é o conjunto dos pontos $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^2$ tais que:*

$$\mathbf{y} = A + \frac{B - A}{b - a}(\mathbf{x} - \mathbf{a}),$$

ou equivalente:

$$\mathbf{y} = B + \frac{B - A}{b - a}(\mathbf{x} - \mathbf{b}).$$

Definição B.9. *Quando se tem uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, e são dados $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$, o segmento de reta que liga os pontos $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ e $(\mathbf{b}, f(\mathbf{b}))$, pertencentes ao gráfico de f , será chamado a secantes de \mathbf{ab} .*

Definição B.10. *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se convexa quando seu gráfico se situa abaixo de qualquer de suas secantes. Em termos precisos, a convexidade de f se exprime assim:*

$$\mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b} \text{ em } I \Rightarrow f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) + \frac{f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})}{b - a}(\mathbf{x} - \mathbf{a}),$$

ou seja,

$$a < x < b \text{ em } I \Rightarrow f(x) \leq f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b),$$

Portanto $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa no intervalo I se, e somente se, valem as desigualdades fundamentais:

$$a < x < b \text{ em } I \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Qualquer uma das desigualdades acima implica a outra. Elas significam que, para $a < b$, a secante ax tem inclinação menos que a secante ab e esta, por sua vez, tem inclinação menor do que a secante xb (veja Figura 22).

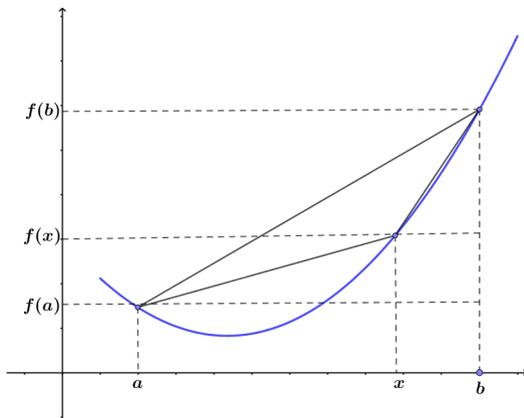


Figura 22 – Função convexa no \mathbb{R}^2 .

Teorema B.1. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa no intervalo I , então existem as derivadas laterais $f'_+(c)$ e $f'_-(c)$ em todo ponto $c \in I$.

Corolário B.1. Uma função convexa $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em todo ponto interior ao intervalo I .

Teorema B.2. As seguintes afirmações sobre a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, derivável no intervalo I , são equivalentes:

- (1) f é convexa;
- (2) A derivada $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente;

(3) Para quaisquer $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in I$ tem-se $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$, ou seja, o gráfico de \mathbf{f} está situado acima de qualquer de suas tangentes.

Corolário B.2. *Todo ponto crítico de uma função convexa é um ponto de mínimo absoluto.*

Corolário B.3. *Uma função $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes derivável no intervalo I , é convexa se, e somente se, $\mathbf{f}''(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in I$.*

B.1.7.2 Funções convexas no \mathbb{R}^n [16, cap.3, seção 6]

Definição B.11. *Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Uma função $\mathbf{f} : C \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se convexa quando, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ e $t \in [0, 1]$, tem-se;*

$$\mathbf{f}((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \leq (1-t)\mathbf{f}(\mathbf{x}) + t\mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

Alternativamente: \mathbf{f} é convexa quando, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ e $\alpha, \beta \in [0, 1]$ com $\alpha + \beta = 1$, tem-se $\mathbf{f}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \leq \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta\mathbf{f}(\mathbf{y})$.

Diz-se que $\mathbf{f} : C \rightarrow \mathbb{R}$ é côncava quando $-\mathbf{f}$ é convexa. Isto equivale a dizer que, para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ e $t \in [0, 1]$ tem-se $\mathbf{f}((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) \geq (1-t)\mathbf{f}(\mathbf{x}) + t\mathbf{f}(\mathbf{y})$. Todos os resultados a seguir estabelecidos para funções convexas valem, com as óbvias modificações, para funções côncavas.

Definição B.12. *A combinação linear $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{v}_k$ chama-se uma combinação convexa de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}$ quando $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ e $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, k$.*

Teorema B.3. *Se $C \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in C$ então toda combinação convexa $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{v}_k$ pertence a C . Além disso, se $\mathbf{f} : C \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa, tem-se:*

$$\mathbf{f}\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{v}_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \mathbf{f}(\mathbf{v}_i).$$

Teorema B.4. *Se $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. A fim de que a função $\mathbf{f} : C \rightarrow \mathbb{R}$ seja convexa, é necessário e suficiente que, para quaisquer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$, a função $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(t) = \mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$, $\mathbf{v} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})$, seja convexa.*

Equivalentemente: $\mathbf{f} : C \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, sua restrição a qualquer segmento de reta $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subseteq C$ é convexa.

Teorema B.5. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Então:*

- a) *O conjunto $E(f) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}; \mathbf{y} \geq f(\mathbf{x})\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, chamado o epigráfico de f , é convexo se, e somente se, f é convexa;*
- b) *Supondo-a de classe C^1 a função f é convexa se, e somente se, para $\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{v} \in U$ qualquer, tem-se:*

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{v}) \geq f(\mathbf{a}) + \langle \text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{v} \rangle;$$

- c) *Quando é de classe C^2 , a função f é convexa se, e somente se, sua forma quadrática hessiana é não-negativa em todos os pontos de U .*

Se $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. A fim de que a função $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ seja convexa, é necessário e suficiente que, para quaisquer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$, a função $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$, $\mathbf{v} = (\mathbf{b} - \mathbf{a})$, seja convexa.

Corolário B.4. *Todo ponto crítico \mathbf{a} de uma função convexa $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 é um ponto de mínimo global, isto é, $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ para todo $\mathbf{x} \in U$.*

B.1.8 Uma função implícita [16, cap.4, seção 1]

Os pontos de \mathbb{R}^{n+1} serão escritos sob a forma (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , onde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$. O teorema abaixo dá o significado preciso à afirmação e que "a equação $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c$ define implicitamente \mathbf{y} como função de \mathbf{x} " e estabelece uma condição suficiente para que ela seja verdadeira.

Teorema B.6. *[Teorema da função implícita]. Dada a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k ($k \geq 1$) no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, seja $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in U$ tal que $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq \mathbf{0}$. Existem uma bola $B = B(\mathbf{x}_0; \delta)$ e um intervalo $J = (\mathbf{y}_0 - \epsilon, \mathbf{y}_0 + \epsilon)$ com as seguintes propriedades:*

- 1) $B \times \bar{J} \subseteq U$ e $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq \mathbf{0}$ para todo $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B \times \bar{J}$;
- 2) Para todo $\mathbf{x} \in B$ existe um único $\mathbf{y} = \xi(\mathbf{x}) \in J$ tal que $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \xi(\mathbf{x})) = c$.

A função $\xi : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{J}$, assim definida, é de classe \mathbf{C}^k e suas derivadas parciais em cada ponto $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$ são dadas por:

$$\frac{\partial \xi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{-\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_i}(\mathbf{x}, \xi(\mathbf{x}))}{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \xi(\mathbf{x}))}.$$

B.1.9 Grupo

Definição B.13. [8, cap.2, seção 2.1] Um grupo é um conjunto não vazio \mathbf{G} dotado de uma operação binária $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$, denotada por "•", denominada produto, tal que, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i) Associatividade: para todos $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{G}$ vale $(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c} = \mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \bullet \mathbf{c})$;
- (ii) Elemento neutro: existe um único elemento $\mathbf{e} \in \mathbf{G}$, denominado elemento neutro, tal que $\mathbf{g} \bullet \mathbf{e} = \mathbf{e} \bullet \mathbf{g} = \mathbf{g}$ para todo $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$;
- (iii) Inversa: Para cada $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ existe um único elemento $\mathbf{h} \in \mathbf{G}$ tal que $\mathbf{g} \bullet \mathbf{h} = \mathbf{h} \bullet \mathbf{g} = \mathbf{e}$. Esse elemento é denominado a inversa de \mathbf{g} e denotado por \mathbf{g}^{-1} .

Um grupo \mathbf{G} é dito ser comutativo ou Abeliano se $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a}$ para todos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{G}$.

B.1.10 Divergente

Definição B.14. Adaptado de [10, cap.16, seção 16.5]. Seja um campo vetorial diferenciável $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tomando $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ chamamos a função $\text{div } \mathbf{f}$ de divergente de \mathbf{f} , tal que, $\text{div } \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\text{div } \mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} + \dots + \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_n}.$$

Em particular, para $n = 3$, temos:

$$\text{div } \mathbf{f} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \mathbf{z}}.$$