



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DAS MÁQUINAS SIMPLES

DANILO SANTANA SANTOS

Salvador - Bahia
SETEMBRO DE 2018

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DAS MÁQUINAS SIMPLES

DANILO SANTANA SANTOS

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Nogueira Bahiano.

Salvador - Bahia

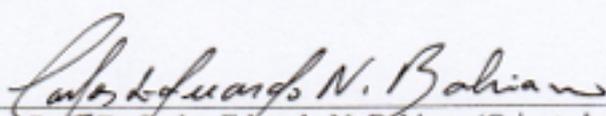
Setembro de 2018

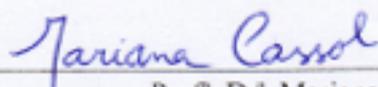
Fundamentos Matemáticos das máquinas simples

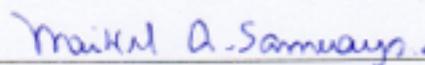
Danilo Santana Santos

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 27/09/2018.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Carlos Eduardo N. Bahiano (Orientador)
UFBA


Prof.^a Dr.^a Mariana Cassol
UFBA


Prof. Dr. Maikel Antônio Samuays
UFBA

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA),
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Santos, Danilo Santana
Fundamentos Matemáticos das Máquinas Simples /
Danilo Santana Santos. -- Salvador, 2018.
102 f.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Nogueira
Bahiano.
Dissertação (Mestrado - Mestrado profissional em
Matemática - Profmat) -- Universidade Federal da
Bahia, UFBA, 2018.

1. Máquinas Simples. 2. Funcionamento das máquinas
simples. 3. Problemas reais envolvendo as Máquinas
Simples. I. Bahiano, Prof. Dr. Carlos Eduardo
Nogueira. II. Título.

À minha família

Agradecimentos

Primeiro agradeço a Deus por ter me sustentado até aqui e por colocar pessoas maravilhosas no meu caminho, em especial, minha amada esposa Vanessa Lima da Silva Santos, pois está em todos os momentos ao meu lado.

Agradeço a minha família composta por: Valdete de Santana (mãe), Hildete Cruz (Tia) e Fernanda de Sant'ana (irmã) por sempre permanecerem ao meu lado dando-me força, apoio e coragem.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior(CAPES) por me manter na Universidade disponibilizando-me as condições para desenvolver o projeto do qual resultou esse trabalho.

Agradeço aos professores, Jabes Francisco de Andrade Silva e Elias Santiago de Assis por estarem sempre apoiando-me nos estudos, mesmo não estando por perto. Aos professores do Profmat Simone Moraes, Elaís Malheiro, kleyber Cunha e Joseph Yartey que deram-me grande base nos conceitos matemáticos e a todos outros professores que de certa forma colaboraram com minha formação até aqui.

Agradeço aos meus colegas do profmat Marcos Moreira, Eduardo Saraiva, Ivana, Adriana, Paulo e, em especial, aos meus amigos Vitor Rios, Daniel Nascimento e Vera Helena por contribuírem no desenvolvimento do meu projeto.

Agradeço, especialmente, ao meu orientador Prof. Dr Carlos Eduardo Nogueira Bahiano por ter muita paciência comigo e por ter acreditado na minha dedicação em realizar esse trabalho. Obrigado também por incentivar-me na ampliação dos meus estudos e pela atenção dedicada a mim.

*“Porquanto é o SENHOR quem
concede sabedoria, e da Sua boca
procedem a inteligência e o
discernimento”.*
Provérbios 2.6

Resumo

Máquinas Simples são ferramentas básicas utilizadas tanto para aumentar ou reduzir a amplitude de uma força, quanto para mudar a direção de uma força ou movimento. São de forma geral os modelos básicos que fundamentam o funcionamento mecânico de grande parte das máquinas utilizadas desde os primórdios da humanidade, tanto as mais complexas, como por exemplo carros, guindastes e elevadores, quanto as mais simples, como parafusos, machados, alicates e tesouras. Todas elas possuem em comum um embasamento matemático que justifica o seu correto funcionamento.

Neste trabalho aborda-se os fundamentos matemáticos das máquinas simples, em particular, discorre-se sobre os conceitos matemáticos básicos que permitem numa perspectiva geral o funcionamento eficiente dessas máquinas, apresentando-as numa linguagem interdisciplinar que pode ser utilizada por professores em séries iniciais.

Palavra-chave: Máquinas Simples, fundamentos matemáticos, funcionamento dessas máquinas.

Abstract

Simple Machines are basic tools used both to increase or reduce the amplitude of a force, or to change the direction of a force or movement. They are basically the basic models that base the mechanical operation of most of the machines used since the early days of humanity, both the most complex, such as cars, cranes and elevators, as well as the simplest ones, such as bolts, axes, pliers and scissors. All of them have in common a mathematical foundation that justifies their correct functioning.

In this paper we discuss the mathematical fundamentals of simple machines, in particular, discusses the basic mathematical concepts that allow in a general perspective the efficient functioning of these machines, presenting them in an interdisciplinary language that can be used by teachers in initial grades.

Keyword: Simple Machines, mathematical fundamentals, operation of these machines.

Sumário

Introdução	1
1 Máquinas Simples	3
2 Preliminares	6
2.1 Casos de semelhanças	7
2.2 Trigonometria	12
2.3 Inversão	22
3 Funcionamento das máquinas simples	37
3.1 Alavanca	41
3.2 Plano Inclinado	46
3.3 Cunha	49
3.4 Parafuso	55
3.5 Polias	62
3.6 Rodas e Eixos	70
3.6.1 Calculando o comprimento de uma correia	75
4 Problemas reais envolvendo as Máquinas Simples	79
5 Conclusão	91
Referências Bibliográficas	93

Introdução

Desde a antiguidade, os seres humanos têm procurado desenvolver máquinas e instrumentos voltados para facilitar o desenvolvimento das suas múltiplas atividades. As máquinas simples são instrumentos que nos permitem mudar a magnitude, a direção e o sentido de uma força, estando presente como corpo teórico ou prático.

As máquinas simples de modo geral, facilitam a vida do homem. Na era Cristã (d.C.), as máquinas simples foram objetos de estudo por parte do matemático grego Heron de Alexandria (c. 20 d.C.-?), que as tratou em sua Mecânica, obra composta de três livros. No Livro II, apresentou as máquinas simples e os problemas mecânicos da vida diária, enquanto no livro III há a descrição da construção das mais variadas espécies de máquinas. Por exemplo, utilizou o mecanismo da roda dentada para converter as rotações das rodas de uma carroça em giros de um ponteiro, constituindo-se desse modo, numa espécie de odômetro como mostra a figura [2](#).

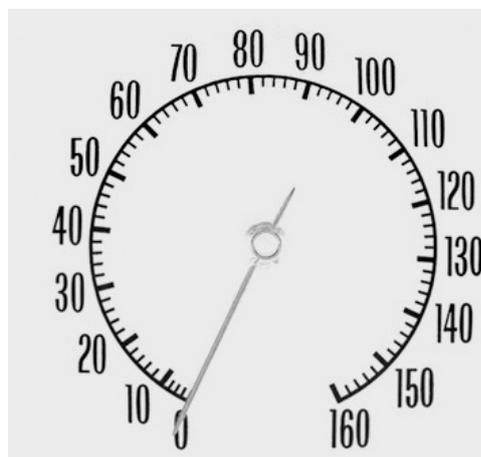


Figura 1: Odômetro

Atualmente, o assunto que engloba o tema dessa dissertação nos diversos capítulos que compõem os livros didáticos, não esclarecem o seu conceito. Com isso, esse trabalho pretende desenvolver o conteúdo matemático explorado durante o ensino fundamental II e médio, exemplificando seu uso e aplicação por meio das máquinas simples que estão presentes no cotidiano.

Este trabalho é direcionado tanto aos estudantes quanto aos professores do curso de

Matemática e Física que desejem, além de ter um conhecimento sobre máquinas simples, conhecer alguns conceitos matemáticos correlacionados com seu funcionamento. Para tanto, é necessário ter um conhecimento prévio sobre matemática básica que seja suficiente para proporcionar o entendimento do tema.

De acordo com o Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), no curso de ensino fundamental II estuda-se proporcionalidade, semelhança de triângulos e alguns conceitos trigonométricos. Já no ensino médio, estuda-se trigonometria e geometria. Portanto este texto pode ser trabalhado parcialmente no ensino fundamental e integralmente no ensino médio.

Pretende-se com esta dissertação, correlacionar os conceitos básicos da matemática com a finalidade de entender o funcionamento das máquinas simples.

Como objetivo geral foi estabelecido a investigação dos fundamentos matemáticos por trás das máquinas simples e, como objetivos específicos, a apresentação do percurso histórico das máquinas simples e as preliminares para um melhor entendimento posterior. Além de mostrar, através dos conceitos básicos estudados nos capítulos iniciais, o funcionamento das máquinas e por fim, apresentar alguns problemas reais do dia a dia.

Esta dissertação apresenta-se estruturada em quatro capítulos. O primeiro aborda-se o surgimento das máquinas simples. No segundo, aborda-se os conceitos fundamentais. No terceiro, os conceitos básicos da matemática que garantem o funcionamento das máquinas. E finalmente, no quarto capítulo, algumas aplicações dessas máquinas e como estas ajudam no desenvolvimento da humanidade.

Capítulo 1

Máquinas Simples

As civilizações antigas, tais como os sumerianos, egípcios, caldeus, assírios, fenícios, chineses, dentre outras, que viveram milhares de anos antes de Cristo, usaram máquinas simples (rodas, arados, balanças, cunhas, planos inclinados, parafusos, alavancas, roldanas ou polias) para melhorar a agricultura, construir cidades, ampliar o comércio, guerrear e, com isso, promover o seu processo civilizatório. O astrônomo e matemático grego Archytas de Tarentum (f.c. 400-350) foi quem construiu o primeiro autômato consistindo em um pombo voador de madeira, assim como construiu também vários instrumentos mecânicos para descrever curvas geométricas. O mesmo desenvolveu a teoria da roldana ou polia, uma das primeiras máquinas simples baseada no princípio da alavanca. Mais tarde este princípio teve uma primeira explicação por parte do filósofo grego Aristóteles de Estagira (384-322).

Outro marco significativo para o entendimento do princípio da alavanca foi dado pelo artista Leonardo da Vinci (1452-1519), ao reconhecer a importância do braço de alavanca:

Da Vinci demonstrou que dada uma alavanca AB , de extremidade A móvel, se em sua extremidade B são aplicados dois pesos, um vertical P e um horizontal Q (este aplicado por intermédio de uma roldana), e se o equilíbrio dessa alavanca ocorre para uma dada posição de sua inclinação, então a relação $\frac{P}{Q}$ depende das distâncias, horizontal e vertical, entre respectivamente, as direções de P e Q e o ponto de rotação A . Essas distâncias são justamente as alavancas potenciais, conforme o próprio da Vinci as denominou, ou os braços de alavanca de P e Q , conforme mais tarde foram reconhecidos quando foi introduzido o conceito de momento estático no estudo da Estática como mostra a figura [1.1](#).

Portanto, o uso das máquinas simples vem sendo transmitido de geração em geração. Elas já estão completamente incorporadas ao cotidiano devida a facilidade de

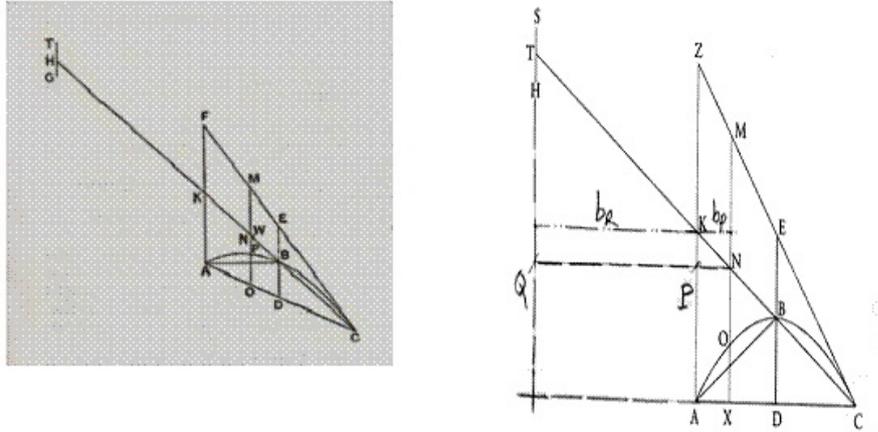


Figura 1.1: Arquimedes usa também uma alavanca inclinada (HKN), com os “pesos” representados pelos segmentos de reta MO e TG do livro de Arquimedes (op. cit.)

uso. Por exemplo, para fixar um prego, usa-se um martelo, que deve ser tanto mais pesado e de cabo longo quanto maior for o prego. O próprio tamanho do prego é escolhido para dar conta do esforço que será exigido da estrutura de madeira que está sendo construído.

Para levantar um peso como o de um automóvel, usualmente é necessário um macaco ou um guincho; este é dotado de uma roldana. Já para levantar caixotes pesados num degrau grande, pode-se usar um plano inclinado. Antigamente, os barris de cerveja eram empurrados para cima do caminhão de transporte, rolando-os num plano inclinado. A própria construção de rodovias através de regiões de serra, onde grandes altitudes devem ser vencidas, segue um ziguezague, que nada mais é que a sucessão de vários planos inclinados. Assim, pode-se enumerar muitas outras máquinas simples utilizadas no dia a dia.

As máquinas simples são equipamentos muito simples, como o próprio nome já denota que possibilitam a execução de uma tarefa com menos força ou menos desgaste físico. Alguns conceitos introduzidos no estudo da matemática podem ser usados para compreender o funcionamento de algumas máquinas simples, como será mostrado nessa dissertação. Numa sala de aula é relevante o professor intermediar os conteúdos de matemática pertinentes com as aplicações no dia a dia.

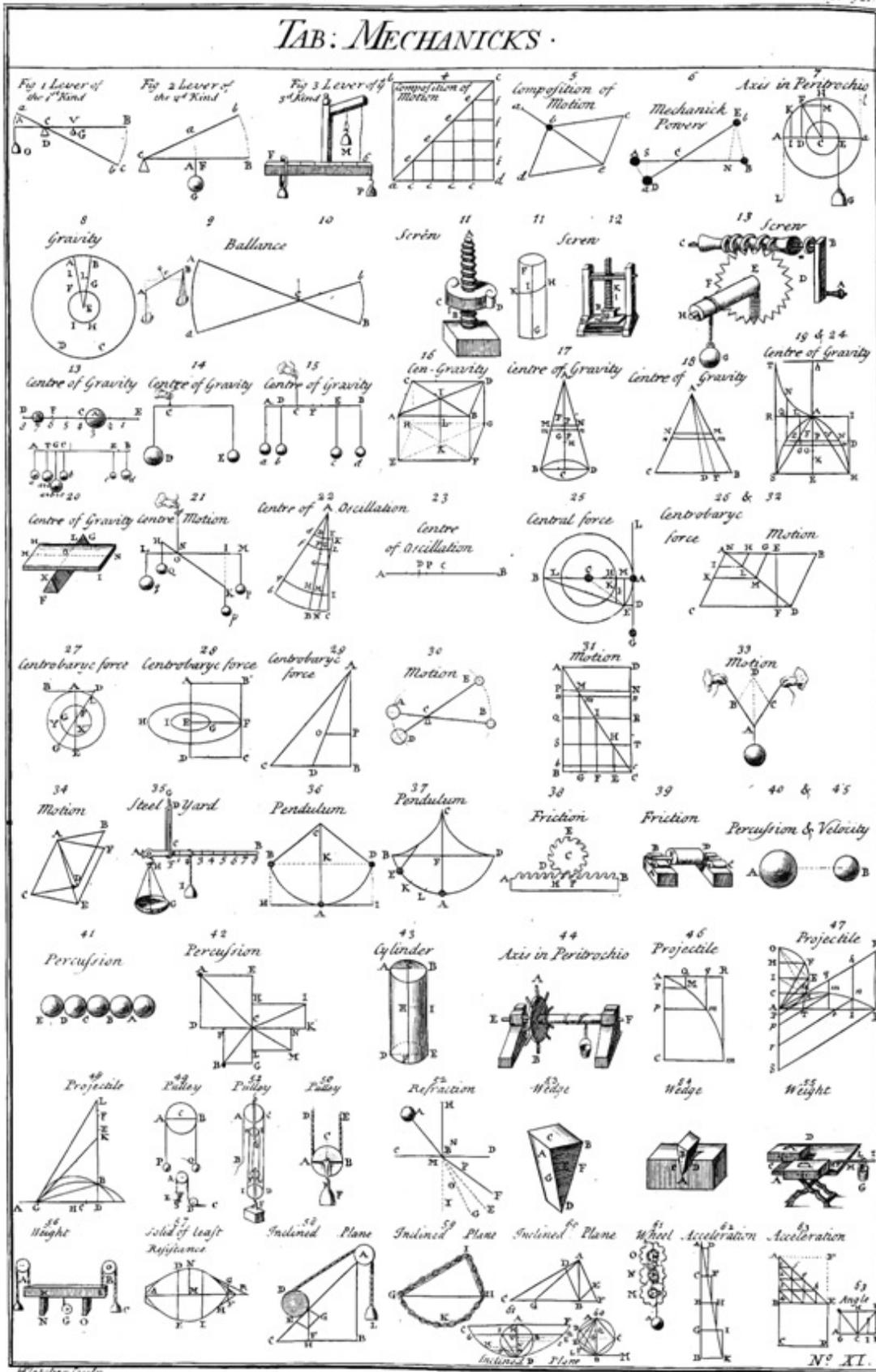


Figura 1.2: Tabla de máquinas cencielles (Cyclopædia Chambers, 1728)

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo serão explorados alguns conceitos básicos da matemática, tais como: semelhança de triângulos, teorema de Pitágoras, razões trigonométricas e inversão. Seguindo essa ordem, antes de apresentar os casos de semelhança de triângulos, é imprescindível que se entenda sobre triângulo semelhantes.

Definição 2.0.1. *Dois triângulos são semelhantes se pode rotular seus vértices A, B, C e A', B', C' de tal forma que*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

Neste caso, usa-se a notação $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. E para representar ângulo, o símbolo “ \sphericalangle ”. Para melhor ilustrar essa definição, considere a figura [2.1](#):

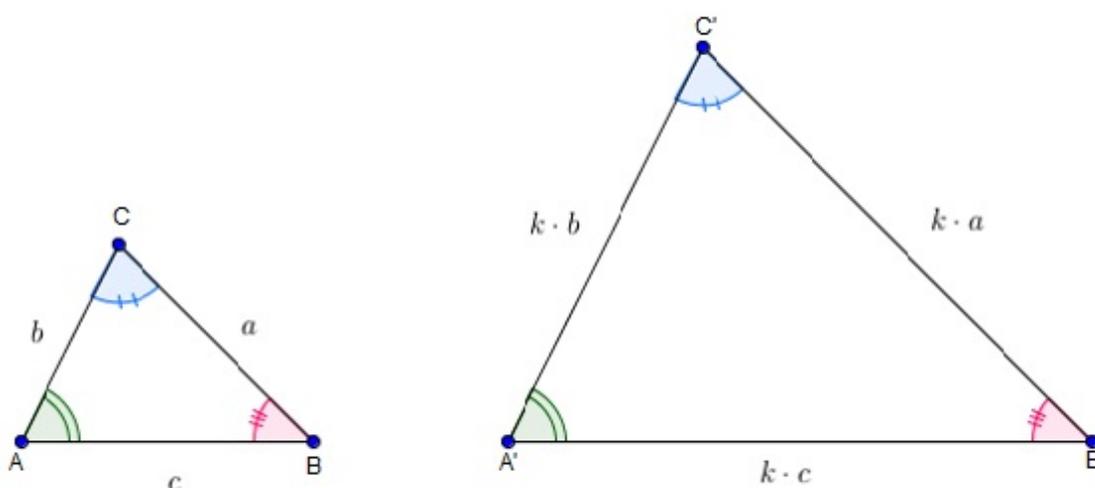


Figura 2.1: Triângulos ABC e $A'B'C'$

Observe que como os triângulos em [2.1](#) são semelhantes, então $\sphericalangle A$ tem a mesma medida que $\sphericalangle A'$, $\sphericalangle B$ tem mesma medida que $\sphericalangle B'$ e por fim, $\sphericalangle C$ tem mesma medida que

$\angle C'$. Além disso, os lados proporcionais são correspondentes, isto é, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{1}{k}$.

2.1 Casos de semelhanças

Aqui será apresentado os casos relevantes de semelhanças de triângulos para este trabalho. Para o primeiro caso, é preciso definir o caso **LAL** (Lado-ângulo-lado) de congruência de triângulos.

Definição 2.1.1. (Caso LAL de congruência) \square Se dois triângulos ABC e DEF possuem um lado, um ângulo e um lado com medidas iguais, então ABC é congruente a DEF . Contudo, é possível observar que essa ordem deve ser respeitada. Triângulos que possuem dois lados e um ângulo com medidas iguais nem sempre são congruentes. O ângulo deve estar entre os dois lados, como na figura a seguir:

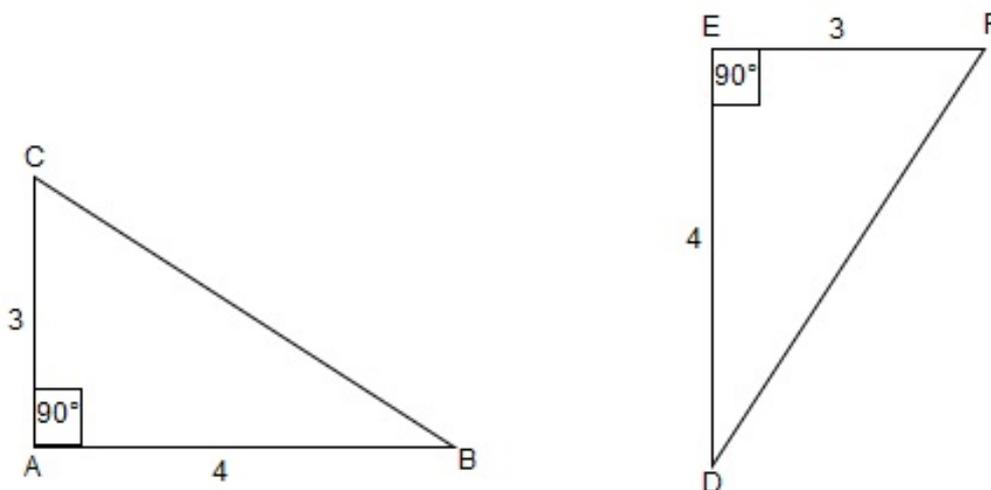


Figura 2.2: Triângulos retângulos ABC e DEF

Observe que esses triângulos configuram o caso LAL, pois pode-se notar a congruência a seguir na ordem correta: $\overline{AC} = \overline{EF} = 3$, $\angle A = \angle E = 90^\circ$ e $\overline{AB} = \overline{ED} = 4$.

¹Visitar <https://alunosonline.uol.com.br/matematica/casos-congruencia-triangulos.html>

Proposição 2.1. (Caso AAA) Se em dois triângulos ABC e DEF tem-se $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ e $\angle C = \angle F$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

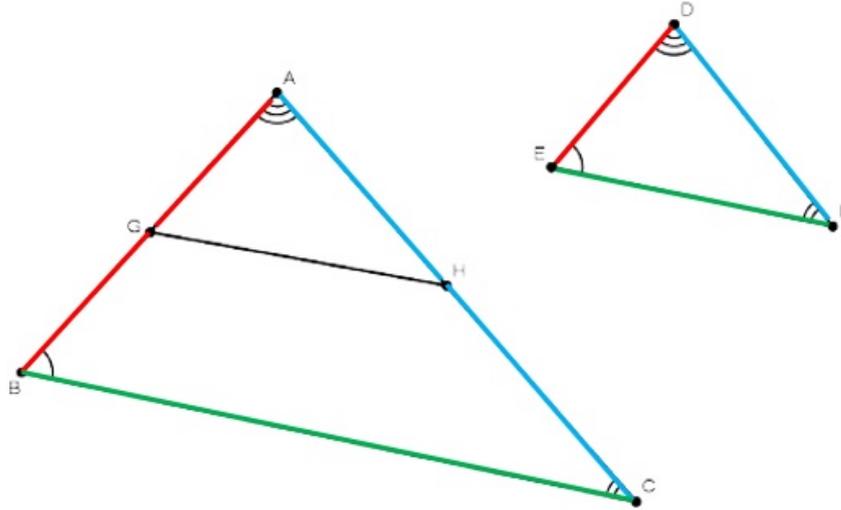


Figura 2.3: Triângulos ABC e DEF com os segmentos coloridos

Demonstração. Sejam G e H pontos nas retas AB e AC , mutuamente, de forma que $\overline{AG} = \overline{DE}$ e $\overline{AH} = \overline{DF}$. Seguindo o caso LAL de congruência de triângulos, tem-se que $\angle AGH = \angle DEF$. Logo, $\hat{A}GH = \hat{D}EF = \hat{A}BC$, o que implica que \overline{GH} e \overline{BC} são paralelas. Pelo teorema ², tem-se

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}},$$

ou seja,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}}.$$

De forma análoga,

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}.$$

□

²Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão

Proposição 2.2. (Caso LAL) Se dois triângulos ABC e DEF são tais que $\angle A = \angle D$ e $\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}$, então $\triangle ABC \sim \triangle EFG$.

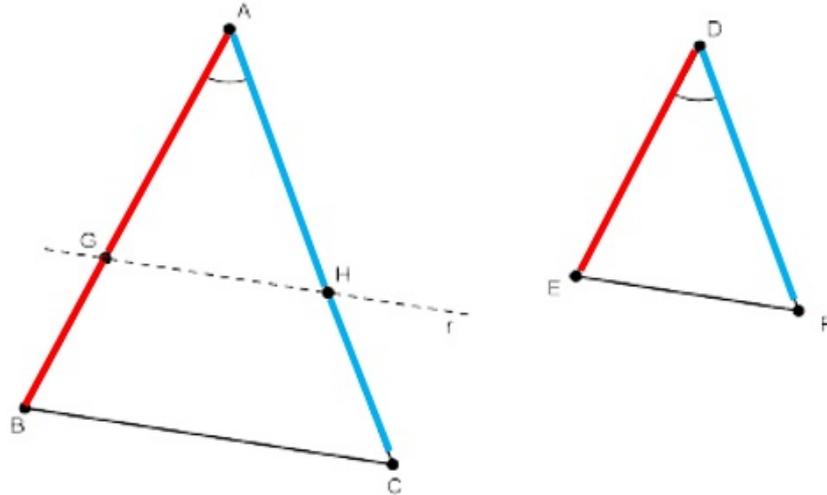


Figura 2.4: Triângulo ABC com uma reta r paralela a base BC passando pelos pontos G e H . E outro triângulo DEF .

Demonstração. Seja G um ponto na reta AB , onde $\overline{AG} = \overline{DE}$. Sejam r a reta paralela a \overline{BC} que passa por G ; e H o ponto de interseção desta reta com a reta AC . De modo que r é paralela a reta BC , segue que $\hat{A}GH = \hat{A}BC$ e $\hat{A}HG = \hat{A}CB$, o que implica em $\triangle ABC \sim \triangle AGH$ pelo o caso *AAA* de semelhança de triângulos. Como

$$\overline{AG} = \overline{DE}$$

e

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}$$

então,

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}},$$

isto é, $\overline{DF} = \overline{AH}$. Assim, pelo caso *LAL* de congruência, segue que $\hat{A}GH = \hat{D}EF$. E como $\triangle AGH \sim \triangle ABC$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. \square

E a seguir, o caso **LLL**. Esse caso é chamado de **3º caso de semelhança**.

Proposição 2.3. Se em dois triângulos ABC e DEF , tem-se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}},$$

então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

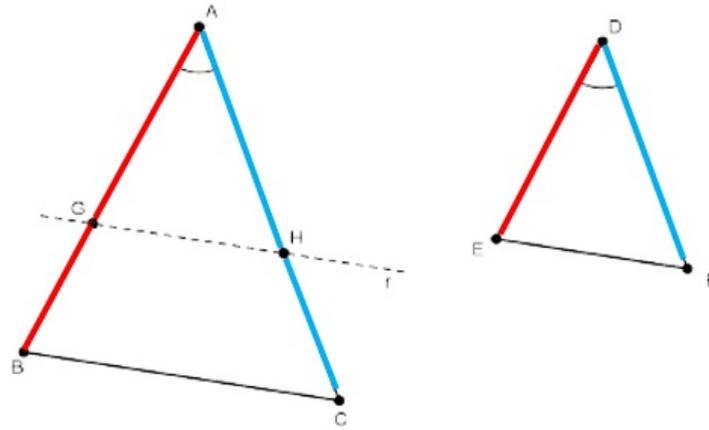


Figura 2.5: Triângulo ABC com uma reta r paralela a base \overline{BC} passando pelos pontos G e H . E outro triângulo DEF .

Demonstração. Sejam G um ponto da reta AB tal que $\overline{AG} = \overline{DE}$; e H o ponto de interseção da reta paralela a \overline{BC} que passa por G . É possível observar que $\widehat{AGH} = \angle B$. Isso implica que $\triangle AGH \sim \triangle ABC$ pelo caso AAA de semelhança. Particularmente,

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{BC}}.$$

No entanto, como

$$\overline{AG} = \overline{DE}$$

e

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}},$$

então,

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

o que implica em $\overline{EF} = \overline{GH}$. De forma análoga, é possível mostrar que $\overline{AG} = \overline{DE}$ e $\overline{AH} = \overline{DF}$. Portanto, $\triangle ABC \sim \triangle EFG$. \square

A semelhança de triângulo é fundamental, pois aplica-se para provar a proporcionalidade de segmentos, que é o mesmo para demonstrar a igualdade de duas razões. O processo consiste em construir triângulos semelhantes que tenham como lados os segmentos que figuram na tese. No exemplo a seguir, usar-se-á semelhança para provar que duas cordas de um círculo se cortam em partes proporcionais.

Exemplo 2.1.1. *Demonstrar que duas cordas de um círculo se cortam em partes proporcionais.*

Solução 2.1.1. *Tem-se que a tese é $\frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}}$.*

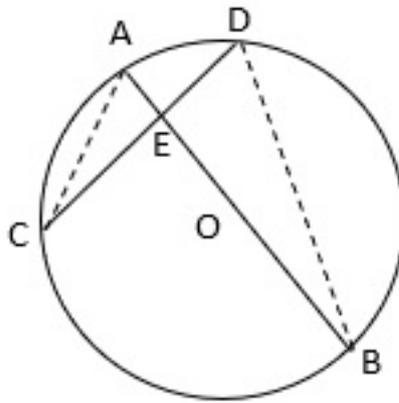


Figura 2.6: Duas cordas em um círculo

Na figura [2.6](#) trace \overline{DB} e \overline{AC} . Ficam formados os dois triângulos ACE e BDE , que são semelhantes em virtude do caso AAA de semelhança ($\angle B = \angle C$, $\angle A = \angle D$, por terem a mesma medida). Da semelhança resulta que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}$$

Portanto,

$$\overline{AE} \cdot \overline{EB} = \overline{CE} \cdot \overline{DE}$$

2.2 Trigonometria

Nesta seção será analisado: **teorema de Pitágoras, as razões trigonométricas, lei dos senos, lei dos cossenos, comprimento de arco e relações trigonométricas, lei dos senos, lei dos cossenos, comprimento de arco e relações métricas no círculo.** O uso do teorema de Pitágoras aparece em várias partes dessa dissertação, tais como na seção Parafuso, Polias e roda e eixo. As razões trigonométricas aparecem em todas as seções, logo é a principal parte. Já a lei dos senos e cossenos aparecem nos parafusos e na roda e eixo. A parte de relações métricas no círculo possibilita um melhor entendimento sobre a Inversão. E, finalmente comprimento de arco aparece na seção Alavanca. A vantagem da trigonometria é que com os mesmos dados, pode-se calcular os elementos desconhecidos do triângulo procurado, com valores numéricos exatos ou tão aproximados quanto se queira. A trigonometria é indispensável em Mecânica, Geometria Analítica, Topografia e em cálculos astronômicos.

É imprescindível iniciar falando sobre projeção de um ponto sobre uma reta, pois é o pé da perpendicular traçada do ponto à reta. Assim, na figura 2.7 tem-se que a projeção do ponto A sobre a reta r é A' . Da mesma forma que a projeção de um segmento \overline{AB} sobre a mesma reta r é o segmento determinado pelas projeções dos extremos do segmento. Assim, a projeção do segmento \overline{AB} como mostra a figura 2.7 é $\overline{A'B'}$ e a projeção de \overline{CD} é $\overline{CD'}$.

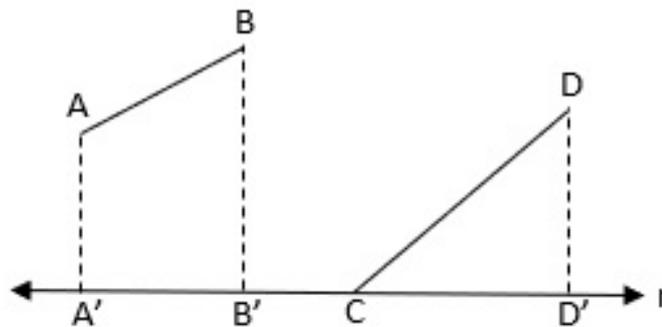


Figura 2.7: Projeções

Triângulo retângulo, em geometria, é um triângulo que possui um ângulo reto e outros dois ângulos agudos, para tanto basta que tenha um ângulo reto ³, pois a soma dos três ângulos internos é igual a um ângulo raso 180° . É uma figura geométrica muito usada na matemática, no cálculo de áreas, volumes e no cálculo algébrico. Em um triângulo retângulo, tem-se como elementos hipotenusa, catetos, projeções dos catetos e altura relativa à hipotenusa como mostra a figura 2.8

³Ângulo reto tem abertura de 90°

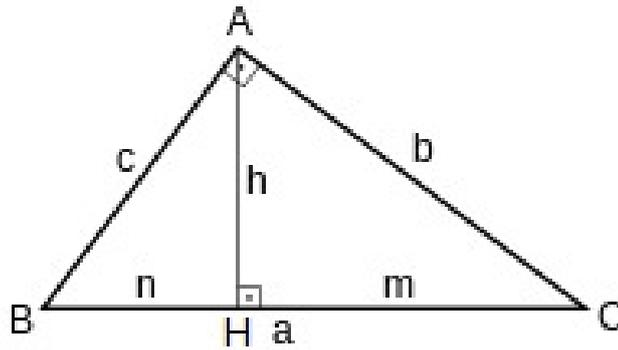


Figura 2.8: Triângulo com os pontos A , B e C , os lados opostos a (hipotenusa), b e c (catetos) e as projeções de b e c , m e n .

Definição 2.2.1. A hipotenusa é a “soma” das projeções dos catetos sobre ela⁴.

Seja o triângulo retângulo BAC como mostra a figura 2.8. Trace a perpendicular \overline{AH} sobre a hipotenusa. Então m e n serão, respectivamente, as projeções dos catetos b e c . Dá figura 2.8, tem-se

$$m + n = a. \quad (2.1)$$

Proposição 2.4. Qualquer cateto é média proporcional⁵ entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela.

Demonstração. Como hipótese tem-se que $\hat{A} = 90^\circ$ e como tese $b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$. Os triângulos AHC e BAC são semelhantes pelo caso LAL . Dessa semelhança, conclui-se que $\frac{b}{a} = \frac{m}{b}$. Portanto,

$$b^2 = am. \quad (2.2)$$

De forma análoga os triângulos AHB e BAC também são semelhantes pelo mesmo caso anterior. Logo, $\frac{c}{a} = \frac{n}{c}$. Portanto,

$$c^2 = na. \quad (2.3)$$

□

Proposição 2.5. A altura traçada sobre a hipotenusa é média proporcional entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Demonstração. Considere-se como tese $h^2 = mn$. Note-se que os ângulos \hat{HAC} e $\angle B$ são iguais por terem o mesmo comprimento C . Logo, pode-se concluir que $\triangle AHC \sim \triangle AHB$.

⁴A soma de dois segmentos de uma mesma reta, é o segmento resultante da concatenação dos dois segmentos

⁵Dada uma proporção contínua $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, o número b é denominado média geométrica ou média proporcional entre a e c . Assim, $b^2 = a \cdot c$, ou seja, $b = \sqrt{a \cdot c}$

Pela semelhança, tem-se $\frac{h}{n} = \frac{m}{h}$. Portanto,

$$h^2 = mn. \quad (2.4)$$

□

Proposição 2.6. *O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.*

Demonstração. De imediato basta somar membro a membro as equações [2.2](#) e [2.3](#). Logo, $b^2 + c^2 = am + na = a \cdot (m + n) = a^2$, pois $m + n = a$ como observado na definição 2.2.1. Assim, obtemos a equação,

$$b^2 + c^2 = a^2. \quad (2.5)$$

Conhecida como o **Teorema de Pitágoras**. □

Nota 2.1. *É possível mostrar o Teorema de Pitágoras usando semelhança de triângulos, tema visto na seção anterior. Observando o triângulo da figura [2.9](#), tem-se $\angle C = 90^\circ$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$.*

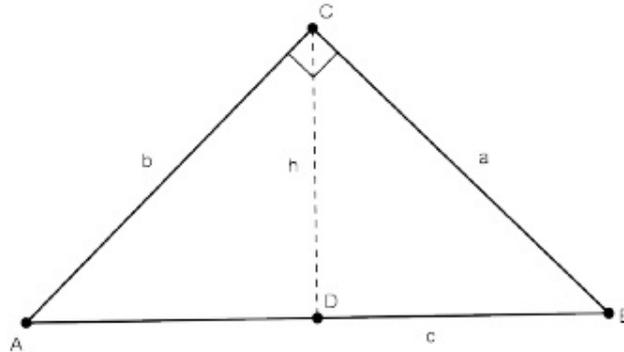


Figura 2.9: Triângulo ABC com $\angle C = 90^\circ$

Assim, pelo caso de semelhança LAL tem-se $\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle CBD$. Isso implica que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$$

e

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}.$$

Logo, $b^2 = c \cdot \overline{AD}$ e $a^2 = c \cdot \overline{DB}$. Portanto,

$$a^2 + b^2 = c \cdot (\overline{AD} + \overline{DB}) = c^2.$$

Proposição 2.7. *O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura.*

Demonstração. Multiplicando membro a membro das equações [2.2](#) e [2.3](#), obtém-se $b^2c^2 = a^2mn$. No entanto, pela equação [2.4](#), tem-se $b^2c^2 = a^2h^2$. Extraindo a raiz quadrada resulta que

$$b \cdot c = a \cdot h.$$

□

Para analisar as razões trigonométricas é necessário primeiro estudar a **razão entre os lados de um triângulo retângulo**. Sejam as semirretas AM e AN , como mostra a figura [2.10](#), que fazem no ponto de interseção A , um ângulo α . Pelos pontos C_1 , C_2 e C_3 de AN , baixe as perpendiculares C_1B_1 , C_2B_2 , C_3B_3 , com B_1 , B_2 e B_3 em AM . Deve-se notar que os triângulos retângulos obtidos AB_1C_1 , AB_2C_2 , AB_3C_3 , são semelhantes por terem o ângulo α comum.

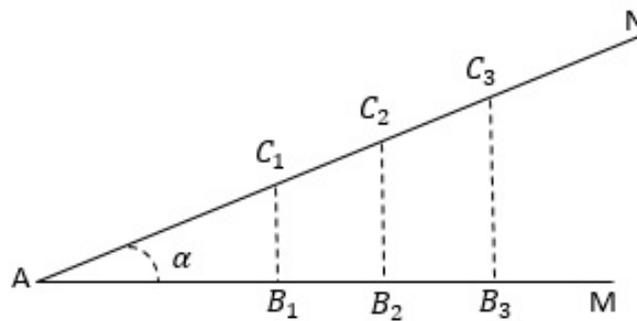


Figura 2.10: Semirretas AM e AN com ângulo α

Os seus lados homólogos são proporcionais e podendo ser escritas as seguintes proporções:

$$\begin{aligned} \frac{B_1C_1}{AB_1} &= \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3} = \dots = k \\ \frac{AB_1}{AC_1} &= \frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AB_3}{AC_3} = \dots = k' \\ \frac{B_1C_1}{AC_1} &= \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_3C_3}{AC_3} = \dots = k'' \end{aligned}$$

Deve-se observar que os coeficientes de proporcionalidades k , entre os catetos dos diversos triângulos retângulos obtidos dependem do ângulo α . E de forma análoga, para os coeficiente k' e k'' entre a hipotenusa e um dos catetos de cada um dos triângulos retângulos semelhantes.

As possíveis razões entre os 3 lados de um triângulo retângulo de lados a , b e c , são seis e que são chamadas de: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.

Todavia aqui serão abordadas as três primeiras. Então, seja o triângulo retângulo de lados a , b e c como mostra a figura [2.11](#) e ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$, sendo $\angle A = 90^\circ$.

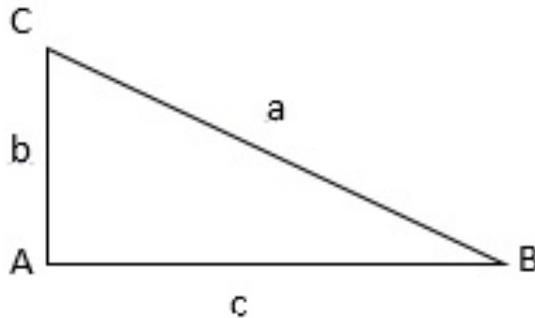


Figura 2.11: Triângulo ABC retângulo em A .

Logo, serão obtidas as razões:

$$\begin{aligned}\frac{b}{a} &= \text{sen}(B) \\ \frac{c}{a} &= \text{cos}(B) \\ \frac{b}{c} &= \text{tg}(B)\end{aligned}$$

No triângulo ABC em relação ao ângulo B , chama-se BC de hipotenusa, AB de cateto adjacente e AC de cateto oposto. Daí,

$$\begin{aligned}\text{sen}(B) &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \\ \text{cos}(B) &= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \\ \text{tg}(B) &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}\end{aligned}$$

E para finalizar essa parte de trigonometria, será discutido sobre a lei dos senos e dos cossenos em virtude das numerosas aplicações ao longo deste trabalho.

Proposição 2.8. *Em um triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.*

Demonstração. Seja o triângulo ABC , de alturas $\overline{BD} = h$ e $\overline{AE} = h'$ como mostra a figura [2.12](#).

Daí, nos triângulos retângulos ABD e CBD , tem-se $h = c \cdot \text{sen}(A) = a \cdot \text{sen}(C)$; donde:

$$\frac{c}{\text{sen}(C)} = \frac{a}{\text{sen}(A)}. \quad (2.6)$$

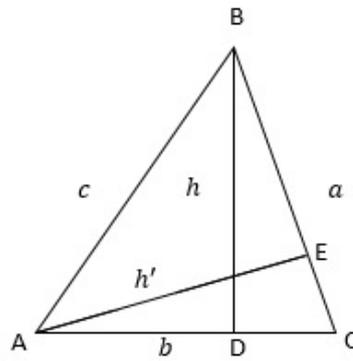


Figura 2.12: Triângulo ABC qualquer

Considerando os triângulos retângulos ABE e AEC formados pela altura AE , temos $h' = b \cdot \text{sen}(C) = c \cdot \text{sen}(B)$, logo:

$$\frac{c}{\text{sen}(C)} = \frac{b}{\text{sen}(B)} \quad (2.7)$$

Note-se que as igualdades [2.6](#) e [2.7](#) tem um membro igual, portanto é possível escrever

$$\frac{a}{\text{sen}(A)} = \frac{b}{\text{sen}(B)} = \frac{c}{\text{sen}(C)}$$

que é o **Teorema dos senos**. □

Proposição 2.9. *Em um triângulo, o quadrado de um lado oposto a um ângulo agudo é igual a soma dos quadrados dos outros lados menos o duplo produto desses lados pelo cosseno do ângulo agudo que formam.*

Demonstração. Seja o triângulo ABC e o lado a oposto ao ângulo agudo A como mostra a figura [2.13](#). A altura $\overline{CD} = h$ relativa ao vértice C ficará sobre \overline{AB} ou sobre o

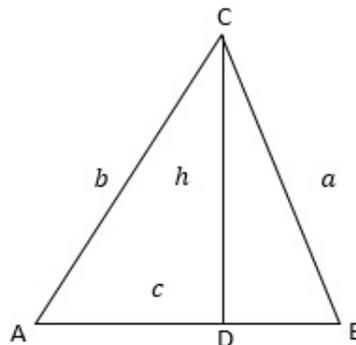


Figura 2.13: Triângulo ABC qualquer

prolongamento de AB . Em qualquer caso se obtém

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot \overline{AD}$$

No entanto, observe que do triângulo ACD , tem-se que $\overline{AD} = b \cdot \cos(A)$. Portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

Observação 2.1. Para os três lados de um triângulo acutângulo, tem-se do mesmo modo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B)$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2 \cdot b \cdot a \cdot \cos(C)$$

□

Proposição 2.10. Em um triângulo, o quadrado de um lado oposto a um ângulo obtuso é igual a soma dos quadrados dos dois outros lados mais o duplo produto desses lados pelo cosseno do suplemento do ângulo que formam.

Demonstração. Seja o triângulo ABC como mostra a figura [2.14](#). Logo, pode ser escrito que $a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot DA$. No entanto, no triângulo ADC , tem-se que

$$DA = b \cdot \cos(180^\circ - A)$$

Portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot bc \cdot \cos(180^\circ - A)$$

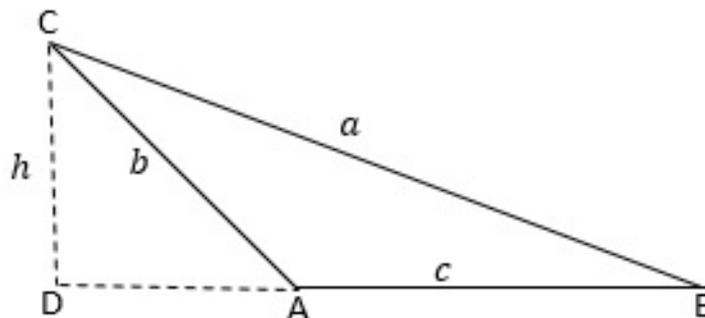


Figura 2.14: Triângulo ABC qualquer

Observação 2.2. Para os três lados de um triângulo obtusângulo, tem-se do mesmo modo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(180^\circ - A)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B)$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2 \cdot b \cdot a \cdot \cos(C)$$

□

Definição 2.2.2. Dada uma circunferência de centro O , raio r e dois pontos A e B pertencentes à circunferência, a porção da circunferência entre os pontos assinalados é um arco de circunferência.

Observação 2.3. Diz-se que a medida do arco \widehat{AB} é igual a 1 radiano⁶, ou seja, 1 rad. Assim, pode-se definir um radiano como sendo um arco onde a sua medida é a mesma do raio da circunferência que contém o arco.

Proposição 2.11. O comprimento de um arco é proporcional à medida do ângulo central.

Demonstração. Observe a figura 2.15. É conhecido que, para calcular o comprimento de uma circunferência, utiliza-se a expressão matemática $C = 2 \cdot \pi \cdot r$.

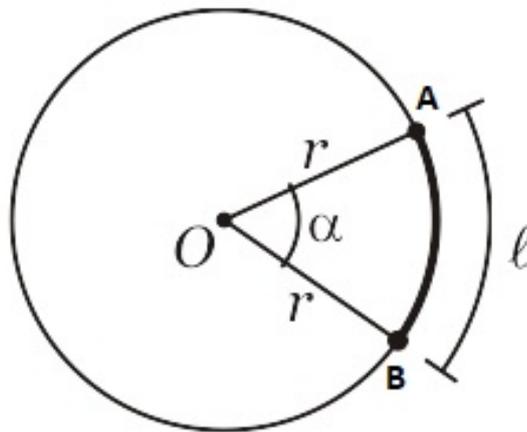


Figura 2.15: Circunferência de centro O e arco AB com comprimento ℓ

A volta completa em uma circunferência é representada por 360° . É preciso realizar uma comparação entre o comprimento da circunferência em medida linear (ℓ) e medida angular (α). Note-se que $2 \cdot \pi \cdot r$ está para 360° assim como ℓ está para α . Daí,

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{360^\circ} &= \frac{\ell}{\alpha} \\ 360^\circ \cdot \ell &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha \\ \ell &= \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha}{360^\circ} \\ \ell &= \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180^\circ} \\ \ell &= r \cdot \alpha \end{aligned}$$

onde α está em radiano.

□

⁶visitar <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/o-radiano.htm>

Proposição 2.12. Um ângulo $\angle B$ inscrito como na figura 2.16 tem a mesma medida que a metade do arco compreendido entre seus lados.

Demonstração. Deve ser considerado os três casos indicados como na figura 2.16, em acordo com a posição dos lados em relação ao diâmetro com extremo em B .

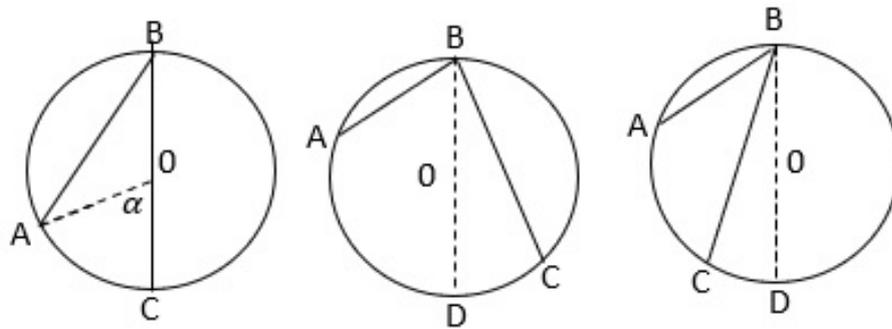


Figura 2.16: Círculos com os três casos

Primeiro caso

Um dos lados do ângulo é um diâmetro. Daí, traçando o raio \overline{OA} , fica formado o triângulo isósceles AOB , onde α é ângulo externo em O . Logo, tem-se $\angle A = \angle B$ e $\alpha = \angle A + \angle B$. Logo, $\alpha = 2 \cdot \angle B$ e $\angle B = \frac{\alpha}{2}$. Como α é central, sua medida será igual a do arco \widehat{AC} . Pode-se concluir então, em virtude da última igualdade que, a medida do ângulo B é igual a metade da medida do arco \widehat{AC} , isto é,

$$med.\widehat{B} = \frac{med.\widehat{AC}}{2}$$

Segundo caso

O centro do círculo fica no interior do ângulo. Trace-se o diâmetro \overline{BD} . Do primeiro caso, obtém-se que

$$\widehat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2}$$

e

$$\widehat{DBC} = \frac{\widehat{DC}}{2}$$

Somando membro a membro, surge

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

Terceiro caso

O centro do círculo fica no exterior do ângulo. Trace-se o diâmetro BD . Obtém-se, em virtude do 1º caso, as igualdades

$$\widehat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2}$$

e

$$\widehat{CBD} = \frac{\widehat{CD}}{2}$$

Subtraindo membro a membro, obtém-se

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

□

Proposição 2.13. *Dados A, B, M pontos de um círculo C tais que \overline{AB} é um diâmetro e $M \notin \widehat{AB}$ e $P \in \widehat{AB}$ tal que \widehat{MP} é altura no $\triangle AMB$ relativa a \widehat{AB} . Tem-se que:*

- (i) \overline{MP} é a média proporcional entre os segmentos que determina sobre o diâmetro;
- (ii) \overline{AM} é a média proporcional entre o diâmetro inteiro e sua projeção sobre ele.

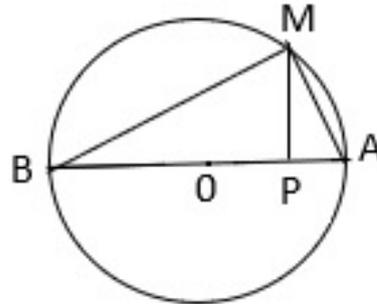


Figura 2.17: Círculo

Demonstração. (i) Seja a ordenada \overline{MP} , traçada do ponto M ao diâmetro \overline{AB} como mostra a figura 2.17. Tem-se como tese que $\overline{MP}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$. Traçando as cordas \overline{MA} e \overline{MB} , fica formado o triângulo AMB que é retângulo, por estar o ângulo M inscrito em um semicírculo. Como \overline{MP} é altura da triângulo, conclui-se que

$$\overline{MP}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

ou seja,

$$\overline{MP} = \sqrt{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}$$

(ii) Tem-se que a corda \overline{AM} é um cateto do triângulo AMB . Portanto,

$$\overline{AM}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AP}$$

isto é,

$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AP}}$$

□

2.3 Inversão

Na época da revolução industrial, no século 18, alguns mecanismos foram projetados e usados para descrever movimentos retilíneos como o que movia o pistão da máquina a vapor, inventada por James Watt em 1784. Porém, foram descritos movimentos aproximadamente retilíneos como mostra a figura 2.18. O desafio de produzir movimentos que

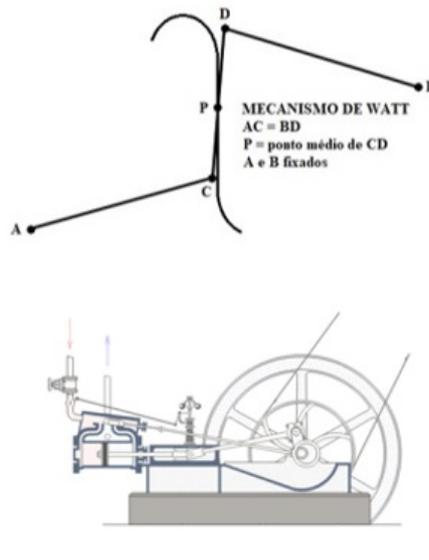


Figura 2.18: MECANISMO DE WATT

são teoricamente retilíneos, atraiu a atenção de matemáticos. Muitos esforços foram feitos até que, em 1864, Peaucellier inventou o mecanismo de 6 varetas chamado de inversor de Peaucellier, que produz uma inversão circular transformando movimentos circulares em retilíneos.

Para demonstrar a exatidão dos movimentos desses mecanismos é necessário conhecer um pouco da inversão circular, um tópico de Geometria que se serve de conceitos da geometria euclidiana plana do ensino básico, tais como, semelhança de triângulos, ângulos inscritos e semiinscritos numa circunferência e potência de ponto em relação a uma circunferência.

Antes de definir Inversão, precisa-se estabelecer as seguintes notações: denota-se por P' o inverso de P com relação a um círculo $S = C(O, r)$ (fixado) com centro em O e raio r e \overrightarrow{OP} a semirreta de extremo “O” que passa por P .

Definição 2.3.1. *Seja $S = C(O, r)$ fixado. Dado $P \neq O$, o ponto $P' \in \overrightarrow{OP}$ tal que $OP \cdot OP' = r^2$ é dito o inverso de P com relação a S .*

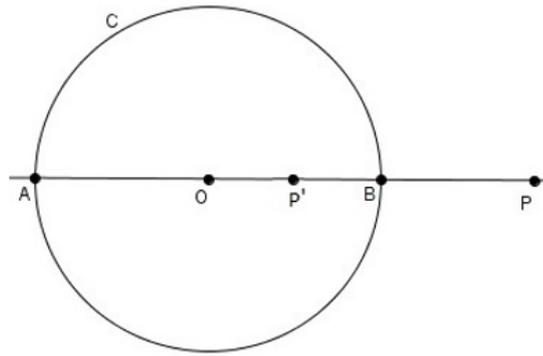


Figura 2.19: Círculo de centro O

Para que a demonstração da proposição 2.16 fique mais simples, será utilizada a definição de conjugados harmônicos.

Definição 2.3.2. *Seja \overline{AB} um segmento de reta. Então, dois pontos M e N , pertencentes à reta AB , são conjugados harmônicos em relação a A e B se satisfazem*

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}.$$

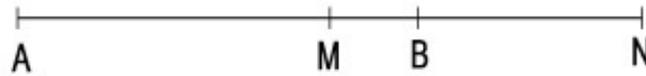


Figura 2.20: Reta orientada AB

Observação 2.4. *Se M e N são conjugados harmônicos em relação a A e B , então um deles está entre A e B e o outro não pertence ao segmento \overline{AB} .*

A partir da definição de conjugado harmônico, será enunciado e demonstrado a proposição a seguir.

Proposição 2.14. *Dois pontos P e P' são inversos em relação a circunferência $C(O, r)$ se, e somente se, são conjugados harmônicos em relação ao diâmetro AB determinado pela interseção da reta OP com a circunferência C .*

Demonstração. Sejam P e P' pontos inversos em relação a circunferência C , e A e B a interseção entre a reta $\overline{PP'}$ e a circunferência C (como mostra a figura 2.19). Pela

definição de conjugado harmônico, resulta que $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AP'}}{\overline{BP'}}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{AO + OP}{OP - OB} &= \frac{AO + OP'}{OB - OP'} \\ \frac{r + OP}{OP - r} &= \frac{r + OP'}{r - OP'} \\ (r + OP) \cdot (r - OP') &= (r + OP') \cdot (OP - r) \\ r^2 - r \cdot OP' + r \cdot OP - OP \cdot OP &= -r^2 + r \cdot OP - r \cdot OP' + OP' \cdot OP \\ 2 \cdot r^2 &= 2 \cdot OP' \cdot OP \\ r^2 &= OP' \cdot OP \end{aligned}$$

Portanto, pelo conjugado harmônico, à cada ponto P diferente da origem do plano existe um único ponto P' inverso a P em relação à circunferência de centro O como se observa na figura [2.19](#). \square

Proposição 2.15. (*Propriedades da inversão*) Considere a inversão por um círculo S de centro O . Logo,

- a) $(P')' = P$ para qualquer P .
- b) P' é interno a S se e somente se P é externo a S .
- c) se A, B e C estão nesta ordem em uma semirreta de origem O , então A', B' e C' estão na mesma semirreta em ordem reversa.

Demonstração. a) Como P' é inverso de P e é único em relação a S , então $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$. Seja X o inverso de P' em relação a S . Assim, $\overline{OP'} \cdot \overline{OX} = r^2$. Dessas duas equações obtém-se que $\overline{OP} = \overline{OX}$. Portanto, $P \equiv X$.

b) P' é interno a S . Assim, $\overline{OP'} < r$. Tem-se que $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$. Daí, $\overline{OP} \cdot r > r^2$ implica em $\overline{OP} > r$. Logo, P é externo a S . Reciprocamente, P é externo a S , logo $\overline{OP} > r$. Tem-se que $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$. Daí, $r \cdot \overline{OP'} < r^2$ implica em $\overline{OP'} < r$. Logo, P é interno a S .

c) Note-se que $\overline{OA} < \overline{OB} < \overline{OC}$. Então,

$$\begin{aligned} \overline{OA} \cdot \overline{OA'} &= r^2 \\ \overline{OB} \cdot \overline{OB'} &= r^2 \\ \overline{OC} \cdot \overline{OC'} &= r^2. \end{aligned}$$

Segue que $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$ e $\overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OC} \cdot \overline{OC'}$. Como $\overline{OA} < \overline{OB}$ e $\overline{OB} < \overline{OC}$, tem-se $\overline{OA'} > \overline{OB'}$ e $\overline{OB'} > \overline{OC'}$. Portanto,

$$\overline{OC'} < \overline{OB'} < \overline{OA'}.$$

\square

Definição 2.3.3. Duas curvas são ortogonais em um ponto de interseção, se as retas tangentes às curvas nesse ponto forem perpendiculares.

Proposição 2.16. Seja $S = C(O, r)$. Se os pontos P , A e O estão alinhados, então A e P em relação a S são inversos se, e somente se, qualquer circunferência que passa por P e A for ortogonal a S .

Demonstração. Se $A = P'$, pela proposição 2.16, P e P' são pontos inversos em relação a S . Seja a $K = C(Q, k)$ uma circunferência com centro em Q e raio k , que passa por P e P' . Como um dos pontos é interno a S , as circunferências S e K se intersectam em G e H , como mostra a figura 2.21.

Seja M o pé da perpendicular traçada de Q à reta OP , conforme a figura 2.21. Do

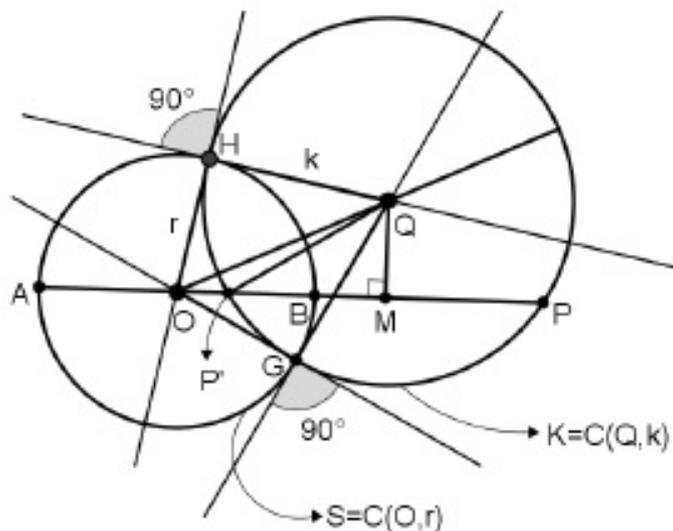


Figura 2.21: Circunferências ortogonais

triângulo retângulo OQM tem-se que

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{QM}^2 \quad (2.8)$$

Note-se que $\overline{OM} = \overline{OP'} + \overline{P'M}$. Elevando membro a membro ao quadrado obtém-se

$$\begin{aligned} \overline{OM}^2 &= (\overline{OP'} + \overline{P'M})^2 \\ &= \left(\overline{OP'} + \frac{\overline{PP'}}{2} \right)^2 \\ &= \left(\overline{OP'} + \frac{\overline{OP} - \overline{OP'}}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\overline{OP} + \overline{OP'}}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Já no triângulo QMP' , tem-se

$$\begin{aligned}\overline{OM}^2 &= \overline{QP'}^2 - \overline{P'M}^2 \\ &= k^2 - \left(\frac{\overline{PP'}}{2}\right)^2 \\ &= k^2 - \left(\frac{\overline{OP} - \overline{OP'}}{2}\right)^2\end{aligned}\tag{2.10}$$

$$\tag{2.11}$$

Substituindo as equações (2.9) e (2.10) em (2.8), será obtido

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} + k^2$$

Como por hipótese $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$, logo

$$\overline{OQ}^2 = r^2 + k^2$$

o que implica que os triângulos OHQ e OGQ são retângulos em \hat{H} e \hat{G} , respectivamente. Reciprocamente, considere-se $K = C(Q, k)$ uma circunferência ortogonal a $S = C(O, r)$ e que passa por P e A . Então, se H é um ponto de interseção entre S e K , a reta s tangente à K no ponto H é perpendicular à reta s' tangente à S no ponto H . Assim, a reta s passa por O . Como $\overline{OH}^2 = r^2$, por Potência de Ponto, surgirá

$$\overline{OP} \cdot \overline{OA} = \overline{OH}^2 = r^2$$

mostrando que os pontos P e A são inversos em relação a S . □

Proposição 2.17. (Equivalência para inversão). *Seja $S = C(O, r)$, AB um diâmetro de S e $P, P' \in \overrightarrow{OA}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- a) P e P' são inversos com relação a S .
- b) $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$.
- c) Qualquer círculo que passa por P e P' é ortogonal a C .
- d) P e P' são conjugados harmônicos com relação a A e B .

Demonstração. a) \Rightarrow b) segue imediatamente da definição 2.3.1;

b) \Rightarrow c) segue imediatamente da proposição 2.16;

c) \Rightarrow d) segue imediatamente da proposição 2.16;

d) \Rightarrow a) segue imediatamente da proposição 2.14. □

Proposição 2.18. *Seja $S = C(Q, r)$. A inversa em relação a S de uma reta s que não passa por Q , é uma circunferência que passa por Q (a menos do ponto Q).*

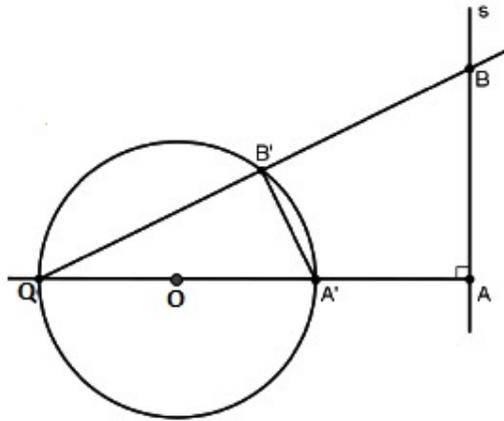


Figura 2.22: Inversão da reta que não passa por Q .

Demonstração. Seja s como no enunciado. Seja A o ponto de interseção de uma reta r a uma reta perpendicular e que passa por Q . Sejam A' e B' os inversos de A e B , respectivamente, como mostra a figura 2.22. Então $\overline{QA} \cdot \overline{QA'} = \overline{QB} \cdot \overline{QB'} = r^2$, o que implica em

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{QB'}}{\overline{QA'}}$$

e como $B'\widehat{Q}A' = B\widehat{Q}A$, conclui-se que os triângulos AQB e $A'QB'$ são semelhantes.

Logo $A'\widehat{B}'Q$ é reto, o que nos mostra que B' pertence a uma circunferência $K = (O, \overline{QO})$ que tem o segmento $\overline{A'Q}$ como diâmetro. \square

Da proposição anterior decorre imediatamente que “Se s' é uma reta tangente a circunferência $K = (O, \overline{QO})$ no ponto Q , então s' é paralela a s ”. A seguir, denota-se por $Inv(s)$ como uma reta s invariante.

Proposição 2.19. *Seja $S = C(Q, r)$. A inversa em relação a S que passa por Q , é a própria reta s , ou seja, uma reta é invariante quando esta passa pelo centro de inversão.*

Demonstração. Se $P \neq Q$ é um ponto da reta s , então, o inverso P' de P pertence à semirreta \overrightarrow{OP} , logo como P e Q pertencem à s , então $P' \in s$. Portanto $s' = Inv(s)$ \square

Proposição 2.20. *Seja $S = C(Q, r)$. A inversão em relação a S de uma circunferência $K = C(O, k)$ que passa por Q é uma reta.*

Demonstração. Seja P' um ponto pertencente ao diâmetro \overline{QP} tal que $\overline{QP} \cdot \overline{QP'} = r^2$. Considere uma reta, denominada s , que contém P' e é perpendicular a \overline{QP} , conforme mostra figura 2.23. Seja B um ponto da circunferência $K = (O, \overline{QO})$, é possível provar que B' , pertencente ao segmento \overline{QB} , é inverso de B . Como os triângulos $OP'B'$ e OBP

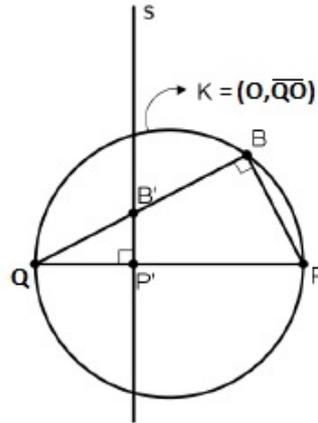


Figura 2.23: Inversão de circunferência que passa por Q

são semelhantes, obtém-se

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OP}}$$

Daí,

$$\overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$$

O que mostra $B' = Inv(B)$. Logo $s = Inv(K)$. \square

Observação 2.5. Considere S a circunferência de inversão, foi mostrado que a inversa de uma circunferência que não passa por Q é uma circunferência que também não passa por Q .

A partir do próximo ponto, será analisada uma nova perspectiva sobre uma aplicação direta em relação aos elementos vistos até agora.

Definição 2.3.4. O inversor de Peaucellier é um articulado usado para inverter curvas, em particular, para transformar movimentos circulares em retilíneos ou vice-versa.

Esse dispositivo é composto de 6 varetas articuladas como mostra a figura [2.24](#). Nesse caso, tem-se $b > a$, que formam um retângulo $BOAP'$ e um losango $APBP'$. As duas varetas maiores ficam presas num ponto O de uma placa, mas pivotam juntas. Os pontos P e P' ficam sempre em linha reta com O . Por quê? Basta mostrar que os pontos P e P' são inversos um do outro pela circunferência de centro O e raio $\sqrt{b^2 - a^2}$. Observe que P coincidindo com P' implica intuitivamente no raio $\sqrt{b^2 - a^2}$. Traçando uma circunferência de centro em A e raio a e \overline{OQ} sendo uma de suas tangentes por O em qualquer posição do mecanismo, tem-se que $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OQ}^2 = b^2 - a^2$, pois $m(\angle OQA) = 90^\circ$ como mostra a figura [2.25](#). Observe que se P percorre um arco de circunferência que passa por O , então o ponto P' percorrerá um segmento de reta. Para isso, acrescentando uma vareta em P presa na outra extremidade em algum ponto C fixado

como o domínio e imagem o plano menos a origem.

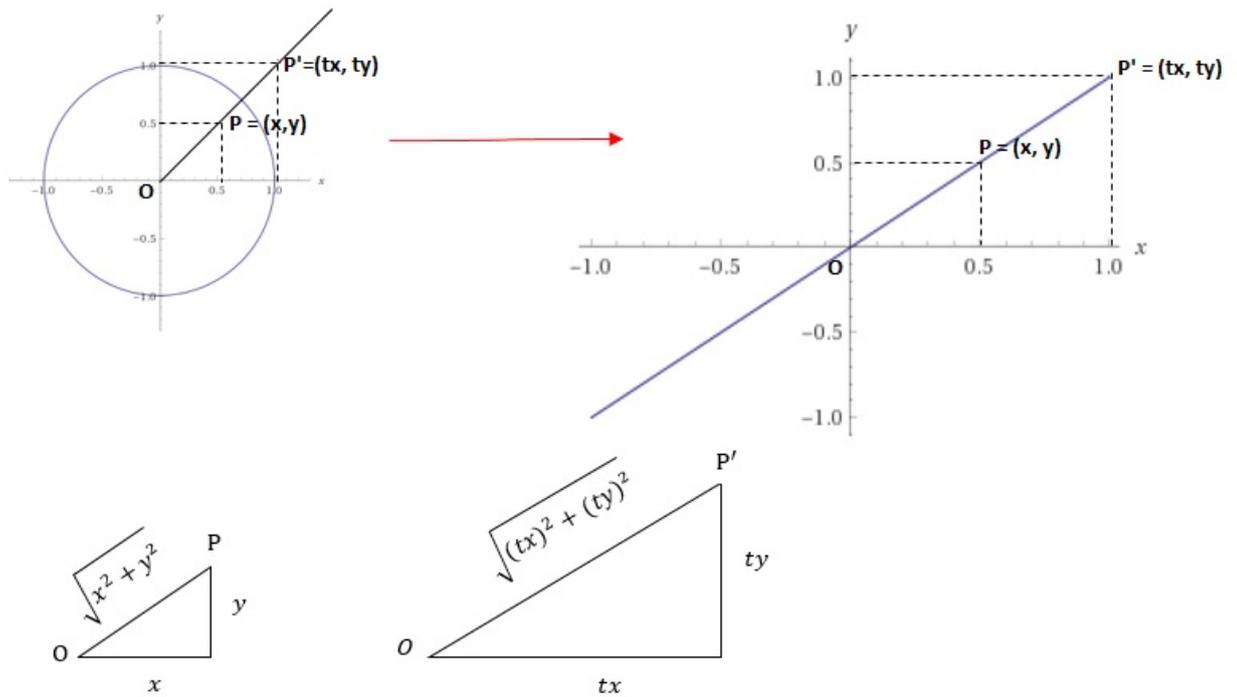


Figura 2.27: Configuração das coordenadas P e P' no círculo e no plano cartesiano.

Demonstração. Seguindo a ordem da figura [2.27](#), temos que uma das coordenadas será o próprio $P = (x, y)$ e a outra será considerado um número t positivo, logo $P' = (tx, ty)$. Dessa forma é possível fazer por semelhança de triângulos ou usar a definição de inversão. Usando a definição de inversão e considerando um círculo de raio 1, temos que $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = 1$. Tanto \overline{OP} como $\overline{OP'}$ são hipotenusas dos triângulos formados na figura [2.27](#), logo

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} &= 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{t \cdot (x^2 + y^2)} &= 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} \cdot |t| \cdot \sqrt{x^2 + y^2} &= 1 \\ |t| \cdot (\sqrt{x^2 + y^2})^2 &= 1 \\ |t| &= \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} \\ |t| &= \frac{1}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Portanto, para encontrar a imagem de uma curva sob a ação de inversão, basta usar a mudança de parâmetro descrita por

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

□

Agora que já é compreensível como se dá a **expressão geral ou algébrica da inversão**, é perfeitamente plausível a utilização dos diversos exemplos a seguir, a fim de torná-los mais fáceis de serem entendidos.

Exemplo 2.3.1. *Determine a imagem de cada um dos seguintes pontos sob a inversão em C .*

a) $(4, 1)$

b) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

Solução 2.3.1. a) *A imagem sob a inversão em C para o ponto $(4, 1)$ é $(\frac{4}{4^2 + 1^2}, \frac{1}{4^2 + 1^2}) = (\frac{4}{17}, \frac{1}{17})$, conforme ilustra a figura 2.28.*

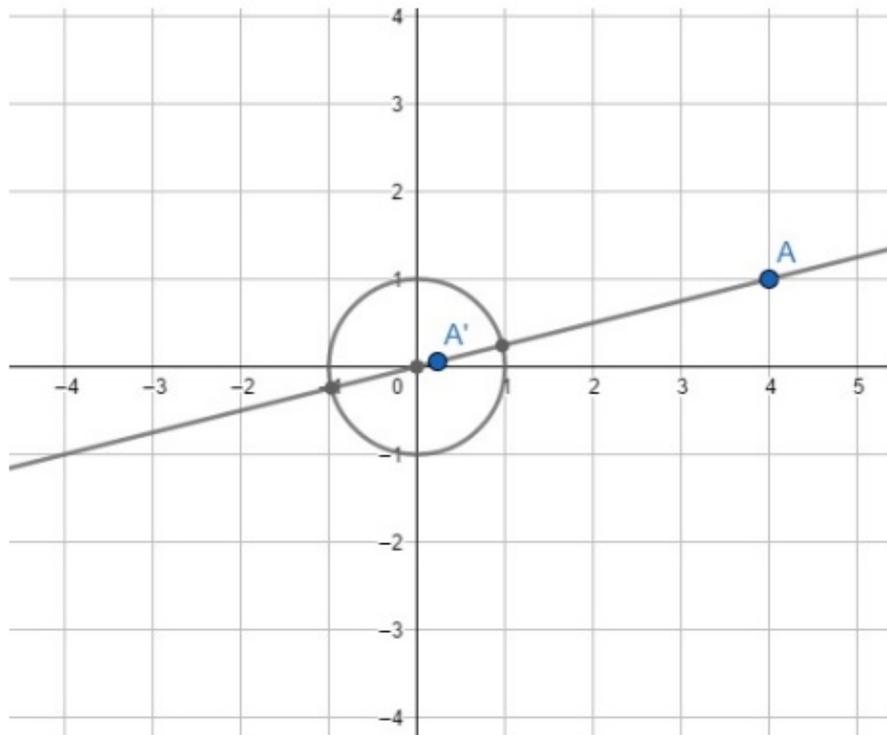


Figura 2.28: Inversão sobre o ponto $A = (4, 1)$

b) *De forma similar a letra a).*

Observação 2.6. *Usando esta relação entre (x, y) e (x', y') , pode-se encontrar a imagem de uma curva sob inversão em C' da mesma maneira como obtém-se a imagem de uma curva na geometria afim. Entretanto, a principal diferença deve recair no cuidado de lembrar anteriormente, que a inversão não é definida na origem (o centro de inversão) e que nenhum ponto é mapeado para a origem.*

Exemplo 2.3.2. *Determine a imagem sob a inversão em C' da reta $y = 2x$ menos a origem.*

Solução 2.3.2. *Seja ℓ a reta com a equação $y = 2x$ com origem diferente de zero. Pela estratégia acima, a imagem de ℓ sob inversão em C' é a curva cuja equação é*

$$\frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} = \frac{2 \cdot x'}{(x')^2 + (y')^2}$$

$$y' = 2x'$$

Como a origem tem que ser excluída da reta antes que se possa encontrar sua imagem, portanto a origem deve ser excluída da imagem. Segue-se que a imagem de ℓ sob a inversão é ℓ em si (perfurado na origem em cada caso). O fecho topológico da imagem da inversão é um novo plano $X'OY'$.

Exemplo 2.3.3. *Seja a reta com a equação $x + y = 1$.*

- (a) *Determine a imagem de ℓ sob inversão em C .*
- (b) *Explique por que os pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ estão sobre ℓ e sobre sua imagem.*
- (c) *Esboço ℓ e sua imagem em um único diagrama.*

Solução 2.3.3. (a) *Segue-se da estratégia anterior que a imagem sob inversão em C' da reta com equação $x + y = 1$ é o curva cuja equação é*

$$\frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} + \frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} = 1$$

Reescrevendo a equação, obtém-se

$$x + y = x^2 + y^2$$

Completando quadrado, tem-se

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Esta é a equação de um círculo que passa através da origem. Então o fecho da imagem requerida é o círculo com centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e raio $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) *Os pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ se encontram, desde que suas coordenadas satisfaçam a equação de ℓ . Como os dois pontos estão em C' , eles são inalterado sob inversão em relação a C' . Por isso, ambos também se encontram na imagem de ℓ sob a inversão.*

(c) *A imagem de ℓ é o círculo com equação (1), perfurado na origem. Da parte (b) esta imagem passa pelos pontos com coordenadas $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Segue-se que a imagem é exclusivamente determinada pelos três pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$, como mostrado na figura*

2.29.

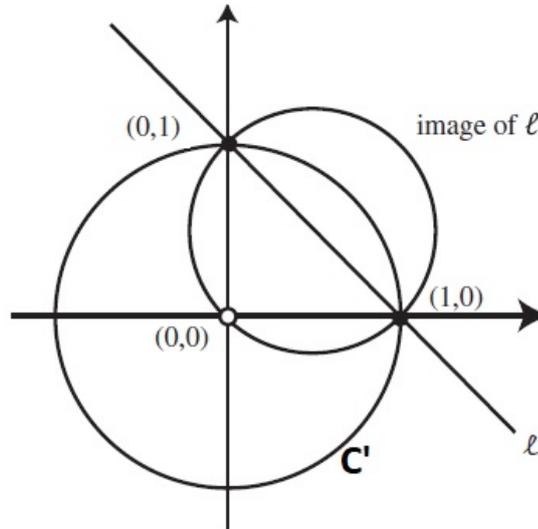


Figura 2.29: Imagem passando pelos pontos com coordenadas $(1,0)$ e $(0,1)$

Exemplo 2.3.4. Determine a imagem sob inversão em C' do círculo com centro $(2,2)$ e raio 1.

Solução 2.3.4. O círculo com centro $(2,2)$ e raio 1 tem equação $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1^2$ o que é possível reescrever da forma $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$.

Exemplo 2.3.5. Determine a imagem sob inversão em C da linha $2x + 4y = 1$.

Solução 2.3.5. Seja (x, y) um ponto arbitrário na linha $2x + 4y = 1$, e seja (x', y') a imagem de (x, y) sob inversão em C . Então $(x, y) = \left(\frac{x'}{(x')^2 + (y')^2}, \frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} \right)$. Como x e y estão relacionados pela equação $2x + 4y = 1$, segue-se que x' e y' estão relacionados pela equação

$$\frac{2x'}{(x')^2 + (y')^2} + \frac{4y'}{(x')^2 + (y')^2} = 1$$

Multiplicando ambos membros por $((x')^2 + (y')^2)$, obtém-se

$$2x' + 4y' = (x')^2 + (y')^2$$

$$(x')^2 - 2x' + (y')^2 - 4y' = 0$$

Completando o quadrado, tem-se

$$(x' - 1)^2 - 1 + (y' - 2)^2 - 4 = 0$$

$$(x' - 1)^2 + (y' - 2)^2 = 5$$

Logo, uma equação do círculo.

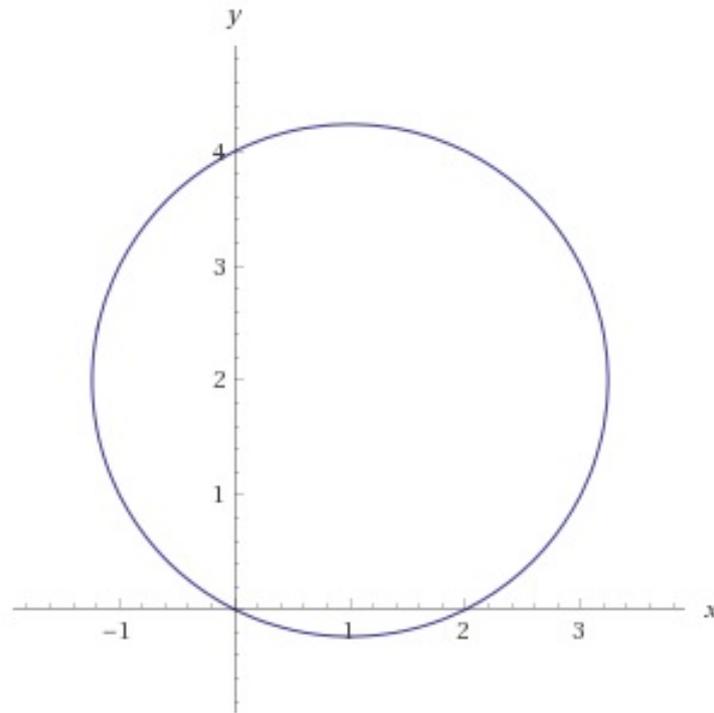


Figura 2.30: Equação do círculo com centro $(1, 2)$ e raio $\sqrt{5}$

Exemplo 2.3.6. *Sob inversão em um círculo com o centro O , determine:*

- (a) *uma reta que não passa pela função O em um círculo com $O \neq 0$;*
- (b) *uma reta com $O \neq 0$ que tem função em si mesma.*

Solução 2.3.6. *a) Se é uma linha que não passa pela origem, então tem uma equação da forma $ax + by + c = 0$ onde c é diferente de zero. Usando a mudança de parâmetro, constata-se que a imagem de sob inversão em C tem equação*

$$\frac{ax}{x^2 + y^2} + \frac{by}{x^2 + y^2} + c = 0$$

Como c é diferente de zero, podemos reescrever isso na forma

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{a}{c}\right)x + \left(\frac{b}{c}\right)y = 0$$

Completando quadrado, tem-se:

$$\left(x - \frac{a}{2c}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{a^2}{4c^2} - \frac{b^2}{4c^2} = 0$$

$$\left(x - \frac{a}{2c}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2c}\right)^2 = \frac{a^2}{4c^2} + \frac{b^2}{4c^2}$$

$$\left(x - \frac{a}{2c}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4c^2}$$

Esta é a equação de um círculo C através da origem. Se a origem é removida deste círculo, então cada ponto restante é a imagem de um ponto A no qual o \overline{OA} se intercepta com ℓ como mostra a figura 2.31. Segue-se que a imagem de ℓ é todo o círculo, exceto a origem.

b) Embora também seja possível usar mudanças de parâmetros e coordenadas para provar

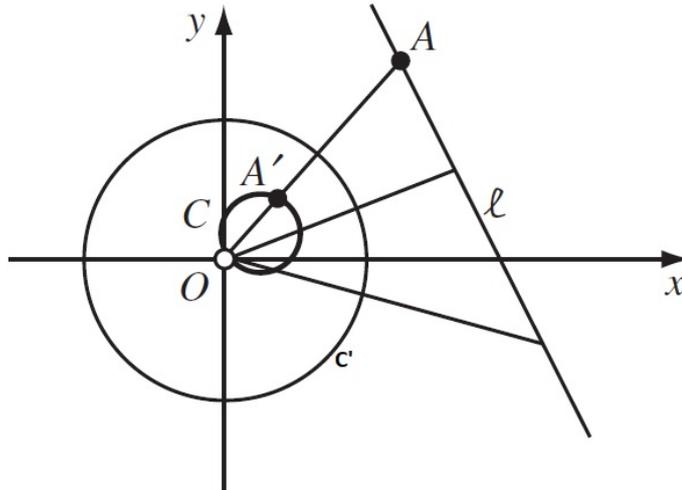


Figura 2.31: Círculo C , c' e reta ℓ

essa parte, é mais fácil trabalhar diretamente a partir da definição de inversão. De fato, se é uma reta com $O \neq 0$, então cada ponto dentro de C é a imagem de um ponto fora de C , e cada ponto do lado de fora de C é a imagem de um ponto de dentro de C .

Exemplo 2.3.7. Seja C um círculo com centro $(-2, 0)$ e raio 2. Determine a imagem de C sob a inversão em C' .

Solução 2.3.7. O círculo C tem equação geral da forma $(x+2)^2 + y^2 = 2^2$. Desenvolvendo essa equação, tem-se $x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 4 + y^2 = 4$ o que implica em $x^2 + y^2 + 4x = 0$. Daí, se deduz que a imagem de C sob a inversão C' será da forma

$$\left(\frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} \right)^2 + \left(\frac{y'}{(x')^2 + (y')^2} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{x'}{(x')^2 + (y')^2} \right) = 0$$

Multiplicando ambos os lados por $((x')^2 + (y')^2)$, obtém-se

$$\left(\frac{(x')^2}{(x')^2 + (y')^2} \right) + \left(\frac{(y')^2}{(x')^2 + (y')^2} \right) + 4x' = 0$$

o que implica em

$$\frac{(x')^2 + (y')^2}{(x')^2 + (y')^2} + 4x' = 0$$

logo,

$$1 + 4x' = 0$$

A imagem do círculo C é a reta ℓ com equação $x = -1/4$. Na figura 2.32 é fácil perceber que cada ponto de ℓ é a imagem de algum ponto em C .

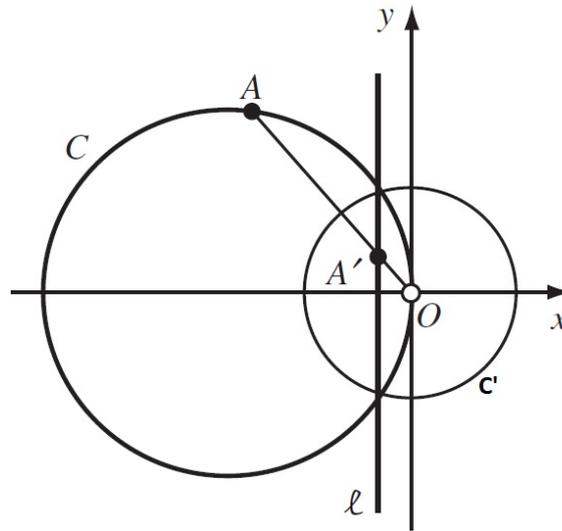


Figura 2.32: Círculo C com imagem ℓ

Capítulo 3

Funcionamento das máquinas simples

Nesse presente capítulo será discutido o funcionamento das máquinas simples. Aqui serão vistas cada expressão matemática que garante o desempenho dessas máquinas.

As principais máquinas a serem estudadas serão: **Alavanca, Plano Inclinado, Cunha ou Machado, Parafuso, Polias e Roda e eixo**. Para isso, será considerado daqui por diante **vetor** como a expressão matemática de uma força e que portanto, possui módulo, sentido e direção. Além disso, será representado por \vec{a} .

Para esse capítulo é preciso ter conhecimento prévio sobre **as leis de Newton, trabalho e momento de uma força**.

O comportamento de um corpo quando sujeito a forças externas é regido pelas leis de Newton:

1º Lei: “Todo corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, a menos que seja obrigado a modificar seu estado de movimento pela ação de forças externas”.

2º Lei: “A modificação do movimento é proporcional à força atuante, ou seja, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, onde \vec{F} = força, m = massa e \vec{a} = aceleração.”

3º Lei: “À toda ação corresponde uma reação igual ou oposta equivalentemente, as ações mútuas de dois corpos são sempre dirigidas em sentidos opostos”.

A primeira lei estabelece justamente o que se havia dito anteriormente, isto é, para se modificar a grandeza que quantifica o estado de movimento do corpo é necessário um agente externo exercendo uma força sobre o corpo. Suponha-se, por exemplo, um cometa deslocando-se em movimento retilíneo uniforme. Ele continuará neste estado até chegar nas proximidades de um planeta, que através da força gravitacional, modificará seu estado de movimento fazendo com que mude em módulo e direção. Esta ideia que foi apresentada, embora bastante lógica, não era vista assim na época de Galileu, pois acreditava-se que para manter um corpo em movimento retilíneo uniforme era necessária a ação de agentes externos. O único estado natural e espontâneo para um corpo era o

repouso.

A força também é necessária para alterar a forma de um corpo. Durante uma deformação as partículas deste corpo são aceleradas até atingirem uma nova situação de equilíbrio. O equilíbrio de um corpo pode ser de tipos diferentes. Inicialmente, um corpo só estará em equilíbrio quando a resultante das forças agindo sobre ele for nula. O equilíbrio é dito estável quando uma pequena perturbação tira o sistema de equilíbrio, mas a vizinhança do corpo age de forma a restaurar o equilíbrio. Já o instável, a vizinhança age no sentido de amplificar este efeito. É necessário considerar que a quantidade de matéria num determinado corpo não se modifica. Neste caso, ação de uma ou mais forças leva a uma aceleração:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

e a constante de proporcionalidade entre força e aceleração é denominada massa do corpo.

Das três leis de Newton, a terceira é aquela que sem dúvida exige um maior esclarecimento. Isso por descrever uma propriedade importante das forças: sua ocorrência em pares, isto é, toda ação corresponde uma reação de mesma intensidade, porém de sentido oposto. Um fato importante a ser observado é que ação e reação não se cancelam (ou se equilibram) porque agem em corpos diferentes.

O termo **trabalho** é utilizado quando quantifica-se o resultado da ação de uma força, ou seja, o trabalho mecânico. Uma força aplicada em um corpo realiza um trabalho quando produz um deslocamento no corpo. Utiliza-se a letra grega τ (tau) para expressar trabalho. A unidade de trabalho no *SI* é o *Joule* (*J*).

Quando uma força tem a mesma direção do movimento o trabalho realizado é positivo. Entretanto, quando uma força tem direção oposta ao movimento o trabalho realizado é negativo. O trabalho resultante é obtido através da soma dos trabalhos de cada força aplicada ao corpo ou pelo cálculo do trabalho da força resultante aplicado ao corpo. Se essa força for paralela ao deslocamento, deve-se calcular o trabalho como

$$\tau = F \cdot d$$

Caso essa força não seja paralela, podemos utilizar a seguinte expressão

$$\tau = F \cdot d \cdot \cos(\theta)$$

O **momento** de uma força fornece a medida da tendência dessa força, capaz de provocar a rotação de um corpo em torno do ponto ou do eixo. Por exemplo, considere-se a força horizontal F_x que age perpendicularmente ao cabo de chave inglesa e está localizada a uma distância d_y do ponto O como mostra a figura [3.1](#)

Observa-se que essa força tende a provocar um giro do tubo em torno do eixo z . Portanto, quanto maior a força ou a distância d_y , maior será o efeito de rotação. Essa

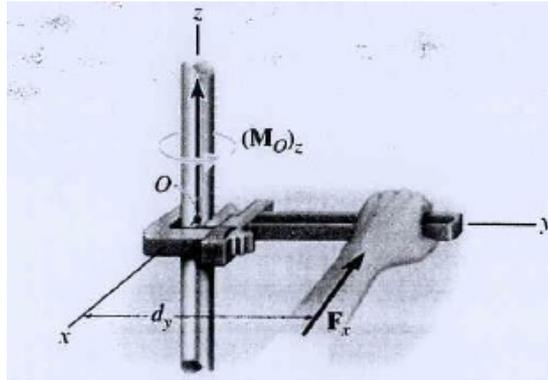


Figura 3.1: Força horizontal F_x que age perpendicularmente ao cabo de chave inglesa

tendência de rotação provocada pela força F_x algumas vezes é chamada de *torque*, mas normalmente é denominada **momento de uma força ou simplesmente momento** $(M_O)_z$. Observe-se que o eixo do *momento* z é perpendicular ao plano $(x - y)$, o qual contém tanto F_x quanto d_y , e que intercepta o plano no ponto O . Considere-se agora a aplicação da força F_z na chave inglesa de figura [3.2](#).

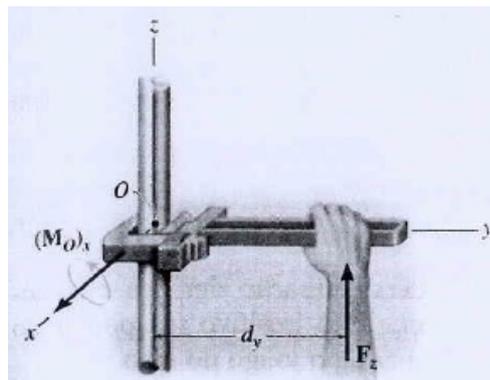


Figura 3.2: Aplicação da força F_z na chave inglesa

Essa força não provocará rotação no tubo, em torno do eixo z . Em vez disso, a tendência de giro do tubo será em torno do eixo x . É necessário observar que, embora não seja possível realmente ‘girar’ o tubo dessa maneira, F_z ainda provocará uma tendência de rotação, e assim é produzido o momento $(M_O)_x$. Da mesma maneira que no caso anterior, a força e a distância d_y estão contidas no mesmo plano $(y - z)$ que, por sua vez, é perpendicular ao eixo x de momento. Finalmente, se uma força F_y é aplicada à chave como mostra na figura [3.3](#), nenhum momento é produzido em relação ao ponto O . Nesse caso haverá ausência total de giro do tubo, uma vez que a linha de ação da força passa pelo ponto O e, em consequência, nenhuma tendência de rotação será possível. Generalizando toda essa discussão, é preciso considerar a força F e o ponto O , que estão situados no plano como mostra a figura [3.4](#)

O momento M_O em relação ao ponto O , ou ainda em relação a um eixo que passa

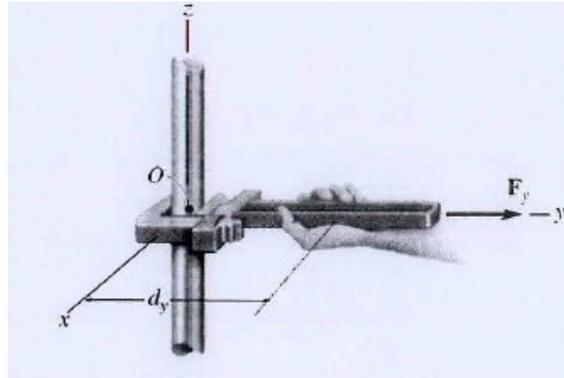


Figura 3.3: Força F_y aplicada na chave inglesa.

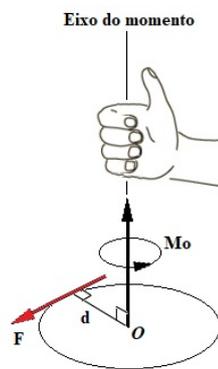


Figura 3.4: Força F e ponto O situados no plano

por O perpendicularmente ao plano, é uma *quantidade vetorial*, uma vez que depende de sua intensidade ou módulo, direção e sentido. Logo, a expressão que define isso será dada por

$$M_O = F \cdot d,$$

em que d , a distância perpendicular até a linha de ação da força, é o braço do momento. A **direção e o sentido** de M_O devem ser determinados pela ‘regra da mão direita’. Para aplicação dessa regra, os dedos da mão direita devem ser curvados de tal forma que acompanhem o sentido de rotação da força, caso esta possa girar em torno do ponto O , como visto na figura 3.4. O polegar, então, se orienta ao longo do eixo do *momento*, determinando a direção e o sentido do vetor momento, que nesse caso é dirigido para cima e é perpendicular ao plano sombreado contendo F e d .

Observação 3.1. *O momento de uma força nem sempre provoca rotação. Por exemplo, a força F tende a girar a viga-mestra no sentido horário em relação ao suporte A , com momento $M_A = F \cdot d_A$. A rotação efetiva ocorreria se o suporte em B fosse movido. Da mesma forma, F cria uma tendência de rotação da viga-mestra no sentido anti-horário em relação a B , com um momento $M_B = F \cdot d_B$. Nesse caso, o suporte em A evita a rotação como mostra a figura 3.5.*

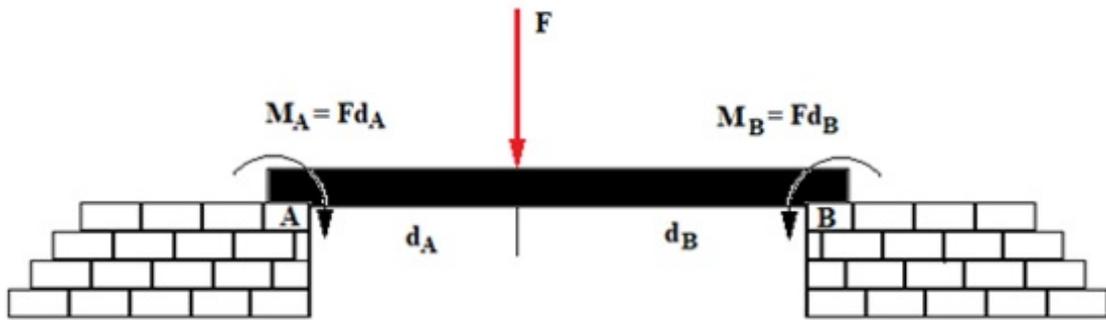


Figura 3.5: Força F tendendo girar a viga-mestra no sentido horário.

Os conceitos (Preliminares, leis de Newton, trabalho e momento de uma força) vistos anteriormente, surgirão com frequência em cada máquina simples que será analisada. Desde que máquinas são usadas para exercer uma grande força pela aplicação de uma força menor, uma máquina pode ser vista como tendo uma vantagem de força ou **vantagem mecânica**. Existe dois tipos: Vantagem Mecânica Ideal (VMI) e Vantagem Mecânica Real (VMR). A Vantagem Mecânica Ideal é a relação entre o deslocamento d realizado pela força potente F e o deslocamento vertical h produzido pela força resistente F_R , isto é, $VMI = \frac{d}{h}$. Enquanto que a Vantagem Mecânica Real é a relação entre a força resistente F_R e a força potente F , ou seja, $VMR = \frac{F_R}{F}$. Como a relação $\frac{d}{h}$ não é influenciada pelo atrito, VMI representa a vantagem mecânica sob condições ideais, ou seja, onde o atrito estaria ausente. Como o atrito está sempre presente, tem-se $VMI > VMR$.

3.1 Alavanca

Alavanca é um corpo rígido, sólido de forma alongada (relativamente fina, como uma haste) e que, quando apoiada no ponto fixo ou de apoio, pode ser colocada em rotação em torno desse ponto como mostra a figura [3.6](#). O objetivo aqui é chegar no **Princípio Fundamental da Alavanca** usando **semelhanças de triângulos, proporção e comprimento de arco**. Existem três tipos de alavancas: **Interfixa**, **Inter-resistente** e **Interpotente** como mostra a figura [3.7](#).

Aqui será demonstrado o princípio para interfixa, pois os outros casos são análogos. Será explorado a geometria plana para chegar ao **princípio fundamental da alavanca**. Da geometria plana compreende-se que o comprimento do arco é o produto do raio pelo o ângulo em radianos, ou seja, $d_p = b_p \cdot \theta$ e $d_r = b_r \cdot \theta$. Como os ângulos são os mesmos,

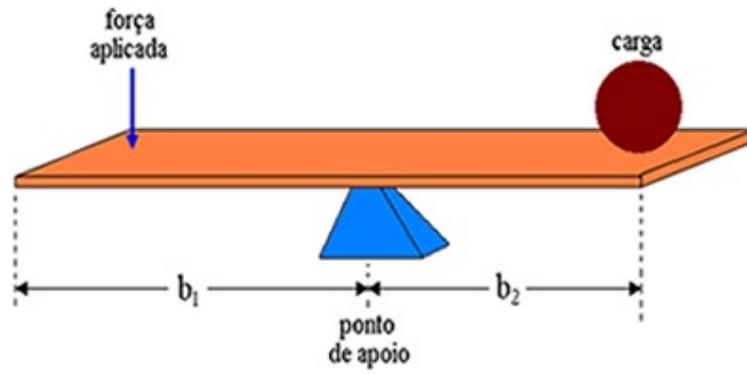


Figura 3.6: Alavanca

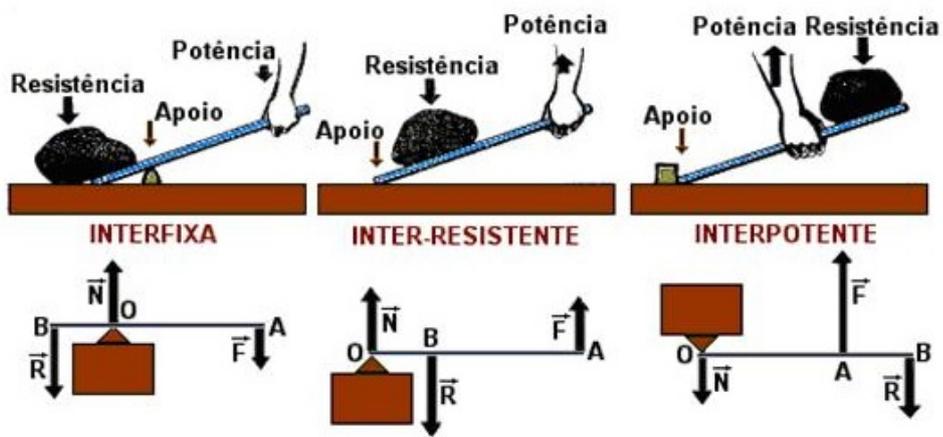


Figura 3.7: Tipos de alavancas

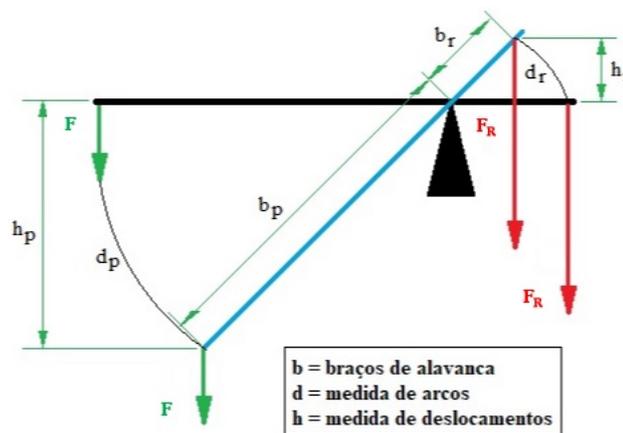


Figura 3.8: Movimentos da alavanca sobre arcos de circunferências de centro O

então

$$\frac{d_p}{b_p} = \frac{d_r}{b_r}$$

Por semelhança de triângulo (Caso AAA), tem-se

$$\frac{d_p}{b_p} = \frac{d_r}{b_r} = \frac{h_p}{h_r}$$

A vantagem mecânica das alavancas $VM = \frac{F_R}{F}$ poderá ser posta sob a forma $VM = \frac{b_p}{b_r}$ ou ainda $VM = \frac{d_p}{d_r}$. Deslocando-se o ponto de apoio para o lado da carga (ver ilustração 3.8) o braço de resistência diminui e a força transmitida F_R aumenta; a alavanca torna-se mais vantajosa e maior será a VM . Daí,

$$VM = \frac{F_R}{F}$$

e portanto,

$$\frac{F_R}{F} = \frac{d_p}{d_r}$$

ou

$$F \cdot d_p = F_R \cdot d_r$$

Em qualquer tipo de **alavanca** a expressão do **princípio fundamental** será aplicada da mesma forma como mostram as figuras 3.9, 3.10 e 3.11.

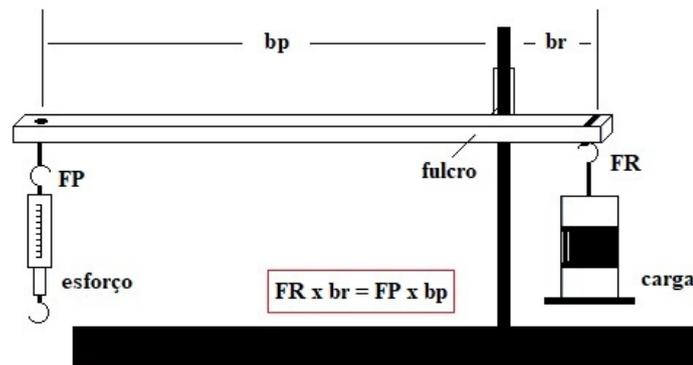


Figura 3.9: Alavanca Interfixa

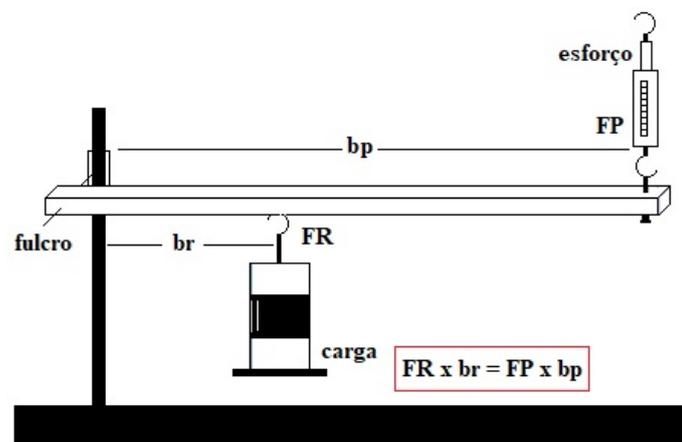


Figura 3.10: Alavanca Inter-resistente

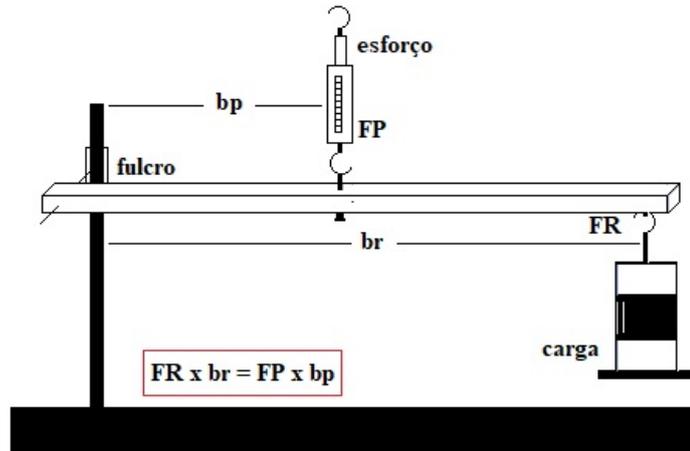


Figura 3.11: Alavanca Interpotente

Considere a figura [3.12](#) para os exemplos a seguir.

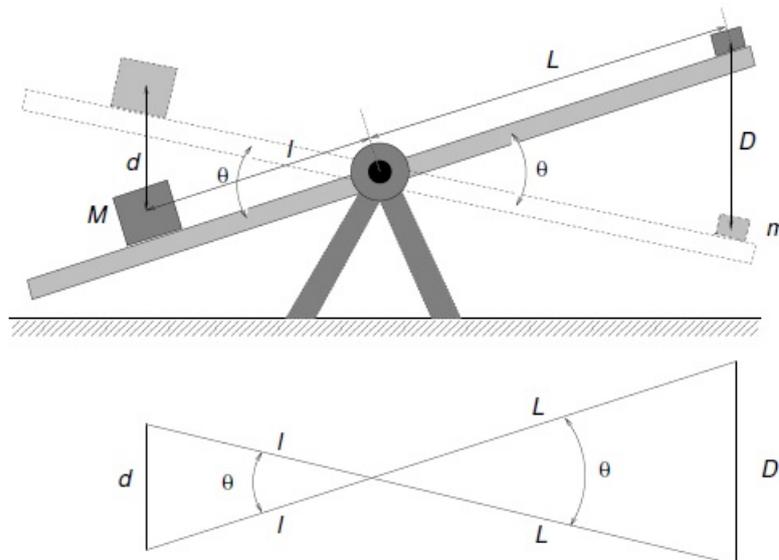


Figura 3.12: Quando o balanço está em equilíbrio, um deslocamento lento do balanço não irá alterar a energia potencial total dos dois corpos.

Exemplo 3.1.1. *Dois corpos de massas m e M estão equilibradas a distâncias diferentes do ponto de apoio, L e l , respectivamente. Qual é a relação entre as massas e essas distâncias?*

Solução 3.1.1. *Pelo princípio fundamental da alavanca $\vec{F}_a \cdot d_1 = \vec{F}_p \cdot d_2$. Desta forma, tem-se que $\vec{P}_M \cdot l = \vec{P}_m \cdot L$. Como $\vec{P}_M = M \cdot \vec{g}$ e $\vec{P}_m = m \cdot \vec{g}$, então*

$$\begin{aligned}
 M \cdot \vec{g} \cdot l &= m \cdot \vec{g} \cdot L \\
 M \cdot l &= m \cdot L \\
 \frac{M}{m} &= \frac{L}{l}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.2. Se um dos corpos, de peso mg , desce de D , o outro Mg , sobe de d , então mostrar a relação entre as variações de altura e os **braços** da alavanca L e l , tendo em vista que os triângulos da figura [3.12](#) são semelhantes.

Solução 3.1.2. Como os triângulos são semelhantes (caso AAA), então

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{D} &= \frac{l}{L} \\
 &\text{ou} \\
 \frac{D}{d} &= \frac{L}{l}
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.3. Mostrar que a conservação de energia implica que a condição de equilíbrio tem a forma:

$$mgD = Mgd$$

Solução 3.1.3. Sabe-se que:

$$\frac{Mg}{mg} = \frac{L}{l} \tag{3.1}$$

Por outro lado,

$$\frac{D}{d} = \frac{L}{l} \tag{3.2}$$

Igualando [3.1](#) e [3.2](#), tem-se que:

$$\frac{Mg}{mg} = \frac{D}{d}$$

Pela propriedade fundamental da proporção:

$$mgD = Mgd$$

Observe as aplicações das alavancas na figura [3.13](#). São instrumentos do dia a dia que se usa e em muitos casos não é percebido o seu fundamento matemático.

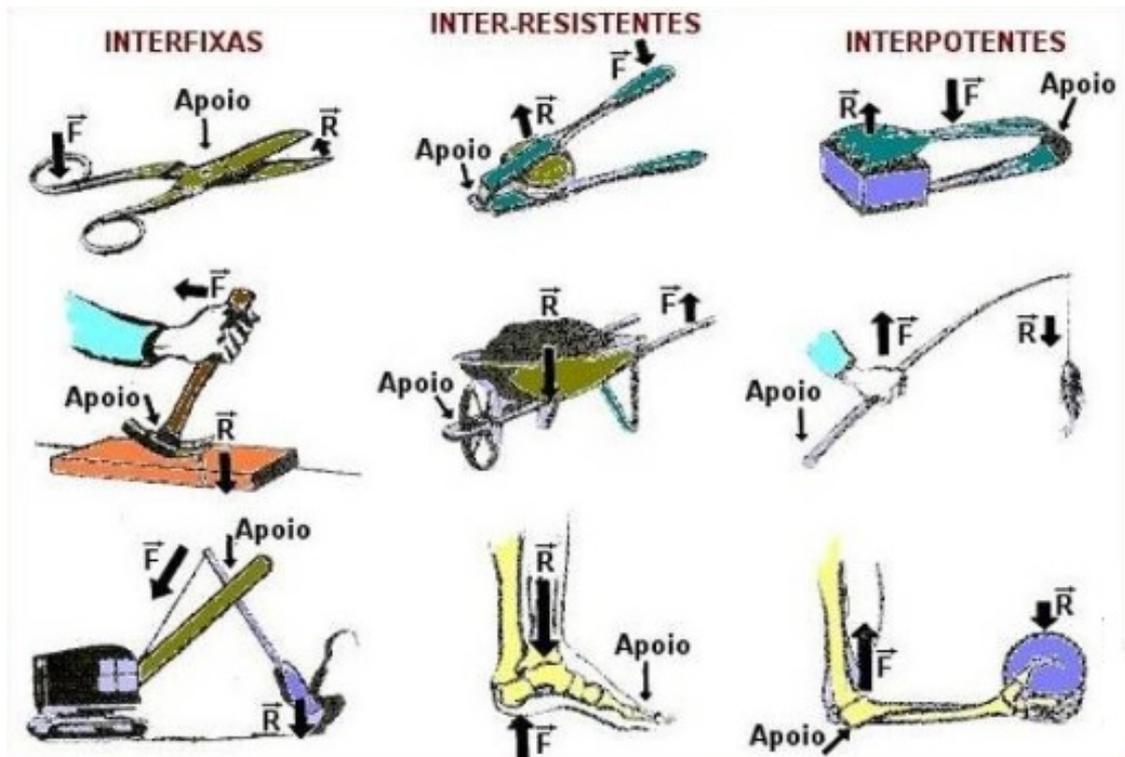


Figura 3.13: Tesoura, quebra nozes, pinça, martelo de orelho, carrinho de mão, vara de pesca, guindaste, pé, antebraço.

3.2 Plano Inclinado

Define-se Plano Inclinado como uma superfície plana cujos pontos de início e fim estão em alturas diferentes. Aqui serão explorados as **razões trigonométricas** que garantem o funcionamento dessa máquina. A priori pode-se pensar: em quais trajetórias abaixo é mais “fácil” deslocar o bloco do ponto A ao ponto B ?

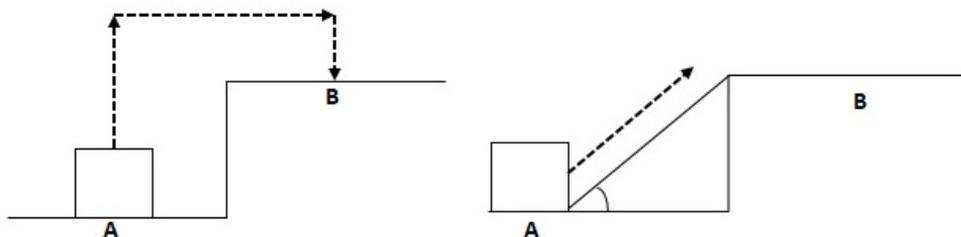


Figura 3.14: Tanto do lado direito quanto do esquerdo o bloco será movimentado no sentido das setas.

Intuitivamente a situação inclinada é a melhor opção, pois na outra opção será realizado um esforço maior para o corpo ser erguido como mostra a figura 3.15. É claro

que foi considerado o sentido das setas. Na situação inclinada, nota-se que a força \vec{F} será menor que a força peso \vec{P} .

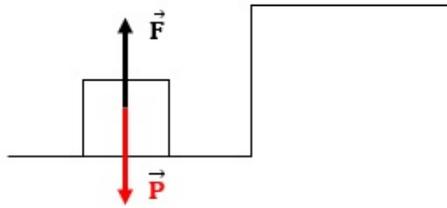


Figura 3.15: Observe que para erguer o bloco, $\vec{F} > \vec{P}$.

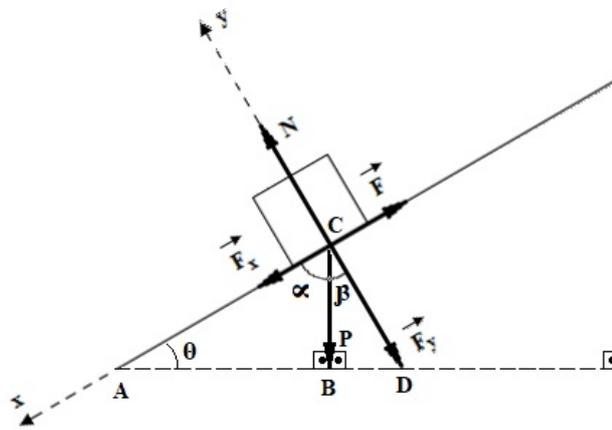


Figura 3.16: Triângulos formados pelas componentes

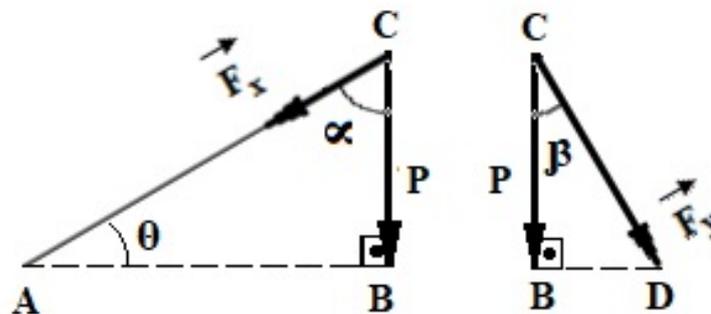


Figura 3.17: Triângulos ABC e DBC que juntando fica o triângulo ACD

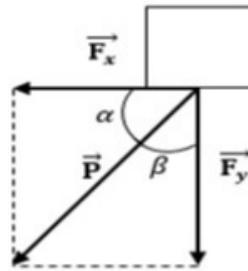


Figura 3.18

A priori é imprescindível que o ângulo $\beta = \theta$ nas figuras [3.16](#) e [3.17](#). Sabe-se da geometria euclidiana que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . No triângulo ABC , tem-se $\theta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$. Logo, $\theta + \alpha = 90^\circ$ e, portanto, $\alpha = 90^\circ - \theta$. Por outro lado, o triângulo ACD tem o ângulo C igual a 90° . Então, $\beta + \alpha = 90^\circ$ implica em $\beta = 90^\circ - \alpha$. Como $\alpha = 90^\circ - \theta$, tem-se $\beta = 90^\circ - (90^\circ - \theta)$ e conseqüentemente, $\beta = \theta$. Observando as forças F_x , P e F_y como mostra a figura [3.18](#), tem-se

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\vec{F}_x}{\vec{P}}$$

ou seja,

$$\vec{F}_x = \vec{P} \cdot \text{sen}(\theta)$$

onde ($0 < \theta < 90^\circ$). Como $\text{sen}(\theta) < 1$, então $\vec{F}_x \neq \vec{P}$ e $\vec{F}_x < \vec{P}$. Por outro lado, para haver movimento, tem-se $\vec{F} > \vec{F}_x = \vec{P} \cdot \text{sen}(\theta)$ o que implica em $\frac{\vec{F}_x}{\text{sen}(\theta)} = \vec{P}$ já que o $\text{sen}(\theta) < 1 \Rightarrow \vec{P} > \vec{F}$. Portanto, a força aplicada nesse caso será menor que o peso do objeto. Analogamente serve para $\text{cos}(\theta) = \frac{\vec{F}_y}{\vec{P}}$.

Para relacionar \vec{F}_x com \vec{F}_y , precisa-se usar $\text{tg}(\theta) = \frac{\vec{F}_x}{\vec{F}_y}$ já que tem-se o resultado para \vec{F}_x . Pela 2ª e 3ª leis de Newton, tem-se que $\vec{F} - \vec{F}_x = m \cdot a$, o que implica em, $\vec{F} = \vec{F}_x + m \cdot a = \vec{P} \cdot \text{sen}(\theta) + m \cdot a = m \cdot \vec{g} \cdot \text{sen}(\theta) + m \cdot a$, e portanto, $\vec{F} = m \cdot (\vec{g} \cdot \text{sen}(\theta) + a)$.

Observe que o funcionamento do plano inclinado depende dos conceitos fundamentais geométricos e trigonométricos.

3.3 Cunha

É uma ferramenta de metal ou madeira dura em forma de prisma agudo em um dos lados, e que se insere no vértice de um corte para melhor fender algum material (como madeira ou pedras), bem como calçar, nivelar ou ajustar uma peça qualquer. Na realidade, a concepção de **cunha** é a mesma de um plano inclinado. Será necessário usar noções da **geometria e trigonometria** para descrever seu funcionamento. Seu formato pode ser descrito como um **prisma triangular** como mostra a figura [3.19](#).



Figura 3.19: Cunha de madeira atravessada em um tronco

O importante nessa máquina simples é a transmissão de força de forma a ser demonstrado. Suponha uma cunha simétrica representada pelas forças F , F_1 e F_2 . Note que enquanto a força F empurra a cunha para baixo, duas forças F_1 e F_2 , que chama-se **força de resistência**, atuará nas suas laterais como mostra a figura [3.20](#) na intensão de reagir, como diz a terceira lei de Newton.

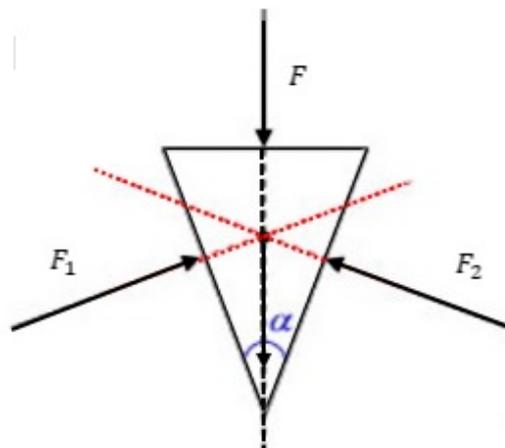


Figura 3.20: Forças F , F_1 e F_2 atuando sobre a cunha simétrica

As forças F , F_1 e F_2 são colocadas de forma que interceptam sobre o centro de

gravidade da cunha, ou seja, se encontram no **baricentro**. Usando o **Princípio de transmissibilidade** (ver figura 3.22), pode-se reposicionar as forças como mostra a figura 3.21.

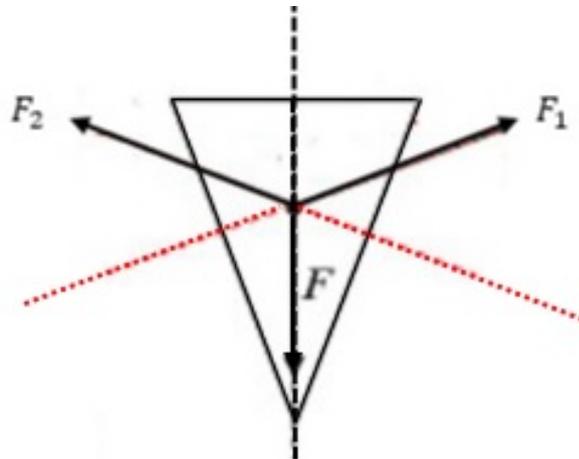


Figura 3.21: Forças F , F_1 e F_2 reposicionadas pela transmissibilidade.

Princípio da transmissibilidade das forças

O efeito de uma força não é alterado quando esta é aplicada em diferentes pontos do corpo, desde que esta seja aplicada ao longo de sua linha de aplicação.

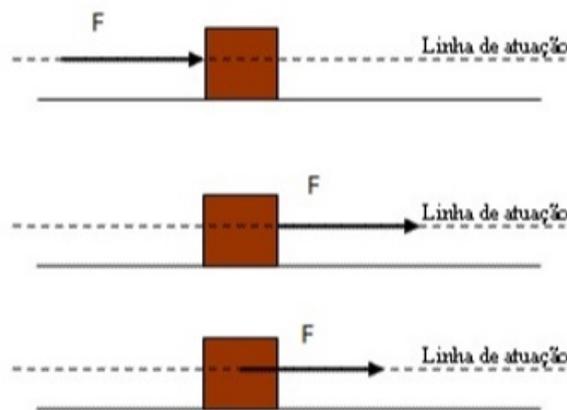


Figura 3.22: Força F sendo reposicionada pela princípio da transmissibilidade.

Usando a decomposição das forças de resistência e imaginando o eixo x e y , observa-se que na direção x as componentes das forças se cancelam, enquanto que as componentes na direção y equilibram a força aplicada como descrito na figura 3.23.

Como as forças F_1x e F_2x se cancelam, então o problema estará em função de F_1y e F_2y . Primeiro é preciso mostrar que o ângulo $\angle\beta = \frac{\alpha}{2}$. Da geometria plana, tem-se que ângulo central nesse caso, será $(180^\circ - \alpha)$ como desenhado na figura 3.24.

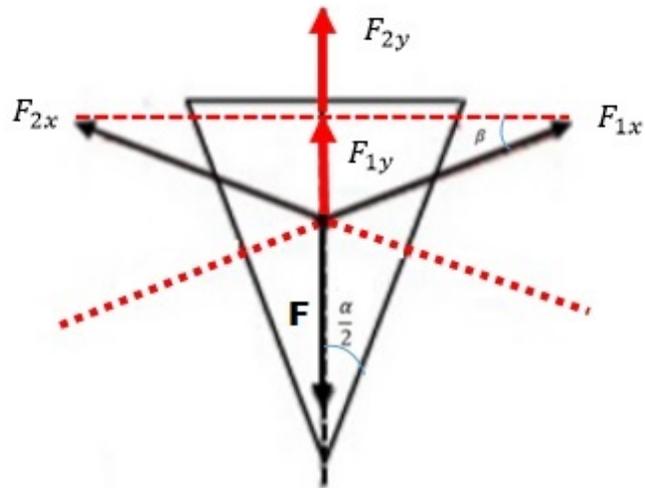


Figura 3.23: Componentes na direção x , y , ângulo $\alpha/2$ e ângulo β .

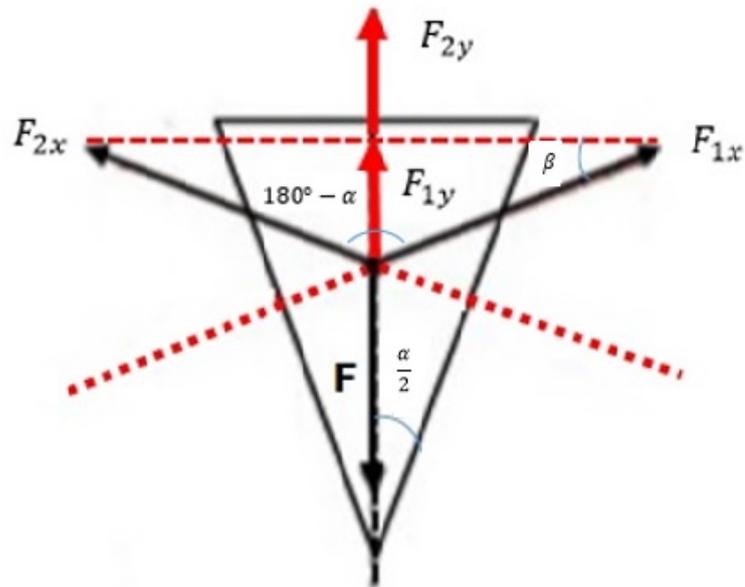


Figura 3.24: Ângulo central ($180^\circ - \alpha$)

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , observando figura [3.25](#), tem-se que

$$90^\circ + \frac{180^\circ - \alpha}{2} + \beta = 180^\circ$$

Daí,

$$\frac{180^\circ - \alpha}{2} + \beta = 180^\circ - 90^\circ$$

$$90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \beta = 90^\circ$$

$$\therefore \beta = \frac{\alpha}{2}$$

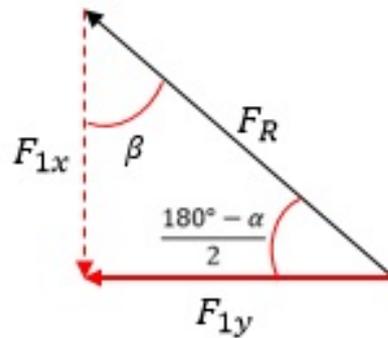


Figura 3.25: Disposição da ação de forças na cunha simétrica

Observando a figura 3.24, tem-se que $F = F_{1y} + F_{2y}$, ou simplesmente, $F = 2 \cdot F_y$ já que essas forças são iguais. Aplicando a razão trigonométrica seno na figura 3.25, tem-se $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{F_y}{F_R}$ sendo $F_y = \frac{F}{2}$. Então, $F = 2 \cdot F_R \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, onde F é módulo da força aplicada e F_R o módulo da força de resistência para cada lado da cunha com intensidades iguais. Essa expressão é denominada **equação da cunha**.

Observação 3.2. Para que a potência seja menor que a resistência deve-se ter $F < 2 \cdot F_R$ e α menor que 60° .

As equação descrita anteriormente é para cunha que tem a função de machados, lâminas de corte e pontas de ferramentas. Entretanto, o calço é um tipo de cunha. Deve-se verificar a força de atrito. E essa força deve ser favorável a fixação (do calço), impedindo-o de sair como descrita na figura 3.26

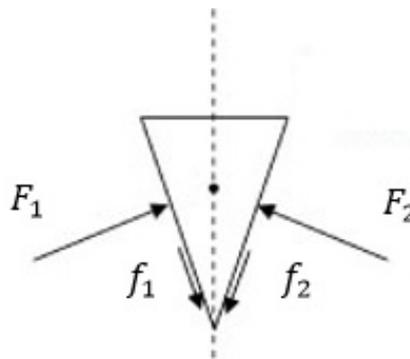


Figura 3.26: Forças F_1 , F_2 , f_1 e f_2 atuando sobre a cunha como calço.

Nesse caso, a tendência do movimento é para cima, a fim de manter a cunha presa. Como descrito no caso da cunha na função de lâmina ou algo similar, as forças de resistências e atritos F_1 , F_2 , f_1 e f_2 , respectivamente serão reposicionadas pelo **princípio de transmissibilidade** como descrito na figura 3.22. Adotando o sentido do movimento

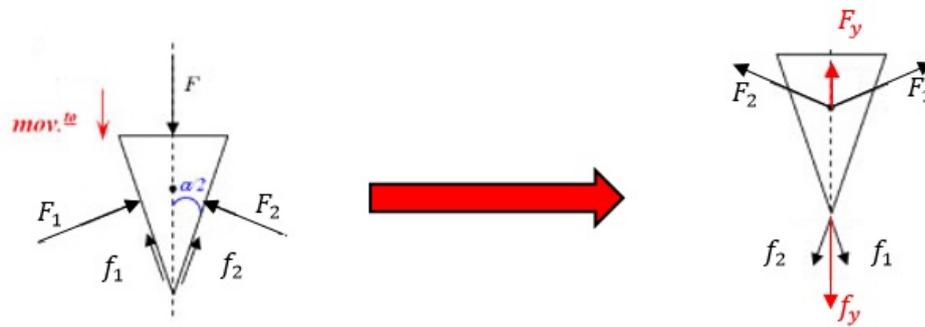


Figura 3.27: Movimento da cunha-calço antes e depois de fixada.

positivo, tem-se que

$$F = F_1y + F_2y + f_1 + f_2 + m \cdot a$$

Daí,

$$\begin{aligned} F &= 2 \cdot F_y + 2 \cdot f_y + m \cdot a \\ F &= 2 \cdot F_R \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2 \cdot F_R \cdot \mu_c \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + m \cdot a \end{aligned}$$

Logo,

$$F = 2F_R \cdot \left[\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \mu_c \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] + m \cdot a$$

onde a é aceleração sofrida pela cunha, m sua massa, f_1y e f_2y são as forças de atrito nas laterais e μ_c é o coeficiente de atrito cinético.

Observação 3.3. Se o ângulo da ponta de ataque da cunha for α como mostra a figura 3.20, a força de atrito pode se escrita para situação mínima de equilíbrio como

$$f \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geq F_R \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

ou seja,

$$\mu_e \geq \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

onde μ_e é o coeficiente de atrito estático.

A seguir, alguns exemplos.

Exemplo 3.3.1. Mostre que não é possível $\vec{F} = 2 \cdot \vec{F}_R$.

Solução 3.3.1. Suponha por contradição que $\vec{F} = 2 \cdot \vec{F}_R$. Então, $2 \cdot \vec{F}_R = 2 \cdot \vec{F}_R \cdot \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$.
Daí,

$$\begin{aligned} 1 &= \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \\ \text{sen}(90^\circ) &= \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \\ 90^\circ &= \frac{\alpha}{2} \\ \therefore \alpha &= 180^\circ \end{aligned}$$

Isso é uma contradição já que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Logo, não é possível $\vec{F} = 2 \cdot \vec{F}_R$.

Exemplo 3.3.2. Em que situação $\vec{F} = \vec{F}_R$?

Solução 3.3.2. Se $\vec{F} = \vec{F}_R$, então $\vec{F} = 2 \cdot \vec{F} \cdot \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$. Sendo assim, $1 = 2 \cdot \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$, ou seja, $\frac{1}{2} = \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$. Logo, $\text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2}$. E isso implica em, $\text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \text{sen}(30^\circ)$. Portanto, $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$, ou simplesmente, $\alpha = 60^\circ$. Como $\alpha = 60^\circ$, tem-se uma cunha de face triangular equilátera.

Observação 3.4. A equação descrita é para cunha com função de machado e lâminas de corte.

É possível utilizar a cunha no formato de calço, aquilo que se coloca por baixo ou junto a algo, para nivelar, fixar ou escorar e cuja a eficiência é descrita no exemplo a seguir.

Exemplo 3.3.3. Em uma cunha no formato de calço cujo o coeficiente de atrito é igual a 1, tem-se $\vec{F} = \vec{F}_R \Leftrightarrow \alpha = \arcsen(-0,75)$.

Solução 3.3.3. Se $\vec{F} = \vec{F}_R$, então $\vec{a} = 0$, pois não haverá movimento. Nesse caso, tem-se: $\vec{F} = 2 \cdot \vec{F} \cdot \left[\text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \mu \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] + m \cdot \vec{a}$, ou seja, $1 = 2 \cdot \left[\text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) + 1 \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right]$. Logo, $\frac{1}{2} = \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)$. Elevando ambos membros ao quadrado, tem-se:

$$\frac{1}{4} = \text{sen}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + 2 \cdot \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right),$$

mas $\text{sen}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = 1$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - 1 &= 2 \cdot \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \\ -\frac{3}{4} &= \text{sen}(\alpha) \\ \therefore \alpha &= \arcsen(-0,75) \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $\alpha = \arcsen(-0,75)$, então:

$$\vec{F} = 2 \cdot \vec{F}_R \left[\text{sen} \left(\frac{\arcsen(-0,75)}{2} \right) + \text{cos} \left(\frac{\arcsen(-0,75)}{2} \right) \right] + m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F} = 2 \cdot \vec{F}_R \cdot 0,5 + m \cdot \vec{a}.$$

Como se trata de um calço, então $\vec{a} = 0$. Logo,

$$\vec{F} = 2 \cdot \vec{F}_R \cdot 0,5$$

$$\vec{F} = \vec{F}_R.$$

Portanto, a cunha é uma máquina simples especial, pois pode ser usada tanto como objeto para fixar como para cortar. Vale a pena ressaltar que a Cunha nada mais é que um plano inclinado.

3.4 Parafuso

Agora que já se tem conhecimento sobre *Momento*, é oportuno estudar e definir **parafuso**. Defini-se **parafuso** como uma redução do plano inclinado, disposto em hélice na superfície de um cilindro. Pode-se visualizar isso na figura [3.29](#). Aqui serão utilizadas as **razões trigonométricas**.

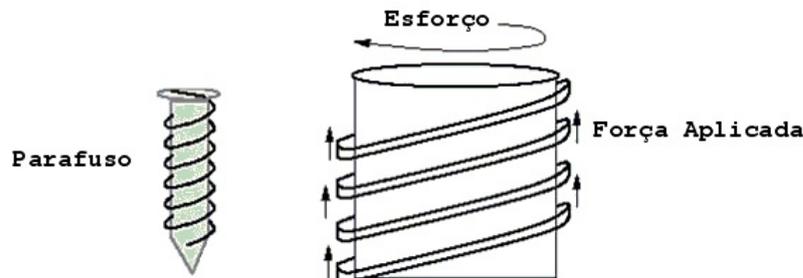


Figura 3.28: Parafuso em rotação

Chama-se passo o avanço (distância percorrida pelo ponto) quando um cilindro e um ponto giram uniformemente no sentido longitudinal completando uma volta completa. O percurso descrito por esse ponto no cilindro chamamos de hélice como descrito na figura [3.29](#). O desenvolvimento dessa hélice associa-se a um triângulo com os elementos:

α = ângulo da hélice

$\ell(\text{passo})$ = cateto oposto

hélice = hipotenusa

D_2 (diâmetro médio) = cateto adjacente

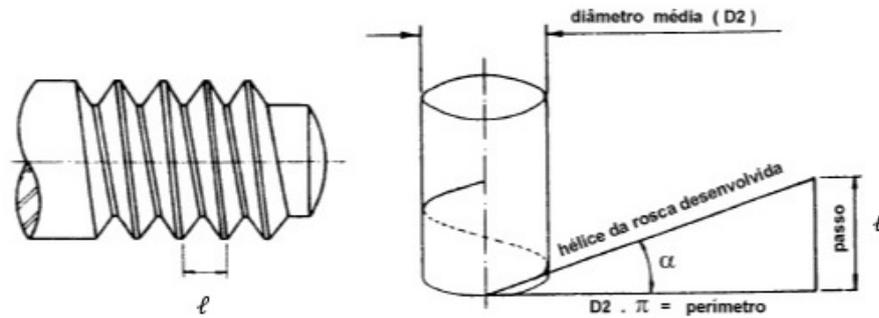


Figura 3.29: Projeções nos parafusos

Aplicando as razões trigonométricas no triângulo retângulo da figura 3.29, quando se deseja conhecer o passo, diâmetro médio ou ângulo da hélice, tem-se:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\ell}{D_2 \cdot \pi},$$

ou seja,

$$\ell = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot D_2 \cdot \pi.$$

É importante notar que quanto maior for o ângulo da hélice, menor será a força de atrito atuando entre a porca e o parafuso. É possível ver isso através do paralelogramo de forças como mostra a figura 3.30. Nesse caso, tem-se que $\overline{FR}^2 = \overline{FA}^2 + \overline{FN}^2$, ou seja, $\overline{FR} = \sqrt{\overline{FA}^2 + \overline{FN}^2}$.

Observação 3.5. Para um aperto adequado em parafusos de fixação é adequado manter $\alpha < 15^\circ$.

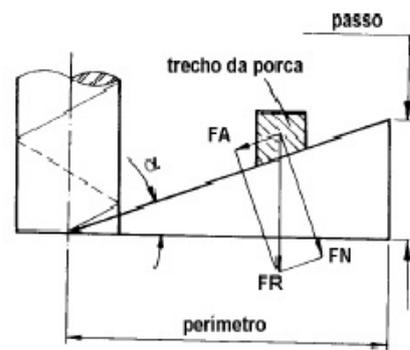


Figura 3.30: Componentes atuando no parafuso

Na maioria dos casos, os parafusos são utilizados como peças de fixação. Porém em muitos tipos de máquinas, eles são incorporados para transmitir potência ou movimento de uma parte da máquina para outra. O diagrama de corpo livre do bloco deve incluir

a carga W , a reação R da rosca da base e a força horizontal Q que tem o mesmo efeito que a força F exercida sobre a manopla como mostra a figura [3.31](#). A força Q deve ter o mesmo momento que F em torno do eixo do parafuso e, portanto, sua magnitude deve ser $Q = \frac{F \cdot a}{r}$, isto é, Q é diretamente proporcional ao comprimento do punho.

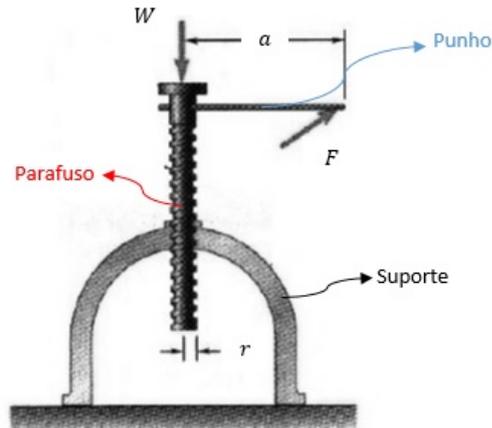


Figura 3.31: Parafuso de rosca

Considerando que esse parafuso de rosca quadrada seja sujeito à iminência de movimento para cima, como mostra a figura [3.32](#), e observando o triângulo retângulo [3.33](#), tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\phi_S + \theta) &= \frac{Q}{R} \\ \operatorname{cos}(\phi_S + \theta) &= \frac{W}{R} \\ \operatorname{tg}(\phi_S + \theta) &= \frac{Q}{W} \end{aligned}$$

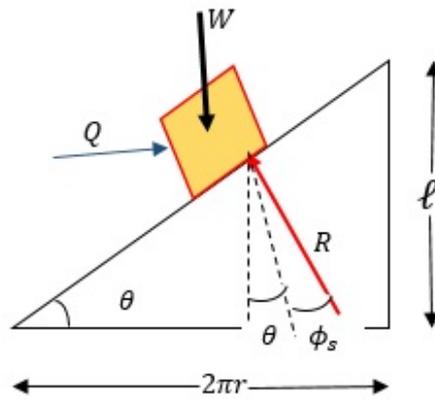


Figura 3.32: Movimento do parafuso iminente para cima

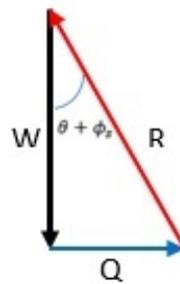


Figura 3.33: Triângulo retângulo formado pelas componentes W , Q e R .

Agora considerando que esse mesmo parafuso de rosca quadrada esteja sujeito a iminência de movimento para baixo como mostra a figura [3.34](#) e observando o triângulo retângulo [3.35](#), tem-se

$$\begin{aligned} \text{sen}(\phi_s - \theta) &= \frac{Q}{R} \\ \text{cos}(\phi_s - \theta) &= \frac{W}{R} \\ \text{tg}(\phi_s - \theta) &= \frac{Q}{W} \end{aligned}$$

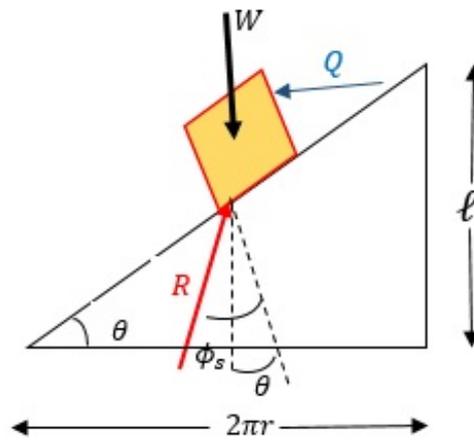


Figura 3.34: Movimento do parafuso iminente para baixo com $\phi_s > \theta$

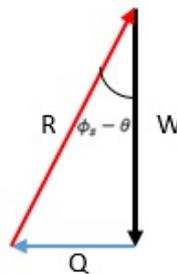


Figura 3.35: Triângulo retângulo formado pelas componentes W , Q e R .

Outro caso de iminência para baixo é quando $\phi_s < \theta$. Observando a figura [3.36](#) e o triângulo retângulo [3.37](#), tem-se

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta - \phi_s) &= \frac{Q}{R} \\ \text{cos}(\theta - \phi_s) &= \frac{W}{R} \\ \text{tg}(\theta - \phi_s) &= \frac{Q}{W} \end{aligned}$$

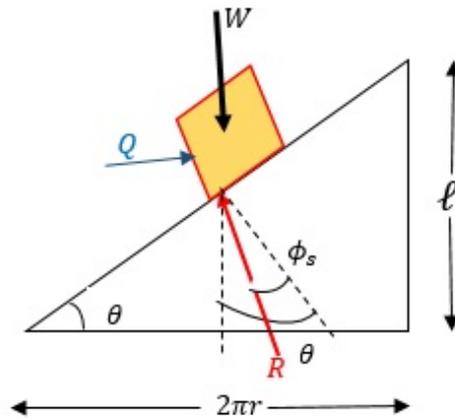


Figura 3.36: Movimento do parafuso iminente para baixo com $\phi_s < \theta$

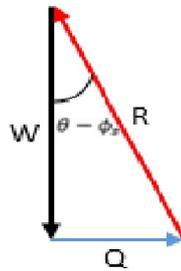


Figura 3.37: Triângulo retângulo formado pelas componentes W , Q e R .

Agora vamos ver alguns exemplos de aplicações.

Exemplo 3.4.1. *Uma prensa é usada para unir dois pedaços de madeira, como mostrado na figura 4.30. A prensa tem uma rosca quadrada dupla cujo diâmetro médio é igual a 10mm e cujo passo é de 2mm. O coeficiente de atrito entre as roscas é $\mu_s = 0,30$. Se for aplicado um momento de torção máxima de 40 N.m ao pressionar a prensa, determine:*

- a) a força exercida sobre as peças de madeira;
- b) o momento torção necessário para soltar a prensa.

Solução 3.4.1. *a) Sabe-se que o raio médio do parafuso é $r = 5\text{mm}$. Como esse parafuso tem rosca dupla, a avanço L é duas vezes o passo, ou seja, $L = 2 \cdot (2\text{mm}) = 4\text{mm}$. Na realidade a questão quer saber o valor de W . Já foi visto anteriormente que $Q = W \cdot r \cdot \text{tg}(\phi_s + \theta)$. Só que a questão não deu nem ϕ_s e nem θ . Pode-se encontrar o ângulo de avanço θ e o ângulo de atrito ϕ , utilizando as equações $\text{tg}(\theta) = \frac{L}{2\pi r}$ e $\text{tg}(\phi) = \mu_s$.*

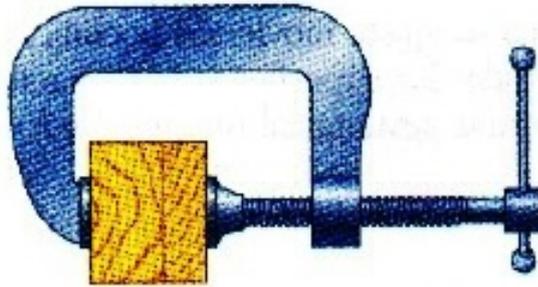


Figura 3.38: Prensa de rosca quadrada

Daí,

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\theta) &= \frac{4}{2\pi \cdot 5} \\ &= 0,1273 \\ \theta &= 7,3^\circ\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\phi) &= \mu_s \\ &= 0,30 \\ \phi &= 16,7^\circ\end{aligned}$$

Substituindo esses valores em $Q = W \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\phi_s + \theta)$, tem-se:

$$\begin{aligned}40 &= W \cdot 0,005 \cdot \operatorname{tg}(24^\circ) \\ W &= 17,97k \cdot N\end{aligned}$$

b) A força Q necessária para soltar a prensa e o momento de torção correspondente são obtidos a partir do diagrama do corpo livre. Logo,

$$\begin{aligned}Q &= W \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\phi_s - \theta) \\ Q &= 17970 \cdot 0,005 \cdot \operatorname{tg}(9,4^\circ) \\ Q &= 14,87N \cdot m\end{aligned}$$

Exemplo 3.4.2. Obter as seguintes fórmulas que relacionam a carga W à força P exercida no cabo do gato estudado anteriormente.

$$\begin{aligned}a) P &= \left(\frac{Wr}{a}\right) \cdot \operatorname{tg}(\theta + \phi_s) \\ b) P &= \left(\frac{Wr}{a}\right) \cdot \operatorname{tg}(\phi_s - \theta) \\ c) P &= \left(\frac{Wr}{a}\right) \cdot \operatorname{tg}(\theta - \phi_s)\end{aligned}$$

Solução 3.4.2. a) Sabemos que $Q = W \cdot \operatorname{tg}(\theta + \phi_S)$ e $Q = \frac{P \cdot a}{r}$. Daí,

$$\frac{P \cdot a}{r} = W \cdot \operatorname{tg}(\theta + \phi_S)$$

$$P = \left(\frac{Wr}{a} \right) \cdot \operatorname{tg}(\theta + \phi_S)$$

b) Mesmo procedimento da letra a).

c) Mesmo procedimento da letra a).

Nota-se que o parafuso, apesar de realizar movimento circular, seu movimento final é retilíneo. Seguindo assim, o teorema da inversão.

3.5 Polias

Polia ou roldana, consta de um disco que pode girar em torno de um eixo que passa por seu centro e é normal ao seu plano. Na linha que delimita esse disco existe um sulco, denominado gola ou garganta, no qual passa uma corda ou cabo contornando-o parcialmente. O eixo é sustentado por uma peça em forma de U, denominada chapa, que lhe serve de mancais como se observa na figura [3.39](#). Aqui, utiliza-se como referência as **propriedades de círculo, geometria e trigonometria**, além das leis de Newton

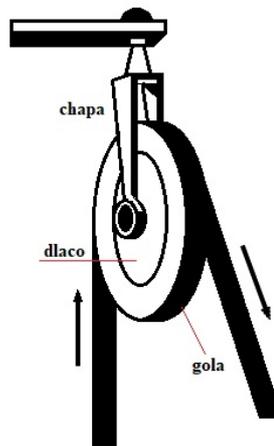


Figura 3.39: Polia fixa

Quanto aos modos de operação, as polias classificam-se em fixas e móveis. Nas fixas os mancais de seus eixos (a chapa) permanecem em repouso em relação ao suporte onde foram fixados. Nas móveis tais mancais se movimentam juntamente com a carga que está sendo deslocada pela máquina como ilustra a figura [3.40](#).

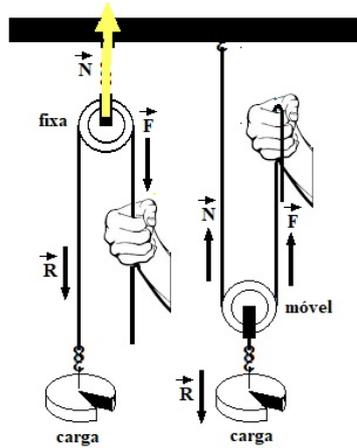


Figura 3.40: Polia fixa e móvel

Agora faz-se necessário analisar algumas equações para polias fixa e móveis. Observe a figura [3.41](#).

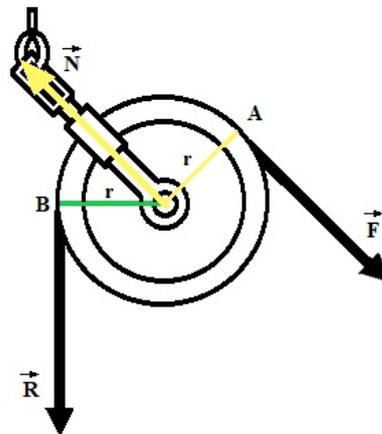


Figura 3.41: Polia fixa com a diagramação das forças normal, potente e resistente.

Note que $\overline{OA} = \overline{OB} = r \Rightarrow R = F$. Enquanto em uma das extremidades é aplicada a força potente, na outra em que a carga será colocada será aplicada a força resistente. Nesse tipo de polia a vantagem mecânica vale 1 e sua função como máquina simples é apenas a de inverter o sentido da força aplicada, isto é, aplicamos uma força de cima para baixo numa das extremidades da corda e a polia transmite á carga para levantá-la uma força de baixo para cima. É interessante notar que as forças F e R são realizadas no cabo, porém podem ser associadas aos pontos de contato entre o cabo e a polia. O cabo serve apenas como elemento de transição da força. Na realidade o funcionamento da polia fixa é semelhante a da alavanca interfixa. Pode perceber isso observando os diagramas de forças construídos com as linhas de ação, que a resultante atuará sobre o eixo para uma

situação de equilíbrio como mostra a figura 3.42.

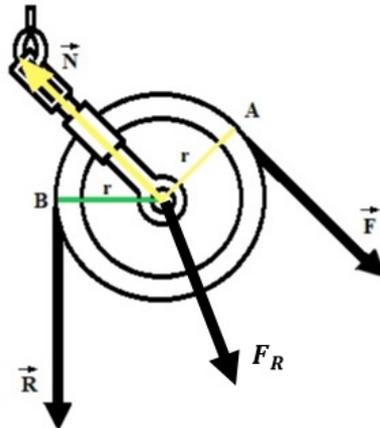


Figura 3.42: Representação das forças de tração em cada extremidade do cabo juntamente com a força resultante F_R .

Como na polia fixa tem-se $VM = 1$, então $\vec{F} = \vec{R}$ e $d_p = d_r$ e nesse caso, nada se ganha em força ou em deslocamento. Já polia móvel com corda de ramos paralelos tem-se $VM = 2$, disso decorre $\vec{F} = \frac{\vec{R}}{2}$ e $dp = 2 \cdot dr$. Nesse caso, ganha-se em força, mas perde-se em deslocamento como na figura 3.43.

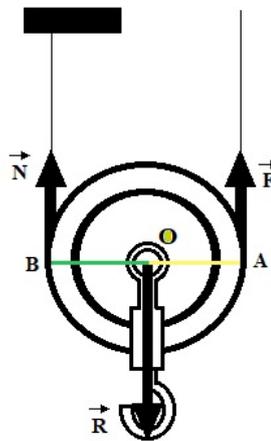


Figura 3.43: Polia móvel com a diagramação das forças normal, potente e resistente.

Fixando o pólo em B, tem-se que $\vec{F} \cdot \overline{AB} = \vec{R} \cdot \overline{OB}$ (**Princípio Fundamental da Alavanca**), tem-se $\vec{F} \cdot 2r = \vec{R} \cdot r$, ou seja, $\vec{F} = \frac{\vec{R}}{2}$. Se na polia móvel os ramos não forem paralelos, como na figura 3.44, então reposicionando a força F para o caso de ramos paralelos, tem-se que

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{F'}{F} \\ F' &= F \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Para uma situação de equilíbrio com a força F em ângulo como mostra a figura 3.44, não existiria a resultante F_R , ou seja, a resultante seria nula. Sendo assim, a componente vertical de $F \cos(\alpha)$ somada com N se anularia com F_R . Nesse caso, tem-se

$$\begin{aligned} F \cdot \cos(\alpha) + N &= F_R \\ F \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \cos(\alpha) &= F_R \\ 2 \cdot F \cdot \cos(\alpha) &= F_R \\ F &= \frac{F_R}{2 \cdot \cos(\alpha)} \end{aligned}$$

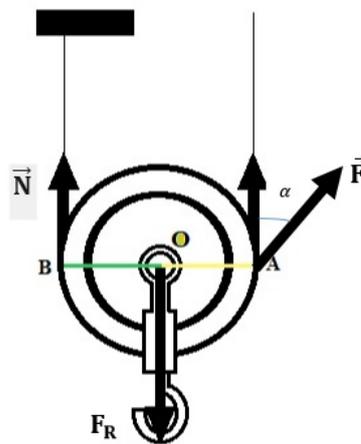


Figura 3.44: Polia móvel com ramos não paralelos

Essa situação trata de iminência de movimento. No entanto, uma vez em movimento, a componente de $F \cdot \sin(\alpha)$ na horizontal seria responsável por deslocar a polia para direita e, assim, promoveria um ângulo para a força N . No equilíbrio, as componentes $F \cdot \sin(\alpha)$ e $N \cdot \sin(\alpha)$ se anulariam. A equação anterior é uma equação geral mostrando que o ângulo limite de utilização prática do cabo é de 60° . Portanto a melhor situação para corda paralela é quando $\alpha = 0$, onde a força potente reduziria pela metade a força resistente. Na maioria das situações é conveniente usar duas ou mais polias como mostra a figura 3.45. Isso é útil para que a força exercida seja menor que o peso do objeto carregado.

Já foi visto que se o ângulo $\alpha = 0$, então $F = \frac{F_R}{2}$. É importante notar que a força resistente que atua na carga se divide na corda da polia 4. E assim irá acontecer nas demais cordas como se observa na figura 3.46. Sendo assim, cada polia móvel terá a força resistente dividida por uma potência de base 2. Logo, para um número n de polias

móveis, tem-se

$$F_R = 2 \cdot F$$

$$F_R = 2 \cdot 2 \cdot F$$

$$F_R = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot F$$

$$F_R = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot F$$

.

.

.

$$F_R = 2^n \cdot F$$

De forma geral, tem-se que:

$$F = \frac{F_R}{2^n}$$

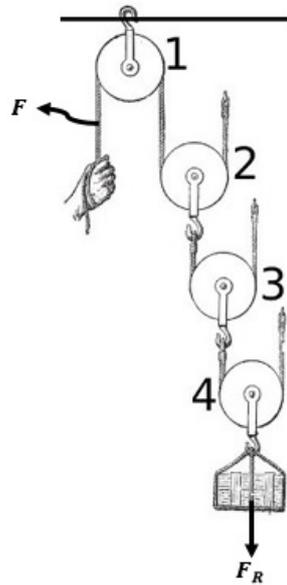


Figura 3.45: Associações de polias

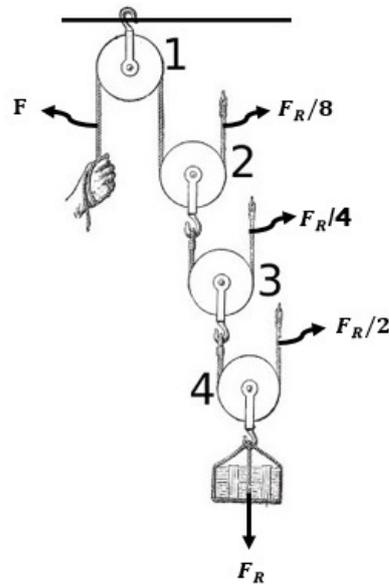


Figura 3.46: Associações de polias com as forças resistentes sendo divididas.

Exemplo 3.5.1. O arranjo de polias da figura 3.47 é preso ao teto para erguer uma massa desconhecida. Sendo os fios inextensíveis e desprezando os atritos, verifique que se $m = W^r \text{ kg}$, então $W = \sqrt[r]{\frac{2 \cdot F}{5}}$. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.

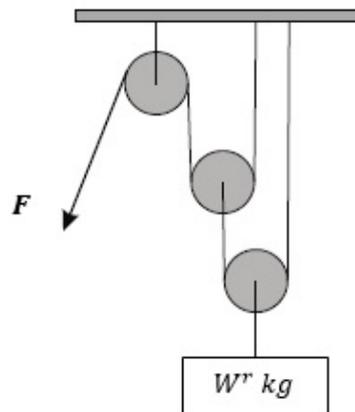


Figura 3.47: Associações de com 2 polias móveis e 1 fixa

Solução 3.5.1. Note-se que $F_R = P$, onde $P = \text{força peso}$. Dessa forma $F_R = P = m \cdot g$. Como $m = W^r$ e nesse caso, $F_R = 2^2 \cdot F$, então $W^r \cdot 10 = 4 \cdot F$. Logo,

$$W^r = \frac{4 \cdot F}{10}$$

$$W^r = \frac{2 \cdot F}{5}.$$

Aplicando a raiz r -ésima em ambos membros, tem-se

$$\sqrt[r]{W^r} = \sqrt[r]{\frac{2 \cdot F}{5}}$$

figura 3.49 exemplifica um arranjo possível para esse aparato. É relatado que Arquimedes teria demonstrado para o rei Hierão um outro arranjo desse artefato, movendo sozinho, sobre a areia da praia, um navio repleto de passageiros e cargas, algo que seria impossível sem a participação de muitos homens. Supondo que a massa do navio fosse de 3000kg , que o coeficiente de atrito estático entre o navio e a areia era de $0,8$ e que Arquimedes tivesse puxado o navio com uma força F , paralela à direção do movimento e de módulo igual a 400N . Sejam os fios e as polias ideais, a aceleração da gravidade igual a 10m/s^2 e que a superfície da praia é perfeitamente horizontal. Verifique se o número mínimo de polias móveis usadas, nessa situação, por Arquimedes será exatamente 6?

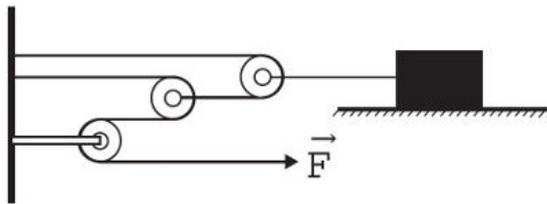


Figura 3.49: Associação de polias

Solução 3.5.3. Nesse caso, a força resistente será igual a força de atrito. Daí, $f_{at} = \mu \cdot N$, onde $\mu =$ coeficiente de atrito e $N =$ força normal. Na superfície $N = P = mg$. Logo,

$$F_R = f_{at} = 0,8 \cdot 3000 \cdot 10 = 24000$$

Sabe-se que

$$F = \frac{F_R}{2^n}$$

Como $F = 400$ e $F_R = 24000$, então

$$\begin{aligned} 400 &= \frac{24000}{2^n} \\ 2^n &= \frac{24000}{400} \\ 2^n &= 60 \\ n &\geq 6 \end{aligned}$$

É possível observar que as polias transformam movimentos circulares em retílineos, verificando o Teorema da Inversão.

3.6 Rodas e Eixos

Uma força pode ser multiplicada por um fator $k > 0$ com a utilização de rodas e eixos. Duas rodas acopladas a um mesmo eixo ou duas rodas acopladas por correias, são exemplos de dispositivos simples capazes de multiplicar forças. Nessa seção será usada **noções de comprimento de circunferência, teorema de Pitágoras e razões trigonométricas**. Observe a figura [3.50](#).

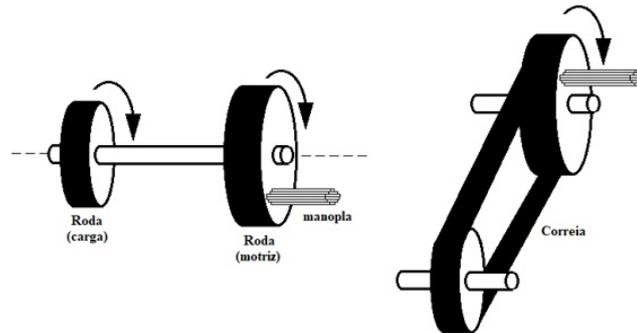


Figura 3.50: Roda(carga) e roda (motriz) ligadas por um eixo ou por uma correia

Em uma das rodas, denominada **roda motriz**, o operador que pode ser até um motor elétrico, aplica sua força ($\vec{F}_a = P$) empunhando uma **manopla**. Já a outra roda, denominada **roda de carga**, transmite à carga a força já multiplicada pela máquina ($\vec{F}_r = R$). Nesse caso, $P =$ potência e $R =$ resistência. Se observará dois tipos de transmissão do movimento circular: Através de um eixo em comum e através de uma correia.

Considere-se neste momento duas polias ligadas por um mesmo eixo como mostra a figura [3.51](#). Quando o eixo gira com velocidade angular ω , as duas polias também giram. Além disso, cada uma das polias terá uma velocidade para os pontos em sua superfície ou periferia e uma velocidade angular. Assim como em um círculo, em cada roda, o deslocamento para uma volta será dado por 2π . Considere T o tempo para essa volta. Para calcular a velocidade basta dividir a distância pelo tempo, ou seja,

$$V = \frac{d}{t}. \quad (3.3)$$

Como se trata de um círculo, então a velocidade será angular e descreve-se com o símbolo ω (omega). Daí,

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}. \quad (3.4)$$

Relacionando [3.3](#) com [3.4](#), tem-se que

$$V = \omega \cdot r$$

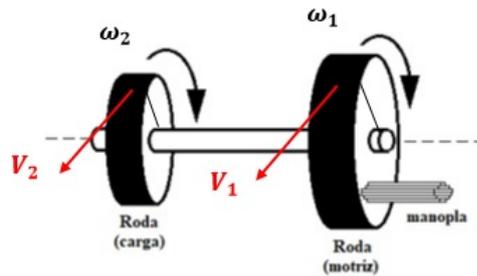


Figura 3.51: Duas rodas ligadas por um eixo

ou

$$V = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot r,$$

que na realidade tem-se comprimento do círculo dividido pelo tempo ou período. No caso da figura [3.51](#), tem-se duas expressões:

$$V_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_1}{T}$$

e

$$V_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_2}{T}.$$

Pode-se concluir que para este tipo de transmissão a frequência (inverso do período ou $\frac{1}{T}$) no eixo é mesma das rodas, isto é, $f_e = f_1 = f_2$. Como $f = \frac{1}{T}$ e $\omega_e = \omega_1 = \omega_2$ então,

$$\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2}.$$

Por fim, pode-se chegar a conclusão de que quanto maior for o raio da polia, maior será a velocidade de um ponto de sua periferia.

Já na transmissão por **correia**, tem-se que a velocidade linear V é a mesma para todos os pontos periféricos, pois não há deslizamento. Assim, observando a figura [3.52](#), tem-se:

$$V_1 = r_1 \cdot \omega_1 = \frac{2 \cdot r_1}{2} \cdot \frac{n_1 \cdot \pi}{30} = \frac{d_1 \cdot n_1 \cdot \pi}{60}$$

onde r_1 é raio, d_1 é o diâmetro, ω_1 é a velocidade angular em rad/s e n_1 a velocidade angular em rpm da polia motora. De forma análoga, para a polia movida, tem-se:

$$V_2 = r_2 \cdot \omega_2 = \frac{2 \cdot r_2}{2} \cdot \frac{n_2 \cdot \pi}{30} = \frac{d_2 \cdot n_2 \cdot \pi}{60}$$

Como nesse tipo de transmissão $V_1 = V_2$, obtém-se:

$$\frac{d_1 \cdot n_1 \cdot \pi}{60} = \frac{d_2 \cdot n_2 \cdot \pi}{60}$$

isto é,

$$d_1 \cdot n_1 = d_2 \cdot n_2$$

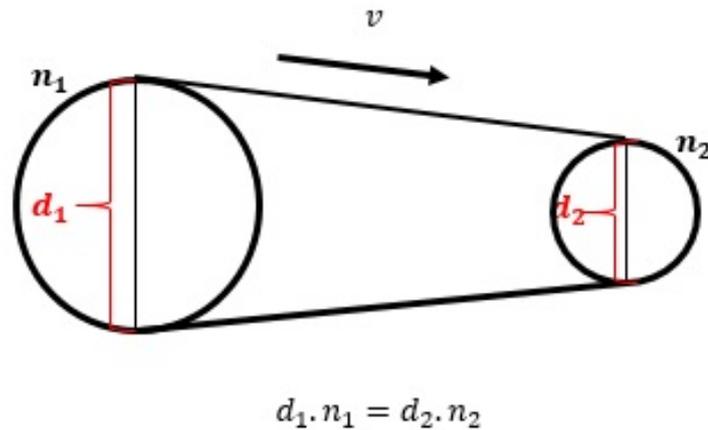


Figura 3.52: Duas polias acopladas por uma correia

Proposição 3.1. *Dadas duas polias acopladas por uma correia, então,*

i) $r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2$.

ii) $r_1 \cdot f_1 = r_2 \cdot f_2$, em que f_1 e f_2 são frequências em Hertz das polias motora e movida, respectivamente.

iii) $\frac{r_1}{T_1} = \frac{r_2}{T_2}$, em que T_1 e T_2 são os períodos de rotação das polias motora e movida, respectivamente.

Demonstração. i) Como o diâmetro é o dobro do raio e $n = \frac{30 \cdot \omega}{\pi}$, então

$$\begin{aligned} d_1 \cdot n_1 &= d_2 \cdot n_2 \\ 2r_1 \cdot \frac{30 \cdot \omega_1}{\pi} &= 2r_2 \cdot \frac{30 \cdot \omega_2}{\pi} \\ r_1 \cdot \omega_1 &= r_2 \cdot \omega_2 \end{aligned}$$

ii) Sabe-se que $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$. Então pelo item i), tem-se:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot \omega_1 &= r_2 \cdot \omega_2 \\ r_1 \cdot 2\pi \cdot f_1 &= r_2 \cdot 2\pi \cdot f_2 \\ r_1 \cdot f_1 &= r_2 \cdot f_2. \end{aligned}$$

iii) Como $f = \frac{1}{T}$, então pelo item ii), tem-se:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot f_1 &= r_2 \cdot f_2 \\ r_1 \cdot \frac{1}{T_1} &= r_2 \cdot \frac{1}{T_2} \\ \frac{r_1}{T_1} &= \frac{r_2}{T_2} \end{aligned}$$

□

Observação 3.6. Chama-se **relação de transmissão** i a razão entre o diâmetro da polia movida pelo diâmetro da polia motora, isto é,

$$i = \frac{d_2}{d_1}$$

ou

$$i = \frac{n_1}{n_2}.$$

Exemplo 3.6.1. Duas polias X e Y estão acopladas conforme a figura [3.53](#). Sabendo que a velocidade da polia motora X é $\omega_1 = 39 \cdot \pi \text{ rad/s}$, o diâmetro de X é $d_1 = 100 \text{ mm}$ e o diâmetro de Y movida é de $d_2 = 180 \text{ mm}$, então calcule:

- a) T_1
- b) f_1
- c) n_1
- d) n_2
- e) f_2
- f) T_2
- g) i

Demonstração. a) Pela expressão $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$, segue que:

$$\begin{aligned} 39 \cdot \pi &= \frac{2 \cdot \pi}{T_1} \\ T_1 &= \frac{2 \cdot \pi}{39 \cdot \pi} = 0,051s \end{aligned}$$

b) Como $f_1 = \frac{1}{T_1}$, então

$$f_1 = \frac{1}{\frac{2}{39}} = \frac{39}{2} = 19,5 \text{ HZ}$$

c) Como $\omega_1 = \frac{n_1 \cdot \pi}{30}$, então

$$39 \cdot \pi = \frac{n_1 \cdot \pi}{30}.$$

Usando a propriedade fundamental da proporção,

$$n_1 = 1170 \text{ rpm}.$$

d) Pela expressão $d_1 \cdot n_1 = d_2 \cdot n_2$, tem-se que

$$\begin{aligned} 100 \cdot 1170 &= n_2 \cdot 180 \\ n_2 &= 650 \text{ rpm} \end{aligned}$$

e) Pela proposição 3.1, tem-se

$$\begin{aligned} r_1 \cdot f_1 &= r_2 \cdot f_2 \\ 100 \cdot \frac{39}{2} &= 180 \cdot f_2 \\ f_2 &= 10,83 \text{ Hz} \end{aligned}$$

f)

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{10,83} = 0,092 \text{ s}$$

g) Pela observação 3.6, tem-se que $i = \frac{d_2}{d_1}$. Logo,

$$i = \frac{180}{100} = 1,8 : 1$$

□

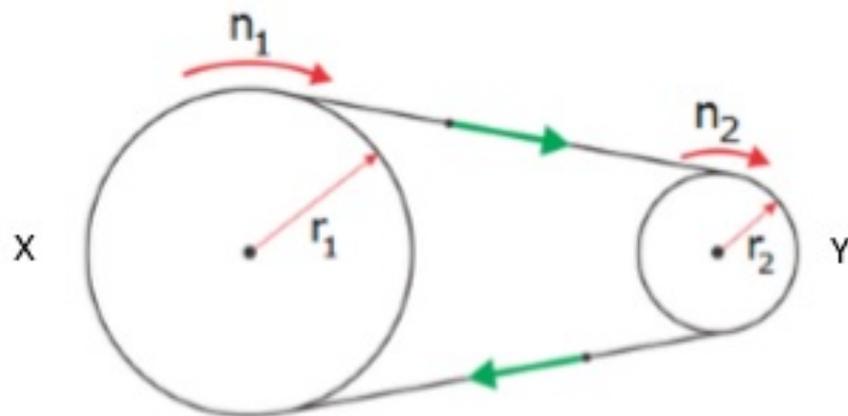


Figura 3.53: Polias X e Y acopladas por uma correia

3.6.1 Calculando o comprimento de uma correia

Pode-se calcular o **comprimento de uma correia** usando algumas relações trigonométricas. Sem perda de generalidade, suponha que $0 < r_1 < r_2$ conforme a figura [3.54](#). Nesse caso, tem-se:

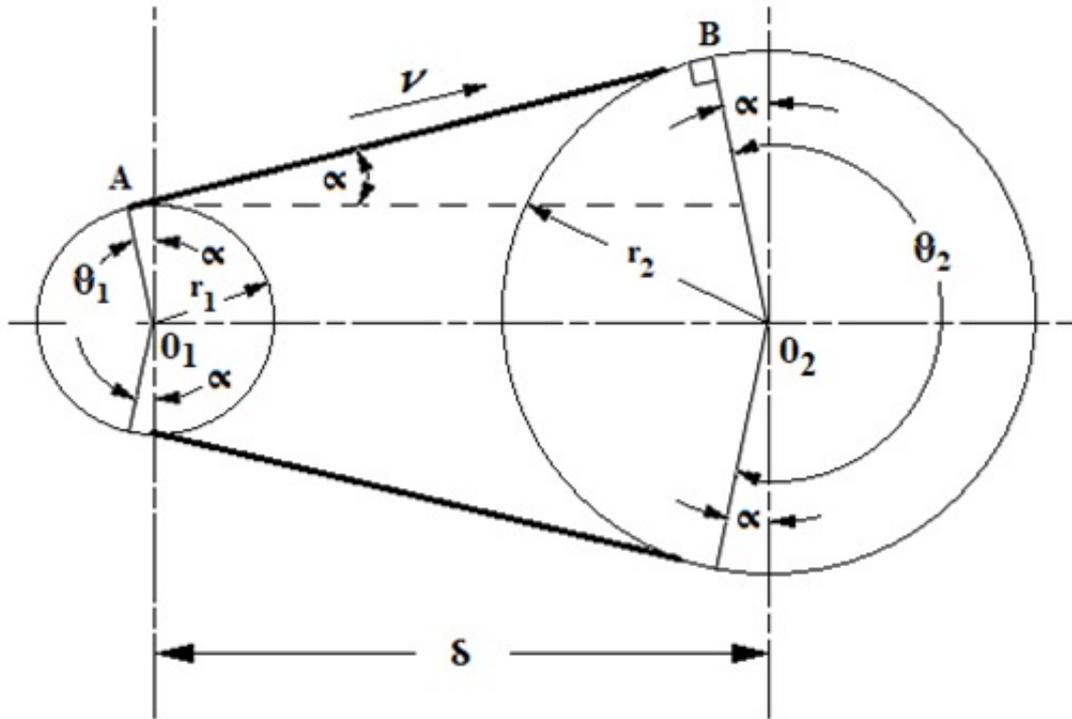


Figura 3.54: Duas polias acopladas por uma correia em transmissão direta

- I) $\overline{O_1O_2} = \delta$ (a distância entre os eixos);
- II) r_1 é o raio da polia motora (mm);
- III) r_2 é o raio da polia movida (mm);
- IV) V é a velocidade linear da correia;
- V) θ_1 é ângulo do contato da polia motora (rad);
- VI) θ_2 é ângulo do contato da polia movida (rad).

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABO_2 da figura [3.55](#), tem-se:

$$L_1^2 = \delta^2 - (r_2 - r_1)^2$$

ou seja,

$$L_1 = \sqrt{\delta^2 - (r_2 - r_1)^2}$$

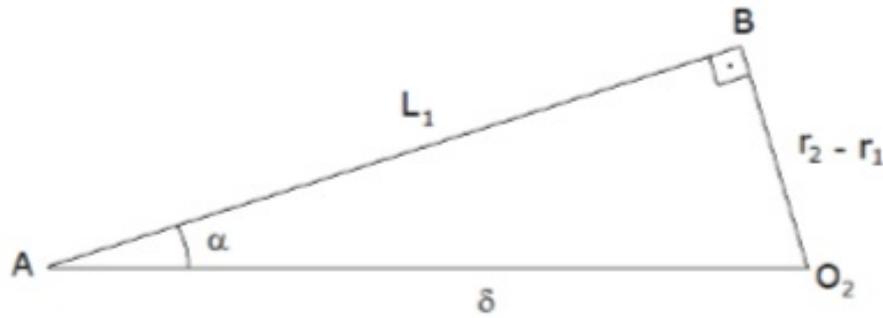


Figura 3.55: Triângulo retângulo ABO_2

Assim, o comprimento L da correia entre as polias motora e movida é

$$L = 2L_1 + r_1\theta_1 + r_2\theta_2 = r_1\theta_1 + r_2\theta_2 + 2\sqrt{\delta^2 - (r_2 - r_1)^2}$$

$$L = r_1(\pi + \theta_1 - \pi) + r_2(\pi + \theta_2 - \pi) + 2\sqrt{\delta^2 - (r_2 - r_1)^2}$$

$$L = \pi(r_1 + r_2) + r_1(\theta_1 - \pi) + r_2(\theta_2 - \pi) + 2\sqrt{\delta^2 - (r_2 - r_1)^2}. \quad (3.5)$$

Por outro lado, pela figura [3.55](#), tem-se que $2\alpha + \theta_1 = \pi$, de modo que $\theta_1 - \pi = -2\alpha$ e $2\alpha + \theta_2 = \pi$, de modo que $\theta_2 - \pi = 2\alpha$. Substituindo estas expressões em [3.5](#), obtém-se:

$$L = \pi(r_1 + r_2) + 2\alpha r_2 - 2\alpha r_1 + 2\sqrt{\delta^2 - (r_2 - r_1)^2}$$

isto é,

$$L = \pi(r_1 + r_2) + 2\sqrt{\delta^2 - (r_2 - r_1)^2} + 2\alpha(r_2 - r_1) \quad (3.6)$$

Mas,

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{r_2 - r_1}{\delta}$$

ou seja,

$$\alpha = \arcsen\left(\frac{r_2 - r_1}{\delta}\right). \quad (3.7)$$

Substituindo [3.7](#) em [3.6](#), tem-se:

$$L = \pi(r_1 + r_2) + 2\sqrt{\delta^2 - (r_2 - r_1)^2} + 2 \cdot (r_2 - r_1) \cdot \arcsen\left(\frac{r_2 - r_1}{\delta}\right).$$

Na maioria das aplicações, $|r_2 - r_1| \ll \delta$, de modo que $\arcsen\left(\frac{|r_2 - r_1|}{\delta}\right) \simeq 0$. Assim, a expressão anterior será dada por

$$L = \pi(r_1 + r_2) + 2\sqrt{\delta^2 - (r_2 - r_1)^2}$$

Observação 3.7. Para duas polias acopladas por uma correia em transmissão cruzada (vide figura 3.56), os cálculos para o comprimento serão análogos ao anterior. Daí, a expressão será

$$L = \pi(r_1 + r_2) + 2\sqrt{\delta^2 - (r_2 + r_1)^2}$$

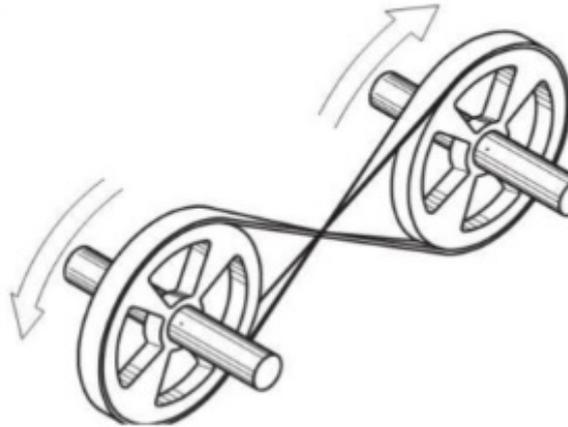


Figura 3.56: Correia cruzada no acoplamento de duas polias

Exemplo 3.6.2. A relação de transmissão i também é dada por:

$$\begin{aligned} a) \quad i &= \frac{f_1}{f_2} \\ b) \quad i &= \frac{M_2}{M_1} \end{aligned}$$

Demonstração. a) A proposição 3.1 no item ii), diz que:

$$r_1 \cdot f_1 = r_2 \cdot f_2$$

Como $r_1 = \frac{d_1}{2}$ e $r_2 = \frac{d_2}{2}$, tem-se que:

$$\frac{d_1}{2} \cdot f_1 = \frac{d_2}{2} \cdot f_2$$

Daí,

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{f_1}{f_2}.$$

No entanto, pela observação 3.6, tem-se que:

$$i = \frac{d_2}{d_1}$$

Portanto,

$$i = \frac{f_1}{f_2}.$$

b) Como foi visto em [3](#) a definição de torque, considere a expressão:

$$\frac{M_1}{r_1} = \frac{M_2}{r_2}$$

Daí,

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{M_2}{M_1}$$

Do item b),

$$i = \frac{r_2}{r_1}.$$

Portanto,

$$i = \frac{M_2}{M_1}$$

□

Observação 3.8. *É importante notar que as máquinas simples como as polias, roldanas e roda e eixo apesar de fazerem movimentos circulares, a exemplo da inversão, transformam esses movimentos em retilíneos.*

Capítulo 4

Problemas reais envolvendo as Máquinas Simples

Nesse presente capítulo, foram colocadas algumas atividades cuja a finalidade é contemplar na forma de resolução de problemas, os conteúdos abordados anteriormente. Os problemas, a seguir apresentados, tem relação com situação real cotidiana.

Problema 4.0.1. *Deve-se supor que uma pessoa que tenha massa de 100kg kg esteja sentada na ponta de uma gangorra como mostra 4.1 que não tenha o ponto fixo no centro da barra homogênea formando assim braços desiguais. Se outra pessoa de massa 80kg kg estiver na outra extremidade, encontre a relação entre os braços dessa gangorra para que a mesma esteja em equilíbrio.*

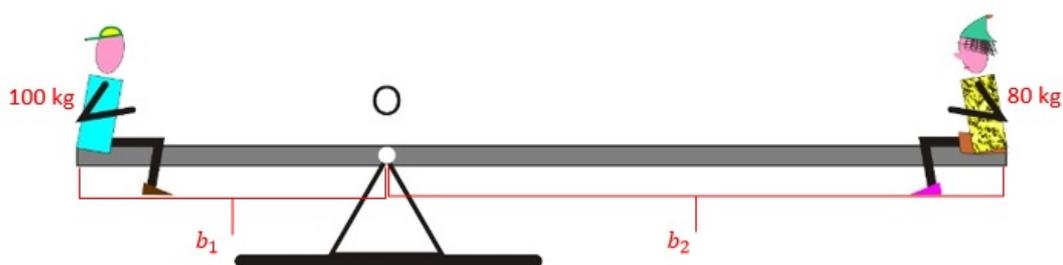


Figura 4.1: Gangorra de braços desiguais

Solução 4.0.1. *Pelo princípio fundamental da alavanca tem-se $P_1 \cdot b_1 = P_2 \cdot b_2$. Como $P = m \cdot g$, então:*

$$100 \cdot g \cdot b_1 = 80 \cdot g \cdot b_2$$

$$100 \cdot b_1 = 80 \cdot b_2$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{80}{100}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{4}{5}$$

Problema 4.0.2. Um problema bem comum do cotidiano ocorre quando uma pessoa está utilizando o carrinho de mão. Já foi visto em [3.13](#) que o carrinho de mão é uma alavanca *inter - resistente*. Daí, suponha que uma pessoa esteja levando um carrinho cujo peso total seja de 1000 Newtons e que seja mantido na posição de equilíbrio como mostra a figura [4.2](#). Qual seria a força necessária que essa pessoa deva aplicar para manter o carrinho erguido?

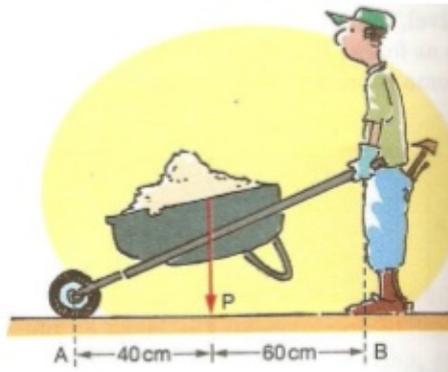


Figura 4.2: Carrinho de mão sendo erguido

Solução 4.0.2. Como se trata de uma alavanca *inter-resistente*, então tem-se $F_R \cdot b_R = F_p \cdot b_p$. Daí,

$$1000 \cdot 0,4 = F_p \cdot 1$$

$$F_p = 400N$$

Note-se que a pessoa fará um esforço bem menor que o peso total do carrinho.

Problema 4.0.3. Um problema relevante do cotidiano é quando uma pessoa empurra um caixote sobre uma rampa. Supondo que um caixote de 70 kg seja empurrado com uma velocidade constante para cima em uma rampa como mostra a figura [4.3](#). Suponha que não tenha atrito e então determine a força F . É possível determinar a força exercida pela rampa sobre o caixote? (**Considere** $g = 9,8 \text{ m/s}^2$)

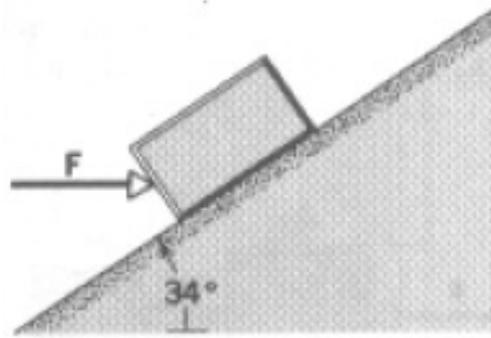


Figura 4.3: Caixaote sobre a rampa

Solução 4.0.3. Observe o seguinte esquema:

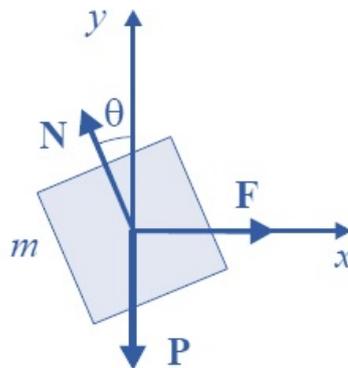


Figura 4.4: Decomposição das forças

$F_y = P$ implica em $N \cdot \cos(\theta) = m \cdot g$, ou seja, $N = \frac{m \cdot g}{\cos(\theta)}$. Por outro lado, $F_x = F$ segue que $N \cdot \sin(\theta) = F$ ou $N = \frac{F}{\sin(\theta)}$. Como N é o mesmo, tem-se

$$\frac{m \cdot g}{\cos(\theta)} \cdot \sin(\theta) = F$$

$$m \cdot g \cdot \operatorname{tg}(\theta) = F$$

Logo,

$$F = 70 \cdot 9,8 \cdot \operatorname{tg}(34^\circ)$$

$$F \cong 462,71N$$

É possível sim determinar a força exercida pela rampa sobre o caixaote. Basta calcular a

força normal. Então,

$$\begin{aligned} N &= \frac{m \cdot g}{\cos(\theta)} \\ N &= \frac{70 \cdot 9,8}{\cos(34)} \\ N &= \frac{686}{\cos(34)} \\ N &\cong 827,46 \end{aligned}$$

Problema 4.0.4. Imagine uma cunha no formato de um triângulo retângulo de massa M e o ângulo θ suportando um pequeno bloco de massa m . E além disso, está em repouso numa mesa horizontal, como mostra a figura 4.5. Então, pode-se analisar algumas situações.

- a) Que aceleração horizontal a deve ter M em relação à mesa, de forma a manter m estacionário em relação à cunha supondo-se os contatos sem atrito?
- b) Que força horizontal F deve ser aplicada ao sistema para atingir este resultado, supondo-se o topo da mesa sem atrito?

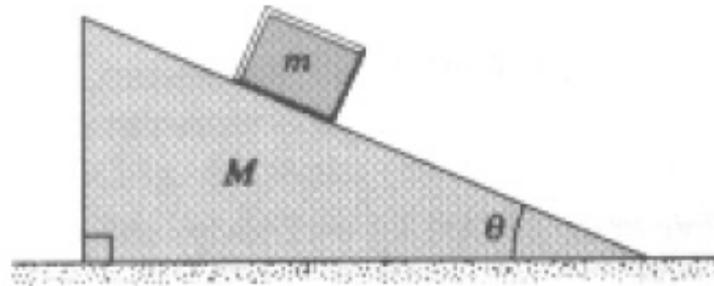


Figura 4.5: Cunha no formato de um triângulo retângulo

Solução 4.0.4. a) Tanto a aceleração de M como a de m tem que ser horizontal. Daí, fazendo o diagrama de forças em m , tem-se: Semelhante ao problema anterior, obtém-se $F_y = P$. Logo, $N_m \cdot \cos(\theta) = m \cdot g$ e portanto, $N_m = \frac{m \cdot g}{\cos(\theta)}$. Por outro lado, $F_x = m \cdot a_x$ leva a $N_m \cdot \sin(\theta) = m \cdot a_x$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{m \cdot g}{\cos(\theta)} \cdot \sin(\theta) &= m \cdot a \\ g \cdot \operatorname{tg}(\theta) &= a \end{aligned}$$

b) No sistema Cunha-bloco tem-se que $F = (m + M) \cdot a$, pois considera $m + M$ como se fosse o único bloco. Como $a = g \cdot \operatorname{tg}(\theta)$, então $F = (m + M) \cdot g \cdot \operatorname{tg}(\theta)$. As componentes horizontais das forças normais da cunha sobre o bloco N_m e do bloco sobre a cunha não precisam ser colocados, pois formam um par de ação-reação e se cancelam.

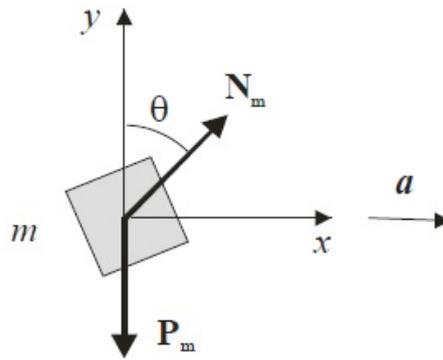


Figura 4.6: Decomposição das forças

Problema 4.0.5. *No próximo ponto, deve-se imaginar a seguinte situação:*

Suponha que uma cunha A de peso desprezível seja introduzida entre dois blocos B e C de 445N, que repousam na superfície horizontal como mostra a figura 4.7. Se o coeficiente de atrito estático em todas as superfícies em contato for 0,35, qual será a força mínima Q necessária para iniciar o movimento da cunha se ambos os blocos forem livres de se mover? E se o bloco C estiver fixado à superfície horizontal?

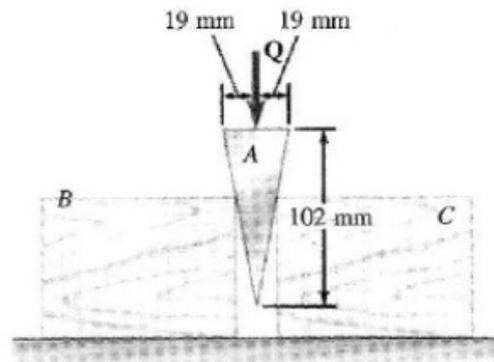


Figura 4.7: Cunha A entre dois blocos B e C

Solução 4.0.5. *Para responder a primeira pergunta, é preciso primeiro partir em busca do ângulo θ . Observe a figura 4.8. Para encontrar o valor do ângulo theta, basta usar a razão trigonométrica tangente. Daí,*

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta) &= \frac{19}{102} \\ \theta &= \operatorname{arctg}\left(\frac{19}{102}\right) \\ \theta &= 10,55^\circ \end{aligned}$$

Como já foi analisado anteriormente (ver cunha), tem-se que $\mu_S = \operatorname{tg}(\phi_S)$. Daí, $0,35 = \operatorname{tg}(\phi_S)$, ou seja, $\phi_S = \operatorname{arctg}(0,35) \cong 19,29^\circ$. Como a fórmula geral da cunha

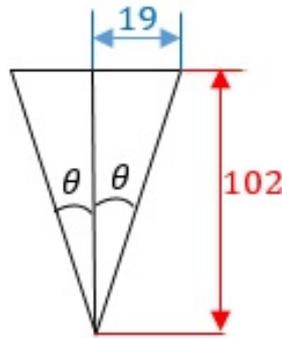


Figura 4.8: Cunha A de ângulo 2θ

é $F = 2 \cdot F_R \cdot \text{sen}(\theta)$ nesse caso é necessário encontrar as forças de resistência. Como essa cunha é simétrica, basta encontrar somente uma das resistências. Analisando os esquemas 4.9, tem-se um triângulo que tem dois ângulos e um lado dado, então é possível usar a Lei dos Senos (cada lado está para o seno do seu ângulo oposto). Logo,

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{\text{sen}(19,29^\circ)} &= \frac{445}{\text{sen}(40,87^\circ)} \\ \frac{R_1}{0,33} &= \frac{445}{0,65} \\ R_1 &= 226N \end{aligned}$$

Como se tem uma cunha simétrica, então $R_1 = R_3 = 226N$. Usando a equação geral da cunha no esquema 4.10, tem-se:

$$Q = 2 \cdot R_1 \cdot \text{sen}(\beta)$$

$$Q = 2 \cdot 226 \cdot \text{sen}(29,84^\circ)$$

$$Q \cong 225N$$

Já para segunda pergunta é observado que os diagramas de corpo livre da placa B e da cunha A (o único membro a se mover) são os mesmos que a situação anterior. Logo, a resposta é a mesma.

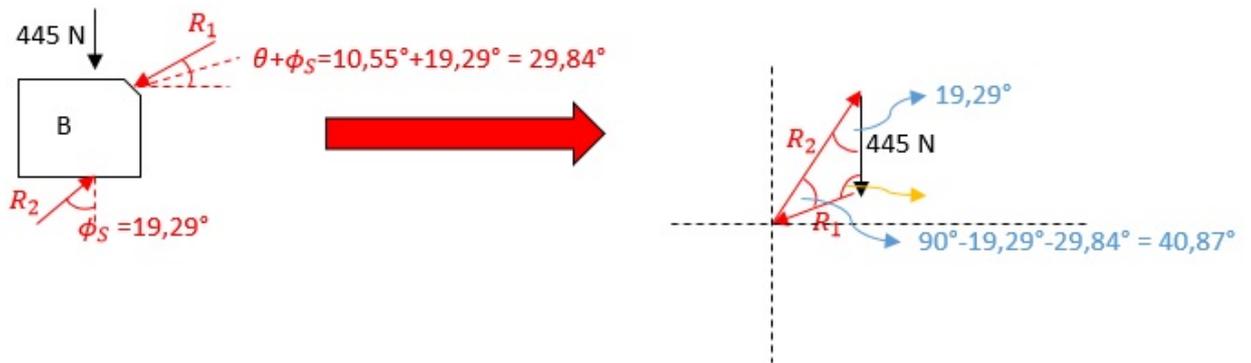


Figura 4.9: Esquema para encontrar R_1

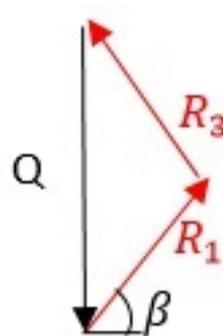


Figura 4.10: Esquema para encontrar Q

Problema 4.0.6. *Supondo que uma cunha de 10° é usada para dividir uma seção de um tronco como mostra a figura 4.11. O coeficiente de atrito estático entre a cunha e o tronco é de 0,35. Sabendo que uma força P de magnitude 2700N foi necessária para inserir a cunha, é preciso que se determine a magnitude das forças exercidas na madeira pela cunha após a inserção.*

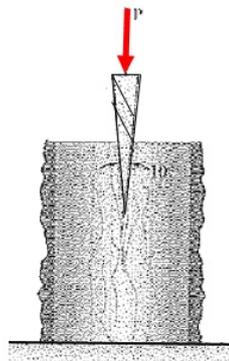


Figura 4.11: Cunha introduzida no tronco

Solução 4.0.6. Nesse caso a cunha está com iminência para baixo. Daí,

$$\phi_S = \text{arctg}(\mu_S)$$

$$\phi_S = \text{arctg}(0,35)$$

$$\phi_S = 19,29^\circ.$$

Por simetria e analisando o esquema [4.12](#), tem-se

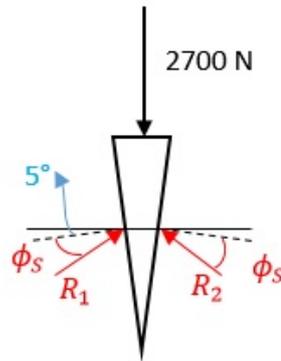


Figura 4.12: Esquema das forças de resistências na cunha

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot R_1 \cdot \text{sen}(5^\circ + \phi_S) \\ 2700 &= 2 \cdot R_1 \cdot \text{sen}(5^\circ + 19,29^\circ) \\ 1350 &= R_1 \cdot \text{sen}(24,29^\circ) \\ R_1 = R_2 &= \frac{1350}{\text{sen}(24,29^\circ)} \\ R_1 = R_2 &\cong 3282N \end{aligned}$$

Quando P é removido, os componentes verticais de R_1 e R_2 desaparecem deixando os componentes horizontais. Logo,

$$\begin{aligned} R_1x &= R_2x \\ R_1x &= R_1 \cdot \text{cos}(24,29^\circ) \\ R_1x &= 3282 \cdot \text{cos}(24,29^\circ) \\ R_1x &\cong 2991,5N \end{aligned}$$

Note-se que como $\phi_S > 5^\circ$, a cunha é auto-travante [1](#).

Problema 4.0.7. Parafusos de alta resistência são usados na construção de muitas estruturas de aço como mostra a figura [4.13](#). Para um parafuso de 24 mm de diâmetro nominal, a tensão mínima exigida do parafuso é de 210 kN. Assumindo que o coeficiente

¹que possui travamento automático

de atrito seja 0,40, determine o torque necessário que deve ser aplicado ao parafuso e à porca. O diâmetro médio do fio é 22,6 mm e o avanço é de 3 mm. Despreze o atrito entre a porca e a arruela e assumo que o parafuso seja de rosca quadrada.

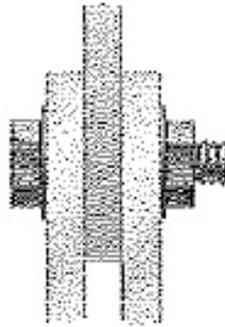


Figura 4.13: Parafuso com porca

Solução 4.0.7. Analisando o bloco em declive na figura 4.14, tem-se:

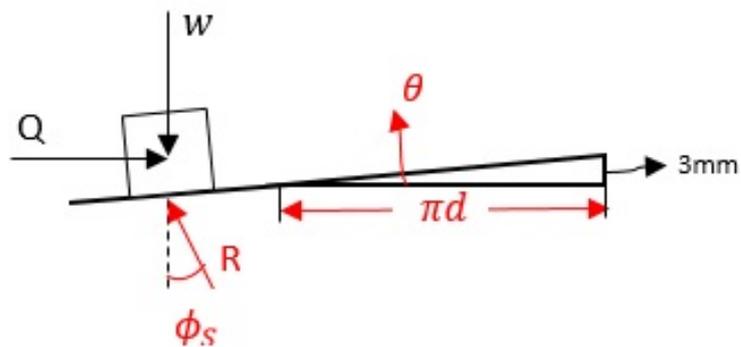


Figura 4.14: Bloco em declive

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{22,6 \cdot \pi}\right)$$

$$\theta = 2,42^\circ.$$

Por outro lado,

$$\phi_s = \operatorname{arctg}(0,40)$$

$$\phi_s = 21,801^\circ.$$

Analisando o triângulo 4.15, tem-se que:

$$Q = 210 \cdot \operatorname{tg}(21,801 + 2,42)$$

$$Q = 210 \cdot \operatorname{tg}(24,221)$$

$$Q = 94,47N.$$

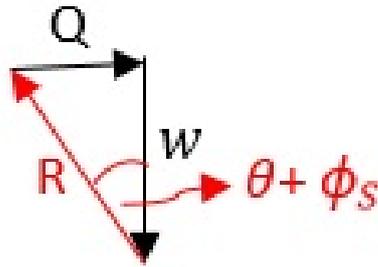


Figura 4.15: Triângulo formado pelas componentes Q , W e R

Portanto o torque será igual a

$$T = \frac{d}{2}Q$$

$$T = \frac{22,6}{2} \cdot 94,47$$

$$T \cong 1068N \cdot m.$$

Problema 4.0.8. As extremidades de duas hastes fixas A e B são feitas sob a forma de um parafuso de rosca única com raio médio de 6 mm e passo de 2 mm como mostra a figura 4.16. A haste A tem uma rosca direita e a haste B tem uma rosca esquerda. O coeficiente de atrito estático entre as hastes e a luva roscada é de 0,12. Determine a magnitude do par que deve ser aplicado à luva para aproximar as hastes.



Figura 4.16: Parafuso de rosca única

Solução 4.0.8. Analisando o esquema 4.17, tem-se:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{2}{2 \cdot \pi \cdot 6}$$

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{1}{\pi \cdot 6}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\pi \cdot 6}\right)$$

$$\theta = 3,037^\circ$$

Por outro lado, sabe-se que $\mu_S = \operatorname{tg}(\phi_S)$. Logo,

$$\phi_S = \operatorname{arctg}(0,12)$$

$$\phi_S = 6,843^\circ$$

Na seção parafuso tem-se $Q = W \cdot r \cdot \operatorname{tg}(\phi_s + \theta)$. Então,

$$Q = 2000 \cdot 0,006 \cdot \operatorname{tg}(6,843 + 3,037)$$

$$Q = 2,09 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Portanto, o total do torque será $2 \cdot 2,09 \cong 4,18 \text{ N} \cdot \text{m}$.

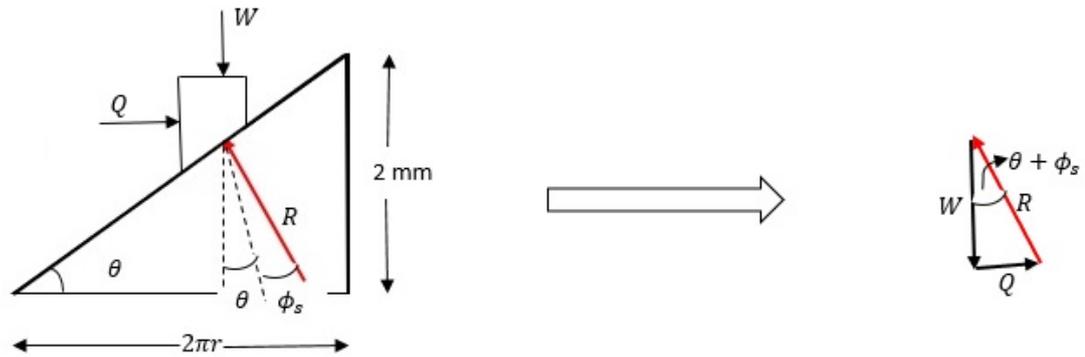


Figura 4.17: Esquema das componentes

Problema 4.0.9. Um problema comum do cotidiano é quando estamos andando de bicicleta. Suponha que você esteja com sua bicicleta movimentando em linha reta a uma velocidade constante de 18 km/h. E que o pneu, devidamente montado na roda, possua diâmetro igual a 70 cm. No centro da roda traseira, presa ao eixo, há uma roda dentada de diâmetro 7,0 cm. Junto ao pedal e preso ao seu eixo há outra roda dentada de diâmetro 20 cm. Suponha ainda que as duas rodas dentadas estejam unidas por uma corrente, conforme mostra a figura 4.18. Despreze o deslizamento entre as rodas dentadas. Então, se você imprimir aos pedais um movimento circular uniforme, é possível determinar o número de voltas por minuto que você impõe aos pedais durante esse movimento? Considere $\pi = 3$.

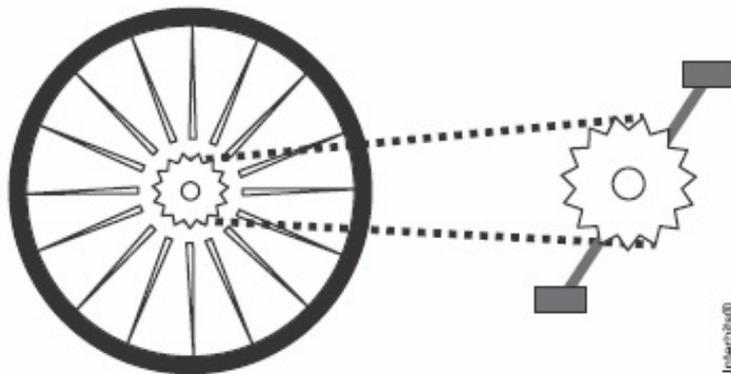


Figura 4.18: Acoplamento entre uma catraca e uma coroa

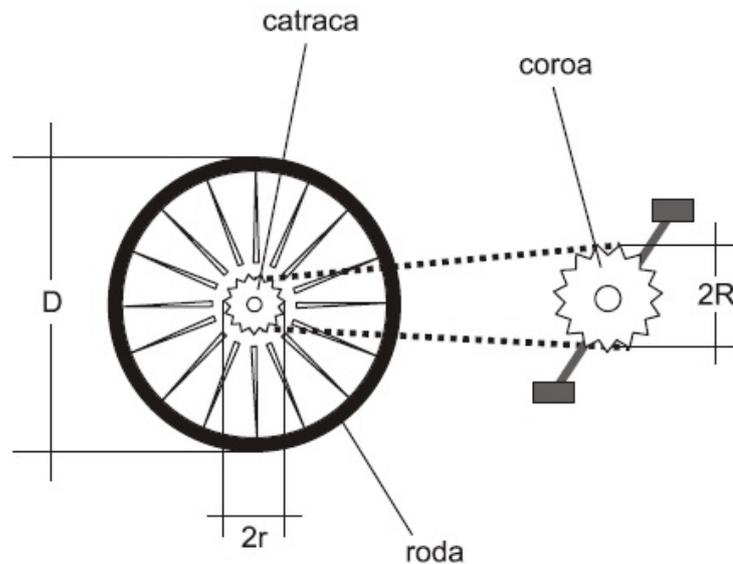


Figura 4.19: Roda, catraca e coroa de uma bicicleta

Solução 4.0.9. Observe o seguinte esquema:

Chamando ω a velocidade angular da coroa e Ω a velocidade angular da catraca e conseqüentemente da roda, já que elas rodam solidárias. No entanto, a coroa e a catraca são interligadas por uma correa, logo pode-se afirmar que as velocidades lineares de suas periferias são iguais. Daí, $V_1 = V_2$ o que implica em $\omega \cdot R = \Omega \cdot r$. Logo,

$$\omega = \frac{\Omega \cdot r}{R} \quad (4.1)$$

Por outro lado, a velocidade da bicicleta pode ser calculada por $V = \omega \cdot \frac{D}{2}$ o que implica em

$$\omega = \frac{2V}{D}. \quad (4.2)$$

Substituindo [4.2](#) em [4.1](#), tem-se

$$\Omega = \frac{2 \cdot V \cdot r}{R \cdot D}.$$

Como $V = 18\text{km/h} = 5\text{m/s}$, $D = 70\text{cm} = 0,7\text{m}$, $2R = 20\text{cm}$, então $R = 10\text{cm} = 0,1\text{m}$. Além disso, $r = 0,035\text{m}$. Logo,

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{2 \cdot 5 \cdot 0,035}{0,1 \cdot 0,7} \\ &= \frac{5}{0,7} \\ \Omega &= \frac{2 \cdot \pi}{\frac{1}{60}} = 50\text{RPM}. \end{aligned}$$

Portanto, o número de voltas por minutos é 50.

Capítulo 5

Conclusão

As máquinas simples surgiram de uma forma revolucionária para o ser humano. O estudo formal e desenvolvimento das máquinas teve contribuição de diversos cientistas, dentre eles, Arquimedes, Da Vinci e Galileu Galilei. Observa-se nesta dissertação que a matemática é fundamental para o funcionamento das máquinas. De forma geral, por trás de cada máquina, existe uma expressão matemática que garante o seu funcionamento e performance.

Essas grandes descobertas da Física tiveram início na Antiguidade e evoluíram com o desenvolver da História. A partir delas, a humanidade conseguiu criar máquinas mais complexas que otimizam sua produtividade. Se não fosse por elas, as técnicas atuais de elevação e amarração de cargas não existiriam e, provavelmente, não produziríamos tanto quanto produzimos.

O primeiro mecanismo considerado uma máquina-ferramenta data do século XVI: uma mandriladora de canhões de bronze movida à água. O eixo giratório do equipamento era feito de madeira, a partir de troncos de árvore, daí o nome eixo-árvore como configurada na figura [5.1](#). Todavia, máquinas capazes de moldar metais pesados só começaram a surgir dois séculos depois, com a Revolução Industrial.

A relação interdisciplinar deste trabalho tem a finalidade de ajudar cada leitor à compreender o porque dos conteúdos matemáticos serem tão relevantes para o ensino e para a aplicação no dia a dia. Foi observado aqui, que tarefas que eram praticamente impossíveis de serem realizadas a milhares de anos atrás, se tornaram possíveis através dos mecanismos das máquinas simples.

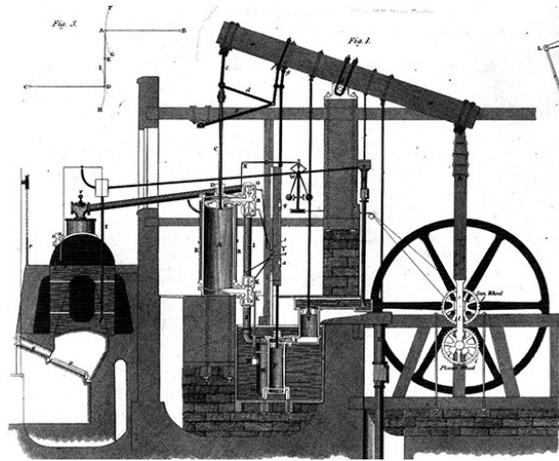


Figura 5.1: Esquema da máquina a vapor de Watts (Imagem: Universidade de Houston – EUA)

Referências Bibliográficas

- [1] P.F. Barbieri, Revista Brasileira de Ensino de Física 33, 4304 (2011).
- [2] P.A. Tipler e G. Mosca, Física para Cientistas e Engenharia (LTC, Rio de Janeiro, 2009), v.1.
- [3] P.V. Araújo: Curso de Geometria, Coleção Trajectos Ciência, Ed. Gradiva (1998).
- [4] J.L.M. Barbosa: Geometria Euclidiana Plana, Coleção Professor de Matemática, Ed. SBM (1994).
- [5] LIMA, Elon Lages: Coordenadas no plano/ Elon Lages e Paulo Cezar Pinto Carvalho. 6.ed. Rio de Janeiro (2013).
- [6] MARQUES, Gil da Costa: Dinâmica do Movimento dos Corpos, licenciatura em ciências.
- [7] ASSIS, André Koch Torres, 1962 - Arquimedes, o centro de gravidade e a Lei da Alavanca/ Andre K.T. Assis.
- [7] TRANSMISSÕES FLEXÍVEIS-CORREIAS. Escola Superior de tecnologia de Setubal. Portugal.
- [8] MECÂNICA: Noções Básicas de Elementos de Máquinas. SENAI-ES.1996.
- [9] HADEMACHER, H. The enjoyments of mathematics, N. York: Dover, 1990.
- [10] CUNDY, H.M.; ROLLET, A.P. Mathematical models, Oxford, 1961.
- [11] WELLS, D. Dicionário de geometria curiosa, Lisboa: Gradiva, 1998.
- [12] CHAMBERS, Ephraim (1728), «Table of Mechanicks», Cyclopædia, A Useful Dictionary of Arts and Sciences (London, England), Volume 2: 528, Plate 11 Chambers, Ephraim (1728), Table of Mechanicks, vol. Volume 2, London, England, p. 528, Plate 11.
- [13] BASTOS, R.(2007). Notas sobre o ensino de Geometria: Transformações Geométricas. Revistas da AMP, Lisboa.
- [14] JOHNSON, R.A.(1960). Advanced Euclidean Geometry. Dover Publications, Inc. New York.
- [15] HADEMACHER, H. The enjoyments of mathematics, N. York: Dover, 1990.
- [16] BRANNAN, David A., ESPLEN, Matthew F. e GRAY, Jeremy J. Geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0-521-59787-0.