UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Waldir de Souza

COMO UM JOGO DE CARA E COROA PODE TE LEVAR AO MUNDO DAS FINANÇAS QUANTITATIVAS

Florianópolis

19 de dezembro de 2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

de Souza, Waldir
COMO UM JOGO DE CARA E COROA PODE TE LEVAR AO MUNDO DAS FINANÇAS QUANTITATIVAS / Waldir de Souza ; orientador, Vinicius Viana Luiz Albani, 2018.
73 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós Graduação em Matemática, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Modelo Binomial. 3. Modelo CAPM. I. Viana Luiz Albani, Vinicius . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

COMO UM JOGO DE CARA E COROA PODE TE LEVAR AO MUNDO DAS FINANÇAS QUANTITATIVAS
por
Waldir de Souza

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de "Mestre em Matemática", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática.

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
Coordenador do Curso

Banca Examinadora

Prof. Dr. Vinicius Viana Luiz Albani
UFSC
Orientador

Prof Dr Wagner Barbosa Muniz
UFSC

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
UFSC

Prof. Dr Fabio Junior Margotti
UFSC

Florianópolis, de 19 de dezembro de 2018.

À minha família, em especial minha esposa Marilza Bonifacio de Souza, minha mãe Donilia Francisca de Souza, meus irmãos Alcione, Sonia e Luciano.

AGRADECIMENTOS

À Deus em primeiro lugar.

À todos os professores que de certa forma contribuíram ao longo da minha vida acadêmica para meu crescimento acadêmico e profissional, em especial à meu Orientador, Dr Vinícius Viana Luiz Albani, pelo empenho dedicado á elaboração deste trabalho.

À todos os meus amigos, em especial os docentes de matemática do IFSC onde trabalho e à turma de mestrado.

À CAPES, e à UFSC pela realização do curso de Mestrado PROFMAT.

RESUMO

Neste trabalho mostramos que com a matemática do ensino Médio aliada a alguns conceitos um pouco mais avançados em teoria da probabilidade e em combinatória, é possível chegar a um modelo razoavelmente preciso em finanças quantitativas; ou seja, o Modelo Binomial. Com ele veremos como precificar contratos derivativos via o princípio da replicação e via o modelo de preço de ativo de capital (CAPM) encontraremos estratégias de investimento ótimo, de acordo com uma função de utilidade dada. Veremos também como usar estes modelos com dados reais, que estão disponíveis em sites especializados em finanças.

Palavras-chave: Análise combinatória. Probabilidade. Modelo. Finanças

ABSTRACT

In this work we show that with the mathematics of High School allied to some more advanced concepts from Probability theory and Combinatorics, it is possible to achieve a precise model in quantitative finances, that is, the Binomial Model. Under such model, we shall see how to price appropriately derivative contracts via the principle of replication. Via the CAPM model we shall also find optimal investment strategies, according to a given utility function. In addition, we shall see how to use these models with real data, which are available on charge from financial websites.

Keywords: Combinatorial analysis. Probability. Model. Finance

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O mercado financeiro possui muitos diferentes nichos em que agentes negociam bens e serviços através de órgãos, como bolsas de valores, que estabelecem regras e garantias. Alguns exemplos bem conhecidos desses nichos são:

i Mercado de ações, como os de Nova York, Londres, São Paulo e Tóquio;

ii Mercado de títulos, que lidam com títulos do governo e outros;

iii Mercado de câmbio, nos quais as moedas são compradas e vendidas;

iv Mercado de commodities, onde ativos físicos como petróleo, ouro, cobre, trigo ou eletricidade são negociados;

v Mercados de futuros e opções, nos quais os contratos derivativos são negociados.

Nesse trabalho trataremos de objetos conhecidos como derivativos financeiros, produtos derivativos, obrigações contingenciadas ou apenas derivativos, que são contratos que podem dar aos investidores uma grande variedade de oportunidades para adaptar suas estratégias às suas necessidades de investimento, como, por exemplo, redução de exposição ao risco de grandes perdas.

A negociação oficial de opções começou em 1973 no Chicago Board Options Exchange (CBOE), em que, inicialmente, apenas opções de compra de algumas das ações mais líquidas[1] foram negociadas. Desde então, este mercado cresceu vertiginosamente e, em alguns casos, excedeu significativamente o mercado das ações subjacentes. Muitas opções são registradas e liquidadas através de um banco. Este banco também é responsável pela coleta de margem de quem emite a opção. Essa margem é uma quantia que é mantida pelo banco em nome do emissor da opção,que garanta que ele seja capaz de cumprir suas obrigações,caso o preço do ativo mova-se contra ele.

À medida que o número e o tipo de produtos derivativos aumentaram,houve um crescimento correspondente na complexidade da precificação de opções,o que tornou este um assunto de pesquisa acadêmica e corporativa bastante ativo até o momento.

[1] Termo usado para contratos e objetos muito negociados

As opções têm dois usos principais: especulação e cobertura de risco. No segundo caso, estas podem ser vistas como um seguro contra movimentos adversos do subjacente. Observe que, uma carteira (capital total investido em diferentes ativos, derivativos, títulos e etc.) que contém apenas ativos cai quando o preço dos ativos cai, enquanto que uma carteira que contem somente opções aumenta de valor. Então, em algum lugar entre estes dois extremos é possível encontrar uma estratégia de investimento em que um pequeno movimento imprevisível no ativo não resulte em nenhum movimento imprevisível no valor da carteira. Esta relação é instantaneamente livre de risco. A redução do risco aproveitando essas correlações entre o ativo e a opção é chamada de cobertura de risco. Dentre todos os derivativos,talvez o mais simples seja a opção de compra europeia,o qual é um contrato que,em um tempo futuro conhecido como data de expiração ou vencimento,o titular da opção poderá comprar um certo ativo ou ação subjacente por uma quantidade prescrita,conhecida como preço de exercício ou strike. Assim,o valor de uma opção de compra depende do preço da ação subjacente,do preço de exercício, da data de expiração e também de uma 'aleatoriedade' do preço do ativo,chamada de volatilidade. Quanto maior a volatilidade,mais irregular será o gráfico do preço do ativo como função do tempo. Este contrato derivativo pode ser usado,por exemplo,para um investidor auferir lucro com uma ação cujo preço sobe repentinamente e acima do strike. No vencimento,o investidor exerce a opção e obterá um lucro dado pela diferença entre o preço da ação e o strike. Se o preço da ação for menor ou igual ao strike,a opção não vale nada. Outra opção europeia importante é a opção de venda,que permite ao seu titular vender a ação subjacente,no vencimento,por um valor prescrito ou strike. Quem vendeu a opção é então obrigado a comprar o ativo pelo strike. Assim,o titular de uma opção de compra quer que o preço do ativo suba,pois,quanto maior o preço do ativo no vencimento,maior será o lucro. Já o titular de uma opção de venda quer o preço do ativo caia o mais baixo possível. Existem ainda as versões americanas das opções acima, que podem ser exercidas a qualquer momento até o vencimento da opção e as opções exóticas,como a opção lookback,que depende do valor máximo atingido pelo ativo até o vencimento. Nosso papel nesta dissertação será mostrar que através do Modelo Binomial, num ambiente sem arbitragem (isto é,em que não se pode ter lucro sem investimento algum),usando ferramentas matemáticas acessíveis a alunos do ensino médio,é possível calcular o preço justo de contratos derivativos usando dados reais. Isso é de fundamental importância para que investidores consigam obter estratégias de investimento eficientes.

2 NOÇÃO DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

2.1 NOÇÃO INTUITIVA DE PROBABILIDADE

O primeiro trabalho escrito que se tem notícia e que envolve uma ideia intuitiva de probabilidade data de 1477. Trata-se de um comentário feito à Divina Comédia (Dante), no qual há referência às probabilidades associadas aos vários resultados decorrentes do jogo de três dados. Mas foi no século XVIII, com os chamados jogos de azar, que surgiram os primeiros estudos comprovados de probabilidade. Jogar astrágalos, que é um osso do tarso que tem forma quase cúbica lembrando um dado, fazia parte do lazer de soldados gregos e romanos. Grandes nomes da História da Matemática são responsáveis pelo corpo de conhecimentos que constitui hoje a Teoria das Probabilidades: Blaise Pascal (1623-1662), Pierre De Fermat (1601-1665), Christiaan Huygens (1629-1695), Isaac Newton (1642-1727), Jacob Bernoulli (1654-1705), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Thomas Bayes (1702-1761), Andréi Nikoláyevich Kolmogorov (1903-1987) entre outros.

Segundo (FELLER, 2008) a estatística,em relação à probabilidade, foi desenvolvida principalmente por Ronald Aylmer Fisher (1890 -1962) e Richard Von Mises (1883-1953). A noção de espaço amostral vem de Richard V. Mises. Essa noção possibilitou construir uma teoria estritamente matemática de probabilidade baseada na teoria das medidas. Essa abordagem apareceu nos anos 20 sob a influência de muitos autores. Um tratamento axiomático que representa o desenvolvimento moderno foi dado por A. Kolmogorov, que citaremos mais vezes em nosso trabalho.

A teoria da probabilidade permite que se calcule a chance de ocorrência de um número em um experimento aleatório.

Existem várias abordagens a respeito de probabilidade como se coloca nos exemplos a seguir:

- A chance de se obter cara com uma moeda honesta é de 50%.

  <u>Julgamento estatístico</u>: estima a frequência de uma determinada característica entre os membros de uma classe.

- A chance de que o Brasil adote o regime monárquico é muito pequena

  <u>Julgamento de credibilidade</u>: avalia o grau de confiança que temos a respeito da ocorrência de determinado elemento.

Estas técnicas de julgamentos foram desenvolvidas por diferentes estudiosos ao longo dos últimos três séculos e o nosso objetivo é obter algumas noções tiradas de cada uma delas, sem, entretanto, nenhum aprofundamento específico.

Examinando as seguintes afirmações:

I. É provável que João vá ao teatro amanhã.

II. É provável que Adão e Eva tenham existido.

Consegue-se perceber que em ambas estão presentes as ideias de: **incerteza ou grau de confiança** que depositamos naquilo que afirmamos.

A palavra provável também dá ideia de **futuro**, mas na afirmação II estamos falando de algo que deve ter ocorrido no **passado** - se é que ocorreu! Isto porque na afirmação II a ”probabilidade” não está ligada ao **tempo**, mas sim, à **eventual veracidade** da própria afirmação.

A Probabilidade e a Estatística se relacionam de um modo bastante curioso. Essencialmente, a probabilidade constitui um veículo que permite ao estatístico utilizar as informações de uma amostra para realizar inferências a respeito da população, ou descrever esta última, da qual a amostra é extraída. Nos tipos de problemas com que lida a teoria das probabilidades, a população é supostamente conhecida, e o problema consiste em calcular a probabilidade de se observar uma amostra particular. Em estatística, ocorre exatamente o oposto: a população é supostamente desconhecida, a amostra conhecida e se deseja realizar inferências acerca da população. Por conseguinte, a probabilidade raciocina da população para a amostra, enquanto a estatística atua de modo inverso, partindo da amostra para a população.

Além disso, em Teoria da Probabilidade assume-se um espaço amostral e uma medida de probabilidade abstrata e tenta-se encontrar leis que possam valer para o maior número de medidas de probabilidades possíveis (por isso usa-se medida de probabilidade abstrata).

2.2 EXPERIMENTO ALEATÓRIO

Experimento aleatório é aquele que poderá ser repetido sob as mesmas condições indefinidamente. Tal experimento apresenta variações de resultados, não sendo possível afirmar a priori qual será seu resultado antes que o mesmo tenha sido realizado. Em análise combinatória (uma subárea de Probabilidade que trataremos futuramente) é possível,descrever todos os possíveis resultados (as possibilidades), pois trabalhamos com espaços amostrais finitos. O lançamento de um dado constitui um experimento aleatório, pois esse experimento poderá ser repetido quantas vezes desejarmos. Antes do lançamento, não poderemos dizer qual será o resultado, mas somos capazes de relatar os possíveis resultados: sair o número 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

Podemos citar como um exemplo com infinitas possibilidades o ângulo entre o ponteiro dos segundos e o marcador das 12 horas em um relógio, quando esse ponteiro gira continuamente. Da mesma maneira os experimentos abaixo são aleatórios:

ε_1 : Retirar uma carta de um baralho com 52 cartas e observar seu naipe.

ε_2: Retirar com ou sem reposição bolas de uma urna que contém 5 bolas brancas e 6 pretas e observar a cor.

ε_3: Contar o número total de peças defeituosas na produção diária da máquina A.

ε_4: Jogar uma moeda 10 vezes e observar o número de caras.

ε_5: Sortear um aluno de determinada classe.

A variação de resultados é devida a uma multiplicidade de causas que não podemos controlar, as quais denominamos acaso.

2.3 ESPAÇO AMOSTRAL

Ao conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório chamaremos Espaço amostral e indicaremos por S.

Exemplos:

ε_1 : Retirar uma carta de um baralho e observar o naipe.

$S_1 = \{ouro, copas, paus, espadas\}$

ε_2 : Lançar um dado e observar o número na face voltada para cima.

$S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ε_3 : Contar o número total de peças defeituosas na produção diária da máquina A.

$S_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., n\}$

2.4 EVENTO

Qualquer conjunto de resultados de um experimento denomina-se evento. Sendo evento um subconjunto de S, indicaremos os eventos por letras maiúsculas: A, B, C, ...

Exemplo:

Seja o experimento ε : lançar um dado e observar a face voltada para cima. Temos:

Espaço Amostral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Seja o evento A: sair um número par, então $A = \{2, 4, 6\}$

Pode-se classificar um evento como sendo simples ou composto:

Evento simples é aquele formado por um único elemento do espaço amostral, é constituído de um único resultado de S.

Evento composto é aquele que possui mais de um elemento, é constituído de mais de um resultado de S, portanto, no exemplo acima, o evento A é composto.

O espaço amostral S e o conjunto vazio ϕ também são eventos, e são chamados respectivamente de *evento certo* e *evento impossível.*

Dois eventos A e B são denominados *mutuamente exclusivos* se eles não puderem ocorrer simultaneamente, isto é, $A \cap B = \phi$

2.5 ÀRVORE DE PROBABILIDADE

Em combinatória ou probabilidade, com espaços amostrais finitos, um **diagrama de árvore** (também denominado **árvore de probabilidades**) pode ser usado para representar um espaço de probabilidade. Também pode ser usado para representar esse espaço de probabilidades as várias possibilidades de uma permutação ou combinação, neste caso, é mais adequado chamá-lo de **árvore de possibilidades**. Esse tipo de diagrama fornece uma maneira conveniente de organizar as informações de um conjunto de eventos condicionais.

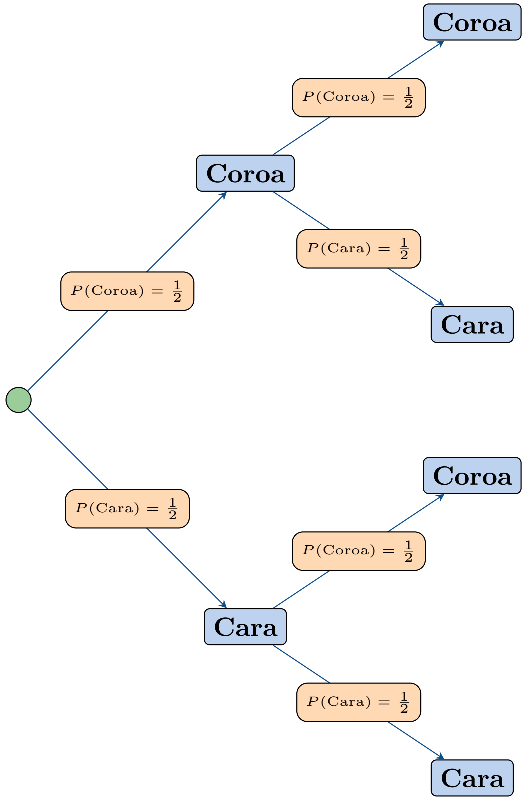

Figura 1 – Diagrama de árvore- Lançamento de moedas

Diagrama de árvores podem representar séries de eventos independentes (como lançamento de moedas como na figura acima) ou eventos **não** independentes (como retirar cartas de um baralho, sem reposição). Cada nó no diagrama representa um evento e está associado com a probabilidade desse evento. O nó da raiz representa o evento certo e,portanto tem probabilidade de valor 1. Cada conjunto de nós irmãos representa uma exclusiva e exaustiva partição do evento genitor.

A construção de um diagrama de árvores é feita simplesmente através da **ramificação** de todas as possibilidades de todos os experimentos.

Para reduzir o número de nós e consequentemente o tempo de processamento, existem as árvores binomiais recombinantes, na qual dois intervalos de tempos consecutivos, um movimento de subida seguido por um movimento de descida é igual á um movimento de descida seguido por um movimento de subida. Se a árvore não for recombinante, no terceiro passo terá $2^3 = 8$ nós, e na recombinante seriam apenas 4. Sendo assim, uma árvore não recombinante possui 2^i nós no i-ésimo passo, enquanto a recombinante possui apenas i+1 nós (MATAREZIO, 2009).

2.6 PROCESSO ESTOCÁSTICO

Dentro da teoria das probabilidades, um **processo estocástico** é uma família de variáveis aleatórias representando a evolução de um sistema de valores com o tempo. É a contraparte probabilística de um processo determinístico. Ao invés de um processo que possui um único modo de evoluir, como nas soluções de equações diferenciais ordinárias, por exemplo, em um processo estocástico há uma indeterminação: mesmo que se conheça a condição inicial, existem várias, por vezes infinitas, direções nas quais o processo pode evoluir.

As variáveis correspondentes aos diversos tempos podem ser completamente diferentes, o único requisito é que esses valores diferentes estejam todos no mesmo espaço, isto é, no contradomínio da função. Uma abordagem possível é modelar as variáveis aleatórias como funções aleatórias de um ou vários argumentos determinísticos, na maioria dos casos, em relação ao parâmetro do tempo. Apesar de os valores aleatórios de um processo estocástico em momentos diferentes parecerem variáveis aleatórias independentes, nas situações mais comuns, eles exibem uma complexa dependência estatística.

Exemplo de processos estocásticos incluem flutuações nos mercados de ações e nas taxas de câmbio, dados médicos como temperatura, pressão sanguínea e variações nos potenciais elétricos do cérebro registrados em um eletroencefalograma, fluxo turbulento de um líquido ou gás, variações no campo magnético da Terra, mudanças aleatórias no nível de sinais de rádio sintonizados na presença de distúrbios meteorológicos, flutuação da corrente em um circuito elétrico na presença de ruído térmico, movimentos aleatórios como o movimento Browniano ou passeios aleatórios, N lançamentos de uma moeda, processo de Poisson (processo estocástico contínuo que conta o número de eventos de interesse até um determinado tempo e as propriedades estudadas para esses elementos), entre outros.

Uma generalização de um processo estocástico, o campo aleatório, é definido ao permitir que as variáveis sejam parametrizadas por membros de um espaço topológico ao invés do tempo. Exemplos de campos aleatórios incluem imagens de estática, topografia, ondas de superfície e variações na composição de um material heterogêneo.

Mais genericamente, segundo (KAC; LOGAN, 1979) e (NELSON, 1985) qualquer tipo de evolução temporal, determinística ou essencialmente probabilística, que seja analisável em termos de probabilidade pode ser chamada de processo estocástico.

2.7 DEFINIÇÕES DE PROBABILIDADE

2.7.1 Frequêncial

Os estudos iniciais dessa definição foram feitos por Jacques Bernoulli (1654-1705) em sua obra "Ars Conjectandi"(1713). Seja ε um experimento aleatório que é repetido n vezes e E_i um evento associado a ε. Chama-se frequência relativa de E_i nas n repetições de ε ao valor:

$$fr_{E_i} = \frac{n_{E_i}}{n} \tag{2.1}$$

, sendo n_{E_j} o número de ocorrências do evento E_j

Por exemplo se o experimento aleatório for o arremesso de uma moeda, e o evento E_i corresponde a "cara", então a fração $\frac{n_{E_i}}{n}$ representa o número de vezes que caiu cara, ou seja, que ocorreu o evento, sobre os n arremessos efetuados.

'A medida que o número de arremessos aumenta, ou seja, 'a medida que n aumenta, a fração tende a se estabilizar e se aproxima de algum número fixo, que então pode medir a probabilidade de ocorrência do evento. (Lei dos Grandes Números) Pode-se então escrever (1.1), quando $n \longrightarrow \infty$, da seguinte forma:

$$\lim_{n\to\infty} fr_{E_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{n_{E_i}}{n} = P(E_i) \tag{2.2}$$

A existência do limite 2.2 jamais poderia ser comprovada em qualquer situação real, visto que não é possível realizar uma sequência infinita de experiências reais. No entanto ele representa um modelo matemático bastante interessante.

Ainda no exemplo citado, em repetidos arremessos de uma moeda "honesta", espera-se que a proporção de caras se aproxime de $\frac{1}{2}$ de forma que atribui-se este valor a $P(E_i)$. A figura a seguir representa um gráfico possível para estes arremessos, com n variando até 100 arremessos de uma moeda supostamente honesta.

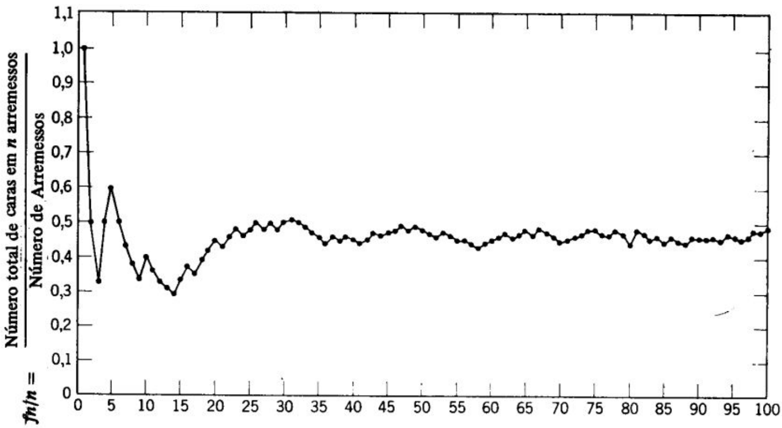

Figura 2 – Definição frequêncial

.

2.7.2 Clássica

Essa definição é dada pelo matemático Pierre-Simion Laplace Se um experimento ε pode resultar em N diferentes e *igualmente prováveis* resultados, e se n_{E_i} desses resultados correspondem ao evento E_i, então, a probabilidade de E_i é dada por:

$$P(E_i) = \frac{n_{E_i}}{N}$$

Exemplo 1. *Considere o experimento aleatório ε de lançar um dado e observar a face voltada para cima. Tem-se o seguinte espaço amostral:*
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
E_1*: face é igual a 1 ou 2.* $E_1 = \{1, 2\}$ $P(E_1) = \frac{2}{6}$
E_2*: face é igual a 3.* $E_2 = \{3\}$ $P(E_2) = \frac{1}{6}$
E_3*: face é um número par.* $E_1 = \{2, 4, 6\}$ $P(E_1) = \frac{3}{6}$

$$P(E_i) = \frac{\text{número de ocorrências do evento i}}{\text{número total de casos possíveis}}$$

Observações:

(i) Quando se usa esta definição, considera-se S finito, o que a torna restrita.

(ii) Os N resultados possíveis são considerados equiprováveis, ou seja, cada resultado do espaço amostral tem a mesma probabilidade de ocorrer. Diz-se que o espaço amostral é equiprovável.

No exemplo anterior o espaço amostral é equiprovável, visto que se o dado for honesto, a probabilidade de cair qualquer uma das faces é a mesma. Esta definição não poderia ser usada caso houvesse um dado tendencioso, por exemplo.

2.7.3 Axiomática

Definição dada por Andrei Kolmogorov: seja ε um experimento aleatório e S um espaço amostral associado a ε. A cada evento E_i, associa-se um número real representado por $P(E_i)$, e denominado de probabilidade de E_i, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $0 \leqslant P(E_i) \leqslant 1,0$.

(ii) $P(S) = 1,0$.

(iii) Se E_i e E_j são eventos mutuamente exclusivos, então

$$P\left(E_i \cup E_j\right) = P\left(E_i\right) + P\left(E_j\right).$$

Das propriedades acima, pode-se deduzir as seguintes:

(iv) Se E_k , para $k = 1, 2, ..., n$ forem eventos mutuamente exclusivos dois a dois, então:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P\left(E_k\right).$$

(v) Se ϕ for o conjunto vazio, então $P\left(\phi\right) = 0$.

(vi) Se $\overline{E_i}$ for o evento complementar de E_i, então:

$$P\left(E_i\right) = 1 - P\left(\overline{E_i}\right).$$

2.8 REGRAS PARA O CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

Teorema 2.8.1. *Teorema da soma*

1. *Para 2 eventos: se E_i e E_j forem dois eventos quaisquer, então*

$$P\left(E_i \cup E_j\right) = P\left(E_i\right) + P\left(E_j\right) - P\left(E_i \cap E_j\right)$$

2. *Para 3 eventos: se E_i, E_j e E_k forem três eventos quaisquer, então*

$$\begin{aligned} P\left(E_i \cup E_j \cup E_k\right) &= P\left(E_i\right) + P\left(E_j\right) + P\left(E_k\right) \\ &- P\left(E_i \cap E_j\right) - P\left(E_i \cap E_k\right) - P\left(E_j \cap E_k\right) \\ &+ P\left(E_i \cap E_j \cap E_k\right) \end{aligned}$$

3. Para n eventos, por indução:

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P\left(E_i\right) - \sum_{1\leqslant i\leqslant j}^{n} P\left(E_i \cap E_j\right) \\
&+ \sum_{1<i<j<k}^{n} P\left(E_i \cap E_j \cap E_k\right) \\
&+ \ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)
\end{aligned}
$$

Definição 1. Sejam E_i e E_j dois eventos de um espaço amostral, com $P\left(E_j\right) \neq 0$, então a probabilidade de ocorrer o evento E_i, tendo ocorrido o evento E_j, é indicada por $P\left(E_i/E_j\right)$ e definida pela relação:

$$P\left(E_i/E_j\right) = \frac{P\left(E_i \cap E_j\right)}{P\left(E_j\right)}$$

Teorema 2.8.2. *(Regra do Produto) Partindo da definição de probabilidade condicional, pode-se explicitar $P\left(E_i \cap E_j\right)$ e obter a regra do produto para dois eventos:*

$$P\left(E_i \cap E_j\right) = P\left(E_j\right) \cdot P\left(E_i/E_j\right)$$

ou

$$P\left(E_i \cap E_j\right) = P\left(E_i\right) \cdot P\left(E_j/E_i\right)$$

Definição 2. Dois eventos são considerados independentes quando a ocorrência de um deles não depende ou não está vinculada à ocorrência do outro, isto é, $P\left(E_i/E_j\right) = P\left(E_i\right)$ e $P\left(E_j/E_i\right) = P\left(E_j\right)$.

Corolário 1. *A regra do produto para dois eventos independentes é dada por:*

$$P\left(E_i \cap E_j\right) = P\left(E_i\right) \cdot P\left(E_j\right)$$

Teorema 2.8.3. *(Regra de Bayes).*
Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n eventos mutuamente exclusivos tais que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$. Sejam $P(A_i)$ as probabilidades conhecidas de todos os eventos A_i e B um evento qualquer de S tal que conhecemos todas as probabilidades condicionais $P(B/A_i)$. Então para cada

"i" teremos

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} [P(A_j) \cdot P(B/A_j)]} \tag{2.3}$$

O resultado acima é bastante importante, pois relaciona probabilidades a *priori*:$P(A_i)$ com probabilidades a *posteriori*: $P(A_i/B)$, probabilidade de A_i depois que ocorrer B.

Exemplo 2. *Um fabricante produz motores para carros em três fábricas (A, B e C), que respondem, respectivamente, por* 40%, 35% *e* 25% *de sua produção total. Registros históricos indicam que* 2% *da produção de A é defeituosa, assim como* 1% *da de B, e* 3% *da fábrica C. Escolhemos 1 motor aleatoriamente, e ele é defeituoso.*
Qual a probabilidade dele ter sido produzido na fábrica B ?
Resolução: Chamando B o evento "fabricado em B" e d o evento "Motor defeituoso", podemos escrever:
Uma peça defeituosa pode provir de qualquer uma das 3 fábricas (e só de uma). Logo, são eventos mutuamente excludentes. Portanto:
$P(d) = P(A) \cdot P(d/A) + P(B) \cdot P(d/B) + P(C) \cdot P(d/C)$
$P(B/d) = \frac{P(B \cap d)}{P(d)} = \frac{P(B) \cdot P(d/B)}{P(d)}$
Assim : $P(d) = (0,40 \cdot 0,02) + (0,35 \cdot 0,01) + (0,25 \cdot 0,03) = 0,019$
E, portanto, $P(B_{.}) = \frac{0,035cdot0,01}{0,019} = 0,184 = 18,4\%$

2.9 ANÁLISE COMBINATÓRIA

O que é Análise Combinatória ou simplesmente Combinatória? Segundo os autores (CARVALHO et al., 2004) Carvalho, Pitombeira e Morgado, a maior parte dos alunos do 2º grau responderia que ela é o estudo das combinações, arranjos e permutações. Isso no entanto é uma resposta parcial pois, embora combinações, arranjos e permutações façam parte da Análise Combinatória, são conceitos que permitem resolver um tipo de problemas de Análise Combinatória: os de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos. No entanto, a Análise Combinatória trata de vários outros tipos de problemas e dispõe, além das combinações, arranjos e permutações, de outras técnicas para atacá-los: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey são exemplos de técnicas poderosas de Análise Combinatória. O princípio das gavetas de Dirichlet, também chamado de princípio da casas dos pombos pois o problema que originou esse princípio diz que se n+1 pombos são colocados em n casas, pelo menos uma casa terá mais que um pombo. Isso é mais simples ou pelo menos tão simples quanto o estudo das combinações, arranjos e permutações. De maneira mais geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em Análise Combinatória são:

1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições;

2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas. A solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema.

3 MODELO BINOMIAL

Neste capítulo usaremos como referência o capítulo 1 do livro (SHREVE, 2012). Estudaremos a precificação de títulos de renda fixa pós-fixados e prefixados. A fim de desenvolver as árvores binomiais de preços unitários dos títulos, é necessário o desenvolvimento de árvores binomiais de taxas de juros e de fatores de juros acumulados. O objetivo do Modelo Binomial de Precificação de Opções para ações que não pagam dividendos é precificar opções em função do valor de sua ação, de forma relativamente simples, assumindo a possibilidade de apenas dois valores de preço da ação no vencimento da opção: a ação ou aumenta até dado preço maior ou diminui até determinado preço menor.

3.1 MODELO BINOMIAL DE UM PERÍODO

O Modelo Binomial para preços de ativos financeiros é uma ferramenta poderosa para entender a teoria de preços de arbitragem e probabilidade. Nesta seção será apresentado o Modelo Binomial de um período, o qual tem como generalização o Modelo Binomial multiperíodo, que é mais realista e será apresentado na próxima seção.

Para o modelo geral de um período como ilustrado na Figura 3, tem-se apenas o início, ou tempo zero, e o final, ou tempo um. No tempo zero, o preço de uma ação, denotado por S_0, é uma quantidade positiva conhecida, já no tempo um, o preço desta mesma ação pode assumir dois valores positivos, denotados por $S_1(H)$ e $S_1(T)$, em que H representa cara e T coroa. Assim, imagina-se que uma moeda é jogada e o resultado deste lance determina o preço no momento um. Note que não se assume que esta moeda seja justa, ou seja, a probabilidade de dar cara não precisa ser 50%. Assumimos apenas que a probabilidade de dar cara é um número positivo p,menor que 1 e que a probabilidade de dar coroa é $q = 1 - p$, o qual também é um número positivo.

O resultado do lance de moedas e, portanto, o preço da ação no momento um, é conhecido apenas no momento um, e não no tempo zero. Daqui em diante, qualquer quantidade não conhecida no tempo zero será referida como aleatória porque depende da experiência do lançamento de uma moeda. Sejam os dois números positivos

$$u = \frac{S_1(H)}{S_0} \text{ e } d = \frac{S_1(T)}{S_0}. \tag{3.1}$$

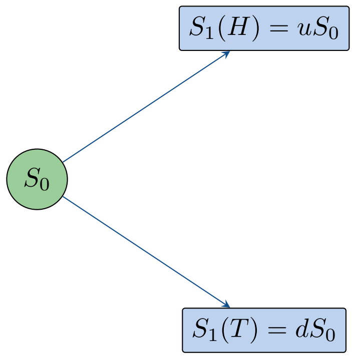

Figura 3 – Àrvore Binomial de um período

Assumimos que $d < u$, pois, se ao invés tivéssemos $d > u$, poderíamos ter $d < u$ apenas renomeando os lados da moeda em questão. Se tivéssemos $d = u$, então o preço da ação no tempo um não seria realmente aleatório e, portanto, o modelo não seria interessante. Referimo-nos a u como o fator de acréscimo e d como o fator de decréscimo no preço da ação. É intuitivamente útil pensar em u como sendo maior do que 1 e d como sendo menor do que 1, o que explicaria os nomes fator de acréscimo e fator de decréscimo, mas essas restrições não são necessariamente verdadeiras no modelo apresentado aqui.

Outra variável que introduzimos no modelo é a taxa de juros r, tal que, a cada real investido no momento zero, renderá $1 + r$ reais no tempo um. Por outro lado, um real tomado emprestado no tempo zero resultará em uma dívida de $1 + r$ reais no tempo um. Em particular, a taxa de juros para empréstimos é a mesma usada para investimentos, além disso, é quase sempre verdade que $r \geq 0$, e este é o caso a se ter em mente. No entanto, no que será exposto a seguir, é necessário apenas que $r > -1$.

Uma característica essencial de mercados eficientes é que se uma estratégia de investimento consegue transformar uma quantia nula em algum lucro, então, também deve correr o risco de levar a um prejuízo. Caso contrário, haveria uma arbitragem, isto é, uma estratégia de investimento que com zero reais de investimento, tem probabilidade zero de prejuízo e uma probabilidade positiva de se obter lucro. Modelos matemáticos que admitem arbitragem não podem ser usados para análise, pois sempre haveria a possibilidade de um capital positivo surgir do zero. Portanto, para excluir a arbitragem do Modelo Binomial de um período, é necessário assumir:

$$0 < d < 1 + r < u. \tag{3.2}$$

A desigualdade $d > 0$ se deve ao fato de preços de ações serem positivos. As outras duas desigualdades em (3.2) decorrem da ausência de arbitragem. Mais precisamente, se $d \geq 1 + r$, pode-se começar com nenhum capital e, no momento zero, tomar um empréstimo para comprar a ação. Até no pior dos cenários, ou seja, se der coroa, a ação no momento um valerá o suficiente para saldar o empréstimo, e além disso, há uma probabilidade positiva de gerar lucro líquido (valor da ação menos o pagamento do empréstimo), pois $u > d \geq 1 + r$. Isto configuraria uma arbitragem. Por outro lado, se $u \leq 1 + r$, pode-se vender a ação a descoberto e investir o saldo à taxa r, deste modo, no tempo um, o saldo seria multiplicado por $1 + r$ e seria maior que o valor da ação no melhor dos cenários, isto é, se desse cara. Portanto, pagaríamos o valor da ação e ainda teríamos lucro com probabilidade positiva (no caso de dar coroa).

Observe que, a Inequação (3.2) é equivalente a ausência de arbitragem no modelo aqui tratado. Ou seja, Se não há arbitragem, então vale (3.2) e vice-versa.

Note que é bastante comum se ter $d = u^{-1}$ e este será o caso em muitos dos exemplos aqui tratados. No entanto, para o modelo de mercado binomial fazer sentido, apenas a Inequação (3.2) é necessária.

Apesar da sua simplicidade, o Modelo Binomial está sendo tratado aqui devido a três razões principais. Primeiramente porque, dentro desse modelo, o conceito de preço de arbitragem (preço justo quando não temos arbitragem que é encontrado usando a medida neutra ao risco) e a sua relação com preço neutro ao risco podem ser compreendidos de maneira clara. Em segundo lugar, este modelo é bastante usado na prática, pois, para um número suficiente de períodos, ele fornece uma aproximação razoavelmente precisa de modelos em tempo-contínuo. Num certo sentido, o Modelo Binomial se comporta como uma discretização explícita de modelos em tempo contínuo. Finalmente, dentro do Modelo Binomial de precificação de ativos, é possível desenvolver a teoria de esperanças condicionais e martingais, que são fundamentais em modelos de tempo contínuo.

Uma opção de compra é o direito de comprar o ativo por um preço de exercício K numa data futura, com isso protege o risco de subida do ativo. Existe a opção de compra Europeia em que você exerce o direito de compra no vencimento e a Americana em que você exerce o direito de compra até a data do vencimento. O caso aqui tratado é quando $S_1(T) < K < S_1(H)$. Daí, se der coroa, a opção expira sem valor (a compra não é efetivada), se der cara, a opção pode será exercida e produz um lucro de $S_1(H) - K$. Ou seja, a opção no tempo um tem o seguinte *payoff* (valores possíveis) $\max\{0, S_1 - K\} = (S_1 - K)^+$. Esse *payoff* é a recompensa da opção. A questão fundamental é o quanto a opção vale a pena no tempo zero, antes de saber se o resultado será cara ou coroa.

Exemplo 3. *Seja* $S_0 = \$4$, $u = 2$, $d = 1/2$ *e* $r = 1/4$.
Assim,

$$S_1(H) = u \cdot S_0 = \$8 \quad e \quad S_1(T) = d \cdot S_0 = \$2.$$

Conforme Figura 4 abaixo.

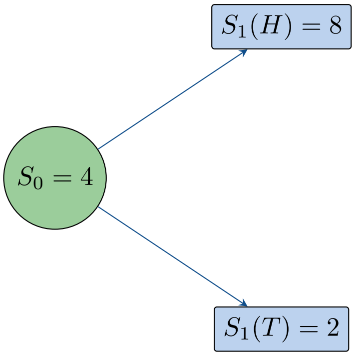

Figura 4 – Àrvore Binomial particular de um período.

Suponha que o preço de exercício da opção de compra europeia seja $K = 5$ *e que o capital inicial do investidor seja* $X_0 = \$1,20$. *O investidor compra* $\Delta_0 = \frac{1}{2}$ *frações da ação no tempo zero. Como* $S(0) = \$4$, *o investidor deve usar seu capital inicial* $X_0 = \$1,20$ *e tomar* $\$0,80$ *emprestado a taxa* r *para fazer essa operação. Portanto, o caixa fica* $X_0 - \Delta_0 \cdot S_0 = -0,80$ *(isto é, tem-se uma dívida de* $\$0,80$*). No tempo um, a posição de caixa vai ser* $(1 + r) \cdot (X_0 - \Delta_0 \cdot S_0) = -1$ *(ou seja, tem-se uma dívida de* $\$1,00$*). Por outro lado, no tempo um, a fração de ação pode valer* $\frac{1}{2} \cdot S_1(H) = 4$ *ou* $\frac{1}{2} \cdot S_1(T) = 1$. *Em particular, se der cara, o valor da carteira será*

$$X_1(H) = \Delta_0 \cdot S_1(H) + (1 + r) \cdot (X_0 - \Delta_0 \cdot S_0) = 3,$$

e se der coroa, será

$$X_1(T) = \Delta_0 \cdot S_1(T) + (1 + r) \cdot (X_0 - \Delta_0 \cdot S_0) = 0.$$

Em ambos os casos, o valor da carteira concorda com o valor da opção no tempo um, o qual é

$$[S_1(H) - 5]^+ = 3 \quad ou \quad [S_1(T) - 5]^+ = 0.$$

Portanto, o payoff da opção foi reproduzido através do investimento na ação e na conta bancária (empréstimo à taxa r). A riqueza inicial de $\$1,20$*, necessária para configurar o portfólio de replicação descrito acima, é o preço de não arbitragem da opção no tempo zero. Se alguém pudesse vender a opção por mais do que isso, digamos, por* $\$1,21$*, então o vendedor poderia investir* $\$0,01$ *à taxa r e usar* $\$1,20$ *para reproduzir a opção. No momento um, o vendedor poderia pagar a opção, independentemente se der cara ou coroa, e ainda terá um lucro de* $\$0,01$ *resultante do investimento à taxa r. Isto é uma arbitragem porque o vendedor da opção não precisa de dinheiro inicialmente, e, sem risco de perda, garante um lucro de* $\$0,01$ *no momento um.*

Por outro lado, se alguém pudesse comprar a opção por menos de $\$1,20$*, digamos, por* $\$1,19$*, então deve-se comprar a opção e configurar o inverso da estratégia de negociação de replicação descrita acima. Em particular, vender meia ação a descoberto, o que gera uma renda de* $\$2,00$*, usar* $\$1,19$ *para comprar a opção, investir* $\$0,80$ *à taxa r e investir em uma conta separada o* $\$0.01$ *restante. No momento um, se der cara, é preciso* $\$4,00$ *para pagar a metade da ação. A opção comprada no momento zero vale* $\$3,00$ *e os* $\$0,80$ *investidos no tempo zero valem* $\$1,00$*. Já, se no tempo um der coroa, é necessário* $\$1,00$ *para pagar a metade da ação. Nesse caso, a opção não vale nada, mas os* $\$0,80$ *investidos no tempo zero valem* $\$1,00$*. Em ambos os casos, o comprador consegue saldar a dívida e ainda possui o montante resultante do* $\$0.01$ *investido na conta separada no tempo zero. Portanto, sempre haverá arbitragem se o preço da opção no tempo zero for diferente de* $\$1,20$ *e não haverá arbitragem se o preço da opção for exatamente* $\$1,20$*.*

Note que o argumento desenvolvido no Exemplo 3 depende de vários pressupostos, dentre estes podemos citar:

a) as ações podem ser subdivididas em frações negociáveis;

b) a taxa de juros para investir é a mesma taxa de juros para empréstimos;

c) o preço de compra da ação é o mesmo de venda;

d) o preço de uma ação só pode atingir dois valores a partir de um dado preço no período anterior.

Um *contrato derivativo* ou, simplesmente, derivativo, é um contrato que no tempo um paga uma certa quantia $V_1(H)$ se der cara e $V_1(T)$, uma quantia possivelmente distinta, se der coroa. Uma opção de compra europeia é um tipo particular de derivativo, um segundo tipo de derivativo é a opção de venda europeia, que tem como payoff no tempo um $(K - S_1)^+$, onde K é uma constante. Um terceiro derivativo é um contrato a termo, cujo valor no tempo um é $S_1 - K$. Para determinar o preço V_0 no tempo zero de um derivativo, é necessário reproduzir seu payoff, desenvolvendo uma estratégia de investimento similar a apresentada no Exemplo 3. Suponha, por exemplo, que tenhamos um capital inicial de X_0 e compramos Δ_0 frações da ação no tempo zero. Logo, temos em caixa a posição

$$X_0 - \Delta_0 \cdot S_0.$$

O valor desta carteira no tempo um é

$$X_1 = (1 + r) \cdot X_0 + \Delta_0 \cdot [S_1 - (1 + r) \cdot S_0].$$

Para reproduzir o payoff do derivativo é necessário escolher X_0 e Δ_0 de modo que

$$X_1(H) = V_1(H) \quad \text{e} \quad X_1(T) = V_1(T).$$

Note que, $V_1(H)$ e $V_1(T)$ são dados, mas o resultado no tempo um depende do resultado do lançamento da moeda, isto é, se tivermos cara ou coroa. A replicação do payoff do derivativo exige que

$$X_0 + \Delta_0 \cdot \left(\frac{1}{1+r} \cdot S_1(H) - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} \cdot V_1(H) \tag{3.3}$$

$$X_0 + \Delta_0 \cdot \left(\frac{1}{1+r} \cdot S_1(T) - S_0 \right) = \frac{1}{1+r} \cdot V_1(T) \tag{3.4}$$

$$X_0 = X_0 - \Delta_0 S_0 + \Delta_0 S_0$$

$$X_1 = (1 + r) \cdot (X_0 - \Delta_0 S_0) + \Delta_0 S_1$$

$$X_1 = (1 + r) X_0 + \Delta_0 [S_1) - (1 + r) S_0]$$

Trazendo X_1 para o tempo zero temos:

$$X_1 \cdot \frac{1}{1+r} = X_0 + \Delta_0 \left(S_1 \cdot \frac{1}{1+r} - S_0 \right)$$

$$X_1(H) \cdot \frac{1}{1+r} = X_0 - \Delta_0 S_0 + \frac{1}{1+r}\Delta_0 S_1(H)$$
$$X_1(T) \cdot \frac{1}{1+r} = X_0 - \Delta_0 S_0 + \frac{1}{1+r}\Delta_0 S_1(T)$$

Multiplicando por $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$, obtemos :

$$(\tilde{p}X_1(H)+\tilde{q}X_1(T))\cdot\left(\frac{1}{1+r}\right) = X_0-\Delta_0 S_0+\frac{1}{1+r}\Delta_0[\tilde{p}S_1(H)+\tilde{q}S_1(T)] = X_0.$$

Então escolhemos $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ tal que

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}S_1(H) + \tilde{q}S_1(T)\right] \tag{3.5}$$

E a equação para X_0

$$X_0 = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_1(H) + \tilde{q}V_1(T)\right] \tag{3.6}$$

Podemos então encontrar $\tilde{p}$ diretamente a partir da Equação (3.5) na forma:

$$S_0 = \frac{1}{1+r} \cdot \left[\tilde{p}uS_0 + (1-\tilde{p})\,dS_0\right] = \frac{S_0}{1+r}\left[(u-d)\,\tilde{p}+d\right].$$

Portanto,

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} \tag{3.7}$$

$$\tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d} \tag{3.8}$$

Observe que $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ são escolhidos para fazer com que a taxa média de crescimento da ação seja igual à taxa de crescimento do investimento em uma conta bancária, temos que a taxa média de crescimento de qualquer carteira de ações combinada com uma conta bancária é igual a taxa de crescimento do investimento em outra conta bancária. Para encontrar Δ_0 basta subtrair (3.3) de (3.4) para obter a Fórmula do "delta-hedging"

$$\Delta_0 = \frac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)}. \tag{3.9}$$

Em suma, se um agente começa com um capital dado por (3.6) e, no tempo zero, compra Δ_0 frações da ação, com Δ_0 dado por (3.9), então, no tempo um, se der cara, o agente terá uma carteira no valor de $V_1(H)$, e se der coroa, o portfólio valerá $V_1(T)$. Ou seja, o agente cobriu uma posição vendida do derivativo. Este derivativo que paga V_1 no tempo um deve ter o seguinte preço no tempo zero:

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_1(H) + \tilde{q}V_1(T)\right]. \tag{3.10}$$

Observe que este preço não introduz uma arbitragem no mercado compreendido de uma conta bancária e de uma ação. Qualquer outro preço no tempo zero introduziria uma arbitragem.

Embora tenhamos determinado o preço de não arbitragem de um derivativo pela criação de uma cobertura para uma posição vendida no derivativo, pode-se também considerar a cobertura para uma posição comprada. Mais precisamente, um agente com uma posição comprada possui um ativo de certo valor, e o agente pode construir uma cobertura para se proteger de uma eventual perda desse valor. É assim que funciona uma cobertura de risco. O número de frações da ação em um cobertura comprado é o negativo do número dado por (3.9).

Os números $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ fornecidos por (3.7) e (3.8) são ambos positivos devido à condição de não arbitragem em (3.2), e somam um. Por esse motivo, podemos considerá-los como probabilidades de cara e coroa, respectivamente. Eles não são as probabilidades reais, que chamamos de p e q, mas sim as chamadas probabilidades neutras ao risco ou de risco-neutro. Sob as probabilidades reais, a taxa média de crescimento do preço da ação é estritamente maior do que a taxa de crescimento de um investimento na conta bancária, caso contrário, ninguém iria querer incorrer no risco associado a investir na ação. Assim, p e $q = 1-p$ devem satisfazer

$$S_0 < \frac{1}{1+r}\left[pV_1(H) + qV_1(T)\right] \tag{3.11}$$

enquanto que $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ satisfazem (3.5). Se a taxa média de crescimento da ação fosse exatamente a mesma da taxa de crescimento do investimento na conta bancária, então os investidores deveriam ser neutros em relação ao risco, não exigindo uma compensação por assumir o risco, nem estariam dispostos a pagar mais por isso. No entanto, este não é o caso, e, portanto, $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ não podem ser as probabilidades reais. Eles são apenas números que auxiliam na solução das equações (3.3) e (3.4) para encontrar X_0 e Δ_0.Se quisermos construir um portfólio cujo valor no tempo um seja V_1, então seu valor no tempo zero deve ser dado por (3.6), de modo que sua taxa média de crescimento sob as probabilidades neutras ao risco seja a mesma taxa de crescimento do investimento na conta bancária.

A Equação (3.10) para encontrar o preço no tempo zero do derivativo com payoff V_1 é chamada de fórmula de precificação neutra ao risco para o Modelo Binomial de período único. Note que as probabilidades reais p e q não aparecerem nesta equação, pois, a construção da cobertura de risco para uma posição vendida no derivativo depende somente do tamanho dos movimentos de acréscimo e decréscimo no preço da ação (ou seja, os valores u e d).

3.2 MODELO BINOMIAL MULTIPERÍODO

Nesta seção estenderemos as ideias da seção anterior apresentando o Modelo Binomial com vários períodos. De maneira intuitiva, nós jogamos uma moeda repetidamente n vezes, e sempre que tivermos cara, o preço da ação se move "para cima"através do fator u, enquanto que, sempre que tivermos coroa, o preço da ação se move "para baixo"através do fator d. Além da ação, há também neste mercado uma conta bancária em que qualquer capital investido rende a taxa de juros constante r. No que se segue, a única suposição que fazemos sobre esses parâmetros é a condição de não arbitragem $0 < d < 1 + r < u$.

Na Figura 5, o preço inicial da ação é denotado por $S_0 > 0$.

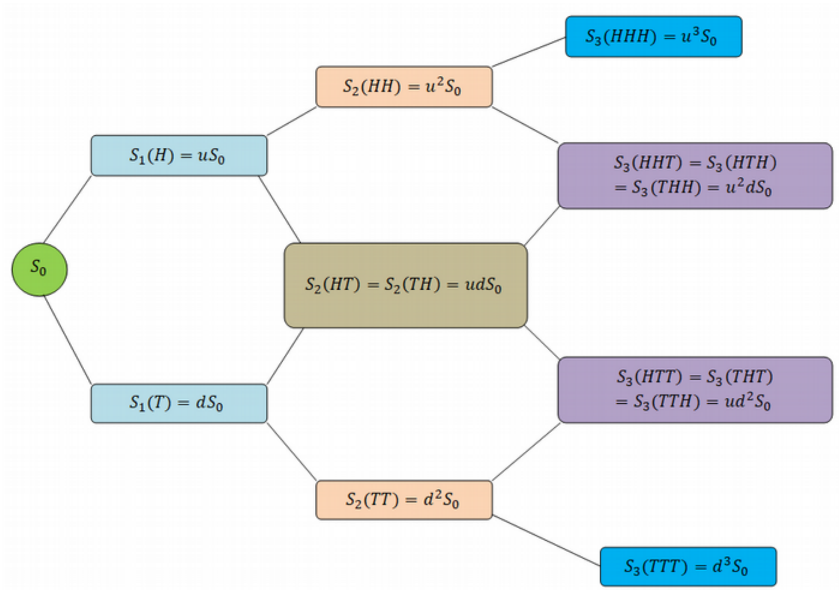

Figura 5 – Àrvore Binomial geral de três períodos

O preço no tempo um então pode ser $S_1(H) = u \cdot S_0$, se o primeiro lance resultar em cara, ou $S_1(T) = d \cdot S_0$, se o primeiro lance resultar em coroa. Após o segundo lançamento, o preço será um dos seguintes:

$$\begin{aligned} S_2(HH) &= u \cdot S_1(H) = & u^2 \cdot S_0 \\ S_2(HT) &= d \cdot S_1(H) = & du \cdot S_0 \\ S_2(TH) &= u \cdot S_1(T) = & ud \cdot S_0 \\ S_2(TT) &= d \cdot S_1(T) = & d^2 \cdot S_0. \end{aligned}$$

Depois de três lançamentos, há oito sequências de moedas possíveis, embora nem todas elas resultem em preços de ações diferentes no tempo 3.

Exemplo 4. *Considere o modelo de três períodos com $S_0 = \$4$,$u = 2$ e $d = \frac{1}{2}$. Temos a árvore binomial dos possíveis preços das ações mostrados na Figura 6.*

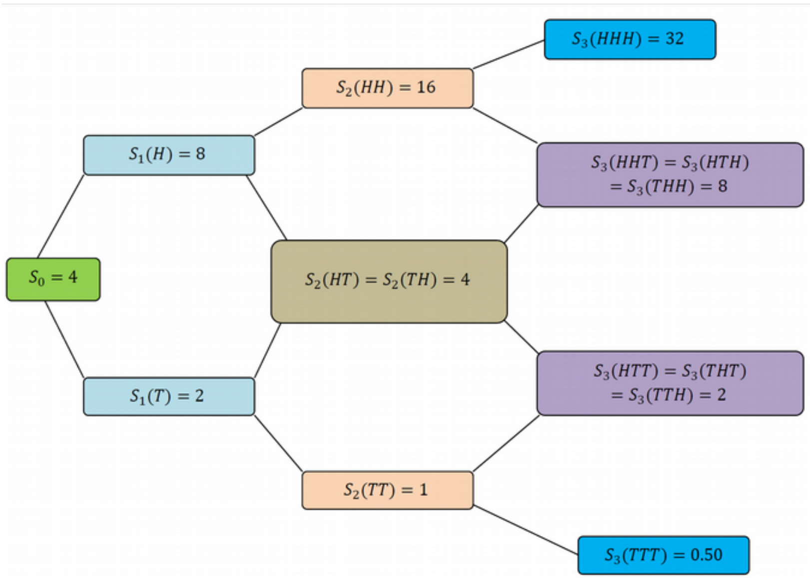

Figura 6 – Àrvore Binomial particular de três períodos

Dado o Modelo Binomial de três períodos da Figura 5, considere um contrato derivativo europeu que confira o direito de comprar uma ação por K reais no tempo dois. Após esta discussão, o conceito será estendido para um derivativo europeu arbitrário que expira no tempo $N \geq 2$. No vencimento, o pagamento de uma opção de compra com preço de exercício K e vencimento no tempo dois é $V_2 = (S_2 - K)^+$, em que V_2 e S_2 dependem do primeiro e do segundo lançamentos da moeda. Queremos então determinar o preço sem arbitragem para esta opção no tempo zero. Suponha que um agente venda esta opção no tempo zero por V_0 reais. Ele então compra Δ_0 frações da ação, investindo $V_0 - \Delta_0 \cdot S_0$ reais na conta bancária para financiar isso. Como a quantia de $V_0 - \Delta_0 \cdot S_0$ é negativa, então o agente está tomando um empréstimo à taxa r de $\Delta_0 \cdot S_0 - V_0$ reais. No tempo um, o agente tem uma posição vendida na opção avaliada em:

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r) \cdot (V_0 - \Delta_0 \cdot S_0) \tag{3.12}$$

Observe que S_1 e X_1 dependem do resultado do primeiro lançamento, isto é, se der cara ou coroa. Assim, existem realmente duas equações implícitas em (3.12):

$$X_1(H) = \Delta_0 S_1(H) + (1+r) \cdot (V_0 - \Delta_0 \cdot S_0), \tag{3.13}$$

e

$$X_1(T) = \Delta_0 S_1(T) + (1+r) \cdot (V_0 - \Delta_0 \cdot S_0). \tag{3.14}$$

Após o primeiro sorteio, o agente tem um portfólio avaliado em X_1 reais e pode reajustar sua estratégia de investimento (isto é, seu "hedge"). Suponha que ele decida agora ter Δ_1 frações da ação, em que Δ_1 depende do primeiro lance, pois, no tempo um o agente sabe se deu cara ou coroa, e dependendo do resultado, Δ_1 pode assumir valores distintos. Então, ele investe o restante de sua riqueza,
$X_1 - \Delta_1 \cdot S_1$, na conta bancária. No próximo período, sua riqueza será dada pelo lado direito da equação abaixo, no entanto, esta deve igualar V_2. Ou seja,

$$V_2 = \Delta_1 \cdot S_2 + (1+r)(X_1 - \Delta_1 \cdot S_1). \tag{3.15}$$

Observe que S_2 e V_2 dependem do resultados dos dois primeiros lançamentos da moeda. Considerando todos os quatro resultados possíveis, podemos reescrever (3.15) nas seguintes quatro equações

$$V_2(HH) = \Delta_1(H) \cdot S_2(HH) + (1+r)(X_1(H) - \Delta_1(H) \cdot S_1(H)) \tag{3.16}$$

$$V_2(HT) = \Delta_1(H) \cdot S_2(HT) + (1+r)(X_1(H) - \Delta_1(H) \cdot S_1(H)) \tag{3.17}$$

$$V_2(TH) = \Delta_1(T) \cdot S_2(TH) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(T) \cdot S_1(T)) \quad (3.18)$$

$$V_2(TT) = \Delta_1(T) \cdot S_2(TT) + (1+r)(X_1(T) - \Delta_1(T) \cdot S_1(T)) \quad (3.19)$$

Agora temos seis equações, duas representadas por (3.12) e quatro representadas por (3.15), em que aparecem as seis incógnitas: V_0, Δ_0, $\Delta_1(T)$, $\Delta_1(H)$, $X_1(H)$ e $X_1(T)$.

Para resolver estas equações, e assim determinar o preço V_0, da opção no tempo zero, e as incógnitas Δ_0, $\Delta_1(T)$ e $\Delta_1(H)$, na carteira de replicação, começamos subtraindo (3.19) de (3.18) e resolvendo para $\Delta_1(T)$ encontramos a fórmula do "delta-hedging":

$$\Delta_1(T) = \frac{V_2(TH) - V_2(TT)}{S_2(TH) - S_2(TT)} \quad (3.20)$$

substituindo esta fórmula em (3.5) e (3.3), temos que

$$X_1(T) = \frac{1}{1+r} \cdot [\tilde{p}V_2(TH) + \tilde{q}V_2(TT)] \quad (3.21)$$

onde $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ são as probabilidades neutras ao risco dadas por (3.7) e (3.8) da primeira seção deste capítulo. A Equação (3.21) também pode ser obtida ao se multiplicar (3.18) por $\tilde{p}$ e (3.19) por $\tilde{q}$ e, adicionar os resultados. Observe que, o fato de

$$\tilde{p}S_2(TH) + \tilde{q}S_2(TT) = (1+r) \cdot S_1(T) \quad (3.22)$$

implica que os termos envolvendo $\Delta_1(T)$ desapareçam.

A Equação (3.21) nos dá o valor que o portfólio de replicação deve ter no momento um se o preço da ação vai do tempo zero para o tempo um. Essa quantidade é definida como sendo o preço da opção no momento um, se o primeiro lance de moeda resultar em coroa, por isso denotado por $V_1(T)$. Ou seja,

$$V_1(T) = \frac{1}{1+r} \cdot [\tilde{p}V_2(TH) + \tilde{q}V_2(TT)] \quad (3.23)$$

que é outro exemplo da fórmula de precificação neutra ao risco. Esta fórmula é análoga à fórmula (3.10) mas com um período a mais. As duas primeiras equações, (3.20) e (3.21), conduzem, de forma semelhante, às fórmulas

$$\Delta_1(H) = \frac{V_2(HH) - V_2(HT)}{S_2(HH) - S_2(HT)} \quad (3.24)$$

e $X_1(H) = V_1(H)$, em que $V_1(H)$ é o preço da opção no momento em que se o primeiro lance resultar em cara, definido por

$$V_1(H) = \frac{1}{1+r} \cdot [\tilde{p}V_2(HH) + \tilde{q}V_2(HT)]. \tag{3.25}$$

Esta equação também é análoga à fórmula em (3.10), mas, novamente, com um período a mais.

Finalmente, se fizermos $X_1(H) = V_1(H)$ e $X_1(T) = V_1(T)$ nas duas equações implícitas em (3.12), temos que as soluções dessas equações para Δ_0 e V_0 são as mesmas de (3.3) e (3.4), ou seja, as quantidades dadas por (3.9) e (3.10), respectivamente.

Para concluir, note que temos três processos estocásticos (Δ_0, Δ_1), $(X_0; X_1; X_2)$ e $(V_0; V_1; V_2)$. Por processo estocástico, queremos dizer uma sequência de variáveis aleatórias indexadas pelo tempo. Essas quantidades são aleatórias porque dependem dos lançamentos de moedas. De fato, pois o índice de cada variável indica o número de lançamentos da moeda que a mesma depende. Se começarmos com qualquer riqueza inicial X_0 e valores específicos para $\Delta_0, \Delta_1(T), \Delta_1(H)$, então podemos calcular o valor da carteira através da equação da riqueza

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r) \cdot (X_n - \Delta_n \cdot S_n). \tag{3.26}$$

Esta é uma equação contingente que define variáveis aleatórias, cujos valores reais são conhecidos apenas quando os resultados do lançamentos da moeda são conhecidos. No entanto,já no momento zero, esta equação nos permite calcular qual será o valor da carteira em todos os tempos subsequentes para cada cenário de lançamentos da moeda. Para um derivativo que expira no tempo dois, a variável aleatória V_2 é especificada contratualmente e dependente do resultado do lançamento da moeda. Por exemplo, se o lançamento da moeda resultar em $\omega_1\omega_2$ (pontos amostrais), então o preço da ação no tempo dois será $S_2(\omega_1\omega_2)$ e o valor da opção de compra europeia será $V_2(\omega_1\omega_2)$. Queremos determinar X_0, Δ_0, $\Delta_1(H)$, e $\Delta_1(T)$, de modo que, com X_2 dado, ao aplicarmos a fórmula (3.26) recursivamente, este deve satisfazer $X_2(\omega_1\omega_2) = V_2(\omega_1\omega_2)$, independentemente dos valores de ω_1 e ω_2. Deste modo, temos também que $V_1(H) = X_1(H)$ e $V_1(T) = X_1(T)$. No caso geral, isto é, para n períodos, usamos X_n e Δ_n para representar o número de frações da ação detidas no portfólio no tempo n e o capital no tempo n (ou o valor do portfólio no tempo n), respectivamente. Quando X_0 e Δ_0 são escolhidos de modo a replicar um contrato derivativo, usamos o símbolo V_n ao invés de X_n, o qual é chamado de preço (sem arbitragem) do derivativo no tempo n.

Observe que as mesmas ideias usadas para replicar uma opção de compra Europeia no modelo de dois períodos também é usado aqui, independentemente do número de períodos e da definição do payoff do contrato derivativo, dado que este contrato só passa a ser exercido num tempo previamente especificado, não havendo a possibilidade de exercício antecipados, como acontece com as chamadas opções americanas.

Definição 3. Para $n = 1, 2, \cdots, N$, a variável $V_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)$ no Teorema 3.2.1 é definida como sendo o preço do contrato derivativo no tempo n, se os resultados dos primeiros lançamentos da moeda forem $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$. O preço deste derivativo no tempo zero é definido como V_0

Teorema 3.2.1 (Replicação no Modelo Binomial Multiperíodo)**.** *Considere o Modelo Binomial de precificação de ativos com N períodos, fatores de acréscimo u e decréscimo d satisfazendo a condição de não arbitragem $0 < d < 1 + r < u$, e com as probabilidades neutras ao risco $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ dadas por*

$$\tilde{p} = \frac{1 + r - d}{u - d} \tag{3.27}$$

$$\tilde{q} = \frac{u - 1 - r}{u - d} \tag{3.28}$$

Seja V_N uma variável aleatória (representando o payoff de um contrato derivativo no tempo N), dependendo dos N primeiros lances de uma moeda. São definidas recursivamente (para trás no tempo) a sequencia de variáveis aleatórias $V_{N-1}, V_{N-2}, ..., V_0$ pela equação

$$V_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n) = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n H) + \tilde{q}V_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n T)\right] \tag{3.29}$$

de modo que cada V_n depende das n primeiros lances $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$ da moeda, em que n varia entre $N-1$ e 0. Em seguida, definimos

$$\Delta_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n) = \left[\frac{V_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n H) - V_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n T)}{S_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n H) - S_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n T)}\right] \tag{3.30}$$

onde, novamente, n varia entre 0 e $N-1$.
Se assumirmos que $X_0 = V_0$ e avançarmos recursivamente no tempo, os valores do portfólio $X_1, X_2, \cdots X_N$ são dados por (3.30)*. Desta maneira é possível obter a seguinte relação:*

$$X_N(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n) = V_N(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)$$

para todo $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$.

Demonstração. Será provado por indução antecipada em n que

$$X_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n) = V_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n) \tag{3.31}$$

onde n varia entre 0 e N. O caso de $n = 0$ é dado pela definição de X_0 como sendo igual a V_0. O caso de $n = N$ é o que será mostrado a seguir.

Para a etapa de indução, assumimos que (3.31) vale para algum valor de n menor que N e mostraremos que é válido para $n+1$. Assim, para $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$ arbitrários, mas fixos, assumimos por hipótese de indução que (3.31) vale. Não sabemos ainda se $\omega_{n+1} = H$ ou $\omega_{n+1} = T$, então consideramos os dois casos. Primeiro usamos (3.26) para calcular $X_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n H)$, logo

$$\begin{aligned} X_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n H) &= \Delta_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n)uS_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n) \\ &+ (1+r)\cdot X_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n) \\ &- (1+r)\cdot\Delta_n(\omega_1\omega_2\omega_n)\cdot S_n(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n). \end{aligned}$$

Para simplificar a notação, suprimimos $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$ e escrevemos esta equação simplesmente por

$$X_{n+1}(H) = \Delta_n uS_n + (1+r)(X_n - \Delta_n\cdot S_n), \tag{3.32}$$

com $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n$ suprimido da mesma forma, temos, de (3.30), que

$$\Delta_n = \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{S_{n+1}(H) - S_{n+1}(T)} = \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{(u-d)S_n}. \tag{3.33}$$

Substituindo isto em (3.32) e usando a hipótese de indução (3.31) e a Definição (3.29) de V_n, temos que

$$\begin{aligned} X_{n+1}(H) &= (1+r)X_n + \Delta_n\cdot S_n[u-(1+r)] \\ &= (1+r)V_n + \frac{(V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T))[u-(1+r)]}{u-d} \\ &= (1+r)V_n + \tilde{q}V_{n+1}(H) - \tilde{q}V_{n+1}(T) \\ &= \tilde{p}V_{n+1}(H) + \tilde{q}V_{n+1}(T) + \tilde{q}V_{n+1}(H) - \tilde{q}V_{n+1}(T) \\ &= V_{n+1}(H) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$X_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n H) = V_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n H). \tag{3.34}$$

De maneira completamente análoga, temos que:

$$X_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_nT) = V_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_nT). \tag{3.35}$$

Consequentemente, independentemente de $\omega_{n+1} = H$ ou $\omega_{n+1} = T$, temos que

$$X_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\omega_{n+1}) = V_{n+1}(\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\omega_{n+1}).$$

Como $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\omega_{n+1}$ e n são arbitrários, a etapa de indução está completa. □

O Modelo Binomial Multiperíodo é chamado *completo* porque cada contrato derivativo pode ser replicado via negociações com a ação subjacente e aplicações na conta bancária. Em um mercado completo, todo contrato derivativo possui um preço único no tempo zero que impede oportunidades de arbitragem, e este é o preço da Definição 3.

O Teorema 3.2.1 também pode ser aplicado às chamadas opções dependentes de caminho, bem como títulos derivativos cujo pagamento depende apenas do preço final da ação. Para ilustrar esse ponto, temos o exemplo a abaixo.

Exemplo 5. *Suponha que $S_0 = \$4$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$ e a taxa de juros $r = 4$. Então $\tilde{p} = \tilde{q} = \frac{1}{2}$. Considere uma opção* Lookback *(quando a ajuste de preço é calculado pela diferença entre o preço entre o preço a vista no vencimento e o maior preço a vista registrado durante o período da opção), que tem como payoff*

$$V_3 = \max_{0\leq n\leq 3} S_n - S_3.$$

Então: $V_3(HHH) = S_3(HHH) - S_3(HHH) = 32 - 32 = 0$

$$V_3(HHT) = S_2(HH) - S_3(HHT) = 16 - 8 = 8$$

$$V_3(HTH) = S_1(H) - S_3(HTH) = 8 - 8 = 0$$

$$V_3(HTT) = S_1(H) - S_3(HTT) = 8 - 2 = 6$$

$$V_3(THH) = S_3(THH) - S_3(THH) = 8 - 8 = 0$$

$$V_3(THT) = S_2(TH) - S_3(THT) = 4 - 2 = 2$$

$$V_3(TTH) = S_0 - S_3(TTH) = 4 - 2 = 2$$

$V_3(TTT) = S_0 - S_3(TTT) = 4 - 0,50 = 3,50.$

Usando a fórmula (3.29), é possível calcular:

$V_2(HH) = \frac{4}{5}[\frac{1}{2}V_3(HHH) + \frac{1}{2}V_3(HHT)] = 3,20$

$V_2(HT) = \frac{4}{5}[\frac{1}{2}V_3(HTH) + \frac{1}{2}V_3(HTT)] = 2,40$

$V_2(TH) = \frac{4}{5}[\frac{1}{2}V_3(THH) + \frac{1}{2}V_3(THT)] = 0,80$

$V_2(TT) = \frac{4}{5}[\frac{1}{2}V_3(TTH) + \frac{1}{2}V_3(TTT)] = 2,20$

$V_1(H) = \frac{4}{5}[\frac{1}{2}V_2(HH) + \frac{1}{2}V_2(HT)] = 2,24$

$V_1(T) = \frac{4}{5}[\frac{1}{2}V_2(TH) + \frac{1}{2}V_2(TT)] = 1,20$
E Finalmente

$V_0 = \frac{4}{5}[\frac{1}{2}V_1(H) + \frac{1}{2}V_1(T)] = 1,376.$

Se um agente vende a opção Lookback no tempo zero por $1,38, *ele pode proteger sua posição vendida na opção, basta comprar*

$\Delta_0 = \dfrac{V_1(H) - V_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} = \dfrac{2,24 - 1,20}{8 - 2} = 0,17$ *frações da ação subjacente.*

Isso custa $0,69*, deixando um capital de* $1,38 - 0,69 =$ $0,68 *para investir na conta bancária com juros de* 25%*. No tempo um, ele terá* $0,85 *na conta. Se a ação sobe de preço para* $8*, então no momento um, suas frações de ação valem* $1,39*, e então o valor total da carteira é de* $2,24*, isto é,* $V_1(H)$*. Se a ação cair de preço para* $2*, então no momento um, suas ações valem* $0,35 *e, portanto, o valor total de seu portfólio é de* $1,20*, isto é,* $V_1(T)$*. Continuando esse processo, o agente pode ter certeza de ter um portfólio que vale* V_3 *no tempo três, não importando o resultado do jogo de moedas.*

4 MODELO DE PREÇO DE ATIVO DE CAPITAL

4.1 O MODELO CAPM

No capítulo anterior, vimos que a metodologia de precificação por arbitragem é uma das maneiras diferentes de modelar os preços de ativos, a outra é o modelo (CAPM) [1], que se baseia no equilíbrio entre oferta e demanda entre investidores que possuem funções de utilidade que convertem unidades de consumo em unidades de satisfação. Estudaremos agora o Modelo CAPM que fornece informações qualitativas muito úteis sobre os mercados, mas não produz os resultados quantitativos precisos disponíveis através da metodologia sem arbitragem. Neste capítulo, mostramos o problema de maximizar um resultado esperado, obtido com um certo investimento usando um modelo CAPM.

No modelo de preço sem arbitragem, existem duas medidas de probabilidade: a medida de probabilidade real e a medida neutra ao risco. Ao avaliar títulos derivativos, precisamos apenas considerar a medida neutra ao risco, no entanto, existem duas situações em que a medida de probabilidade real se torna relevante, a saber, na gestão de ativos e na gestão de riscos. Na gestão de ativos, nos preocupamos com o retorno real esperado (e não o de risco neutro). Na gestão de riscos, nos preocupamos com a probabilidade real de um evento catastrófico. Em ambas as situações, no entanto, há uma função para a medida de probabilidade neutra ao risco. Para o gerenciamento de riscos, a carteira cujo risco está sendo avaliado normalmente contém títulos derivativos cujos preços teóricos em vários cenários devem ser computados usando a medida neutra ao risco. Para o gerenciamento de ativos, a medida neutra ao risco será usada como descrito neste capítulo.

Antes de continuar, precisamos definir alguns conceitos fundamentais para o que se segue, a saber, esperança condicional, preço de estado e o processo derivada de Radon-Nikodým:

[1] Modelo de Preço de Ativo de Capital

Definição 4 (Esperança condicional)**.** No Modelo Binomial de N períodos, sejam dados n entre 1 e N, e o evento $\omega_1 \cdots \omega_n$ arbitrário, mas fixo. Então, este evento tem 2^{N-n} possibilidades de continuação, denotada por $\omega_{n+1} \cdots \omega_N$. Denote por $\#H(\omega_{n+1} \cdots \omega_N)$ e $\#T(\omega_{n+1} \cdots \omega_N)$ o número de caras e de coroas, respectivamente, na sequência $\omega_{n+1} \cdots \omega_N$. Então, definimos a esperança condicional da variável aleatória X baseada nas informações disponíveis no tempo n como sendo

$$\tilde{\mathbb{E}}_n[X](\omega_1 \cdots \omega_n) = \sum_{\omega_{n+1} \cdots \omega_N} \tilde{p}^{\#H(\omega_{n+1} \cdots \omega_N)} \tilde{q}^{\#T(\omega_{n+1} \cdots \omega_N)} X(\omega_1 \cdots \omega_n \omega_{n+1} \cdots \omega_N)$$

Os dois casos extremos de condicionamento são $\mathbb{E}_0\tilde{[}X]$ que é a esperança condicional de X baseada em nenhuma informação, que definimos por $\tilde{\mathbb{E}}_0[X] = \tilde{\mathbb{E}}[X]$, e $\tilde{\mathbb{E}}_N[X]$, esperança condicional de X baseada no conhecimento de todas as jogadas até o momento N, que definimos por $\tilde{\mathbb{E}}_N[X] = X$.

A esperança condicional é uma variável aleatória que depende da sequência de eventos $\omega_1 \cdots \omega_n$. Intuitivamente, a esperança condicional, restringe uma dada variável aleatória a um conjunto de eventos menor, isto é, ao conjunto de informações disponíveis até o tempo n. Observe que as esperanças condicionais acima foram calculadas usando as probabilidades neutras ao risco $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$. Isto é indicado pelo til surgido na notação $\tilde{\mathbb{E}}_n$. As esperanças condicionais também podem ser calculadas usando as probabilidades reais p e q, e estas serão denotadas por $\mathbb{E}_n$.
Sendo N um número positivo com $0 \leq n \leq N$, e X e Y variáveis aleatórias, valem também as seguintes propriedades para a esperança condicional:

a) **Linearidade** $\mathbb{E}_n[c_1 X + c_1 Y] = c_1 \mathbb{E}_n[X] + c_2 \mathbb{E}_n[Y], c_1, c_2$ constantes

b) **Tirando o que é conhecido**
Se X depende apenas dos n primeiros eventos, então,

$$\mathbb{E}_n[XY] = X\mathbb{E}_n[Y];$$

c) **Iteração** Se $1 \leq n \leq m \leq N$, então,

$$\mathbb{E}_n\left[\mathbb{E}_m[X]\right] = \mathbb{E}_n[X];$$

d) **Independência** Se X é independente dos n primeiros eventos, então,
$$\mathbb{E}_n[X] = \mathbb{E}[X];$$

e) **Desigualdade de Jensen's** Se $\varphi(x)$ é uma função convexa de variável independente x, então
$$\mathbb{E}_n[\varphi(X)] \geq \varphi(\mathbb{E}_n[X]).$$

Para maiores detalhes sobre esperanças condicionais no Modelo Binomial, veja o livro (SHREVE, 2012).

Definição 5. Em um Modelo Binomial de N períodos, seja P a medida de probabilidade real, e $\tilde{P}$ a medida de probabilidade de risco-neutro. Assumimos que $P(\omega) > 0$ e $\tilde{P}(\omega) > 0$ para cada sequência de lançamentos de moeda $\omega \in \Omega$. Defina a derivada de Radon-Nikodym (variável aleatória) $Z(\omega) = \frac{\tilde{P}(\omega)}{P(\omega)}$ para todo $\omega \in \Omega$.

Definição 6. No Modelo Binomial de N períodos, com medida de probabilidade real P e medida de probabilidade de risco neutro $\tilde{P}$, seja Z a derivada de Radon-Nikodým de $\tilde{P}$ com respeito a P, isto é,
$$Z(\omega_1 \cdots \omega_N) = \frac{\tilde{P}(\omega_1 \cdots \omega_N)}{P(\omega_1 \cdots \omega_N)} = \left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{\#H(\omega_1 \cdots \omega_N)} \left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)^{\#T(\omega_1 \cdots \omega_N)}, \tag{4.1}$$
onde $\#H(\omega_1 \cdot \omega_2 \cdots \omega_N)$ denota o número de caras que aparecem na sequência $(\omega_1 \cdot \omega_2 \cdots \omega_N)$ e $\#T(\omega_1 \cdot \omega_2 \cdots \omega_N)$ denota o número de coroas que aparecem nesta sequência. A densidade de probabilidade da variável aleatória preço de estado é
$$\zeta(\omega) = \frac{Z(\omega)}{(1+r)^N}, \tag{4.2}$$
onde $\zeta(\omega)P(\omega)$ é chamado preço de estado correspondente a ω. O Processo derivada de Radon-Nikodýn é definido por:
$$Z_n = \mathbb{E}_n[Z], n = 0, 1, ..., N. \tag{4.3}$$
Em particular, $Z_N = Z$ e $Z_0 = 1$.

No contexto da Definição 6, podemos calcular a esperança sob a medida de probabilidade de risco neutro de uma variável aleatória Y através do cálculo da esperança sob a medida de probabilidade real, basta usar $\mathbb{E}[ZY]$. Se Y depender apenas dos n primeiros lançamentos de moeda, onde $n < N$, este cálculo pode ser simplificado ainda mais, como veremos no lema abaixo:

Lema 4.1.1. *Assuma as condições da Definição 5 Sejam n um inteiro entre 0 e N e Y uma variável aleatória que depende apenas das n primeiras jogadas da moeda. Então, $\tilde{\mathbb{E}}[Y] = \mathbb{E}[Z_n Y]$.*

A prova desse lema se encontra no capítulo 3 do livro do (SHREVE, 2012). Uma aplicação do Lema 4.1.1 ocorre se nós tivermos uma sequência particular de N lançamentos de moeda $\overline{\omega_1} \cdots \overline{\omega_n}$, e definirmos

$$Y(\omega_1 \cdots \omega_n \omega_{n+1} \cdots \omega_N) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega_1 \cdots \omega_n = \overline{\omega_1} \cdots \overline{\omega_n} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em outras palavras, Y assume o valor 1, se tivermos fixado antecipadamente o resultado dos n primeiros lances como sendo $\overline{\omega_1} \cdots \overline{\omega_n}$, e assim, os demais lançamentos $\omega_{n+1} \cdots \omega_N$ são irrelevantes.

Então

$$\tilde{\mathbb{E}}[Y] = \tilde{P}(\omega_1 \cdots \omega_n = \overline{\omega_1} \cdots \overline{\omega_n}) = \tilde{p}^{\#H(\overline{\omega_1} \cdots \overline{\omega_n})} \tilde{q}^{\#T(\overline{\omega_1} \cdots \overline{\omega_n})},$$

onde $\#H(\overline{\omega_1} \cdots \overline{\omega_n})$ e $\#T(\overline{\omega_1} \cdots \overline{\omega_n})$ denotam o número de caras e coroas, respectivamente, na sequência $\overline{\omega_1} \cdots \overline{\omega_n}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[YZ_n] = Z_n(\overline{\omega_1} \cdots \overline{\omega_n}) P(\omega_1 \cdots \omega_n = \overline{\omega_1} \cdots \overline{\omega_n}) \\ = Z_n p^{\#H(\overline{\omega_1} \cdots \overline{\omega_n})} q^{\#T(\overline{\omega_1} \cdots \overline{\omega_n})} \end{aligned}$$

O Lema 4.1.1 afirma que essas duas quantidades são iguais e, portanto,

$$Z_n(\overline{\omega_1} \cdots \overline{\omega_n}) = \left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{\#H(\overline{\omega_1} \cdots \overline{\omega_n})} \left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)^{\#T(\overline{\omega_1} \cdots \overline{\omega_n})}.$$

Teorema 4.1.2. *Considere um Modelo Binomial de N períodos com $0 < d < 1 + r < u$ (condição de não arbitragem). Suponha que a probabilidade real de cara seja $p > 0$ e a probabilidade real de coroa seja $q > 0$. As probabilidades de risco-neutro para cara e coroa são dadas* *são também positivas e dadas por:*

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} \text{ e } \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}.$$

Sejam P e $\tilde{P}$, respectivamente, as medidas de probabilidade real e a de risco neutro, seja Z a derivada de Radon-Nikodýn de $\tilde{P}$ com relação a P, e seja $Z_n, n = 0, 1, ..., N$, o processo derivada de Radon-Nikodým. Considere um derivativo cujo payoff seja dado por V_N e que pode depender de todas os N lançamentos da moeda. Para $n = 0, 1, ..., N$, o preço no momento n deste derivativo é dado por:

$$V_n = \tilde{\mathbb{E}}_n\left[\frac{V_N}{(1+r)^{N-n}}\right] = \frac{(1+r)^n}{Z_n}\mathbb{E}_n\left[\frac{Z_N V_N}{(1+r)^N}\right] = \frac{1}{\zeta_n}\mathbb{E}_n[\zeta_N V_N], \quad (4.4)$$

onde a densidade do processo de preço de estado ζ_n é definida por $\zeta_n = \frac{Z_n}{(1+r)^n}$ para $n = 0, 1, ..., N$.

Agora, estabelecemos o problema do modelo CAPM. Por uma função de utilidade, devemos definir uma função côncava não decrescente, definida no conjunto dos números reais. Esta função pode assumir o valor $-\infty$, mas não o valor $+\infty$. Uma função de utilidade comum é $\ln(x)$, que normalmente é definida apenas para $x > 0$. Adotamos a convenção de que $\ln(x) = -\infty$ para $x \leq 0$, então isso é definido para cada x e é não decrescente e côncava. Lembre-se que uma função U é côncava se

$$U(\alpha x + (1-\alpha y)) \geq \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y) \quad (4.5)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in (0,1)$. Dizemos U é estritamente côncava se a desigualdade em (4.5) é estrita sempre que $x \neq y$, e de fato vamos assumir que U é estritamente côncava e finita. Toda uma classe de funções de utilidade pode ser obtida escolhendo primeiro um número $p < 1$, $p \neq 0$, e um outro número c $\in \mathbb{R}$, defina :

$$U_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}(x-c)^p, & \text{se } x > c, \\ 0, & \text{se } 0 < p < 1 \text{ e } x = c, \\ -\infty, & \text{se } 0 < p < 1 \text{ e } x = c, \\ -\infty, & \text{se } x < c. \end{cases}$$

Para estas funções, o índice de aversão ao de risco absoluto $-\frac{U''}{U'}$ é a função hiperbólica $\dfrac{1-p}{p-x}$ para $x > c$.

Esta classe de funções é chamado de $HARA$ (aversão ao risco absoluto hiperbólico). A função correspondente $HARA$ para $p = 0$ é :

$$U_0(x) = \begin{cases} \ln(x-c), & \text{se } x > c, \\ -\infty, & \text{se } x \leq c. \end{cases}$$

A concavidade das funções de utilidade é assumida para capturar a relação entre risco e retorno. Por exemplo, considere uma aposta que vale \$1,00 com probabilidade $\frac{1}{2}$ e \$99,00 com probabilidade $\frac{1}{2}$, a recompensa esperada é de \$50,00, mas um agente avesso ao risco preferiria ter \$50,00 em vez da aposta. Denote por X essa recompensa aleatória, ou seja, $P(X = 1) = P(X = 99) = \frac{1}{2}$.
Para uma função de utilidade côncava, temos da desigualdade de Jensen's que $\mathbb{E}[U(X)] \leq U(\mathbb{E}[X])$. De fato, se $U(x) = \ln(x)$, então $\mathbb{E}[\ln(X)] = \$2,30$ e $\ln(\mathbb{E}[X]) = \$3,91$. Se modelarmos o comportamento do agente como maximização da utilidade esperada de recompensa, nosso modelo indicaria que um agente prefere a recompensa não aleatória $\mathbb{E}[X] = 50$ sobre a recompensa aleatória X.
Ao comparar utilidade esperada de pagamentos, em vez de retornos esperados, e escolhendo a função de utilidade de forma criteriosa, podemos capturar a atitude de um investidor para a relação entre risco e retorno.
Consideremos um Modelo Binomial de N-período com os parâmetros usuais $0 < d < 1 + r < u$. Um agente começa com riqueza inicial X_0 e pretende investir na ação e na conta bancária, de modo a maximizar o esperado utilidade de sua riqueza em tempo de N. Em outras palavras, o agente tem uma função de utilidade U e deseja resolver o seguinte problema.

Exemplo 6. *Problema do investimento ideal: Dado X_0, encontrar um processo de portfólio $\Delta_0; \Delta_1 \cdots \Delta_{N-1}$*
que maximiza

$$\mathbb{E}[U(X_N)] \tag{4.6}$$

sujeito à equação de riqueza

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n), n = 0, 1, ..., N-1. \tag{4.7}$$

Observe que a esperança em (4.6) é calculada usando a medida de probabilidade real P. O agente é avesso ao risco e usa sua função de utilidade U para capturar a relação entre risco real e retorno real. Não faz sentido fazer isso sob a medida neutra ao risco porque, nesse caso, tanto a ação quanto a conta bancária têm a mesma taxa de retorno; um agente *que procura maximizar a* $\tilde{\mathbb{E}}[U(X)]$ *investiria apenas na conta bancária.*

Exemplo 7. *Considere o modelo da Figura 6 mas apenas para dois períodos, no qual a taxa de juros é* $r = \frac{1}{4}$ *, de modo que a medida de probabilidade de risco-neutro é* $\tilde{P}(HH) = \tilde{P}(HT) = \tilde{P}(TH) = \tilde{P}(TT) = \frac{1}{4}$*.*
Suponha que a medida de probabilidade real seja
$P(HH) = \frac{4}{9}$ $P(HT) = P(TH) = \frac{2}{9}$ *e* $P(TT) = \frac{1}{9}$*.*
Considere um agente que começa com $X_0 = 4$ *e quer escolher* Δ_0*,* $\Delta_1(H)$ *e* $\Delta_1(T)$ *a fim de maximizar* $\mathbb{E}[\ln(X_2)]$*. Note que*

$$X_1(H) = 8\Delta_0 + \frac{5}{4}(4 - 4\Delta_0) = 3\Delta_0 + 5 \tag{4.8}$$

$$X_1(T) = 2\Delta_0 + \frac{5}{4}(4 - 4\Delta_0) = -3\Delta_0 + 5 \tag{4.9}$$

$$X_2(HH) = 16\Delta_1(H) + \frac{5}{4}(X_1(H) - 8\Delta_1(H)) = 6\Delta_1(H) + \frac{15}{4}\Delta_0 + \frac{25}{4} \tag{4.10}$$

$$X_2(HT) = 4\Delta_1(T) + \frac{5}{4}(X_1(T) - 8\Delta_1(T)) = -6\Delta_1(T) + \frac{15}{4}\Delta_0 + \frac{25}{4} \tag{4.11}$$

$$X_2(TH) = 4\Delta_1(T) + \frac{5}{4}(X_1(T) - 2\Delta_1(T)) = \frac{3}{2}\Delta_1(T) - \frac{15}{4}\Delta_0 + \frac{25}{4} \tag{4.12}$$

$$X_2(TT) = \Delta_1(T) + \frac{5}{4}(X_1(T) - 2\Delta_1(T)) = -\frac{3}{2}\Delta_1(T) - \frac{15}{4}\Delta_0 + \frac{25}{4} \tag{4.13}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\ln(X_2)] &= \frac{4}{9}\ln\left(6\Delta_1(H) + \frac{15}{4}\Delta_0 + \frac{25}{4}\right) + \\
&+ \frac{2}{9}\ln\left(-6\Delta_1(H) + \frac{15}{4}\Delta_0 + \frac{25}{4}\right) + \\
&+ \frac{2}{9}\ln\left(\frac{3}{2}\Delta_1(T) - \frac{15}{4}\Delta_0 + \frac{25}{4}\right) + \\
&+ \frac{1}{9}\ln\left(-\frac{3}{2}\Delta_1(T) - \frac{15}{4}\Delta_0 + \frac{25}{4}\right)
\end{aligned}$$

O objetivo é maximizar esta última expressão.

Com esse fim, calculamos as Derivadas parciais

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[\mathbb{E}[\ln(X_2)]]}{\partial\Delta_0} &= \frac{4}{9}\cdot\frac{15}{4}\frac{1}{X_2(HH)}+\frac{2}{9}\cdot\frac{15}{4}\frac{1}{X_2(HT)}+\\
&- \frac{2}{9}\cdot\frac{15}{4}\frac{1}{X_2(TH)}-\frac{1}{9}\cdot\frac{15}{4}\frac{1}{X_2(TT)}\\
&= \frac{5}{12}\left(\frac{4}{X_2(HH)}+\frac{2}{X_2(HT)}-\frac{2}{X_2(TH)}-\frac{1}{X_2(TT)}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[\mathbb{E}[\ln(X_2)]]}{\partial\Delta_1(H)} &= \frac{4}{9}\cdot\frac{6}{X_2(HH)}-\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{X_2(HT)}\\
&= \frac{4}{3}\left(\frac{2}{X_2(HH)}-\frac{1}{X_2(HT)}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[\mathbb{E}[\ln(X_2)]]}{\partial\Delta_1(T)} &= \frac{2}{9}\cdot\frac{3}{2}\frac{1}{X_2(TH)}-\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\frac{1}{X_2(TT)}\\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{X_2(TH)}-\frac{1}{X_2(TT)}\right)
\end{aligned}$$

Igualando essas derivadas a zero, obtemos as três equações a seguir:

$$\frac{4}{X_2(HH)}+\frac{2}{X_2(HT)}=\frac{2}{X_2(TH)}+\frac{1}{X_2(TT)} \tag{4.14}$$

$$\frac{2}{X_2(HH)}=\frac{1}{X_2(HT)} \tag{4.15}$$

$$\frac{2}{X_2(TH)}=\frac{1}{X_2(TT)} \tag{4.16}$$

Efetuando o produto cruzado em (4.15) *e* (4.16), *obtêm-se*

$$X_2(HH)=2X_2(HT) \tag{4.17}$$

$$X_2(TH)=2X_2(TT). \tag{4.18}$$

Substituindo estas equações em (4.14) *e novamente efetuando o produto cruzado, obtemos a terceira equação:*

$$X_2(HT)=2X_2(TT). \tag{4.19}$$

Isso nos dá as três equações lineares (4.17) *a* (4.19) *nas quatro incógnitas*
$X_2(HH)$, $X_2(HT)$, $X_2(TH)$ *e* $X_2(TT)$.
Uma forma de concluir é de considerar as fórmulas (4.10) *á* (4.13) *em termos de três incógnitas* $\Delta_1(H)$, $\Delta_1(T)$ *e* Δ_0, *substituindo e resolvendo as três equações lineares resultantes em três incógnitas. Isso levará às soluções* $\Delta_0 = \frac{5}{9}$,$\Delta_1(H) = \frac{25}{54}$ *e* $\Delta_1(T) = \frac{25}{27}$. *Achamos o portfólio ideal, mas o método usado pode ser simplificado, pois, em particular, à medida que o número de períodos aumenta, o número de variáveis* $\Delta_n(\omega)$ *cresce exponencialmente, e na última etapa resolvemos um sistema de equações lineares nessas variáveis.*

Uma maneira alternativa de concluir é buscar uma quarta equação envolvendo $X_2(HH)$, $X_2(HT)$, $X_2(TH)$ *e* $X_2(TT)$ *para acompanhar as três equações* (4.17) *à* (4.19), *e depois resolver essas quatro equações em quatro incógnitas. Para isso recorremos ao capítulo* 2 *do livro (SHREVE, 2012) em que encontramos o seguinte teorema e seu corolário:*

Teorema 4.1.3. *Considere o Modelo Binomial com N períodos. Seja* $\Delta_0; \Delta_1 \cdots \Delta_{N-1}$ *um processo de portfólio adaptado,* X_0 *um número real e deixe o processo de riqueza* $X_1 \cdots X_N$ *ser gerado recursivamente por*

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n), n = 0, 1, ..., N-1. \quad (4.20)$$

Então o processo de riqueza descontado $\frac{X_n}{(1+r)^n}$ *para* $n = 0, 1, ..., N$, *é um Martingal sob a medida de risco neutro, ou seja,*

$$X_n(1+r)^n = \tilde{\mathbb{E}}_n \left[\frac{X_{n+1}}{(1+r)^{n+1}} \right] \quad (4.21)$$

para $n = 0, 1, ..., N-1$.

Corolário: Sob as condições do Teorema anterior, temos
$\mathbb{E}\left[\frac{X_n}{(1+r)^n}\right] = X_0$ *para* $n = 0, 1, ..., N$. *Agora, usando o corolário acima para* $n = 2$, *podemos escrever a quarta equação,*

$$4 = \frac{16}{25} \left[\frac{1}{4} X_2(HH) + \frac{1}{4} X_2(HT) + \frac{1}{4} X_2(TH) + \frac{1}{4} X_2(TT) \right]. \quad (4.22)$$

Agora basta resolver o sistema de equações (4.17) *à* (4.19) *e* (4.30) *para* *obtermos,*

$$X_2(HH) = \frac{100}{9} \text{ ,} X_2(HT) = X_2(TH) = \frac{50}{9} \text{ e } X_2(TT) = \frac{25}{9}. \quad (4.23)$$

Podemos, então, encontrar $\Delta_1(H)$, $\Delta_1(T)$ e Δ_0 pelo algoritmo do Teorema 3.2.1 do capítulo 2. Em particular,

$$\Delta_1(H) = \frac{X_2(HH) - X_2(HT)}{S_2(HH) - S_2(HT)} = \frac{25}{54} \quad (4.24)$$

$$\Delta_1(T) = \frac{X_2(TH) - X_2(TT)}{S_2(TH) - S_2(HT)} = \frac{25}{27} \quad (4.25)$$

$$X_1(H) = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}X_2(HH) + \frac{1}{2}X_2(HT)\right) = \frac{20}{3} \quad (4.26)$$

$$X_1(T) = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}X_2(TH) + \frac{1}{2}X_2(TT)\right) = \frac{10}{3} \quad (4.27)$$

$$\Delta_0 = \frac{X_1(H) - X_1(T)}{S_1(H) - S_1(T)} = \frac{5}{9}. \quad (4.28)$$

O segundo método de concluir o exemplo anterior usou a Equação (4.30), que decorre do fato de o valor descontado esperado de um processo de carteira sob a medida de risco neutro ser sempre igual ao valor inicial X_0, ou seja,
$\tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_N}{(1+r)^N}\right] = X_0$. Esta equação introduz a medida neutra ao risco para a solução do problema (6), mesmo que apenas a medida de probabilidade real apareça na descrição do problema. Isso sugere que podemos substituir o problema 6 pelo seguinte problema:

Exemplo 8. *Dado X_0,encontrar uma variável aleatória X_N (sem levar em conta o processo de portfólio) que maximiza $\mathbb{E}[U(X_N)]$ sujeito a* $\tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_N}{(1+r)^N} =\right] X_0$

Lema 4.1.4. *Suponha $\Delta_0^*, \Delta_1^*, \cdots \Delta_{N-1}^*$ um processo ideal para o problema 6 e X_N^* é a variável aleatória de riqueza ideal correspondente em tempo de N. Então X_N^* é ideal para o problema 8. Por outro lado, suponha X_N^* ideal para o problema 8. Então, há um processo de portfólio $\Delta_0^*, \Delta_1^*, \cdots \Delta_{N-1}^*$ que começa com X_0 inicial, e tem valor X_N^* no tempo N, e este processo de portfólio é ideal para o problema 6.*

Esse Lema separa o problema de investimento ótimo, Exemplo 6, em dois passos gerenciáveis: o primeiro é encontrar uma variável aleatória X_N que resolva o problema do Exemplo 8; e o segundo é construir o portfólio que começa com X_0 e replica X_N, esse segundo passo usa o algoritmo do Teorema 3.2.1. Resta apenas descobrir como realizar o primeiro passo. Antes de dar o método geral, examinamos o Problema do E Exemplo 6 dentro do contexto de Exemplo 7.

Exemplo 9. *(Continuação do Exemplo 7) Em primeiro lugar, calcular o processo derivada de Radon-Nikodým $\tilde{P}$ com respeito a P, isto é Z_n*

$$Z(HH) = \frac{\tilde{P}(HH)}{P(HH)} = \frac{9}{16} \qquad Z(HT) = \frac{\tilde{P}(HT)}{P(HT)} = \frac{9}{8}$$

$$Z(TH) = \frac{\tilde{P}(TH)}{P(TH)} = \frac{9}{8} \qquad Z(TT) = \frac{\tilde{P}(TT)}{P(TT)} = \frac{9}{4}.$$

Para simplificar, usamos subscritos para indicar os diferentes valores da densidade do preço de estado

$$\zeta_1 = \zeta(HH) = \frac{Z(HH)}{(1+r)^2} = \frac{9}{25}$$

$$\zeta_2 = \zeta(HT) = \frac{Z(HT)}{(1+r)^2} = \frac{18}{25}$$

$$\zeta_3 = \zeta(TH) = \frac{Z(TH)}{(1+r)^2} = \frac{18}{25}$$

$$\zeta_4 = \zeta(TT) = \frac{Z(TT)}{(1+r)^2} = \frac{36}{25}.$$

Nós também usamos a notação
$p_1 = P(HH) = \frac{4}{9} \quad p_2 = P(HT) = \frac{2}{9}$
$p_3 = P(HT) = \frac{2}{9} \quad p_4 = P(TT) = \frac{1}{9}.$
Finalmente, denotamos
$x_1 = X_2(HH), \quad x_2 = X_2(HT), \quad x_3 = X_2(TH) \quad e \quad x_4 = X_2(TT).$
Com estas notações, o problema do Exemplo 8 pode ser escrito como encontrar um vetor (x_1, x_2, x_3, x_4) que maximize

$$\sum_{m=1}^{4} p_m U(x_m),$$

sujeito a

$$\sum_{m=1}^{4} p_m \zeta_m x_m = X_0.$$

Desenvolvendo as equações acima e usando o fato de que a função de utilidade em questão é o logaritmo, reescrevemos isso como : encontrar um vetor (x_1, x_2, x_3, x_4) *que maximize*

$$\frac{4}{9}\ln(x_1) + \frac{2}{9}\ln(x_2) + \frac{2}{9}\ln(x_3) + \frac{1}{9}\ln(x_4) \tag{4.29}$$

sujeito a

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{25}x_1 + \frac{2}{9}\cdot\frac{18}{25}(x_2+x_3) + \frac{1}{9}\cdot\frac{36}{25}x_4 = 4 \tag{4.30}$$

O Lagrangeano para esse problema é

$$\begin{aligned} L &= \frac{4}{9}\ln(x_1) + \frac{2}{9}\ln(x_2) + \frac{2}{9}\ln(x_3) + \frac{1}{9}\ln(x_4) \\ &- \lambda\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{25}x_1 + \frac{2}{9}\cdot\frac{18}{25}(x_2+x_3) + \frac{1}{9}\cdot\frac{36}{25}x_4 - 4\right). \end{aligned}$$

As equações do multiplicador de Lagrange são

$$\frac{\partial}{\partial x_1}L = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{x_1} - \lambda\frac{9}{25}\right) = 0 \tag{4.31}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}L = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{x_2} - \lambda\frac{18}{25}\right) = 0 \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}L = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{x_3} - \lambda\frac{18}{25}\right) = 0 \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_4}L = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x_4} - \lambda\frac{36}{25}\right) = 0 \tag{4.34}$$

O que implica em

$$x_1 = \frac{25}{9\lambda}, \qquad x_2 = \frac{25}{18\lambda},$$
$$x_3 = \frac{25}{18\lambda}, \qquad x_4 = \frac{25}{36\lambda}.$$

Resolvemos para $\frac{1}{\lambda}$ *e substituindo estas fórmulas na Equação* (4.30), *temos que*

$$\frac{4}{9\lambda} + \frac{2}{9\lambda} + \frac{2}{9\lambda} + \frac{1}{9\lambda} = 4. \tag{4.35}$$

Isso mostra que $\frac{1}{\lambda} = 4$. *Conclui-se que a riqueza ideal em tempo dois é*

$$X_2(HH) = x_1 = \frac{100}{9}, \quad X_2(HT) = x_2 = \frac{50}{9},$$

$$X_2(TH) = x_3 = \frac{50}{9}, \quad X_2(TT) = x_4 = \frac{25}{9}$$

Isso concorda com a fórmula (4.23)*.Agora, podemos calcular o portfólio ideal do processo, ou seja* $\Delta_0, \Delta_1(H)$*e* $\Delta_1(T)$ *como fizemos seguindo essa fórmula.*

Em geral, a solução do Exemplo 8 segue as linhas do exemplo anterior. Este é um problema complicado pelo fato de que tanto as probabilidades reais como as probabilidade de risco neutro aparecem na formulação do problema. Consequentemente, introduz-se a derivada de Randon-Nikodým Z de $\tilde{P}$ com respeito a P para reescrever a equação do Exemplo 8 sem referência à medida neutra ao risco. Esta restrição torna-se

$$\mathbb{E}\left[\frac{Z_N X_N}{(1+r)^N}\right] = X_0. \tag{4.36}$$

Podemos reescrever essa equação em termos da densidade de preço de estado $\zeta = \frac{Z}{(1+r)^N}$, e assim $\mathbb{E}[\zeta X_N] = X_0$.
Em um modelo de N períodos, há $M = 2^N$ possíveis sequências de eventos ω, que podem ser listados como $\omega^1 \cdots \omega^M$ usando sobrescritos para indicar que ω^m é uma sequência completa de lançamentos de moeda, não a moeda lançada de alguma sequência.
Defina $\zeta_m = \zeta(\omega^m), \quad p_m = P(\omega^m) \quad e \quad x_m = X_N(\omega^m)$.
Então o problema do Exemplo 8 pode ser reformulado da seguinte maneira:

Exemplo 10. *Dado* X_0, *encontrar um vetor* $(x_1, x_2, \cdots, x_M)$ *que maximize*

$$\sum_{m=1}^{M} p_m U(x_m)$$

sujeito a

$$\sum_{m=1}^{M} p_m \zeta_m x_m = X_0.$$

O Lagrangeano para esse problema é

$$L = \sum_{m=1}^{M} p_m U(x_m) - \lambda \left(\sum_{m=1}^{M} p_m \zeta_m x_m - X_0 \right) \tag{4.37}$$

e as equações do multiplicador de Lagrange são

$$\frac{\partial}{\partial \Delta_{x_m}} L = p_m U'(x_m) - \lambda p_m \zeta_m = 0, m = 1; 2; \cdots M. \tag{4.38}$$

Essas equações se reduzem a

$$U'(x_m) = \lambda \zeta_m, m = 1; 2; \cdots M. \tag{4.39}$$

Considerando as definições de x_m e ζ_m,vamos reescrever isso como

$$U'(X_N) = \frac{\lambda Z}{(1+r)^N} \tag{4.40}$$

Neste ponto, precisamos inverter a função U'. Já que U é estritamente côncava em todos os pontos e finita, sua derivada tem uma função inversa que chamamos de I. Por exemplo, se $U(x) = \ln x$, então $U'(x) = \frac{1}{x}$. Chamando $y = U'(x) = \frac{1}{x}$, resolvemos para $x = \frac{1}{y}$, e isso determina a função inversa $I(y) = \frac{1}{y}$. Depois de determinar esta função inversa, obteremos:

$$X_N = I \left[\frac{\lambda Z}{(1+r)^N} \right]. \tag{4.41}$$

Isto nos dá uma fórmula para X_N em termos do multiplicador λ. Resolvemos para o multiplicador λ e substituindo X_N na Equação (4.36) temos:

$$\mathbb{E} \left[\frac{Z}{(1+r)^N} I \left(\frac{\lambda Z}{(1+r)^N} \right) \right] = X_0 \tag{4.42}$$

Depois de resolver esta equação para λ, substituímos, na Equação (4.41) para obter X_N, e então usamos o algoritmo do Teorema 3.2.1 do capítulo 2, para encontrar o processo de portfólio ótimo $\Delta_0, \cdots \Delta_{N-1}$. Todas estas etapas foram realizadas no Exemplo 9. Resumimos essa discussão no teorema abaixo:

Teorema 4.1.5. *O problema do Exemplo 6 pode ser resolvido com:*

1- encontrar a solução da Equação (4.42)*,* *2- calcular X_N pela Equação* (4.41),

3- usar X_N no algoritmo do Teorema 3.2.1 para determinar o portfólio ótimo $\Delta_0, \cdots \Delta_{N-1}$ e correspondentes valores $(x_1, x_2, \cdots, x_M)$.

5 APLICAÇÃO

5.1 DEFINIÇÕES E EXEMPLO

Neste capítulo apresentaremos como usar as ideias introduzidas nos capítulos anteriores, agora com dados reais obtidos a partir de páginas da internet como o Google Finance ou o Yahoo Finance. Além disso, um modelo realista é o de (COX et al., 1979) em que é assumido que os movimentos de preços de uma ação são dados por um número grande de pequenos movimentos binomiais.

5.1.1 Avaliação Neutra ao Risco

O princípio de avaliação neutra ao risco, afirma que para avaliar uma opção (ou qualquer outro derivativo) podemos assumir o seguinte:

1) O retorno esperado de todos os títulos negociados é a taxa de juros livre de risco.
2) Os fluxos de caixa futuros podem ser avaliados descontando os seus valores esperados na taxa de juros livre de risco.

Usaremos o livro (HULL et al., 2013) para fazer o próximo exemplo no Modelo Binomial

5.1.2 Determinação de $\tilde{p}$; u e d

Nós construímos uma árvore binomial para representar o comportamento do preço de uma ação em um mundo neutro ao risco. Os parâmetros $\tilde{p}$, u e d devem fornecer valores para a média e a variância do preço de estoque durante um intervalo de tempo δt. O retorno esperado de uma ação é a taxa de juros livre de risco, R. Assim, o valor esperado do preço da ação no final de um período de intervalo δt é $S_0 e^{R\delta t}$, onde S_0 é o preço da ação no início do intervalo de tempo. Segue que

$$S_0 e^{R\delta t} = \tilde{p} S_0 u + \tilde{q} S_0 d \tag{5.1}$$

ou

$$e^{R\delta t} = \tilde{p}u + \tilde{q}d \tag{5.2}$$

O desvio padrão da variação percentual do preço da ação em um intervalo de tempo pequeno δt é $\sigma\sqrt{\delta t}$, a variância dessa alteração percentual é $\sigma^2\delta t$, a variância de uma variável Q é definida como $\mathbb{E}[Q^2] - [\mathbb{E}(Q)]^2$. Segue que

$$\sigma^2\delta t = \tilde{p}u^2 + \tilde{q}d^2 - [\tilde{p}u + \tilde{q}d]^2 \tag{5.3}$$

As equações (5.2) e (5.3) impõem duas condições em $\tilde{p}$, u e d. Uma terceira condição usada no modelo de (COX et al., 1979) é $u = \frac{1}{d}$. Pode ser mostrado que fornecido um δt pequeno, as três condições implicam que

$$\tilde{p} = \frac{1 + r - d}{u - d} \tag{5.4}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} \tag{5.5}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} \tag{5.6}$$

Onde

$$1 + r = e^{R\delta t} \tag{5.7}$$

A variável $1 + r$ é as vezes referida como o fator de crescimento. Observe que nesse caso a taxa de juros R representa, de fato, a taxa de juros anualizada, diferente da taxa r usada nos capítulos anteriores.

5.1.3 Preço da Ação via o Modelo Binomial de três períodos

Como vimos no Capítulo 2, no tempo zero, o preço da ação, S_0, é conhecido. No tempo 1 ou Δt_1, há dois preços possíveis,S_0u e S_0d; no tempo 2 ou Δt_2, há três preços possíveis, S_0u^2, S_0ud e S_0d^2; e assim por diante. Em geral, no momento $i\Delta t$, existem $1 + i$ preços para a ação : $S_0u^jd^{i-j}$; $(j = 0, ..., i)$. Observe que a relação $u = \frac{1}{d}$ é usada no cálculo do preço da ação em cada nó da árvore binomial. Por exemplo, $S_0u^2d = S_0u$. Note também que a árvore é recombinante, pois um movimento de subida seguido por um movimento de descida leva ao mesmo preço da ação, assim como um movimento de descida seguido por um movimento de subida.

5.1.4 Indução Retroativa

Como vimos no Capítulo 2, as opções são avaliadas começando no final da árvore (tempo N) e trabalhando para trás, esse procedimento é conhecido como indução retroativa. O valor da opção é conhecido no tempo N. Por exemplo, uma opção de venda tem como payoff $\max\{S_N - K; 0\}$ e uma opção de compra $\max\{K - S_N; 0\}$, onde S_N é o preço da ação no momento N e K é o preço de exercício. Como pressupõe-se um mundo neutro ao risco, o valor em cada nó no tempo $N-1$ pode ser calculado como o valor esperado no tempo N descontada a taxa R por um período de tempo δt. Da mesma forma, o valor em cada nó no tempo $N-2$ pode ser calculado como o valor esperado no tempo $N-1$ descontados por um período de tempo δt à taxa R, e assim por diante.

5.1.5 Exemplo

Vejamos agora um exemplo com dados reais de uma opção de Venda. Considere os valores de fechamento da ação da Vale do Rio Doce no período de 25/11/2017 à 28/5/2018 quando o fechamento da ação em 25/11 é de $\$10,90$. A taxa SELIC é de $6,5\%$ ao ano. Com nossa notação usual, isto significa que $S_0 = 10,90$, $R = 0,065$, e faremos o exemplo a seguir usando os 6 primeiros valores da tabela abaixo, e como na tabela os valores são semanais e temos 52 semanas no ano $T = \frac{5}{52}$

Suponha que dividamos a vida da opção em 6 intervalos de duração de uma semana com o propósito de construir uma árvore binomial com 5 ramos. Então $\delta t = \dfrac{1}{52}$, equivalente á uma semana, e usando as equações (5.4) à (5.7) e os dados de fechamento da ação da Vale do Rio Doce nos dias citados acima, calculamos a série de retornos logarítmicos

$$X_n = \log(\frac{x_{n+1}}{x_n}). \tag{5.8}$$

Valores da Ação da Vale do Rio Doce de 27/11/2017 à 28/05/2018					
27/11	R$ 10,90	29/01	R$ 12,54	02/04	R$ 12,66
04/12	R$ 10,78	05/02	R$ 12,91	09/04	R$ 13,12
11/12	R$ 11,17	12/02	R$ 14,12	16/04	R$ 14,00
18/12	R$ 11,92	19/02	R$ 14,20	23/04	R$ 13,95
25/12	R$ 12,23	26/02	R$ 13,39	30/04	R$ 14,08
01/01	R$ 13,09	05/03	R$ 12,89	07/05	R$ 14,61
08/01	R$ 13,53	12/03	R$ 12,80	14/05	R$ 14,58
15/01	R$ 13,36	19/03	R$ 12,51	21/05	R$ 14,03
22/01	R$ 13,11	26/03	R$ 12,72	28/05	R$ 13,44

Tabela 1 – Ações Vale do Rio Doce

A partir dessa nova série temporal, calculamos a Média amostral $\hat{\mu}$, a Variância amostral e o Desvio padrão amostral, onde x_n é o preço da ação para o dia n. O que nos dá os seguintes resultados:

$\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_n = 0,0349895$

$\hat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_n-\hat{\mu})^2}{n} = 0,00028473$

$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_n-\hat{\mu})^2}{n}} = 0,01687408$

$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} = 1,002342753841012$

$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} = 0,9976662721826407$

$1 + r = e^{R\delta t} = 1,001250781575623$

$\tilde{p} = \dfrac{(1 + r - d)}{(u - d)} = 0,7666741889838615$

$\tilde{q} = 1 - \tilde{p} = 0,233325811016139$,

e o fator de desconto por período $= e^{-R\delta t} = 0,99875078092458$.

No modelo Binomial, a Figura 7 mostra que em cada nó existem dois números: o topo mostra o preço da ação no nó e abaixo está o valor da opção no nó. A probabilidade de um movimento de subida é sempre $1,002342753841012$ e a probabilidade de um movimento de descida é sempre $0,9976662721826407$.

O preço das ações em cada nó j; $j = 0,1,...i$ no tempo $i\delta t$; $i = 0,1,..5$ é calculado como $S_0u^jd^{i-j}$. Os preços das opções nos nós finais são calculados como $\max\{X - S_N; 0\}$. Os preços das opções nos penúltimos nós são calculados a partir dos preços da opção nos nós finais. Primeiro, não assumimos o exercício da opção nos nós. Isso significa que o preço da opção é calculado como o valor presente do preço esperado da opção um passo depois.

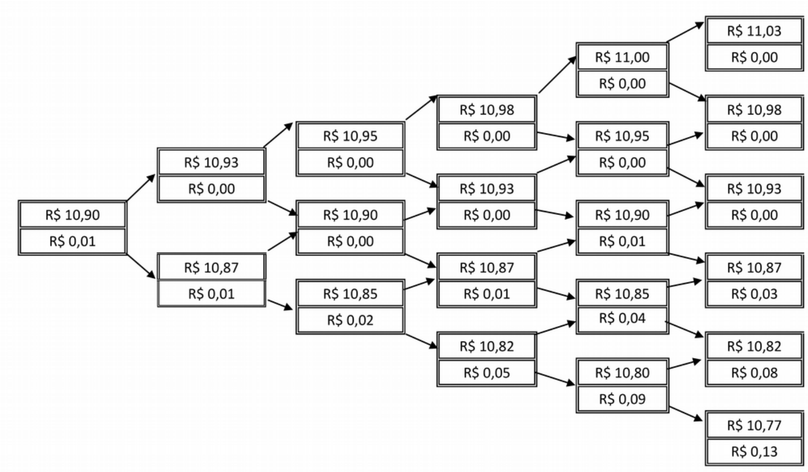

Figura 7 – Àrvore de preços de ação (topo) e de preços de opção (base)

Neste caso temos um ativo objeto atualmente cotado em \$10,90 e a sua opção de compra precificada, através do modelo em \$0,01. A cada possível alteração da ação, a opção estaria precificada em um novo valor, por exemplo: com a ação em \$10,82 a opção estaria precificada em \$0,05.

Já no Modelo CAPM, resolvendo o mesmo exemplo, devemos supor valores para as medidas de probabilidades reais p e q. Sejam $p = 0,3$ e $q = 0,7$, primeiramente calculamos os valores de $\mathbb{E}[U(X_N)]$, usando a função de utilidade $U(x) = \ln(x)$, e tomando a inversa de sua derivada, $U'(x) = \frac{1}{x}$. Utilizando a fórmula (4.42) e, em seguida, calculando os valores de X_N pela Equação (4.41). Finalmente, usamos esses valores de X_N, no algoritmo do Teorema 3.2.1 para determinar o portfólio ótimo $\Delta_0, \cdots \Delta_{N-1}$ e correspondentes valores $(X_1, X_2, \cdots, X_N)$.

Esses cálculos nos levam à: $Z_0 = 109,06$, $Z_1 = 14,22$, $Z_2 = 1,85$, $Z_3 = 0,24$, $Z_4 = 0,03$, $Z_5 = 0,004$, e partindo de $X_0 = 10,90$, encontramos $\lambda = \frac{1}{X_0}$ e calculamos $X_1 = 0,81$, $X_2 = 6,66$, $X_3 = 54,43$, $X_4 = 444,50$ e $X_5 = 3629,53$.

Após isso, construímos a árvore da figura 8 recombinante de trás para frente :

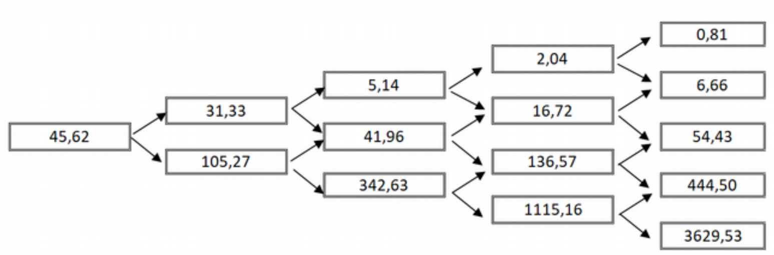

Figura 8 – Àrvore do Portfólio ótimo

Por fim, calculamos o portfólio ideal através da fórmula (3.30) e obtemos os resultados finais. Nesse exemplo os resultados desse portfólio nos mostram que devemos tomar emprestado dinheiro para chegarmos à opção ideal: $\Delta_0 = -1453,97$;
$\Delta_1(H) = -740,72$;
$\Delta_1(T) = -27,58$;
$\Delta_2(HH) = -314,88$;
$\Delta_2(HT) = \Delta_2(TH) = -2349,38$;
$\Delta_2(TT) = -19273,50$;
$\Delta_3(HHH) = -113,88$;
$\Delta_3(HHT) = \Delta_3(HTH) = -934,27$;
$\Delta_3(HTT) = \Delta_3(THT) = \Delta_3(TTH) = -7664,44$;
$\Delta_3(TTT) = -62876,37$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho fizemos uma aplicação prática do Modelos Binomial e CAPM. O Modelo Binomial, com um número suficiente de períodos fornece uma boa aproximação para modelos em tempo contínuo. Nesse modelo usamos as probalidades neutras ao risco, e uma taxa de juros e construimos uma árvore recombinante para calcular o preço da ação no tempo n, e depois usamos uma indução retroativa para calcular o preço da opção no tempo zero. NO Modelo CAPM, precisamos usar as probabilidades reais e a neutra ao risco, e uma função de Utilidade para determinarmos o portifólio ideal. No nosso exemplo, o resultado implica que devemos tomar emprestado os valores.

REFERÊNCIAS

CARVALHO, P. C. P.; CARVALHO, J. B. P. de; FERNANDEZ, P.; MORGADO, A. Análise combinatória e probabilidade. **Editora SBM**, 2004.

COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. et al. Option pricing: A simplified approach. **Journal of financial Economics**, Amsterdam, v. 7, n. 3, p. 229–263, 1979.

FELLER, W. **An introduction to probability theory and its applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons Oxford, England: Wiley, 2008.

HULL, J.; TREEPONGKARUNA, S.; COLWELL, D.; HEANEY, R.; PITT, D. **Fundamentals of futures and options markets**. [S.l.]: Pearson Higher Education AU, 2013.

KAC, M.; LOGAN, J. Fluctuation phenomena. **Studies in Statistical Mechanics**, v. 7, 1979.

MATAREZIO, R. **Utilização De Árvores Binomiais 3 D**. [s.n.], 2009. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=F5lQBQAAQBAJ>.

NELSON, E. **Quantum fluctuations**. [S.l.]: Princeton University Press; NJ, 1985.

SHREVE, S. **Stochastic calculus for finance I: the binomial asset pricing model**. [S.l.]: Springer Science & Business Media;Pitsburgh, USA, 2012.