



Universidade Federal de Goiás - UFG
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Departamento de Matemática
Pedro Felipe da Silva Araújo



Programação Linear e suas Aplicações: Definição e Métodos de Soluções

Goiânia
2013

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Pedro Felipe da Silva Araújo		
E-mail:	Pedrinho21_09@hotmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	Servidor Público		
Agência de fomento:	Secretaria de Educação	Sigla:	SEEDF
País:	Brasil	UF:	DF
		CNPJ:	00.394.676/0001-07
Título:	Programação Linear e suas Aplicações: Definição e Métodos de Soluções		
Palavras-chave:	Conjuntos Convexos, Programação Linear, Método Simplex		
Título em outra língua:	Linear Programming and its Applications: Definition and Methods of Solutions		
Palavras-chave em outra língua:	Convex Sets, Linear Programming, Simplex Method		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	18/03/2013		
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT		
Orientador (a):	José Yunier Bello Cruz		
E-mail:	yunier@impa.br		
Co-orientador(a):*			
E-mail:			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Data: 08 / 04 / 2013

Assinatura do autor

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Pedro Felipe da Silva Araújo

Programação Linear e suas Aplicações

Definição e Métodos de Soluções

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. José Yunier Bello Cruz

Brasília
2013

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG**

A663p Araújo, Pedro Felipe da Silva.
Programação linear e suas aplicações [manuscrito]: definição e métodos de soluções / Pedro Felipe da Silva Araújo. – 2012. xv, 74 f. : il., figs, tabs.

Orientador: Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2012.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras, abreviaturas, siglas e tabelas.

Apêndices.

1. Conjuntos Convexos. 2. Programação Linear. 3. Método Simplex. I. Título.

CDU: 514.172

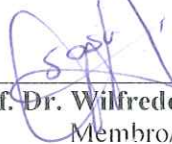
Pedro Felipe da Silva Araújo

**Programação Linear e suas Aplicações:
Definição e Métodos de Soluções**

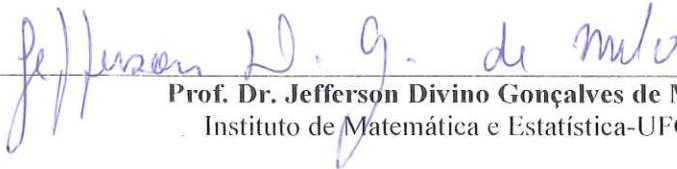
Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 18 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Wilfredo Sosa Sandoval
Membro/UCB



Prof. Dr. Jefferson Divino Gonçalves de Melo
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Pedro Felipe da Silva Araújo

Graduou-se em Matemática na Universidade de Brasília (UnB); durante a graduação, participou do Programa de Ensino e Tutorial de Matemática (PETMAT); foi congressista do 10^o Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM); foi monitor das disciplinas Cálculo e Variáveis Complexas do Departamento de Matemática da UnB; atualmente, é professor de Educação Básica da Secretaria de Educação do Distrito Federal, Brasília.

Aos meus pais Ribamar e Natalina, ao meu irmão Brunno, à minha amada Juliane e aos meus amigos Carlos, Helder, Walter, Ronan, resumindo, à turma PROFMAT do pólo Anápolis que me incentivou e me deu força para concluir o mestrado com êxito.

Agradecimentos

Aos professores do PROFMAT que passaram o conhecimento necessário para o desenvolvimento deste trabalho, principalmente ao professor Dr. José Yunier Bello Cruz quem sugeriu e ajudou no desenvolvimento do tema.

“A matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza.”

Bertrand Russel

Resumo

Araújo, P. F. da S.. Programação Linear, Brasília, 2012. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Problemas que envolvem a ideia de otimização estão presentes em vários campos de estudo como, por exemplo, na Economia se busca a minimização de custos e a maximização do lucro em uma firma ou país, a partir do orçamento disponível; na Nutrição se procura suprir os nutrientes essenciais diários com o menor custo possível, considerando a capacidade financeira do indivíduo; na Química se estuda a pressão e a temperatura mínimas necessárias para realizar uma reação química específica no menor tempo possível; na Engenharia se busca o menor custo para a confecção de uma liga de alumínio misturando várias matérias-primas e obedecendo às restrições mínimas e máximas dos respectivos elementos presentes na liga.

Todos os exemplos citados, além de uma infinidade de outras situações, buscam sua solução através da Programação Linear. São problemas de minimizar ou maximizar uma função linear sujeito a Desigualdades ou Igualdades Lineares, com o intuito de encontrar a melhor solução deste problema.

Para isso, mostram-se neste trabalho os métodos de solução de problemas de Programação Linear. Há ênfase nas soluções geométricas e no Método Simplex, a forma algébrica de solução. Procuram-se mostrar várias situações as quais podem se encaixar alguns desses problemas, dos casos gerais a alguns casos mais específicos.

Antes de chegar, eventualmente, em como solucionar problemas de Programação Linear, constrói-se o campo de trabalho deste tipo de otimização, os Conjuntos Convexos. Há apresentações das definições e teoremas essenciais para a compreensão e o desenvolvimento destes problemas; além de discussões sobre a eficiência dos métodos aplicados.

Durante o trabalho, mostra-se que há casos os quais não se aplicam as soluções apresentadas, porém, em sua maioria, se enquadram de maneira eficiente, mesmo como uma boa aproximação.

Palavras-chave

<Conjuntos Convexos, Programação Linear, Método Simplex>

Abstract

Araújo, P. F. da S.. Linear Programming, Brasília, 2012. Masters Dissertation. Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Problems involving the idea of optimization are found in various fields of study, such as, in Economy is in search of cost minimization and profit maximization in a firm or country, from the available budget; in Nutrition is seeking to redress the essential nutrients daily with the lowest possible cost, considering the financial capacity of the individual; in Chemistry studies the pressure and temperature minimum necessary to accomplish a specific chemical reaction in the shortest possible time; in Engineering seeks the lowest cost for the construction of an aluminium alloy mixing various raw materials and restrictions obeying minimum and maximum of the respective elements in the alloy.

All examples cited, plus a multitude of other situations, seek their Remedy by Linear Programming. They are problems of minimizing or maximizing a linear function subject to linear inequalities or Equalities, in order to find the best solution to this problem.

For this show in this paper methods of problem solving Linear Programming. There is an emphasis on geometric solutions and Simplex Method, to form algebraic solution. Wanted to show various situations which may fit some of these problems, some general cases more specific cases.

Before arriving eventually in solving linear programming problems, builds up the field work of this type of optimization, Convex Sets. There are presentations of definitions and theorems essential to the understanding and development of these problems, besides discussions on the efficiency of the methods applied.

During the work, it is shown that there are cases which do not apply the solutions presented, but mostly fit efficiently, even as a good approximation.

Keywords

<Convex Sets, Linear Programming, Simplex Method>

Sumário

1	Introdução	12
1.1	Preliminares	12
1.2	Objetivos	13
1.3	O Desenvolvimento Histórico da Programação Linear	13
1.4	Apresentação dos Capítulos	14
2	Conjuntos Convexos	15
2.1	Conceitos de Topologia em \mathbb{R}^n	15
2.2	Convexidade	19
3	Desigualdades e Sistemas de Inequações Lineares	29
3.1	Desigualdades	29
3.2	Sistemas de Desigualdades Lineares	32
3.3	O valor máximo e mínimo da forma linear no poliedro	34
3.4	Redução de Desigualdades Lineares a Igualdades Lineares	36
4	Programação Linear	40
4.1	Modelos de Programação Linear	40
4.2	Solução Gráfica	47
4.3	Limitações da Programação Linear	55
5	Método Simplex	57
5.1	Relação entre o método gráfico e o algébrico	57
5.2	O Método Simplex	59
5.3	Casos Especiais	74
5.4	Obtenção da solução inicial	75
5.4.1	Casos de Dificuldades	75
5.4.2	Processo do “M Grande”	76
5.4.3	Processo da Função Objetiva Artificial	77
6	Considerações Finais	83
A	Álgebra Linear	84
A.1	Matrizes	84
A.2	Sistemas de Equações Lineares	89
A.3	Espaço Vetorial	103

Capítulo 1

Introdução

1.1 Preliminares

Um Programa Linear é um problema de otimização no qual há uma função objetiva linear e restrições que consistem de equações ou inequações lineares. A forma exata dessas restrições podem ser diferentes dependendo do problema estudado, mas, como mostra abaixo, qualquer Programa Linear pode ser transformado em um Sistema de Equações Lineares chamado forma “standard”.

$$\begin{array}{l} \text{maximizar} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad \text{sujeito a} \\ \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, \end{array}$$

onde b_i , c_i e a_{ij} são constantes reais fixas, e os x_j são números reais a serem determinados. Assume-se que cada equação pode ser multiplicada por -1 , quando necessário, para que cada b_i seja não negativo.

Em uma notação vetorial, este problema na forma “standard” pode ser reescrito como:

$$\begin{array}{l} \text{maximizar} \quad c^T x \quad \text{sujeito a} \\ Ax = b \quad \text{e} \quad x \geq 0. \end{array}$$

Aqui x é um vetor coluna n -dimensional, c^T é um vetor linha n -dimensional, A é a matriz dos coeficientes de ordem $m \times n$ e b é um vetor coluna m -dimensional. A desigualdade vetorial $x \geq 0$ indica que cada componente de x é não-negativo.

1.2 Objetivos

Os objetivos deste trabalho são:

- (i) Desenvolver a teoria dos conjuntos convexos;
- (ii) Apresentar as propriedades algébricas e geométricas das desigualdades lineares e dos sistemas de desigualdades lineares;
- (iii) Explicar alguns modelos clássicos da Programação Linear;
- (iv) Apresentar o método gráfico para a resolução de um modelo de Programação Linear, com alguns casos particulares;
- (v) Desenvolver o Método Simplex, o qual é a forma algébrica de resolução de um modelo de Programação Linear, com alguns casos especiais.

Como objetivo principal, procurou-se esclarecer as ideias teóricas de forma a contribuir na utilização adequada das técnicas. Assim, percebe-se o detalhamento ao desenvolver os problemas propostos no trabalho.

1.3 O Desenvolvimento Histórico da Programação Linear

A história da Programação Linear é de 1830 a 1947. Neste período, houve percursos iniciais que desenvolveram estudos sobre:

- (i) igualdades e desigualdades lineares como Fourier e Gauss em 1826, Gordan em 1873 e Pareto em 1906, bem como a contribuição deste na Teoria dos Jogos; veja [20];
- (ii) Soluções de Sistemas Lineares por Motzkin em 1936; veja [20];
- (iii) matriz de insumo e produto de Leontief; veja [19];
- (iv) atribuições de produção de Kantorovich em 1939; veja [18];
- (v) o problema do transporte de Hitchcock em 1941; veja [14].

O problema do Transporte foi um dos problemas que mais impulsionou a Programação Linear. As principais contribuições foram modelar, quantificar e resolver problemas práticos que seriam reduzidos a Sistemas de Equações Lineares.

Foi em 1947 que Dantzig concebeu uma técnica automatizada, a qual permitiu que problemas de otimização com função objetivo linear e restrições lineares fossem resolvidos, chamada Método Simplex; veja [12].

Depois da construção da base de desenvolvimento da Programação Linear, surgiram melhorias para os métodos existentes; novas estruturas matemáticas foram encontradas e descritas; e novos campos foram descobertos e desenvolvidos como, por exemplo:

- (i) Manne, em 1953, e Orchard, em 1955, trataram sobre Programação Paramétrica; veja [21];
- (ii) Charnes, em 1952, tratou sobre Degeneração e uma aplicação de Programação Linear sobre a mistura de combustíveis na aviação; veja [11];
- (iii) Lemke, em 1954, desenvolveu o Método Simplex Dual; veja [17];
- (iv) Ford e Fulkerson, em 1954, descreveu um problema de Programação Linear que permitiria traçar uma rota para enviar tanto fluxo quanto for possível, a partir de uma origem a um destino, através de uma rede; veja [13];
- (v) Koopmans e Bechmann, em 1957, foram os primeiros a descrever o problema da Atribuição Quadrática, o qual é uma estrutura não-linear; veja [16];
- (vi) Karmarkar, em 1984, desenvolveu o Método dos Pontos Interiores, que tem a propriedade de exigir um esforço computacional ligeiramente maior a partir do aumento do trabalho; veja [15].

Continua, atualmente, a melhoria de métodos da classe dos Pontos Interiores e se procuram implementações mais eficientes deste método.

Outros avanços têm sido a proliferação de softwares e o uso de planilhas na otimização, cujo aumento da velocidade e da memória acompanhado de baixos custos, melhorou o uso de técnicas na Programação Linear.

1.4 Apresentação dos Capítulos

O Capítulo 2 trata sobre conjuntos convexos, que é utilizado nas estruturas das soluções de um Programa Linear. Mostram-se as principais definições e teoremas para explicar o desenvolvimento dos modelos de Programação Linear propostos.

O Capítulo 3 aborda as desigualdades lineares, com suas propriedades algébricas e geométricas; trata sobre sistemas de desigualdades lineares, como reduzi-los a Sistemas de Equações Lineares e como encontrar a sua solução máxima ou mínima.

O Capítulo 4 trata sobre o tema deste trabalho, a Programação Linear, mostrando-se alguns modelos clássicos que, como visto no resumo histórico, motivaram seu desenvolvimento; Resolução de modelos de Programação Linear a partir do método gráfico com alguns casos particulares; e aborda as limitações de modelos específicos de Programação Linear.

O Capítulo 5 trata sobre o método algébrico utilizado para resolver modelos de Programação Linear, o Método Simplex, mostrando-se seu desenvolvimento por sistemas de desigualdades lineares e por quadros; e casos especiais ao resolver alguns modelos de Programação Linear;

O Apêndice apresenta tópicos de Álgebra Linear como pré-requisito ao bom entendimento deste trabalho. Apresentam-se as definições e os teoremas principais sobre Matrizes, Sistemas Lineares e Espaço Vetorial.

Capítulo 2

Conjuntos Convexos

Neste capítulo se aborda os conceitos essenciais para a construção do campo de definição da Programação Linear, sendo primordial o conhecimento dos principais teoremas da Álgebra Linear.

2.1 Conceitos de Topologia em \mathbb{R}^n

Abaixo, introduz-se algumas terminologias de topologia em \mathbb{R}^n importantes sobre conjuntos.

Definição 1. Seja $V \in \mathbb{R}^n$ um espaço vetorial, $a_i, b_i \in V$ tal que a_i representa um vetor linha e b_i um vetor coluna de números reais; o conjunto dos pontos $\{x \in V | a_i x = b_i\}$ representa o hiperplano e as desigualdades $\{x \in V | a_i x \leq b_i\}$ e $\{x \in V | a_i x \geq b_i\}$ os semi-espacos correspondentes no \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.

a) $x \in \mathbb{R} : x = a$ é um hiperplano; $x \in \mathbb{R} : x \leq a$ e $x \in \mathbb{R} : x \geq a$ são os semi-espacos chamados semirretas.

b) Para $n = 2$, tem-se que:

- (i) o hiperplano é definido por uma reta;
- (ii) os semi-espacos são definidos pelos semiplanos.

c) Para $n = 3$, tem-se que:

- (i) o hiperplano é definido por um plano;
- (ii) os semi-espacos correspondentes recebem este mesmo nome.

Definição 2. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$; uma bola de raio c centrada em x_0 é chamada vizinhança de x_0 .

Definição 3. Se $S \in \mathbb{R}^n$ contém uma vizinhança de x_0 , então S é uma vizinhança de x_0 e x_0 é um ponto interior de S .

Definição 4. O conjunto dos pontos interiores de S é chamado interior de S e denotado por $\text{int}(S)$.

Definição 5. Se todo ponto de S é um ponto interior, isto é, se $S = \text{int}(S)$, então S é aberto; S é fechado se o complementar de S é aberto.

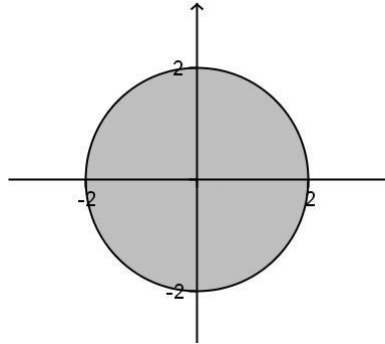


Figura 2.1: Representação de um conjunto fechado

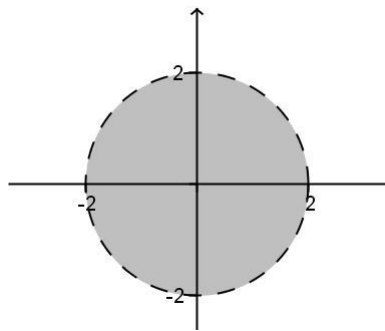


Figura 2.2: Representação de um conjunto aberto

Na Programação Linear se lida, exclusivamente, com conjuntos fechados, portanto consideramos somente semi-espacos fechados.

Exemplo 2. Como uma ilustração, considere o sistema de desigualdades lineares abaixo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ \frac{5}{2}x_1 - x_2 \geq 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

A Figura 2.3 ilustra as retas I e II representando as relações de (2.1), enquanto as abas representam os semi-espacos definidos pelas relações. Estes semi-espacos dividem o plano bidimensional em quatro conjuntos A, B, C e D. Todos os pontos do conjunto A contradizem a restrição da relação I e satisfaz a restrição II, C contradizem a restrição da relação II e não satisfaz a restrição I, B contradiz ambas as restrições e D, incluindo seu bordo, satisfaz ambas as relações, sendo chamado de conjunto possível ou conjunto solução possível.

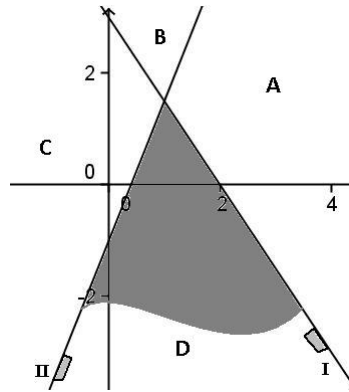


Figura 2.3: conjunto solução possível

Definição 6. O *octante não-negativo* \mathbb{R}_+^n é o conjunto de todos os pontos não-negativos em \mathbb{R}^n , isto é

$$\{x \in \mathbb{R}^n | x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Exemplo 3.

- Em \mathbb{R}^2 , o ortante não-negativo equivale ao primeiro quadrante, incluindo-se os eixos positivos e a origem.
- Acrescentando-se as relações III: $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ ao sistema do exemplo anterior, então o conjunto solução do sistema equivale ao triângulo de vértices $(\frac{2}{3}, 0)$, $(2, 0)$ e $(1, \frac{3}{2})$ dado pela interseção do conjunto D com o primeiro quadrante.

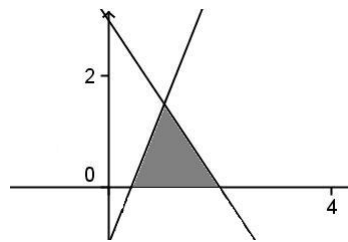


Figura 2.4: conjunto solução com restrição de incógnitas não – negativas

Definição 7. Um conjunto $S \in \mathbb{R}^n$ é dito limitado se existe uma bola de raio $c \in \mathbb{R}$ tal que ele está contido nessa bola; um conjunto que não é limitado é chamado ilimitado; quando um conjunto é fechado e limitado, ele é chamado de compacto.

Exemplo 4.

- O conjunto da Figura 2.1, de fato, é compacto;
- O conjunto D da Figura 2.3 é ilimitado;

c) O conjunto solução hachurado na Figura 2.4 é compacto.

Definição 8. A interseção de um número finito de hiperplanos e/ou semi-espacos fechados em \mathbb{R}^n é chamado politopo; um politopo limitado é chamado poliedro.

Exemplo 5.

a) O conjunto D da Figura 2.3 é um politopo, mas não é um poliedro;

b) O conjunto solução hachurado na Figura 2.4 é um poliedro.

Mostrar-se-á no capítulo 4 que todo conjunto solução de um problema de Programação Linear forma um politopo.

Notação H_i denota o conjunto dos pontos que satisfaz $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$, que é a i -ésima relação linear; então $S = \bigcap_{i=1}^m H_i$ é o conjunto dos pontos que satisfaz, simultaneamente, todas as m relações.

Definição 9. A k -ésima relação é chamada redundante se $S = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m H_i$. Se a k -ésima relação não é redundante, então ela é chamada essencial.

Definição 10. Seja V um espaço vetorial e $a_i, b_i, \tilde{x} \in V$; se algum ponto $\tilde{x} \in S$ satisfaz a i -ésima relação linear como uma equação, isto é, se $a_i\tilde{x} = b_i$, então a i -ésima relação é dita vinculada a \tilde{x} .

Exemplo 6.

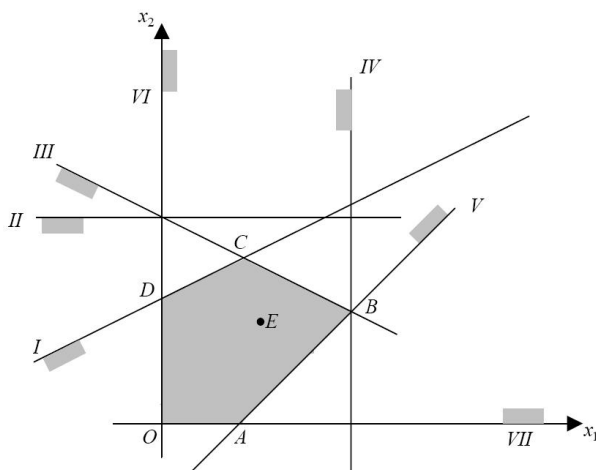


Figura 2.5:

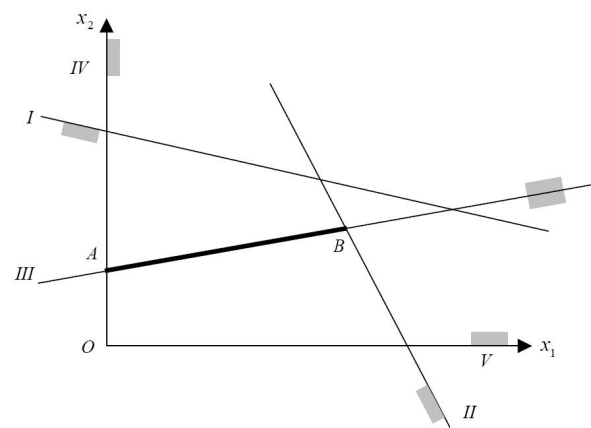


Figura 2.6:

- a) Na Figura 2.5, o poliedro gerado pelos semi-espacos I, II, ..., VII é a área hachurada com extremos nos pontos O, A, B, C e D. Claramente, a desigualdade II é redundante, afinal sua inclusão ou remoção não altera a região do politopo. O mesmo argumento pode ser aplicado à desigualdade IV, a qual também é redundante. Note, contudo, que a desigualdade IV possui o ponto B e a desigualdade II não passa por ponto algum do politopo, com isso, diz-se que a restrição II é uma redundância forte e IV uma redundância fraca. Ao ponto C as relações I e III estão vinculadas, da mesma forma ao ponto O as relações VI e VII estão vinculadas, enquanto o ponto E não possui relação de vinculação.
- b) Na Figura 2.6, as relações I e II são desigualdades enquanto a relação III é uma equação, logo o politopo definido é um segmento de reta com extremos em A e B. Isto implica que as relações I e V são redundantes e poderiam ser deletadas sem alterar o poliedro.

2.2 Convexidade

Definição 11. Seja $V \in \mathbb{R}^n$ um espaço vetorial, $x \in V$ e $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, r$; a combinação linear $y = \sum_{i=1}^r a_i x_i$, é chamada:

(i) combinação linear não-negativa se $a_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, r$;

(ii) combinação linear afim se $\sum_{i=1}^r a_i = 1$;

(iii) combinação linear convexa se valem os itens (i) e (ii).

Exemplo 7.

Considere os pontos $x_1 = (0, 0)$, $x_2 = (3, 0)$, $x_3 = (0, 2)$, $x_4 = (3, 2)$ e $y = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. Por inspeção, note que a combinação linear dos pontos x_1, x_2, x_3, x_4 com as respectivas constantes $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{4}$ e $a_4 = 0$ geram o ponto y , logo, tem-se uma combinação linear não negativa.

Para encontrar uma combinação linear afim ou convexa, basta encontrar o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} 0a_1 + 3a_2 + 0a_3 + 3a_4 = \frac{3}{2} \\ 0a_1 + 0a_2 + 2a_3 + 2a_4 = \frac{1}{2} \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1. \end{cases}$$

Ignorando as condições não-negativas ao iniciar e resolvendo o sistema por escalonamento, tem-se que:

$$\begin{cases} 0a_1 + 3a_2 + 0a_3 + 3a_4 = \frac{3}{2} \\ 0a_1 + 0a_2 + 2a_3 + 2a_4 = \frac{1}{2} \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \end{cases}$$

Aplicando-se operações elementares, chega-se em um sistema o qual possui o mesmo conjunto solução, como se explica no Apêndice. Com isso, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_2 + a_4 = \frac{1}{2} \\ -a_2 + a_3 = -\frac{1}{4} \\ a_1 + a_2 = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Uma das soluções do sistema é $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{4}$ e $a_4 = 0$, indicando que, de fato, y é uma combinação linear afim dos vetores dados.

Finalmente, Para que y seja uma combinação convexa, todos os parâmetros devem ser não-negativos, satisfazendo as restrições do sistema escalonado obtido. Com isso, é fácil ver que $a_2 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, resultando que $a_1, a_2, a_3 \geq 0$, logo y também é uma combinação convexa dos pontos dados.

Proposição 2.2.1. *Qualquer ponto situado no segmento de reta que liga dois pontos contidos no \mathbb{R}^n pode ser expresso como uma combinação convexa desses dois pontos.*

Demonstração.

Sejam A_1 e A_2 pertencentes a \mathbb{R}^n ; Considere a Figura 2.7, onde A_3 é um ponto qualquer entre A_1 e A_2 .

Como A_3 está entre A_1 e A_2 , então, para algum $0 \leq \alpha \leq 1$, tem-se, por construção:

$$\begin{aligned} \alpha(A_1 - A_2) &= A_3 - A_2 \\ A_3 &= \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2. \end{aligned}$$

Como os coeficientes α e $(1 - \alpha)$ de A_3 são não-negativos e a soma deles é igual a 1, então tem-se que A_3 , pela definição 8, é uma combinação convexa de A_1 e A_2 .

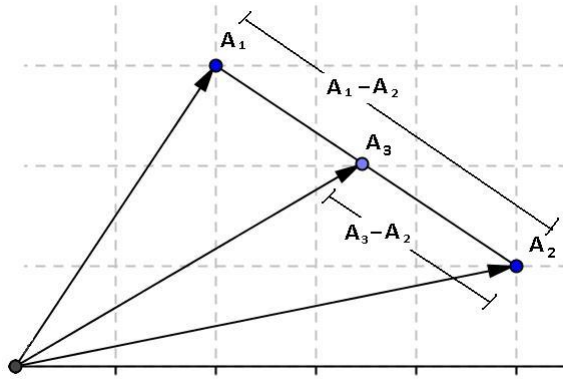


Figura 2.7:

■

Corolário 2.2.2. *Qualquer ponto que for expresso como uma combinação convexa de dois pontos fica contido no segmento de reta que os une.*

Demonstração.

Seja A_3 a combinação convexa:

$$A_3 = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2, \forall 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Note que se $\alpha = 0$, $A_3 = A_2$ e se $\alpha = 1$, $A_3 = A_1$.

Suponha que A_3 não pertence ao segmento com extremos em A_1 e A_2 , conforme mostra a Figura 2.8.

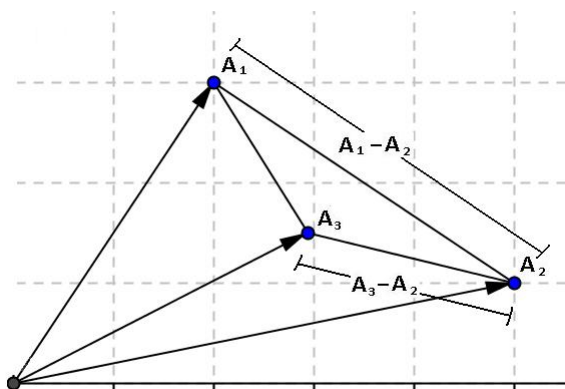


Figura 2.8:

Logo, tem-se que:

$$\begin{aligned} A_3 &= \alpha A_1 + A_2 - \alpha A_2 \\ &= \alpha(A_1 - A_2) + A_2 \\ A_3 - A_2 &= \alpha(A_1 - A_2). \end{aligned}$$

Logo tem-se que os vetores $A_3 - A_2$ e $(A_1 - A_2)$ devem ter a mesma direção. Isso só poderia acontecer se A_3 pertence ao segmento de reta com extremos em A_1 e A_2 . ■

Considere agora três pontos A_1 , A_2 e A_3 pertencentes a \mathbb{R}^n , conforme mostra a Figura 2.9.

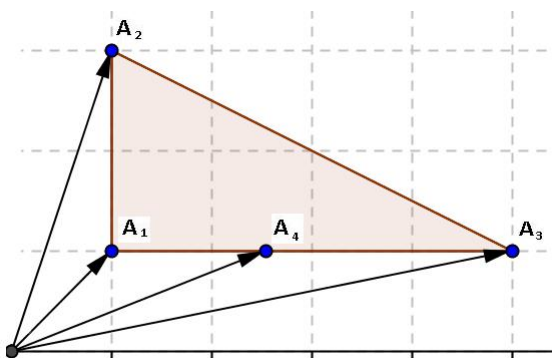


Figura 2.9:

Veja que, também, qualquer ponto do triângulo $A_1A_2A_3$ pode ser obtido como uma combinação convexa dos pontos A_1 , A_2 e A_3 .

Sabe-se que $A_4 = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_3$ para $0 \leq \alpha \leq 1$ pertence ao segmento de reta com extremos em A_1 e A_3 . Então $A_5 = kA_4 + (1 - k)A_2$, para $0 \leq k \leq 1$ representa um ponto qualquer dentro do triângulo. Tem-se que:

$$\begin{aligned} A_5 &= k[\alpha A_1 + (1 - \alpha)A_3] + (1 - k)A_2 \\ &= k\alpha A_1 + (1 - k)A_2 + k(1 - \alpha)A_3. \end{aligned}$$

Note que os coeficientes de A_1 , A_2 e A_3 são não-negativos e soma deles é:

$$k\alpha + (1 - k) + (k - k\alpha) = 1.$$

Portanto, A_5 é uma combinação convexa de A_1 , A_2 e A_3 .

Ao se considerar quatro vetores A_1 , A_2 , A_3 e A_4 pode-se obter a Figura 2.10

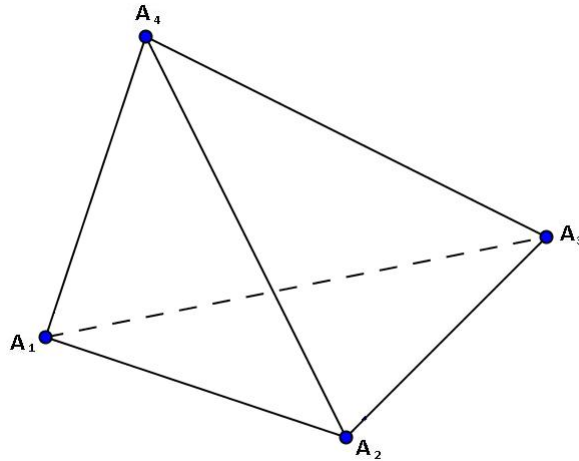


Figura 2.10:

Note que qualquer ponto do tetraedro da Figura 2.10 pode ser obtido com uma combinação convexa de A_1 , A_2 , A_3 e A_4 . Essa propriedade pode ser verificada pelo leitor de modo análogo ao do triângulo. Essa propriedade será válida qualquer que seja o número de pontos.

Demonstrar-se-á no capítulo 4 que, se dois vértices de um segmento pertence à solução ótima do modelo de programação linear, então qualquer combinação convexa destes também será uma solução ótima.

Definição 12 (Conjunto Convexo). Um conjunto S é dito convexo se uma combinação convexa de quaisquer dois elementos de S é um elemento de S , isto é, para todo $x_1, x_2 \in S$ e para todo número real $\alpha \in [0, 1]$, o ponto $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in S$.

Geometricamente, um conjunto é convexo se todos os pontos de um segmento de reta, com extremos que são elementos de S , são elementos de S .

Exemplo 8.

- a) A Figura 2.11 mostra um disco descrito pela equação $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \leq 0$. Note que ele é um conjunto convexo.

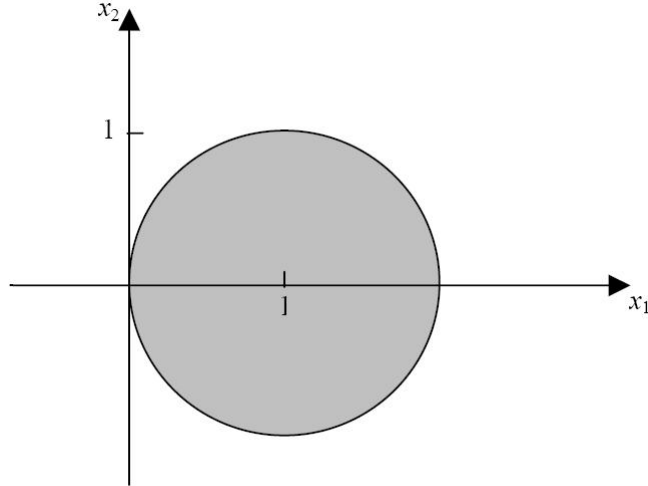


Figura 2.11:

Mostrando-se algebricamente, considere que $\tilde{x}, \hat{x} \in \mathbb{R}^2$, tais que $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ e $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, sejam dois pontos que satisfaçam a relação, isto é

$$\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - 2\tilde{x}_1 \leq 0 \quad \text{e} \quad \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 - 2\hat{x}_1 \leq 0.$$

Considere também que $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, onde $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, é uma combinação convexa qualquer de \tilde{x} e \hat{x} , isto é

$$\bar{x}_j = \lambda \tilde{x}_j + (1 - \lambda) \hat{x}_j, \quad j = 1, 2 \quad \text{com} \quad \lambda \in [0, 1].$$

Portanto, tem-se que

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 2\bar{x}_1 &= [\lambda \tilde{x}_1 + (1 - \lambda) \hat{x}_1]^2 + [\lambda \tilde{x}_2 + (1 - \lambda) \hat{x}_2]^2 - 2[\lambda \tilde{x}_1 + (1 - \lambda) \hat{x}_1]^2 \\ &= \underbrace{(\tilde{x}_1 - \hat{x}_1)^2}_{\geq 0} \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{(\lambda - 1)}_{\leq 0} + \underbrace{(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2)^2}_{\geq 0} \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{(\lambda - 1)}_{\leq 0} + \\ &\quad + \underbrace{(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 - 2\hat{x}_1)}_{\leq 0} \underbrace{(1 - \lambda)}_{\geq 0} + \underbrace{(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - 2\tilde{x}_1)}_{\leq 0} \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Logo, o conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \leq 0\}$ é convexo.

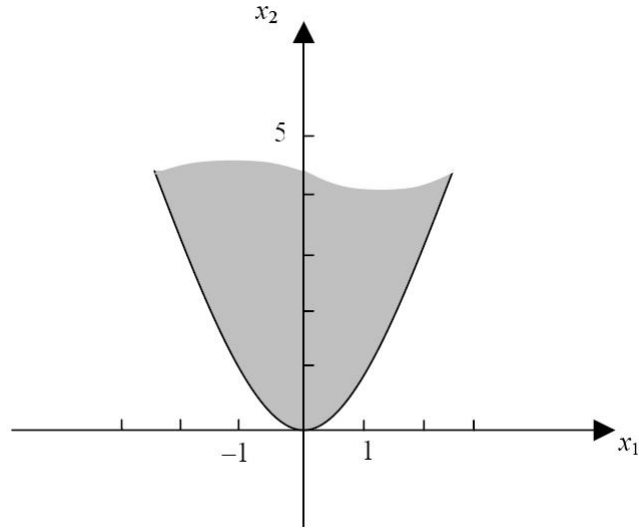


Figura 2.12:

- b) A Figura 2.12 mostra a região hachurada no interior da parábola é descrita pela desigualdade $x_1^2 - x_2 \leq 0$. Note que ela também é um conjunto convexo.

Mostrando-se algebricamente, considere que $\tilde{x}, \hat{x} \in \mathbb{R}^2$, tais que $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ e $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, sejam dois pontos que satisfaçam a relação, isto é

$$\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2 \leq 0 \quad \text{e} \quad \hat{x}_1^2 - \hat{x}_2 \leq 0.$$

Considere também que $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, onde $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, é uma combinação convexa qualquer de \tilde{x} e \hat{x} , isto é

$$\bar{x}_j = \lambda \tilde{x}_j + (1 - \lambda) \hat{x}_j, \quad j = 1, 2 \text{ com } \lambda \in [0, 1].$$

Portanto, tem-se que

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2 &= [\lambda \tilde{x}_1 + (1 - \lambda) \hat{x}_1]^2 - [\lambda \tilde{x}_2 + (1 - \lambda) \hat{x}_2]^2 \\ &= \underbrace{(\hat{x}_1^2 - \hat{x}_2)}_{\leq 0} \underbrace{(1 - \lambda)}_{\geq 0} + \underbrace{(\tilde{x}_1 - \hat{x}_1)^2}_{\geq 0} \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{(\lambda - 1)}_{\leq 0} + \underbrace{(\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2)}_{\leq 0} \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Logo, o conjunto $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 - x_2 \leq 0\}$ é convexo.

Lema 2.2.3. *Toda relação linear define um conjunto convexo.*

Demonstração.

Seja V um espaço vetorial e $a, b, x \in V$; considere a relação linear $ax R b$ e suponha que $x_1, x_2 \in V$ resolvem esta relação, isto é

$$ax_1 - b \geq 0 \quad \text{e} \quad ax_2 - b \geq 0.$$

Considere, agora, \bar{x} uma combinação convexa de x_1 e x_2 , isto é

$$\bar{x} = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Então, tem-se que

$$\begin{aligned} a\bar{x} - b &= a[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] - b \\ &= \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{(ax_1 - b)}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - \lambda)}_{\geq 0} \underbrace{(ax_2 - b)}_{\geq 0} \\ &\geq 0, \text{ para } R \in \{\leq, =, \geq\}. \end{aligned}$$

De forma análoga poder-se-ia aplicar aos casos os quais $R \in \{<, >\}$. ■

Lema 2.2.4. *A interseção de um número finito de conjuntos convexos é um conjunto convexo.*

Demonstração.

Primeiramente, considere dois conjuntos convexos A e B e defina $C = A \cap B$. Para quaisquer dois pontos $x, y \in C$, pode-se concluir que, como C é subconjunto tanto de A quanto de B , $x, y \in A$ e $x, y \in B$. Defina agora um ponto $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, $\lambda \in [0, 1]$, então, por hipótese, o conjunto A é convexo, logo $z \in A$, e o conjunto B também, logo $z \in B$, portanto $z \in C$.

O mesmo vale para um número finito de conjuntos convexos. ■

Corolário 2.2.5. *Todo politopo é um conjunto convexo.*

Demonstração.

Basta lembrar que um politopo é, por definição, a interseção de hiperplanos e/ou semi-espacos. ■

Definição 13. Um ponto básico no \mathbb{R}^n é a interseção de pelo menos n hiperplanos em um ponto singular; um ponto básico *possível*, também chamado de *ponto extremo*, é um ponto básico que satisfaz todas as relações lineares dadas.

Exemplo 9. A área hachurada na Figura 2.13 é um politopo; os pontos O, A, B, C, D, E, F, G e H são pontos básicos, os quais somente O, A, C e F são pontos extremos do politopo.

Definição 14. Um ponto x que pertence a um conjunto convexo C é chamado ponto extremo de C se não existem dois pontos distintos x_1 e x_2 em C tais que

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Um ponto extremo é, portanto, um ponto que não se encontra, estritamente, dentro de um segmento de reta formado por dois outros pontos do conjunto. Os pontos extremos de um triângulo, por exemplo, são os três vértices.

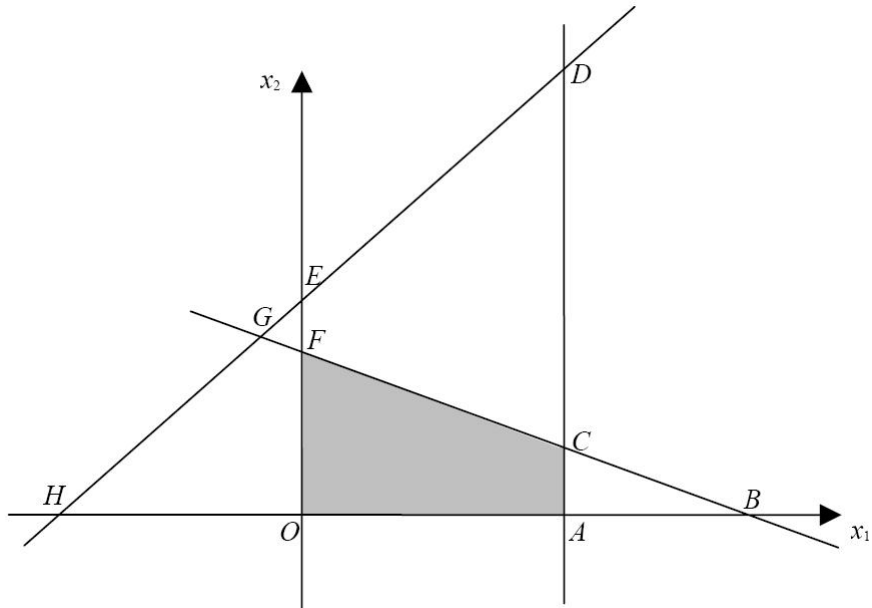


Figura 2.13:

Lema 2.2.6. *Um ponto extremo não pode ser expresso como uma combinação convexa de outros pontos do politopo; no poliedro, cada ponto pode ser expresso como uma combinação convexa de pontos extremos. Esta propriedade não é válida para politopos que não são poliédricos.*

Demonstrar-se-á no Capítulo 4 que todo conjunto solução de um modelo de programação linear é um conjunto convexo.

Exemplo 10. Considere o espaço bidimensional; os politopos que não tem pontos extremos consistem de conjunto vazio, hiperplano ou semi-espaço, ou a interseção de qualquer número de semi-espaços paralelos, cujos gradientes pertencem a um hiperplano único. Politopos com um único ponto extremo, ou estão em um ponto, ou em um cone poliédrico, como mencionado na proposição a seguir. Nenhum destes politopos são poliedros e em nenhum desses casos será possível gerar qualquer ponto a partir dos pontos extremos existentes que não seja o próprio ponto extremo.

Definição 15. O conjunto de todos os pontos que podem ser expressos como combinação convexa de pontos extremos é chamado de envoltória convexa dos pontos extremos dados.

Proposição 2.2.7. *Um poliedro é a envoltória convexa de pontos extremos.*

Definição 16. Um cone poliedral convexo é a interseção de um número qualquer de semi-espaços fechados que são limitados por hiperplanos intersectados em um mesmo ponto chamado vértice o qual se encontra no 0.

Exemplo 11. São cones poliedrais:

- a) Um semi-espaço;
- b) A interseção de dois semi-espaços;

- c) Um plano;
- d) Um semi-plano;
- e) Uma reta;
- f) Semirretas de mesma origem formando um ângulo menor que 180° em um plano centrado em 0;
- g) A interseção de uma reta com um semi-espaço;
- h) Uma pirâmide convexa ilimitada com vértice em 0.

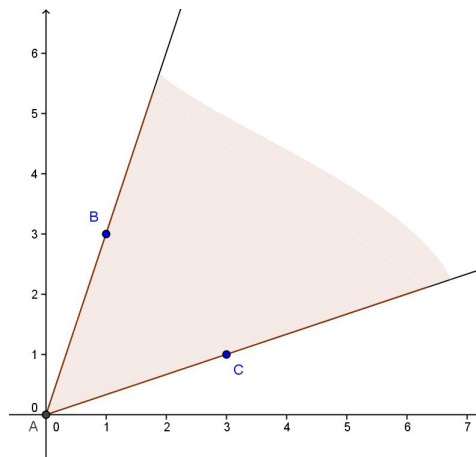


Figura 2.14: Cone poliedral formado por semirretas com origem em 0.

Teorema 2.2.8. *Qualquer cone poliédrico convexo com vértice na origem pode ser gerado como o conjunto de todas as combinações lineares não – negativas de um número finito de pontos dados.*

Demonstração.

Far-se-á uma demonstração apenas no caso que \mathcal{K} seja uma pirâmide.

Supondo \mathcal{K} ser uma pirâmide, seleciona-se um ponto em cada uma de suas arestas. Com isso, obtém-se um sistema de pontos A_1, \dots, A_r . Afirma-se que o conjunto dos vetores $\{A_1, \dots, A_r\}$ gera \mathcal{K} .

Examinando um plano qualquer que corta todas as arestas da pirâmide \mathcal{K} , obtém-se os pontos A'_1, \dots, A'_r . É evidente que

$$A'_1 = k_1 A_1, \dots, A'_r = k_r A_r; \quad k_1, \dots, k_r \geq 0.$$

Suponha, agora, que A é qualquer ponto da pirâmide diferente do vértice O . A semirreta OA intercepta o plano em um certo ponto A' . É evidente que A' é uma combinação convexa do sistema $A'_1 = k_1 A_1, \dots, A'_r$ e, portanto

$$A' = p_1 A'_1 + \dots + p_r A'_r, \quad \sum_{i=1}^r p_i = 1.$$

Substituindo, na última relação, as igualdades da primeira relação da demonstração, tem-se que:

$$A' = k_1 p_1 A_1 + \dots + k_r p_r A_r,$$

levando em consideração que $A' = kA$, tem-se que:

$$A = s_1 A_1 + \dots + s_r A_r; \quad s_i = \frac{k_i p_i}{k}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Portanto, qualquer ponto A da pirâmide \mathcal{K} pertence ao conjunto gerado por $\{A_1, \dots, A_r\}$.

Nos casos em que \mathcal{K} equivale a um dos itens do Exemplo 11, pode ser feito de modo análogo. ■

Definição 17. Um Simplex $S \in \mathbb{R}^n$ é a envoltória convexa de $n + 1$ pontos dados, tais que não há hiperplanos em \mathbb{R}^n que inclui todos estes $n + 1$ pontos.

Exemplo 12.

- a) Um Simplex no \mathbb{R}^2 é um triângulo;
- b) Um Simplex no \mathbb{R}^3 é um tetraedro.

Capítulo 3

Desigualdades e Sistemas de Inequações Lineares

Nos problemas de programação linear são de interesse soluções de sistemas de desigualdades Lineares que satisfaçam as restrições $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, isto é, soluções não-negativas, as quais, neste capítulo, ver-se-á como reduzi-las em um sistema equivalente de equações algébricas, uma das tarefas mais importantes da programação linear.

3.1 Desigualdades

Nesta seção, estudar-se-á as relações $R = \{<, >, \leq, \geq\}$ mencionadas nos capítulos anteriores.

Primeiramente, veja as propriedades das desigualdades no espaço unidimensional \mathbb{R} , o qual correspondente à reta real.

Sejam $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$; então tem-se que:

- (i) $a \geq b \Rightarrow a + c \geq b + c$;
- (ii) $x \geq y, a \geq b \Rightarrow x + a \geq y + b$;
- (iii) $a \geq b, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda a \geq \lambda b$;
- (iv) $a > b, \lambda < 0 \Rightarrow \lambda a < \lambda b$;
- (v) $x \geq y, a \leq b \Rightarrow x - a \geq y - b$;
- (vi) $a \geq b, b \leq a \Leftrightarrow a = b$.

Agora, analisando o espaço bidimensional \mathbb{R}^2 , o qual corresponde ao plano, possui a seguinte equação linear:

$$ax + by = c; \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

a qual o conjunto de pontos que a satisfaz equivale a uma reta, cujo vetor normal é (a, b) , como conhecido na geometria analítica.

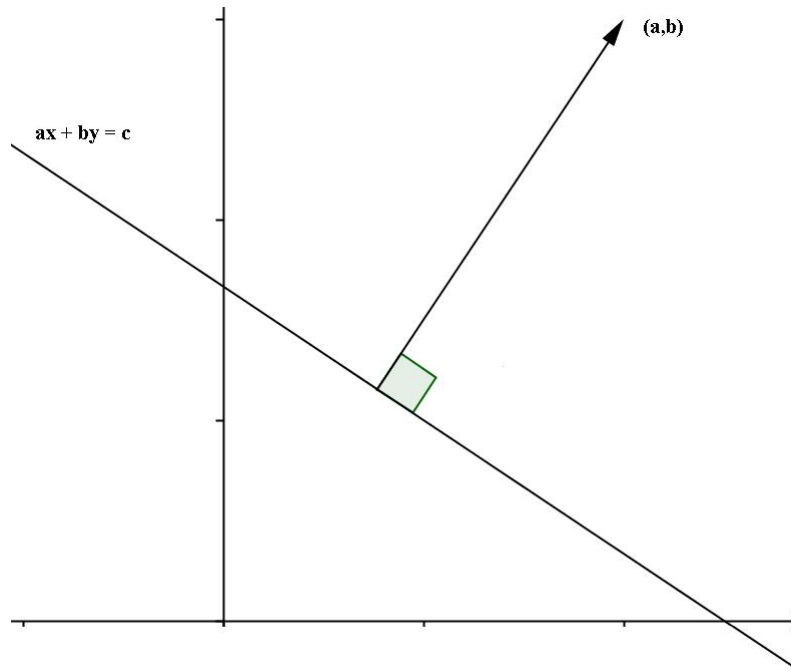


Figura 3.1:

Tomando-se $b = 0$, obtém-se uma equação da forma

$$x = k,$$

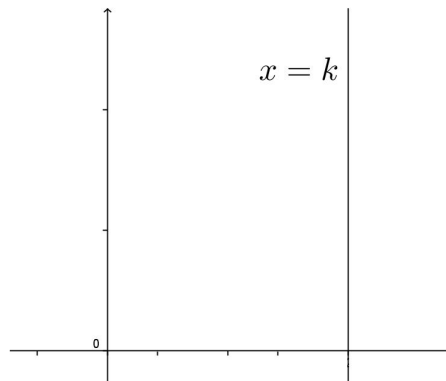


Figura 3.2:

a qual determina uma reta paralela ao eixo das ordenadas, como na Figura 3.2. Agora, tomando $a = 0$, obtém-se uma equação da forma

$$y = k',$$

a qual determina uma reta paralela ao eixo das abscissas, como na Figura 3.3.

Analisando as desigualdades da equação linear, não é difícil observar que:

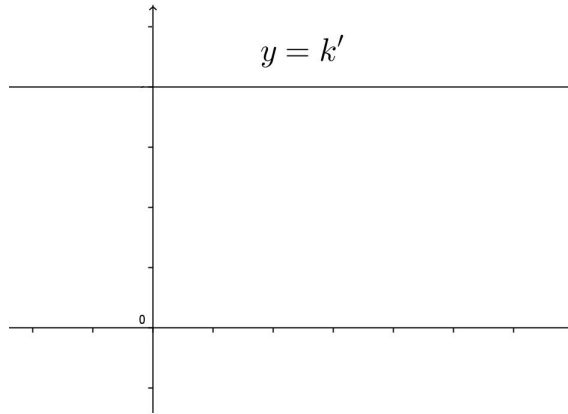


Figura 3.3:

- (i) com $ax + by > c$ e $ax + by < c$ tem-se os pontos acima e abaixo, respectivamente, da reta $ax + by = c$. Veja a Figura 3.4;
- (ii) com $x < k$ e $x > k$ tem-se os pontos à esquerda e à direita, respectivamente, da reta $x = k$. Veja a Figura 3.5;
- (iii) com $y < k'$ e $y > k'$ tem-se os pontos abaixo e acima, respectivamente, da reta $y = k'$. Veja a Figura 3.6.

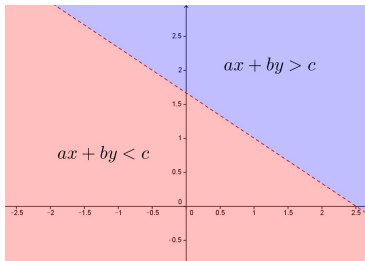


Figura 3.4:

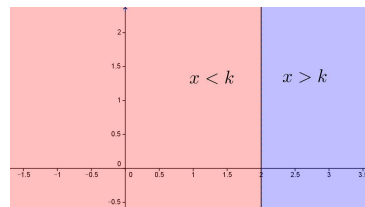


Figura 3.5:

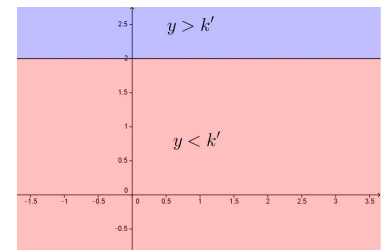


Figura 3.6:

Todas as desigualdades acima equivalem ao semi-espaço do \mathbb{R}^2 , neste caso chamado de semi-plano, em relação ao hiperplano $ax + by = c$.

Analisando o espaço tridimensional \mathbb{R}^3 , que corresponde ao espaço, tem-se a seguinte equação linear:

$$ax + by + cz = d; \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

a qual o conjunto de pontos que a satisfaz equivale a um plano, cujo vetor normal é (a, b, c) , como conhecido da geometria analítica e como ilustrado na Figura 3.7.

Analisando as desigualdades da equação linear, tem-se que

$$ax + by + cz > d \quad \text{e} \quad ax + by + cz < d,$$

que determinam os semi-espaços correspondentes em relação a $ax + by + cz = d$.

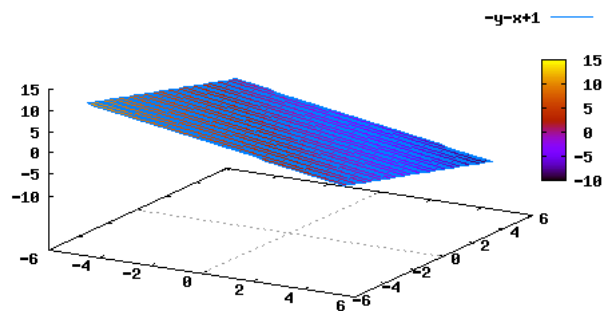


Figura 3.7:

Analogamente, no espaço n -dimensional \mathbb{R}^n , a equação linear é

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = B; \quad a_1, \dots, a_n, B \in \mathbb{R},$$

onde o conjunto de pontos que a satisfaz equivale ao hiperplano do espaço n -dimensional, cujo vetor normal é (a_1, \dots, a_n) e as desigualdades

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n > B \quad \text{e} \quad a_1x_1 + \dots + a_nx_n < B$$

equivalem aos semi-espacos em relação ao hiperplano mencionado.

3.2 Sistemas de Desigualdades Lineares

Suponha que em um espaço bidimensional há n desigualdades da forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i; \quad i = 1, \dots, n.^1$$

Cada uma das desigualdades determina um dos dois semi-planos com limite na reta $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ com vetor normal (a_{i1}, a_{i2}) .

Como no Capítulo 2, chama-se solução do sistema qualquer par ordenado (x_1, x_2) que satisfaz todas as desigualdades do sistema.

Exemplo 13.

a) A desigualdade

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

determina um semi-plano, a qual satisfaz qualquer ponto que esteja na parte hachurada como na Figura 3.8.

¹Qualquer desigualdade da forma $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$, multiplicando seus termos por -1 , equivalem a esta equação.

b) O sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

determina uma parte do plano como na Figura 3.9.

c) O sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 - 3x_2 \leq 3 \end{cases}$$

determina um conjunto de pontos na forma de um triângulo como na Figura 3.10.

d) O sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

determina um conjunto de pontos na forma de um quadrilátero como na Figura 3.11.

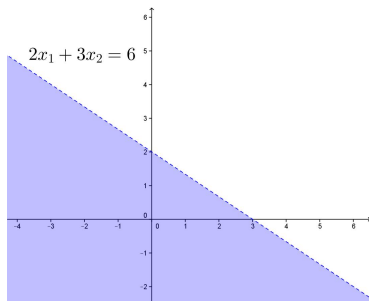


Figura 3.8:

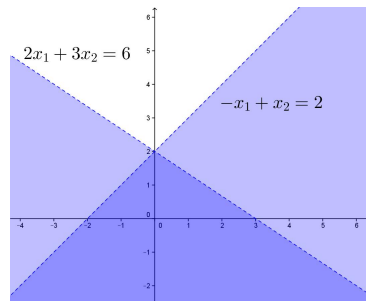


Figura 3.9:

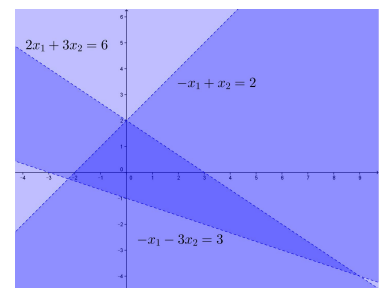


Figura 3.10:

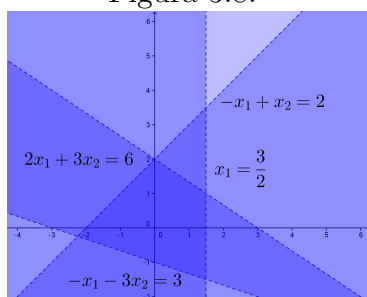


Figura 3.11:

Quando existe um ponto que pertence a todos os semi-planos determinados pelo sistema, diz-se que ele é uma solução compatível. O conjunto de todos esses pontos pode

ser um semi-plano, um polígono limitado ou ilimitado, uma reta ou um segmento de reta, ou um ponto, formando-se um conjunto convexo.

Quando não há pontos que satisfaçam todas as desigualdades, diz-se que o sistema é incompatível.

Em um espaço tridimensional, um sistema de n desigualdades se pode escrever da forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \leq b_i; \quad i = 1, \dots, n.$$

Como dito, cada desigualdade determina um semi-espaço com plano limite

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i.$$

O conjunto de desigualdades sendo compatível, existe um conjunto convexo que satisfaz ao sistema de desigualdades, podendo ser representado da forma de um semi-espaço, um poliedro, um plano, um polígono, uma reta ou um ponto.

Analogamente, suponha que em um espaço n -dimensional se tenha o sistema de desigualdades

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i; \quad i = 1, \dots, n,$$

o qual cada uma das desigualdades define um semi-espaço com o hiperplano limite

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i.$$

Sendo o sistema compatível, chama-se o conjunto de pontos que o satisfaz poliedro das soluções.

3.3 O valor máximo e mínimo da forma linear no poliedro

O estudo desta seção é o ponto-chave da programação linear: o objetivo de maximizar ou minimizar certo problema da programação linear.

Primeiramente, considere um sistema compatível com equações lineares de duas variáveis e suponha que, além disso, tem-se a função linear, posteriormente chamada de função objetiva, de duas variáveis

$$f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2.$$

Tem-se como objetivo encontrar o conjunto de pontos (x_1, x_2) do polígono das soluções que leva a função linear ao valor máximo ou mínimo. Examinando o conjunto de pontos (x_1, x_2) do plano em cada um dos quais a função f toma um valor fixo $f = f_1$. O conjunto de tais pontos é a reta $c_1x_1 + c_2x_2 = f_1$. Esta reta é normal ao vetor (c_1, c_2) que sai da origem das coordenadas. Traçando-se uma reta F normal ao vetor (c_1, c_2) , como na Figura 3.12, e a deslocando paralelamente a si na direção do vetor (c_1, c_2) . Suponha que em seu deslocamento, a reta F intersecta o polígono pela primeira vez no ponto A . Nesta posição F' a reta F se faz suporte. Ao continuar o deslocamento na mesma direção, a

reta F passará pelo ponto D , fazendo-se também reta suporte. Sabendo-se que no sentido do vetor (c_1, c_2) se tem a direção do máximo incremento da função linear f , então todos os valores que toma a função f no polígono das soluções, ter-se-á valor mínimo na reta suporte F' e valor máximo na reta suporte F'' .

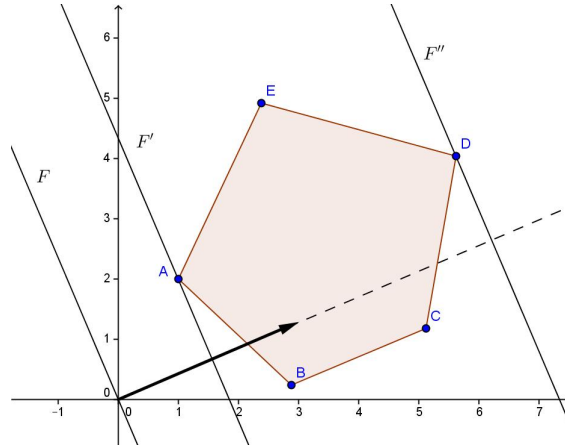


Figura 3.12:

Logo, os valores máximo e mínimo da função f no conjunto solução alcançar-se-á nos pontos de interseção deste polígono com as retas suportes normais ao vetor (c_1, c_2) , podendo-se gerar um ponto, no caso o vértice do polígono, ou um conjunto enumerável de pontos, no caso o lado do polígono.

Na Figura 3.13 tem-se o caso da função f alcançar seu valor mínimo nos pontos do segmento CD , ao mesmo tempo que seu valor máximo são nos pontos do polígono que estão infinitamente distantes.

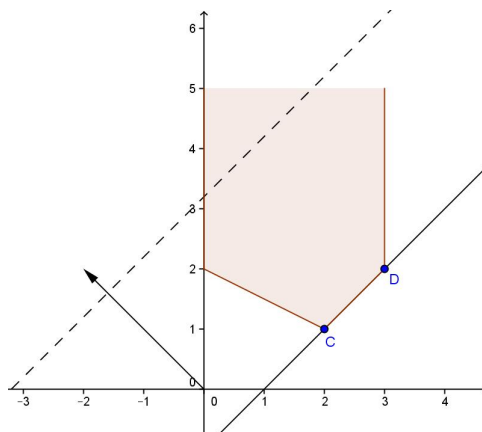


Figura 3.13:

Analogamente, uma função linear de três variáveis

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

toma um valor constante no plano normal ao vetor (c_1, c_2, c_3) . O sentido do vetor (c_1, c_2, c_3) é a direção do máximo incremento da função f . Os valores máximo e mínimo desta função no poliedro das soluções também dar-se-ão nos pontos de interseção deste poliedro com os planos-suportes normais ao vetor (c_1, c_2, c_3) , onde a função atinge em um dos planos-suportes o valor mínimo e em outro o valor máximo. A interseção de um poliedro com um plano-suporte pode ser um ponto, isto é, o vértice do poliedro, ou um conjunto enumerável de pontos, isto é, uma aresta ou uma face do poliedro.

A generalização do conteúdo das funções lineares é a função

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

de n variáveis reais x_1, x_2, \dots, x_n chamada forma real, onde $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Fixando valores da forma linear f_1, f_2, \dots, f_q , definem-se no espaço n -dimensional os hiperplanos

$$\begin{aligned} f_1 &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ f_2 &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ &\vdots \\ f_q &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n, \end{aligned}$$

que são normais ao vetor (c_1, c_2, \dots, c_n) .

Denotando por f_{min} e f_{max} como os valores máximo e mínimo, respectivamente, da função f no poliedro de soluções. Lembrando que o vetor (c_1, c_2, \dots, c_n) determina a direção do incremento máximo da função f , então quando as funções $f' < f_{min}$ e $f' > f_{max}$, os hiperplanos correspondentes não têm interseção com o poliedro de soluções. Por outro lado, cada hiperplano f'' para o qual $f_{min} \leq f'' \leq f_{max}$ tem pontos em comum com o poliedro de soluções.

O conjunto de pontos no quais f alcança o valor mínimo é a interseção do poliedro de soluções com o hiperplano-suporte f_{min} normal ao vetor (c_1, c_2, \dots, c_n) ; analogamente, o conjunto de pontos no quais f alcança o valor máximo é a interseção do poliedro de soluções com o hiperplano-suporte f_{max} normal ao vetor (c_1, c_2, \dots, c_n) . Tal interseção pode ser um vértice, uma aresta ou uma face do poliedro.

Logo o valor ótimo da forma linear f no poliedro de soluções se atinge nos pontos sempre se encontra, mesmo que seja um vértice. Por isso, para calcular a solução ótima é suficiente encontrar o vértice do poliedro no qual a forma linear f atinge o valor máximo ou mínimo, resultado que será demonstrado no capítulo 5 sobre Método Simplex.

3.4 Redução de Desigualdades Lineares a Igualdades Lineares

São válidas neste tema os mesmos teoremas e definições estudados no APÊNDICE para sistemas de equações lineares.

Seja um sistema de m desigualdades lineares com n variáveis:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases}$$

que determina em um espaço n -dimensional um poliedro de soluções.

O sistema dado ainda possui a seguinte representação algébrica:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ou

$$ax \leq b.$$

Considerando, então, a inequação linear dada por

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i,$$

de acordo com as propriedades das desigualdades em \mathbb{R} , pode-se afirmar que:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i.$$

Para se resolver o sistema de inequações lineares, será necessário transformá-lo num sistema de equações lineares equivalente. Para explicar como isso pode ser feito, note que valem as seguintes equivalências:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0$$

e

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0.$$

A variável x_{n+i} é conhecida como variável de folga da inequação i .

Note que, mesmo inserindo as variáveis de folga, continua-se com o mesmo conjunto solução do sistema. Afinal, considerando x'_1, x'_2, \dots, x'_n solução do sistema de desigualdades lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases}$$

Com isso, pode-se escrever

$$\begin{cases} a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \dots + a_{1n}x'_n \leq b_1 \\ a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \dots + a_{2n}x'_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x'_1 + a_{m2}x'_2 + \dots + a_{mn}x'_n \leq b_m. \end{cases}$$

Denotando

$$\begin{cases} \mu'_1 = b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \\ \mu'_2 = b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ \mu'_m = b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n), \end{cases}$$

então, em primeiro lugar, $\mu'_1 \geq 0, \mu'_2 \geq 0, \dots, \mu'_m \geq 0$; em segundo lugar, como se deduz do sistema acima, o sistema de números $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_m$ é a solução do sistema de equações lineares.

Reciprocamente, qualquer solução $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_m$ do sistema de equações formado, que satisfaça a condição $\mu'_1 \geq 0, \mu'_2 \geq 0, \dots, \mu'_m \geq 0$, lhe corresponde uma solução determinada do sistema de desigualdades. De fato, como o sistema de números $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_m$ é solução do sistema, pode-se afirmar que:

$$\begin{cases} \mu'_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \mu'_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \mu'_m + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

De acordo com a suposição de que $\mu'_1 \geq 0, \mu'_2 \geq 0, \dots, \mu'_m \geq 0$, então as desigualdades são cumpridas:

$$\begin{cases} a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \dots + a_{1n}x'_n \leq b_1 \\ a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \dots + a_{2n}x'_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x'_1 + a_{m2}x'_2 + \dots + a_{mn}x'_n \leq b_m, \end{cases}$$

ou seja, o sistema de números é solução do sistema de desigualdades.

Deste modo, foi estabelecido a existência de uma relação recíproca entre o conjunto de todas as soluções x'_1, x'_2, \dots, x'_n do sistema e o conjunto das soluções $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_m$ do novo sistema, nos quais se encontram os mesmos valores. Observando que $\mu'_1 \geq 0, \mu'_2 \geq 0, \dots, \mu'_m \geq 0$, o problema da resolução de um sistema de desigualdades lineares se reduz a resolução de um sistema correspondente de equações lineares.

Exemplo 14.

a) Para o cálculo das soluções não-negativas do sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 - 3x_2 \leq 3, \end{cases}$$

primeiramente se introduz as variáveis de folga $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$ e $x_5 \geq 0$, obtém se o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ -x_1 - 3x_2 + x_5 = 3. \end{cases}$$

A qualquer solução não-negativa deste sistema de equações lhe corresponde uma solução não-negativa do sistema inicial.

b) Para o cálculo das soluções do sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \geq 12 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 10 \end{cases} ; x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Introduzindo as variáveis de folga $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$ e $x_7 \geq 0$, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & & = 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & -x_6 & = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 & & +x_7 = 10, \end{cases}$$

sendo

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0 \quad \text{e} \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

Para resolver o problema da variável x_2 , basta saber que qualquer número pode ser obtido pela diferença de dois números não-negativos, isto é, x_2 sem restrição pode ser escrito como

$$x_2 = x'_2 - x''_2; \quad x'_2 \geq 0, x''_2 \geq 0.$$

Portanto, obtém-se o novo sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x'_2 - 2x''_2 + x_3 + x_4 + x_5 & & = 8 \\ 3x_1 + x'_2 - x''_2 - x_3 - x_4 & -x_6 & = 12 \\ 4x_1 + 3x'_2 - 3x''_2 + 3x_3 + x_4 & & +x_7 = 10, \end{cases}$$

sendo

$$x_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x''_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \quad \text{e} \quad x_7 \geq 0.$$

A qualquer solução não-negativa deste sistema de equações lhe corresponde uma solução não-negativa do sistema inicial.

Sempre que não houver restrição de sinal para qualquer variável x_j , basta utilizar as variáveis de folga $x'_j \geq 0$ e $x''_j \geq 0$ e fazer $x_j = x'_j - x''_j$.

Quando se anula o número de incógnitas excedentes em relação ao número de equações, a solução encontrada é chamada compatível básica.

Capítulo 4

Programação Linear

Os problemas de Programação Linear se referem à distribuição eficiente de recursos limitados entre atividades competitivas, com a finalidade de atender a um determinado objetivo, por exemplo, maximização de lucros ou minimização de custos. Em se tratando de Programação Linear, esse objetivo será expresso por uma função linear, à qual se dá o nome de função objetiva; os recursos equivalem as restrições do problema, também chamado, em economia, de restrição orçamentária; as atividades equivalem às incógnitas do problema; e o consumo equivale a proporção desta atividade em cada restrição.

É claro que é necessário dizer quais as atividades que consomem cada recurso, e em que proporção é feita esse consumo. Essas informações serão fornecidas por equações ou inequações lineares, uma para cada recurso. Ao conjunto dessas equações ou inequações lineares se dá o nome de restrições do modelo.

Geralmente existem inúmeras maneiras de distribuir os escassos recursos entre as atividades, bastando para isso que essas distribuições sejam coerentes com as equações de consumo de cada recurso, ou seja, que elas satisfaçam as restrições do problema. Entretanto, deseja-se achar aquela distribuição que satisfaça as condições do problema e que alcance o objetivo desejado, isto é, que maximize o lucro ou minimize o custo. A essa solução se dá o nome de solução ótima.

Uma vez obtido o modelo linear, constituído pela função objetiva e pelas restrições, a Programação Linear se preocupa em achar a solução ótima. Nesse capítulo ver-se-á como isso pode ser obtido, graficamente, quando o modelo apresentar duas atividades. Se o número de atividades for maior que dois, como acontece na maioria dos casos reais, só será possível determinar a solução ótima com as técnicas que serão desenvolvidas no Capítulo 5.

4.1 Modelos de Programação Linear

Veja abaixo dois dos modelos mais conhecidos de Programação Linear:

(i) Problema da Análise de Atividades.

Esse problema consiste em encontrar x_1, x_2, \dots, x_n que maximize a função linear, isto é, a função objetiva:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad C = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n],$$

então o modelo toma o seguinte aspecto:

$$\max \quad CX \quad \text{sujeito a}$$

$$AX \leq B$$

e

$$X \geq 0.$$

Exemplo 15. Uma determinada empresa está interessada em maximizar o lucro mensal proveniente de quatro de seus produtos designados por I, II, III e IV. Para fabricar esses quatro produtos, ele utiliza dois tipos de máquinas, M1 e M2, e dois tipos de mão-de-obra, MO1 e MO2, as quais têm as seguintes disponibilidades:

Máquinas	Tempo Disponível (máquina-hora/mês)
M1	80
M2	20

Mão-de-obra	Tempo Disponível (homem-hora/mês)
MO1	120
MO2	160

O setor técnico da empresa fornece os seguintes quadros de produtividades:

a) Número de máquinas-hora para produzir uma unidade de cada produto:

Máquinas	Produtos			
	I	II	III	IV
M1	5	4	8	9
M2	2	6	–	8

b) Número de homem-hora para produzir uma máquina de cada produto:

Mão-de-obra	Produtos			
	I	II	III	IV
MO1	2	4	2	8
MO2	7	3	–	7

O setor comercial da empresa fornece as seguintes informações:

Produtos	Potencial de Vendas (unidades/mês)	Lucro Unitário (R\$/unidade)
I	70	10,00
II	60	8,00
III	40	9,00
IV	20	7,00

Deseja-se saber a produção mensal dos produtos I, II, III e IV para que o lucro mensal da empresa, proveniente desses quatro produtos, seja máximo. Formulando um modelo de programação linear que expresse o objetivo e as restrições da empresa, tem-se que:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 10x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 7x_4 \quad \text{sujeito a} \\ & x_1 \leq 70 \\ & \quad x_2 \leq 60 \\ & \quad \quad x_3 \leq 40 \\ & \quad \quad \quad x_4 \leq 20 \\ & \left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 9x_4 \leq 80 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 \leq 20 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 \leq 120 \\ 7x_1 + 3x_2 + 7x_4 \leq 160 \end{array} \right. \\ & \text{para } x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

onde x_j , para $j = 1, 2, 3, 4$, equivalem às produções mensais dos produtos I, II, III e IV, respectivamente.

(ii) **Problema da Dieta.**

O problema consiste em achar x_1, x_2, \dots, x_n que minimize a função objetiva

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

sabendo-se que x_1, x_2, \dots, x_n devem satisfazer às restrições

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{array} \right.$$

e que

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Pode-se representar esse modelo de forma mais compacta, isto é:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{sujeito a} \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i; i = 1, 2, \dots, m \\ & \text{e} \\ & x_j \geq 0; j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Este modelo pode ser associado a uma pessoa que deseja minimizar o custo da sua dieta diária. As atividades apresentam os consumos dos alimentos que poderão entrar na dieta e os recursos são as vitaminas que não podem deixar de ser supridas pela dieta.

Tem-se, então, para $j = 1, 2, \dots, n$ e $i = 1, 2, \dots, m$:

- (i) b_i é a quantidade mínima de vitamina i que deve ser obtida nos n alimentos ($b_i \geq 0$);
- (ii) x_j é a quantidade de alimento j na dieta; os x_j 's são as incógnitas do problema;
- (iii) c_j é o custo unitário do alimento j ;
- (iv) a_{ij} é a quantidade da vitamina i fornecida por uma unidade do alimento j .

Verifica-se então que a função objetiva a ser minimizada representa o custo total da dieta a ser realizada com os n alimentos, as m restrições indicam que o total de vitamina i obtida nos n alimentos tem de ser maior ou igual que a quantidade mínima b_i daquela vitamina.

A notação matricial desse modelo é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad C = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n],$$

então o modelo toma o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} \min \quad & CX \quad \text{sujeito às restrições} \\ & AX \geq B \\ & \text{e} \\ & X \geq 0. \end{aligned}$$

Exemplo 16. Uma determinada pessoa é forçada pelo seu médico a fazer uma dieta alimentar que forneça, diariamente, pelo menos as seguintes quantidades de vitaminas A, B, C e D:

Vitaminas	Quantidade mínima Diária (mg)
A	80
B	70
C	100
D	60

A dieta deverá incluir leite, arroz, feijão e carne, que contém os seguintes miligramas de vitaminas em cada uma de suas unidades de medida:

Vitaminas	Alimentos			
	Leite (L)	Arroz (Kg)	Feijão (Kg)	Carne (Kg)
A	10	5	9	10
B	8	7	6	6
C	15	3	4	7
D	20	2	3	9

Os custos unitários desses alimentos são os seguintes:

Alimento	Custo unitário (R\$)
Leite	2,00/L
Arroz	1,60/Kg
Feijão	3,00/Kg
Carne	10,00/Kg

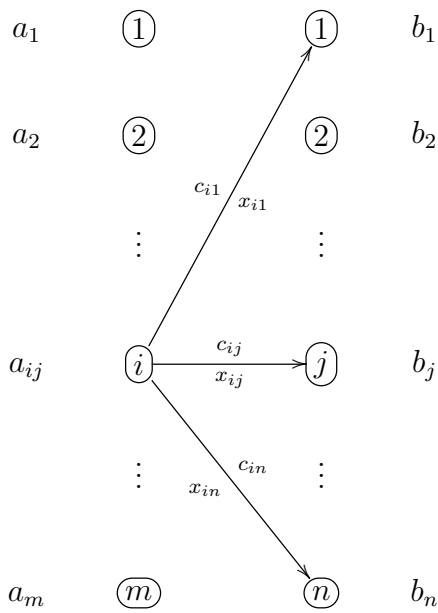
Deseja-se saber o consumo diário de cada um desses alimentos de tal maneira que a dieta satisfaça as prescrições médicas e seja a de menor custo possível.

Sejam x_j , com $j = 1, 2, 3, 4$, as quantidades de leite, arroz, feijão e carne, medidas nas unidades acima, que deverão entrar, diariamente, na citada dieta. O modelo então será:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 1,6x_2 + 3x_3 + 10x_4 \quad \text{sujeito a} \\ & \left\{ \begin{array}{l} 10x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 \geq 80 \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 6x_4 \geq 70 \\ 15x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \geq 100 \\ 20x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 9x_4 \geq 60 \end{array} \right. \\ & \text{para } x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

(iii) **Problema do transporte.**

O modelo dos transportes tem por objetivo minimizar o custo total do transporte necessário para abastecer n centros consumidores, chamados destinos, a partir de m centros fornecedores, chamados origens. Pode ser assim esquematizado:



Para $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$, tem-se:

- (i) c_{ij} é o custo unitário de transporte da origem i para o destino j ;
- (ii) a_i é a quantidade disponível na origem i ;
- (iii) b_j é a quantidade requerida no destino j ;
- (iv) x_{ij} é a quantidade a ser transportada da origem i para o destino j , as quais são as incógnitas do problema.

O problema consiste em encontrar os valores de x_{ij} que minimize o custo total de transporte:

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij},$$

sabendo-se que os x'_{ij} devem satisfazer às seguintes restrições de oferta e demanda:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$x \geq 0.$$

As m restrições de oferta, uma para cada origem, indicam que a quantidade que sai da origem i tem de ser igual à quantidade a_i disponível, assim como as n restrições de demanda, uma para cada destino, indicam que a quantidade que chega a cada destino j tem de ser igual à quantidade b_j requerida por aquele destino.

Os exemplos deste modelo serão feitos no próximo capítulo por apresentar uma particularidade especial, além disso, todos esses modelos apresentados serão resolvidos no próximo capítulo com a utilização do Método Simplex.

4.2 Solução Gráfica

Para o desenvolvimento desta seção e do capítulo 5 é necessário enunciar e demonstrar os teoremas nos quais o método gráfico e o Método Simplex se baseiam para se entender, perfeitamente, seus funcionamentos. Tais teoremas foram provados por Dantzig em 1951.

Teorema 4.2.1. *O conjunto de todas as soluções compatíveis do modelo de programação linear é um conjunto convexo.*

Demonstração.

Considere um modelo de programação linear com a seguinte notação matricial:

$$\max \quad CX \quad \text{sujeito a}$$

$$AX \leq B$$

e

$$X \geq 0.$$

Seja S o conjunto formado por $AX \leq B$ e $x \geq 0$. Tem-se de provar que o conjunto S é convexo. Para isso, basta demonstrar que

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \in S \\ X_2 \in S \\ X_1 \neq X_2 \end{array} \right\} \text{ que equivale a } \left\{ \begin{array}{l} X = \alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2 \in S \\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{array} \right.$$

Sejam X_1 e X_2 duas soluções compatíveis quaisquer, então:

$$\left. \begin{array}{l} AX_1 \leq B \\ X_1 \geq 0 \end{array} \right\} \alpha AX_1 \leq \alpha B,$$

$$\left. \begin{array}{l} AX_2 \leq B \\ X_2 \geq 0 \end{array} \right\} (1 - \alpha)AX_2 \leq (1 - \alpha)B.$$

Considere-se o vetor

$$X = \alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2$$

$$0 \leq \alpha \leq 1.$$

Tem-se de provar que

$$X \geq 0$$

$$AX \leq B.$$

Como $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$ e $0 \leq \alpha \leq 1$, então $X \geq 0$, além disso tem-se que:

$$\begin{aligned}
AX &= A[\alpha X_1 + (1 - \alpha)X_2] \\
&= \alpha AX_1 + (1 - \alpha)AX_2 \\
&\leq \alpha B + (1 - \alpha)B \\
&\leq B.
\end{aligned}$$

De modo análogo, pode-se demonstrar nos casos em que

$$AX = B \quad \text{ou} \quad AX \geq B.$$

■

Teorema 4.2.2. *Toda solução compatível básica do sistema $AX = B$ é um ponto extremo do conjunto das soluções compatíveis, isto é, do conjunto convexo S .*

Demonstração.

Considere o conjunto convexo formado por

$$\begin{aligned}
AX &= B \\
x &\geq 0.
\end{aligned}$$

De maneira explícita tem-se

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1\ m+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} & a_{2\ m+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & a_{m\ m+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Considere-se a solução compatível básica formada pelo vetor X , de dimensão n , abaixo:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com todos os } x_i \geq 0, \quad i = m + 1, \dots, n.$$

Suponha-se que X não seja um ponto extremo do conjunto S . Então X pode ser obtido como uma combinação convexa de outros dois pontos distintos do conjunto S . Sendo Y e Z esses dois pontos, pode-se ter

$$\begin{aligned}
X &= \alpha Y + (1 - \alpha)Z \\
0 &\leq \alpha \leq 1.
\end{aligned}$$

Como Y e Z pertencem ao conjunto C , as seguintes relações são válidas:

$$\begin{aligned}
AY = B & \quad \text{e} \quad AZ = B \\
Y \geq 0 & \quad \text{e} \quad Z \geq 0.
\end{aligned}$$

Se X for um ponto extremo de S , então não existem Y e Z , distintos de X que satisfaçam a combinação convexa.

A combinação convexa colocada em termos das coordenadas de cada um dos três vetores, fornece as seguintes relações:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha y_1 + (1 - \alpha)z_1 \\ x_2 = \alpha y_2 + (1 - \alpha)z_2 \\ \vdots \\ x_m = \alpha y_m + (1 - \alpha)z_m \\ 0 = \alpha y_{m+1} + (1 - \alpha)z_{m+1} \\ \vdots \\ 0 = \alpha y_n + (1 - \alpha)z_n. \end{cases}$$

Devido às relações $0 \leq \alpha \leq 1$, $Y \geq 0$ e $Z \geq 0$, as últimas $n - m$ relações só podem ser satisfeitas nos seguintes casos:

(i) $0 < \alpha < 1$ e $y_{m+i} = z_{m+i} = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n - m$.

Neste caso, ter-se-ia $X = Y = Z$ pois as três soluções apresentam uma coincidência nas variáveis não-básicas do sistema, conseqüentemente, os valores das variáveis básicas serão os mesmos para essas três soluções.

(ii) $\alpha = 0$ e $z_{m+i} = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n - m$.

Neste caso ter-se-ia $X = Z$ pelas mesmas razões anteriores.

(iii) $\alpha = 1$ e $y_{m+i} = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n - m$.

Neste caso ter-se-ia $X = Y$ pelas mesmas razões anteriores.

Portanto, não existem soluções compatíveis Y e Z , distintas da solução compatível básica X , que satisfaçam a combinação convexa, logo o ponto X é um ponto extremo do conjunto convexo. ■

Teorema 4.2.3.

(i) *Se a função objetiva possui um máximo ou mínimo finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo S ;*

(ii) *Se a função objetiva assume o máximo ou mínimo em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos extremos.*

Demonstração.

(i) Seja S o conjunto convexo definido por

$$\begin{aligned} AX &= B \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

e seja $f(x)$ a função objetiva que toma o valor máximo M no ponto x_0 , então pode-se afirmar que

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \text{para todo } x \in S.$$

Sejam $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p$ os pontos extremos do conjunto S . Tem-se de provar que x_0 é um desses pontos extremos.

Suponha-se que x_0 não seja um ponto extremo de S . Então ele pode ser obtido pela combinação convexa abaixo:

$$x_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i \bar{x}_i,$$

sendo

$$\begin{aligned} \alpha_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ \sum_{i=1}^p \alpha_i &= 1. \end{aligned}$$

Usando-se essas relações, tem-se que:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i \bar{x}_i\right) \\ &= f(\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_p \bar{x}_p) \\ &= \alpha_1 f(\bar{x}_1) + \alpha_2 f(\bar{x}_2) + \dots + \alpha_p f(\bar{x}_p) \\ &= M. \end{aligned}$$

Considere-se agora que o ponto extremo \bar{x}_M definido pela relação abaixo

$$f(\bar{x}_M) = \max f(\bar{x}_i); \quad i = 1, \dots, p.$$

Portanto, pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned} f(x_0) &\leq \alpha_1 f(\bar{x}_1) + \alpha_2 f(\bar{x}_2) + \dots + \alpha_p f(\bar{x}_p) \\ &\leq f(\bar{x}_M) \sum_{i=1}^p \alpha_i \\ &\leq f(\bar{x}_M). \end{aligned}$$

Como, pela hipótese da demonstração, $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in S$, então é necessário ter

$$f(x_0) = M = f(\bar{x}_M),$$

e fica provado que a solução ótima x_0 é um ponto extremo do conjunto S .

(ii) Sejam $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p$ os pontos extremos do conjunto convexo S , nos quais se assume que

$$f(\bar{x}_1) = f(\bar{x}_2) = \dots = f(\bar{x}_p) = M.$$

Considerando a combinação convexa

$$x = \sum_{i=1}^q \alpha_i \bar{x}_i,$$

sendo

$$\alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q;$$

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i = 1,$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^q \alpha_i \bar{x}_i\right) \\ &= f(\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_q \bar{x}_q) \\ &= \alpha_1 f(\bar{x}_1) + \alpha_2 f(\bar{x}_2) + \dots + \alpha_q f(\bar{x}_q) \\ &= M \sum_{i=1}^q \alpha_i \\ &= M. \end{aligned}$$

■

Teorema 4.2.4. *Se existe uma solução compatível, então existe também uma solução compatível básica.*

A necessidade do Teorema 4.24 é devida ao fato de um modelo de programação linear poder não apresentar nenhuma solução compatível.

Exemplo 17.

a) Considere o seguinte modelo de Programação Linear:

$$\begin{aligned} \max \quad & f = 2x_1 + x_2 \quad \text{sujeito a} \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Como este modelo só possui duas variáveis, ele pode ser resolvido graficamente. Marcando-se as restrições do problema tem-se a seguinte representação segundo a Figura 4.1:

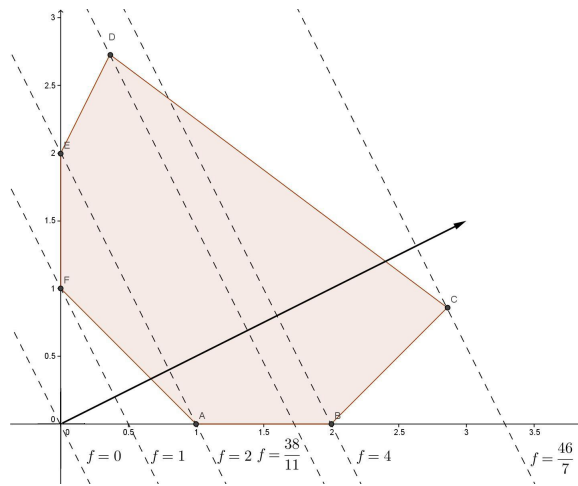


Figura 4.1:

Qualquer ponto do polígono ABCDEF satisfaz todas as restrições do modelo e se diz que ele é o conjunto das soluções compatíveis do modelo. Para encontrar a solução ótima, marca-se a reta $2x_1 + x_2 = 0$ e depois se desenha suas paralelas nos vértices do polígono ABCDEF. O maior valor encontrado corresponde ao máximo de f , que neste caso foi $46/7$.

b) Considere o conjunto de restrições:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 & \leq 2 \\ & x_2 & \leq 1 \\ 2x_1 + 5x_2 & \geq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Como este modelo só possui duas variáveis, ele pode ser resolvido graficamente. Marcando-se as restrições do problema tem-se a seguinte representação segundo a Figura 4.2:

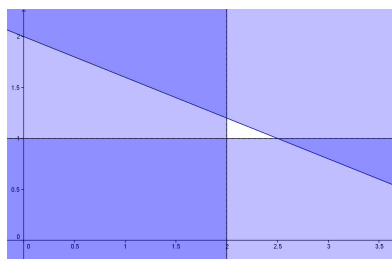


Figura 4.2:

Note que a interseção dos semi-planos é vazia, isto é, não existe a interseção das restrições simultaneamente. Quando isso ocorre, diz-se que não há soluções possíveis.

c) Considere o polítopo dado pelas restrições:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Como este modelo só possui duas variáveis, ele pode ser resolvido graficamente. Marcando-se as restrições do problema tem-se a seguinte representação segundo a Figura 4.3:

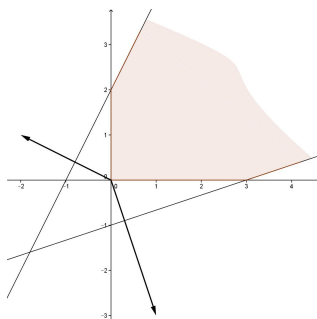


Figura 4.3:

Toda função objetiva entre as duas retas traz uma solução dita solução ótima ilimitada.

d) Considere o problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \max \quad & f = x_1 + x_2 \quad \text{sujeito a} \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Como este modelo só possui duas variáveis, ele pode ser resolvido graficamente. Marcando-se as restrições do problema tem-se a seguinte representação segundo a Figura 4.4:

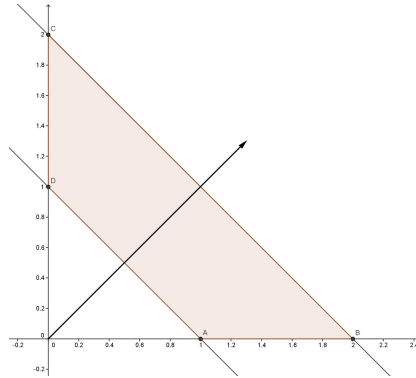


Figura 4.4:

Note que B e C são ambos pontos extremos e, além disso, soluções ótimas. Na verdade, todos os pontos do segmento BC são pontos ótimos. Diz-se que se tem uma dupla degeneração.

e) Considere o politopo definido pelas restrições:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Como este modelo só possui duas variáveis, ele pode ser resolvido graficamente. Marcando-se as restrições do problema tem-se a seguinte representação segundo a Figura 4.5:

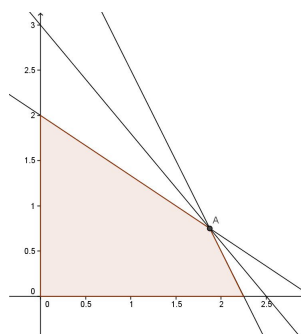


Figura 4.5:

Note que as três retas se intersectam no ponto A e independe da função objetiva. Neste caso, diz-se que se tem uma degeneração primária.

4.3 Limitações da Programação Linear

Uma vez estudados os modelos de Programação Linear, convém fazer uma ressalva sobre as suas hipóteses e limitações.

(i) Coeficientes Constantes.

Nos modelos de Programação Linear os coeficientes a_{ij} , b_i e c_j são considerados como constantes conhecidas.

A análise de sensibilidade do modelo permite fornecer a melhor aproximação desses coeficientes, para os quais a solução ótima continua a mesma.

(ii) Divisibilidade.

As soluções ótimas dos modelos de Programação Linear estudados nesta dissertação poderão apresentar valores fracionários para qualquer uma de suas variáveis. Assim, por exemplo, se uma variável representar o número de cadeiras a serem produzidas por uma empresa, ela poderia tomar um valor fracionário na solução ótima, o que não é nada desejável. O arredondamento de valores fracionários para valores inteiros mais próximos pode conduzir a erros bastantes grosseiros.

Quando as variáveis do modelo de Programação Linear só puderem tomar valores inteiros, devem-se impor essas condições no próprio modelo. Passa-se então a lidar com um modelo de Programação Inteira, que não poderá ser resolvido com as técnicas desenvolvidas nesta dissertação.

(iii) Proporcionalidade.

Nos modelos de Programação Linear se assumem, por exemplo, que o lucro de cada atividade é proporcional ao nível de produção x_j , sendo o lucro unitário c_j o coeficiente de proporcionalidade. Essa hipótese diz que o lucro unitário c_j independe do nível de produção x_j e não considera a chamada economia de escala, não sendo válida na maioria dos problemas reais. Para atenuá-la, pode-se considerar intervalos de produção nos quais essa proporcionalidade é, aproximadamente, verificada.

Para o caso dos coeficientes a_{ij} também se assume que eles são independentes do nível de produção x_j , qualquer que seja o recurso b_i .

(iv) Aditividade.

A condição de aditividade, existente em todos os modelos de Programação Linear, consiste em considerar as atividades do modelo como entidades totalmente independentes, não permitindo que haja interdependência entre as mesmas.

Assim, por exemplo, o lucro total de uma empresa será sempre igual a soma dos lucros parciais de cada atividade. Para mostrar que isso nem sempre é verdade, considere uma empresa que deseja produzir dois produtos, bastante similares, como por exemplo, manteiga e margarina. Se tal empresa produzir apenas manteiga, o seu lucro será c_1x_1 , sendo c_1 o lucro unitário da manteiga e x_1 o seu nível de produção. Se a mesma empresa produzir apenas margarina, o seu lucro será c_2x_2 , sendo c_2 o lucro unitário da margarina e x_2 o seu nível de produção. Caso a empresa resolva

produzir tanto manteiga como margarina e colocar no mercado os dois produtos, o modelo de Programação Linear garante que o lucro total desses dois produtos será igual a $c_1x_1 + c_2x_2$. O que não foi levado em consideração é que os valores de c_1 e c_2 não deverão ser iguais aos anteriores, pois é possível que o preço de venda da margarina interfira no preço de venda da manteiga, desde que tais produtos sejam competitivos.

Raciocínio análogo pode ser feito para o caso dos coeficientes a_{ij} do modelo de Programação Linear.

Apesar de todas essas limitações, a Programação Linear ainda é a ferramenta mais utilizada na resolução de problemas reais que envolvam formulação de modelos matemáticos. Isso se deve não somente à sua simplicidade, como também ao fato de o modelo sempre poder ser resolvido com as técnicas que serão vistas no Capítulo 5. Convém ressaltar que os problemas reais, na maioria das vezes, terão de ser solucionados mediante o uso de computadores, pois o número de equações e variáveis, normalmente, impossibilita os cálculos manuais.

Capítulo 5

Método Simplex

Neste capítulo, desenvolver-se-á uma das principais técnicas utilizadas para achar, algebricamente, a solução ótima de um problema de programação linear. O processo que será utilizado para realizar tal tarefa é chamado Método Simplex.

Desde que exista uma solução ótima para um modelo de Programação Linear, o Método Simplex sempre conseguirá obtê-la.

Utilizar-se-á, no desenvolvimento deste capítulo, um modelo de duas variáveis de fácil resolução para se comparar, passo a passo, o método algébrico com o gráfico, estudado na seção anterior.

5.1 Relação entre o método gráfico e o algébrico

Nesta seção, percebe-se a forte relação que há entre os métodos de solução geométrico e algébrico. Primeiramente, considere o seguinte modelo de programação linear:

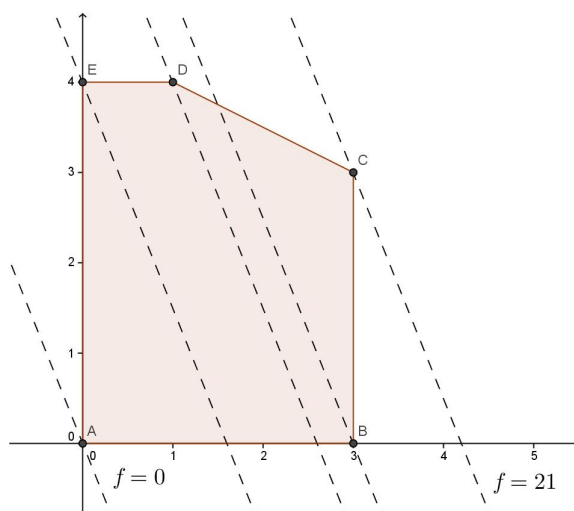


Figura 5.1:

$$\begin{aligned} \max \quad & f = 5x_1 + 2x_2 \quad \text{sujeito a} \\ & \begin{cases} x_1 & \leq 3 \\ & x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 & \leq 9 \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Como este modelo possui somente duas variáveis, ele pode ser resolvido graficamente. Marcando-se as restrições do problema tem-se a representação segundo a Figura 5.1.

Portanto, o valor máximo de f é 21, que corresponde ao vértice C.

Resolvendo algebricamente, acrescenta-se as variáveis de folga x_3 , x_4 e x_5 , transformando-se o sistema de inequações no sistema de equações lineares, com todas as variáveis não-negativas:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 & +x_3 & & = 3 \\ & x_2 & +x_4 & = 4 \\ x_1 + 2x_2 & & +x_5 & = 9 \end{cases} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Espera-se que o conjunto das soluções compatíveis dos dois sistemas sejam idênticos ao trapézio ABCDE. Para se comprovar tal fato, precisa-se representar graficamente o novo sistema. Primeiramente, transformando-se as restrições para:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 & = 3 - x_3 \\ & x_2 = 4 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 & = 9 - x_5 \end{cases} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Pode-se verificar que as restrições são idênticas, afinal, note, por exemplo, que as restrições $x_1 \leq 3$ e $x_1 \geq 0$ são equivalentes as restrições $x_1 = 3 - x_3$ e $x_1, x_3 \geq 0$, pois representam a mesma família de retas perpendiculares ao eixo x_1 , e o mesmo pode se concluir para as demais restrições, concluindo-se que realmente ambas as desigualdades representam o mesmo conjunto de soluções compatíveis equivalente ao trapézio ABCDE.

Sendo ambos os sistemas equivalentes, para se obter os vértices A, B, C, D e E a partir do sistema de equações lineares, basta proceder da seguinte maneira:

Vértice A = (0,0):

Fazendo $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, tem-se que:

$$x_3 = 3, \quad x_4 = 4 \quad \text{e} \quad x_5 = 9.$$

Vértice B = (3,0):

Fazendo $x_1 = 3$ e $x_2 = 0$, tem-se que:

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 4 \quad \text{e} \quad x_5 = 6.$$

Vértice C = (3,3):

Fazendo $x_1 = 3$ e $x_2 = 3$, tem-se que:

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 1 \quad \text{e} \quad x_5 = 0.$$

Vértice D = (1,4):

Fazendo $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$, tem-se que:

$$x_3 = 2, \quad x_4 = 0 \quad \text{e} \quad x_5 = 0.$$

Vértice E = (0,4):

Fazendo $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$, tem-se que:

$$x_3 = 3, \quad x_4 = 0 \quad \text{e} \quad x_5 = 1.$$

Pode-se, então, associar esses vértices aos seguintes vetores:

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note que cada vértice do trapézio, isto é, cada ponto extremo do conjunto das soluções compatíveis do sistema de inequações é uma solução compatível básica do sistema de equações, como foi provado no Capítulo 4.

5.2 O Método Simplex

Primeiramente, ter-se-á um estudo mais sistemático do Método Simplex, definindo-se os principais conceitos e demonstrando teoremas importantes para seu desenvolvimento.

Definição 18. Um conjunto $B = \{1, \dots, n\}$ de n elementos é chamado uma base para a programação linear se, e somente se, a submatriz A_B de A tem posto n . Neste caso, diz-se que A_B é uma matriz básica para a programação linear.

Exemplo 18. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de ordem 2×4 e posto máximo igual a 2.

Se $B = \{1, 3\}$, está-se elegendo as colunas 1 e 3, respectivamente, e, com isso, tem-se que:

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

que é uma matriz básica, afinal o posto de A_B é igual a 2.

Definição 19. Um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é um vetor básico, se existe uma matriz básica A_B tal que $x_B = A_B^{-1}b$ e os outros componentes de x são iguais a zero. Se um vetor básico é não negativo, então ele é chamado de vetor básico compatível.

Exemplo 19. Tomando o Exemplo 18, considerando-se o vetor

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tem-se que, para $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$ e $\{3, 4\}$ são bases e, portanto, as correspondentes matrizes são básicas.

Após fazer os cálculos, pode-se observar que todas as matrizes são compatíveis, exceto para $B = \{2, 4\}$.

Teorema 5.2.1. Um vetor \bar{x} é um vetor básico compatível se, e somente se, existe um vetor $d \in \mathbb{R}^n$ não-nulo tal que \bar{x} é a única solução de

$$\min_{x \in F} d^T x.$$

Demonstração.

(i) **Condição suficiente:**

Seja \bar{x} a solução única de

$$\min_{x \in F} d^T x.$$

Definindo-se $I = \{i \in \{1, \dots, n\} : \bar{x}_i > 0\}$, tem-se que:

Caso 1: Se $I = \emptyset$, então $\bar{x} = 0$ e $b = 0$. Como o posto de A é igual a m , tem-se que existe uma base B , para a qual se tem que:

$$0 = \bar{x}_B = A_B^{-1}b = A_B^{-1}0.$$

Com isso, tem-se que \bar{x} é um vetor compatível.

Caso 2: Se $I \neq \emptyset$, suponha que os vetores $\{A_i\}_{i \in I}$ são linearmente dependentes, então existe $y \in \mathbb{R}^n$ não-nulo tal que:

$$-\bar{x} \leq y \leq \bar{x}.$$

Com isso, tem-se que:

$$\bar{x} \pm y \geq 0.$$

Além disso:

$$A(\bar{x} \pm y) = A\bar{x} = b,$$

portanto:

$$c^T \bar{x} < c^T(\bar{x} \pm y).$$

Somando-se as duas últimas desigualdades, tem-se que $c^T \bar{x} < c^T \bar{x}$, que é um absurdo.

Logo, os vetores $\{A_i\}_{i \in I}$ são linearmente independentes. Mas como o posto de A é igual a m , então I é uma base se I tem m elementos, caso contrário se completa I até que se obtenha uma base compatível B . Portanto:

$$\sum_{i \in B} \bar{x}_i A_i = \sum_{i \in I} \bar{x}_i A_i = b,$$

pois $\bar{x}_i = 0, \forall i \notin I$. Isto implica que \bar{x} é um vetor básico compatível.

(ii) **Condição necessária:**

Seja \bar{x} um vetor básico compatível cuja base é B . Definindo-se $I = \{i \in \{1, \dots, n\} : \bar{x}_i > 0\}$ e $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $d_i = 0$ se $i \in I$ e $d_i = 1$ se $i \notin I$. Portanto, d tem componentes inteiras não-negativas e $d^T \bar{x} = 0$. Como $d \geq 0$ e $x \geq 0, \forall x \in F$, então $d^T x \geq 0, \forall x \in F$. Isto implica que \bar{x} é uma solução de

$$\min_{x \in F} d^T x,$$

onde F é um poliedro.

Tomando-se qualquer $y \in F$ tal que $d^T y = 0$, por definição de d , tem-se que $y_i = 0, \forall i \notin I$, em particular, $y_i = 0, \forall i \notin B$. Portanto:

$$\sum_{i \in B} \bar{x}_i A_i - \sum_{i \in B} y_i A_i = A\bar{x} - Ay = b - b = 0.$$

Como $\{A_i\}_{i \in B}$ são linearmente independentes e $\sum_{i \in B} (\bar{x}_i - y_i) A_i = 0$, implicam que $\bar{x}_i = y_i, \forall i \in B$. Portanto, $\bar{x} = y$, o qual prova que \bar{x} é a única solução de:

$$\min_{x \in F} d^T x.$$

■

Teorema 5.2.2. \bar{x} é um vetor básico factível se, e somente se, \bar{x} é um vetor extremo do poliedro F .

Demonstração.

Seja \bar{x} um vetor básico compatível; então existe um vetor $d \in \mathbb{R}^n$ não-nulo que \bar{x} é solução única de:

$$\min_{x \in F} d^T x.$$

Tomando-se $\alpha = d^T \bar{x}$, tem-se que o hiperplano

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : d^T x = \alpha\}$$

intersecta F em um único ponto e $F \subset H^+$. Portanto, tem-se que \bar{x} é um ponto extremo de F .

Agora, seja \bar{x} um vetor extremo de F ; então $F \setminus \{\bar{x}\}$ é um conjunto convexo, portanto existe um hiperplano H que separa \bar{x} de F , isto é, existe $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que \bar{x} é o único minimizador de $\min_{x \in F} d^T x$, logo \bar{x} é um vetor básico compatível. ■

A consequência do Teorema 5.2.2 e da definição de base é que F tem um número finito de vetores extremos, dada as formas que se podem construir as bases a partir das escolhas de m números dentre n possíveis, tornando-se um problema combinatório.

Teorema 5.2.3.

- (i) Se $F \neq \emptyset$, então existe pelo menos um vetor básico compatível;
- (ii) Se o problema de programação linear tem solução, então existe um vetor compatível que é solução deste problema.

Demonstração.

Prova de (i):

Seja $x \in F$ e defina $I = \{i \in N : x_i > 0\}$, onde $N = \{1, \dots, n\}$. Considere o seguinte processo iterativo com o objetivo de construir uma base compatível a partir de I , sabendo-se que $\{A_i\}_{i \in I}$ são vetores linearmente dependentes:

1. Elija $y \in \mathbb{R}^n$ não-nulo tal que:

$$\sum_{i \in I} y_i A_i = 0 \text{ e } y_j = 0, \forall j \notin I.$$

Note que tal y existe pois os vetores $\{A_i\}_{i \in I}$ são vetores linearmente dependentes.

2. Calcule:

$$\frac{x_r}{y_r} = \min \left\{ \frac{x_j}{y_j} : y_j > 0 \right\}.$$

Isto é possível, pois se pode considerar, sem perda de generalidade, que há componente positiva, caso contrário, considere $-y$ em vez de y .

3. Defina $z \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$z_i = x_i - \frac{x_y}{y_r} y_i, \forall i \in N.$$

Note que $z_i \geq 0$.

4. Faça:

$$J = \{i \in N : z_i > 0\}.$$

Note que $J \subset I \setminus \{r\}$.

5. Atualize $x = z$, $I = J$ e retorne ao passo 1.

Observe que este processo termina com vetores $\{A_i\}_{i \in I}$ linearmente independentes. Portanto, se necessário, completa-se I até que se obtenha uma base B , pois:

$$\sum_{i \in I} x_i A_i = \sum_{i \in B} x_i A_i = A_B x_B = b,$$

logo $x_B = A_B^{-1} b \geq 0$, portanto x é um vetor básico compatível.

Prova de (ii):

Seja \bar{x} uma solução de um problema de programação linear; sabe-se que:

$$\min_{x \in F} c^T x = \min_{x \in E} c^T x,$$

onde E é o conjunto de vetores extremos do poliedro F . Portanto, $\bar{x} \in E$ e, então, $\bar{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$ onde $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0$ e $x^i \in E$, que implica:

$$0 \leq \lambda_i c^T x^i - \lambda_i c^T \bar{x} \leq \sum_{i=1}^k c^T (\lambda_i x^i) + \sum_{i=1}^k c^T (\lambda_i \bar{x}) = c^T \bar{x} - c^T \bar{x} = 0.$$

Logo $c^T x^i = c^T \bar{x}$ o qual implica que x^i é uma solução do problema de programação linear para cada $i = 1, \dots, k$.

Pelo Teorema 5.2.2, tem-se que os vetores x^i são vetores básicos admissíveis.

■

O Teorema 5.2.3 diz que basta se preocupar com os vetores extremos e seus valores funcionais para resolver um problema de programação linear na forma “*standard*” e calcular aquele cuja função objetiva assume o valor mínimo ou máximo.

Com isso, o algoritmo do Método Simplex é dado por:

Dados de entrada: Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz de posto m .

Passo 1: Encontrar uma base B tal que A_B seja uma matriz básica compatível. Se não existe, então pare pois o problema não possui solução; caso contrário, calcule:

$$A_B^{-1}, \bar{b} = A_B^{-1} b \text{ e } c_B.$$

Passo 2: Calcule

$$\bar{c}^T = c^T - c_B^T A_B^{-1} A.$$

Se $\bar{c} \geq 0$, então pare, pois \bar{x} é tal que $\bar{x} = \bar{b}$ e $\bar{x}_R = 0$ é solução; caso contrário, escolha $j \in \{k \in \{1, \dots, n\} : \bar{c}_k < 0\}$.

Passo 3: Calcule

$$Y_j = A_B^{-1} A_j.$$

Se $Y_j \leq 0$, então pare, pois o problema de programação linear não tem solução; caso contrário, calcule $r \in \{1, \dots, m\}$ tal que

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rj}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ij}} : y_{ij} > 0 \right\}.$$

Passo 4: Atualize

$$B = \{B \setminus \{B(r)\}\} \cup \{j\},$$

e calcular

$$A_B^{-1}, \bar{b} = A_B^{-1} b \text{ e } c_B.$$

Note que, dada uma base $B \subset \{1, \dots, n\}$, B pode ser considerado como um vetor de \mathbb{R}^m , onde as componentes de B são os índices da base B .

Exemplo 20. Se

$$n = 5, m = 3 \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

então a matriz básica está formada pelas colunas 4, 2 e 5 respectivamente.

Com isso, provamos que o Simplex é um algoritmo que vai de vetor extremo a vetor extremo até que se encontra aquele que minimiza ou maximiza a função objetiva quando há solução.

Os resultados dos lemas a seguir garantirão que cada passo do Método Simplex está bem definido.

Lema 5.2.4. *Seja um vetor básico compatível correspondente à base B ; se $c^T - c_B^T A_B^{-1} A \geq 0$, então \bar{x} é solução do problema de programação linear.*

Demonstração. Pode-se verificar facilmente que:

$$c^T - c_B^T A_B^{-1} A \geq 0 \Leftrightarrow c_R^T - c_B^T A_B^{-1} A_R \geq 0.$$

Seja $x \in F$ qualquer. Logo, tem-se que:

$$\begin{aligned} b &= Ax = A_B x_B + A_R x_R \\ x_B &= A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_R x_R. \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que:

$$\begin{aligned} c^T x &= c_B^T x_B + c_R^T x_R \\ &= c_B^T A_B^{-1} b - c_B^T A_B^{-1} A_R x_R + c_R^T x_R \\ &= c_B^T A_B^{-1} b + (c_R^T - c_B^T A_B^{-1} A_R) x_R \\ &\geq c_B^T \bar{x}_B = c^T \bar{x}, \forall x \in F. \end{aligned}$$

■

Lema 5.2.5. *Seja B uma base tal que A_B é uma matriz básica compatível; se existe $j \in \{1, \dots, n\} \setminus B$ tal que:*

- (i) $c_j - c_B^T A_B^{-1} A_j < 0$,
- (ii) $A_B^{-1} A_j \leq 0$,

então o problema de programação linear não tem solução.

Demonstração. Para cada $\lambda \geq 0$, define-se $x(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ como:

$$x_B(\lambda) = A_B^{-1} b - \lambda A_B^{-1} A_j, \quad x_j(\lambda) = \lambda, \quad x_i(\lambda) = 0, \quad \forall i \notin B \setminus B \cup \{j\}.$$

Logo, $x(\lambda) \geq 0, \forall \lambda \geq 0$. Por outro lado:

$$\begin{aligned} Ax(\lambda) &= A_B x_B(\lambda) + A_R x_R(\lambda) \\ &= A_B (A_B^{-1} b - \lambda A_B^{-1} A_j) + A_j x_j \\ &= b - \lambda A_j + \lambda A_j \\ &= b, \end{aligned}$$

portanto $x(\lambda) \in F, \forall \lambda \geq 0$, logo:

$$\begin{aligned} c^T x(\lambda) &= c_B^T x_B(\lambda) + c_j x_j(\lambda) \\ &= c_B^T (A_B^{-1} b - \lambda A_B^{-1} A_j) + c_j \lambda \\ &= c_B^T A_B^{-1} b + \lambda (c_j - c_B^T A_B^{-1} A_j) \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

■

Lema 5.2.6. *Seja B uma base tal que A_B é uma matriz básica compatível; se existe $j \in \{1, \dots, n\} \setminus B$ tal que:*

$$(i) \quad c_j - c_B^T A_B^{-1} A_j < 0,$$

$$(ii) \quad Y_j = A_B^{-1} A_j = \begin{bmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix} \not\leq 0,$$

então para $r = \{1, \dots, m\}$ tal que:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rj}} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ij}} : y_{ij} > 0 \right\},$$

e o conjunto $B' = \{B \setminus \{B(r)\}\} \cup \{j\}$ é uma base tal que:

a) $A_{B'}$ é uma matriz básica compatível,

$$b) \quad c_{B'}^T A_{B'}^{-1} b \leq c_B^T A_B^{-1} b.$$

Demonstração. Tem-se que:

$$\begin{aligned} A_{B'} &= [A_{B'(1)}, \dots, A_{B'(r)}, \dots, A_{B'(m)}] \\ &= [A_{B(1)}, \dots, A_j, \dots, A_{B(m)}] \\ &= A_B + [0, \dots, 0, A_j - A_{B(r)}, 0, \dots, 0] \\ &= A_B + A_j [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] - A_{B(r)} [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \\ &= A_B + (A_j - A_{B(r)}) [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} &1 + [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] A_B^{-1} (A_j - A_{B(r)}) \\ &= 1 + [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] A_B^{-1} A_j - [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] A_B^{-1} A_{B(r)} \\ &= 1 + y_{rj} - 1 \\ &= y_{rj} > 0. \end{aligned}$$

Isto implica que $A_{B'}$ é uma matriz de posto m . Portanto, tem-se que:

$$\begin{aligned} A_{B'}^{-1} b &= A_B^{-1} b - \frac{A_B^{-1} ((A_j - A_{B(r)}) [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]) A_B^{-1} b}{1 + [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] A_B^{-1} ((A_j - A_{B(r)}) [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0])} \\ &= A_B^{-1} b - (Y_j - [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T) \frac{\bar{b}_r}{y_{rj}} \geq 0 \end{aligned}$$

o qual implica que $A_{B'}$ é uma base compatível. Por outro lado:

$$c_{B'}^T = c_B^T + (c_j - c_{B(r)})[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0],$$

e isto implica, depois de alguns cálculos, que:

$$\begin{aligned} c_{B'}^T A_{B'}^{-1} b &= c_B^T A_B^{-1} b + \frac{\bar{b}_r}{y_{rj}} (c_B^T A_B^{-1} b - c_j) \\ &\leq c_B^T A_B^{-1} b. \end{aligned}$$

■

Como consequência dos Lemas 5.2.4, 5.2.5 e 5.2.6, mostrou-se que o algoritmo do Método Simplex está bem definido, podendo-se enunciar o próximo teorema.

Teorema 5.2.7. *O algoritmo Simplex está bem definido e termina em um número finito de iterações.*

Depois de definir os componentes principais do método Simplex, pode-se afirmar que a solução ótima do modelo estudado na seção anterior é uma solução compatível básica do sistema de equações obtido, isto é, um ponto extremo do trapézio ABCDE.

O Método Simplex, para ser iniciado, necessita do conhecimento de uma solução compatível básica do sistema, chamada de solução inicial, isto é, um dos pontos A, B, C, D ou E do trapézio. Suponha que esta solução seja, por exemplo, o ponto A.

O Método Simplex verifica se a presente solução é ótima. Se for, o processo é encerrado; se não for, é porque um dos pontos extremos adjacentes ao ponto A fornece à função objetiva um valor maior que o atual. No caso, tanto B como E são melhores que A.

O Método Simplex faz então a mudança do ponto A para o ponto extremo adjacente que mais aumente o valor da função objetiva, no caso, o ponto B.

Agora, tudo que foi feito no ponto A será feito ao ponto B. O processo finaliza quando, estando num ponto extremo, todos os pontos a ele adjacentes, fornecerem valores menores para a função objetiva. É o que acontece com o ponto extremo C. É nessa hora a importância do fato do conjunto das soluções compatíveis ser convexo, como foi visto anteriormente.

Para a mudança de um ponto extremo para outro a ele adjacente, note que um ponto extremo adjacente é uma solução compatível básica incluindo todas as variáveis básicas anteriores, com exceção de apenas uma delas. Encontrar, portanto, a próxima solução compatível básica, exige a escolha de uma variável básica para deixar a base atual, tornando-se não-básica, e a escolha de uma variável não-básica para entrar na base em sua substituição.

Resumindo, o método simplex compreenderá os seguintes passos:

- (i) Encontrar uma solução compatível básica inicial;
- (ii) Verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare, caso contrário, siga para o passo (iii);

- (iii) Determinar a variável não-básica que deve entrar na base;
- (iv) Determinar a variável básica que deve sair da base;
- (v) Encontrar a nova solução compatível básica e voltar ao passo (ii).

Exemplo 21. Será resolvido, algebricamente, o modelo de programação linear:

$$\begin{aligned} \max \quad & f = 5x_1 + 2x_2 \quad \text{sujeito a} \\ & \begin{cases} x_1 & \leq 3 \\ & x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 & \leq 9 \end{cases} \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Com a introdução das variáveis de folga x_3 , x_4 e x_5 , obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} x_1 & +x_3 & & = 3 \\ & x_2 & +x_4 & = 4 \\ x_1 & +2x_2 & & +x_5 = 9 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Note que o sistema apresenta uma solução compatível básica óbvia, com os seguintes valores para as variáveis:

Variáveis não-básicas: $x_1 = x_2 = 0$.

Variáveis básicas: $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ e $x_5 = 9$.

Quando todas as restrições forem do tipo \leq e os b_i não-negativos, sempre ter-se-á uma base óbvia formada pelas variáveis de folga.

Diz-se que o sistema está na forma canônica, pois apresenta as seguintes características:

- (i) Todas as variáveis são não-negativas;
- (ii) Todos os b_i são não-negativos;
- (iii) Possui uma base óbvia.

Quando um sistema possui apenas as características (i) e (ii), diz-se que ele está na forma “standard”. Como foi visto no capítulo 3, sempre é possível transformar um modelo de Programação Linear num sistema de equações na forma “standard”.

A solução compatível básica óbvia corresponde ao ponto extremo $A = (0, 0)$ do trapézio ABCDE. Note que a presente solução não é ótima, afinal o valor da função objetiva f é zero, pois $x_1 = x_2 = 0$ e qualquer uma dessas variáveis não-básicas que entrar na base, tomará algum valor positivo, aumentando o valor de f . Concluindo que ainda não foi alcançada a solução ótima.

Para saber qual variável não-básica deverá entrar na base, basta tomar aquela que tiver o maior coeficiente na função objetiva, estando a função expressa apenas em termos

das variáveis não-básicas, visando crescer o valor de f o mais rápido possível. Neste caso, toma-se x_1 que possui coeficiente igual a 5.

Para se determinar a variável que sai da base se deve, primeiramente, colocar todas as variáveis básicas em função das não-básicas:

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_1 \\ x_4 = 4 - x_2 \\ x_5 = 9 - x_1, \end{cases}$$

onde $x_1 \leq 3$ pela primeira equação e $x_1 \leq 9$ pela terceira equação.

Note como x_1 influencia o valor das demais variáveis. A variável x_2 continuará fora da base com o valor nulo. Além disso, conclui-se que quando x_1 entra na base, as variáveis x_3 e x_5 diminuirão de valor enquanto x_4 fica inalterada. Deseja-se aumentar o máximo possível x_1 de tal modo que nenhuma variável do sistema fique negativa. Tem-se, então, de retirar da base àquela que se anula mais rapidamente quando se aumenta o valor de x_1 , neste caso, x_3 .

Portanto, a nova base será formada por x_1 , x_4 e x_5 . É necessário transformar o sistema em uma nova forma canônica tal que a nova base seja formada por essas variáveis. Logo, tem-se que:

$$\begin{cases} x_1 & & +x_3 & & = 3 \\ & x_2 & & +x_4 & = 4 \\ x_1 & +2x_2 & & & +x_5 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}_3 \rightarrow \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & & +x_3 & & = 3 \\ & x_2 & & +x_4 & = 4 \\ & 2x_2 & -x_3 & & +x_5 = 6. \end{cases}$$

A solução compatível básica óbvia é:

Variáveis não-básicas: $x_2 = x_3 = 0$.

Variáveis básicas: $x_1 = 3$, $x_4 = 4$ e $x_5 = 6$.

Esta solução corresponde ao vértice $b = (3, 0)$, adjacente ao ponto A. Note que x_5 diminuiu de valor ao se passar do ponto A para o ponto B.

Testando-se a presente solução ótima é necessário modificar a função f em termos das variáveis não-básicas x_2 e x_3 , pois não se pode avaliar a influência da variável não-básica x_3 no comportamento de f , assim, x_3 não teria chance de entrar na base pelo Método Simplex e, além disso, não se pode afirmar que f aumentará de valor com a entrada de x_2 na base pois x_1 poderá diminuir de valor assim como x_5 . Logo, tem-se que:

$$\begin{aligned} f &= 5x_1 + 2x_2 \\ &= 5(3 - x_3) + 2x_2 \\ &= 15 + 2x_2 - 5x_3. \end{aligned}$$

Pode-se afirmar, portanto, que a presente solução não é ótima, pois, se x_2 entrar na base, aumentará o valor de f .

Repetindo-se o processo anterior, colocando-se as variáveis básicas em função das não básicas, tem-se que:

$$\begin{cases} x_1 = 3 & -x_3 \\ x_4 = 4 & -x_2 \\ x_5 = 6 & -2x_2 + x_3, \end{cases}$$

onde $x_2 \leq 4$ pela segunda equação e $x_2 \leq 3$ pela terceira equação.

Como a variável x_5 é a que se anula mais rapidamente, ela deve sair da base.

Deve-se transformar o sistema para uma nova forma canônica tal que a nova base seja formada pelas variáveis x_1 , x_2 e x_4 . Logo, tem-se que:

$$\begin{cases} x_1 & +x_3 & & & = 3 \\ & x_2 & & +x_4 & = 4 \\ & 2x_2 & -x_3 & & +x_5 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}_3 \rightarrow \frac{1}{2}\mathcal{L}_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +x_3 & & & = 3 \\ & 1/2x_3 & +x_4 & -1/2x_5 & = 1 \\ & x_2 & -1/2x_3 & & +1/2x_5 = 3. \end{cases}$$

Esta solução possui a seguinte solução compatível óbvia:

Variáveis não-básicas: $x_3^* = x_5^* = 0$.

Variáveis básicas: $x_1^* = 3$, $x_2^* = 3$ e $x_4^* = 1$.

A qual corresponde ao vértice C, adjacente a B, do conjunto solução.

Colocando-se f em função das variáveis não-básicas, tem-se que:

$$\begin{aligned} f &= 15 + 2x_2 - 5x_3 \\ &= 15 + 2(3 + 1/2x_3 - 1/2x_5) - 5x_3 \\ &= 21 - 4x_3 - x_5. \end{aligned}$$

Baseando-se na situação acima, pode-se afirmar que se está diante da solução ótima, pois se x_3 ou x_5 entrarem na base, diminuirão o valor de f . Com isso, obtém:

$$\begin{aligned} f^* &= 21 - 4x_3^* - x_5^* \\ &= 21, \end{aligned}$$

a qual também poderia ser obtida com:

$$\begin{aligned} f^* &= 5x_1^* + 2x_2^* \\ &= 21. \end{aligned}$$

Para diferenciar a solução ótima das demais, convencionou-se representá-la por f^* , x_1^* , x_2^* , etc.

Com os novos conceitos apresentados no exemplo, pode-se reescrever os cinco passos do Método Simplex, para o caso de maximização, da seguinte maneira:

- (i) Encontrar uma forma canônica inicial para o sistema de equações, isto é, achar uma solução compatível básica;
- (ii) Colocar a função objetiva somente em termos das variáveis não-básicas; se todos os coeficientes dessas variáveis forem menores ou iguais a zero a presente solução é ótima, caso contrário, siga para o passo (iii);
- (iii) Colocar na base a variável não-básica que tiver o maior coeficiente positivo na função objetiva obtida em (ii);
- (iv) Tirar da base a variável básica que se anular mais rapidamente, quando a variável que entrar for aumentada de valor;
- (v) Encontrar uma outra forma canônica para o sistema de equações, levando em consideração os passos (iii) e (iv); voltar ao passo (ii).

A utilização de tabelas para o do Método Simplex em modelos de Programação Linear visa simplificar os cálculos do item anterior.

Exemplo 22.

- a) Resolvendo o exemplo anterior com a utilização de tabelas, primeiramente, reescreve-se o sistema da seguinte maneira:

$$\begin{cases} f - 5x_1 - 2x_2 & = 0 \\ x_1 + x_3 & = 3 \\ x_2 + x_4 & = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 & = 9. \end{cases}$$

Pode-se representar o sistema da maneira esquemática abaixo:

	f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	-5	-2	0	0	0	0	\mathcal{L}_0
x_3	0	1	0	1	0	0	3	\mathcal{L}_1
x_4	0	0	1	0	1	0	4	\mathcal{L}_2
x_5	0	1	2	0	0	1	9	\mathcal{L}_3

Note que, como $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, f já está em termos de x_1 e x_2 . Pode-se afirmar que a presente solução é compatível e que a variável a entrar na base é x_1 (variável com maior coeficiente em valor absoluto).

Para a determinação da variável que sai, pelo exemplo anterior, note que só é necessário se preocupar com a razão dos coeficientes do vetor b com os coeficientes de x_1 que são positivos, isto é:

linha (1): $x_1 \leq \frac{3}{1} = 3$.

linha (3): $x_1 \leq \frac{9}{1} = 9$.

Portanto, deverá sair da base a variável associada à linha (1), ou seja, x_3 que é a variável que se anula mais rapidamente, obtendo-se o seguinte quadro:

	f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Base	1	0			0	0	
x_1	0	1			0	0	
x_4	0	0			1	0	
x_5	0	0			0	1	

Note que $x_1 = x_4 = x_5 = 0$, afinal f deve ficar em termos somente de x_2 e x_3 . Para completar o quadro, perceba que apenas as colunas x_1 são distintas em ambos os quadros. A linha (1) será a linha pivô das transformações por ser a linha associada à variável que sai da base. Portanto, tem-se que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &\rightarrow \mathcal{L}_0 + 5\mathcal{L}_1; \\ \mathcal{L}_1 &\leftrightarrow \mathcal{L}_1; \\ \mathcal{L}_2 &\leftrightarrow \mathcal{L}_2; \\ \mathcal{L}_3 &\rightarrow \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1;\end{aligned}$$

obtendo-se, então:

	f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Base	1	0	-2	5	0	0	15
x_1	0	1	0	1	0	0	3
x_4	0	0	1	0	1	0	4
x_5	0	0	2	-1	0	1	6

Da linha (0), tem-se que $f = 15 + 2x_2 - 5x_3$, coincidindo com a relação obtida anteriormente.

Pelo coeficiente -2 na linha (0), pode-se afirmar que a solução não é ótima, portanto a variável que entra na base é x_2 e, além disso:

linha (2): $x_2 \leq \frac{4}{1} = 4;$

linha (3): $x_2 \leq \frac{6}{2} = 3;$

a variável x_5 , correspondente a linha (3), deve sair da base. Então, fazendo-se:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &\rightarrow \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_3; \\ \mathcal{L}_1 &\leftrightarrow \mathcal{L}_1; \\ \mathcal{L}_2 &\rightarrow \mathcal{L}_2 - \frac{1}{2}\mathcal{L}_3; \\ \mathcal{L}_3 &\rightarrow \frac{1}{2}\mathcal{L}_3;\end{aligned}$$

obtendo-se, então:

	f^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Base	1	0	0	4	0	1	21
x_1^*	0	1	0	1	0	0	3
x_4^*	0	0	0	1/2	1	-1/2	1
x_2^*	0	0	1	-1/2	0	1/2	3

Portanto, a presente solução é ótima, pois não existe algum coeficiente negativo na linha (0) e a função objetiva $f = 21 - 4x_3^* - x_5^*$ coincide com a relação obtida anteriormente.

b) Seja o seguinte modelo de programação linear:

$$\begin{aligned} \max \quad & f = 7x_1 + 9x_2 \quad \text{sujeito a} \\ & \begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Reescrevendo o problema como um sistema de equações lineares, tem-se que:

$$\begin{cases} f - 7x_1 - 9x_2 & & & & & & = 0 \\ & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 2 \\ & 3x_1 & +5x_2 & & +x_4 & & = 15 \\ & 5x_1 & +4x_2 & & & +x_5 & = 20 \end{cases}$$

Resolvendo por tabelas, tem-se que:

	f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	-7	-9	0	0	0	0	$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + 9\mathcal{L}_1$
x_3	0	-1	1	1	0	0	2	$\mathcal{L}_1 \leftrightarrow \mathcal{L}_1$
x_4	0	3	5	0	1	0	15	$\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2 - 5\mathcal{L}_1$
x_5	0	5	4	0	0	1	20	$\mathcal{L}_3 \rightarrow \mathcal{L}_3 - 4\mathcal{L}_1$

Como a base que deve sair possui a menor razão positiva entre os coeficientes de b e de x_2 , a qual é a base negativa de maior valor absoluto, isto é, a variável que entra na base, então x_3 deve sair da base.

	f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	-16	0	9	0	0	18	$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + 2\mathcal{L}_2$
x_2	0	-1	1	1	0	0	2	$\mathcal{L}_1 \leftrightarrow \mathcal{L}_1 + \frac{1}{8}\mathcal{L}_2$
x_4	0	8	0	-5	1	0	5	$\mathcal{L}_2 \rightarrow \frac{1}{8}\mathcal{L}_2$
x_5	0	9	0	-4	0	1	12	$\mathcal{L}_3 \rightarrow \mathcal{L}_3 - \frac{9}{8}\mathcal{L}_2$

Como a base que deve sair possui a menor razão positiva entre os coeficientes de b e de x_1 , a qual é a base negativa de maior valor absoluto, isto é, a variável que entra na base, então x_4 deve sair da base.

	f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	0	0	-1	2	0	28	$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + 8/13\mathcal{L}_3$
x_2	0	0	1	3/8	1/8	0	21/3	$\mathcal{L}_1 \leftrightarrow \mathcal{L}_1 - 3/13\mathcal{L}_3$
x_1	0	1	0	-5/8	1/8	0	5/8	$\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2 + 5/13\mathcal{L}_3$
x_5	0	0	0	13/8	-9/8	1	51/8	$\mathcal{L}_3 \rightarrow 8/13\mathcal{L}_3$

Como a base que deve sair possui a menor razão positiva entre os coeficientes de b e de x_3 , a qual é a base negativa de maior valor absoluto, isto é, a variável que entra na base, então x_5 deve sair da base.

	f^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Base	1	0	0	0	17/13	8/13	415/13
x_2^*	0	0	1	0	5/13	-3/13	15/13
x_1^*	0	1	0	0	-4/13	5/13	40/13
x_3^*	0	0	0	1	-9/13	8/13	51/13

O valor ótimo se localiza exatamente abaixo do coeficiente b , portanto o valor máximo de f é 415/13.

5.3 Casos Especiais

Há algumas situações que podem ocorrer nos modelos de Programação Linear que não foram vistos na seção anterior. São situações que podem exigir uma consideração ou manipulação diferenciada.

(i) Problema de Minimização:

Quando a função objetiva tiver de ser minimizada, podem-se fazer dois procedimentos:

- (i) Mudar o teste para saber se a solução é ótima e o critério de entrada de base;
- (ii) Transformar o problema de minimização num problema de maximização, sabendo-se que encontrar o mínimo de uma função é equivalente a encontrar o máximo do simétrico desta, isto é:

$$\max f \Leftrightarrow -\min (-f).$$

(ii) Empate na Entrada:

Quando houver empate na escolha da variável que entra na base, deve-se tomar a decisão arbitrariamente. A única implicação envolvida é que se pode tomar um caminho mais longo ou mais curto para chegar à solução ótima.

(iii) Empate na Saída - Degeneração:

Como no caso anterior, a decisão também deve ser tomada de forma arbitrária. Neste caso, sempre ocorrerá de pelo menos duas variáveis se anularem ao mesmo tempo, anulando-se assim a variável que ficar na base. Quando isso ocorre, diz-se que a solução compatível básica é degenerada.

Também pode ocorrer o caso de se chegar à solução ótima com um menor número de iterações, ou seja, pode-se entrar em circuitos fechados intermináveis à procura da solução ótima.

(iv) **Soluções Múltiplas:**

Eventualmente, um modelo de Programação Linear pode apresentar mais de uma solução ótima. Quando isso ocorre, o próprio Método Simplex é capaz de acusar, anulando variáveis que pertencem à função objetiva. Note que, pelos teoremas vistos no capítulo 4, pode-se afirmar que qualquer combinação convexa de duas dessas soluções descobertas, também será solução ótima para o modelo em questão.

5.4 Obtenção da solução inicial

Sempre é possível transformar um modelo de programação linear num sistema de equações na forma “standard”. Acontece que, para se iniciar o Método Simplex, é necessário tê-lo sob a forma canônica, ou seja, apresentando uma solução compatível básica óbvia.

O modelo desenvolvido até agora tem todas as suas restrições do tipo \leq e todos os b_i 's maiores ou iguais a zero. Assim, sempre se tem uma base inicial óbvia formada pelas variáveis de folga.

Ver-se-á neste seção como é possível encontrar uma solução compatível básica inicial quando a mesma não for óbvia.

5.4.1 Casos de Dificuldades

Suponha que todos os b_i 's sejam maiores ou igual a zero. Se algum deles for negativo, pode-se multiplicar toda a restrição correspondente por -1 para o transformar em positivo.

Baseado nessa hipótese, estar-se-á em dificuldades desde que o modelo apresente uma restrição do tipo \geq ou do tipo $=$.

Para exemplificar, considere um modelo de programação linear:

$$\begin{aligned} \max \quad & f = 5x_1 + 2x_2 \quad \text{sujeito a} \\ & \begin{cases} x_1 & \leq 3 \\ & x_2 & \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 & \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Pela solução gráfica, conclui-se que a solução ótima é o ponto $B = (3, 4)$ do triângulo ABC.

Colocando-se as variáveis de folga se obtém:

$$\begin{cases} f - 5x_1 - 2x_2 & = 0 \\ x_1 & + x_3 & = 3 \\ & x_2 & + x_4 & = 4 \\ x_1 + 2x_2 & - x_5 & = 9. \end{cases}$$

O sistema, apesar de estar na forma “standard”, não está na forma canônica. A solução básica formada por:

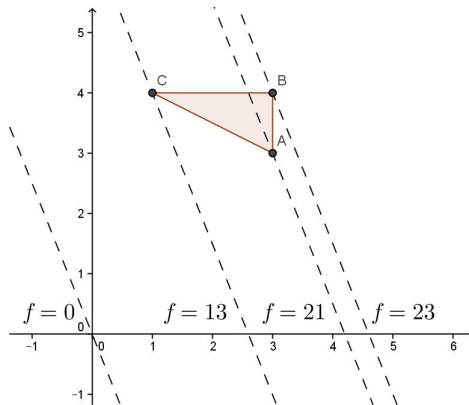


Figura 5.2:

Variáveis não-básicas: $x_1 = x_2 = 0$,

Variáveis básicas: $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ e $x_5 = -9$,

não é compatível, pois $x_5 < 0$.

Para se obter uma forma canônica para o sistema, pode-se acrescentar uma variável artificial x_6 na 4ª equação. A variável x_6 tomará o lugar de x_5 na base inicial. Assim, obtém-se:

$$\begin{cases} f - 5x_1 - 2x_2 & = 0 \\ x_1 & + x_3 & = 3 \\ x_2 & + x_4 & = 4 \\ x_1 + 2x_2 & - x_5 + x_6 & = 9 \end{cases}$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0,$$

e a solução compatível básica é:

Variáveis não-básicas: $x_1 = x_2 = x_5 = 0$.

Variáveis básicas: $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ e $x_6 = 9$.

Os sistemas só serão equivalentes se a variável artificial x_6 for nula. Ao se conseguir uma base que não inclua x_6 , esta será considerada satisfeita. Dois processos para alcançar esse objetivo são explicados a seguir.

5.4.2 Processo do “M Grande”

Para se forçar a variável artificial a não pertencer à base ótima, pode-se transformar a função objetiva para:

$$f = \sum_{i=1}^n c_i x_i - M x_k,$$

onde, x_k representa a variável artificial e M um número tão grande quanto desejável. Assim, o valor máximo de f só será alcançado se $x_6 = 0$, conforme desejado.

Voltando ao exemplo da subseção anterior, obtém-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} f - 5x_1 - 2x_2 & & & & & & +Mx_6 = 0 \\ & x_1 & & & +x_3 & & = 3 \\ & & x_2 & & & +x_4 & = 4 \\ & x_1 + 2x_2 & & & & -x_5 + x_6 = 9 \end{cases}$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0.$$

Resolvendo pelo método de tabelas, tem-se:

	f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
Base	1	-5	-2	0	0	0	M	0	$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + 5\mathcal{L}_1$
x_3	0	1	0	1	0	0	0	3	$\mathcal{L}_1 \leftrightarrow \mathcal{L}_1$
x_4	0	0	1	0	1	0	0	4	$\mathcal{L}_2 \leftrightarrow \mathcal{L}_2$
x_5	0	1	2	0	0	-1	1	9	$\mathcal{L}_3 \rightarrow \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1$

	f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
Base	1	0	-2	5	0	0	M	15	$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_3$
x_1	0	1	0	1	0	0	0	3	$\mathcal{L}_1 \leftrightarrow \mathcal{L}_1$
x_4	0	0	1	0	1	0	0	4	$\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2 - \frac{1}{2}\mathcal{L}_3$
x_5	0	0	2	-1	0	-1	1	6	$\mathcal{L}_3 \rightarrow \frac{1}{2}\mathcal{L}_3$

	f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
Base	1	0	0	4	0	-1	M+1	21	$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + 2\mathcal{L}_1$
x_1	0	1	0	1	0	0	0	3	$\mathcal{L}_1 \leftrightarrow \mathcal{L}_1$
x_4	0	0	0	1/2	1	1/2	-1/2	1	$\mathcal{L}_2 \rightarrow 2\mathcal{L}_2$
x_2	0	0	1	-1/2	0	-1/2	1/2	3	$\mathcal{L}_3 \rightarrow \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_2$

	f^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
Base	1	0	0	5	2	0	M	23
x_1^*	0	1	0	1	0	0	0	3
x_5^*	0	0	0	1	2	1	-1	2
x_2^*	0	0	1	0	1	0	0	4

5.4.3 Processo da Função Objetiva Artificial

Este processo consiste em, inicialmente, abandonar a função objetiva original, colocando no sistema uma função objetiva artificial, formada pela variável artificial colocada. Como a nova variável não pode ser negativa, o seu valor mínimo será igual a zero, assim, encontrando-se o mínimo da nova função objetiva igual a zero, ter-se-á excluído da base a variável artificial, lembrando-se que minimizar uma função é o mesmo que maximizar o seu simétrico.

Se um modelo requer mais de uma variável artificial para completar a base inicial, a função objetiva artificial será igual à soma dessas variáveis artificiais. Para o mínimo

daquela ser zero, todas essas deverão ser nulas. Se o mínimo for diferente de zero, é porque o sistema de equações original não tem solução compatível.

Retomando o exemplo anterior, tem-se:

$$\begin{aligned} \min \quad & W = x_6 \quad \text{sujeito a} \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 \quad \quad \quad +x_3 \quad \quad \quad = 3 \\ \quad \quad x_2 \quad \quad \quad +x_4 \quad \quad \quad = 4 \\ x_1 \quad +2x_2 \quad \quad \quad \quad \quad -x_5 + x_6 = 9 \end{array} \right. \\ & x_1, \dots, x_6 \geq 0. \end{aligned}$$

Lembrando-se que o mínimo de W é o mesmo que o máximo de $-W$, obtém-se a seguinte tabela:

	$-W$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
Base	1	0	0	0	0	0	1	0
x_3	0	1	0	1	0	0	0	3
x_4	0	0	1	0	1	0	0	4
x_5	0	1	2	0	0	-1	1	9

Eliminando da função objetiva a variável básica x_6 a partir da operação $\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_3$, tem-se:

	$-W$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
Base	1	-1	-2	0	0	1	0	-9
x_3	0	1	0	1	0	0	0	3
x_4	0	0	1	0	1	0	0	4
x_6	0	1	2	0	0	-1	1	9

Resolvendo a maximização de $-W$ pelo Método Simplex, tem-se:

	$-W$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
Base	1	-1	-2	0	0	1	0	-9	$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + 2\mathcal{L}_2$
x_3	0	1	0	1	0	0	0	3	$\mathcal{L}_1 \leftrightarrow \mathcal{L}_1$
x_4	0	0	1	0	1	0	0	4	$\mathcal{L}_2 \leftrightarrow \mathcal{L}_2$
x_6	0	1	2	0	0	-1	1	9	$\mathcal{L}_3 \rightarrow \mathcal{L}_3 - 2\mathcal{L}_2$

	$-W$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
Base	1	-1	0	0	2	1	0	-1	$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_3$
x_3	0	1	0	1	0	0	0	3	$\mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_3$
x_2	0	0	1	0	1	0	0	4	$\mathcal{L}_2 \leftrightarrow \mathcal{L}_2$
x_6	0	1	0	0	-2	-1	1	1	$\mathcal{L}_3 \leftrightarrow \mathcal{L}_3$

	$-W^*$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
Base	1	0	0	0	0	0	1	0
x_3^*	0	0	0	1	2	1	-1	2
x_2^*	0	0	1	0	1	0	0	4
x_1^*	0	1	0	0	-2	-1	1	1

Note que o valor mínimo de W foi igual a 0. Desprezando-se a variável artificial x_6 , o quadro fornece a seguinte solução compatível básica para o sistema:

Variáveis não-básicas: $x_4 = x_5 = 0$,

Variáveis básicas: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ e $x_3 = 2$.

Esta solução compatível básica corresponde ao ponto extremo $C = (1, 4)$ do triângulo ABC. Os coeficientes nulos de x_4 e x_5 na função objetiva indicam que existem mais duas soluções compatíveis básicas para o sistema, correspondentes aos pontos extremos $A = (3, 3)$ e $B = (3, 4)$.

Obtida a solução compatível básica para o sistema, devem-se fazer as seguintes alterações no quadro:

- (i) Colocar a função objetiva original;
- (ii) Eliminar a função W e a variável artificial x_6 .

Então, tem-se:

	f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	-5	-2	0	0	0	0	$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + 5\mathcal{L}_3 + 2\mathcal{L}_2$
x_3	0	0	0	1	2	1	2	
x_2	0	0	1	0	1	0	4	
x_1	0	1	0	0	-2	-1	1	

	f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	0	0	0	-8	-5	13	$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + 4\mathcal{L}_1$ $\mathcal{L}_1 \rightarrow \frac{1}{2}\mathcal{L}_1$ $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2 - \frac{1}{2}\mathcal{L}_1$ $\mathcal{L}_3 \rightarrow \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_1$
x_3	0	0	0	1	2	1	2	
x_2	0	0	1	0	1	0	4	
x_1	0	1	0	0	-2	-1	1	

	f	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	0	0	4	0	-1	21	$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + 2\mathcal{L}_1$ $\mathcal{L}_1 \rightarrow 2\mathcal{L}_1$ $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1$ $\mathcal{L}_3 \leftrightarrow \mathcal{L}_3$
x_4	0	0	0	1/2	1	1/2	1	
x_2	0	0	1	-1/2	0	-1/2	3	
x_1	0	1	0	1	0	0	3	

	f^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Base	1	0	0	5	2	0	23
x_5^*	0	0	0	1	2	1	2
x_2^*	0	0	1	0	1	0	4
x_1^*	0	1	0	1	0	0	3

Exemplo 23.

a) Seja o sistema de equações lineares abaixo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 6 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Para encontrar todas as soluções compatíveis básicas do sistema pelo processo da função artificial, considere as variáveis artificiais x_4 e x_5 ; com isso, tem-se:

$$\begin{aligned} \min \quad & W = x_4 + x_5 \quad \text{sujeito a} \\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 & = 6 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_5 & = 9 \end{cases} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Transformando a função W para maximização, ter-se-á:

$$\max \quad -W = -x_4 - x_5.$$

Com isso, tem-se:

	$-W$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	0	0	0	1	1	0	$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2$
x_4	0	3	2	-5	1	0	6	
x_5	0	4	7	4	0	1	9	

	$-W$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	-7	-9	1	0	0	-15	$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + \frac{9}{7}\mathcal{L}_2$ $\mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1 - \frac{5}{7}\mathcal{L}_2$ $\mathcal{L}_2 \rightarrow \frac{1}{7}\mathcal{L}_2$
x_4	0	3	2	-5	1	0	6	
x_5	0	4	7	4	0	1	9	

	$-W$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	-13/7	0	43/7	0	9/7	-24/7	$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ $\mathcal{L}_1 \rightarrow 7/13\mathcal{L}_1$ $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2 - 7/13\mathcal{L}_1$
x_4	0	13/7	0	-43/7	1	-2/7	24/7	
x_2	0	4/7	1	4/7	0	1/7	9/7	

	$-W^*$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Base	1	0	0	0	1	1	0
x_1^*	0	1	0	-43/13			24/13
x_2^*	0	0	1	32/13			3/13

Note que o mínimo de W é zero, indicando que se obteve uma solução compatível básica para o sistema.

b) Considere o seguinte modelo de Programação Linear:

$$\begin{aligned} \min \quad & f = 3x_1 + 2x_2 \quad \text{sujeito a} \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5 \\ 2x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Colocando as variáveis de folga, obtém-se:

$$\begin{aligned} \min \quad & f = 3x_1 + 2x_2 \quad \text{sujeito a} \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Para encontrar uma solução inicial, pode-se colocar as variáveis artificiais x_5 e x_6 , acompanhadas da função objetiva W , obtendo-se:

$$\begin{cases} W & -x_5 - x_6 = 0 \\ f & -3x_1 - 2x_2 = 0 \\ & x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 5 \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Transformando as funções f e W para maximização, chegar-se-á ao quadro abaixo:

	$-W$	$-f$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
Base	1	0	0	0	0	0	1	1	0
	0	1	3	2	0	0	0	0	0
x_5	0	0	1	1	-1	0	1	0	5
x_6	0	0	2	1	0	-1	1	0	7

Eliminando-se x_5 e x_6 da função W , tem-se:

	$-W$	$-f$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
Base	1	0	0	0	0	0	1	1	0
	0	1	3	2	0	0	0	0	0
x_5	0	0	1	1	-1	0	1	0	5
x_6	0	0	2	1	0	-1	1	0	7

$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_3$

	$-W$	$-f$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
Base	1	0	-3	-2	1	1	0	0	-12
	0	1	3	2	0	0	0	0	0
x_5	0	0	1	1	-1	0	1	0	5
x_6	0	0	2	1	0	-1	1	0	7

$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + \frac{3}{5}\mathcal{L}_3$
 $\mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1 - \frac{3}{2}\mathcal{L}_3$
 $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2 - \frac{1}{2}\mathcal{L}_3$
 $\mathcal{L}_3 \rightarrow \frac{1}{2}\mathcal{L}_3$

	$-W$	$-f$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
Base	1	0	0	-1/2	1	-1/2	0	3/2	-3/2	$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_2$
	0	1	0	1/2	0	3/2	0	-3/2	-21/2	$\mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1 - 3\mathcal{L}_2$
x_5	0	0	0	1/2	-1	1/2	1	-1/2	3/2	$\mathcal{L}_2 \rightarrow 2\mathcal{L}_2$
x_6	0	0	1	1/2	0	-1/2	0	1/2	7/2	$\mathcal{L}_3 \rightarrow \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_2$

	$-W$	$-f$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
Base	1	0	0	0	0	0	1	1	0
	0	1	0	-1	3	0	-3	0	-15
x_5	0	0	0	1	-2	1	2	-1	3
x_6	0	0	1	1	-1	0	1	0	5

A função W chegou ao seu valor mínimo que, sendo nulo, indica a existência de solução compatível para o problema, podendo-se eliminar a linha da função W e as duas variáveis artificiais., obtendo-se:

	$-W$	$-f$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
Base									
		1	0	-1	3	0			-15
x_5		0	0	1	-2	1			3
x_6		0	1	1	-1	0			5

O quadro acima mostra uma solução compatível básica para o sistema, inclusive a função f já está em termos das variáveis não-básicas. Então, tem-se:

	$-W$	$-f$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
Base										
		1	0	-1	3	0			-15	$\mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$
x_5		0	0	1	-2	1			3	$\mathcal{L}_2 \leftrightarrow \mathcal{L}_2$
x_6		0	1	1	-1	0			5	$\mathcal{L}_3 \rightarrow \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_2$

	$-W$	$-f^*$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
Base									
		1	0	0	1	1			-12
x_5^*		0	0	1	-2	1			3
x_6^*		0	1	0	1	-1			2

Que é a solução ótima.

Com isso, até aqui foram estudadas algumas das técnicas necessárias para encontrar a solução ótima de um modelo de Programação Linear. Se tal modelo apresentar um número reduzido de variáveis, poder-se-á aplicar o Método Simplex manualmente e resolver o problema. Se o número de variáveis for grande, como acontece na maioria dos problemas reais, é necessário a utilização de recursos computacionais para se obter a solução ótima do problema.

Capítulo 6

Considerações Finais

Mostrou-se nesta dissertação uma algumas das formas de se resolver problemas de Programação Linear, além do estudo de conjuntos convexos e desigualdades. Após a modelagem de algum problema, pode-se resolver muitos deles a partir dos métodos apresentados.

O Método Gráfico se mostra eficiente, porém se limita aos problemas no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 , sendo que em \mathbb{R}^3 é difícil a visualização dos pontos extremos para obter a solução ótima do problema de Programação Linear.

O Método Simplex é uma ferramenta de grande utilidade para resolver quaisquer dos problemas propostos, mas, à medida que se acrescenta mais variáveis, ele se torna um método com processo de solução prolongado. A utilização de ferramentas computacionais resolvem de forma satisfatória esse problema.

Por fim, apesar das limitações para resolver os problemas de Programação Linear, isto é, considerando-se os coeficientes constantes, a divisibilidade e a proporcionalidade, ainda se pode aplicar os métodos vistos neste trabalho a maioria dos problemas existentes. Para algum problema mais específico, há métodos para resolvê-los mais rebuscados, os quais se encontram em textos mais avançados para a solução de problemas mais específicos não encontrados nesta dissertação..

Apêndice A

Álgebra Linear

Aqui se mostra apenas os conceitos indispensáveis para o desenvolvimento do assunto, dando-se maior ênfase às Matrizes e aos Sistemas de Equações Lineares. Apenas os teoremas mais importantes foram demonstrados.

A.1 Matrizes

Nesta seção se apresenta os conceitos básicos sobre matrizes. São conceitos que aparecem na resolução de muitos problemas, não somente para organizá-los e simplificá-los, mas por trazer novos métodos de solução.

Definição 20 (Matrizes). É um conjunto de números dispostos em linhas e colunas em forma de uma tabela com a seguinte representação:

$$A = A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} ; a_{ij} \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}^*.$$

onde m e n o número de linhas e colunas da matriz, respectivamente; $m \times n$ é a ordem da matriz e a_{ij} a entrada da matriz.

Notação: $\mathcal{M}(m, n)$ representa o conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$.

Tipos especiais de matrizes

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$; tem-se que:

1. **Matriz Nula:** tal que $a_{ij} = 0, \forall i, j$.

Exemplo 24.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5} .$$

2. **Matriz Coluna:** tal que $n = 1$.

Exemplo 25.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}_{4 \times 1} .$$

3. **Matriz Linha:** tal que $m = 1$.

Exemplo 26.

$$[1 \quad -2 \quad 3 \quad -4]_{1 \times 4} .$$

4. **Matriz Quadrada:** tal que $m = n$.

Exemplo 27.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \end{bmatrix}_{3 \times 3} .$$

Os elementos tais que $i = j$ formam a diagonal principal de A .

5. **Matriz Identidade:** tal que $m = n$, $a_{ij} = 1, \forall i = j$ e $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.

Exemplo 28.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} .$$

onde I representa a matriz identidade.

6. **Matriz Diagonal:** tal que $m = n$ e $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.

Exemplo 29.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{4 \times 4} .$$

7. **Matriz Triangular Superior:** tal que $m = n$ e $a_{ij} = 0, \forall i > j$.

Exemplo 30.

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 & 11 \\ 0 & -2 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{4 \times 4} .$$

8. **Matriz Triangular Inferior:** tal que $m = n$ e $a_{ij} = 0, \forall i < j$.

Exemplo 31.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 0 & 0 \\ 11 & 13 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{4 \times 4} .$$

9. **Matriz Transposta (A^T):** tal que $a_{ij}^T = a_{ji}, \forall i, j$.

Exemplo 32.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2} .$$

10. **Matriz Simétrica:** tal que $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$, isto é, $A = A^T$.

Exemplo 33.

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 & 11 \\ 7 & -2 & 6 & 13 \\ -5 & 6 & 0 & 0 \\ 11 & 13 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{4 \times 4} .$$

11. **Matriz Antissimétrica** tal que $m = n$ e $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i \neq j$, isto é, $A = -A^T$.

Exemplo 34.

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 & 11 \\ -7 & -2 & -6 & 13 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ -11 & -13 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{4 \times 4} .$$

12. **Matriz em blocos:** a matriz subdividida em matrizes menores a partir de linhas verticais e/ou horizontais.

Exemplo 35.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 13 & 17 & 19 & 23 & 29 \\ 31 & 37 & 41 & 43 & 47 \\ 43 & 47 & 53 & 59 & 61 \\ 67 & 71 & 73 & 79 & 83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & | & 7 & 11 \\ 13 & 17 & 19 & | & 23 & 29 \\ 31 & 37 & 41 & | & 43 & 47 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & | & \text{---} & \text{---} \\ 43 & 47 & 53 & | & 59 & 61 \\ 67 & 71 & 73 & | & 79 & 83 \end{bmatrix} .$$

Operações com Matrizes

1. **Igualdade:** Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ tal que $A = B$, então

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j.$$

2. **Adição:** Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que $C = A + B$, então

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j.$$

3. **Multiplicação por um escalar:** Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$ tal que $B = \lambda A$, então

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \forall i, j.$$

Proposição A.1.1. Sejam $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$ e as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$; então tem-se que:

- (i) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associatividade);
- (ii) $\alpha(\lambda A) = (\alpha\lambda)A$ (associatividade);
- (iii) $A + B = B + A$ (comutatividade);
- (iv) $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$ (comutatividade);
- (v) $(\alpha + \lambda)A = \alpha A + \lambda A$ (distributividade);
- (vi) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (distributividade);
- (vii) $A + 0 = A$ (elemento neutro);
- (viii) $A + (-A) = 0$ (inverso aditivo).

Note que 0 em *vii* e *viii* representa a matriz nula.

4. **Multiplicação de Matrizes:** Sejam as matrizes $A = (a_{ik})_{m \times n}$, $B = (b_{kj})_{n \times p}$ e $C = (c_{ij})_{m \times p}$ tal que $C = A \times B = AB$, então

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n (a_{ik} \times b_{kj}), \forall i, j.$$

Geralmente, $AB \neq BA$. Quando ocorre a igualdade, diz-se que A comuta com B .

Proposição A.1.2. *Sejam A , B e C matrizes com ordens adequadas para efetuar as respectivas operações. Então, tem-se que:*

- (i) $AI = IA = A$ (elemento neutro);
- (ii) $A(BC) = (AB)C$ (associatividade);
- (iii) $A(B + C) = AB + AC$ (distributividade à esquerda);
- (iv) $(A + B)C = AC + BC$ (distributividade à direita).

Definição 21 (Matriz Inversa). Dada uma matriz A quadrada de ordem n ; chama-se Inversa de A a matriz A^{-1} de ordem n tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Quando existe A^{-1} , diz-se que A é invertível.

Proposição A.1.3. *Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n . Com isso, tem-se que:*

- (i) *Se A é invertível, então sua inversa é única;*
- (ii) *Se A é invertível, então A^{-1} também é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$;*
- (iii) *Se A e B são invertíveis, então AB também é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Corolário A.1.4.

- (i) *Se A tem uma linha nula, então AB tem uma linha nula;*
- (ii) *Se B tem uma coluna nula, então AB tem uma coluna nula;*
- (iii) *Qualquer matriz quadrada com uma linha ou uma coluna nula não é invertível.*

Demonstração.

(i): Seja i a linha nula da matriz A ; então analisando somente o produto efetuado dela linha da matriz A pela matriz B , tem-se que, o produto da linha i será dado por:

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} \times b_{kj} = 0.$$

Logo, AB tem uma linha nula.

(ii): Seja j a coluna nula da matriz B ; então analisando somente o produto efetuado dela pela coluna da matriz B pela matriz A , tem-se que, o produto da coluna j será dado por:

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} \times b_{kj} = 0.$$

Logo, AB tem uma coluna nula.

(iii): Supondo A invertível, então $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$.

a) Supondo A com uma linha nula, então, por (i), $A.A^{-1}$ possui uma linha nula, o que é absurdo, afinal $A.A^{-1} = I$.

b) Supondo A com uma coluna nula, então, por (ii), $A^{-1}.A$ possui uma coluna nula, o que é absurdo, afinal $A^{-1}.A = I$.

Logo A não é invertível. ■

A.2 Sistemas de Equações Lineares

Definição 22 (Sistemas de Equações Lineares). Um sistema de m equações lineares e n incógnitas tem a seguinte representação algébrica:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde a_{ij} são os coeficientes, x_j as incógnitas e b_m os termos independentes.

Uma equação genérica i do sistema poderia ser representada da seguinte maneira:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \times x_j = b_i.$$

Para representar todas as equações, tem-se:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \times x_j = b_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m.$$

Além da notação de somatório, pode-se também utilizar a notação matricial, afinal, tem-se que:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_B.$$

Onde A é a matriz dos coeficientes, X a matriz das incógnitas e B a matriz dos termos independentes.

Seja

$$S = \{(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n; a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \dots + a_{in}c_n = b_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Esse subconjunto do \mathbb{R}^n é chamado Conjunto Solução do sistema (A.1).

Definição 23 (Transformações Lineares). Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$; para cada $1 \leq i \leq m$, denota-se por \mathcal{L}_i a i -ésima linha de A . Então as Transformações Elementares de linhas na matriz A são tais que:

- (i) $\mathcal{L}_i \leftrightarrow \mathcal{L}_j$ indica a permutação das linhas \mathcal{L}_i e \mathcal{L}_j ;
- (ii) $\mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{L}_i + c\mathcal{L}_j$ indica a substituição da linha \mathcal{L}_i pela adição desta por c vezes a linha \mathcal{L}_j ;
- (iii) $\mathcal{L}_i \rightarrow c\mathcal{L}_i$ indica o produto da linha \mathcal{L}_i por um número real c .

Exemplo 36.

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}_1 \leftrightarrow \mathcal{L}_3} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2} \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}_1 \rightarrow 3\mathcal{L}_1} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Notação: $e(A)$ indica uma transformação elementar na matriz A .

Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$; a matriz A é dita equivalente por linhas à matriz B se B pode ser obtida de A pela aplicação sucessiva de transformações elementares sobre linhas.

Observe que a noção de equivalência de matrizes por linhas corresponde à noção de equivalência de sistemas de equações lineares quando se efetuam as respectivas transformações sobre as equações. De fato, à sistemas equivalentes correspondem matrizes associadas equivalentes e vice-versa.

Proposição A.2.1. *Toda transformação elementar nas linhas de matrizes $e(A)$ é reversível, tal que existe uma transformação elementar e' , onde $e'(e(A)) = e(e'(A)) = A$ para toda matriz $A \in \mathcal{M}(m, n)$.*

Definição 24 (Forma Escalonada de uma matriz). Uma matriz $m \times n$ será dita na forma escalonada se for nula ou se:

- (i) o primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é 1;
- (ii) cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os outros elementos nulos;
- (iii) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;
- (iv) se $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_p$ são as linhas não nulas e se o primeiro elemento não nulo da linha \mathcal{L}_i ocorre na coluna k_i , então $k_1 < k_2 < \dots < k_p$.

Exemplo 37. Estão escalonadas as matrizes (a) e (b) a seguir por satisfazerem a definição e não estão escalonadas as matrizes (c) e (d) por não satisfazerem as condições (i) e (ii), respectivamente:

(a)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

(c)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

(d)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Corolário A.2.2. *Seja A uma matriz quadrada na forma escalonada; são equivalentes as seguintes informações:*

(i) *A matriz A não tem linhas nulas;*

(ii) *A é a matriz identidade;*

(iii) *A é invertível.*

Demonstração.

(i) \Rightarrow (ii) :

Como A é uma matriz quadrada, não tem linhas nulas e está na forma escalonada, então ela deve satisfazer as condições da definição de matriz escalonada, logo, para isso:

$$A = I_n.$$

(ii) \Rightarrow (iii) :

Seja $A = I_n$ e B uma matriz de mesma ordem tal que:

$$AB = BA = I_n,$$

então tem-se que:

$$I_n B = I_n \Rightarrow B = I_n,$$

e

$$I_n B = I_n \Rightarrow B = I_n.$$

Logo existe uma matriz B que satisfaz a primeira equação, logo A é invertível.

(iii) \Rightarrow (i) :

Pela contra-positiva do Corolário A.1.4, se uma matriz é invertível, então ela não possui uma linha nula.

■

Definição 25 (Matrizes Elementares). É uma matriz quadrada de ordem n obtida da matriz identidade I_n a partir da aplicação de uma transformação elementar.

Notação: $E = e(I_n)$ é a transformação elementar aplicada na matriz identidade I_n .

Exemplo 38.

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}_1 \leftrightarrow \mathcal{L}_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}_1 \rightarrow 3\mathcal{L}_1} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema A.2.3. *Seja e uma transformação elementar sobre $A \in \mathcal{M}(m, n)$ e $E = e(I_m)$, então*

$$e(A) = EA.$$

Demonstração.

Sem perda de generalidade, considere as transformações elementares e sob a matriz A a seguir:

(i) $\mathcal{L}_1 \leftrightarrow \mathcal{L}_2$:

Seja $A = (a_{ij})$; com isso, tem-se que $e(A) = A$, para todo j e $i \neq 1, 2$ e que:

$$e(A)_{2j} = a_{1j} \quad \text{e} \quad e(A)_{1j} = a_{2j}.$$

Como as linhas da matriz elementar $e(I_m)$ e da matriz identidade I_m coincidem, exceto a 1ª e a 2ª, tem-se que:

$$(e(I)A)_{ij} = e(A), \forall j, i \neq 1, 2.$$

Para a linha 1, tem-se que:

$$\begin{aligned} (e(I)A)_{1j} &= \sum_{k=1}^j e(I)_{1k} \times a_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^j e(I)_{2k} \times a_{kj} \\ &= a_{2j} \\ (e(I)A)_{1j} &= e(A)_{1j}. \end{aligned}$$

Analogamente, para a linha 2, tem-se que:

$$(e(I)A)_{2j} = e(a_{2j}).$$

(ii) $\mathcal{L}_1 \rightarrow c\mathcal{L}_1$:

Seja $A = (a_{ij})$; com isso, tem-se que $e(A) = A$, para todo j e $i \neq 1$ e que:

$$e(A)_{1j} = c \times a_{1j}.$$

Como as linhas da matriz elementar $e(I_m)$ e da matriz identidade I_m coincidem, exceto a 1ª, tem-se que:

$$(e(I)A)_{ij} = e(A), \forall j, i \neq 1.$$

Para a linha 1, tem-se que:

$$\begin{aligned} (e(I)A)_{1j} &= \sum_{k=1}^j e(I)_{1k} \times a_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^j c \times e(I)_{1k} \times a_{kj} \\ &= c \times \sum_{k=1}^j e(I)_{1k} \times a_{kj} \\ &= c \times A_{1j} \Rightarrow \\ (e(I)A)_{1j} &= e(A)_{1j}. \end{aligned}$$

(iii) $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2 + c\mathcal{L}_1$:

Seja $A = (a_{ij})$; com isso, tem-se que $e(A) = A$, para todo j e $i \neq 2$ e que:

$$e(A)_{2j} = a_{2j} + c \times a_{1j}.$$

Como as linhas da matriz elementar $e(I_m)$ e da matriz identidade I_m coincidem, exceto a 2ª, tem-se que:

$$(e(I)A)_{ij} = e(A), \forall j, i \neq 2.$$

Para a linha 2, tem-se que:

$$(e(I)A)_{2j} = \sum_{k=1}^j e(I)_{2k} \times a_{kj}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^j (e(I)_{2k} + c \times e(I)_{1k}) \times a_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^j e(I)_{2k} \times a_{kj} + c \times \sum_{k=1}^j e(I)_{1k} \times a_{kj} \\
&= a_{2j} + c \times a_{1j} \\
(e(I)A)_{2j} &= e(A)_{2j}.
\end{aligned}$$

■

Corolário A.2.4. *Sejam $A, B \in \mathcal{M}(m, n)$; então A é equivalente a B se, e somente se, existem matrizes elementares E_1, E_2, \dots, E_s de ordem m tais que:*

$$E_s \times \dots \times E_2 \times E_1 \times A = B.$$

Demonstração.

A é equivalente a B quando existem transformações elementares e_1, e_2, \dots, e_s tais que:

$$e_s(\dots(e_2(e_1(A)))) = B.$$

Pelo Teorema A.2.3, tem-se que:

$$E_s \times \dots \times E_2 \times E_1 \times A = B.$$

■

Corolário A.2.5. *Toda matriz elementar é invertível e sua inversa também é uma matriz elementar.*

Demonstração.

Seja E uma matriz elementar e e uma transformação elementar tal que $E = e(I)$; se e' é a transformação elementar inversa de e e $E' = e'(I)$, pelo Teorema A.2.3 tem-se que:

$$I = e'(e(I)) = e'(E) = e'(E)I = E'EI = e(e'(I)) = e(E') = e(I)E' = EE'$$

Logo E é invertível e $E^{-1} = E'$.

■

Teorema A.2.6. *Para uma matriz quadrada A de ordem n , são equivalentes as seguintes informações:*

- (i) A é invertível;
- (ii) Se B é na forma escalonada equivalente à matriz A , então $B = I_n$;
- (iii) A é uma matriz elementar ou um produto de matrizes elementares.

Demonstração.

(i) \Rightarrow (ii) :

Como a matriz B é equivalente a matriz A , existem matrizes elementares E_1, E_2, \dots, E_s tais que:

$$E_s \dots E_2 E_1 A = B.$$

Como, pelo Corolário A.2.5, E_i é invertível e A , por hipótese, também o é, então B é invertível e tem-se que $B = I_n$.

(ii) \Rightarrow (iii) :

Se $E_s \dots E_2 E_1 A = B$, então:

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_s^{-1} B,$$

onde $B = I_n$ e E_i^{-1} é uma matriz elementar pelo mesmo corolário.

(iii) \Rightarrow (i) :

Como A é um produto de matrizes elementares e toda matriz elementar é invertível, tem-se que, pela proposição A.1.3, o produto de matrizes invertíveis é uma matriz invertível.

■

Observe pelo Teorema A.2.6, que uma matriz é equivalente a uma única matriz na forma escalonada, a matriz identidade, mostrando-se a unicidade da forma escalonada.

Teorema A.2.7. *Seja A uma matriz invertível e e_1, e_2, \dots, e_s uma sequência de transformações elementares tais que $e_s(\dots(e_2(e_1(A)))) = I$; tem -que essa mesma sequência de transformações elementares aplicadas a I produz a matriz inversa A^{-1} , isto é:*

$$e_s(\dots(e_2(e_1(I)))) = A^{-1}.$$

Demonstração.

Seja E_i , para $1 \leq i \leq s$, uma matriz elementar correspondente a transformação elementar e_i sobre a matriz identidade I ; então:

$$\begin{aligned} E_s \dots E_2 E_1 A &= I \\ E_s \dots E_2 E_1 A A^{-1} &= I A^{-1} \\ E_s \dots E_2 E_1 I &= A^{-1}. \end{aligned}$$

■

Definição 26 (Classificação de Sistemas Lineares). Quanto as suas soluções, um sistema pode se classificar em:

- (i) **Possível e Determinado:** com uma única solução;
- (ii) **Possível e Indeterminado:** com infinitas soluções;
- (iii) **Impossível:** sem solução.

Para resolver um sistema linear, utilizam-se os conhecimentos desenvolvidos no estudo de transformações elementares.

Diz-se que dois sistemas lineares são equivalentes se é possível obter um sistema do outro a partir de uma sequência finita de transformações elementares. Com isso, pode-se afirmar que sistemas de equações lineares equivalentes possuem o mesmo conjunto solução.

Definição 27 (Sistemas Lineares Homogêneos). São sistemas de equações lineares tais que os termos independentes são nulos, isto é:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Note que:

- (i) O conjunto $S = (0, 0, \dots, 0)$ pertence ao conjunto de soluções do sistema linear;
- (ii) Se $u = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ e $v = (c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$ são soluções do sistema linear e se $a \in \mathbb{R}$, então

$$u + v = (c_1 + c'_1, c_2 + c'_2, \dots, c_n + c'_n)$$

e

$$au = (ac_1, ac_2, \dots, ac_n)$$

também são soluções do sistema linear.

O que há de essencial em um sistema de equações lineares são os coeficientes e os termos independentes. A partir disto, o sistema (A.1) pode ser organizado como linhas de uma matriz ampliada, isto é:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Para o sistema linear homogêneo (A.2), pode-se excluir a coluna de zero correspondente aos termos independentes, isto é:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 39. Classifique os sistemas lineares abaixo e encontre suas soluções, se possível.

a)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0. \end{cases}$$

solução:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\mathcal{L}_2 \leftrightarrow \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{L}_1} \\ \mathcal{L}_3 \leftrightarrow \mathcal{L}_3 - 3\mathcal{L}_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}\mathcal{L}_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & -9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}_3 \leftrightarrow \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}_3 \leftrightarrow -6\mathcal{L}_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\mathcal{L}_1 \leftrightarrow \mathcal{L}_1 - 2\mathcal{L}_3} \\ \mathcal{L}_2 \leftrightarrow \mathcal{L}_2 + \frac{7}{2}\mathcal{L}_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}_1 \leftrightarrow \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1, y = 2, z = 3\}.$$

Logo o sistema é S.P.D.

b)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4. \end{cases}$$

solução:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ \mathcal{L}_2 \leftrightarrow \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_3 \leftrightarrow \mathcal{L}_3 - 3\mathcal{L}_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \mathcal{L}_2 \leftrightarrow \mathcal{L}_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Logo o sistema é S.I.

c)

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3. \end{cases}$$

solução:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ \mathcal{L}_2 \leftrightarrow \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{L}_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \mathcal{L}_2 \leftrightarrow \frac{1}{3}\mathcal{L}_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{-5}{3} \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ \mathcal{L}_1 \leftrightarrow \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{array} \right];$$

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -\frac{7}{3}\alpha + \frac{17}{3}, y = \frac{4}{3}\alpha - \frac{5}{3}, z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Logo o sistema é S.P.I.

Lema A.2.8. *Seja uma matriz $A = [A'|A'']$ na forma escalonada, onde A' é uma matriz $m \times (n-1)$ e A'' é uma matriz $m \times 1$; Sejam k_1, k_2, \dots, k_s as posições das colunas de A que ocorrem os primeiros elementos não nulos das linhas não nulas $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_s$ respectivamente. O sistema $A'X = A''$ admite solução se, e somente se, $k_s \neq n$.*

Demonstração.

Observe que, como A está na forma escalonada, a matriz A' também está.

1ª parte:

Se $k_p = n$, então a p -ésima linha da matriz A é $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)$. Assim, o sistema $A'X = A''$ tem uma equação na forma $0x_1 + \dots + 0x_n = 1$, que não tem solução.

2ª parte:

Se $k_p \neq n$, tem-se que $p \leq k_p \leq n$. Assim, se os a_i são as entradas de A'' , tem-se que $a_{p+1} = \dots = a_m = 0$. Denotando-se por A_i a i -ésima coluna da matriz A , tem-se que:

$$A'_{k_1} = A_{k_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, A'_{k_2} = A_{k_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, A'_{k_p} = A_{k_p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde cada matriz acima tem as últimas $m - r$ entradas nulas. O sistema $A'X = A''$ se escreve, em blocos, da seguinte forma:

$$a = [A_1|A_2|\dots|A_{n-1}]X = A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_{n-1}x_{n-1}.$$

Para achar a solução do sistema basta tomar $x_{k_i} = a_i$ e $x_j = 0$, se $j \neq k_i$, para todo $i = 1, \dots, p$. ■

Definição 28 (posto). O posto p de uma matriz equivale ao número de linhas não nulas de sua forma escalonada.

Exemplo 40.

a) Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que sua forma escalonada é a matriz

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo a matriz A tem posto 3.

b) Seja a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que sua forma escalonada é a matriz

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo a matriz B tem posto 2.

c) Seja a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que sua forma escalonada é a matriz

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

Logo a matriz C tem posto 2.

Corolário A.2.9. *Uma matriz quadrada de ordem n é invertível se, e somente se, ela tem posto n .*

Demonstração.

Se a matriz é invertível, então pelo Teorema A.2.6, sua forma escalonada é I_n , logo tem posto n .

Reciprocamente, seja dada uma matriz quadrada de ordem n e seja \tilde{A} sua forma escalonada; se A tem posto n , então \tilde{A} não tem linhas nulas, logo, pelo Corolário A.2.2, $\tilde{A} = I_n$.

Pelo Corolário A.2.4, tem-se que:

$$A = E_s \dots E_1 \tilde{A} = E_s \dots E_1,$$

onde E_1, \dots, E_s são matrizes elementares, então, pelo Corolário A.2.5, são invertíveis e, conseqüentemente, pela Proposição A.1.3, A é invertível por ser um produto de matrizes invertíveis. ■

Teorema A.2.10 (teorema do posto). *Seja um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas $AX = B$; sejam p_{AB} o posto da matriz ampliada do sistema e p_A o posto da matriz dos coeficientes do sistema, então o sistema é:*

- (i) *O sistema é possível se, e somente se, $p_{AB} = p_A$;*
- (ii) *S.P.D. $\Leftrightarrow p_{AB} = p_A = n$;*
- (iii) *S.P.I. $\Leftrightarrow p_{AB} = p_A < n$; neste caso, o sistema possui $n - p_A$ incógnitas livres, isto é, incógnitas que podem assumir qualquer valor real.*

Demonstração.

Seja $AX = B$ um sistema linear de n incógnitas, $C = [A|B]$ a matriz ampliada do sistema e $\tilde{C} = [\tilde{A}|\tilde{B}]$ a forma escalonada de C ; denotando-se $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ e $\tilde{B} = [\tilde{b}_i]$, tem-se, claramente que \tilde{A} é a forma escalonada de A e como \tilde{A} é um bloco de \tilde{C} , tem-se que:

$$p_A = p_{\tilde{A}} < p_{\tilde{C}} = p_{AB} \quad \text{ou} \quad p_A = p_{\tilde{A}} = p_{\tilde{C}} = p_{AB}.$$

1º caso:

Se $p_A < p_{AB}$, então \tilde{C} tem uma linha do tipo $(0 \dots 0 \ 0 \ 1)$.

Portanto, o sistema $\tilde{A}X = \tilde{B}$ é impossível e, então, $AX = B$ é impossível.

2º caso:

Se $p_A = p_{AB}$, então \tilde{C} e \tilde{A} têm o mesmo número de linhas não nulas.

(i) $p_{AB} = p_A = n$:

Sendo \tilde{A} uma matriz com n colunas, com $p_{\tilde{A}} = p_A = n$, e estando \tilde{A} na forma escalonada, ela é uma matriz em blocos da forma

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como $p_{AB} = p_A = n$, segue que \tilde{B} é tal que $b_{n+1} = \dots = b_m = 0$.

Portanto, $\tilde{A}X = \tilde{B}$ é possível e determinado com a única solução $x_1 = \tilde{b}_1, \dots, x_n = \tilde{b}_n$. Consequentemente, $AX = B$ também é possível e determinado com a mesma solução.

(ii) $p_{AB} = p_A < n$:

Suponhamos $p = p_A = p_{AB}$. Neste caso, \tilde{A} , assim como \tilde{C} , tem p linhas não nulas $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_p$, tais que o primeiro elemento não nulo de \mathcal{L}_i está na coluna k_i e $k_1 < \dots < k_p$. Al'ém disso, tem-se $\tilde{b}_{p+1} = \dots = \tilde{b}_m = 0$.

Tem-se então que a equação $\tilde{A}X = \tilde{B}$ juntamente com o fato da matriz \tilde{A} estar na forma escalonada, nos fornece um sistema de equações que nos mostra a possibilidade da escolha arbitrária de valores para as incógnitas no conjunto

$$\{x_1, \dots, x_n\} - \{x_{k_1}, \dots, x_{k_p}\},$$

e com esses determinar valores para x_{k_1}, \dots, x_{k_p} .

Como o conjunto acima tem $n - p$ elementos, o sistema $\tilde{A}X = \tilde{B}$ tem $n - p$ incógnitas livres e, conseqüentemente, o mesmo ocorre para o sistema $AX = B$.

■

Exemplo 41. Retomando os sistemas do Exemplo 16, tem-se que:

a) A matriz das incógnitas e a matriz ampliada da matriz escalonada são, respectivamente:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \widetilde{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo tem-se que:

$$p_A = p_{AB} = n = 3.$$

Portanto o sistema é S.P.D.

b) A matriz das incógnitas e a matriz ampliada da matriz escalonada são, respectivamente:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \widetilde{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo tem-se que:

$$1 = p_A < p_{AB} = 2.$$

Portanto o sistema é S.I.

c) A matriz das incógnitas e a matriz ampliada da matriz escalonada são, respectivamente:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \widetilde{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

Logo tem-se que:

$$2 = p_A = p_{AB} < n = 3.$$

Portanto o sistema é S.P.I.

Corolário A.2.11. *Seja um sistema de equações lineares homogêneo com m equações e n incógnitas $AX = 0$, então:*

- (i) *Se A tem posto n , então o sistema possui apenas a solução nula, isto é, quando $m = n$ e A é invertível;*
- (ii) *Se A tem posto menor que n , então o sistema é S.P.I., isto é, quando $m < n$.*

A.3 Espaço Vetorial

Definição 29. Um conjunto V será dito um Espaço Vetorial se for munido das operações de um corpo \mathcal{K} verificando as condições a seguir para a adoção e multiplicação por escalar:

- A1 $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$ (associatividade);
- A2 $u + v = v + u, \forall u, v \in V$ (comutatividade);
- A3 $v + 0 = v, \forall v \in V$ (elemento neutro);
- A4 $v + (-v) = 0, \forall v \in V$ (inverso aditivo);
- ME1 $a(u + v) = au + av, \forall u, v \in V, a \in \mathbb{R}$ (distributividade);
- ME2 $(a + b)v = av + bv, \forall v \in V, a, b \in \mathbb{R}$ (distributividade);
- ME3 $(ab)v = a(bv), \forall v \in V, a, b \in \mathbb{R}$ (associatividade);
- ME4 $1v = v, \forall v \in V$ (elemento neutro).

Notação

- (i) Os elementos de V serão chamados de vetores e os de \mathcal{K} escalares;
- (ii) 0 de V é chamado vetor nulo, isto é:

$$0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n;$$

- (iii) $-v$ é chamado de vetor oposto de v , isto é:

$$v = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow -v = (-x_1, \dots, -x_n).$$

Exemplo 42.

- a) Adição e produto por um escalar de matrizes.
- b) Conjunto das funções de um conjunto não vazio A em \mathbb{R} .

Definição 30 (Subespaço Vetorial). Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V ; diz-se que W é um subespaço vetorial de V , ou subespaço de V , com as operações de adição em V e de multiplicação de vetores de V por escalares.

Proposição A.3.1. *Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V ; então W é um subespaço de V se, e somente se:*

- (i) se $u, v \in W$, então $u + v \in W$;
- (ii) se $au \in W$, com $u \in W, a \in \mathbb{R}$, então $au \in W$.

Demonstração.

Se W é um subespaço de V , então claramente as condições (i) e (ii) são satisfeitas.

Reciprocamente, suponha que W possua as propriedades (i) e (ii). Para mostrar que W é um subespaço de V , precisa-se somente verificar que os elementos de W possuem as propriedades A3 e A4.

Tomando-se um elemento qualquer u de W , afinal $W \neq \emptyset$. Pela condição (ii), $au \in W$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Tomando $a = 0$, segue-se que $0u = 0 \in W$ e, tomando, $a = -1$, segue-se que $(-1)u = -u \in W$. ■

Corolário A.3.2. *Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V ; tem-se que W é um subespaço de V se, e somente se, $u + av \in W, \forall a \in \mathbb{R}$ e $u, v \in W$.*

Exemplo 43.

- a) Seja V um espaço vetorial; o conjunto 0 é subespaço de V , também chamado de espaço vetorial nulo, e todo o espaço V é subespaço de V ;
- b) o plano yOz dado por $W_1 = \{(0, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\}$ e o eixo y dado por $W_2 = \{(0, y, 0) | y \in \mathbb{R}\}$ são subespaços de \mathbb{R}^3 ;

- c) O conjunto solução de um sistema de equações lineares homogêneas em n incógnitas forma um subespaço de \mathbb{R}^n ;
- d) No espaço vetorial das matrizes $\mathcal{M}(n, n)$, são subespaços os conjuntos das matrizes triangulares superiores, inferiores e diagonais.

Proposição A.3.3. *A interseção de dois subespaços de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V .*

Definição 31. Dados U e W subespaços de um espaço vetorial V ; define-se a soma de U e W , denotada por $U + W$, como o conjunto:

$$U + W = \{u + w; u \in U, w \in W\}.$$

Definição 32. Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V ; o espaço vetorial V é dito a soma direta de U e W e representado por $V = U \oplus W$, se $V = U + W$ e $U \cap W = 0$.

Teorema A.3.4. *Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V ; tem-se que $V = U \oplus W$ se, e somente se, todo vetor $v \in V$ se escreve de modo único como $v = u + w$, $u \in U$ e $w \in W$.*

Demonstração.

Suponha que $V = U \oplus W$ e toma-se $v \in V$; como $V = U + W$, pela definição da soma de subespaços, existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que

$$v = u + w.$$

Note que a decomposição acima é única no sentido de que se $v = u' + w'$, com $u' \in U$ e $w' \in W$, então $u = u'$ e $w = w'$, afinal, como $v = u + w$ e $v = u' + w'$, então:

$$u - u' = -(w - w').$$

Como o lado esquerdo pertence a U e o lado direito a W , da igualdade anterior decorre que

$$u - u', w - w' \in U \cap W.$$

como $U \cap W = 0$, segue então que $u = u'$ e $w = w'$.

Reciprocamente, suponha que todo vetor de V se escreve de modo único como a soma de um vetor de U e de um vetor de W ; então $V = U + W$.

Se $U \cap W \neq 0$, existiria um vetor não nulo v em $U \cap W$. como $v \in W$ e W é um subespaço, então $-v \in W$ também. Consequentemente, ter-se-ia $0 = 0 + 0$, com $0 \in U$, $0 \in W$ e $0 = v + (-v)$, com $v \in U$ e $-v \in W$.

Como $v \neq 0$, ter-se-iam duas escritas distintas para um mesmo vetor de V . Como isto não ocorre, tem-se que $U \cap W = 0$. ■

Definição 33 (Combinação Linear). Seja V um espaço vetorial e sejam $v_1, \dots, v_r \in V$; diz-se que $v \in V$ é uma combinação linear de v_1, \dots, v_r se existem $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$, tais que:

$$v = \sum_{i=1}^r a_i v_i = a_1 v_1 + \dots + a_r v_r.$$

Exemplo 44. Seja o vetor $(1, 6, 0) \in \mathbb{R}^3$; note que ele é uma combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 2, 0)$ e $v_2 = (-1, 2, 0)$, afinal tem-se que:

$$\begin{aligned}(1, 6, 0) &= 2(1, 2, 0) + 1(-1, 2, 0) \\ v &= 2v_1 + 1v_2.\end{aligned}$$

Definição 34 (vetores linearmente independentes). Sejam v_1, \dots, v_r vetores em um espaço vetorial V ; diz-se que v_1, \dots, v_r são Linearmente Independentes ou L.I. se a equação:

$$a_1v_1 + \dots + a_rv_r = 0$$

é satisfeita somente quando $a_1 = \dots = a_r = 0$.

Definição 35 (vetores linearmente dependentes). Sejam v_1, \dots, v_r vetores em um espaço vetorial V ; diz-se que v_1, \dots, v_r são Linearmente Dependentes L.D. se a equação:

$$a_1v_1 + \dots + a_rv_r = 0$$

é satisfeita com algum $a_i \neq 0$.

Exemplo 45.

a) Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são L.I., pois tem-se que:

$$\begin{aligned}a_1e_1 + a_2e_2 &= 0 \\ a_1(1, 0) + a_2(0, 1) &= (0, 0) \\ a_1 &= a_2 = 0.\end{aligned}$$

b) Os vetores $v_1 = (1, -3, 4)$, $v_2 = (3, 2, 1)$ e $v_3 = (1, -1, 2)$ são L.D., pois tem-se que:

$$\begin{aligned}a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 &= 0 \\ a_1(1, -3, 4) + a_2(3, 2, 1) + a_3(1, -1, 2) &= (0, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 + a_3 = 0 \\ -3a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ 4a_1 + a_2 + 2a_3 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear homogêneo por escalonamento, tem-se que:

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 + a_3 = 0 \\ -3a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ 4a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O qual não é uma matriz invertível, logo o sistema é S.P.I.

Proposição A.3.5. *Sejam v_1, \dots, v_r vetores em \mathbb{R}^n , onde, para cada i , com $1 \leq i \leq n$, $v_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ e $A = (a_{ij})$; tem-se que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é L.I. se, e somente se, A é invertível.*

Teorema A.3.6. *Sejam v_1, \dots, v_r vetores em \mathbb{R}^n ; se $r > n$, então os vetores v_1, \dots, v_r são L.D..*

Demonstração.

Suponha que, para cada $1 \leq i \leq r$, $v_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ e considere a equação:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r = 0.$$

Esta equação é equivalente ao sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \dots + a_{r1}k_r = 0 \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{r2}k_r = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \dots + a_{rn}k_r = 0. \end{cases}$$

O sistema obtido possui n equações nas r incógnitas k_1, k_2, \dots, k_r . Como $r > n$, segue que o sistema tem soluções não triviais, logo v_1, v_2, \dots, v_r são L.D.. ■

Teorema A.3.7. *Um conjunto finito α com dois ou mais vetores de um espaço vetorial V é LD se, e somente se, pelo menos um dos vetores de α pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores.*

Demonstração.

Seja $\alpha = \{v_1, \dots, v_r\}$ um subconjunto do espaço de V ; se α é L.D., então existem números reais a_1, \dots, a_r , não todos nulos, tais que $a_1 v_1 + \dots + a_r v_r = 0$. Suponha que $a_j \neq 0$. Então:

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j} v_1 - \dots - \frac{a_{j-1}}{a_j} v_{j-1} - \frac{a_{j+1}}{a_j} v_{j+1} - \dots - \frac{a_r}{a_j} v_r,$$

mostrando que v_j é uma combinação linear dos demais vetores de α .

Reciprocamente, suponha que α tem a propriedade de que um de seus vetores, por exemplo v_i , pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores de α , isto é, que existem números reais $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_r$ tais que

$$v_i = b_1 v_1 + \dots + b_{i-1} v_{i-1} + b_{i+1} v_{i+1} + \dots + b_r v_r.$$

A equação anterior equivale a

$$b_1 v_1 + \dots + b_{i-1} v_{i-1} - 1 v_i + b_{i+1} v_{i+1} + \dots + b_r v_r = 0.$$

Logo α é L.D.. ■

Definição 36 (Base de um espaço vetorial:). Seja $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto ordenado de vetores de um espaço vetorial V ; diz-se que α é uma base de V se:

(i) α é L.I.;

(ii) Os vetores de V podem ser escritos como combinação linear dos vetores de α , isto é, α gera o espaço vetorial V .

Exemplo 46.

a) Como o conjunto $\alpha = \{e_1, e_2\}$ é L.I. e gera \mathbb{R}^2 afinal

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x, y) = xe_1 + ye_2,$$

logo α , com a ordenação dada pelos índices, é uma base de \mathbb{R}^2 chamada de base canônica de \mathbb{R}^2 .

b) Como o conjunto $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ é L.I. e gera \mathbb{R}^3 afinal

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

logo α , com a ordenação dada pelos índices, é uma base de \mathbb{R}^3 chamada de base canônica de \mathbb{R}^3 .

c) Define-se o Símbolo de Kronecker, δ_{ij} , para $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Seja $n \in \mathbb{N} - 0$. Para cada $1 \leq i \leq n$, denotando-se por $e_i \in \mathcal{R}^n$ o vetor

$$(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{ij}, \dots, \delta_{in}) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

onde a componente 1 se encontra na i -ésima posição. O conjunto $\alpha = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é L.I. e gera \mathbb{R}^n , com a ordenação dos índices, equivalendo à base canônica de \mathbb{R}^n .

d) Sejam

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O conjunto $\alpha = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ é uma base de $\mathcal{M}(2, 2)$, afinal os vetores de α são L.I. e α gera $\mathcal{M}(2, 2)$, afinal

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ M &= aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4. \end{aligned}$$

Com isso, tem-se que:

$$a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3 + a_4 M_4 = 0$$

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0.$$

Teorema A.3.8. *Seja $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto ordenado de vetores de um espaço vetorial V ; as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) α é uma base de V ;
- (ii) cada vetor v em V pode ser escrito de modo único como combinação linear dos vetores de α .

Demonstração.

(i) \Rightarrow (ii):

Suponha que α é uma base de V e tome $v \in V$; como α gera V , existem números reais a_1, \dots, a_n tais que

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n. \quad (\text{A.3})$$

Para mostrar que a combinação linear em (A.4) é única, suponha que existem $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n. \quad (\text{A.4})$$

De (A.4) e (A.5) segue que

$$(a_1 - b_1)v_1 + \dots + (a_n - b_n)v_n = 0. \quad (\text{A.5})$$

Como α é L.I., a equação (A.6) é satisfeita somente se $a_j - b_j = 0$ para todo $1 \leq j \leq n$, isto é, se $b_j = a_j$, para todo $1 \leq j \leq n$. Como $v \in V$ foi tomado de modo arbitrário, (ii) é satisfeito.

(ii) \Rightarrow (i):

Suponha que α tem a propriedade de que cada vetor $v \in V$ pode ser escrito de modo único como combinação linear dos elementos de α . Pela definição de espaço gerado, α gera V . Para mostrar que α é L.I., considere a equação

$$k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = 0.$$

Como $0 = 0v_1 + \dots + 0v_n$ e esta escrita é única, segue que $k_1 = \dots = k_n = 0$. ■

Os números reais a_1, \dots, a_n que aparecem na demonstração são chamados coordenadas de v na base α .

Notação:

$$[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

onde $[v]_{\alpha}$ é chamada de matriz das coordenadas de v na base α .

Exemplo 47.

a) Seja α a base canônica de \mathbb{R}^3 e $v = (1, 2, 1)$; então

$$[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Seja $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$, que é uma base de \mathbb{R}^3 , e $v = (1, 2, 1)$; então

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

afinal

$$(1, 2, 1) = 0(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 1(1, 1, 1).$$

Teorema A.3.9. *Seja v_1, \dots, v_n vetores não nulos que geram um espaço vetorial V ; então, dentre esses vetores, pode-se extrair uma base de V .*

Teorema A.3.10. *Seja V um espaço vetorial gerado por um conjunto finito de vetores v_1, \dots, v_n ; então qualquer conjunto com mais de n vetores de V é L.D., conseqüentemente, qualquer conjunto de vetores de V L.I. tem, no máximo, n vetores.*

Teorema A.3.11. *Sejam $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, \dots, w_n\}$ duas bases de um espaço vetorial V ; então $r = s$ e, além disso, se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são as matrizes com coeficientes reais tais que:*

$$v_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} w_j \quad e \quad w_j = \sum_{k=1}^r b_{jk} v_k,$$

então $AB = I$.

Demonstração.

Como α gera V e β é um conjunto L.I., segue que $s \leq r$. Por outro lado, como β gera V e α é um conjunto L.I., segue que $r \leq s$. Portanto, $r = s$.

Sejam A e B tais que

$$v_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} w_j \quad e \quad w_j = \sum_{k=1}^r a_{jk} v_k.$$

Logo

$$\begin{aligned}v_i &= \sum_{j=1}^r a_{ij} w_j = \sum_{j=1}^r a_{ij} \left(\sum_{k=1}^r a_{jk} v_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^r \left(\sum_{j=1}^r a_{ij} b_{jk} \right) v_k.\end{aligned}$$

Como os v_i 's, para $i = 1, \dots, r$, formam um conjunto L.I., isto acarreta que

$$\sum_{j=1}^r a_{ij} b_{jk} = \delta_{ik},$$

logo $AB = I$. ■

Definição 37 (Dimensão de um espaço vetorial:). O número de elementos de uma base de um espaço vetorial V de dimensão finita é chamado de dimensão de V .

Notação:

- (i) $\dim V$: dimensão de V ;
- (ii) se V é o espaço vetorial nulo, então $\dim V = 0$.

Exemplo 48.

- a) $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, pois a base canônica de \mathbb{R}^2 tem n elementos. \mathbb{R}^2 é usualmente chamado de espaço bidimensional;
- b) $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, pois a base canônica de \mathbb{R}^3 tem n elementos. \mathbb{R}^3 é usualmente chamado de espaço tridimensional;
- c) $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, pois a base canônica de \mathbb{R}^n tem n elementos;
- d) $\dim(\mathcal{M}(m, n)) = m \times n$;
- e) $\dim(P_n) = n + 1$, onde P_n é o espaço vetorial dos polinômios da forma $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, sabendo-se que a base canônica deste é o conjunto $\alpha = \{1, x, \dots, x^n\}$, a qual possui n vetores.

Teorema A.3.12. *Qualquer subconjunto L.I. de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V .*

Teorema A.3.13. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita; se W é um subespaço de V , então W também tem dimensão finita e*

$$\dim W \leq \dim V,$$

além disso, se $\dim W = \dim V$, então $W = V$.

Referências Bibliográficas

- [1] Anton, Howard; Chris Rorres; **Álgebra Linear com Aplicações**: Porto Alegre, Bookman, 2001.
- [2] Boldrini, José Luís; **Álgebra Linear**: São Paulo, Harper & Row do Brasil, 1980.
- [3] Hefez, Abramo; Fernandez, Cecília S.; **Introdução à Álgebra Linear**: Rio de Janeiro, SBM, 2012.
- [4] Elseit, H.A.; Sandblom, C.-L.; **Linear Programming and its applications**: Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [5] Webster, Roger; **Convexity**: Oxford University Press, 1994.
- [6] Bársov, A. S.; **Qué es la programación Lineal**: Editorial MIR, Traducción al español: 1977.
- [7] Solodóvnikov, A. S.; **Sistemas de Desigualdades Lineales**: Editorial MIR, Traducción al español: 1980.
- [8] Barbosa, Ruy Madsen; **Programação Linear**: São Paulo, Nobel, 1973.
- [9] Puccini, Abelardo de Lima; **Introdução à Programação Linear**: Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1978.
- [10] Beckman, F. S., **The Solution of Linear Equations by the Conjugate Gradient Method**, in *Mathematical Methods for Digital Computers 1*, A. Ralston and H. S. Wilf (editors), John Wiley, New York, 1960.
- [11] Charnes, A., **Optimality and Degeneracy in Linear Programming**, *Econometrica* 20, 1952.
- [12] Dantzig, G. B., **Activity Analysis of Production and Allocation**, T. C. Koopmans, John Wiley, New York, 1951.
- [13] Ford, L. K. Jr., and Fulkerson, D. K., **Flows in Networks**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.
- [14] Hitchcock, F. L., **The Distribution of a product from Several Sources to Numerous Localities**, *J. Math. Phys.* 20, 1941.
- [15] Karmarkar, N. K., **A New Polynomial-time Algorithm for Linear Programming**, *Combinatorica* 4, 1984.

- [16] Koopmans, T. C., **Optimum Utilization of the Transportation System**, Proceedings of the International Statistical Conference, Washington, D. C., 1947.
- [17] Lemke, C. E., **The Dual Method of Solving the Linear Programming Problem**, Naval Research Logistics Quarterly 1, 1, 1954.
- [18] Kantorovich, L.V. **The best use of economic resources**, Moscow, 1959.
- [19] Leontief, Wassily W., **Input-Output Economics**, 2nd ed., New York, Oxford University Press, 1986.
- [20] Christodoulos A. Floudas and Panos M. Pardalos, **Encyclopedia of Optimization**, second edition, Springer, 2009.
- [21] Manne, A. S., **Notes on Parametric Linear Programming**, Rand Paper p. 468, The Rand Corporation, Santa Monica, CA, 1953.