UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Lógica Fuzzy: Uma Perspectiva para Avaliações

Claudio Roberto Pereira Silva

Instituto de Matemática

Maceió, outubro de 2018

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LÓGICA FUZZY: UMA PERSPECTIVA PARA AVALIAÇÕES

CLAUDIO ROBERTO PEREIRA SILVA

ARAPIRACA - AL
2018

CLAUDIO ROBERTO PEREIRA SILVA

LÓGICA FUZZY: UMA PERSPECTIVA PARA AVALIAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Júnior

MACEIÓ - AL
2018

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 - 661

S586l Silva, Claudio Roberto Pereira
Logica fuzzy : uma perspectiva para avaliações / Claudio Roberto Pereira Silva. – 2018.
66 f. : il.

Orientador: Rinaldo Vieira da Silva Júnior
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2017.

Bibliografia: f. 60-61.
Apêndices: f. 62-66.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Fuzzi (inteligência artificial). 3. Teoria dos conjuntos. 4. Lógica matemática. I. Título.

CDU: 510.6

Folha de Aprovação

CLAUDIO ROBERTO PEREIRA SILVA

LÓGICA FUZZY: UMA PERSPECTIVA PARA AVALIAÇÕES

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 30 de outubro de 2018.

Banca Examinadora:

Rinaldo V. da Silva

Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Júnior – UFAL (Presidente)

Isnaldo Isaac Barbosa

Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa - UFAL

Jonas Gonçalves Lopes

Prof. Dr. Jonas Gonçalves Lopes – IFAL

MACEIÓ - 2018

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos os que acreditaram e estiveram junto comigo durante toda a construção e além de tudo, aqueles que estiveram ao meu lado enfrentando todas as barreiras impostas por este curso. Dedico este trabalho a cada leitor que se interessar a lê-lo e compreendê-lo, só assim saberei que este trabalho teve um fundamento realmente importante.

"A Deus seja dada toda honra e toda glória!"

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por estar sempre ao meu lado e ter me dado a oportunidade de viver para poder passar por momentos como estes.

Logo em seguida agradeço aos meus pais, Paulo e Ivanilda, minha esposa Angélica e minha filha Maria Clara, meus irmãos Paulinho e Rodrigo, todos por ter me dado o amparo emocional necessário para que eu pudesse chegar até o fim dessa caminhada e serem meus suportes para quaisquer desafios.

Gostaria ainda de agradecer a todos aqueles que torceram por mim e me ajudaram ao longo dessa caminhada, dentre estão todos os meus familiares, que estão representados pela Paty, Meire e Lucas.

Todos os professores deste programa de mestrado que, além das aulas, contribuíram com bastante apoio nos diversos momentos e dificuldades enfrentados por todos da turma, destes posso destacar André Flores, Isnaldo Isaac e Luis Guillermo, além do meu professor e orientador Rinaldo Vieira.

Aos meus colegas de turma e parceiraços em todos os momentos, que são representados pelo Clewerton, Elvis, Gerlan, Isaac e Mayra.

E por fim, porém não menos importante, agradecer a professora Adina Rocha por sua ajuda na primeira correção da dissertação, dando opiniões importantíssimas nos desdobramentos das pesquisas; ao professor Odair Barbosa que, com seu seminário sobre a lógica fuzzy e seus conselhos nos motivou a seguir nesta linha de pesquisa; e também (novamente) ao professor Isnaldo Isaac por ceder um espaço no ambiente virtual AVA da UFAL para que as pesquisas pudessem avançar online chegando no nosso objetivo.

"Para evoluir e somar conquistas é preciso adicionar persistência em tudo."

Nuno Cobra

Resumo

Diferentemente da lógica booleana (clássica), onde tem como característica principal a exatidão, a lógica fuzzy é caracterizada pela incerteza, pela dúvida. Nesse sentido, nosso trabalho se utiliza desse aspecto da lógica fuzzy para implementar uma nova possibilidade para avaliações escolares, visto que existem diferentes tipos de avaliações e dentre estes, existem as avaliações objetivas, onde é minimizado ou até desconsiderado todo o raciocínio empregado pelo estudante até a marcação de determinada alternativa, observando apenas o resultado final de sua resposta. Esse fato nos motivou a criar uma técnica onde as avaliações objetivas não perdessem essa parte do conhecimento tão importante para o desenvolvimento dos alunos e, mesmo sem a necessidade de uma dissertação do assunto referido, observe-se a capacidade de organização e resolução das questões.

Palavras-chave: Fuzzy, dúvida, avaliações, raciocínio, objetivas.

Abstract

Unlike boolean logic (classical), where fuzzy logic is characterized by uncertainty, it is characterized by accuracy. In this sense, our work uses this aspect of fuzzy logic to implement a new possibility for school evaluations, since there are different types of evaluations and among these, there are objective evaluations, where all the reasoning employed by the student is minimized or even disregarded the marking of a certain alternative, observing only the final result of its response. This fact motivated us to create a technique where the objective evaluations did not lose that part of the knowledge so important for the development of the students and, even without the necessity of a dissertation of the referred subject, observe the capacity of organization and resolution of the questions.

Keywords: Fuzzy, doubt, evaluation, reasoning, objective.

Sumário

Introdução

A lógica booleana (clássica) é famosa por definir claramente a pertinência de determinado elemento a algum conjunto, tendo como característica principal a exatidão. Numa linha oposta a essa está a lógica fuzzy (também chamada de lógica nebulosa), que está baseada no tratamento de termos onde, principalmente nas fronteiras dos conjuntos, existe dúvida, incerteza sobre a pertinência de algum elemento a um conjunto.

Na educação podemos ressaltar o princípio da lógica fuzzy nos métodos avaliativos do processo de ensino e aprendizagem, uma vez que a avaliação escolar é ponto de bastante atenção por parte de professores e pesquisadores da educação, principalmente no conflito entre avaliações objetivas, como prova escrita, na forma de julgar a capacidade do aluno e avaliações mais subjetivas como o desenvolvimento e participação do aluno na sala de aula. Nesse segundo ponto podemos observar a existência do conceito fuzzy, já que a participação e desenvolvimento de um aluno são termos bastante subjetivos e não são bem definidos. Já as avaliações objetivas possuem critérios mais rígidos em relação a certo ou errado, sendo criticado por muitos pedagogos e pensadores da educação pelo fato de ignorar qualquer fase cognitiva do aluno no processo de desenvolvimento de suas respostas, assim, é esse ponto que tomamos para tentar flexibilizar a avaliação e minimizar esse aspecto rígido advindo da lógica clássica.

No primeiro capítulo deste trabalho vamos falar sobre a lógica fuzzy, começando pela diferença em relação a lógica clássica (booleana), posteriormente definindo um subconjunto fuzzy, operações com conjuntos fuzzy, além de todos os conteúdos considerados importantes para a construção do nosso trabalho, como o princípio de extensão de Zadeh, operações aritméticas com números fuzzy, relações fuzzy e sistemas baseados em regras fuzzy. Ao fim deste apanhado teórico que será fundamental para nossa intervenção, trouxemos uma seção com aplicações utilizando tudo que se passou no capítulo.

O segundo capítulo traz a nossa intervenção pedagógica no âmbito das avaliações presenciais, utilizando as teorias contempladas no primeiro capítulo para criar um novo modelo de avaliar questões objetivas de múltipla escolha, considerando, além da resposta final, a quantidade de certeza que o aluno tem para fazer tais afirmações.

Seguindo o mesmo raciocínio, o terceiro capítulo trabalha questões de múltipla escolha observando a quantidade de certeza do aluno, porém em um ambiente virtual de aprendizagem, que remete ao conceito da educação a distância.

E por fim, trazemos um quarto capítulo com algumas considerações finais a cerca de tudo que foi trabalhado nos capítulos anteriores, o objetivo do trabalho e sua finalidade.

Após as referências bibliográficas, o leitor encontrará no Apêndice A uma atividade proposta ao 7º ano do ensino fundamental, junto com a formação das porcentagens de cada alternativa, com a finalidade de verificar o método proposto no segundo capítulo deste trabalho, e no Apêndice B, uma planilha para normalização das notas dadas pela plataforma Moodle no sistema fuzzy utilizado no AVA.

1 Conjunto Fuzzy

1.1 Um Pouco de História

Tradicionalmente, quando falamos em lógica, somos tentados a considerar as coisas sob o ponto de vista da lógica booleana, onde conseguimos distinguir com certa facilidade a pertinência dos elementos aos conjuntos, e ainda temos que, ou um elemento pertence a um determinado conjunto ou não pertence a esse conjunto, não havendo uma terceira opção (princípio do terceiro excluído), uma perspectiva intimamente ligada com o conceito de verdadeiro ou falso.

Por exemplo, consideramos um conjunto formados apenas por moedas de 10 centavos. Então temos que uma moeda de 10 centavos pertence a esse conjunto, enquanto duas moedas de 5 centavos não pertencem a esse conjunto.

Por outro lado, existem alguns conjuntos cuja pertinência ou não de um elemento a eles não é tão precisa, principalmente nas fronteiras desses conjuntos, como são exemplos os conjuntos das pessoas altas, do frio, da distância, entre outros. Visualizando esse tipo de conjunto, com suas imprecisões, que foi idealizada a lógica fuzzy. E foi a partir dessa característica de imprecisão que se deu o nome *fuzzy*, que do inglês significa nebuloso, obscuro, impreciso, incerto, vago, confuso, entre outros sinônimos.

Nesse sentido, a lógica fuzzy é baseada em termos vagos, onde a pertinência de seus elementos não é totalmente clara e objetiva, fazendo com que a lógica booleana não seja tão precisa em seu tratamento e haja a necessidade de uma complementação para uma possível correção nesse déficit.

Para melhor visualizar a diferença no tratamento dos dados, vamos inserir o seguinte exemplo que será colocado de duas maneiras, uma para cada ponto de vista lógico (booleana e fuzzy).

Exemplo 1.1 *Consideramos o conjunto dos homens brasileiros de estatura alta, os quais estão pertencentes a esse conjunto os homens de altura igual ou superior a 1,80 metros.*

Primeiramente observando sob o ponto de vista da lógica booleana, vemos que está estritamente definido o conjunto dos homens brasileiros altos e sabemos diferenciar facilmente a pertinência ou não a esse conjunto, ou seja, um homem que mede 1,80 metros ou mais pertence ao conjunto, enquanto outro homem que mede 1,79 metros ou menos não pertence ao mesmo conjunto.

Porém, se for observado visualmente, lado a lado, os dois elementos, um medindo 1,80 metros e outro medindo 1,79 metros, vamos acabar por transferir ambos ao mesmo conjunto, pois a diferença visual é tão pouca ou até desprezível (a depender dos indivíduos) que acabamos por considerar de mesma altura, ou consideramos ambos no mesmo conjunto com graus de pertinência diferentes entre eles. Este segundo ponto de vista é exemplo do que acontece na perspectiva da lógica fuzzy, encontrando os padrões de melhor para definir algo, observando sob uma ótica mais humana, criando uma flexibilidade na teoria dos conjuntos.

Podemos encontrar exemplos de incerteza em diferentes campos das ciências exatas, como os *Princípios de Incerteza* e as *Incertezas de Medição* observadas tanto na Química, quanto na Física. A Matemática ainda está dando seus primeiros passos acerca das incertezas, no sentido proveniente da aleatoriedade de eventos, e uma boa literatura adicional no sentido das aplicações da lógica fuzzy é [1].

O conceito de lógica fuzzy foi introduzido pelo matemático americano azerbaijano Lotfi Aliasker Zadeh [1] (1921 - 2017) em 1965 com a publicação do artigo "*fuzzy sets*" (conjuntos difusos), cuja finalidade foi dar um tratamento matemático a termos linguísticos subjetivos. Dando, dessa maneira, o primeiro passo em relação a inserir conceitos vagos em computadores, tornando possível a produção de cálculos com informações imprecisas ou vagas, a exemplo do que fazem os seres humanos. Nasce dessa forma a teoria da lógica fuzzy e consigo os primeiros estudos sobre inteligência artificial.

Com o intuito da utilização dos conceitos de conjunto fuzzy, lógica fuzzy e suas aplicações, faremos a seguir a apresentação de tais conceitos básicos que serão utilizados com frequência ao longo do texto.

1.2 Conjuntos Clássicos e Incertezas

Para fazer a formalização da teoria dos conjuntos fuzzy, Zadeh utilizou o fato de que qualquer conjunto clássico pode ser descrito através de uma função característica, como podemos ver na seguinte definição.

Definição 1.1 *Sejam U um conjunto universo e A um subconjunto de U. A função característica que descreve os elementos de A é dada por:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in A, \\ 0, & \text{se} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Dessa forma, a função χ_A possui como domínio o universo U e sua imagem é o conjunto $\{0, 1\}$, onde $\chi_A(x) = 1$ indica que o elemento x pertence ao subconjunto A e $\chi_A(x) = 0$ indica que o elemento x não pertence à A. Assim, podemos observar que a

[1] Zadeh foi um matemático, engenheiro eletrônico e cientista da computação estadunidense, ele foi professor de Ciência da Computação na Universidade da Califórnia.

função χ_A descreve (caracteriza) completamente o conjunto A, uma vez que essa função indica quais são os elementos do universo U que também pertencem ao conjunto A. E temos a seguinte representação gráfica para χ_A.

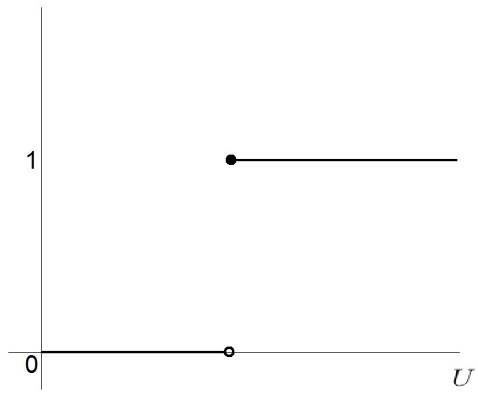


Figura 1 – Função característica de um conjunto clássico.

Porém, podem existir casos em que a pertinência de elementos a um conjunto não é precisa, assim, não é possível definir com exatidão se o elemento pertence ou não ao conjunto. Nesse sentido, vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 1.2 *Diante do conjunto* $A = \{x \in A \Leftrightarrow x$ *é alto*$\}$, *verificar se um jogador de basquete de* $2,13$ *metros, uma girafa de* $4,4$ *metros e um prédio de* 9 *metros de altura pertencem a tal conjunto.*

Note que não é simples definir se os elementos apresentados pertencem ou não ao conjunto em questão, pois o termo "alto" é bastante subjetivo, pelo fato de não sabermos qual o referencial utilizado no tratamento de tal termo. O que podemos definir com maior exatidão é que o prédio é mais alto que a girafa, que por sua vez é mais alta que o jogador de basquete.

Por conta de casos deste tipo que surge a necessidade de uma formalização matemática dos conceitos da lógica fuzzy, que iniciaremos a seguir com o conceito de subconjunto fuzzy.

1.3 Subconjuntos Fuzzy

É importante, antes de iniciar os conteúdos relativos à seção, lembrarmos que na teoria clássica, sempre que nos referimos a um conjunto A, na verdade estamos considerando um subconjunto de algum conjunto universo U, mas por simplicidade dizemos apenas *conjunto* A, mesmo A sendo um *subconjunto*. No caso fuzzy acontece o mesmo com o uso desses dois termos, por isso utilizaremos ambos indistintamente no nosso trabalho.

Como a ideia do conjunto fuzzy está relacionada com a imprecisão, resultados com níveis de aproximação, a ideia de Zadeh consiste em observar o conjunto imagem de uma função característica não como um conjunto discreto formado apenas por dois elementos (0 e 1), mas consiste em observar o conjunto imagem desta função como um intervalo $[0, 1]$, tendo assim uma infinidade de possibilidades para a imagem de um elemento, e por consequência, podemos ter dois elementos com suas imagens tão próximas quanto se queira, o que vem a ser caracterizado da seguinte maneira.

Definição 1.2 *Dado um conjunto universo U, um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado pela função*

$$\varphi_F : U \longrightarrow [0, 1],$$

*pré-fixada, a qual chamaremos de **função de pertinência do subconjunto fuzzy F**.*

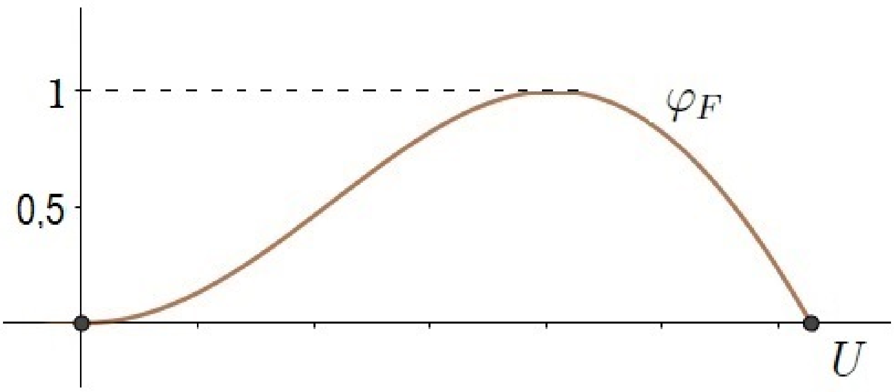


Figura 2 – Função pertinência de um conjunto fuzzy

Neste caso, é possível perceber que o valor $\varphi_F(x) \in [0, 1]$ indica o grau de pertinência em que o elemento $x \in U$ está incluso em relação ao subconjunto fuzzy F, onde $\varphi_F(x) = 0$ indica que o grau de pertinência do elemento x ao conjunto F é zero, enquanto $\varphi_F(x) = 1$ indica a pertinência completa de x ao conjunto fuzzy F.

Verificada a **Definição 1.2**, podemos observar também uma outra maneira de denotar um subconjunto fuzzy com a definição a seguir.

Definição 1.3 *Dado subconjunto F de um universo U, definimos F como o conjunto dos pares ordenados da forma*

$$F = \{(x, \varphi_F(x)); x \in U\}.$$

Podemos enfim constatar que a definição do conjunto fuzzy foi dada ampliando o conjunto imagem da função característica de um conjunto clássico. Nesse sentido, é possível concluir que o conjunto clássico é um caso particular do conjunto fuzzy.

De acordo com a lógica fuzzy, um conjunto clássico é denominado como *conjunto crisp*.

Para conseguirmos ilustrar melhor a diferença entre *conjunto fuzzy* e o *conjunto crisp*, vamos apresentar o seguinte exemplo, que será trabalhado a partir dos dois modelos separadamente.

Exemplo 1.3 *Dado um conjunto universo de algumas pessoas do sexo masculino, dessas são consideradas altas todas as que tiverem altura igual ou superior à 1,70 metros.*

Se o interesse for descrever o conjunto sob o ponto de vista clássico, teremos que o conjunto crisp C que indica as pessoas altas é dado por:

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \geq 1,70 \\ 0, & \text{se} \quad x < 1,70. \end{cases}$$

Porém, se a intenção for descrever o conjunto sob o ponto de vista fuzzy, teremos que, uma das possibilidades de descrever um conjunto fuzzy F que indica as pessoas do sexo masculino que são altas é:

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x > 1,70 \ , \\ 10x - 16, & \text{se} \quad 1,60 \leq x \leq 1,70 \ , \\ 0, & \text{se} \quad x < 1,60. \end{cases}$$

1.4 Operações com Conjuntos Fuzzy

Pelo fato de estarmos trabalhando com conjuntos e subconjuntos, então devemos definir com clareza as operações básicas entre conjuntos fuzzy, como união, intersecção e complementação, que é exatamente o que faremos nesta seção. Devemos lembrar também que todo subconjunto é também um conjunto, assim as operações que mostraremos a seguir são válidas tanto para conjuntos, quanto para subconjuntos.

Sejam A e B dois subconjuntos fuzzy de um universo U. Dizemos que A é um subconjunto fuzzy de B se $\varphi_A(x) \leq \varphi_B(x)$, para todo $x \in U$, e este fato é denotado com a mesma simbologia utilizada nos conjuntos crisp, ou seja, $A \subset B$.

Observação 1.1 *Perceba que a função pertinência do conjunto vazio é dada por* $\varphi_\varnothing = 0$*, e de forma análoga, a função de pertinência do conjunto universo* U *é dada por* $\varphi_U = 1$*. Com efeito disso, podemos concluir que* $\varnothing \subset A \subset U$*, para todo* A*.*

Como já foi dito anteriormente, Zadeh utilizou ideias advindas dos conjuntos crisp como base para definições dos conjuntos fuzzy, o que não foi diferente no momento de fazer definições formais de suas operações. Com isso, para a definição da união entre subconjuntos fuzzy, Zadeh utilizou o seguinte fato:

$$\max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \begin{cases} 1 \text{ , se } x \in A \text{ ou } x \in B \\ 0 \text{ , se } x \notin A \text{ e } x \notin B \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \text{ se } x \in A \cup B \\ 0 \text{ se } x \notin A \cup B \end{cases}$$

$$= \chi_{(A\cup B)}(x), \ \forall x \in U.$$

E daí segue a definição:

Definição 1.4 ***(União).*** *A união de dois subconjuntos fuzzy A e B de um universo U é um subconjunto fuzzy de U e sua função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{(A\cup B)}(x) = \max_{x\in U}\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}.$$

Seguindo por raciocínio análogo, chegamos à definição de intersecção.

Definição 1.5 ***(Intersecção).*** *A intersecção de dois subconjuntos fuzzy A e B de um universo U é um subconjunto fuzzy de U e sua função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{(A\cap B)}(x) = \min_{x\in U}\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}.$$

Outra definição importante é a de complementação, que no caso do conjunto fuzzy não é difícil de verificar que:

Definição 1.6 ***(Complementar).*** *O complementar de um subconjunto fuzzy $F \in U$ é o subconjunto fuzzy $F' \in U$ tal que sua função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{F'}(x) = 1 - \varphi_F(x), \ \forall x \in U.$$

Vistas as definições, para melhor ilustrar os casos de união, intersecção e complementação enttre conjuntos fuzzy, podemos observar na **Figura 3** as ilustrações de tais operações, onde A e B são conjuntos fuzzy.

Na sequência pretendemos explorar algumas peculiaridades apresentadas na complementação de um conjunto fuzzy, e para isso segue um exemplo.

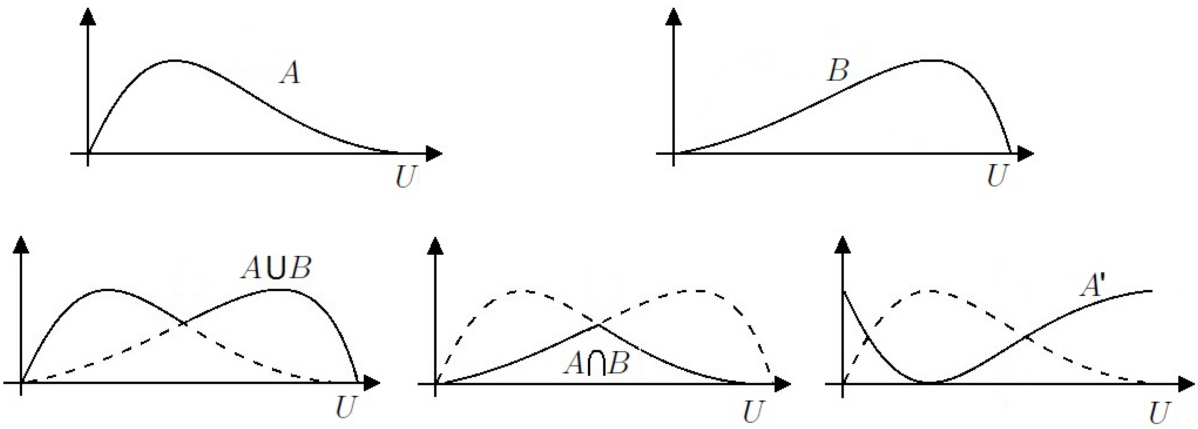


Figura 3 – Ilustração das operações de união, intersecção e complementação.

Exemplo 1.4 ***(Conjunto fuzzy do calor).*** *Para esse exemplo, devemos ter clareza na observação de que o conjunto fuzzy C do calor reflete uma situação oposta da verificada no conjunto fuzzy F do frio, quando estamos considerando a temperatura temporal em certo ambiente habitável. Podemos ainda notar que a função pertinência do conjunto do calor deve ser crescente, enquanto a função pertinência do conjunto do frio deve ser decrescente, dessa maneira, podemos dizer ainda que uma é a complementação da outra, dessa maneira, uma possibilidade para descrever a função pertinência de C é*

$$\varphi_C(x) = 1 - \varphi_F(x),$$

onde $\varphi_F(x)$ é a função pertinência do conjunto do frio. A partir daí, vamos adotar a seguinte função para descrever a pertinência:

$$\varphi_C(x) = 1 - \varphi_F(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \leq 10 \\ \dfrac{x-10}{20}, & se \quad 10 < x \leq 30 \\ 1, & se \quad x > 30. \end{cases}$$

E a representação gráfica para esse modelo apresentado pode ser a seguinte:

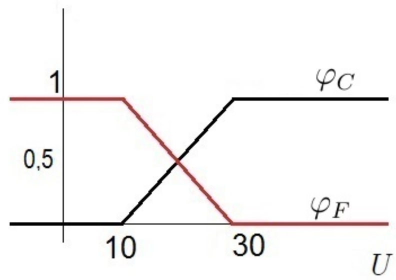


Figura 4 – Gráfico fuzzy da temperatura.

Perceba que a operação de complementação permuta seus graus de pertinência dos subconjuntos fuzzy C e F, fazendo com que, enquanto φ_C indica o grau de compatibilidade dos graus (x) no requisito "calor", seu complementar φ_F indica o grau de incompatibilidade dos graus (x) no mesmo requisito. Esta, então, é uma propriedade que caracteriza os conjuntos fuzzy.

Uma curiosidade apresentada com relação aos conjuntos fuzzy é que há uma intersecção entre um conjunto fuzzy e seu complementar. Podemos observar no exemplo anterior que a temperatura de 20º C está contida com mesmo grau de pertinência (0,5) tanto no conjunto fuzzy do calor, quanto no conjunto fuzzy do frio. Este é um fato comum aos conjuntos fuzzy, uma vez que esse expressa a dúvida, assim, quanto maior for o grau de dúvida na pertinência de um elemento a um conjunto, mais próximo esse grau se encontrará de $0,5$.

Porém, é importante deixar claro que a função descrita em cada exemplo é expressa segundo a compreensão de cada item pelo seu autor, assim sendo, existem outras funções que poderiam representar o mesmo exemplo. Além disso, apesar dos termos "calor" e "frio" terem significados reconhecidamente opostos em termos linguísticos, não é necessário que sejam colocados como complementares, ficando a critério do autor faze-lo ou não, pode-se tranquilamente expressá-los isoladamente, retratando sua característica de forma isolada da outra, veja:

$$\varphi_C(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \leq 10 \\ \dfrac{1}{400}x^2 - \dfrac{1}{20}x + \dfrac{1}{4}, & \text{se} \quad 10 < x \leq 30 \\ 1, & \text{se} \quad x > 30. \end{cases}$$

e

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \geq 10 \\ \dfrac{1}{400}x^2 - \dfrac{3}{20}x + \dfrac{9}{4}, & \text{se} \quad 10 < x \leq 30 \\ 0, & \text{se} \quad x > 30. \end{cases}$$

A seguir introduziremos um exemplo onde serão observadas ao operações de união, intersecção e complementação entre subconjuntos fuzzy, faremos isso com o propósito de melhorar a visualização de tais conceitos.

Exemplo 1.5 *Um estudante pegou cinco objetos e os enumerou de 1 a 5, em seguida realizou uma fuzzificação*[2] *desses objetos observando dois subconjuntos como base, G e P, grandes e pesados, respectivamente. Colocou seus dados em uma tabela e em seguida realizou as operações de união, intersecção e complementação entre os dois conjuntos*

[2] Fuzzificação: Transformação de variáveis do problema em valores fuzzy.

para verificar a relação entre a massa e o tamanho de cada objeto. Veja a seguir a tabela encontrada pelo estudante:

Objeto	Grande: G	Pesado: P	$G \cup P$	$G \cap P$	G'	$G \cup G'$	$G \cap G'$
1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,8	0,8	0,2
2	0,7	1,0	1,0	0,7	0,3	0,7	0,3
3	0,3	0,4	0,4	0,3	0,7	0,7	0,3
4	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0
5	0,8	1,0	1,0	0,8	0,2	0,8	0,2

De acordo com a tabela encontrada pelo estudante, é possível verificar o grau de inclusão de cada objeto nos subconjuntos G, P, $G \cup P$, $G \cap P$, G', $G \cup G'$, $G \cap G'$, respectivamente, e com isso, podemos também fazer a observação das operações citadas anteriormente.

Definição 1.7 *Dizemos que dois subconjuntos fuzzy, A e B são iguais quando suas funções de pertinência são coincidentes em todo universo U, ou seja, $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$, para todo $x \in U$.*

Na sequência, faremos a exibição das principais propriedades envolvidas nas operações que definimos durante esta seção.

Proposição 1.1 *Sejam A, B e C três subconjuntos fuzzy quaisquer e U o conjunto universo. Temos que as operações entre subconjuntos fuzzy satisfazem as propriedades a seguir:*

1. $A \cup \varnothing = A$ e $A \cap \varnothing = \varnothing$.
2. $A \cup U = U$ e $A \cap U = A$.
3. **(Idempotência)** $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$.
4. **(Involução)** $(A')' = A$.
5. **(Comutatividade)** $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$.
6. **(Associatividade)** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$
7. **(Distributividade)** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$
8. **(Leis de DeMorgan)** $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Demonstração.

Para fazer a demonstração dos oito pontos desta proposição, consideremos $\varphi_A(x)$, $\varphi_B(x)$, $\varphi_C(x)$ como as funções pertinências associadas aos subconjuntos fuzzy A, B e C, respectivamente, e ainda, para a demonstração do tópico *8. (Leis de DeMorgan)*, é necessário que lembremo-nos das seguintes propriedades relativas ao máximo e ao mínimo entre funções:
$\max[\varphi(x), \phi(x)] = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) + \phi(x) + |\varphi(x) - \phi(x)|\right]$ e
$\min[\varphi(x), \phi(x)] = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) + \phi(x) - |\varphi(x) - \phi(x)|\right]$, onde $\varphi(x)$ e $\phi(x)$ são fun-ções com suas imagens em $\mathbb{R}$. Visto isso, seguem as demonstrações:

1. $A \cup \varnothing = \max\{\varphi_A(x), \varphi_\varnothing(x)\} = \max\{\varphi_A(x), 0\} = \varphi_A(x) = A$

   e

   $A \cap \varnothing = \min\{\varphi_A(x), \varphi_\varnothing(x)\} = \min\{\varphi_A(x), 0\} = 0 = \varphi_\varnothing(x) = \varnothing.$

2. $A \cup U = \max\{\varphi_A(x), \varphi_U(x)\} = \max\{\varphi_A(x), 1\} = 1 = \varphi_U(x) = U$

   e

   $A \cap U = \min\{\varphi_A(x), \varphi_U(x)\} = \min\{\varphi_A(x), 1\} = \varphi_A(x) = A.$

3. $A \cup A = \max\{\varphi_A(x), \varphi_A(x)\} = \varphi_A(x) = A$

   e

   $A \cap A = \min\{\varphi_A(x), \varphi_A(x)\} = \varphi_A(x) = A.$

4. $(A')' = [1 - (1 - \varphi_A(x))] = \varphi_A(x) = A.$

5. $A \cup B = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} = \max\{\varphi_B(x), \varphi_A(x)\} = B \cup A$

   e

   $A \cap B = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} = \min\{\varphi_B(x), \varphi_A(x)\} = B \cap A.$

6. $$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= \max\{\varphi_A(x), \max\{\varphi_B(x), \varphi_C(x)\}\} \\ &= \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x), \varphi_C(x)\} \\ &= \max\{\max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \varphi_C(x)\} \\ &= (A \cup B) \cup C \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A\cap(B\cap C) &= \min\{\varphi_A(x),\min\{\varphi_B(x),\varphi_C(x)\}\} \\ &= \min\{\varphi_A(x),\varphi_B(x),\varphi_C(x)\} \\ &= \min\{\min\{\varphi_A(x),\varphi_B(x)\},\varphi_C(x)\} \\ &= (A\cap B)\cap C. \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} A\cup(B\cap C) &= \max\{\varphi_A(x),\min\{\varphi_B(x),\varphi_C(x)\}\} \\ &= \min\{\max\{\varphi_A(x),\varphi_B(x)\},\max\{\varphi_A(x),\varphi_C(x)\}\} \\ &= (A\cup B)\cap(A\cup C) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A\cap(B\cup C) &= \min\{\varphi_A(x),\max\{\varphi_B(x),\varphi_C(x)\}\} \\ &= \max\{\min\{\varphi_A(x),\varphi_B(x)\},\min\{\varphi_A(x),\varphi_C(x)\}\} \\ &= (A\cap B)\cup(A\cap C). \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} (A\cup B)' &= 1-\max\{\varphi_A(x),\varphi_B(x)\} \\ &= 1-\tfrac{1}{2}\left[\varphi_A(x)+\varphi_B(x)+|\varphi_A(x)-\varphi_B(x)|\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[2-(\varphi_A(x)+\varphi_B(x)+|\varphi_A(x)-\varphi_B(x)|)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(1-\varphi_A(x))+(1-\varphi_B(x))-|\varphi_A(x)-\varphi_B(x)|\right] \\ &= \min\{1-\varphi_A(x),1-\varphi_B(x)\}=A'\cap B' \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (A\cap B)' &= 1-\min\{\varphi_A(x),\varphi_B(x)\} \\ &= 1-\tfrac{1}{2}\left[\varphi_A(x)+\varphi_B(x)-|\varphi_A(x)-\varphi_B(x)|\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[2-(\varphi_A(x)+\varphi_B(x)-|\varphi_A(x)-\varphi_B(x)|)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(1-\varphi_A(x))+(1-\varphi_B(x))+|\varphi_A(x)-\varphi_B(x)|\right] \\ &= \max\{1-\varphi_A(x),1-\varphi_B(x)\}=A'\cup B'. \end{aligned}$$

1.5 Suporte e α-nível

Agora vamos estudar uma classe especial de conjuntos crisp que possui relação direta com os subconjuntos fuzzy. Esses conjuntos indicam o princípio das incertezas representadas nos conjuntos fuzzy.

A seguir veremos uma definição de um subconjunto crisp que é bastante importante no estudo da lógica fuzzy.

Definição 1.8 *Dado o universo U e um subconjunto fuzzy F, um subconjunto clássico denominado suporte de F é definido por*

$$\text{supp}F = \{x \in U; \varphi_F(x) > 0\}$$

Após esta definição dada, vamos observar o seguinte exemplo para melhorar a compreensão de tal conceito.

Exemplo 1.6 *Considerando os subconjuntos fuzzy B, M e A, que representam os conceitos das estaturas baixa, mediana e alta, respectivamente, em centímetros nas pessoas de nacionalidade brasileira e de sexo masculino.*

Agora consideremos as seguintes funções de pertinência que definem cada um dos subconjuntos, para isso, admitiremos como conjunto universo, ou domínio da função, o intervalo $[100, 250]$*:*

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} 1\ , & se \quad x \leq 165, \\ -0,2x + 34\ , & se \quad 165 < x \leq 170, \\ 0\ , & se \quad x > 170. \end{cases}$$

$$\varphi_M(x) = \begin{cases} 0\ , & se \quad x \leq 165 \quad ou \quad x > 181, \\ 0,2x - 33\ , & se \quad 165 < x \leq 170, \\ 1\ , & se \quad 170 < x \leq 176, \\ -0,2x + 36,2\ , & se \quad 176 < x \leq 181. \end{cases}$$

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0\ , & se \quad x \leq 176, \\ 0,2x + 35,2\ , & se \quad 176 < x \leq 181, \\ 1\ , & se \quad x > 181. \end{cases}$$

Dessa maneira, temos que os conjuntos suportes de cada conjunto fuzzy B, M e A são:

$$\begin{aligned} \text{supp}B &= \{x \in [100, 250]; x < 170\} = [100, 170), \\ \text{supp}M &= \{x \in [100, 250]; 165 < x < 181\} = (165, 181) \\ \text{supp}A &= \{x \in [100, 250]; x > 176\} = (176, 181] \end{aligned}$$

Uma maneira comum e bastante usual de denotar um subconjunto fuzzy F, quando tem suporte finito é a seguinte

$$F = \varphi_F(x_1)/x_1 + \varphi_F(x_2)/x_2 + ... + \varphi_F(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_F(x_i)/x_i.$$

É importante fazer uma observação de que a notação $\varphi_F(x_i)/x_i$ não indica uma divisão e sim, indica apenas uma forma de visualizar o elemento do conjunto (x_i) com seu respectivo grau de pertinência $(\varphi_F(x_i))$. Da mesma maneira, os símbolos "+" não indica soma e "$\sum$" não indica somatório, são apenas conectivos que servem para unir os elementos de U que estão em F com seus respectivos graus.

Da mesma forma, quando o conjunto suporte de F não for finito, mas for enumerável, podemos denotá-lo como a seguir

$$F = \varphi_F(x_1)/x_1 + \varphi_F(x_2)/x_2 + ... = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_F(x_i)/x_i.$$

Um outro conceito bem interessante que veremos em seguida e que será bastante importante para a continuação deste trabalho é o de α-nível.

Seja F um subconjunto fuzzy contido num universo U, tal que seus elementos possuam uma certa ordem que pode ser observada através de graus. Assim, um elemento qualquer $x \in U$ está em uma determinada classe se seu grau de pertinência for maior que algum valor limite ou nível α que define tal classe. O conjunto clássico de tais elementos é chamado de *α-nível* de F, e é denotado por $[F]^\alpha$.

Definição 1.9 ***(α-nível)*** *Seja F um subconjunto fuzzy contido num universo U e $\alpha \in [0,1]$. O α-nível de F é o subconjunto clássico de U definido por*

$$[F]^\alpha = \{x \in U; \varphi_F(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

Vejamos o exemplo:

Exemplo 1.7 *Seja F um subconjunto fuzzy representado por*

$$F = \sum_{i=1}^{5} \varphi_F(x_i)/x_i = 0,4/1 + 0,1/2 + 0,9/3 + 1,0/4 + 0,6/5.$$

Então,

$$F' = \sum_{i=1}^{5} [1 - \varphi_F(x_i)]/x_i = 0,6/1 + 0,9/2 + 0,1/3 + 0,0/4 + 0,4/5.$$

Com isso podemos verificar, por exemplo, que o $0,22$-nível de F e de seu complemento (F') são, respectivamente

$$[F]^{0,22} = \{1,3,4,5\} \quad e \quad [F']^{0,22} = \{1,2,5\}.$$

Uma observação importante é a do nível zero de um subconjunto fuzzy F, que é definido como sendo o menor subconjunto crisp fechado de U que contém o conjunto suporte de F. Em uma linguagem matemática, temos que $[F]^0$ é o fecho do suporte de F e é indicado por $\overline{\text{supp}}F$.

Exemplo 1.8 *Seja $U = [0,10]$ e F um subconjunto fuzzy de U com a seguinte relação de pertinência:*

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} 0\ , & se \quad x \leq 1, \\ \frac{1}{9}(-x^2 + 8x - 7), & se \quad 1 < x \leq 7, \\ 0\ , & se \quad x > 7. \end{cases}$$

Nesse caso, temos:

$$[F]^\alpha = [\alpha + 1, 7 - \alpha] \text{ para } 0 < \alpha < 1 \quad e \quad [F]^0 = [1, 7].$$

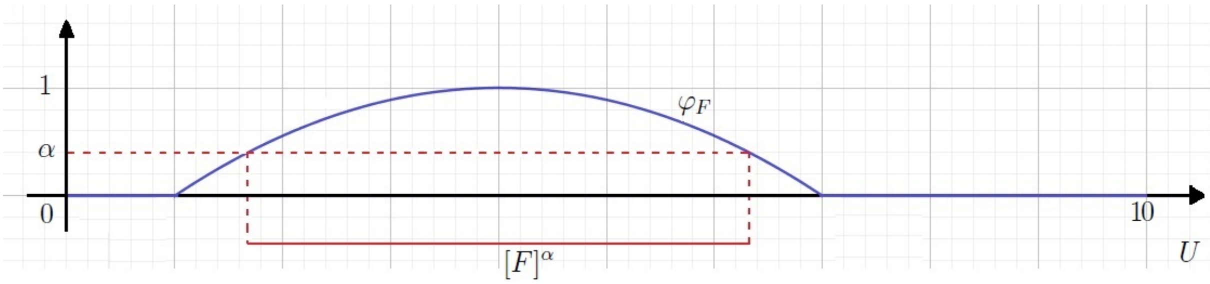


Figura 5 – α-nível

Facilitando os cálculos: Um fato interessante sobre os α-níveis é que se a função pertinência que descreve um subconjunto fuzzy A for descrita através de um (ou mais) segmento de reta (com coeficiente angular diferente de zero), os α-níveis desta função podem ser obtidos, em sua forma simplificada, tomando dois pontos distintos deste segmento, mudando a ordem de suas coordenadas e calculando a equação da reta que passa por esses novos pontos obtidos.

Exemplo 1.9 *Dada uma função pertinência ($\varphi_A(x)$) de um subconjunto fuzzy A com a seguinte característica:*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x, & se \quad 0 \leq x \leq 5 \\ 2 - \frac{1}{5}x, & se \quad 5 < x \leq 10 \\ 0, & se \quad x > 10. \end{cases}$$

Não desenharemos o gráfico desta função, mas não é difícil para que o leitor o faça, verifiquemos apenas que nesse caso temos dois segmentos de reta (com coeficiente angular diferente de zero) compondo o gráfico da função, claramente, no primeiro deles, dois pontos identificados são $(0,0)$ e $(5,1)$; e no outro segmento de reta, os pontos identificados são $(5,1)$ e $(10,0)$. Portanto, para encontrarmos os α-níveis desta função, basta mudar a ordem das coordenadas de cada ponto e calcular a equação das retas obtidas, assim, $[A]^\alpha = [5\alpha, 10 - 5\alpha]$.

Dado o conceito de α-nível e relembrando a **Definição 1.7**, da igualdade de conjuntos fuzzy, podemos propor o seguinte teorema:

Teorema 1.1 *Sejam A e B subconjuntos fuzzy de um universo U. Temos que*

$$A = B \Longleftrightarrow [A]^\alpha = [B]^\alpha \text{ para todo } \alpha \in [0, 1].$$

Demonstração.

Perceba que o caso $A = B \Rightarrow [A]^\alpha = [B]^\alpha$ com $\alpha \in [0,1]$ decorre imediatamente da **Definição 1.7**. Portanto nos resta mostrar apenas que para qualquer $\alpha \in [0,1]$, temos $[A]^\alpha = [B]^\alpha \Rightarrow A = B$, e para isso faremos $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$ com $A \neq B$. Pelo fato de $A \neq B$, então existe $x \in U$ tal que $\varphi_A(x) \neq \varphi_B(x)$, dessa maneira podemos ter $\varphi_A(x) > \varphi_B(x)$ ou $\varphi_A(x) < \varphi_B(x)$. Vamos utilizar o caso $\varphi_A(x) > \varphi_B(x)$ e tomar o outro caso como análogo, assim, temos que $x \in [A]^{\varphi_A(x)}$ e $x \notin [B]^{\varphi_A(x)}$, portanto $[A]^{\varphi_A(x)} \neq [B]^{\varphi_A(x)}$, o que contradiz a hipótese de que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para qualquer $\alpha \in [0,1]$. Logo concluímos que, se $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1] \Longrightarrow A = B$.

■

Definição 1.10 *Dado um subconjunto fuzzy não vazio F de um conjunto parcialmente ordenado C. O menor dos limites superiores de F é denominado **supremo de** F e é denotado por* $\sup F$.

Temos como consequência do **Teorema 1.1** a relação existente entre a função de pertinência de um subconjunto fuzzy e as funções características de seus α-níveis. A partir daí, fazendo algumas verificações, não é difícil observar que uma função de pertinência de um subconjunto fuzzy F (φ_F) pode ser expressa em termos de funções características de seus α-níveis, ou seja, em notação matemática temos que

$$\varphi_F(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min[\alpha, \chi_{[F]^\alpha}(x)], \quad \text{onde} \quad \chi_{[F]^\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in [F]^\alpha \\ 0, & \text{se} \quad x \notin [F]^\alpha. \end{cases}$$

Definição 1.11 ***(Número Fuzzy)*** *Um subconjunto fuzzy é chamado de **número fuzzy** quando sua função de pertinência (φ_F) está definida em todo domínio $\mathbb{R}$ e satisfaz as condições:*

- *Todos os α-níveis de F são não vazios, com $0 \leq \alpha \leq 1$;*
- *Todos os α-níveis de F são intervalos fechados de $\mathbb{R}$;*
- *$suppF = \{x \in \mathbb{R}; \varphi_F(x) > 0\}$ é limitado.*

1.6 O Princípio de Extensão de Zadeh

Agora vamos ver uma definição de grande importância na teoria dos conjuntos fuzzy. Trata-se do *Princípio de Extensão de Zadeh*, que é utilizado na obtenção da imagem de conjuntos fuzzy com o auxílio de uma função clássica. Caso o leitor deseje se aprofundar no caso, sugerimos a leitura de [3].

Definição 1.12 ***(Princípio de Extensão de Zadeh).*** *Sejam dados um subconjunto fuzzy F de X, e uma função $f : X \longrightarrow Y$. A Extensão de Zadeh de f é a função $\widehat{f} : X \longrightarrow Y$ que, quando aplicada a F obtém-se o subconjunto fuzzy $\widehat{f}(F)$ de Y, cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{\widehat{f}(F)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{f^{-1}(y)} \varphi_F(x), & se \quad f^{-1}(y) \neq \varnothing, \\ 0, & se \quad f^{-1}(y) = \varnothing. \end{cases}$$

Onde $f^{-1} = \{x; f(x) = y\}$, e é denominada a pré-imagem de y.

É possível observar que se a função f for bijetiva, então temos a seguinte igualdade

$$\{x; f(x) = y\} = \{f^{-1}(y)\},$$

onde f^{-1} agora é vista como função inversa de f.

A partir daí, observamos que se F é um subconjunto fuzzy de X e a função f for bijetiva, então a função de pertinência do subconjunto $\widehat{f}(F)$ pode ser descrita como

$$\varphi_{\widehat{f}(F)}(y) = \sup_{\{x; f(x)=y\}} \varphi_F(x) = \sup_{\{x \in f^{-1}(y)\}} \varphi_F(x) = \varphi_F(f^{-1}(y)).$$

Por outro lado, é possível que consideremos $f : X \longrightarrow Y$ uma função injetiva e F um subconjunto fuzzy de X enumerável (ou finito), e dessa forma teríamos

$$F = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_F(x_i)/x_i.$$

Com efeito dos fatos supracitados, conseguimos que, pelo Princípio de Extensão de Zadeh, $\widehat{f}(F)$ é um subconjunto fuzzy de Y, daí chegamos à seguinte igualdade

$$\widehat{f}(F) = \widehat{f}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_F(x_i)/x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_F(x_i)/x_i.$$

Portanto, a imagem de F por f pode ser deduzida com o conhecimento das imagens de x_i por f. E o grau de pertinência de $y_i = f(x_i)$ em $\widehat{f}(F)$ é o mesmo que x_i em F.

Na **Figura 6**, podemos observar um subconjunto fuzzy a partir do Princípio de Extensão de Zadeh.

Proposição 1.2 *Sejam dados F, um subconjunto fuzzy de X e uma função contínua $f : X \longrightarrow Y$, com α-níveis compactos e não vazios. Dessa forma, para todo $\alpha \in [0, 1]$ temos*

$$\left[\widehat{f}(F)\right]^{\alpha} = f\left([A]^{\alpha}\right).$$

O resultado obtido nesta proposição nos mostra que os α-níveis do conjunto fuzzy, encontrados através do Princípio de Extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos α-níveis obtidos pela função crisp.

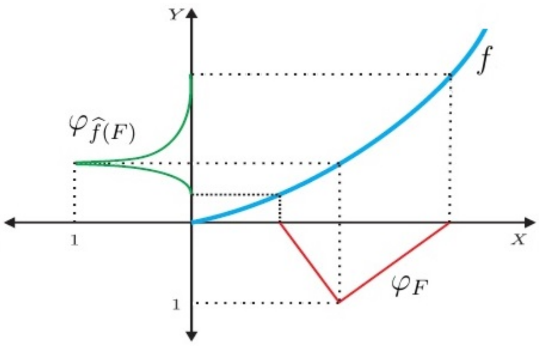


Figura 6 – Princípio de Extensão de Zadeh

Exemplo 1.10 *Consideremos o subconjunto fuzzy A de números reais tal que sua função de pertinência seja dada por*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 4(x - x^2), & se \quad x \in [0,1], \\ 0, & se \quad x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Os α-níveis de A podem ser representados através dos intervalos

$$[A]^\alpha = \left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-\alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-\alpha})\right].$$

*Considere agora a função real $f(x) = x^2$ com $x \geq 0$. Logo, temos que f é contínua, portanto, pela **Proposição 1.2***

$$\begin{aligned} f([A]^\alpha) &= \left[f\left(\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{1-\alpha})\right), f\left(\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{1-\alpha})\right)\right] \\ &= \left[\tfrac{1}{4}(1-\sqrt{1-\alpha})^2, \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{1-\alpha})^2\right] \\ &= \left[\widehat{f}(A)\right]^\alpha. \end{aligned}$$

Na figura a seguir, temos a ilustração do subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A)$.

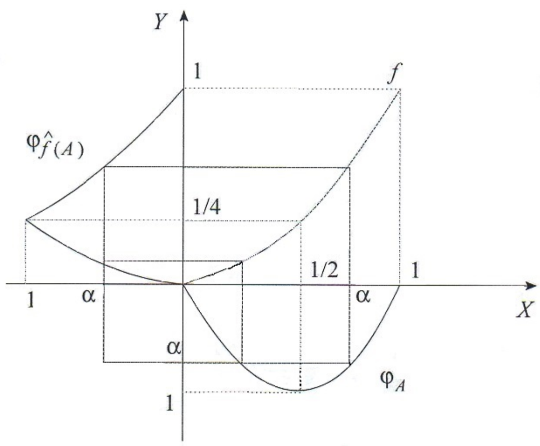


Figura 7 – Subconjunto $\widehat{f}(A)$

1.7 Operações Aritméticas com Números Fuzzy

As operações aritméticas com números fuzzy são referenciadas fortemente por operações aritméticas entre intervalos. Por esse motivo torna-se fundamental a presença da definição a seguir.

Definição 1.13 ***(Operações Intervalares)*** *Sejam λ um número real e $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$ dois intervalos fechados. Temos as seguintes relações:*

i. A soma entre A e B é dada por

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2].$$

ii. A diferença entre A e B é dada por

$$A - B = [a_1 - b_1, a_2 - b_2].$$

iii. A multiplicação de um escalar λ por um intervalo A é

$$\lambda A = \begin{cases} [\lambda a_1, \lambda a_2], & se \quad \lambda \geq 0, \\ [\lambda a_2, \lambda a_1], & se \quad \lambda < 0. \end{cases}$$

iv. A multiplicação entre A e B é

$$A \cdot B = [\min P, \max P],$$

onde $P = \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}$.

v. A divisão de A por B, se $0 \notin B$, é

$$\frac{A}{B} = [a_1, a_2] \cdot \left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}\right].$$

É importante observar que essas operações apresentadas para intervalos são extensivas a números reais. Para isso, basta que façamos um número real como um intervalo de extremos iguais.

Unindo esse fato ao Princípio de Extensão de Zadeh, realizando alguns cálculos (não tão simples) e fazendo algumas observações, é possível verificar que podemos obter as funções características de cada um dos intervalos diretamente das respectivas operações para números reais. Por conta desse fato que surge a possibilidade de realizar operações aritméticas com números fuzzy.

Teorema 1.2 ***(Princípio de Extensão para intervalos da reta)*** *Sejam A e B dois intervalos fechados de $\mathbb{R}$, $\chi_A(x)$ e $\chi_B(x)$ suas respectivas funções características, e $\otimes$ uma operação aritmética qualquer entre números reais. Portanto*

$$\chi_{A\otimes B}(x) = \sup_{\{(y,z);y\otimes z=x\}} \min\left[\chi_A(y), \chi_B(z)\right].$$

Demonstração.

Para tal demonstração, primeiramente note que

$$\min(\chi_A(y), \chi_B(z)) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad y \in A \quad \text{e} \quad z \in B, \\ 0, & \text{se} \quad y \notin A \quad \text{ou} \quad z \notin B. \end{cases}$$

Após isso, vamos verificar a soma ($\otimes = +$), os casos restantes são análogos.

$$\sup_{\{(y,z);y+z=x\}} \min\left[\chi_A(y), \chi_B(z)\right] = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in A + B, \\ 0, & \text{se} \quad x \notin A + B. \end{cases}$$

■

As operações aritméticas com números fuzzy podem ser observadas como casos particulares do Princípio de Extensão, onde as funções estendidas são as operações tradicionais com números reais. Porém, como forma de reduzir os cálculos e minimizar a necessidade de tanta teoria realização, as operações aritméticas com números fuzzy serão apresentadas com a utilização apenas do conceito de α-nível.

Definição 1.14 ***(Operações Aritméticas com Números Fuzzy)*** *Sejam A e B números fuzzy e $\otimes$ uma operação aritmética para intervalos fechados. O número fuzzy $A \otimes B$ é definido de modo que*

$$[A \otimes B]^\alpha = [A]^\alpha \otimes [B]^\alpha$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Como $[A]^\alpha$ e $[B]^\alpha$ são intervalos fechados, então $[A]^\alpha \otimes [B]^\alpha$ também é um intervalo fechado.

Vejamos alguns exemplos de operações com números fuzzy.

Exemplo 1.11 *Realizar as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão entre os números fuzzy*

$$A = \begin{cases} 0\,, & se \quad x < -1 \ ou \ 3 < x, \\ \frac{x+1}{2}, & se \quad -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{3-x}{2}, & se \quad 1 < x \leq 3. \end{cases} \quad e \quad B = \begin{cases} 0\,, & se \quad x < 1 \ ou \ 5 < x, \\ \frac{x-1}{2}, & se \quad 1 \leq x \leq 3, \\ \frac{5-x}{2}, & se \quad 3 < x \leq 5. \end{cases}$$

Solução.

Primeiramente vamos encontrar os intervalos de $[A]^\alpha$ e $[B]^\alpha$ (já foi mostrado como encontrar na página 20), onde obtemos $[A]^\alpha = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha]$ e $[B]^\alpha = [2\alpha + 1, 5 - 2\alpha]$ com $\alpha \in [0,1]$, daí utilizaremos a definição das operações aritméticas com números fuzzy para cada operação desejada, assim,

- $[A + B]^\alpha = [4\alpha, 8 - 4\alpha] \ \forall \alpha \in [0,1]$;
- $[A - B]^\alpha = [4\alpha - 6, 2 - 4\alpha] \ \forall \alpha \in [0,1]$;
- $[A \cdot B]^\alpha = \begin{cases} [-4\alpha^2 + 12\alpha - 5, 4\alpha^2 - 16\alpha + 15], & \text{se} \quad \alpha \in [0\ ;\ 0,5], \\ [4\alpha^2 - 1, 4\alpha^2 - 16\alpha + 15], & \text{se} \quad \alpha \in (0,5\ ;\ 1]; \end{cases}$
- $\left[\frac{A}{B}\right]^\alpha = \begin{cases} \left[\frac{2\alpha-1}{2\alpha+1}, \frac{3-2\alpha}{2\alpha+1}\right], & \text{se} \quad \alpha \in [0\ ;\ 0,5], \\ \left[\frac{2\alpha-1}{5-2\alpha}, \frac{3-2\alpha}{2\alpha+1}\right], & \text{se} \quad \alpha \in (0,5\ ;\ 1]. \end{cases}$

Daí, fazendo α variar no intervalo $[0,1]$ chegamos aos seguintes resultados,

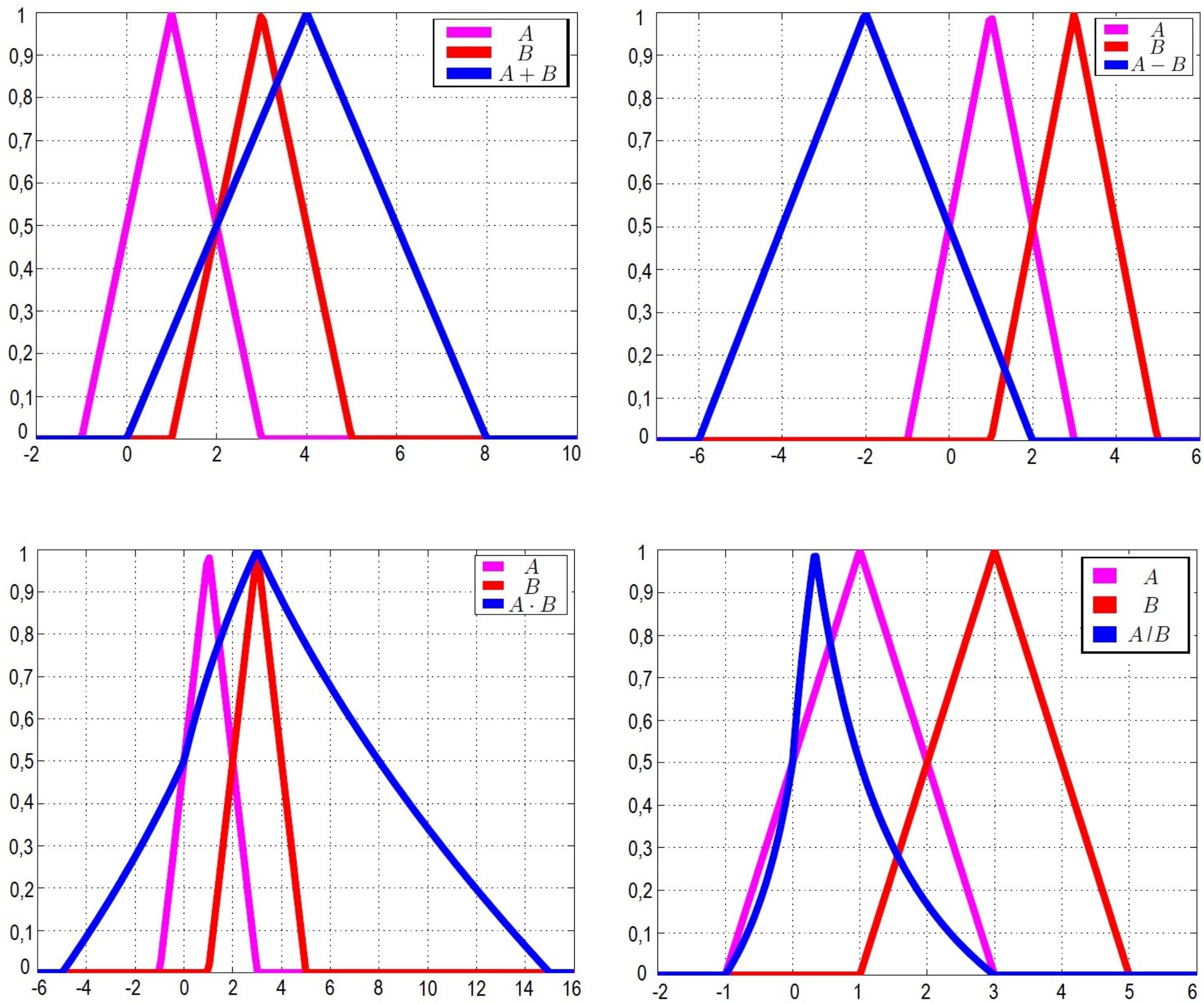
$$A + B = \begin{cases} 0\ , & \text{se} \quad x < 0 \text{ ou } 8 < x, \\ \frac{x}{4}, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 4, \\ \frac{8-x}{4}, & \text{se} \quad 4 < x \leq 8. \end{cases}$$

$$A - B = \begin{cases} 0\ , & \text{se} \quad x < -6 \text{ ou } 2 < x, \\ \frac{x+6}{4}, & \text{se} \quad -6 \leq x \leq -2, \\ \frac{2-x}{4}, & \text{se} \quad -2 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$A \cdot B = \begin{cases} 0\ , & \text{se} \quad x < -5 \text{ ou } 15 < x, \\ \frac{3-\sqrt{4-x}}{2}, & \text{se} \quad -5 \leq x < 0, \\ \frac{\sqrt{1+x}}{2}, & \text{se} \quad 0 \leq x < 3, \\ \frac{4-\sqrt{1+x}}{2}, & \text{se} \quad 3 \leq x \leq 15. \end{cases}$$

$$\frac{A}{B} = \begin{cases} 0\ , & \text{se} \quad x < -1 \text{ ou } 3 < x, \\ \frac{x+1}{2-2x}, & \text{se} \quad -1 \leq x < 0, \\ \frac{5x+1}{2x+2}, & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ \frac{3-x}{2x+2}, & \text{se} \quad \frac{1}{3} \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Esses números fuzzy podem ser observados através dos gráficos a seguir, e que foram retirados de [13].



1.8 Relações Fuzzy

As relações fuzzy nos informam se dois subconjuntos possuem algum tipo de relação e, em caso afirmativo, nos mostra o grau de relação que possuem.

Definição 1.15 *Uma relação fuzzy $\mathcal{R}$, aplicada sobre um produto cartesiano $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, é qualquer subconjunto fuzzy deste produto cartesiano, dessa maneira, uma relação fuzzy $\mathcal{R}$ é definida pela função de pertinência $\varphi_{\mathcal{R}} : U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \longrightarrow [0, 1]$. Se o produto cartesiano for formado apenas por dois conjuntos, $U_1 \times U_2$, a relação é chamada fuzzy binária sobre $U_1 \times U_2$. Temos ainda que $\varphi_{\mathcal{R}}(x_1, \ldots, x_n)$ indica o grau com que os elementos da n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ se relacionam através de $\mathcal{R}$.*

Outra definição que será importante para o futuro do nosso trabalho é a de produto cartesiano entre subconjuntos fuzzy.

Definição 1.16 *O produto cartesiano dos subconjuntos fuzzy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $U_1, U_2, \ldots, U_n$,* *é a relação fuzzy* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ *cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times ... \times A_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge ... \wedge \varphi_{A_n}(xn),$$

onde $\wedge$ *representa o mínimo.*

De posse dessas definições de relações entre subconjuntos fuzzy, é possível resolver problemas como o exemplo a seguir, onde é ilustrada a aplicação do produto cartesiano.

Exemplo 1.12 *No diagnóstico de um paciente, o médico sempre leva em conta os sintomas do mesmo, que são características de cada doença. Para a gripe, por exemplo, são verificadas como características febre e dores no corpo. Dados alguns pacientes de um hospital, mede-se o quadro para febre e dores no corpo, como segue a tabela:*

Paciente	*Febre (F)*	*Dores no corpo (D)*
1	*0,2*	*0,1*
2	*0,7*	*1,0*
3	*0,3*	*0,4*
4	*1,0*	*1,0*
5	*0,8*	*1,0*

Para indicar o quadro de um indivíduo com gripe, vamos analisar o grau de pertinência que o mesmo está nos conjuntos de febre e de dores no corpo.

Segundo a tabela, observamos que o paciente 1 tem grau de pertinência no indicador de febre $\varphi_F(x) = 0,2$ *e o grau de pertinência ao conjunto de dores no corpo* $\varphi_D(x) = 0,1$*. Dessa forma, o diagnóstico de gripe do paciente 1 é dado por:*

$$\varphi_{gripe}(x) = \varphi_{F \times D}(x) = \varphi_F(x) \wedge \varphi_D(x) = 0,2 \wedge 0,1 = 0,1.$$

Esse número pode dar suporte para que o profissional da área tome a melhor decisão quanto ao procedimento a ser adotado.

É válido observar que, segundo a tabela mostrada, somente o paciente 4 tem a indicação explícita de gripe ($\varphi_{gripe} = 1,0$)*.*

Alguns conectivos são de extrema importância no estudo de operações com números fuzzy, tais operadores generalizam as condições de união e intersecção entre conjuntos fuzzy. Trata-se das normas triangulares, chamadas de t-norma e t-conorma.

Definição 1.17 ***(t-norma).*** *O operador*

$$\Delta : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1], \Delta(x,y) = x\Delta y,$$

é uma t-norma se satisfaz as condições seguintes:

1. *elemento neutro:* $\Delta(1,x) = 1\Delta x = x$;

2. *comutativa:* $\Delta(x, y) = x\Delta y = y\Delta x = \Delta(y, x)$;
3. *associativa:* $x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z$;
4. *monotonicidade:* se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x\Delta y \leq u\Delta v$.

A operação *t-norma* estende o operador $\wedge$ que modela o conectivo "e".

Exemplo 1.13 *Considere o operador*

$$\Delta(x, y) = \min\{x, y\} = x \wedge y.$$

Observe que o operador do **Exemplo 1.13** descreve a tabela verdade de $\wedge$.

Definição 1.18 ***(t-conorma)*** *O operador*

$$\nabla : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1], \nabla(x, y) = x\nabla y$$

é uma t-conorma se satisfaz as condições seguintes:

1. *elemento neutro:* $\nabla(0, x) = 0\nabla x = x$;
2. *comutativa:* $\nabla(x, y) = x\nabla y = y\nabla x = \nabla(y, x)$;
3. *associativa:* $x\nabla(y\nabla z) = (x\nabla y)\nabla z$;
4. *monotonicidade:* se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x\nabla y \leq u\nabla v$.

A operação *t-conorma* estende o operador $\vee$ que modela o conectivo "ou".

Exemplo 1.14 *Considere o operador*

$$\nabla(x, y) = \max\{x, y\} = x \vee y.$$

Observe que o operador do **Exemplo 1.14** descreve a tabela verdade de $\vee$.

Uma outra forma de inferência fuzzy é através de termos linguísticos. Alguns termos imprecisos não são bem tratados na lógica clássica, assim podemos utilizar premissas imprecisas em direção as possíveis soluções.

Por exemplo, se vemos uma fruta onde a casca mostra uma coloração vermelha e lustrosa, já inferimos que esta fruta se encontra madura. Mesmo partindo de uma premissa incerta, chegamos a uma possível solução.

A seguir vamos ver com maior precisão a definição desses termos:

Definição 1.19 ***(Variáveis linguísticas)*** *Uma variável linguística é uma variável cujo valor é expresso qualitativamente por termos linguísticos (que fornece um conceito à variável) e quantitativamente por uma função de pertinência, assim, os valores assumidos pela variável são subconjuntos fuzzy.*

Intuitivamente, observando sintaticamente as variações das palavras, observamos que uma variável linguística é um substantivo, enquanto seus valores são adjetivos, que são representados por subconjuntos fuzzy. Por exemplo, "gripe" é uma variável linguística que pode assumir os atributos "forte" ou "fraca". Sentenças em que aparecem variáveis linguísticas juntamente com seus valores subjetivos (atributos) são comumente chamadas de *proposições fuzzy.* Porém, é mais interessante o caso em que os valores das variáveis são números fuzzy em que se tem como universo o conjunto dos números reais.

1.9 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) é composto por quatro componentes que trabalham em conjunto, formando uma espécie de máquina, transformando dados clássicos (números reais) em dados fuzzy e depois convertendo o resultado (fuzzy) novamente em número real: O módulo de fuzzificação é responsável por processar os dados de entrada (dados crisp) e fuzzifica-los; uma coleção de regras fuzzy chamada de base de regras que, em conjunto com o módulo de inferência fuzzy são responsáveis pelas operações fuzzy com os dados obtidos na entrada; e o módulo de defuzzificação, que é responsável por transformar os resultados obtidos pelas bases de regras e pelo módulo de inferência fuzzy (resultados fuzzy) novamente em um número crisp.

- **Módulo de Fuzzificação:** É nesse estágio que as entradas do sistema são modeladas por conjuntos fuzzy com seus respectivos domínios. Por isso é importante a presença de um especialista na área do problema a ser modelado, para que haja máxima precisão na colocação dos níveis de pertinência de cada elemento.

- **Base de Regras:** Este componente é composto por sentenças da forma: *Se... então...*; A base de regras descreve relações entre as variáveis linguísticas e são processadas pelo módulo de inferência fuzzy.

- **Módulo de Inferência Fuzzy:** Nesse estágio cada proposição fuzzy é processada matematicamente por meio das técnicas da lógica fuzzy. Os operadores matemáticos serão selecionados para definir a relação fuzzy que modela a base de regras. Desta forma, o Módulo de Inferência Fuzzy tem tanta importância quanto a Base de Regras no sucesso do sistema fuzzy, já que fornece a saída a partir de cada entrada fuzzy.

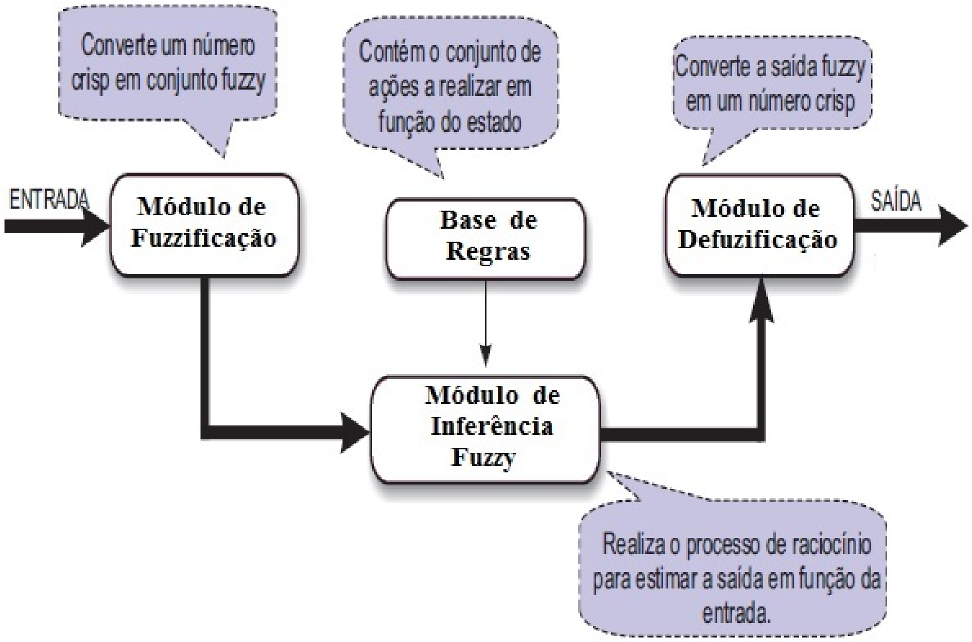


Figura 8 – Sistema Baseado em Regras Fuzzy

- **Módulo de Defuzzificação:** A defuzzificação é um processo que permite representar um conjunto fuzzy por um número real. Com efeito, devemos escolher um método para defuzzificar a saída e obter um valor real que a represente.

A base de regras é modelada matematicamente por uma relação fuzzy $\mathcal{R}$, a partir dos conjuntos fuzzy que a compõe e da lógica fuzzy adotada no processo. A função pertinência de $\mathcal{R}$ é obtida por

$$\varphi_{\mathcal{R}}(x,u) = \nabla(\varphi_{R_i}(x,u)), \quad \text{com} \quad 1 \leq i \leq r,$$

onde ∇ é uma t-conorma e R_i é um conjunto de relações fuzzy obtidas a partir de cada regra i, cuja função de pertinência φ_{R_i} pode ser obtida de diferentes modos no formato *"P implica Q"*.

A inferência é dada através de uma regra de composição de inferência do tipo $B = R(A)$, onde B é um controle dado à um estado A, e sua função de pertinência é dada por:

$$\varphi_B(u) = \sup_x(\varphi_R(x,u)\Delta\varphi_A(x)),$$

onde Δ é uma t-norma.

De acordo com [5], um método realizado no módulo de inferência fuzzy que se sobressai dentre os outros e possui destaque especial no assunto é o de Mamdani, que se mostra bem eficiente na referência do raciocínio humano, isso ocorre pelo fato de formalizar o conhecimento de um especialista e sintetizar esse conhecimento dentro de um conjunto de regras linguísticas, "se, então".

O método de inferência Mamdani foi criado pelo professor Ebrahim Mamdani e propõe uma relação fuzzy binária $\mathcal{M}$ entre x e y para modelar matematicamente a base de regras.

Uma regra do tipo *Se* (antecedente), *então* (consequente) é definida pelo produto cartesiano fuzzy dos conjuntos fuzzy que compõe antecedente e consequente da regra. O método de Mamdani consiste em agregar as regras através dos operadores "e" ($\wedge$, mínimo) e "ou" ($\vee$, máximo), e está baseada na regra de composição de inferência max-min, indicando assim uma relação fuzzy binária para modelar regras fuzzy.

A relação binária fuzzy $\mathcal{M}$ é o subconjunto fuzzy $X \times U$ cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\mathcal{M}}(x, u) = \max_{1 \leq i \leq r}(\varphi_{R_j}(x, u)) = \max_{1 \leq i \leq r}[\varphi_{A_i}(x) \wedge \varphi_{B_i}(u)],$$

onde $x \in X$ e $u \in U$, r é a quantidade de regras que compõe a base de regras e A_i e B_i são os subconjuntos fuzzy da regra i. Cada um dos valores $\varphi_{A_i}(x)$ e $\varphi_{B_i}(u)$ são interpretados como sendo os graus com que x e u estão nos subconjuntos A_i e B_i, respectivamente, de maneira que $\mathcal{M}$ nada mais é que a união dos produtos cartesianos fuzzy entre os antecedentes e os consequentes de cada regra.

A seguir vamos exemplificar na forma de figura o método de Mamdani, fazendo uso da regra de composição max-min. Para isso, tomaremos as seguintes regras de entrada:

Regra 1 : *Se* x é A_1 e u é B_1, *então* z é C_1;

Regra 2 : *Se* x é A_2 e u é B_2, *então* z é C_2,

uma saída real z de um sistema de inferência do tipo Mandani, a partir de duas entradas (também reais) x e u, com uma regra de composição max-min.

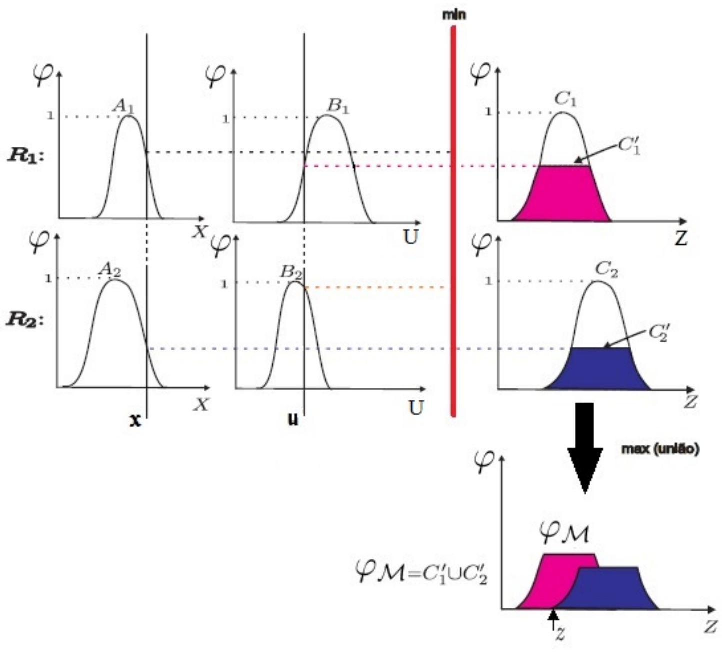


Figura 9 – Método de Mamdani com regra de composição max-min.

1.10 Aplicações

Aplicação 1. Considere que uma viagem de ônibus de Arapiraca-AL a Maceió-AL esteja sujeita às seguintes considerações:

- A distância entre as cidades é de aproximadamente 140 km;
- A velocidade não deve exceder 120 km/h;
- O trânsito é geralmente intenso, por isso a velocidade tende a ser reduzida;
- O ônibus sai quase sempre atrasado, mas nunca ocorreu com mais de meia hora.

Pergunta: Qual o tempo (T) gasto numa viagem de Arapiraca a Maceió?

Solução.

É fácil perceber que a resposta para este problema não é exata, pois as informações que constam na pergunta são bastante vagas e imprecisas. Portanto, para isso, descreveremos algumas funções fuzzy para cada informação imprecisa dada.

- Como a informação dada sobre a distância (D) entre as duas cidades foi de forma aproximada (aproximadamente 140km), vamos considerar essa distância como sendo um número perto de 140. Uma forma de se fazer isso é com a seguinte função de pertinência:

$$\varphi_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \leq 130 \text{ ou } x > 150 \\ \frac{1}{10}x - 13, & \text{se} \quad 130 < x \leq 140 \\ 15 - \frac{1}{10}x, & \text{se} \quad 140 < x \leq 150, \end{cases}$$

  cujos α-níveis são descritos por $[D]^\alpha = [10\alpha + 130, 150 - 10\alpha]$.

- A incerteza quanto a velocidade (V) do ônibus pode ser descrita seguindo o mesmo raciocínio da distância, contudo, analisando que a velocidade nunca ultrapasse 120 km/h e que haverá momentos da viagem em que a velocidade será bastante baixa, a partir daí, faremos a função pertinência de V da seguinte maneira:

$$\varphi_V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \leq 30 \text{ ou } x > 120 \\ \frac{1}{50}x - \frac{3}{5}, & \text{se} \quad 30 < x \leq 80 \\ 3 - \frac{1}{40}x, & \text{se} \quad 80 < x \leq 120, \end{cases}$$

  cujos α-níveis são descritos por $[V]^\alpha = [50\alpha + 30, 120 - 40\alpha]$.

- O fato do ônibus sair sempre com atrasado, acrescenta um tempo de espera (T_1) do passageiro no ponto, tempo esse que não ultrapassa meia hora. Com isso, vamos denotar a função pertinência deste tempo de espera como:

$$\varphi_{T_1}(x) = \begin{cases} 1-2x, & \text{se} \quad 0 < x \leq 0,5 \\ 0, & \text{se} \quad x > 0,5 \end{cases}$$

cujos α-níveis são descritos por $[T_1]^\alpha = [0, \frac{1-\alpha}{2}]$. Para o tempo percorrido na estrada (T_2), temos que $T_2 = \frac{D}{V}$, e pela **Definição 1.13** aplicada aos α-níveis, temos que os α-níveis de T_2 são:

$$[T_2]^\alpha = [10\alpha + 130, 150 - 10\alpha] \cdot \left[\frac{1}{120 - 40\alpha}, \frac{1}{50\alpha + 30}\right].$$

Logo, o tempo total (T) é dado, na forma de α-nível, por

$$[T]^\alpha = [T_1]^\alpha + [T_2]^\alpha = \left[0, \frac{1-\alpha}{2}\right] + \left[\frac{\alpha + 13}{12 - 4\alpha}, \frac{15 - \alpha}{5\alpha + 3}\right]$$

Portanto, a resposta fuzzy para este problema é dada por

$$\left[\frac{\alpha + 13}{12 - 4\alpha}, \frac{1-\alpha}{2} + \frac{15 - \alpha}{5\alpha + 3}\right]$$

Fazendo, por fim, uma análise da resposta final, podemos observar que o tempo de viagem deve ter uma variação máxima ($\alpha = 0$) de 1 hora e 5 minutos até 5 horas e 30 minutos, onde o tempo com maior possibilidade de acontecer ($\alpha = 1$) é o de 1 hora e 45 minutos.

Aplicação 2. Esta aplicação foi retirada de [7] e se trata de uma estimativa para o risco de desenvolvimento de câncer de pulmão. Segundo o texto, os principais fatores para o desenvolvimento da doença são: tabagismo, poluição, histórico de doenças pulmonares, histórico familiar e contato com agentes químicos.

Para a elaboração deste modelo foram descritos os dados da seguinte maneira:

- Tabagismo - Nunca fumou e não é fumante passivo = NÃO RISCO; até 1 ano de fumo ou fumante passivo = POUCO RISCO; acima de 1 ano de fumo = RISCO.

- Poluição - Até nível 4 = NÃO RISCO; do nível 5 em diante = RISCO.

- Histórico de doenças pulmonares - Sim = RISCO; não = NÃO RISCO.

- Histórico familiar - Não = NÃO RISCO; parentesco de 2º grau = MEIO RISCO; parentesco de 1º grau = RISCO.

- Contato com agentes químicos - Não = NÃO RISCO; sim = RISCO.

As tabelas que definem cada uma das variáveis de entrada do sistema de inferência e são responsáveis por determinar a pertinência em relação a cada fator são dadas através dos gráficos que seguem.

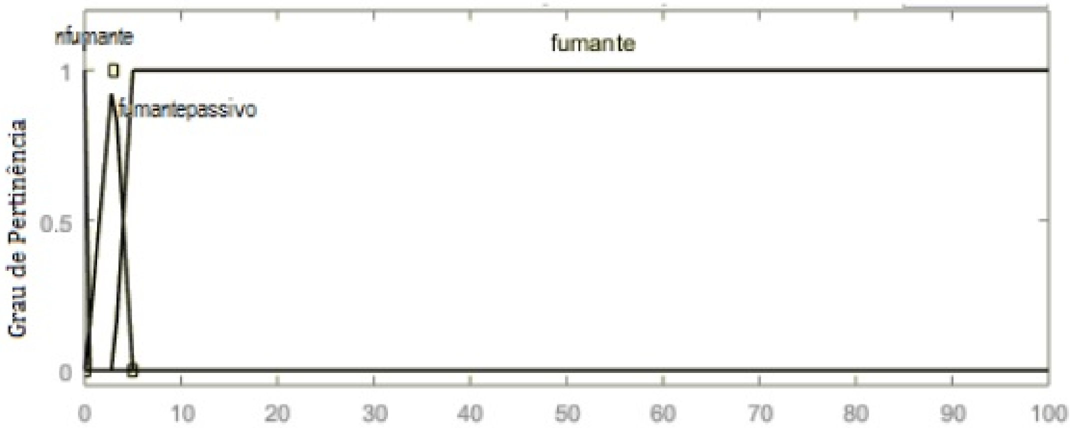


Figura 10 – Tabagismo.

A variável fuzzy Tabagismo é definida pelos subconjuntos fuzzy {não fumante, fumante passivo, fumante}.

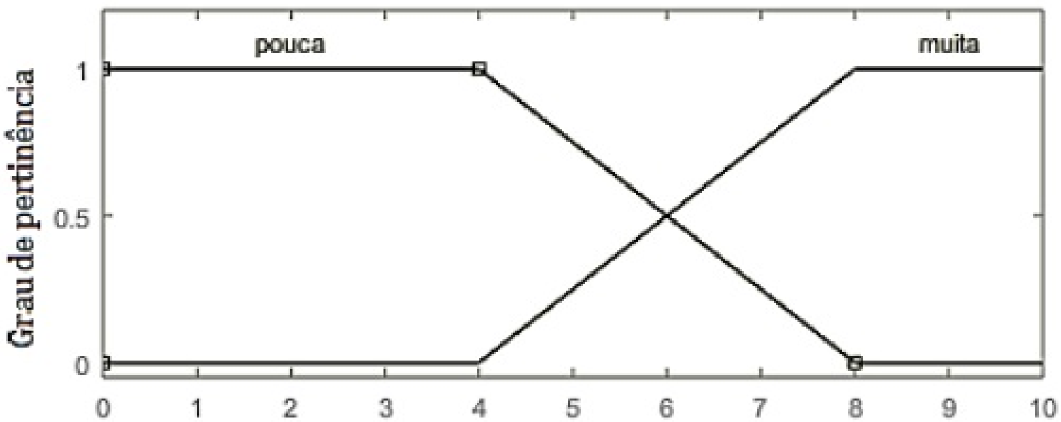


Figura 11 – Poluição.

A variável fuzzy Poluição é definida pelos subconjuntos fuzzy {pouca, muita}.

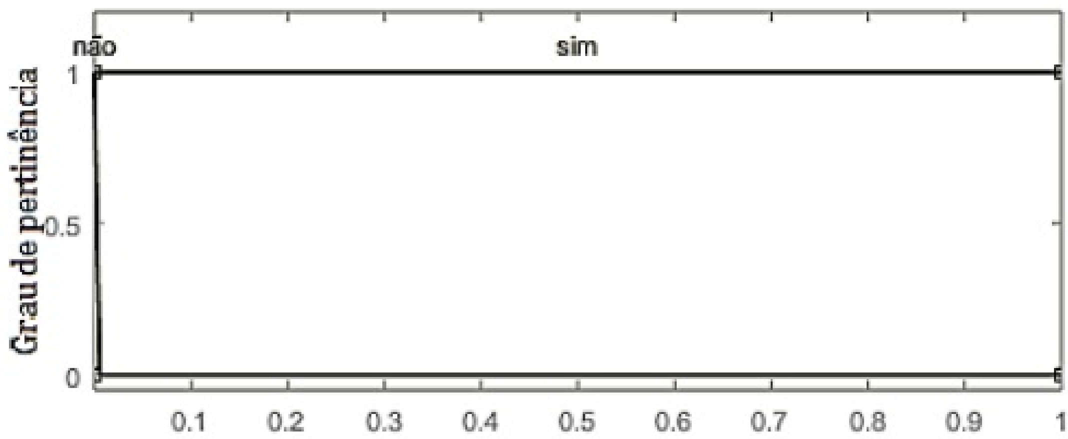


Figura 12 – Histórico de doenças pulmonares.

A variável fuzzy Histórico de Doenças Pulmonares é definida pelos subconjuntos crisp {sim, não}.

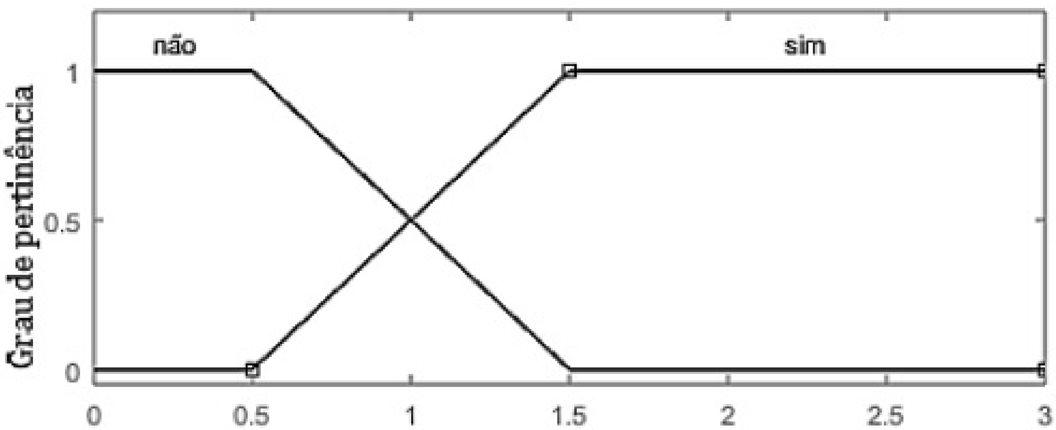


Figura 13 – Histórico familiar.

A variável fuzzy Histórico Familiar é definida pelos subconjuntos fuzzy {sim, não}.

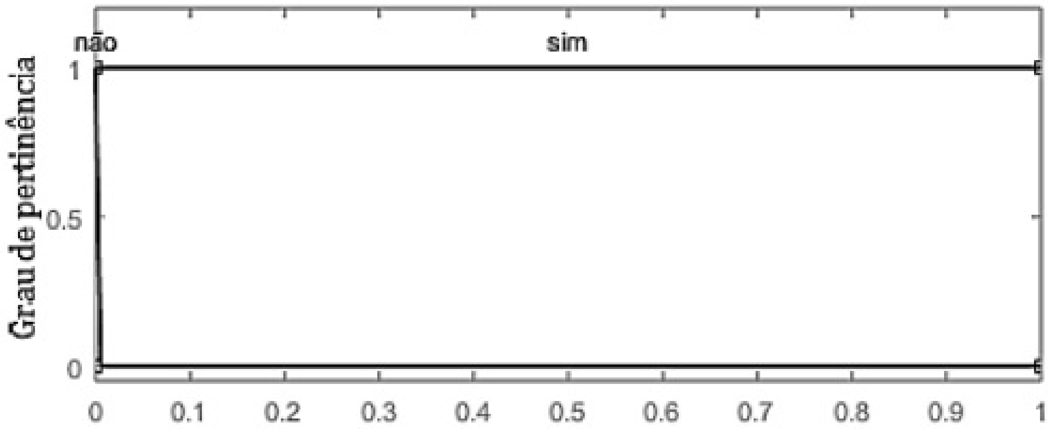


Figura 14 – Contato com agentes químicos.

A variável fuzzy Contato com Agentes Químicos é definida pelos subconjuntos crisp {sim não}.

O texto cita a existência de 32 bases de regras, mas só disponibiliza as duas que seguem:

R_1 : **Se** (tabagismo é não fumante) **e** (poluição é pouca) **e** (histórico de doenças pulmonares é não) **e** (histórico familiar é não) **e** (contato com agentes químicos é sim), **então** (chance alta).

R_2 : **Se** (tabagismo é fumante) **e** (poluição é muita) **e** (histórico de doenças pulmonares é sim) **e** (histórico familiar é sim) **e** (contato com agentes químicos é sim), **então** (chance alta).

Para a solução deste exemplo foi adotado o modelo de inferência de Mamdani e para a defuzzificação foi utilizado o centro de gravidade do gráfico gerado. A partir daí, considere um indivíduo que:

- Fuma a mais de 30 anos;
- Mora em uma cidade grande e poluída;
- Possui histórico de doenças pulmonares;
- Possui parentes de 1º grau com a doença;
- Já esteve em contato com agentes químicos.

Observando a situação apresentada pelo indivíduo e fazendo a relação com cada conjunto dado sobre cada um dos fatores apresentados, foram atribuídas as notas:

- Tabagismo (quantidade de anos) = 40;
- Grau de poluição que está exporto diariamente (0 à 10) = 10;

- Histórico de doenças pulmonares (0 ou 1) = 1;
- Histórico familiar (Não é 0, 2º grau é 1 e 1º grau é 2) = 2;
- Contato com agentes químicos (0 ou 1) = 1.

Efetivando a relação max-min de Mamdani e defuzzificando a partir do centro de gravidade do gráfico obtido, o sistema detecta que o risco deste paciente sofrer de câncer de pulmão é de 0,8817.

2 Avaliação Escolar numa Perspectiva Fuzzy

A aprendizagem é um processo cognitivo, inerente ao ser humano, porém não é possível medir seu nível de uma forma direta. Para avaliá-la é preciso que se dê visibilidade a ela. Esse é o papel dos instrumentos de avaliação, como as provas, trabalhos e testes escolares, que servem como estímulos cujo objetivo é provocar respostas que sejam demonstrações das aprendizagens e manifestação dos conhecimentos e habilidades que a constituem.

A prova, muitas vezes, é objeto de pânico entre os estudantes que se sentem pressionados a obter resultados satisfatórios numa espécie de medição do conhecimento, que eventualmente serve como uma forma de classificação entre "bons" e "maus" alunos. Porém não é tarefa fácil fazer essa desmitificação do termo prova, já que a mesma se faz necessária no contexto escolar, tornando visível o conhecimento adquirido durante determinado período e sobre algum assunto preestabelecido entre professor e aluno, contudo, para maiores detalhes deixamos como sugestão [11].

2.1 A Avaliação

Um ponto fundamental no processo de ensino aprendizagem é, sem dúvida, os métodos avaliativos a serem aplicados como forma de identificar as lacunas deixadas ou no ensino por parte do professor, ou na aprendizagem por parte dos estudantes. Existem vários métodos avaliativos que são comumente adotados por professores para a atribuição de notas, como atividades realizadas em sala, comportamento, organização, participação, trabalhos, apresentações, provas subjetivas e provas objetivas. Em todos esses métodos, é importante ser levado em consideração a singularidade de cada aluno, quanto ao seu modo de pensar e desenvolvimento até chegar à solução.

Pensamos que o uso de determinado método avaliativo vai além de direcionar uma metodologia, observado que quando se avalia, devem ser considerados todos os aspectos cognitivos, psicológicos e sociais dos discentes.

Nesse sentido, talvez o maior desafio seja observado em provas e avaliações com questões objetivas (questões fechadas), onde o aluno marca uma opção (escolhida como correta) e não necessariamente necessita de uma contextualização para chegar à resposta, assim, a correção se resume a certo ou errado, desconsiderando qualquer parte do raciocínio do aluno e ignorando, assim, seus meios individuais de chegar às soluções. A exemplo do que é feito em provas de maiores proporções como vestibulares, concursos públicos, SAEB, ENEM, Prova Brasil, entre outras.

É importante que deixemos claro que provas de “âmbito maior” como as citadas anteriormente desprezam as capacidades sociais e psicológicas dos estudantes, pelo simples fato de não ter um acompanhamento periódico. Portanto, a única saída para esse tipo de avaliação é a análise qualitativa através de um método de avaliação objetivo.

2.2 Questões Objetivas

Os itens que compõem uma avaliação, em geral, são produzidos com base nos descritores relacionados com o conteúdo abordado, contendo alternativas para a análise de veracidade, na maioria das vezes apenas uma das alternativas corresponde a resposta verdadeira (correta) e as demais alternativas correspondem a respostas falsas (erradas), que são denominadas distratores.

Os conteúdos associados a competências e habilidades desejáveis para cada ano do ensino básico e para cada disciplina são divididos em pequenos blocos, cada um especificando o que os itens das provas devem medir - estas unidades são denominadas “descritores”. Esses, por sua vez, traduzem uma associação entre os conteúdos curriculares e as operações mentais desenvolvidas pelos alunos. Os descritores, portanto, especificam o que cada habilidade implica e são utilizados como base para a construção dos itens de diferentes disciplinas. Para um aprofundamento no tema, sugerimos [4] e [6].

A linguagem utilizada no enunciado de cada item deve ser clara e deve atender à norma culta da língua, não pode induzir a resposta correta, tampouco a resposta incorreta (pegadinha). É possível que haja algum tipo de suporte para o item em questão, como gráfico, figura, texto auxiliar ou algo do tipo, nesse caso o suporte deve ser adequado ao nível de escolarização de quem está sendo avaliado e deve ser bem legível e nítido para que não venha a prejudicar a compreensão da questão. O suporte, se utilizado, deve ser colocado apenas com sentido de ajuda e nunca com sentido de dúvida.

Das alternativas, é indicado que haja uma alternativa correta (gabarito) e o restante (3 ou 4) que não estejam completamente corretas (distratores). Todas devem ter aproximadamente a mesma extensão, não é aconselhável que haja alguma alternativa mais atrativa, à primeira vista, que outra e todas devem ser claras e objetivas.

Os distratores, além de indicar a alternativa incorreta, têm a missão de ludibriar quem está por ser avaliado, isto é, deve aparentar ser a opção correta para aqueles que não desenvolveram completamente a habilidade em questão, nesse sentido, é comum que os distratores possuam erros comuns das situações de ensino aprendizagem. É indispensável que esses distratores sejam colocados de forma plausível em relação ao enunciado e à habilidade que está sendo avaliada, tomando um cuidado extra para evitar o acerto da questão por exclusão.

Uma boa leitura adicional sobre o conceito de distrator seria em [2].

2.3 Abordagem Fuzzy para Avaliações

Aqui introduziremos um método avaliativo que pode ser aplicado juntamente com avaliações de múltipla escolha com caráter objetivo (o que não impossibilita a aplicação do mesmo em avaliações subjetivas). Tal método tem a finalidade de reduzir o caráter objetivo das avaliações (não excluindo totalmente essa possibilidade), abrindo uma nova possibilidade para os alunos expressarem seu grau de conhecimento sobre cada questão, mesmo sem a necessidade de dissertar sobre ela.

A construção da estrutura do pensamento foi baseada em [12]. Considerando um questionário de múltipla escolha onde o aluno deve escolher dentre quatro ou cinco alternativas qual a única correta. Muitas vezes existe dúvida na marcação sobre qual seria a opção certa, mesmo que o aluno desenvolva um raciocínio correto durante grande parte da formulação de sua resposta, tendo assim uma certa chance de errar mesmo sabendo a maior parte dos conhecimentos explorados pela questão.

Observando essa situação, pensamos na possibilidade de o aluno marcar mais de uma alternativa, porém colocando "graus de certeza" para cada resposta dada. Esses graus de certeza inseridos pelos alunos em cada opção marcada, representam o quanto de certeza este aluno tem em dar determinada resposta. Para o aluno, esses graus de certeza dariam a possibilidade de marcar as alternativas que estivessem causando suas dúvidas, e para os professores serviriam como forma de identificar quais os distratores mais atrapalham esse aluno em determinadas situações.

Para ser utilizado esse método, não há necessidade do aluno ter conhecimento sobre lógica fuzzy e/ou conjuntos fuzzy, basta que ele seja informado que pode distribuir um grau de certeza 1,0 (se o professor preferir, pode ser substituído por porcentagem) do jeito que preferir dentre as alternativas que ele marcar, podendo assim marcar mais de uma alternativa.

Por parte do professor, pode ser utilizado o modelo de inferência que será exibido aqui para composição dos resultados das avaliações. Com ele, podemos inserir as respostas dos alunos, junto com os graus de certeza aplicados, e o modelo denota o grau de conhecimento do aluno sobre cada item.

2.4 Construção das Regras para Avaliação

Pelo que foi observado no capítulo anterior, para a construção de um sistema baseado em regras fuzzy, devemos primeiramente criar as regras de entrada do nosso módulo de inferência, que será a base padrão para os modelos de correção das avaliações. Para tal processo utilizaremos o método de inferência de Mamdani (pág. 34), pelo fato de ser o mais comumente utilizado em trabalhos deste tipo.

Sob a hipótese de estarmos observando uma questão com cinco alternativas onde somente uma delas está completamente correta e, consequentemente, quatro possuem algum erro ocasionado por algum distrator. O aluno tem a possibilidade de marcar quantas alternativas achar necessário, dando a cada uma delas um “nível de certeza” em relação a sua marcação, de forma que a soma dos níveis de certeza inseridos deve totalizar 1(100%), que constitui o conjunto universo U da certeza. Sobre os níveis de certeza, consideramos os conceitos: MB (muito baixo), B (baixo), I (intermediário), A (alto) e P (pleno), e a partir daí, criamos as seguintes funções de pertinência para o grau de certeza dado pelo aluno:

$$\varphi_{MB} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \leq 0,15 \ , \\ 4-20x, & \text{se} \quad 0,15 < x \leq 0,2 \ , \\ 0, & \text{se} \quad x > 0,2. \end{cases}$$

$$\varphi_{B} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0,15 \text{ ou } x > 0,4 \ , \\ 20x-3, & \text{se} \quad 0,15 \leq x \leq 0,2 \ , \\ 1, & \text{se} \quad 0,2 < x \leq 0,35 \ , \\ 8-20x, & \text{se} \quad 0,35 < x \leq 0,4. \end{cases}$$

$$\varphi_{I} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0,35 \text{ ou } x > 0,6 \ , \\ 20x-7, & \text{se} \quad 0,35 \leq x \leq 0,4 \ , \\ 1, & \text{se} \quad 0,4 < x \leq 0,55 \ , \\ 12-20x, & \text{se} \quad 0,55 < x \leq 0,6. \end{cases}$$

$$\varphi_{A} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0,55 \text{ ou } x > 0,8 \ , \\ 20x-11, & \text{se} \quad 0,55 \leq x \leq 0,6 \ , \\ 1, & \text{se} \quad 0,6 < x \leq 0,75 \ , \\ 16-20x, & \text{se} \quad 0,75 < x \leq 0,8. \end{cases}$$

$$\varphi_{P} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0,75 \ , \\ 20x-15, & \text{se} \quad 0,75 \leq x \leq 0,8 \ , \\ 1, & \text{se} \quad x > 0,8. \end{cases}$$

Com isso, observamos o seguinte gráfico.

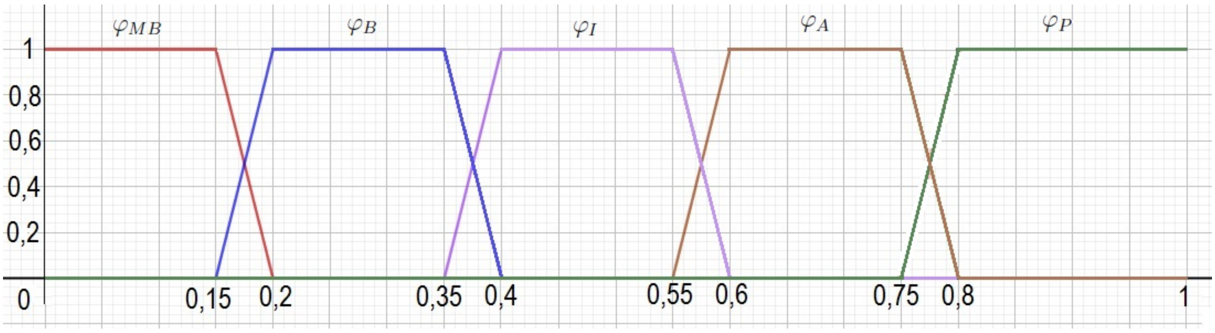


Figura 15 – Grau de Certeza.

O fato de estarmos trabalhando questões de múltipla escolha com a intenção de entender o raciocínio dos alunos até a marcação de cada alternativa, faz com que o professor deva ter um cuidado extra na escolha de cada alternativa (certa ou errada) contemplada na questão, observando os possíveis distratores que podem levar a marcação destas alternativas por parte dos alunos. Nesse sentido, além de inserir as alternativas, é interessante que o professor atribua uma porcentagem da nota total para as alternativas que não estejam completamente corretas, observando a proximidade do raciocínio empregado com o que seria o raciocínio ideal, assim, mesmo a alternativa não estando completamente certa, ela ainda valerá alguma porcentagem da pontuação total da questão. É importante destacar que o professor fica responsável em verificar a porcentagem mais justa para cada alternativa, de acordo com o que ele julgar ser um raciocínio significativo em busca do acerto. Com relação ao tipo de resposta possível para a marcação, fizemos a seguinte classificação: SA (sem aproveitamento), PA (pouco aproveitamento), AI (aproveitamento intermediário), BA (bom aproveitamento) e TA (total aproveitamento). A partir daí criamos as seguintes funções de pertinência para as possíveis respostas:

$$\varphi_{SA} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \leq 0,05\ , \\ 2 - 20x, & \text{se} \quad 0,05 < x \leq 0,1\ , \\ 0, & \text{se} \quad x > 0,1. \end{cases}$$

$$\varphi_{PA} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0,05 \text{ ou } x > 0,3\ , \\ 20x - 1, & \text{se} \quad 0,05 \leq x \leq 0,1\ , \\ 1, & \text{se} \quad 0,1 < x \leq 0,25\ , \\ 6 - 20x, & \text{se} \quad 0,25 < x \leq 0,3. \end{cases}$$

$$\varphi_{AI} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0,25 \text{ ou } x > 0,6 \ , \\ 20x - 5, & \text{se} \quad 0,25 \leq x \leq 0,3 \ , \\ 1, & \text{se} \quad 0,3 < x \leq 0,55 \ , \\ 12 - 20x, & \text{se} \quad 0,55 < x \leq 0,6. \end{cases}$$

$$\varphi_{BA} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0,55 \text{ ou } x > 0,9 \ , \\ 20x - 11, & \text{se} \quad 0,55 \leq x \leq 0,6 \ , \\ 1, & \text{se} \quad 0,6 < x \leq 0,85 \ , \\ 18 - 20x, & \text{se} \quad 0,85 < x \leq 0,9. \end{cases}$$

$$\varphi_{TA} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0,85 \ , \\ 20x - 17, & \text{se} \quad 0,85 \leq x \leq 0,9 \ , \\ 1, & \text{se} \quad x > 0,9. \end{cases}$$

E com isso obtemos o gráfico a seguir.

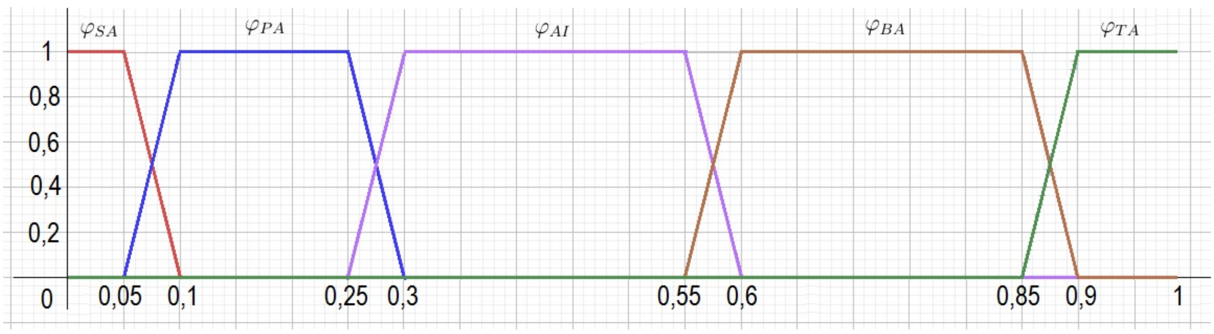


Figura 16 – Nível da resposta.

De acordo com o grau de certeza e a classificação referente à cada uma das alternativas marcadas pelo aluno, podemos levantar algumas hipóteses a cerca de seu conhecimento sobre o conteúdo abordado na questão e através disso conseguir chegar a uma nota mais justa para esse aluno, tal que reflita com maior precisão o grau de conhecimento obtido e demonstrado por ele no desenvolvimento de seu raciocínio até chegar a sua resposta. A nota de uma questão (dentro de uma prova ou avaliação) representa o grau de conhecimento observado no aluno ao responde-la, nesse sentido, a classificação do conhecimento do aluno é primordial para o sucesso na tentativa da inserção de uma nota mais justa no processo de ensino-aprendizagem. Com isso, o conhecimento foi classificado como: IN (inexistente), B (baixo), PAR (parcial), A (alto) e P (pleno), e para sua modelagem foram criadas as seguintes funções pertinências (do conhecimento):

$$\varphi_{IN} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \leq 0,05 \ , \\ 2 - 20x, & \text{se} \quad 0,05 < x \leq 0,1 \ , \\ 0, & \text{se} \quad x > 0,1. \end{cases}$$

$$\varphi_{B} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0,05 \text{ ou } x > 0,3 \ , \\ 20x - 1, & \text{se} \quad 0,05 \leq x \leq 0,1 \ , \\ 1, & \text{se} \quad 0,1 < x \leq 0,25 \ , \\ 6 - 20x, & \text{se} \quad 0,25 < x \leq 0,3. \end{cases}$$

$$\varphi_{PAR} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0,25 \text{ ou } x > 0,6 \ , \\ 20x - 5, & \text{se} \quad 0,25 \leq x \leq 0,3 \ , \\ 1, & \text{se} \quad 0,3 < x \leq 0,55 \ , \\ 12 - 20x, & \text{se} \quad 0,55 < x \leq 0,6. \end{cases}$$

$$\varphi_{A} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0,55 \text{ ou } x > 0,9 \ , \\ 20x - 11, & \text{se} \quad 0,55 \leq x \leq 0,6 \ , \\ 1, & \text{se} \quad 0,6 < x \leq 0,85 \ , \\ 18 - 20x, & \text{se} \quad 0,85 < x \leq 0,9. \end{cases}$$

$$\varphi_{P} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0,85 \ , \\ 20x - 17, & \text{se} \quad 0,85 \leq x \leq 0,9 \ , \\ 1, & \text{se} \quad x > 0,9. \end{cases}$$

Que são observadas através do seguinte gráfico:

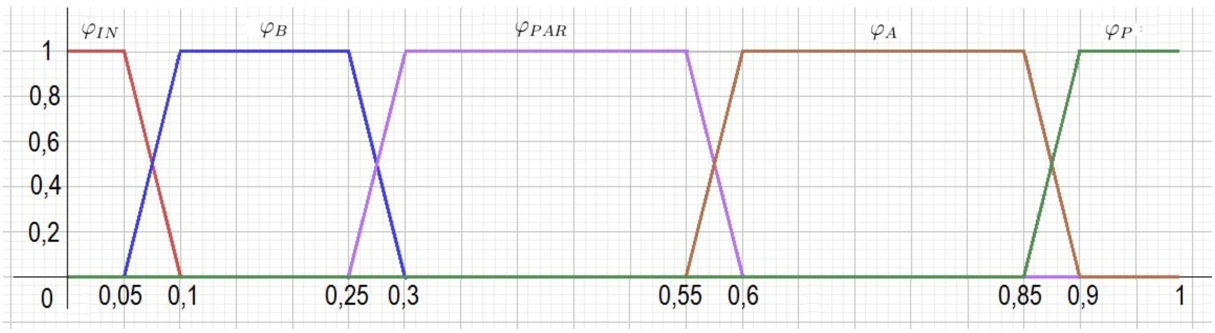


Figura 17 – Classificação do conhecimento.

De posse desses resultados preliminares que foram obtidos através de observações de avaliações e atividades que acompanharam o desenvolvimento dos alunos, criamos a seguinte base de regras que será responsável por trabalhar os termos e notas a fim de chegar a um resultado satisfatório para nosso trabalho.

R_1 : **Se** o aluno deu um grau de certeza muito baixo **e** sua resposta foi sem aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é INEXISTENTE.

R_2 : **Se** o aluno deu um grau de certeza baixo **e** sua resposta foi sem aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é INEXISTENTE.

R_3 : **Se** o aluno deu um grau de certeza intermediário **e** sua resposta foi sem aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é INEXISTENTE.

R_4 : **Se** o aluno deu um grau de certeza alto **e** sua resposta foi sem aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é INEXISTENTE.

R_5 : **Se** o aluno deu um grau de certeza pleno **e** sua resposta foi sem aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é INEXISTENTE.

R_6 : **Se** o aluno deu um grau de certeza muito baixo **e** sua resposta foi pouco aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é BAIXO.

R_7 : **Se** o aluno deu um grau de certeza baixo **e** sua resposta foi pouco aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é BAIXO.

R_8 : **Se** o aluno deu um grau de certeza intermediário **e** sua resposta foi pouco aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é INEXISTENTE.

R_9 : **Se** o aluno deu um grau de certeza alto **e** sua resposta foi pouco aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é INEXISTENTE.

R_{10} : **Se** o aluno deu um grau de certeza pleno **e** sua resposta foi pouco aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é INEXISTENTE.

R_{11} : **Se** o aluno deu um grau de certeza muito baixo **e** sua resposta foi aproveitamento intermediário, **então** o conhecimento do aluno é BAIXO.

R_{12} : **Se** o aluno deu um grau de certeza baixo **e** sua resposta foi aproveitamento intermediário, **então** o conhecimento do aluno é PARCIAL.

R_{13} : **Se** o aluno deu um grau de certeza intermediário **e** sua resposta foi aproveitamento intermediário, **então** o conhecimento do aluno é PARCIAL.

R_{14} : **Se** o aluno deu um grau de certeza alto **e** sua resposta foi aproveitamento intermediário, **então** o conhecimento do aluno é PARCIAL.

R_{15} : **Se** o aluno deu um grau de certeza pleno **e** sua resposta foi aproveitamento intermediário, **então** o conhecimento do aluno é PARCIAL.

R_{16} : **Se** o aluno deu um grau de certeza muito baixo **e** sua resposta foi bom aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é BAIXO.

R_{17} : **Se** o aluno deu um grau de certeza baixo **e** sua resposta foi bom aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é PARCIAL.

R_{18} : **Se** o aluno deu um grau de certeza intermediário **e** sua resposta foi bom aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é ALTO.

R_{19} : **Se** o aluno deu um grau de certeza alto **e** sua resposta foi bom aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é ALTO.

R_{20} : **Se** o aluno deu um grau de certeza pleno **e** sua resposta foi bom aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é ALTO.

R_{21} : **Se** o aluno deu um grau de certeza muito baixo **e** sua resposta foi total aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é BAIXO.

R_{22} : **Se** o aluno deu um grau de certeza baixo **e** sua resposta foi total aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é PARCIAL.

R_{23} : **Se** o aluno deu um grau de certeza intermediário **e** sua resposta foi total aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é ALTO.

R_{24} : **Se** o aluno deu um grau de certeza alto **e** sua resposta foi total aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é ALTO.

R_{25} : **Se** o aluno deu um grau de certeza pleno **e** sua resposta foi total aproveitamento, **então** o conhecimento do aluno é PLENO.

Produzida a base de regras do tipo "Se, então", estamos no caminho para a utilização do modelo de inferência de Mamdani, que será realizado no formato max-min, ou seja, na observação das pertinências do grau de certeza e da classificação da resposta, será considerada a menor delas para a pertinência do conhecimento do aluno. Após isso, será considerado o maior grau de conhecimento observado para a composição da nota do aluno na referida questão.

Porém, a classificação do conhecimento é dada através de um controlador fuzzy, isso significa que sua pertinência em cada subconjunto fuzzy ainda é um número fuzzy. Para que a nota de cada aluno seja dada através de valores crisp, a saída final do controlador deverá passar por um módulo de defuzzificação, que neste caso, vamos considerar que:

- Se o grau de pertinência do conhecimento do aluno for maior que zero no subconjunto INEXISTENTE, então a nota do aluno vai variar entre 0% e 10%, a depender da pertinência no subconjunto.

- Se o grau de pertinência do conhecimento do aluno for maior que zero no subconjunto BAIXO, então a nota do aluno vai variar entre 15% e 30%, a depender da pertinência no subconjunto.

- Se o grau de pertinência do conhecimento do aluno for maior que zero no subconjunto PARCIAL, então a nota do aluno vai variar entre 35% e 65%, a depender da pertinência no subconjunto.

- Se o grau de pertinência do conhecimento do aluno for maior que zero no subconjunto ALTO, então a nota do aluno vai variar entre 70% e 85%, a depender da pertinência no subconjunto.
- Se o grau de pertinência do conhecimento do aluno for maior que zero no subconjunto PLENO, então a nota do aluno vai variar entre 90% e 100%, a depender da pertinência no subconjunto.

Outro fato que vale ser ressaltado é que, como o aluno marca mais de uma alternativa, então isso vai gerar mais de uma nota (diferentes ou não) para a mesma questão. Para resolver esse fato, neste trabalho será considerada a maior nota obtida, porém esse fato deve ser resolvido a critério do professor e uma outra solução plausível seria considerar a média aritmética entre todas as notas obtidas.

2.5 Aplicação

Vamos tomar como exemplo a seguinte questão.

1. (ENEM - 2017) Um garçom precisa escolher uma bandeja de base retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças são círculos de raio 4 cm e 5 cm, respectivamente.

A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetros quadrados, igual a

a) 192.

b) 300.

c) 304.

d) 320.

e) 400.

Esta questão foi retirada de [8] e foi observado que as possíveis respostas são soluções de diferentes raciocínios a cerca do problema. Claramente um professor pode utilizar essa questão como forma de avaliação em suas aulas ou até mesmo como exercício para seus alunos.

Trazendo essa questão para a nossa perspectiva fuzzy, é necessário que seja feita uma avaliação dos possíveis raciocínios utilizados para chegar à cada uma das respostas disponíveis e, a partir daí, faça-se a classificação de cada uma dessas respostas, dando a elas as devidas porcentagens do total da questão (classificação da resposta) antes de passar para seus alunos.

Primeiramente, vamos resolver a questão, como as taças estarão enfileiradas, a largura da bandeja deve ter o tamanho igual ao diâmetro da base das taças (8 cm), já seu comprimento deve levar em consideração que as bordas das taças são maiores que as bases, assim, para que as taças estejam apoiadas sobre a bandeja é necessário observar que as duas taças centrais necessitam de um espaço igual ao diâmetro de sua borda (10 cm cada uma), já as taças dos extremos necessitam de espaço igual ao raio da borda mais o raio da base (9 cm cada uma), pois o lado da borda não adjacente a outra taça não necessáriamente deve estar sobre a bandeja. Assim a área desta bandeja é de $8 \cdot (10 + 10 + 9 + 9) = 8 \cdot 38 = 304\ \text{cm}^2$.

Fizemos a análise de cada alternativa desta questão e distribuímos da seguinte maneira o aproveitamento observado em cada uma: O item (a) foi considerado sem aproveitamento e foi atribuído nota 0 para a marcação desta alternativa, pois julgamos estar muito aquém do raciocínio esperado para a solução desta questão; O item (b) foi julgado com pouco aproveitamento, pois não observou bem os dados oferecidos pelo problema e a ele foi atribuído 0,2 do raciocínio ideal; O item (c) está correto, tendo total aproveitamento, a nota atribuída a essa alternativa é 1; O item (d) foi classificado por bom aproveitamento, sendo atribuída nota 0,8 para essa alternativa, pois o raciocínio empregado na marcação desta alternativa difere do ideal por uma pequena análise; E por fim, o item (e) foi classificado por bom aproveitamento, tendo ainda uma distância considerável do raciocínio correto, porém utilizando bem alguns conceitos para chegar nesta alternativa, dessa forma foi atribuída nota 0,6 para a marcação desta alternativa.

Feita a classificação das possíveis respostas dos alunos, partimos para a observação das respostas dadas por eles, para assim iniciarmos o processo de inferência com esses resultados.

Para as respostas dos alunos, vamos supor algumas situações com alunos fictícios e vamos buscar os resultados de cada uma delas.

Aluno 1: O aluno 1 marcou item (a) dando 0,6 de certeza e item (b) dando 0,4 de certeza.

Aluno 2: O aluno 2 marcou item (c) com 0,7 de certeza, item (d) com 0,2 e item (e) dando 0,1 de certeza.

3: O aluno 3 marcou o item (c) dando 1 de certeza para esse item.

Aluno 4: O aluno 4 marcou o item (a) com 0,5 de certeza e o item (c) com 0,5 de certeza.

Neste ponto, já temos as respostas dadas pelos alunos com seus graus de certeza e temos também a classificação das respostas, feita pelo professor. Portanto, o próximo passo é procurar a qual base de regras cada situação se encaixa e posteriormente resolver a inferência correspondente.

Aluno 1:

Marcação 1, φ(grau de certeza A) = 1;
φ(classificação da resposta SA) = 1.

$$\varphi_{R_4} = [\varphi(\text{grau de certeza A}) \wedge \varphi(\text{classificação da resposta SA})] = [1 \wedge 1] = 1.$$

Marcação 2, φ(grau de certeza I) = 1;
φ(classificação da resposta PA) = 1.

$$\varphi_{R_8} = [\varphi(\text{grau de certeza I}) \wedge \varphi(\text{classificação da resposta PA})] = [1 \wedge 1] = 1.$$

Ambas respostas dadas pelo aluno 1 levaram a um conhecimento inexistente de grau 1, ou seja, a nota deste aluno nesta questão é 10% da nota total da questão.

Aluno 2:

Marcação 1, φ(grau de certeza A) = 1;
φ(classificação da resposta TA) = 1;

$$\varphi_{R_{24}} = [\varphi(\text{grau de certeza A}) \wedge \varphi(\text{classificação da resposta TA})] = [1 \wedge 1] = 1.$$

Marcação 2, φ(grau de certeza B) = 1;
φ(classificação da resposta BA) = 1;

$$\varphi_{R_{17}} = [\varphi(\text{grau de certeza B}) \wedge \varphi(\text{classificação da resposta BA})] = [1 \wedge 1] = 1.$$

Marcação 3, φ(grau de certeza MB) = 1;
φ(classificação da resposta BA) = 1;

$$\varphi_{R_{16}} = [\varphi(\text{grau de certeza MB}) \wedge \varphi(\text{classificação da resposta BA})] = [1 \wedge 1] = 1.$$

As três respostas dadas pelo aluno 2 levaram a conhecimentos alto, parcial e baixo, todos com grau 1. Como foi colocado, consideraremos a maior destas notas, logo é quando o conhecimento é alto, assim a nota do aluno 2 é 85% da nota da questão.

Aluno 3:

Marcação 1, $\varphi(\text{grau de certeza P}) = 1;$
$\varphi(\text{classificação da resposta TA}) = 1;$

$\varphi_{R_{25}} = [\varphi(\text{grau de certeza P}) \wedge \varphi(\text{classificação da resposta TA})] = [1 \wedge 1] = 1.$

A respostas dada pelo aluno 3 leva a um conhecimento pleno do conteúdo com grau 1, assim a nota do aluno é 100% da nota desta questão.

Aluno 4:

Marcação 1, $\varphi(\text{grau de certeza I}) = 1;$
$\varphi(\text{classificação da resposta SA}) = 1;$

$\varphi_{R_3} = [\varphi(\text{grau de certeza I}) \wedge \varphi(\text{classificação da resposta SA})] = [1 \wedge 1] = 1.$

Marcação 2, $\varphi(\text{grau de certeza I}) = 1;$
$\varphi(\text{classificação da resposta TA}) = 1;$

$\varphi_{R_{23}} = [\varphi(\text{grau de certeza I}) \wedge \varphi(\text{classificação da resposta TA})] = [1 \wedge 1] = 1.$

As respostas dadas pelo aluno 4 levaram a conhecimentos inexistente e alto, ambos com grau 1. Mais uma vez lembrando que consideraremos a maior destas notas, portanto é quando o conhecimento é alto, assim a nota do aluno 4 é 85% do valor da nota da questão.

3 Avaliação Fuzzy no AVA

Neste capítulo vamos trabalhar com uma ferramenta do Ambiente Virtual de Aprendizagem - AVA que se assemelha bastante com o método de avaliação exposto no capítulo anterior que, a propósito, foi o que nos inspirou para a realização deste trabalho. Utilizaremos essa ferramenta juntamente com questionários de múltipla escolha, porém ela também pode ser habilitada em outros formatos de questionários. Para a realização destas atividades utilizamos o ambiente Moodle da UFAL, aberto para alunos dos cursos a distância da UAB/UFAL, porém o moodle é um software livre de apoio à aprendizagem que pode ser baixado e instalado por qualquer pessoa que queira utilizar os serviços online na educação. E para quem tem interesse em se aprofundar no assunto de avaliações no AVA, indicamos a leitura de [9].

O AVA é uma espécie de sala de aula virtual onde os professores inserem conteúdos, apostilas, vídeos, entre outros materiais para seus alunos estudarem, discutirem e tirarem suas dúvidas. Geralmente o AVA é utilizado em cursos a distância ou semipresenciais, assim, é imprescindível a presença de avaliações neste ambiente, as quais são produzidas de acordo com a necessidade do professor em cada situação.

A utilização do AVA requer uma atenção maior ao público que será atingido com essa aprendizagem, uma vez que se espera que sejam lidos os conteúdos disponíveis e/ou assistido a algum possível vídeo sobre o conteúdo dentro de um prazo determinado, porém com flexibilidade dos horários de estudo. Dessa maneira, vamos supor a total adaptabilidade do público a essa plataforma de ensino e vamos propor uma avaliação com questões de múltipla escolha onde os alunos deverão assinalar apenas uma alternativa, marcando também o grau de certeza que cada um tem ao dar suas respostas, para assim interpretarmos o grau de aprendizagem que o aluno tem sobre determinado conteúdo.

3.1 Sobre a Avaliação no AVA

No ambiente virtual (quando se tem acesso como professor) é possível editar a página da disciplina para inserir algum tipo de atividade ou recurso, como conteúdos, vídeos, entre outros. Ao clicar em "Adicionar uma atividade ou recurso" abre-se várias possibilidades de atividades a serem utilizadas, dentre elas o recurso do "Questionário". Neste recurso é possível criar questões de múltipla escolha, verdadeiro ou falso, correspondência, resposta curta, entre outras. Além disso, o professor pode permitir que o questionário tenha múltiplas tentativas, onde as questões são embaralhadas ou selecionadas aleatoriamente a partir de um banco de questões, onde cada tentativa é corrigida automaticamente, com exceção das questões dissertativas. Para uma observação mais detalhada de todas as possibilidades, indicamos [10].

Ao ser selecionado o recurso do questionário, abre-se uma nova página onde devem ser colocados o nome do questionário e sua descrição. Aqui também devem ser colocadas algumas informações adicionais sobre o questionário, como a duração, nota, layout, comportamento da questão, opções de revisão, aparência, restrições extras nas tentativas, feedback geral, configurações comuns de módulos e marcadores.

Um ponto importante para a realização deste trabalho encontra-se em "Comportamento da questão", pois nesse ponto é possível estabelecer a maneira com que os alunos vão interagir com as perguntas do questionário. Dessa forma, o comportamento da questão que nos interessa é "Feedback adiado com CBM" ou "Feedback imediato com CBM". No primeiro, o feedback relacionado a cada questão aparece apenas quando todo o questionário é finalizado, enquanto no segundo, o feedback aparece imediatamente após a conclusão de cada questão, e em ambos os casos, a marcação **CBM** (Certainly-based marking) faz com que o aluno escolha entre três opções predefinidas ($< 67\%$, $> 67\%$ ou $> 80\%$) para determinar o grau de certeza que possui ao dar sua resposta.

Após finalizar as identificações dos recursos do questionário partiremos para a criação das questões, as quais utilizaremos, dentre os vários tipos predeterminados, as questões de múltipla escolha, pois é esse tipo de questão que utilizaremos ao decorrer deste trabalho com a justificativa de melhoria do ensino com base nos erros dos alunos em relação aos descritores da educação em cada nível.

Todos os dados das respostas dadas pelos alunos, assim como as notas obtidas por eles, são registradas no livro de notas do curso, assim, quando forem finalizadas todas as atividades, suas notas já estarão devidamente registradas numa espécie de diário eletrônico dentro da própria plataforma do moodle.

3.2 Fuzzificando a Avaliação do AVA

Como pudemos observar, encontramos uma ferramenta muito semelhante a que utilizamos no capítulo anterior, onde o aluno marca a porcentagem de certeza que tem ao responder uma questão. Portanto a utilizaremos neste capítulo com o mesmo objetivo, porém voltado à educação a distância.

Para que seja realizada a avaliação no AVA da maneira mais parecida possível com o que fizemos no capítulo anterior, ou seja, com o aluno podendo marcar o grau de certeza sobre cada questão, ainda é necessário que façamos algumas adaptações importantes no questionário, as quais mostraremos no passo a passo a seguir.

1. Deve-se "Ativar edição" na página da disciplina e "Adicionar uma atividade ou recurso".

2. Escolheremos a opção "Questionário" e clicaremos em "Adicionar".
3. Na página do questionário, vamos dar atenção especial ao item "Comportamento da questão", os demais ficam a critério do professor. Ao clicar nele para abrir suas opções, vamos escolher "Feedback adiado com CBM" ou "Feedback imediato com CBM", as demais opções também ficam a critério do professor. Feito isso, podemos salvar a página com uma das opções "Salvar e voltar ao curso" ou "Salvar e mostrar".
4. Na página do questionário, devemos clicar em "Editar questionário", em seguida "Adicionar" e escolher a opção "uma nova questão" (a menos que já tenha alguma questão pronta num banco de questões).
5. Dentre as opções de questões que aparecerão, vamos escolher "Múltipla escolha" e "Adicionar".
6. O nome da questão, assim como seu texto e suas alternativas são produzidas ao modo do professor, com a possibilidade de dar um feedback geral ou para cada alternativa produzida.
7. Devemos ter um cuidado a mais com a opção "Uma ou mais respostas", uma vez que queríamos que o aluno pudesse marcar mais de uma alternativa, porém não obtivemos bons resultados nesse formato, logo tivemos que limitar a marcação para uma única alternativa por questão, assim, deve ser marcada com "Apenas uma resposta". E na opção "Nota", perceberemos que existem algumas porcentagens predefinidas, não sendo possível inserir uma porcentagem diferente destas, além disso é obrigatório que haja pelo menos uma alternativa com nota 100%.
8. Após concluir essa parte, a questão estará completa no formato fuzzy. Basta clicar no botão "Salvar mudanças".
9. Para inserir mais alguma questão ao questionário, basta clicar para entrar no questionário, daí aparecerá uma aba ao lado com o nome "Administração", então clica-se em "Editar questionário", "Adicionar" e "uma nova questão", então o processo se repete.

Com relação ao modo como o Moodle atribui as notas com a função CBM ativada, vamos notar que não é de uma maneira convencional. Vejamos:

- Se a alternativa marcada tiver qualquer grau de correta, ou seja, a alternativa marcada possui porcentagem de nota $> 0\%$, então a nota dada para a questão é obtida da seguinte maneira:

  - Dado um grau de certeza $< 67\%$, a nota será dada multiplicando a porcentagem da alternativa por 1.
  - Dado um grau de certeza $> 67\%$, a nota será dada multiplicando a porcentagem da alternativa por 2.
  - Dado um grau de certeza $> 80\%$, a nota será dada multiplicando a porcentagem da alternativa por 3.

- Se a alternativa marcada tiver grau zero de correta, ou seja, a alternativa marcada possui porcentagem de nota $\leq 0\%$, então a nota dada para a questão é obtida da seguinte maneira:
  - Dado um grau de certeza $< 67\%$, a nota será dada multiplicando o valor total da questão por 0.
  - Dado um grau de certeza $> 67\%$, a nota será dada multiplicando o valor total da questão por -2.
  - Dado um grau de certeza $> 80\%$, a nota será dada multiplicando o valor total da questão por -6.

Notando tanto o impacto negativo que uma questão errada pode proporcionar, quanto a extrapolação da nota por uma questão correta, acreditamos que seja necessário refazer os cálculos das notas. Para isso, sugerimos a produção de uma planilha para a conversão desta nota em uma nota mais aceitável, onde a pontuação mínima seja registrada como zero e a máxima como 100% da nota relativa à questão (Consultar Apêndice B).

Uma outra maneira de avaliação da aprendizagem por meio da lógica fuzzy pode ser encontrado em [14].

4 Considerações Finais

O objetivo deste trabalho é oferecer uma nova possibilidade para os professores compreenderem as dificuldades de seus alunos em relação a avaliações e, com isso, obterem uma nova ferramenta na preparação dos mesmos para provas objetivas, não só escolares, mas também provas e avaliações externas que se utilizam deste método, como são os casos dos vestibulares, do ENEM, Prova Brasil, Prova Alagoas, entre outros. Ferramenta essa que auxilia na compreensão dos pontos que mais desviam a atenção de seus alunos (distratores), possibilitando uma intervenção antecipada de erro futuro, minimizando a deficiência em certos pontos e dando a oportunidade do professor fazer uma revisão para aparar as arestas equivocadas do conhecimento.

Acreditamos que com o passar dos anos, a demanda de alunos tende a aumentar, fazendo com que oa laços entre professor e aluno sejam cada vez menores, ocasionando uma perda da interpessoalidade entre os envolvidos e dificultando o aproveitamento da singularidade de cada estudante no modo de pensar. Nesse ponto, pensamos que um método prático que possibilite enxergar o processo cognitivo do aluno no desenvolvimento de seu raciocínio, que permita maior velocidade na correção das atividades, otimizando o tempo do professor, seria uma bela saída para esse possível problema.

Talvez o tempo de formulação e organização de questionários no modelo fuzzy acabe sendo um tanto maior que no modelo tradicional, porém uma excelente saída para esse problema seria a criação, por parte do professor, de um banco de questões, onde naturalmente seria alimentado a sua maneira e não lhe traria exaustão de tempo no momento escolhido para a realização de alguma atividade.

Entendemos que fica a critério do professor a utilização do método apresentado aqui em quaisquer fases de ensino, seja fundamental, médio, superior ou pós-graduação, cada uma com uma perspectiva singular em relação a avaliação, porém não menos importante, já que o método se mostra eficaz na produção de uma nota justa em relação ao conhecimento desenvolvido e apresentado em questão.

Referências

[1] BARROS, L. C. De.; BASSANEZI, R. C. Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática. Campinas, SP: UNICAMP/IMECC, 2015.

[2] BLOG PLATAFORMA EDUCACIONAL. Item ENEM: o conceito de distrator. Disponível em: <https://www.somospar.com.br/prova-enem-o-conceito-de-distrator/>. Acesso em: 06 jul. 2018.

[3] CABRERA, N. V. Aplicação da extensão de Zadeh para conjuntos fuzzy tipo 2 intervalar. 2014. 72f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia. 2014. Disponível em <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/16811>. Acesso em: 20 abr. 2018.

[4] DESCRITORES. Disponível em: <https://pt.slideshare.net/louisacarla /descritores-e-distratores> Acesso em: 06 jul. 2018.

[5] GAYER, F. A. M. A matemática está em tudo: modelagem fuzzy para um problema da indústria e uma aplicação para o Ensino Médio. 2017. 105f. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. 2017. Disponível em <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/152274>. Acesso em: 20 abr. 2018.

[6] KIRCH, N.R.F. Análise dos Descritores e Distratores da Matemática na Prova Brasil e suas Informações Pertinentes para os Gestores Públicos. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusc a/producoes_pde/2014/2014_unioeste_gestao_artigo_nariete_raquel_ferra zza_kirch.pdf> Acesso em: 06 jul. 2018.

[7] KRABBE, B. L. Um modelo matemático para estimar o risco de desenvolver câncer de pulmão por meio de sistemas fuzzy. 2016. 58f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de São Carlos, Campus Sorocaba. 2016. Disponível em <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94197>. Acesso em: 30 jun. 2018.

[8] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Exame Nacional do Ensino Médio. Enem 2017. 2º dia. Caderno 5, Amarelo. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/cad _5_prova_amarelo_12112017.pdf>. Acesso em: 03 jul. 2018.

[9] MOZZAQUATRO, P. M; MEDINA, R. D. Avaliação do ambiente virtual de aprendizagem Moodle sobre diferentes visões: aspectos a considerar. Disponível em:

¡file:///C:/Users/administrador/Downloads/14508-50393-1-PB.pdf¿. Acesso em: 10 ago. 2018.

[10] QUESTIONÁRIO. Disponível em: ¡http://www.ccead.puc-rio.br/wp-content/uploads/2014/10/QUESTIONARIO.pdf¿. Acesso em: 11 ago. 2018.

[11] SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO - MG. Guia de Elaboração e Revisão de Questões e itens de Múltipla Escolha. Disponível em: <http://www.adventista.edu.br/_imagens/area_academica/files/guia-de-elaboracao-de-itens-120804112623-phpapp01(3).pdf>. Acesso em: 10 abr. 2018.

[12] TOLEDO, O. M.; COSENZA, C. A. N. Metodologia da avaliação de desempenho baseada na lógica fuzzy. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Olga_Toledo/publication/26723 0451_METODOLOGIA_DE_AVALIACAO_DE_DESEMPENHO_BASE ADA_EM_LOGICA_FUZZY/links/56a8c1ea08ae860e02577ab5.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2018.

[13] VALLE, M. E. Aula 2: Conjuntos fuzzy e suas propriedades; Aula 7: Aritmética com números fuzzy. Disponível em: ¡https://www.ime.unicamp.br/ valle/Teaching/MS580/¿ Acesso em: 20 mar. 2018.

[14] WILGES, B. et al. Avaliação da aprendizagem por meio de lógica fuzzy validado por uma árvore de decisão ID3. Disponível em: ¡file:///C:/Users/administrador/Downloads/18053-64407-1-PB.pdf¿. Acesso em: 02 ago. 2018.

Apêndice A

Aqui exibiremos uma atividade que foi aplicada na escola municipal João Batista Pereira da Silva, localizada no município de Arapiraca, ao 7º ano do ensino fundamental. Esta atividade consta de duas questões de múltipla escolha, onde o aluno pode marcar quantas alternativas deseja, dando a cada uma o grau de certeza que tem ao marca-la.

ATIVIDADE

1º) Clara estava resolvendo a seguinte expressão:

$$-3^2 + 4 \cdot (6 - (-2)^3).$$

Qual valor Clara deverá encontrar para acertar a questão?

a) -70 Certeza: (   )

b) -22 Certeza: (   )

c) 1 Certeza: (   )

d) 47 Certeza: (   )

e) 65 Certeza: (   )

2º) Angélica pagou R$ 6,30 por $\frac{3}{10}$ de um bolo, e Rodrigo comprou o resto do bolo. Quanto Rodrigo pagou?

a) R$ 9,00 Certeza: (   )

b) R$ 10,30 Certeza: (   )

c) R$ 14,70 Certeza: (   )

d) R$ 18,90 Certeza: (   )

e) R$ 21,00 Certeza: (   )

Para a produção das alternativas destas questões foram analisados os possíveis erros dos alunos ao tentar responde-las, e com base nesses erros é que criamos as porcentagens relativas a cada alternativa para aplicar a análise fuzzy.

- Vejamos como foram montadas as alternativas e suas porcentagens para a primeira questão.

Para marcar o item a), o aluno poderia resolver a questão da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} -9+4\cdot(6+8) &= \\ -9+4\cdot 14 &= \\ -5\cdot 14 &= -70. \end{aligned}$$

Considerando que o aluno resolveu as potenciações corretamente, resolveu o que estava nos parênteses primeiro, consideramos que sua marcação valeria 50% da nota total.

Para a marcação do item b), a resolução poderia ser a seguinte:

$$\begin{aligned} -9+4\cdot(6+8) &= \\ -5\cdot 6+8 &= \\ -30+8 &= -22. \end{aligned}$$

Considerando que o aluno acertou as potenciações, mas não soube resolver a expressão, determinamos que 30% da nota para a marcação desta alternativa.

A resolução para chegar a marcação do item c) pode ser realizadas

$$\begin{aligned} 9+4\cdot(6-8) &= \\ 9+4\cdot(-2) &= \\ 9-8 &= 1. \end{aligned}$$

Nessa resolução, o erro na resolução das duas potenciações, portanto a porcentagem para a marcação desta alternativa é de 0%.

No item d) trazemos a resposta correta, portanto a porcentagem dada a marcação dele é de 100% da nota total.

E no item e), a resolução pode ser feita da maneira a seguir:

$$\begin{aligned} 9+4\cdot(6+8) &= \\ 9+4\cdot 14 &= \\ 9+56 &= 65. \end{aligned}$$

Observando que o aluno errou a primeira potenciação por se confundir com a falta dos parênteses, mas acertando o restante da questão, atribuímos 60% da nota total da questão para a marcação desta alternativa.

- Agora veremos como foram montadas as alternativas da segunda questão, juntamente com suas porcentagens.

Para marcar o item a), o aluno poderia ter resolvido da seguinte maneira:

$$6,30 \cdot 10 = 63 \longrightarrow 63 \div 7 = 9.$$

E com isso, observado o complementar da fatia retirada $\left(\frac{7}{10}\right)$, porém não resolveu corretamente, com isso determinamos que a marcação dessa alternativa valerá 35% da nota total da questão.

Uma raciocínio possível para a marcação do item b) seria a observação da fração $\frac{3}{10}$ e fazendo alguma relação com a alternativa que mostra R$10,30. Para essa marcação atribuímos 0% da nota total da questão.

O item c) traz a resposta correta, portanto sua marcação vale 100% da nota da questão.

Para chegar a marcação do item d), o aluno poderia simplesmente multiplicar $6,30 \cdot 3 = 18,90$. Para essa marcação também é dada 0% da nota total da questão.

E para a marcação do item e), o aluno pode efetuar os seguintes cálculos:

$$6,30 \cdot 10 = 63 \longrightarrow 63 \div 3 = 21.$$

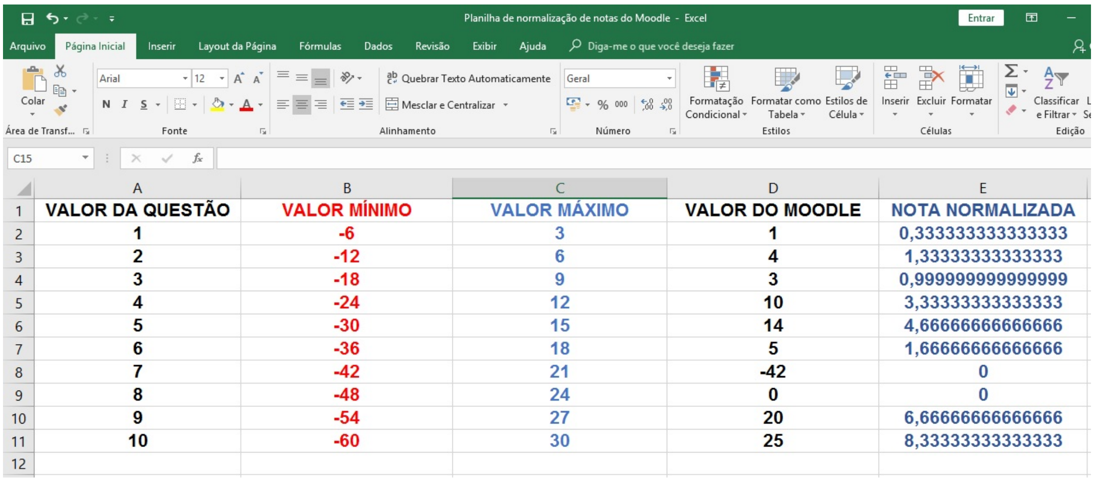
Observando que este é o valor total do bolo e que o aluno esqueceu de retirar a quantidade que já havia sido comprada, determinamos 20% da nota total da questão para a marcação desta questão.

Feito isso, a atividade está pronta para ser entregue para os alunos responder.

Apêndice B

Uma possibilidade para a normalização das notas geradas pelo Moodle será dada a seguir, porém a decisão final de como fazer essa normalização é sempre do professor responsável pela turma ou pela avaliação.

Na planilha a seguir, as notas não positivas são normalizadas e consideradas como zero e somente recebem pontuação as questões que possuirem notas positivas.



	A	B	C	D	E
1	VALOR DA QUESTÃO	VALOR MÍNIMO	VALOR MÁXIMO	VALOR DO MOODLE	NOTA NORMALIZADA
2	1	-6	3	1	0,333333333333333
3	2	-12	6	4	1,33333333333333
4	3	-18	9	3	0,999999999999999
5	4	-24	12	10	3,33333333333333
6	5	-30	15	14	4,66666666666666
7	6	-36	18	5	1,66666666666666
8	7	-42	21	-42	0
9	8	-48	24	0	0
10	9	-54	27	20	6,66666666666666
11	10	-60	30	25	8,33333333333333
12					

Figura 18 – Planilha de notas por questão.

A **Figura 4.1** mostra a visão da planilha com questões de pontuações diversas, produzidas com valores fictícios com o intuito de mostrar a variedade de possibilidades. A seguir teremos a base de formação de cada coluna.

- A coluna **VALOR DA QUESTÃO** exibe qual é a nota que o professor atribuiu para o acerto daquela questão. Portanto esta coluna deve ser preenchida manualmente com o valor desejado.

- Para a produzir a segunda coluna, **VALOR MÍNIMO**, foi digitado o seguinte comando na célula específica: `=IMPROD(-6;A2)`.

B2 =IMPROD(-6;A2)

	A	B
1	VALOR DA QUESTÃO	VALOR MÍNIMO
2	1	-6
3	2	-12

Figura 19 – Valor Mínimo.

- A produção da coluna **VALOR MÁXIMO** foi feita através do comando: `=IMPROD(3;A2)`.

Figura 20 – Valor Máximo.

- Na coluna **VALOR DO MOODLE** colocamos a nota gerada pelo Moodle, por esse motivo esta coluna deve ser preenchida manualmente pelo professor.

- E por fim, na coluna **NOTA NORMALIZADA** aparecerá a nota final que o aluno atingiu nesta questão, esta nota já aparece defuzzificada, da maneira que desejamos inicialmente. Esta lacuna foi preenchida da seguinte maneira:

  `=SE(D2<=0;"0";SE(D2>0;IMPROD(0,333333333333333;D2)))`.

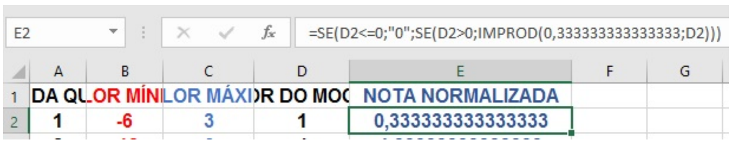


Figura 21 – Nota normalizada.

É importante observar que as colunas descritas foram produzidas em uma planilha Excel nas colunas A, B, C, D e E do programa, respectivamente, e ainda quando escrevemos, por exemplo A2, indica que estamos observando o que se passa na coluna A e linha 2 desse programa.

Podemos, por fim, expressar a normalização da nota dada pelo Moodle através do gráfico a seguir.

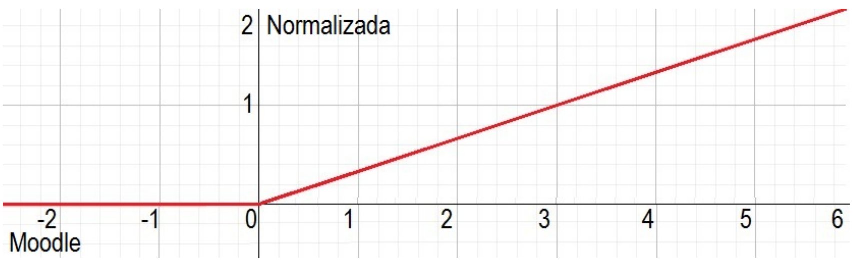


Figura 22 – Gráfico das notas normalizadas.

Onde o eixo das abscissas trás as notas do Moodle, enquanto o eixo das ordenadas trás os valores das notas normalizados.