UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR - ARRAIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

RUBENS ALVES DE OLIVEIRA

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU: RESGATE HISTÓRICO DOS SEUS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

ARRAIAS-TO
2018

RUBENS ALVES DE OLIVEIRA

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU: RESGATE HISTÓRICO DOS SEUS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para à obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Orientadora: Prof.ª Drª. Alcione Marques Fernandes.

ARRAIAS-TO
2018

À minha esposa Adriana, meus filhos Maria Eduarda, Pedro Henrique, minha irmã Nalva que Deus a tenha num bom lugar e a todos que contribuíram para realização deste sonho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela força nos momentos necessários;

A minha orientadora, professora Drª. Alcione Marques Fernandes, que contribuiu de forma significativa para este trabalho;

A toda minha família pela compreensão;

Aos meus colegas de trabalhos nas escolas em que trabalho que sempre estiveram do meu lado nos momentos mais difíceis;

A todos os colegas de PROFMAT, que tanto ajudaram no decorrer desses últimos anos;

Aos professores que tive no programa;

À UFT, que ofereceu a oportunidade;

ÀCAPES, que disponibilizou auxílio financeiro, tão importante neste período; enfim, a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para realização deste trabalho.

A todos, meus sinceros agradecimentos.

RESUMO

Esta dissertação é um estudo a respeito das equações do 2º grau em um contexto histórico que visa dar ao professor de matemática dos Ensinos Fundamental (9º ano) ou Médio (1º série) condições de instigar os estudantes a levantarem importantes questionamentos sobre o assunto, o que aumenta o interesse e, consequentemente, melhora o aprendizado da turma. Dessa forma, esta Dissertação pode oferecer ao professor de matemática de Ensino Fundamental ou Médio, condições para esclarecer algumas dúvidas dos estudantes e enriquecer sua prática com a História da Matemática, tendo em vista que suas aulas podem ser ressignificadas com a utilização de alguns métodos para resolução das equações polinomiais do 2º grau desenvolvidas ao longo de muitos séculos. Esta dissertação também poderá ser utilizada também como referência por estudantes em nível de graduação, principalmente nos cursos de Licenciatura em Matemática, para ampliação de seus conhecimentos sobre equações polinomiais do 2º grau e para contribuir com a formação dos futuros professores e professoras..

Palavras-chave: História da Matemática. Equação polinomial do 2º grau. Métodos de Resolução.

ABSTRACT

This dissertation is a study about the second degree equations in a historical context which aims to give the math teacher of the elementary school (9th Year) or middle school (1st Grade) conditions to instigate the students to raise important questions on the subject, which increases interest and, consequently, improves the learning of the class. This way, this dissertation can offer the teacher in mathematics of elementary of middle school, conditions to clarify some doubts of the students and enrich their practice with the History of Mathematics, in view of their classes can be resignified with the use of some methods solve the polinomial equations of second degree developed along many centuries. This dissertation is too addressed to teachers who work in Elementary School (9th grade) or Middle (1st grade), but will can also be used as a reference by undergraduates at the undergraduate level, especially in the degree courses in Mathematics, for extension of their knowledge about polynomial equations of the second grade and for contribute to the training of future teachers.

Key words: History of Mathematics. Polynomial equation of the second degree. Methods of Resolution.

FOLHA DE APROVAÇÃO

LISTA DE QUADROS

[0]Lista de Figuraslof

Lista de Figuras

*

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Como docente da disciplina de matemática dos ensinos fundamental e médio, tive muitos alunos que, falta de estímulo, sentiam-se satisfeitos em apenas cumprir o que era determinado mesmo que não tivessem entendido direito o que estava sendo explicado. Ao ensinar equações polinomiais do 2º grau não foi diferente. Percebi que o conteúdo dos livros adotados pelo colégio não era suficiente. As equações polinomiais do 2º grau são estudadas desde o ensino fundamental, mais precisamente no 9º ano, e pelo que pude analisar em alguns livros didáticos, os autores iniciam o estudo da maneira direta (partindo da definição e apresentando os exemplos), porém tudo é feito para que ao final desse processo o aluno domine, às vezes sem sequer refletir, a aplicação da fórmula resolutiva, muito conhecida aqui no Brasil como fórmula de Bhaskara.

Por vezes, mostra- se também como justificar geometricamente esta fórmula pelo processo de "completar quadrado", o que já era conhecido pelos matemáticos árabes, como Al – Khowarizmi, 825 d.C. No entanto, a maioria de nossos alunos ficam surpresos quando relatamos que equações polinomiais do 2º grau tem uma longa História e que muitos matemáticos importantes, de várias civilizações, resolveram- na.

Algumas vezes são inseridos nos livros, exercícios que tentam se relacionar com situações reais, mas não chegam a dar uma visão ampla aos alunos do que se pode realmente fazer com as equações polinomiais do 2º grau.

Apesar de que alguns alunos se contentavam em meramente encontrar as raízes da equação, mas sempre havia aquele que desejava mais, era inquieto, queria saber, por exemplo: Quem foi Bhaskara? Como se chegou à fórmula resolutiva usada atualmente? Será que haveria outras maneiras de solucionar essas equações?

Desta forma, esta Dissertação mostra alternativas para o professor trabalhar as equações polinomiais do 2º grau no Ensino Fundamental (9º ano) e até no 1º ano do Ensino Médio através de uma perspectiva histórica, mas esta pode ser utilizado também por alunos do nível de graduação, principalmente nos cursos de Licenciatura em Matemática, para uma ampliação de seus conhecimentos sobre equações polinomiais do 2º grau podendo ser utilizada na formação desses futuros professores.

O objetivo é investigar a evolução histórica do conceito de equações polinomiais do segundo grau, para propor metodologias para o seu ensino que possam melhorara prática do professor de matemática, instigando o docente a conhecer as várias maneiras de resolver equações polinomiais do 2º grau desde a antiguidade e esclarecer dúvidas a respeito da origem e da autoria desses métodos, além de mostrar que o professor deve sair de uma mera reprodução da abordagem do livro didático adotado na sua escola, pois o resgate histórico das equações polinomiais do 2º grau pode contribuir para uma melhor compreensão desta questão pelos alunos.

2 METODOLOGIA

Para demonstrarmos os métodos adotados para a realização da pesquisa faz-se necessário uma breve abordagem sobre método e metodologia. Assim, de acordo com Demo (2007, p. 12)

> Metodologia distingue-se [...] de Métodos e técnicas, por estar em jogo no segundo caso o trato da realidade empírica, enquanto no primeiro existe a intenção da discussão problematizante, a começar pela repulsa em aceitar que a realidade social se reduza à face empírica. Não se trata de rebaixar Métodos e técnicas a atividade secundária. Para o trato da face empírica são essenciais. Metodologia adquire o nível de típica discussão teórica, inquirindo criticamente sobre as maneiras de se fazer ciência [...].

Como nosso estudo se enquadra na área de pesquisa denominada História da Matemática, desenvolvemos a metodologia de pesquisa que acreditamos ser a mais adequada, tendo em vista nossos objetivos de investigação e esta pesquisa foi desenvolvida nas seguintes etapas:

1ª Etapa: Levantamento bibliográfico, com o intuito de encontrar livros, dissertações, teses e artigos que, de alguma forma, se relacionam com os objetivos estabelecidos acima. Marcone; Lakatos (2006) observam que a pesquisa bibliográfica nos "oferece meios para definir, resolver, não somente problemas já conhecidos, como também explorar novas áreas onde os problemas não se cristalizaram suficientemente." Segundo os autores a pesquisa bibliográfica, após o contato direto, nos proporciona um novo olhar sobre o assunto pesquisado.

2ª Etapa: Aplicação de questionário para os discentes dos 9º ano do ensino fundamental do Colégio Dom Orione, na cidade de Tocantinópolis – TO, com objetivo de analisar e compreender quais métodos os mesmos utilizam para resolução de equação polinomial do 2º grau.

3ª Etapa: Aplicação de questionário para os docentes, objetivando compreender quais métodos eles utilizam em suas aulas para resolver equações polinomiais do 2º grau.

A dissertação está organizada em oito seções. A primeira e segunda seção é introdução e metodologia, respectivamente, na seção três contém os métodos de resolução de equações polinomiais de segundo grau usados pelos Babilônios e Egípcios.

Na seção quatro os métodos usados pelos Gregos principalmente Euclides de Alexandria.

Na quinta é apresentada os métodos dos Árabes e hindus.

Na sexta apresentamos os métodos de Viète e Descartes.

Finalmente, na sétima apresentamos as pesquisas com os professores e alunos.

Na oitava as considerações finais.

3 OS MÉTODOS BABILÔNICOS E EGÍPCIOS

Há aproximadamente 4000 anos, na antiga Babilônia, a Matemática surgiu como ferramenta para a resolução de problemas relacionados ao cotidiano. Sua evolução ocorreu ao longo do tempo e partiu das tentativas humanas em representar seus pensamentos, criações e soluções numa linguagem específica.

Na aprendizagem dos conceitos matemáticos, segundo Mendes, (2006, p 15) "[...] o conhecimento da História da Matemática deveria se constituir em uma parte indispensável da bagagem de conhecimentos do matemático em geral e do professor de qualquer nível de ensino (primário, secundário ou superior)."

O estudo das equações polinomiais do 2º grau em um contexto histórico visa oferecer ao professor de matemática do Ensino Fundamental (9º ano) condições de instigar o aluno a levantar importantes questionamentos sobre o assunto aumentando o seu interesse e, consequentemente, melhorando o seu aprendizado.

> Fala- se muito, hoje em dia, em inserir o ensino de matemática em algum contexto. Justamente porque muitos alunos consideram a matemática muito difícil e abstrata. Contudo, a matemática é vista, ao mesmo tempo, como saber abstrato por excelência e, justamente por isso, ao mesmo tempo, ajudaria a desenvolver o raciocínio e o pensamento lógico. Sendo assim, como seria possível torna – lá mais concreta? (ROQUE, 2012, p.7).

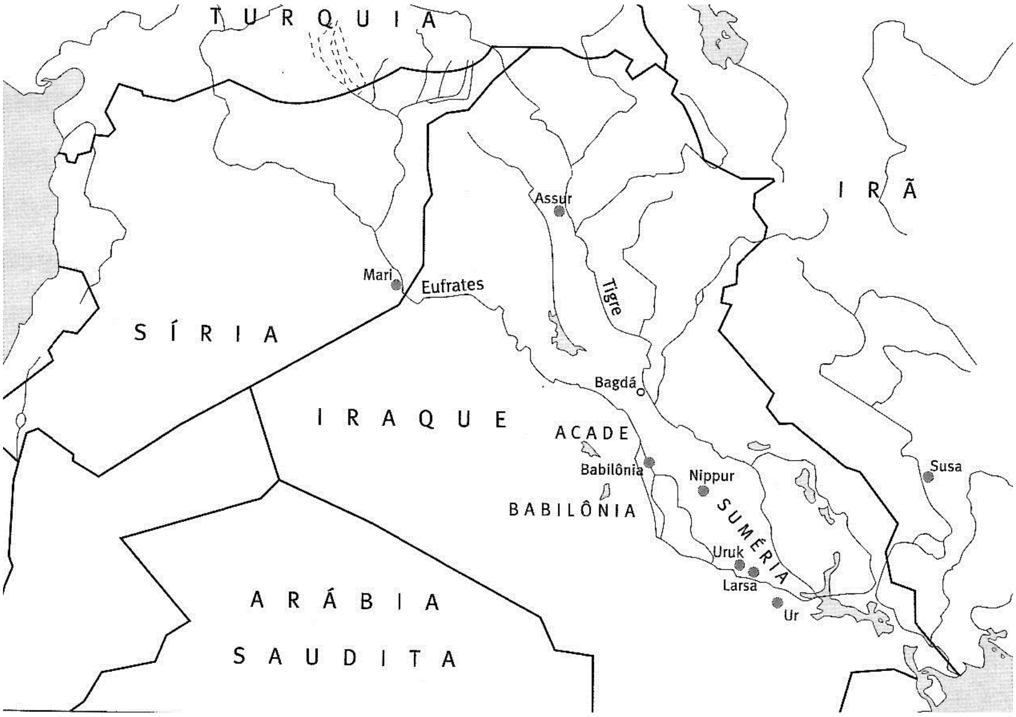
Diante desta citação a autora apresenta uma proposta, para que o professor de matemática ao iniciar uma explicação sobre equações polinomiais do 2º grau ou de qualquer novo assunto fazer uma introdução histórica. Se essa introdução for rica em detalhes e bem planejada, deverá estimular o interesse do aluno pelo desenrolar do tema abordado, fazendo com que o aprendizado seja resultado de um processo prazeroso.

3.1 Babilônios

Inicialmente, quando falamos em História da Matemática, o nosso pensamento é arremetido às civilizações antigas, portanto, é interessante que comecemos daquela época e chegaremos aos tempos atuais.

A Mesopotâmia, que em Grego significa "terra entre rios", situava-se no oriente médio, no chamado crescente fértil, entre os rios Tigre e Eufrates, onde hoje estão situados o Iraque e a Síria, principalmente, como mostra a figura 1.

Figura 1: Mapa da Mesopotâmia



Fonte: Roque (2012, p. 37).

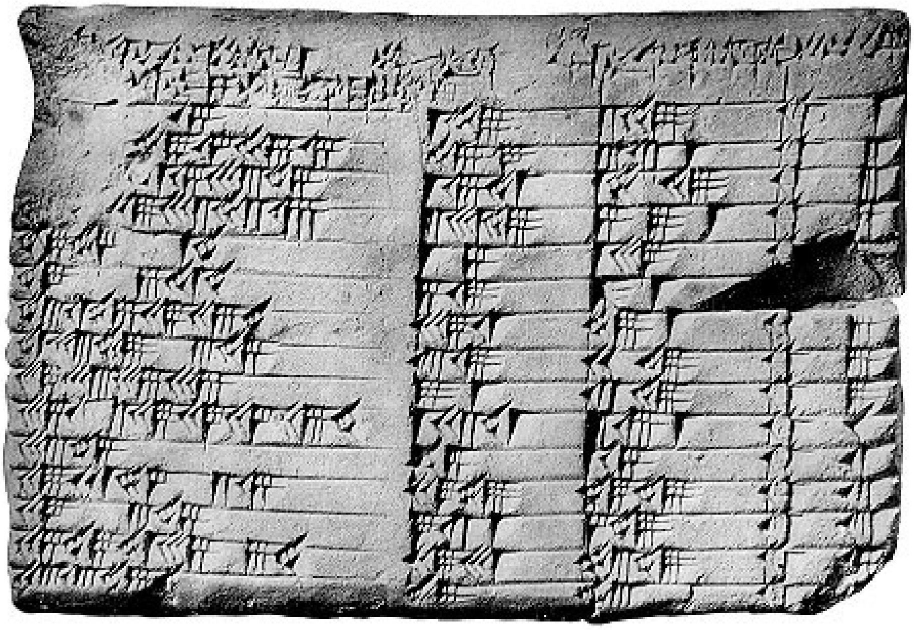
Entre os rios Tigre e Eufrates, destacavam - se várias cidades que se constituíam em pequenos centros de poder, mas também passavam por ali povos nômades, que, devido à proximidade dos rios, acabavam por se estabelecer.

> Dentre os que habitaram a Mesopotâmia estão os sumérios e os acadianos, hegemônicos até o segundo milênio antes de Cristo. As primeiras evidências de escrita são do período sumério, por volta do quarto milênio a.C. Em seguida, a região foi dominada por um império cujo centro administrativo era a cidade da Babilônia, habitada pelos semitas, que criaram o Primeiro Império Babilônico. Os semitas são conhecidos como "antigos babilônios". (ROQUE. 2012, p. 36).

A ciência e, por consequência, a matemática mesopotâmica teve um grande desenvolvimento por parte dos sacerdotes que detinham o saber nesta civilização. Assim, esta civilização teve a matemática e outras ciências extremamente voltadas para a prática com o objetivo de facilitar o cálculo do calendário, a administração das colheitas, organização de obras públicas e a cobrança de impostos, bem como seus registros.

Os Babilônicos tinham uma maior habilidade e facilidade para efetuar cálculos, talvez em virtude de sua linguagem ser mais acessível. Eles tinham técnicas para equações polinomiais do 2º grau, além de possuírem fórmulas para áreas de figuras planas simples e fórmulas para o cálculo do volume de sólidos simples. Sua geometria tinha suporte algébrico. Também conheciam as relações entre os lados de um triângulo retângulo e trigonometria básica, conforme descrito no tablete, "Plimpton 322" (George A. Plimpton Collection, Universidade Columbia), figura 2.

Figura 2: Tablete Plimptom 322

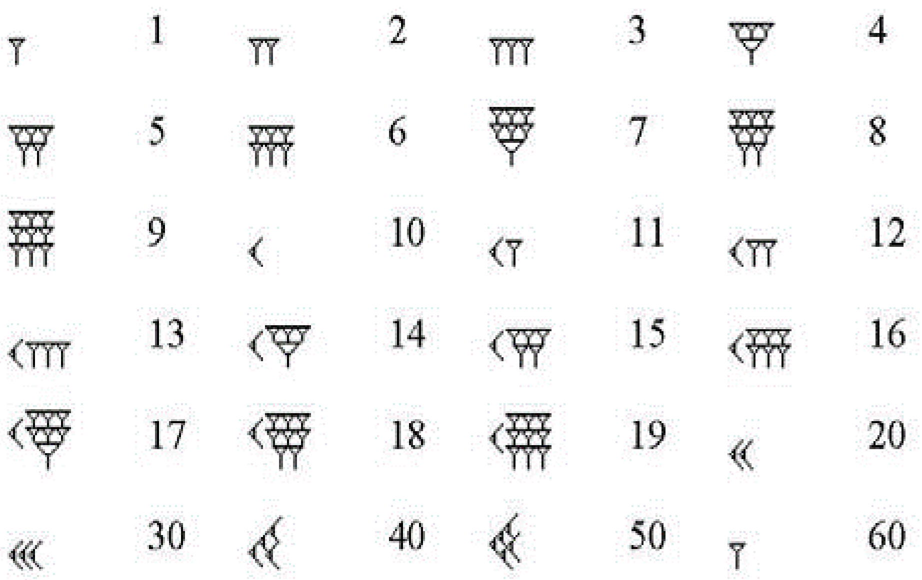


Fonte: http://www.math.ubc.ca/ cass/courses/m446-03/pl322/pl322.html

Os babilônicos possuíam um sistema posicional sexagesimal bem desenvolvido, o qual trazia enormes facilidades para os cálculos, visto que os divisores naturais de 60 são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, facilitando o cálculo com frações. O sistema sexagesimal posicional, usado no período babilônio, surgiu da padronização deste sistema numérico, antes do final do terceiro milênio. Na verdade, segundo Roque (2012, p. 6), há evidências de que, mais ou menos em meados do terceiro milênio a.C., as propriedades dos números passaram a ser investigadas por si mesmas, transformação que pode ser associada ao início de uma Matemática mais abstrata.

O sistema sexagesimal era usados de modo sistemático em textos matemáticos ou astronômicos, O sinal usado para designar a unidade era uma cunha, esse sinal era repetido para formar os números maiores que 1, como 2, 3, e assim por diante, até chegar a 10, representado por um sinal diferente: em seguida, continuava-se a acrescentar os mesmos símbolos usados de 1 a 9, até chegar a 20, representado, então, por esse processo aditivo prosseguia apenas até o número 60, quando se voltava a empregar o mesmo sinal usado para o número 1, como mostrado a seguir pela figura 3.

Figura 3: Escrita cuneiformes dos números



Fonte: Roque (2012, p.10)

> Como podemos observar na Figura 3, o número sessenta era representado pelo mesmo símbolo usado para representar o número um. Por isso o sistema dos antigos babilônios usa uma notação posicional de base sessenta. Ou seja, é um sistema sexagesimal. Na verdade, eles usavam uma combinação de base sessenta e de base dez, pois os símbolos até cinquenta e nove mudam de dez em dez. Ainda hoje, o sistema que usamos para representar as horas, minutos e segundos é um sistema posicional sexagesimal. Assim, 1h 4min 23s é igual a $1 \cdot 3600(60 \cdot 60) + 4 \cdot 60 + 23 = 6023$s. (ROQUE. 2012, p. 10).

Uma diferença entre o nosso sistema e o dos babilônios é que estes empregavam um sistema aditivo para formar combinações distintas de símbolos que representam os números de 1 a 59, enquanto o nosso utiliza símbolos diferentes para os números de 1 a 9 e, em seguida, passa a fazer uso de um sistema posicional. Em nosso sistema de numeração, no número decimal 135 o algarismo 1 representa 100; o 3 representa 30; e o 5 representa 5 mesmo, ou seja, $135 = 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$, enquanto 135 na base sessenta era representado por $135 = 1 \cdot 60^2 + 3 \cdot 60^1 + 5 \cdot 60^0 = 3985$.

3.2 As operações no Sistema Babilônico

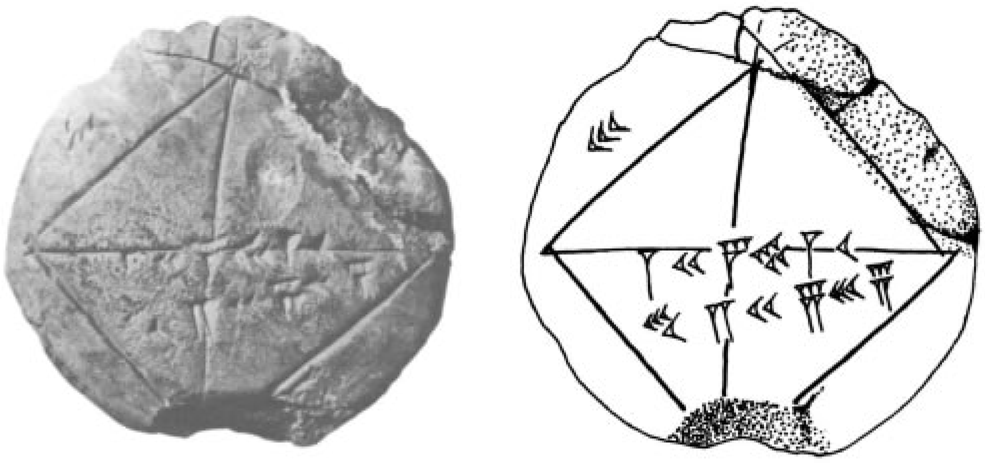
A eficácia da computação babilônica não resultou somente de seu sistema sexagesimal de numeração. Os escribas mesopotâmicos foram hábeis em desenvolver algorítmicos, entre os quais um para extrair a raíz quadrada como será mostrado a seguir, eles também sabiam fazer contas de somar, subtrair, multiplicar, dividir.

> Em primeiro lugar, eles dispunham de tabletes com a mesma função de nossas “tabuadas”. A maioria dessas operações realizadas pelos babilônios usava diretamente estes tabletes. No caso da multiplicação elas eram fundamentais. Um exemplo de uma tabuada de multiplicação por 25.
> 1 (vezes 25 é igual a) 25
> 2 (vezes 25 é igual a) 50
> 3 (vezes 25 é igual a 75), na notação babilônica é 1; 15
> 4 (vezes 25 é igual a 100), na notação babilônica é 1; 40
> 5 (vezes 25 é igual a 125), na notação babilônica é 2; 05
> 6 (vezes 25 é igual a 150), na notação babilônica é 2; 30
> ... (ROQUE. 2012, p. 16)

3.2.1 O cálculo da raiz quadrada

Os babilônios calculavam potências e raízes quadradas, que eram registradas em tabletes. O exemplo mais conhecido de cálculo de raízes quadradas calculado pelo babilônios encontra – se no tablete YBC 7289, produzido entre 2000 e 1600 a. C como mostra a figura 4.

Figura 4: Tablete YBC 7289



Fonte: Roque (2012, p.19)

Como exemplo de aplicação do procedimento dos babilônicos para calcular raízes quadradas tomemos a seguinte situação.

Qual é a medida do lado de um quadrado de área 50?

Em uma primeira aproximação, selecionava – se o número inteiro cujo quadrado mais se aproximava de 50. Ou seja, 7.

Dividiam 50 pela primeira aproximação, $\frac{50}{7} = 7,1$, até que o quociente ficasse com o dobro de algarismo do divisor.

Calculava-se a média aritmética entre a primeira aproximação e o quociente, ou seja, $\frac{7+7,1}{2} = 7,05$. Segunda aproximação

Repetia-se o processo, ou seja, $\frac{50}{7,05} = 7,09219$.

Tomando novamente a média aritmética, ou seja, $\dfrac{7,05+7,09219}{2} = 7,071095$

Este é o resultado da $\sqrt{50} = 7,071095$, até a sexta casa decimal. E hoje com calculadora obtemos $\sqrt{50} = 7,07106$, o que difere apenas no algarismo da 5ª casa decimal.

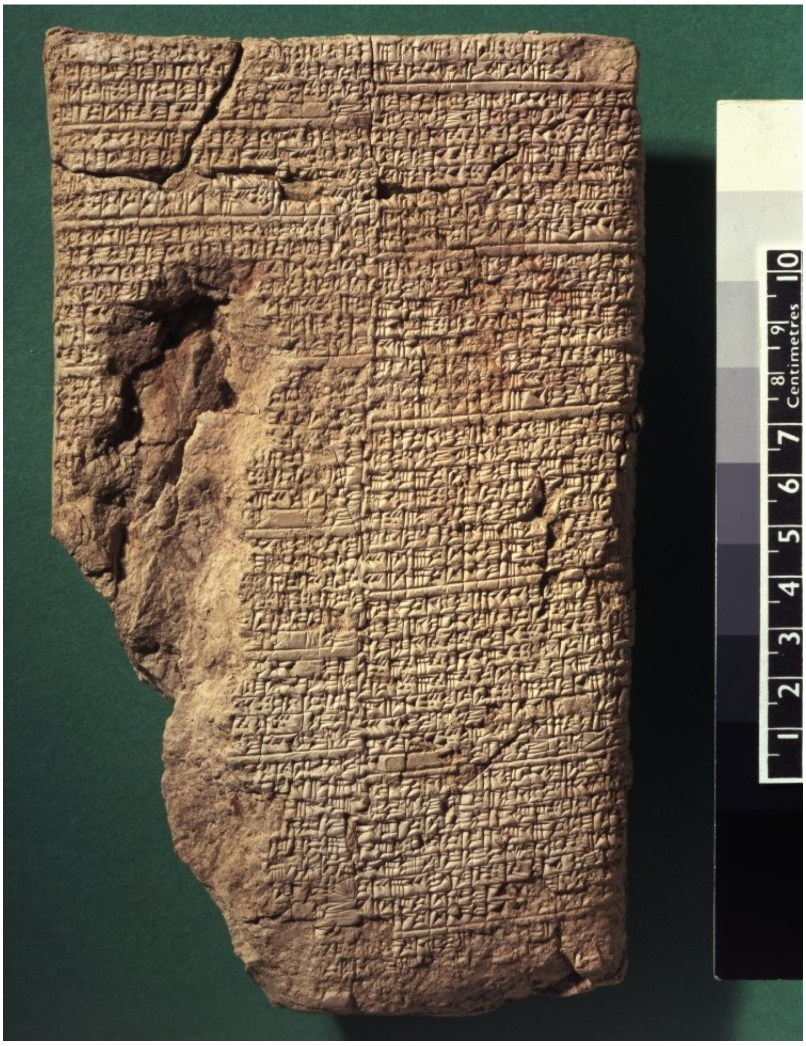
3.2.2 Problemas de equações polinomiais do segundo grau na Babilônia

Além de tabletes contendo resultados de operações aritméticas, existem outros descrevendo procedimentos que equivalem a resolver equações polinomiais do segundo grau, entretanto a resolução vinha sempre gravada na tabuleta sem nenhuma explicação, seguindo fielmente na linguagem algébrica de hoje esta fórmula:

$$\mathrm{x} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \pm \frac{b}{2}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{x} = \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac} - \frac{b}{2}\right)\frac{1}{a}$$

Como exemplo, os problemas que encontram- se no tablete BM 13901 do British Museu figura 5.

Figura 5: Tablete BM 13901



Fonte: http://www.britishmuseum.org/

1) Ao adicionar a área e o lado de um quadrado obtive $0,45$, qual é o lado[1]? Que traduzindo na linguagem moderna e utilizando o sistema sexagesimal é escrita como $(x^2+x=0,45)$.

1. Tome 1
2. Fracione 1 tomando a metade $\frac{1}{2}$ (que na notação babilônica é $0,30$)
3. Multiplique $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, ou seja, $0,30$ por $0,30$ ($\frac{1}{4}$ na notação babilônica é $0,15$)
4. Some $\frac{1}{4}$ a $0,45$, ou seja, $0,15+0,45=1$
5. 1 é raiz quadrada de 1
6. Subtraia os $0,30$ de $1(1-0,3=0,30)$
7. $0,30$ é o lado do quadrado.

$$x=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0,45}-\frac{1}{2}=0,30$$

Neste mesmo tablete, BM 13901, há um outro problema, traduzido como[2]

2) Subtraí o terço da área e depois somei o terço do lado do quadrado à área restante obtendo $0,20$. Qual é o lado do quadrado? $x^2-\frac{x^2}{3}+\frac{x}{3}=0,20 \Rightarrow \frac{2x^2}{3}+\frac{x}{3}=0,20 \rightarrow 0,40x^2+0,20x=0,20$.

($\frac{1}{3}=0,20$ na escrita babilônica, logo $\frac{2}{3}=0,40$)

1. Tome 1
2. . Subtraia o terço de 1, ou seja, $0,20$, obtendo $0,40$
3. . Multiplique $0,40$ por $0,20$ obtendo $0,13;20$
4. . Encontre a metade de $0,20(:0,10)$
5. . Multiplique $0,10$ por $0,10(:0,1;40)$
6. . Adicione $0,1;40$ a $13;20(:0,15)$
7. . $0,30$ é raiz quadrada
8. . Subtraia $0,10$ de $0,30(:0,20)$
9. . Tome o recíproco de $0,40(1,30)$
10. . Multiplique $1,30$ por $0,20(:0,30)$

[1]Problema retirado do livro Tópicos de História da Matemática COLEÇÃO PROFMAT
[2]Problema retirado do livro Tópicos de História da Matemática COLEÇÃO PROFMAT

11. . $0,30$ é o lado do quadrado

$$x = \left(\sqrt{\left(\frac{0,20}{2}\right)^2 + 0,40 \cdot 0,20} - \frac{0,20}{2}\right) \cdot \frac{1}{0,40} = 0,30$$

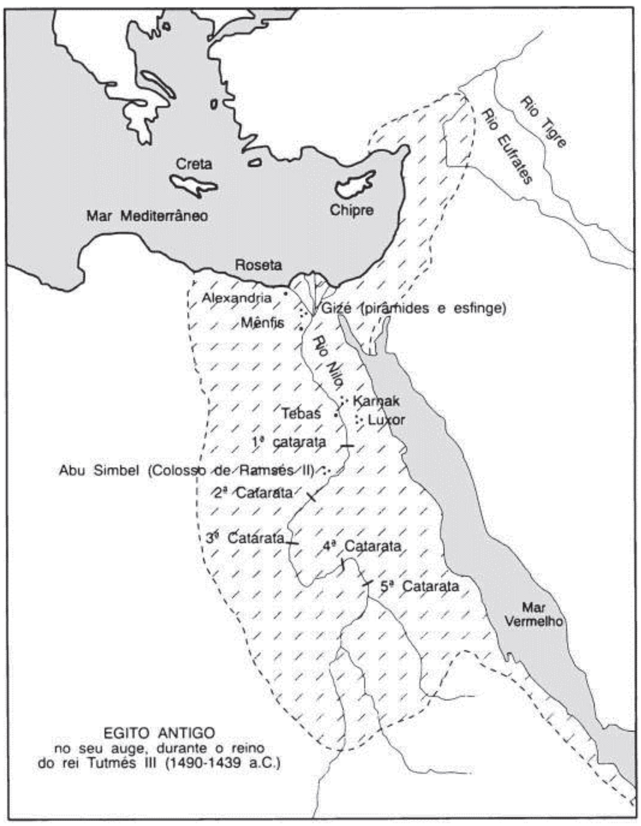
Existem uma grande quantidade de problemas babilônicos que utilizam estes mesmos procedimentos, um problema mais complexo é resolvido fazendo uma adaptação, de modo que, nos passos subsequentes sejam repetidos os passos dos problemas mais simples. E tais problemas mostra a eficácia computacional dos babilônios o que caracteriza uma generalização ainda que muito simples.

> No fim do século XIX e na primeira metade do século XX, as pesquisas dos arqueólogos e dos historiadores da Matemática modificaram totalmente nossa avaliação da qualidade da Matemática praticada na Mesopotâmia, mostrando que ela era claramente mais desenvolvida do que a Matemática egípcia. (PITOMBEIRA, 2012, p. 2).

3.3 Egípcios

A civilização Egípcia desenvolveu- se ao longo de uma extensa faixa de terra fértil que margeava o rio Nilo na África (figura 6). Este rio foi fundamental para o estabelecimento de grupos humanos. Nessa área suas margens férteis revelaram-se propícias à agricultura e, ainda, suas águas caudalosas facilitavam a abertura de canais de irrigação e construção de diques.

Figura 6: Mapa Egito Antigo



Fonte: Eves (2004, p. 68)

> São muito diferentes as histórias políticas do Egito e da Babilônia antigos. Esta última era aberta a invasões de povos vizinhos e, como consequência, havia períodos de muita turbulência em que um império sucedia a outro. O Egito antigo, ao contrário, manteve - se em isolamento, protegido naturalmente de invasões estrangeiras, governado pacífica e ininterruptamente por uma sucessão de dinastias. (EVES, 2004, p.66).

A maioria dos relatos históricos sobre a matemática egípcia indica que sempre foi essencialmente prática, baseada em métodos empíricos de tentativa e erro. Por exemplo, quando o rio Nilo estava no período das cheias, surgiam problemas que para serem solucionados, por este motivo foram desenvolvidos vários ramos da matemática que possibilitaram a construção de estruturas hidráulicas, reservatórios de água, canais de irrigação e a drenagem de pântanos e regiões alagadas.

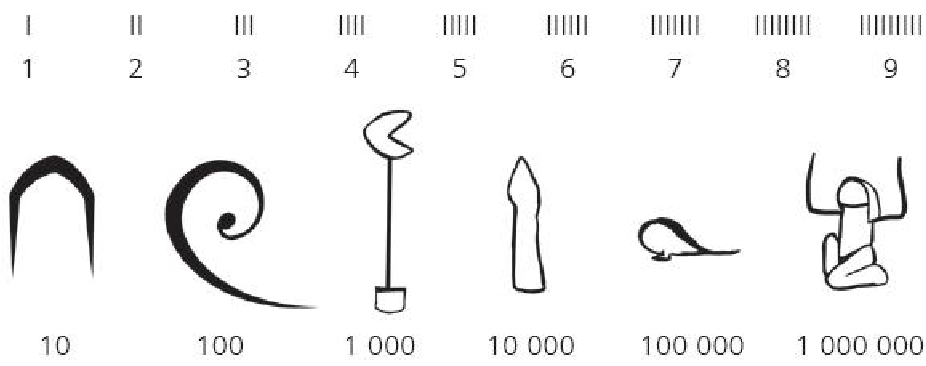
> Contrariamente à opinião popular, a matemática no Egito antigo nunca alcançou o nível obtido pela matemática babilônica. Esse fato pode ser consequência do desenvolvimento econômico mais avançado da Babilônia. A Babilônia localizava-se numa região que era rota de grandes caravanas, ao passo que o Egito se manteve em semiisolamento. Nem tampouco o sereno rio Nilo necessitava de obras de engenharia e esforços administrativos na mesma extensão que os caprichosos Tigre e Eufrates. (EVES, 2004, p. 67).

3.3.1 Números e operações no Antigo Egito

De acordo com Roque e Pitombeira (2012), os egípcios desenvolveram um sistema de numeração e escrita mais ou menos na mesma época que os babilônios, ou seja, por volta de 3000 a. C. Como em nosso sistema de numeração os antigos egípcios empregavam um sistema decimal. Mas, diferente dos babilônios, o sistema era posicional, era aditivo.

O número 1 era representado por uma barra vertical, e os números consecutivos de 2 a 9 eram obtidos pela soma de um número correspondente de barras. Em seguida, os números eram múltiplos de 10, por essa razão, diz-se que tal sistema é decimal. O número 10 é uma alça; 100, uma espiral; 1 mil, a flor de lótus; 10 mil, um dedo; 100 mil, um sapo; e 1 milhão, um deus com as mãos levantadas, como mostra a figura 7.

Figura 7: Representação dos números egípcios



Fonte: Roque e Pitombeira (2012, p. 30)

Os Egípcios resolviam equações polinomiais de 1º grau, pelo chamado "método de falsa posição", registrado nos papiros de Moscou e de Rhind, entre outros papiros. Porém a resolução de equações polinomiais do 2º grau encontrada nos textos conhecidos só lida com equações do segundo grau bem simples como por exemplo, no papiro de Moscou, que data de aproximadamente 1850 a.C. Neste pede-se para calcular a base de um retângulo cuja altura é igual a $\frac{3}{4}$ de sua base e cuja área é igual a 12. Este problema, em linguagem moderna, se escreve como $\frac{3}{4}x^2 = 12$.

> A maioria dos problemas egípcios são de tipo digamos, aritmético, mas há outros que merecem a designação de algébricos. Não se referem a objetos concretos específicos, como pães e cerveja, nem exigem operações entre números conhecidos. Em vez disso, pedem o que equivale a soluções de equações lineares, da forma $x + ax = b$, ou $x + ax + bx = c$, onde a, b e c são conhecidos e x é desconhecido. A incógnita é chamada de "aha". (BOYER, 1999, p. 11).

A construção das grandes pirâmides faz supor que o conhecimento matemático dos egípcios era muito mais avançado que o apresentado nos papiros, principalmente no que se refere a resolução de equações polinomiais do segundo grau.

4 GREGOS

De acordo com Boyer (1999), quando a atividade intelectual das civilizações potâmicas (se desenvolveram ao logo dos rios) no Egito e na Mesopotâmia tinha perdido sua verve bem antes da era cristã; vigorosas culturas novas estavam surgindo ao longo de todo o litoral do Mediterrâneo. Para indicar essa mudança nos centros de civilizações, o intervalo entre aproximadamente 800 a. C e 800 d. C é as vezes chamada de Idade Talássica (isto é, "idade do mar").

O caráter da Matemática grega é completamente diferente daquele da Matemática babilônica. Embora os próprios gregos reconhecessem que muito deviam à Matemática egípcia e babilônia, eles transformaram os conhecimentos destas duas civilizações em um corpo de resultados bem estruturado e no qual a argumentação é feita por um tipo bem específico de discurso, a demonstração matemática. A base da revolução matemática exercida pela civilização Grega partiu de uma ideia muito simples. Enquanto Egípcios e Babilônicos perguntavam: "como"? Os filósofos gregos passaram a indagar: "por quê"? Assim, a matemática que até este momento era, essencialmente, prática, passou a ter seu desenvolvimento voltado para conceituação, teoremas e axiomas.

Os mesopotâmicos e egípcios realizavam cálculos com medidas de comprimentos, áreas e volumes, e alguns de seus procedimentos aritméticos devem ter sido obtidos por métodos geométricos, envolvendo transformações de áreas. Isso não quer dizer, contudo, que possuíssem uma geometria.

> É muito comum lermos que a geometria surgiu às margens do Nilo, devido à necessidade de medir a área das terras a serem redistribuídas, após as enchentes, entre os que haviam sofrido prejuízos. Essa hipótese tem sua origem nos escritos de Heródoto, datados do século *V* a. C.: "Quando das inundações do Nilo, o rei Sesóstris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos. Aí está, creio eu, a origem da geometria, que migrou, mais tarde, para a Grécia", afirma o historiador. (ROQUE e PITOMBEIRA, 2012, p. 60).

O mundo grego por muitos séculos teve seu esplendor entre os mares Egeu e Jônio, mas a civilização helênica não estava só localizada ali, em 600 a. C. colônias gregas podiam ser encontradas ao longo das margens do Mar negro e Mediterrâneo e foi nessas regiões afastadas que um novo impulso se manifestou na matemática "o racionalismo" e teve como principal estimulador Tales de Mileto (624 – 548 a.C. aproximadamente) e Pitágoras de Samos (580 – 500 a. C. aproximadamente). Este racionalismo objetivou o estudo de quatro pontos fundamentais: compreensão do lugar do homem no universo conforme um esquema racional, encontrar a ordem no caos, ordenar as ideias em sequências lógicas e obtenção de princípios fundamentais. Estes pontos partiram da observação que os povos anteriores (babilônios e egípcios) tinham deixado de fazer todo o processo de racionalização de sua matemática, contentando-se, tão somente, com sua aplicação.

4.1 Tales de Mileto

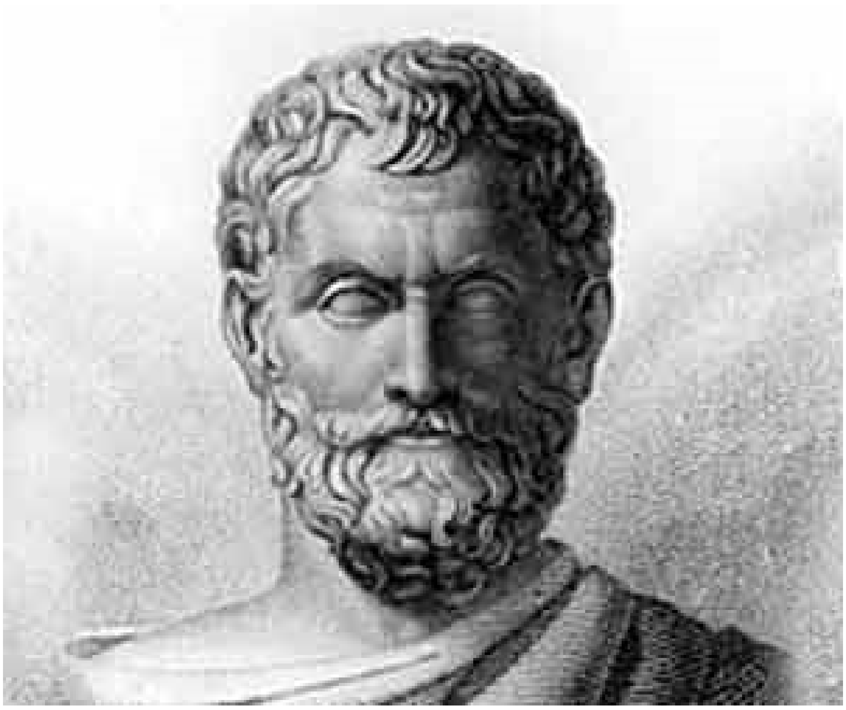
Tales de Mileto (figura 8) é reconhecido como o primeiro filósofo do Ocidente e apontado como um dos sete sábios da Grécia Antiga. Ele nasceu em Mileto, uma antiga colônia grega localizada na Ásia Menor, por volta de 645 ou 624 a. C. Alguns estudiosos consideram Tales o Pai da Filosofia Ocidental.

Segundo Boyer (1999) pouco se sabe sobre a vida de Tales. Seu nascimento e sua morte são datados com base no fato de que o eclipse de 585 a. C. provavelmente ocorreu quando estava em plena maturidade, digamos 40 anos, e diz – se que ele tinha 78 anos quando morreu. A opinião antiga é unânime em considerar Tales como de rara inteligência.

Suas contribuições permeiam vários campos do conhecimento, como filosofia, astronomia e matemática sendo que nesta última que lhe é atribuído alguns teoremas da geometria como descritos.

> Tales é o primeiro personagem conhecido a quem se associam descobertas matemáticas. em geometria, creditam-se a ele os seguintes resultados elementares:
> 1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.
> 2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
> 3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
> 4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais.
> 5. um ângulo inscrito num semicírculo é reto. (este resultado era do conhecimento dos babilônios cerca de 1400 anos antes.) EVES (2004, p. 95) .

Figura 8: Tales de Mileto



Fonte: https://ranieridestro.escavador.com/artigos/1162/tales-de-mileto

4.2 Pitágoras e os Pitagóricos

Pitágoras (580 – 500 a.C. aproximadamente), figura 9, foi um matemático e filósofo grego, é um personagem envolto a lendas e misticismos isso porque mais do que um estudioso, Pitágoras foi um profeta, um místico, nascido na ilha de Samos (580 a.C. aproximadamente). Assim como

Tales de Mileto, Pitágoras também viajou pelo Egito, Babilônia e, muito provavelmente, pela Índia, absorvendo todos os conhecimentos matemáticos e astronômicos dessas civilizações; fato é que o próprio Teorema de Pitágoras já era utilizado por alguns desses povos antes da época de Pitágoras. Acredita -se que nessas peregrinações, Pitágoras aprendeu grandes conceitos religiosos que o influenciaram posteriormente e fundamentaram toda a mística que envolve os pitagóricos; além disso, ele foi contemporâneo de Buda, Confúcio e Lao-tsé , fazendo daquele período uma fase crítica para o desenvolvimento das religiões.

> Se Pitágoras permanece uma figura muito obscura isto se deve em parte à perda de documentos daquela época. Várias biografias de Pitágoras foram escritas na antiguidade, inclusive uma Aristóteles, mas se perderam. Uma outra dificuldade para caracterizar claramente a figura de Pitágoras provém do fato de que a ordem que ele fundou era comunitária, além de secreta. Conhecimento e propriedade eram comuns, por isso a atribuição de descobertas não era feita a um membro específico da escola. É melhor, por isso, não falar na obra de Pitágoras, mas antes das contribuições dos pitagóricos, embora na antiguidade fosse usual dar todo crédito ao mestre. BOYER (1999, p. 33) .

Ainda, segundo Boyer (1999), a escola pitagórica era politicamente conservadora e tinha um código de conduta muito rígido; adotavam o vegetarianismo com base na ideia da transmigração das almas: não se pode matar um animal cujo corpo seria a nova morada de outra alma. Mas a mais notável característica da sociedade dos pitagóricos foi a confiança que mantinha nos estudos de Filosofia e Matemática.

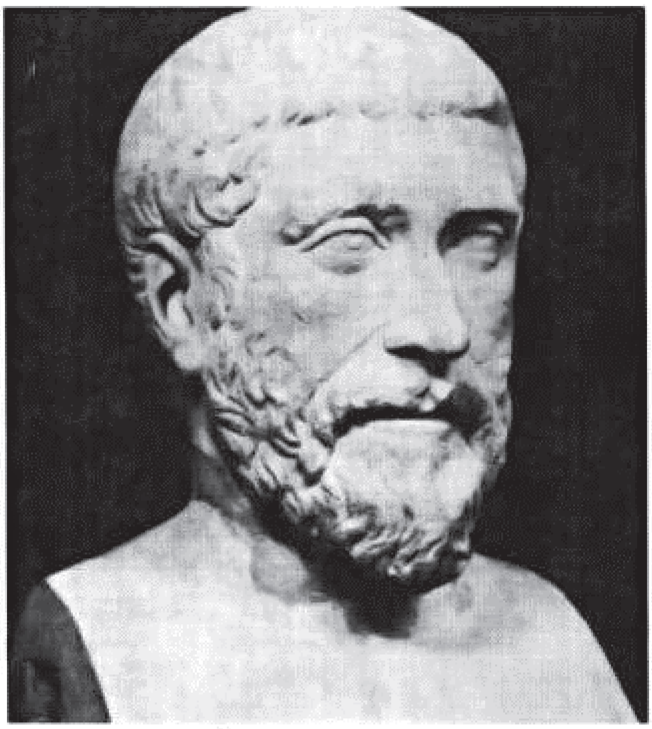
Os pitagóricos quebraram um paradigma efetivo da época que era o utilitarismo da Matemática; os processos eram estritamente vinculados a problemas específicos ligados ao comércio e à agricultura. Os pitagóricos pregavam que o conhecimento matemático deveria ser estudado apenas pelo amor à sabedoria. Dentro dessa ideia, muito se descobriu posteriormente no campo da matemática conceitual, sem a utilização de qualquer questão prática como modelo; aliás o trânsito entre o concreto e o abstrato se inverteu: dali em diante a matemática forneceria os modelos para a prática e não o contrário. Os Pitagóricos estudavam o quadrivium (geometria, aritmética, astronomia e música). Sua filosofia pode ser resumida na expressão "tudo é número", com a qual diziam que tudo na natureza pode ser expresso por meio dos números. Pitágoras dizia que: "tudo na natureza está arranjado conforme as formas e os números". Aos Pitagóricos (Pitágoras, principalmente) podemos creditar duas descobertas importantes: o conceito de número irracional por meio de segmentos de retas incomensuráveis e a demonstração das relações entre os lados de um triângulo retângulo (teorema de Pitágoras), que já era conhecido por babilônicos e egípcios.

> A descoberta das grandezas incomensuráveis, frequentemente atribuída a um pitagórico, deve ter tido outras origens. Esta descoberta contribuiu para a separação entre a geometria e a aritmética, a primeira devendo se dedicar às grandezas geométricas e a segunda, aos números. Esta separação é um dos traços marcantes da geometria grega, ao menos na maneira como ela se disseminou com Euclides. (ROQUE e PITOMBEIRA, 2012, p. 60). .

Assim, Pitágoras e os pitagóricos investigaram as relações matemáticas e descobriram vários fundamentos da física e da matemática. O símbolo utilizado pela escola pitagórica era o pentagrama, que, como descobriu Pitágoras, possui algumas propriedades interessantes. Um pentagrama é obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular; pelas intersecções dos segmentos desta diagonal, é obtido um novo pentágono regular, que é proporcional ao original exatamente pela razão áurea. Pitágoras descobriu também em que proporções uma corda deve ser dividida para a obtenção das notas musicais no início, sem altura definida, sendo uma tomada como fundamental pensemos numa longa corda presa a duas extremidades que, quando tangida, nos dará o som mais grave - e a partir dela, gerar-se-á a quinta e terça através da reverberação harmônica. Os sons harmônicos. Prendendo-se a metade da corda, depois a terça parte e depois a quinta parte conseguiremos os intervalos de quinta e terça em relação à fundamental. A chamada SÉRIE HARMÔNICA. À medida que subdividimos a corda obtemos sons mais altos e os intervalos serão diferentes. E assim sucessivamente. Descobriu ainda que frações simples das notas, tocadas juntamente com a nota original, produzem sons agradáveis. Já as frações mais complicadas, tocadas com a nota original, produzem sons desagradáveis.

Um pouco depois de Pitágoras, desenvolveu-se efetivamente alguma geometria na Grécia pré-euclidiana. Um dos geômetras que conhecemos melhor, antes de Euclides, é Hipócrates de Quios e Demócrito (ambos da segunda metade do século V a.C. aproximadamente), que começaram a trabalhar com o princípio da indução lógica (apagoge), que é o início da axiomática. Os três problemas que deram início ao estudo da axiomática foram: trissecção de um ângulo, duplicação do volume do cubo e a quadratura do círculo.

Figura 9: Pitágoras



Fonte: Introdução à História da Matemática, EVES, p. 98

4.3 Euclides

Nascido durante o século III a.C., Euclides figura 10, possui uma história cheia de lacunas e pouco conhecida. Segundo, Boyer, (1999, p. 69) “não se sabe ao certo seu local de nascimento e morte, mas apenas que viveu durante o reinado de Ptolomeu Sóter (Ptolomeu I – entre 323 a.C. e 283 a.C.). O pouco que se tem conhecimento é atribuído a Proclo e Pappus de Alexandria, que escreveram sobre Euclides séculos após sua morte”.

> A morte de Alexandre, o Grande, levou a disputa entre os generais do exército grego, mas em 306 a. C. o controle da egípcia do império estava firmemente nas mãos de Ptolomeu I, e esse governante pode voltar a atenção para esforços construtivos. Entre seus primeiros atos está a criação em Alexandria de uma escola ou instituto conhecido como Museu, insuperado em seu tempo. Como professores ele chamou um grupo de sábios de primeira linha, entre eles Euclides, o autor do texto de matemática mais bem-sucedido de todos os tempos – Os elementos. (BOYER, 1999, p. 69). .

Embora Euclides fosse autor de vários trabalhos, dentre muitos, que se perderam, sua fama repousa principalmente sobre seus Elementos esse trabalho notável superou os trabalhos precedentes, pois, este ganhou o mais alto respeito dos seus sucessores até os tempos modernos. Nenhuma obra, exceto a Bíblia, foi tão largamente usada e estudada e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico.

Os Elementos foram compostos como uma obra textual, dividida em treze volumes – cinco abordam a geometria plana; três enfocam os números; um destaca a teoria das proporções; um tem como núcleo central os incomensuráveis; e os três finais discorrem sobre a geometria no espaço.

Figura 10: Euclides

Fonte: https://sites.google.com/site/bibliografia-de-euclides

Euclides não fazia cálculos, usava apenas régua não graduada e um compasso, por meios de enunciados muitas vezes confusos, ele fazia muitas construções geométricas principalmente para descobrir novas relações entre seus elementos geométricos. Como descreve Oscar Guelli (1997, p 23.):

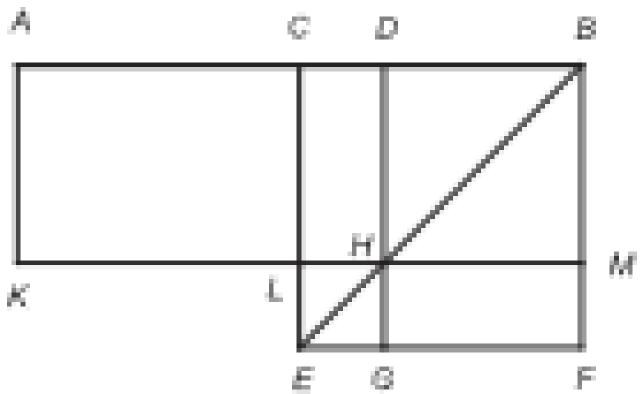
"e se do lado vezes uma constante subtrairmos a área do quadrado, o resultado será uma constante determinada". Hoje, traduzimos este enunciado de Euclides através da equação: $ax\breve{}x^2 = b$.

Com essa ideia é possível resolver geometricamente algumas equações polinomiais do segundo grau, para isso veremos inicialmente a proposição do Livro II dos Elementos de Euclides.

> Proposição II. 5. Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais e em outra duas desiguais, o retângulo compreendido pelas partes desiguais, juntamente com o quadrado da parte entre as duas seções, será igual ao quadrado da metade da linha proposta. (ROQUE, PITOMBEIRA, 2012, p. 96). .

Demonstração[3] Suponha que o segmento AB está divido em duas partes iguais pelo ponto C e em duas partes desiguais pelo ponto D, figura 11. O que Euclides diz, em seu enunciado, é que a área do retângulo de base AD e altura DB somada à área do quadrado de lado CD é igual à área do quadrado de lado CB.

Figura 11: Proposição II. 5



Fonte: Tópicos da História da Matemática, Roque, Pitombeira (2012 p. 97)

Com efeito, construa o quadrado $CEFB$ e considere a diagonal BE. Pelo ponto D, trace a paralela DG a CE, a qual corta a diagonal BE no ponto H.

Seja KM a paralela a AB e que passa por H. Seja AK o segmento de reta perpendicular a AB e que liga A a K. Como as áreas dos retângulos $CDHL$ e $HMFE$ são iguais, adicione a cada uma dessas áreas a área do quadrado $DBHM$.

Então, as áreas dos retângulos $CLMB$ e $DGFB$ são iguais. Mas as áreas dos retângulos $CLMB$ e $AKLC$ são iguais, por terem bases e alturas respectivamente iguais, segue-se que as áreas dos retângulos $AKLC$ e $DGFB$ também são iguais.

Adicione a cada uma dessas áreas a área do retângulo $CLHD$. Então, a área do retângulo $AKHD$ é igual à soma das áreas dos retângulos $CLHD$, $DHMB$ e $HGFM$. Mas os retângulos $AKLG$ e $CLMB$ têm áreas iguais.

Como os retângulos $ACLK$ e $CBLM$ têm áreas iguais, segue-se que as áreas dos retângulos $AKLC$ e $DGFB$ também são iguais.

[3]Demonstração é baseada na que foi feita por João Bosco Pitombeira, no seu artigo revisitando uma velha conhecida

Adicionemos a cada uma dessas áreas a área do retângulo $CLHD$. Com isso, a área do retângulo $AKHD$ é igual à soma das áreas dos retângulos $CLHD$, $DHMB$ e $HGFM$. Mas a área do retângulo $AKHD$ é igual à área do retângulo de base AD e altura DB, pois DH é igual a DB.

Assim, a área dos retângulos $CLHD$, $DHMB$ e $HGFM$ é também igual à área do retângulo de base AD e altura DB. Adicionamos a área do quadrado $LEGH$, que é igual à área do quadrado de lado CD, a ambas as áreas.

Segue-se então que a soma das áreas dos retângulos $CLHD$, $DHMB$ e $HGFM$ com a soma das áreas dos retângulos $LEGH$ e $DHMB$ é igual à soma das áreas do retângulo $AKHD$ e do quadrado $LEGH$. Mas a soma das áreas dos retângulos $CLHD$, $DHMB$ e $HGFM$ com a soma das áreas de $LEGH$ e $DHMB$ é igual à área do quadrado $CEFB$, construído sobre CB.

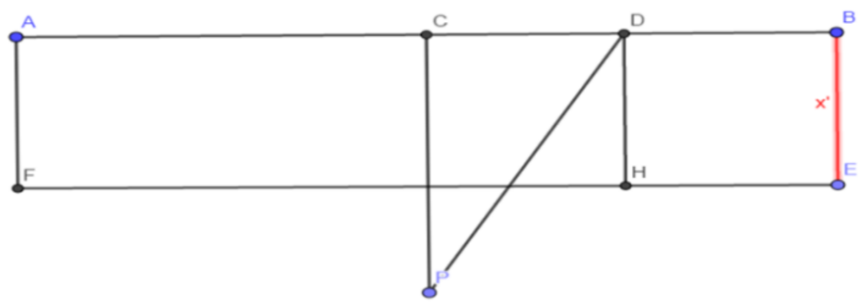
Assim, a soma das áreas do retângulo de base AD e altura DB e do quadrado $LEGH$ (que é igual ao quadrado de lado CD) é igual à área do quadrado de lado CB, o que queríamos demonstrar.

A relação desta proposição com a resolução de equações polinomiais do 2º grau, está no fato de fazendo $AD = x$ e $DB = y$, este teorema pode ser traduzido, algebricamente, pela identidade: $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ ou seja, se conhecemos $x+y$ (respectivamente $x-y$) e xy podemos achar $x\breve{}y$ (respectivamente $x+y$). Suponhamos agora que, na figura 11, $AB = a$ e$DB = x$. Então, $ax - x^2$ é igual à área do retângulo $AKHD$, a qual é por sua vez igual à soma das áreas dos retângulos $CLHD$, $DHMB$ e $HGFM$. Se chamarmos a soma das áreas de $CLHD$, $DHMB$ e $HGFM$ de b^2, então, o problema de resolver a equação $ax - x^2 = b^2$ se transforma, em linguagem geométrica, em construir sobre um segmento de reta de comprimento a um retângulo cuja área menos a área de um quadrado seja igual à área de um quadrado dado (b^2).

Como por exemplo: Cinco vezes a medida do lado de um quadrado, subtrairmos sua área obtemos 4. Qual a medida do lado desse quadrado? $5x - x^2 = 4$, linguagem moderna.

Traçamos um segmento AB de comprimento 5. Dividimos o segmento AB ao meio, e marque o ponto C. Tracemos um segmento CP perpendicular a AB, cujo comprimento é raiz quadrada de quatro. Trace uma circunferência de centro em P e raio CB e marque o ponto D. Construa o retângulo $ABEF$, tal que $DB = BE$. Complete o quadrado $DBEG$. O lado desse quadrado (x') $DBEG$ é raiz da equação dada.

Figura 12: Determinação Geométrica da raíz da equação $5x - x^2 = 4$



Fonte: Autoria própria

Demonstração algébrica

Temos por Pitágoras: $CP = 2$, $PD = \dfrac{5}{2}$, $CD = \dfrac{5}{2} - x'$

$(DP)^2 = (CP)^2 + \left(\dfrac{5}{2} - x'\right)^2 \Rightarrow \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = 2^2 + \left(\dfrac{5}{2} - x'\right)^2 \Rightarrow x'^2 - 5x' + 4 = 0$

5 HINDUS E ÁRABES

5.1 Hindus

Segundo Boyer (1999), escavações arqueológicas ocorridas em Mohenjo Daro (é um sítio arqueológico situado na província do Sinde, no Paquistão), nos dão indicação de uma civilização muito antiga e de uma cultura e bem desenvolvida na Índia, ocorrida na mesma época em que foram construídas as pirâmides no Egito.

O período clássico da matemática hindu se dá entre 400 e 1200 depois de Cristo, os primeiros registros de matemática na Índia se encontram nos vários Sulvasutras (papiro hindus contendo várias regras inclusive de matemática), escritos provavelmente entre 800 a.C. e 500 a.C. e que se transmitiram oralmente durante muito tempo. Eles registram conhecimentos matemáticos de idade desconhecida, mas certamente bem anteriores. Estes escritos têm três versões, sendo que a mais conhecida tem o nome de Apastamba, todas escritas em versos.

> A maior parte da matemática que conhecemos como "indiana" foi escrita em sânscrito e se originou na região do sul da Ásia (que compreende também o Paquistão, o Nepal, Bangladesh e Sri Lanka). Os registros mais antigos de que temos notícia datam da primeira metade do primeiro milênio antes de Cristo, mas se tornaram mais frequentes depois da conquista de Alexandre, o Grande, no século IV a.C. Não conhecemos bem as interações da matemática indiana com as tradições antigas, entretanto, alguns de seus problemas parecem ter sido inspirados pelo contato com a astronomia babilônica e grega. (ROQUE, 2012, p. 188). .

É sabido que o sistema de numeração decimal posicional que usamos hoje é de origem indiana, tendo sido transmitido para o Ocidente pelos povos islâmicos na Idade Média, antes disso, usavam-se diferentes sistemas de numeração, aditivos e multiplicativos, embora não posicionais, isso mostra que havia, nesse período, uma intensa atividade matemática expressa sobretudo pela elaboração de tratados astronômicos que também foram influenciados por obras gregas, devido ao contato com o império romano. Um desses tradados o mais antigo que conhecemos foi escrito por Aryabhata, que nasceu aproximadamente no ano 476. Pouco se sabe sobre sua vida, mas essa obra permanece uma das fontes mais importantes sobre a matemática e a astronomia indiana, ela foi toda escrita em versos, tornando-se uma tradição indiana, e apresenta conhecimentos matemáticos variados, principalmente em relação às regras de cálculo.

> Como a exposição em versos era de difícil compreensão, as obras indianas eram complementadas por comentários redigidos por outros matemáticos tendo em vista elucidar o seu significado. O comentário mais antigo sobre o livro de Aryabhata foi escrito por um autor de nome Bhaskara em 629. Mas esse personagem é completamente desconhecido e chamado, frequentemente, de Bhaskara I, para distingui-lo do outro Bhaskara mais famoso, que viveu no século XII. O comentário de Bhaskara I indica que a matemática documentada em sânscrito era bastante rica, pois ele se refere a uma tradição que parecia estar bem estabelecida. (ROQUE, 2012, p. 189). .

Um desses tratados astronômicos de Bhaskara I foi escrito pelo astrônomo Brahmagupta, em 628. Um dos capítulos matemáticos de seu tratado é dedicado completamente à "ganita", contendo o estudo de operações aritméticas, razões e proporções, juros, bem como fórmulas para achar comprimentos, áreas e volumes de figuras geométricas. Contudo, havia também um capítulo dedicado a um outro tipo de matemática que compreendia análises envolvendo o zero, os negativos e positivos, as quantidades desconhecidas, e ainda os métodos de eliminação do termo médio e de redução a uma variável. Tratava-se de técnicas para lidar com problemas envolvendo quantidades desconhecidas e essas técnicas eram usadas em problemas que exprimiríamos, hoje, como uma equação polinomial do segundo grau. Os procedimentos utilizados por Brahmagupta foram citados, mais tarde, por Bhaskara II, autor dos livros mais populares de aritmética e álgebra no século XII, o Lilavati e o Bija Ganita que, presume-se, foram livros-texto voltados para o ensino.

5.2 Bhaskara II e as equações polinomiais do segundo grau

Os problemas que exigiam o que chamamos hoje de "equação" eram enunciados usando somente palavras e de modo poético. Eis um exemplo de verso: "De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmins. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?"

> O método de resolução consiste em reduzir o problema a uma equação linear. Isto era feito por meio do método que Bhaskara II denominava de "eliminação do termo médio", equivalente ao nosso método de completar quadrados. "Seja uma igualdade contendo a quantidade desconhecida, seu quadrado, etc. Se temos os quadrados da quantidade desconhecida, etc., em um dos membros, multiplicamos os dois membros por um fator conveniente e somamos o que é necessário para que o membro das quantidades desconhecidas tenha uma raiz; igualando em seguida esta raiz a do membro das quantidades conhecidas, obtemos o valor da quantidade desconhecida." (ROQUE, PITOMBEIRA, 2012, p. 195).
> .

Segundo Roque (2012), o método acima deve ser aplicado a um problema específico seguindo as especificações:

"E por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar".

No exemplo das abelhas, fazendo o enxame igual a $2x^2$, a raiz da metade é x e os oito nonos do todo dão $\frac{16x^2}{9}$, que aumentados do casal de abelhas e da raiz, devem ser iguais a $2x^2$, ou seja:

$x+\frac{16x^2}{9}+2=2x^2 \Rightarrow 2\text{x}^2-9x=18$, que deve ser resolvida pelo método descrito acima.

Lembramos que as quantidades desconhecidas ao quadrado, etc. são reunidas no primeiro membro e as quantidades conhecidas no segundo. Ele explica então, por meio exclusivamente de palavras, o procedimento que podemos traduzir da seguinte maneira:

- Multiplicando os dois membros por 8 (4 vezes os números de quadrados);

- Somamos 81 (o quadrado das quantidades desconhecidas simples) temos:

- $16x^2 - 72x + 81 = 225 \Rightarrow (4x-9)^2 = 15^2$

- Na qual os dois membros são quadrados. Tomando as raízes e igualando-as obtemos $4x - 9 = 15$, de que tiramos que o valor de x, que é 6, logo, o número de abelhas é $(6)^2 = 72$.

De forma geral o método de resolução de equações polinomiais do segundo grau empregado por Bhaskara II, consiste em:

1. completar o quadrado no primeiro membro para tornar o termo que contém a quantidade desconhecida e seu quadrado num quadrado perfeito;

2. diminuir o grau da equação extraindo a raiz quadrada dos dois membros;

3. resolver a equação de primeiro grau que daí resulta.

5.3 Os Árabes e a equação do segundo grau

Os árabes assimilaram a Matemática dos gregos e fizeram progressos em várias áreas, como, por exemplo, em trigonometria, nas equações algébricas e em pesquisas sobre o quinto postulado de Euclides.

> O matemático árabe mais conhecido foi Al-Khwarizmi (790˘850), nome que deu origem às palavras "algoritmo" e "algarismo". Após se apropriar do saber matemático grego mais avançado, os matemáticos árabes expandiram esse conhecimento produzindo métodos sistemáticos e se empenharam em generalizá-los. Primeiramente, a álgebra árabe permitiu ultrapassar a predominância do conhecimento grego. A álgebra, tal como estudada pelos árabes, ultrapassou a divisão número/grandeza, que era constituinte da Matemática Euclidiana. Essa inovação permitiu que fossem aplicados resultados de um domínio aos objetos de outro. (ROQUE e PITOMBEIRA, 2012, p. 198).
> .

Veremos inicialmente as contribuições de Al-Khowarizmi para a solução das equações do 2º grau. Pouco se conhece da vida de Muhammad ben Musa al-Khowarizmi (790 – 850). Segundo um de seus biógrafos árabes, al-Khowarizmi foi o primeiro matemático muçulmano a escrever sobre a "solução de problemas usando al-jabr e al-muqabala".

O significado usual de jabr "restauração" é adicionar termos iguais a ambos os membros de uma equação, a fim de eliminar termos negativos. Um outro significado menos frequente é multiplicar ambos os lados de uma equação pelo mesmo número a fim de eliminar frações.

Muqabala significa a redução de termos positivos por meio da subtração de quantidades iguais de ambos os membros da equação. No entanto, o matemático al-Karaji usa esta palavra no sentido de igualar. O significado literal da palavra significa comparar.

A primeira coisa necessária para um estudioso de Álgebra era compreender os quadrados, as raízes e os números assinalados al – jabr.

Al – khowarizmi não utilizava nenhum símbolo. Ao invés de x^2, ele escrevia quadrado; no lugar de x, colocava raízes; e por números, entendia os coeficientes das variáveis e os termos independentes.

A equação $2x^2 = 5x$, era expressa: "se o quadrado junto com dois é igual a cinco raízes, diga – me quanto vale uma raiz?"

Assim no al – jabr Al – khowarizmi separou e classificou as equações do 2º grau em vários tipos:

- Quadrados iguais a raízes, $ax^2 = bx$, por exemplo, $x^2 = 10x$
- Quadrados e números iguais a raízes, $ax^2 + c = bx$, por exemplo, $x^2 + 21 = 10x$
- Raízes e números iguais a quadrados, $bx + c = ax^2$, por exemplo, $3x + 4 = x^2$
- Quadrado e raízes iguais a números, $ax^2 + bx = c$, por exemplo $x^2 + 10x = 39$

Dessa forma ao resolver essas equações foi utilizando somente palavras por meio de um método que consistia em "completar o quadrado" (trinômio quadrado perfeito), que seria usado por outros matemáticos setecentos anos mais tarde

Exemplo: (somando o quadrado com dez, vamos encontrar trinta e nove)$x^2 + 10x = 39$

- Determine a metade de dez raízes.
- Multiplique essa metade por ela mesma.
- Some esse resultado ao quadrado e as dez raízes e ao trinta e nove
- O número que elevado ao quadrado dá sessenta e quatro é 8
- De esse número subtrair cinco obtemos três que é uma raiz.

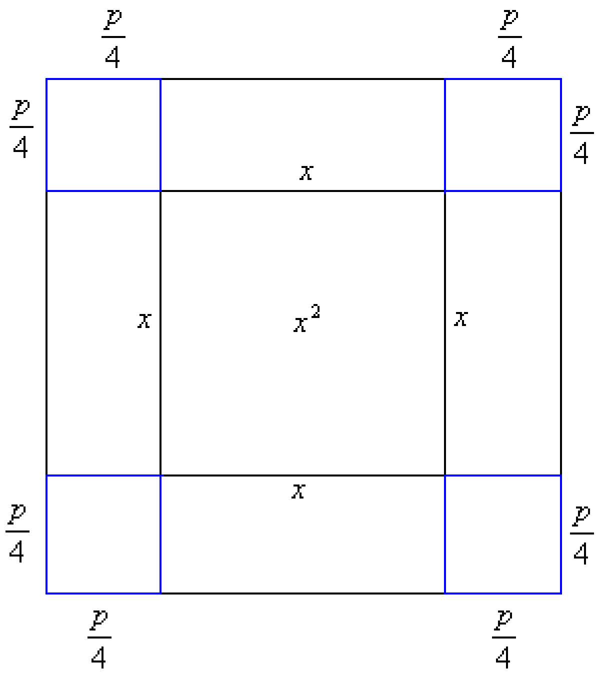
$$x^2 + 10x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 39 + 25$$
$$(x+5)^2 = 64.$$

Essa equação tem duas raízes uma positiva e outra negativa. Al – khowarizmi não conhecia os números negativos, por isso, seus métodos determinavam somente raízes positivas e o zero.

Mas Al – khowarizmi foi mais longe ainda, estudando a álgebra geométrica de Euclides conseguia resolver geometricamente uma equação do 2º grau do tipo: $x^2 + px = q$. figura 13

1. Construa um quadrado de lado x;
2. Sobre os lados externos desse quadrado construa um retângulo de lados x e altura $\frac{p}{4}$;
3. Complete o quadrado, construindo em cada um dos quatro cantos um quadrado de lado $\frac{p}{4}$.
4. Calcule a área desse quadrado completado

Figura 13: Método de completar o quadrado



Fonte: paginapessoal.utfpr.edu.br

A área desse quadrado é

$$\left(x+2\cdot\frac{p}{4}\right)^2 = x^2+px+\frac{p^2}{4} = q+\frac{p^2}{4} \Rightarrow \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = q+\frac{p^2}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{p^2}{4}+q}-\frac{p}{2}$$

Al – khowarizmi demonstrou quase todos os fatos necessários para resolver uma equação do 2º grau. Mas faltou – lhe um instrumento decisivo: a álgebra simbólica, com isso, não sabemos exatamente quem inventou o método, mas a fórmula geral que utilizamos hoje para resolver uma equação polinomial do segundo grau genérica não pode ter sido formulada por Bháskara II, nem pelos árabes, uma vez que eles não dispunham de um simbolismo para os coecientes.

> Os métodos enunciados por Bhaskara II e Al – khowarizmi permitem reduzir uma equação polinomial do segundo grau a uma equação do tipo $ax^2+bx=c$, mais ainda não havia símbolos algébricos para expressar coeficientes genéricos da equação, no caso, os coeficientes a, b e c. Se traduzirmos o método usado por eles na linguagem algébrica atual e o aplicarmos a uma equação geral do tipo $ax^2+bx+c=0$, obteremos o equivalente da fórmula para a resolução de equação do segundo grau. Isto quer dizer que havia um método geral para a resolução de equações, ainda que expresso por palavras. No entanto, não podemos dizer que já existia uma "fórmula", no sentido que entendemos hoje, uma vez que não se usava nenhum simbolismo para os coeficientes. (ROQUE, PITOMBEIRA, 2012, p. 204).

6 O INÍCIO DO SIMBOLISMO ALGÉBRICO.

O Ocidente começou a tomar conhecimento dos tratados árabes no século XIII, a partir de traduções para o latim. Nesta época, a Matemática árabe era muito superior à que se fazia na Europa. No início do século XIII, os tratados árabes tiveram grande difusão na Itália.

No limiar do século XIII despontou a figura de Leonardo Fibonacci ("Leonardo, filho de Bonaccio", 1175 – 1250), o matemático mais talentoso da Idade Média. Também conhecido como Leonardo de Pisa, (figura 14) ou Leonardo Paisano. Leonardo nasceu em Pisa, centro comercial importante, onde seu pai era ligado aos negócios mercantis. Muitas das grandes cidades comerciais italianas daqueles tempos mantinham entrepostos em várias partes do mundo mediterrâneo.

As atividades do pai logo despertaram no garoto um interesse pela aritmética e em viagens posteriores pelo Egito, à Sicília, à Grécia e Síria, pode entrar em contato direto com os procedimentos matemáticos orientais e árabes, nesta época, os termos árabes usados na resolução destes problemas serão traduzidos para o latim, bem como os métodos algébricos e aritméticos empregados. Inteiramente convencido da superioridade prática dos métodos indo-arábicos de cálculo, Fibonacci, em 1202, publicou sua famosa obra intitulada Líber Abaci. De acordo Roque e Pitombeira (ano da publicação), "as traduções latinas dos tratados árabes usavam o termo **"coisa"** para designar a quantidade desconhecida, **ou radix (raiz)** . O seu quadrado se chamará **quadras ou censos** , o cubo, **cubus** e o termo constante, **numerus"** . Ao longo dos séculos XIII e XIV diversas abreviações começaram a ser usadas, as operações de mais e menos eram designadas por variações das letras p (de Plus) e m (de menus) e a raiz era designada por variações de R (de radix).

> Mas será apenas no século XV que a álgebra irá se desenvolver, sobretudo na Alemanha e na Itália (mas também na Inglaterra e na França), a partir do livro de Fibonacci e da influência direta dos tratados árabes, em particular do livro de Al-Khwarizmi. Foi então que a tradução do termo "al-jabr" levou a que os métodos árabes fixassem conhecidos como "álgebra". Mas o que era a álgebra do século XV e início do XVI? Essencialmente a mesma dos árabes, mas com o recurso a um simbolismo (não unificado) tanto para as incógnitas quanto para as operações. (ROQUE e PITOMBEIRA 2012, p. 206).

No século XVI, uma grande quantidade de símbolos, muitas usados até hoje, foram surgindo, os símbolos $+$ e $-$ já era usado na Alemanha, o símbolo para raiz quadrada foi introduzido em 1525 pelo matemático alemão Christoff Rudolff, em 1557 Robert Record introduziu o símbolo $(=)$ para igualdade.

Figura 14: Leonardo Fibonacci

Fonte: Introdução a História Matemática Howard Eves (2004, p. 293)

6.1 O trabalho de François Viète

Na Europa, o desenvolvimento da álgebra e em particular das equações polinomiais deu-se com o advento do Renascimento em decorrência da grande quantidade de obras científicas publicadas nessa época. Nesse contexto, foi preciso um novo modo de escrever, que transformou a álgebra num ramo independente da matemática. Ironicamente, esse passo decisivo foi dado não por um matemático, mas por um jurista francês FrançoisViète (1540 – 1603), (figura 15).

Figura 15: François Viéte

Fonte: livro Introdução a história matemática Howard Eves (2004 p. 309)

Um dos grandes matemáticos franceses do século XVI foi François Viète, frequentemente conhecido por Vièta, nascido em Fontenay, em 1540, estudou advocacia e foi membro do parlamento provincial da Bretanha, mas dedicava a maior parte de seu tempo de lazer à matemática. Faleceu em 1603, em Paris.

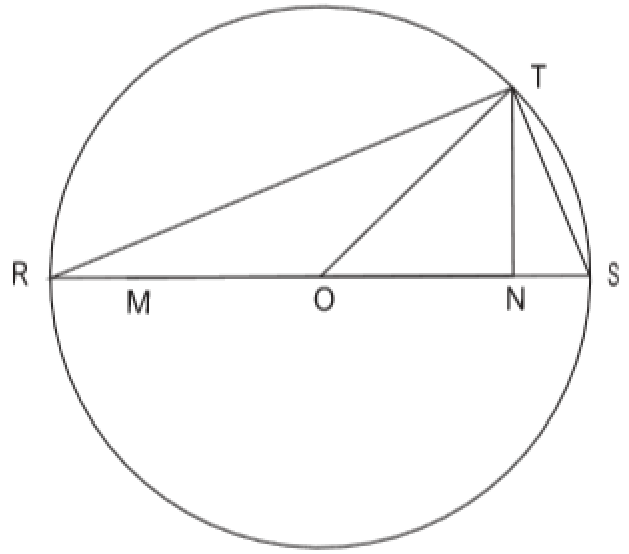
> A vasta obra de Viète compreende trabalhos de trigonometria, álgebra e geometria, sendo os principais Canon mathematicus seu ad triangula (1579), In artem analyticam isagoge (1591), Supplementum geometriae (1593), De numerosa potestatum resolutione (1600) e De aequationum recognitione et emendatione (publicado postumamente em (1615). Esses trabalhos, exceto o último, foram impressos e distribuídos a expensas de Viète. (EVES, 2004, p. 309).

Mas o mais famoso trabalho de Viète é In artem analyticam isagoge (introdução a arte analítica de 1591) ao qual o desenvolvimento do simbolismo algébrico estar mais evidente. Nesse texto Viète introduziu a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes como por exemplo, a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, na notação usada por Viète ficava, A área $-A5 + 6$ igual a 0. Mas tarde o próprio Viète passou a representar as incógnitas de uma equação por vogais e os coeficientes literais por consoantes e usou a palavra in para vezes, por exemplo a equação $3x^2 - 5x + 12 = 0$ era representada por 3 in A área $+5$ in $A + 12$ igual a 0. De um modo geral a equação polinomial do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ na notação de Viète era escrita na forma B in A área $+C$ in $A + D$ igual a 0 e esta tem significado especial, representa o momento que pela primeira vez um matemático conseguiu expressar uma equação do 2º grau por uma expressão "quase" algébrica.

Viète foi um algebrista excelente, de modo que não é de se surpreender que ele tenha aplicado a álgebra à trigonometria e à geometria. No seu livro effectionum geometricarum canônica recensio, ele mostra como encontrar soluções geométricas de equações polinomiais do segundo grau usando somente régua e compasso, como por exemplo1, a equação $A^2 + AB = D^2$, que em notação moderna seria $x^2 + px = q^2$ Viète procedia como segue:

Construa $MN = p$ e seja $TN = q$ perpendicular a MN. Seja O o ponto médio de MN. Com o centro em O, trace a circunferência de raio OT. Sejam R e S os pontos em que esta circunferência corta o prolongamento MN. Então, o triângulo retângulo RST fornece imediatamente $TN^2 = RN * NS$, ou seja, $q^2 = (x+p)x = x^2 + px$. Como mostra a figura 16.

Figura 16: Solução de $A^2 + AB = D^2$



Fonte: Tópicos de história da matemática (ROQUE e PITOMBEIRA, 2012, p. 255).

Viète constrói também, geometricamente, as soluções das equações polinomiais do segundo grau $A^2 - AB = D^2$, $(x^2 - px = q^2)$ e $AB - A^2 = D^2$, $(px - x^2 = q^2)$. (As soluções desta encontram-se no Apêndice A.)

Viète teve uma participação muito efetiva na renovação do simbolismo e na resolução das equações quadráticas, cúbicas e quárticas. Viète desenvolveu novos métodos de solução, percebeu algumas relações entre coeficientes e raízes de uma equação, embora seu trabalho tivesse ficado tolhido por sua recusa em aceitar coeficientes ou raízes negativas. Vejamos o método de variação de parâmetro para resolução de uma equação do polinomial do segundo grau. Seja $ax^2 + bx + c = 0$, a 0. Fazendo-se $x = u + v$, onde u e v são incógnitas auxiliares, e substituindo na equação, temos:

$$a(u+v)^2 + b(u+v) + c = 0$$
$$a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u+v) + c = 0.$$

E reescrevendo essa igualdade como uma equação na incógnita v, obtemos:

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0.$$

Viète transformou essa equação numa equação incompleta do 2º grau, anulando o coeficiente de v, ou seja, $u = \dfrac{-b}{2a}$ obtendo assim uma equação $av^2 + a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\dfrac{b}{2a}\right) + c = 0$, que após, simples manipulação chega-se $v^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ donde $v = \dfrac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, logo $x = u + v = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

que é a fórmula resolutiva. Como vimos o método de Viète possibilita uma demonstração da fórmula resolutiva, de fácil compreensão e sem grandes artifícios. A título de ilustração, vamos resolver a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ pelo método de Viète. Fazendo $x = u + v$ e substituindo na equação dada, temos: $(u+v)^2 - 3(u+v) + 2 = 0$, que é equivalente a $v^2 + (2u-3)v + u^2 - 3u + 2 = 0$. Escolhendo $u = \frac{3}{2}$ (para anular o coeficiente de v), teremos $v^2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow v = \pm\frac{1}{2}$ donde $x = u + v = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ sendo as soluções da equação 2 e 1.

Segundo Roque (2012), “Viète procurou fazer da álgebra uma ciência nos moldes gregos, apresentando-a de maneira axiomática. Resolver equações algébricas por métodos algébricos servia como auxiliar na construção geométrica de soluções para os problemas geométricos”.

Com esse objetivo Viète mostra que a álgebra podia ser útil aos problemas de construção que tinham ocupado os gregos, uma vez que pretendia fundar uma nova álgebra com o mesmo prestígio da geometria.

Nessa mesma época e também no século XVII vários matemáticos melhoraram a simbologia de Viète, dentre eles Robert Record/Thomas Harriot (criou o sinal de =), o matemático e filósofo René Descartes encontrou um modo bem prático para expressar os símbolos criados por Viète, começou usar expoente 2 para indicar A área, substituiu in por x (vezes), passou a representar as incógnitas pelas últimas letras do alfabeto e os coeficientes pelas primeiras.

6.2 O método de Descartes

René Descartes figura 17 nasceu perto de Tours em 1596. Aos oito anos de idade foi enviado a uma escola jesuíta em La Flèche. Foi então que desenvolveu (de início devido à sua saúde frágil) o hábito que o acompanhou por toda a vida de ficar até tarde na cama de manhã. Posteriormente Descartes consideraria essas horas matinais de descanso como seus períodos mais produtivos. Morreu em Estocolmo no início de 1650. Descartes produziu vários escritos, dentre eles o seu Discours de la Méthode (discurso do método) acompanhavam esse tratado três apêndices: La dioptrique, Les météores e La géométrie. O Discours, com seus apêndices, foi publicado em 1637; a contribuição de Descartes à geometria analítica aparece no último desses três apêndices.

Figura 17: René Descartes

Fonte: Introdução a história da matemática EVES (2004 p. 384)

Em 1637, René Descartes $(1596-1650)$, além de possuir uma notação que diferia da atual somente pelo símbolo de igualdade, desenvolveu um método geométrico para obtenção da raiz positiva.

No apêndice La Géométrie de sua obra "O Discurso do Método", Descartes resolveu equações do tipo: $x^2 = bx + c^2$, $x^2 = c^2 - bx$ e $x^2 = bx - c^2$, sempre com b e c positivos. Por exemplo, para resolver equações do tipo $x^2 = bx + c^2$, usou o seguinte método: (As outras soluções encontram-se no Apêndice B)

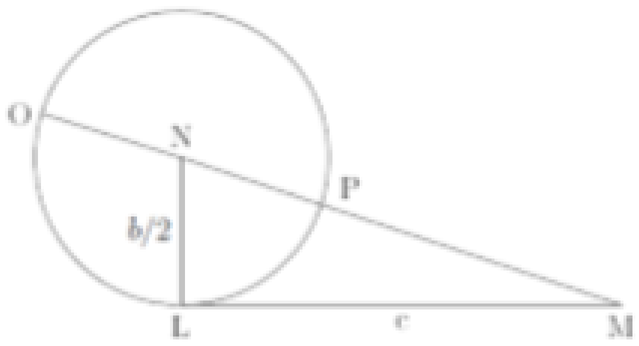
Traça-se um segmento LM , de comprimento c, e, em L, levanta-se um segmento NL igual a $\frac{b}{2}$ e perpendicular a LM . Com centro em N , constrói-se um círculo de raio $\frac{b}{2}$ e traça-se a reta por M e N , que corta o círculo em O e P, como mostra a figura 18.

Então a raiz procurada é o segmento OM. Com efeito, no triângulo MLN , se $OM = x$, tem-se $NM = x - \frac{b}{2}$ aplicando o Teorema de Pitágoras temos:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{2} + c^2 \Rightarrow x^2 = bx + c^2$$

Hoje, sabe-se que a segunda raiz é $-OM$, mas Descartes desconsiderava a raiz negativa.

Figura 18: Método de Descartes



Fonte: Revista do Professor de Matemática, nº 43 (2000, p. 5)

Segundo Pintombeira, (2012), a história da equação do 2º grau nos mostra como um tema de Matemática é retomado várias vezes. Vimos como, ao longo dos séculos, as maneiras de resolver esta equação mudaram, até chegar à forma padrão que conhecemos hoje.

Mesmo após ter deixado de ser um desafio, muitos matemáticos se ocuparam com ela, pelo simples prazer de procurar novos métos mais simples para chegar às suas soluções.

7 ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA COM OS PROFESSORES E ALUNOS DO COLÉGIO DOM ORIONE.

Com o objetivo de construir a base do conteúdo desse trabalho, foi realizado uma pesquisa quantitativa sobre os métodos de resolução da equação polinomial do segundo grau para que o professor desenvolva na sala de aula. A partir dos resultados, foi apresentado ao professor uma explanação histórica mostrando os povos e em que período da antiguidade o tema (equações polinomiais do segundo grau) se desenvolveu. Falando ainda de alguns grandes matemáticos que mereceram destaque no assunto. E mostrando a resolução de uma equação quadrática simples para exemplificar o uso de alguns métodos explanados, por exemplo, o método de completar quadrados que tantos matemáticos da antiguidade utilizaram, ou o mesmo o método babilônio.

7.1 Análise dos dados da pesquisa com o Professores

A pesquisa foi feita com os cinco professores no dia $16/10/2018$, reunidos numa sala de aula do Colégio Dom Orione de Tocantinópolis – TO, situado na Rua Dom Orione N^o435, onde foi explanado e discutido o objetivo da pesquisa. Os índices apresentados foram calculados em porcentagens, levando em conta o total de 05 professores, que responderam a cada questão, com o total das respostas dadas foi feito um comentário. As análises realizadas foram baseadas nas justificativas de cada respostas dadas pelos professores.

A seguir são apresentadas as perguntas e as respostas dos questionários.

Como professor de matemática do nono ano ao ensinar equações quadrática já utilizou outro método de resolução além da fórmula resolutiva?

Quadro 1: Análise quantitativa

SIM	02	40%
NÃO	03	60%
TOTAL	05	100%

Fonte: Própria

Nota – se nesse quadro que uma parte considerável (60%) dos professores ao ensinar equação do segundo grau limita-se em geral a mostrar que a fórmula resolutiva, chamada aqui no Brasil de “fórmula de Bháskara” resolve qualquer equação do tipo $ax^2+bx+c=0$, sem fazer nenhuma referência histórica da mesma.

Quadro 2: Análse qualitativa

Se a resposta foi sim qual o método você utiliza para resolução da equação do segundo grau?
Respostas: o método de completar quadrado

Fonte: Própria

No quadro 2 o método utilizado pelos professores, além da fórmula resolutiva foi o método conhecido como método de “completar de quadrado”, que já era conhecida pelos matemáticos árabes, como Al – khowarizmi, em torno de 825 d. C, mas apenas para justificar de onde “veio” a fórmula, utiliza -se também como uma demonstração da fórmula resolutiva.

Quadro 3: Análise quantitativa

Dos métodos listados abaixo quais deles já foram utilizados?		
Fórmula resolutiva $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	05	100%
Método de completar quadrado	04	80%
Métodos babilônicos	0	0
Método de Euclides	01	20%
Método de Al - Khowarizmi	0	0
Métodos de Viète	0	0
Métodos de Descartes	0	0
Outros	0	0

Fonte: Própria

No quadro 3 os métodos utilizados com maior frequência pelos professores é a fórmula resolutiva, o que mostra que muitos professores desconhecem ou não utiliza outros métodos além da fórmula.

Quadro 4: Análse qualitativa

Dos métodos listados acima quais deles você conhecia?
Fórmula resolutiva, método de completar quadrado, método de Euclides

Fonte: Própria

Muitos dos métodos destacados são desconhecidos pelas maiorias dos professores com isso a uma motivação para a realização deste trabalho.

Como professor você gostaria de saber/conhecer outros métodos não triviais de resolução de equações do segundo grau?

Quadro 5: Análise quantitativa

SIM	04	80%
NÃO	01	20%
TOTAL	05	100%

Fonte: Própria

Com base nas respostas do quadro 5 acima foram o mote primordial deste trabalho, oferecer de forma didática, os procedimentos usados no passado para trabalhar com equações do polinomiais de segundo grau utilizando muitas vezes nosso simbolismo algébrico a fim de tentar aprender a maneira de pensar que levou à criação desses procedimentos, descrito em cada época.

7.2 Atividade aplicada com os alunos

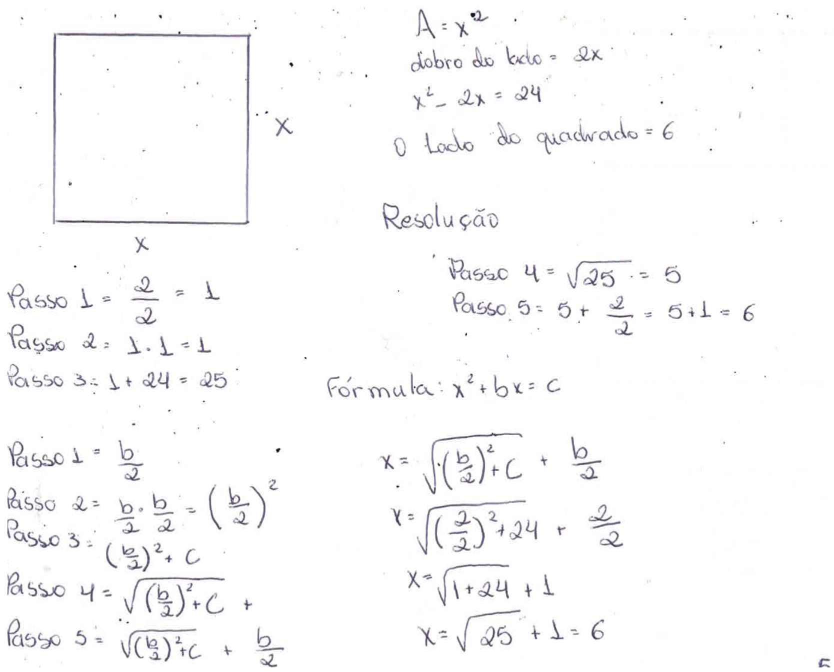
A atividade foi desenvolvida com os alunos da turma $92-01$, do Colégio Dom Orione, onde contou com participação de 27 alunos presente, começamos dia $17/10/2018$ e terminamos no dia $19/10/2018$. Antes da atividade foi feita uma explanação histórica sobre a equação polinomial do segundo grau tem uma longa história e que muitos matemáticos importantes, de várias civilizações, se preocuparam em achar suas soluções e que se estende por mais de quatro mil anos. A atividade contou com cinco questões, sendo que cada questão foi resolvida aplicando um método diferente usando a técnica desenvolvida naquele período, começamos com o método babilônicos ($\approx$ 2000,a.C) e terminamos com método de François Viète (1591, d. C) como é mostrado a seguir:

1. Qual é o lado do quadrado, se área menos o dobro do lado é vinte e quatro? (método Babilônico $\cong$ 2000 anos a.C)

   Siga as instruções para resolver o problema:

   - Tome a metade de dois
   - Multiplique o resultado por ele mesmo
   - Some o resultado por 24
   - Extraia a raiz quadrada do resultado anterior
   - O resultado da raiz some com a metade de dois
   - O resultado é lado do quadrado

Figura 19: Método babilônico (≈ 2000 a.C)



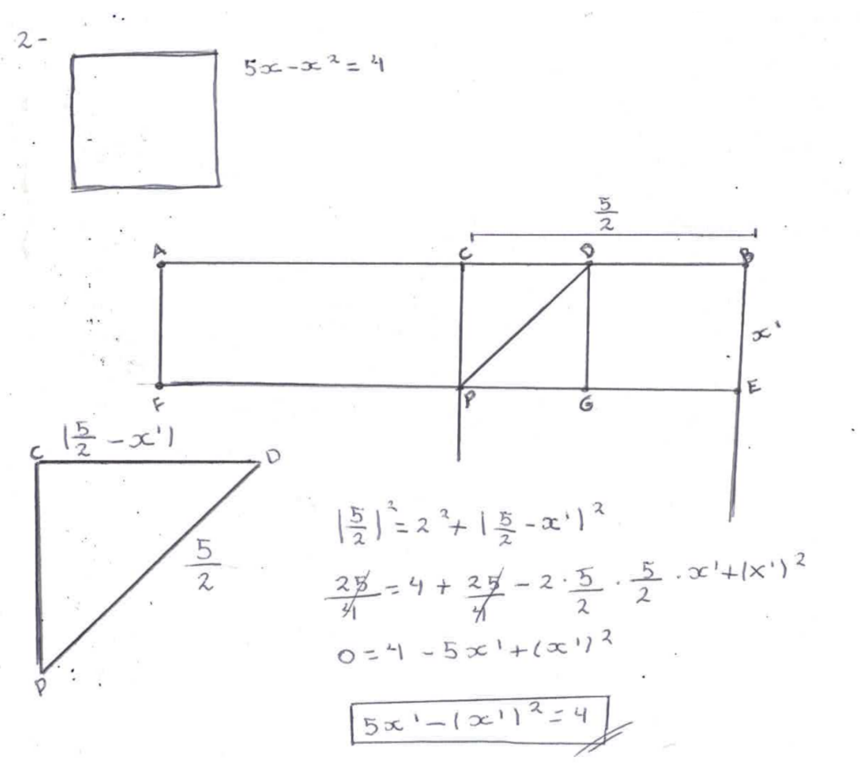
Fonte: Acervo do autor

Essa questão os alunos não tiveram nenhuma dificuldade em elaborar e resolver o problema seguindo as instruções (receita) que foi passada, também conseguiram usando nossa linguagem moderna encontrar a fórmula para aquele problema.

2. Cinco vezes a medida do lado de um quadrado, subtrairmos sua área obtemos 4. Qual a medida do lado desse quadrado? (método de Euclides ≅ século III a.C)

   - Trace um segmento AB de comprimento igual a 5
   - Divida o segmento AB ao meio no ponto C
   - Trace um segmento CP perpendicular ao segmento AB de comprimento igual a raiz quadrada de 4
   - Trace uma circunferência de centro em P e raio igual ao comprimento do segmento CB e marque o ponto D
   - Por B trace uma perpendicular e marque sobre esta o ponto E tal que $BE = BD$
   - Trace por E uma perpendicular e complete o retângulo $ABEF$.
   - Complete o quadrado $DBEG$
   - O lado quadrado $DBEG$ é raiz procurada

Figura 20: Método de Euclides (≈ século III a.C)



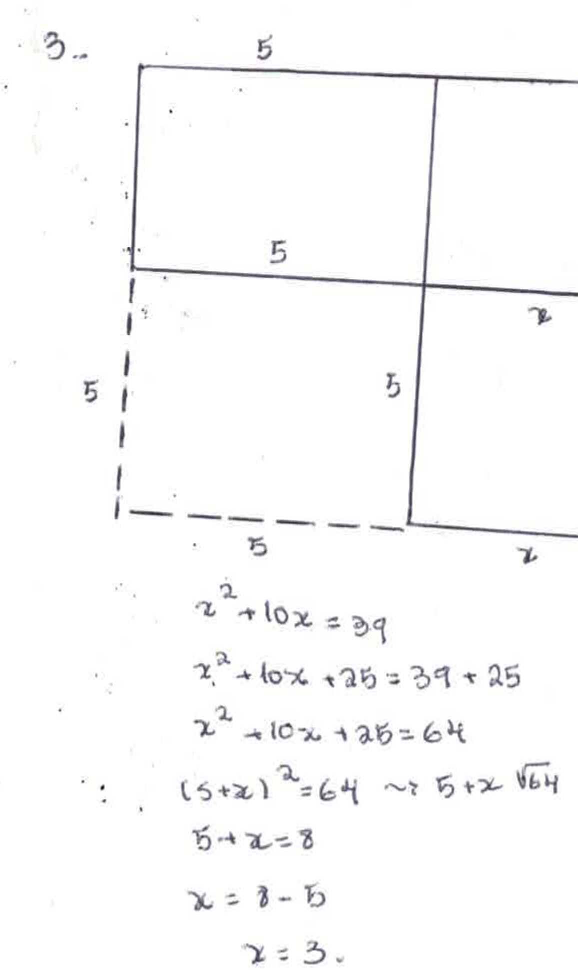
Fonte: Acervo do autor

Nessa questão muitos alunos encontraram dificuldades, não na execução do problema mais no manejo dos instrumentos de desenho no caso a régua e o compasso, levou um tempo bem maior do que tínhamos planejado, mas gostaram da demonstração utilizando o teorema de Pitágoras eles pensavam na época não existia o teorema.

3. Resolva a equação do segundo grau $x^2 + 10x = 39$ usando o seguinte método (método de al – Khowarizmi 825 d. C)

- Construa um quadrado de lado (x)
- Sobre os lados desse quadrado construa dois retângulos de lados (x) e comprimento medindo metade do 10, ou seja, 5
- Complete o quadrado
- O lado desse quadrado “completado” mede $5 + x$ e
- Determine a área desse quadrado “completado”
- Ache o lado do quadrado “completado” e
- Esse lado encontrado é igual a $x + 5$ e em seguida ache o (x) que raiz procurada

Figura 21: Método de Al – Khoarizmi (825 d. C)



Fonte: Acervo do autor

Nessa questão todos os alunos conseguiram resolver sem nenhuma dificuldade, executando todos os passos proposto, logo após a resolução, foi desenvolvido uma demonstração para o caso geral, usando a ideia de completar o quadrado, mas explicando que Al – Khoarizmi não fez essa demonstração, pelo simples fato que ele não tinha generalização para os coeficientes.

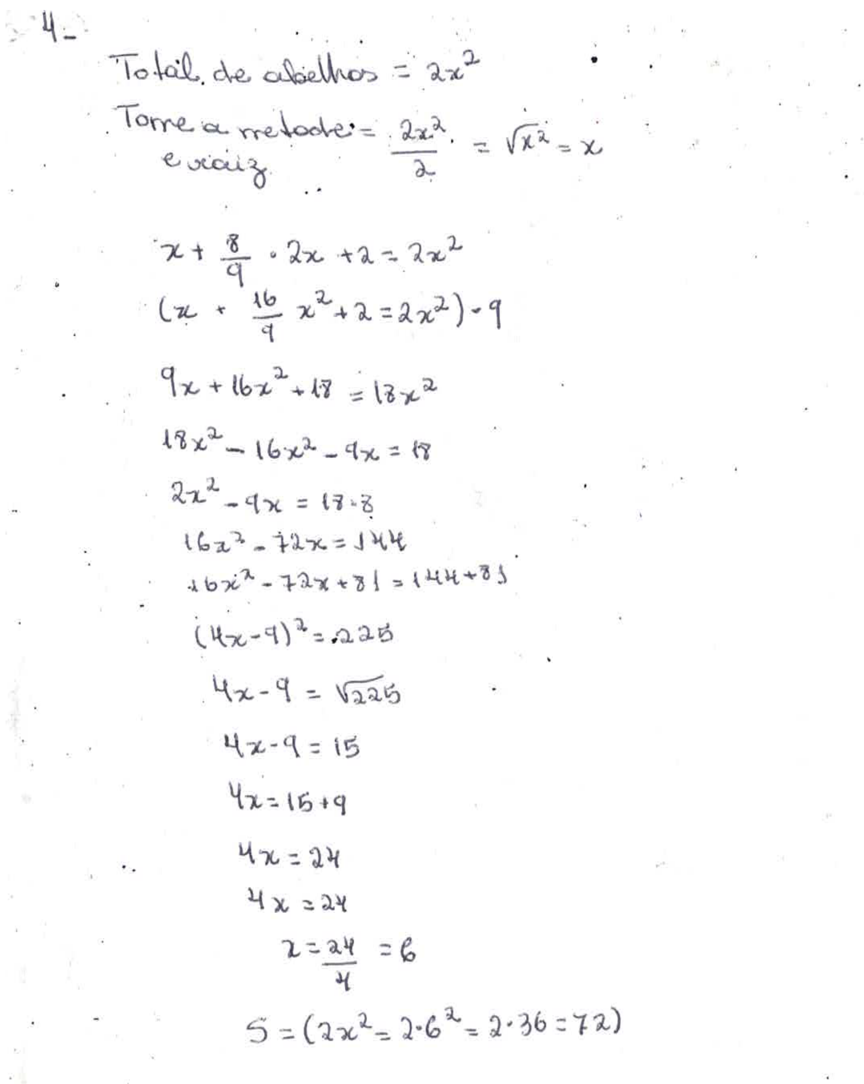
4. De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmins. Oito nonos do todo utuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma or de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame?" (método de Bhaskara 1114 d.C)

$$\text{Equacionando o problema temos: } x + \frac{16x^2}{9} + 2 = 2x^2 \Rightarrow 2x^2 - 9x = 18 \quad (*)$$

- Multiplique a equação $(*)$ por 8
- Some 81 nos dois membros da equação $(*)$
- Fatore o primeiro membro da equação $(*)$ que é um quadrado perfeito
- Tome a raiz quadrada nos dois membros da equação $(*)$

- Resolva e equação resultante que é do primeiro grau para encontra a raiz da equação $(*)$

Figura 22: Método de Bháskara (1114 d. C)


4-

Total de abelhas $= 2x^2$

Tome a metade e raiz $= \frac{2x^2}{2} = \sqrt{x^2} = x$

$x + \frac{8}{9} \cdot 2x + 2 = 2x^2$

$(x + \frac{16}{9} x^2 + 2 = 2x^2) \cdot 9$

$9x + 16x^2 + 18 = 18x^2$

$18x^2 - 16x^2 - 9x = 18$

$2x^2 - 9x = 18 \cdot 8$

$16x^2 - 72x = 144$

$16x^2 - 72x + 81 = 144 + 81$

$(4x-9)^2 = 225$

$4x - 9 = \sqrt{225}$

$4x - 9 = 15$

$4x = 15 + 9$

$4x = 24$

$4x = 24$

$x = \frac{24}{4} = 6$

$S = (2x^2 = 2 \cdot 6^2 = 2 \cdot 36 = 72)$

Fonte: Acervo do autor

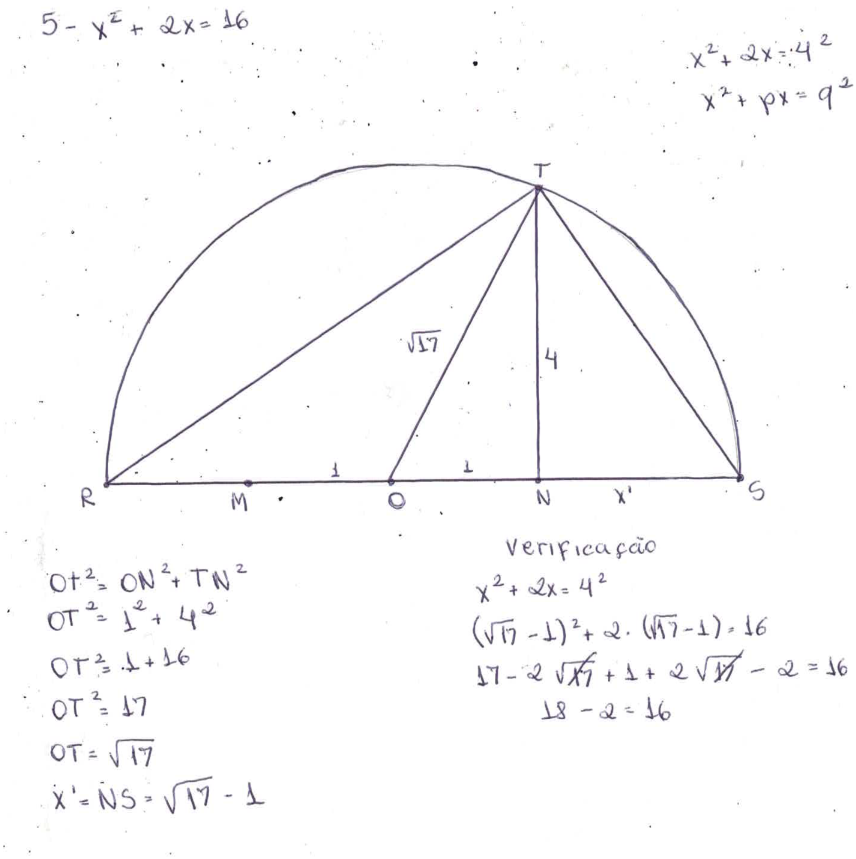
Nessa questão houve muita dificuldade na interpretação e na definição da incógnita, não conseguiram abstrair do poema que para conseguir equacionar o problema tínhamos que chamar o total de abelhas de $2x^2$, depois de montada a equação aplicar os passos foi fácil, outra dificuldade enfrentada foi explicar o porquê daqueles passos, usado por Bháskara, aqui também foi feito uma demonstração para o caso geral $ax^2+bx+c=0$, mas novamente deixando claro que essa demonstração não seria possível na época de Bháskara, pelo mesmo motivo dos matemáticos árabes, não ter uma generalização para os coeficientes.

5. Resolva a equação $x^2+2x=16$, (usando método conhecido como método de Viète, 1591)

- Construa um segmento MN de comprimento 2
- Marque o ponto médio O do segmento MN

- Por N trace uma perpendicular e marque sobre esta o ponto T tal que $TN = 4$
- Com o centro em O, trace uma circunferência de raio OT
- Marque os pontos R e S sobre o prolongamento de MN
- O segmento NS é a raiz da equação

Figura 23: Método de Viète (1591 d. C)



Fonte: Acervo do autor

Essa questão foi resolvida sem muitas dificuldades muitos conseguiram entender os passos ali proposto e construíram a figura e determinaram o segmento que solucionava o problema, compreenderam a justificativa da reposta e logo em seguida foi feita a demonstração para o caso $x^2 + px = q^2$ que também foi compreendida sem muitas dificuldades.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em toda esta Dissertação procurei mostrar uma metodologia para que o professor de ensino fundamental que leciona no nono ano, ao ensinar equações polinomial do segundo grau, não pudesse ficar meramente na exposição de conteúdo do livro didático adotado pela escola, já que sempre encontraremos limitações que devem ser minimizadas pela sua interferência.

Neste sentido, este trabalho propõe que no ensino de equações polinomial do segundo grau sejam utilizados vários métodos de resolução de equações quadráticas num contexto histórico, sugerindo ao docente um percurso metodológico para aplicação desses recursos em sala aula logo no ao iniciar o conteúdo.

Na aprendizagem dos conceitos matemáticos, segundo Mendes, (2006, p 15) "[...] o conhecimento da História da Matemática deveria se constituir em uma parte indispensável da bagagem de conhecimentos do matemático em geral e do professor de qualquer nível de ensino (primário, secundário ou superior)."

Esperamos então, contribuir com a prática do professor no que diz respeito às resoluções de equações quadráticas para que ele tenha mais opções para ministrar suas aulas sobre este rico assunto.

Neste trabalho foi proposto questões para fazer com que o aluno adquira saberes históricos dos métodos utilizados em diferentes épocas para a resolução de equação polinomial do segundo grau e conclua devidamente a resolução das situações problemas propostas, de maneira autônoma, sendo responsável pelo seu aprendizado. Ao longo do processo, os estudantes trabalharam sendo supervisionados, questionados e orientados pelo professor que apresentou os objetivos, os saberes e as atividades, tendo em vista que, a aprendizagem significativa só ocorreria se os envolvidos estivessem conscientes dos objetivos a serem atingidos, além do que uma das motivações para a aprendizagem é a compreensão do que foi proposto.

Constata-se assim, por meio desta Dissertação, que foi possível ampliar conhecimentos sobre o conteúdo de equações polinomial do 2º grau e principalmente conhecer sua trajetória, descritas de acordo com a época, bem como o desenvolvimento e os métodos de resolução, trazendo para contexto atual do processo de ensino e aprendizagem da sala de aula, atendendo assim, os objetivos proposto neste trabalho. E foi possível buscar na História da Matemática, um suporte para aprofundar conhecimentos matemáticos no tocante a resolução de equação polinomial de 2º grau, analisando a evolução histórica e a contribuição de cada povo em diferentes épocas.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard BencherLtda, 2001.

DEMO, Pedro. **Metodologia científica em Ciências Sociais**. São Paulo: Atlas, 2007

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 1997.843p.

GUELLI, Oscar. **Contando a História da Matemática**. São Paulo: Ed. Ática, 2001.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. de A. **Fundamentos de metodologia científica**. 4.ed., São Paulo, Atlas, 2001.

MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A história como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Ed. Sulina, 2006.

PITOMBEIRA, J.B. **Revisitando uma velha conhecida, p1**. Disponível em <http://www.scribd.com/doc/11057002/A-Historia-da-Equacao-de-2-grau> Acessado em 20 jan. 2017.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática uma visão crítica, desfazendo mitos e lenda**. 2. Ed. São Paulo, Zahar, 2012

ROQUE, Tatiana, PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de História da Matemática**. SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

APÊNDICES

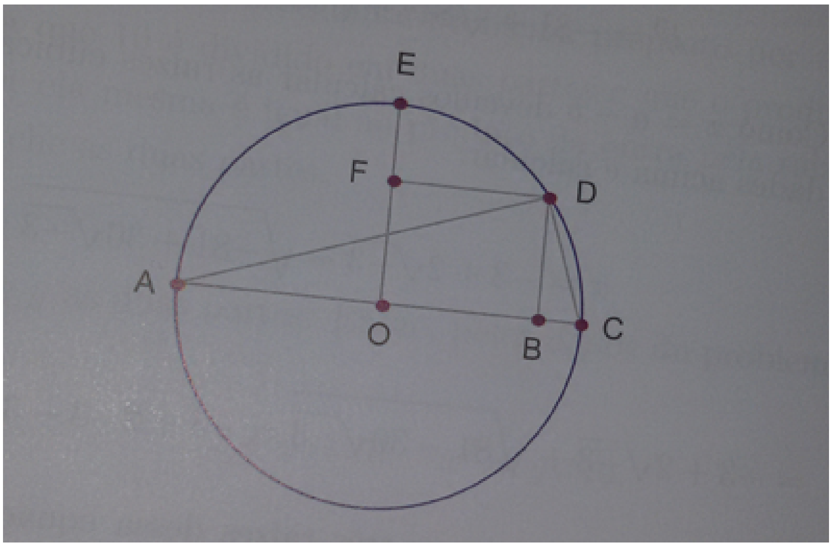
APÊNDICE A

1. Resolução geométrica das equações $A^2 - AB = D^2$ e $AB - A^2 = D^2$, feita Viète.

   Solução: A equação $AB - A^2 = D^2$, que pode ser escrita em linguagem moderna por $bx - x^2 = p^2$

- Desenha um segmento $AC = b$;
- Marque o ponto médio de AC, que será o centro de uma circunferência de diâmetro AC;
- Trace uma perpendicular pelo centro O da circunferência e marque o ponto E ponto de interseção da perpendicular com a circunferência;
- Sobre o segmento OE, marque um ponto F tal que $OF = p$;
- Trace por F uma paralela a AC, que intersecta a circunferência em um ponto D;
- Baixe a perpendicular DB de D sobre AC;
- ENTÃO BC É SOLUÇÃO PROCURADA.

Figura 24: Método geométrico I



Fonte: Tópicos de história da matemática (ROQUE e PITOMBEIRA, 2012, p. 398)

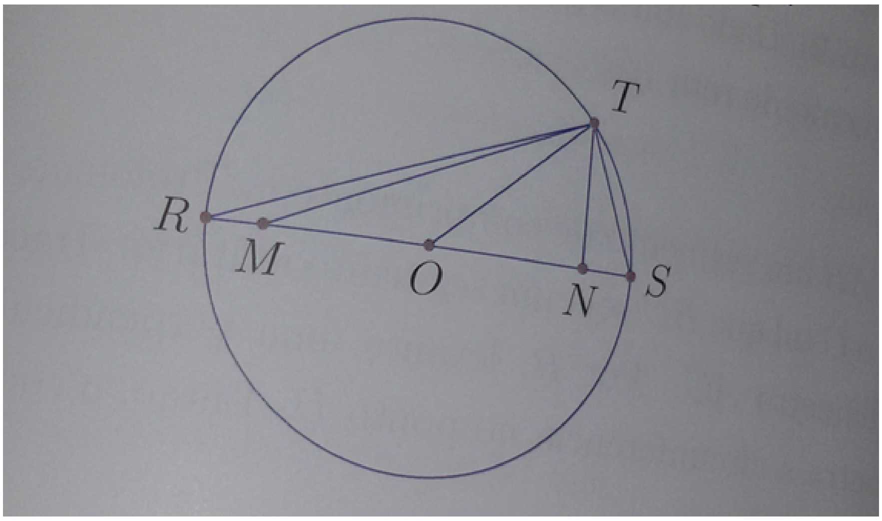
Com efeito, no triângulo retângulo ADC temos: $P^2 = DB^2 = AB \cdot BC = (b-x)x = bx - x^2$
Solução: A equação $A^2 - AB = D^2$, que pode ser escrita em linguagem moderna por $x^2 - bx = p^2$

- Trace um segmento $MN = b$;
- Marque o ponto médio O de MN;

- Por N trace uma perpendicular e marque o ponto T, tal que $TN = p$;
- Trace uma circunferência de centro O e raio OT;
- Marque os pontos R e S, pontos sobre o prolongamento de MN;
- MS É A SOLUÇÃO PROCURADA.

Com efeito, no triangulo retângulo RTS temos: $P^2 = TN^2 = RN \cdot NS$, façamos $MS = x$, como $RM = NS$, temos $NS = x - b$, $RN = b + (x - b) = x$, portanto $p^2 = x(x-b) = x^2 - bx$.

Figura 25: Método geométrico II



Fonte: Tópicos de história da matemática (ROQUE e PITOMBEIRA, 2012, p. 399)

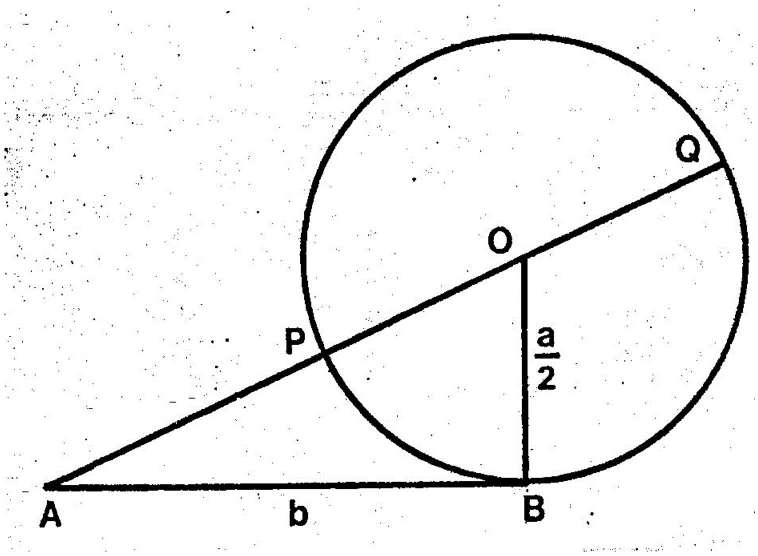
APÊNDICE B

1. Resolução geométrica das equações $x^2 = b^2 - ax$ e $x^2 = ax - c^2$

   Solução: $x^2 = b^2 - ax$

- Trace um segmento AB de comprimento b;
- Por B trace uma perpendicular a AB;
- Marque sobre a perpendicular um ponto O, tal que $OB = \frac{a}{2}$;
- Com centro em O trace uma circunferência de raio OB;
- Trace uma reta AO e;
- Marque os pontos P e Q em que à reta AO intercepta a Circunferência.

Figura 26: Método geométrico III



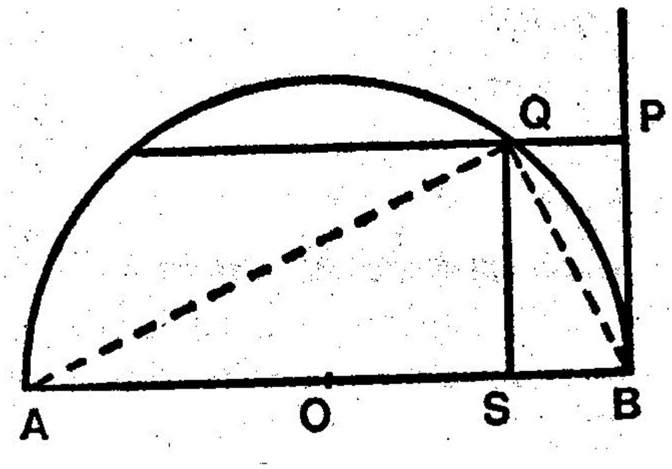
Fonte: Revisitando uma velha conhecida, (PITOMBEIRA, 2012, p. 36)

Pela propriedade da potência de um ponto relativamente a uma circunferência, temos que: $AQ = x$, logo $AP = x - a$ daí temos que $AB^2 = AP \cdot AQ = b^2 = x(x-a)$
Solução da equação $x^2 = ax - c^2$

- Trace um segmento $AB = a$;
- Seja O o ponto médio de AB;
- Com centro em O e raio AO descreva uma semicircunferência;
- Por B trace uma perpendicular a AB;
- Sobre esta perpendicular marque um ponto P, tal que $BP = b$;

- Por P trace uma paralela a AB;
- Marque o ponto Q ponto de intersecção da reta paralela AB com a semicircunferência;
- Seja S o pé da perpendicular baixada de Q sobre AB.

Figura 27: Método geométrico IV



Fonte: Revisitando uma velha conhecida, (PITOMBEIRA, 2012. p. 37)