



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -  
PROFMAT

DENIS PEREIRA DIAS

**TEORIA DE MARKOWITZ E PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA  
FORMAÇÃO DE UMA CARTEIRA ÓTIMA DE INVESTIMENTOS**

Sorocaba

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -  
PROFMAT

**TEORIA DE MARKOWITZ E PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA  
FORMAÇÃO DE UMA CARTEIRA ÓTIMA DE INVESTIMENTOS**

**Denis Pereira Dias**

**Orientadora: Profa. Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho**

Sorocaba

2018

# TEORIA DE MARKOWITZ E PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA FORMAÇÃO DE UMA CARTEIRA ÓTIMA DE INVESTIMENTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT -do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal de São Carlos, como exigência parcial para a obtenção do título de mestre sob orientação da Professora Doutora Sílvia Maria Simões de Carvalho.

Sorocaba

2018

Pereira Dias, Denis

Teoria de Markowitz e Programação Linear para Formação de uma  
Carteira Ótima de Investimentos / Denis Pereira Dias. -- 2018.  
97 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus  
Sorocaba, Sorocaba

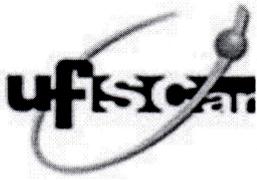
Orientador: Profa. Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho  
Banca examinadora: Prof. Dr. Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira; Prof. Dr.  
Antônio Luís Venezuela  
Bibliografia

1. Teoria de Markowitz. 2. Programação Linear. 3. Carteira Ótima de  
Investimentos. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III.  
Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

Bibliotecário(a) Responsável: Maria Aparecida de Lourdes Mariano – CRB/8 6979



# UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

---

## Folha de Aprovação

---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Denis Pereira Dias, realizada em 14/11/2018:

---

Profa. Dra. Sílvia Maria Simões de Carvalho  
UFSCar

---

Prof. Dr. Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira  
UNICAMP

---

Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela  
UFSCar

*Dedico este trabalho aos meus pais, Luiz e Izeli. Aos meus irmãos, Fernando, Bruno e Daliane. Aos meus queridos sobrinhos, Luiz Eduardo, Samuel Vitória e Lívia. À minha esposa, Claudiane, pela compreensão, incentivo, e por sempre me apoiar ao longo desta caminhada.*

## AGRADECIMENTOS

À Deus, fonte inesgotável de amor, sabedoria, conhecimento e inspiração. À Virgem Maria por sua incansável interseção. À Jesus pelas graças alcançadas.

Aos meus pais, Luiz e Izeli, pelo incentivo e orações. A caminhada não foi fácil, mas consegui!

Aos amigos do curso de Pedagogia, em especial à amiga Tatiana Castro de Souza, pelo apoio no decorrer do curso. Mesmo que de forma indireta, vocês tornaram a caminhada agradável e leve.

Às amigas Simone, Rosemeire e Lucinalva, que nos momentos de maior tensão me estenderam a mão e me auxiliaram quando eu mais precisava. Louvo a Deus por ter conhecido pessoas tão especiais e amigas como vocês!

Aos amigos Fábio Takeshi Iriye e Mariana Moretto Pissini pela disponibilidade e auxílio na edição desta dissertação. Não só consegui concluir o curso como também aprendi a utilizar o LaTeX. Sem a ajuda de vocês não teria conseguido.

Aos amigos e colegas de curso PROFMAT/UFSCar, pela parceria, companheirismo, dedicação, carinho e comprometimento ao longo do curso. Vocês foram essenciais para a conclusão deste curso.

Aos professores da UFSCar, pela dedicação e comprometimento. Serei eternamente grato pelos momentos de aprendizagens e por terem me proporcionado novas experiências no mundo acadêmico.

Aos professores Dr. Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira e Dr. Antônio Luís Venezuela por aceitarem fazer parte de minha banca examinadora e pelas ricas contribuições dadas.

À minha orientadora Profa. Dra. Silvia Maria Simões de Carvalho pela disponibilidade e ensinamentos ao longo deste trabalho. Agradeço a Deus por ter conhecido uma pessoa tão generosa e atenciosa como a senhora. *“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes”* (Isaac Newton).

À a minha amada esposa Claudiane, pela compreensão, incentivo, companheirismo, dedicação e auxílio em todos os momentos. Te amo hoje e sempre!

À Universidade Federal de São Carlos por ter me possibilitado a realização deste sonho que foi concluir o curso de mestrado.

Ao PROFMAT por me possibilitar ser um profissional melhor no exercício de minha profissão como professor de matemática.

À CAPES pelo incentivo e apoio financeiro.

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram com a realização deste trabalho. Como dizia o poeta: *“Sonho que se sonha só, é só um sonho que se sonha só. Mas sonho que se sonha junto é realidade”*. Meu sonho se tornou realidade... Muito obrigado!

*"Até aqui nos ajudou o Senhor."*

1 Samuel 7:12

## RESUMO

O estudo apresentado nesta dissertação tem por objetivo a seleção de uma carteira ótima de investimentos. Para tanto, utilizamo-nos da literatura que versa sobre a Programação Linear, atrelada a Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz para modelar e resolver dois problemas de programação linear que resultaram na composição de duas carteiras, considerando os perfis de investidores conservador e menos conservador. Para a modelagem dos problemas foi realizada uma análise técnica acerca dos ativos que foram selecionados previamente para a composição da carteira. A seleção dos ativos levou em consideração alguns parâmetros estatísticos, tais como média aritmética ponderada e coeficiente de correlação. Considerando que as previsões dos especialistas apontaram que o ano de 2018 seria favorável aos investimentos na Bolsa de Valores, os resultados obtidos neste trabalho concordaram com tal afirmação. Contudo, por tratar-se de uma análise técnica, concluí-se que os resultados apresentados não garante uma eficiência prática dos mesmos, no entanto, servem para orientar as atividades de investimentos.

**Palavras-chaves:** Teoria de Markowitz. Programação Linear. Carteira Ótima de Investimentos.

## ABSTRACT

The study presented in this dissertation aims to select an optimal portfolio of investments. To do so, we use the literature that deals with linear programming, coupled with Markowitz Modern Portfolio Theory to model and solve two linear programming problems that resulted in the composition of two portfolios, considering conservative and less conservative investor profiles. For the modeling of the problems, a technical analysis was performed on the assets that were previously selected for the composition of the portfolio. The selection of the assets took into account some statistical parameters, such as weighted arithmetic mean and correlation coefficient. Considering that the experts' forecasts indicated that the year 2018 would be favorable to investments in the Stock Exchange, the results obtained in this work agreed with this statement. However, as it is a technical analysis, it is concluded that the results presented do not guarantee a practical efficiency of the same, however, they serve to guide the investment activities.

**Key-words:** Markowitz's Theory. Linear Programming. Optimum Portfolio of Investments.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – As três regiões do plano. . . . .	27
Figura 2 – Região factível ( <b>S</b> ). . . . .	27
Figura 3 – Curvas de nível da função objetivo (problema de minimização). . . . .	28
Figura 4 – Região factível de $f$ . . . . .	29
Figura 5 – Deslocamento da reta $f$ na direção oposta ao vetor gradiente. . . . .	30
Figura 6 – Região factível de $f$ . . . . .	31
Figura 7 – Deslocamento da reta $f$ na direção do vetor gradiente. . . . .	32
Figura 8 – Solução ótima única - Região factível limitada. . . . .	33
Figura 9 – Solução ótima única - Região factível ilimitada. . . . .	33
Figura 10 – Múltiplas soluções ótimas - Região factível limitada. . . . .	34
Figura 11 – Múltiplas soluções ótimas - Região factível ilimitada. . . . .	34
Figura 12 – Não existe solução ótima - Região factível ilimitada. . . . .	35
Figura 13 – Não existe solução ótima - Região factível vazia. . . . .	35
Figura 14 – Solução ótima degenerada (minimização). . . . .	36
Figura 15 – Solução degenerada e ótimo não degenerado (maximização). . . . .	36
Figura 16 – Trajetórias percorridas pelo algoritmo simplex até a solução ótima (minimização). . . . .	41
Figura 17 – Transição da solução gráfica para a solução algébrica. . . . .	42
Figura 18 – Correlação entre dois ativos (A e B): (a) coeficiente de correlação igual a +1; (b) coeficiente de correlação igual a 0; e, (c) coeficiente de correlação igual a -1 . . . . .	68
Figura 19 – Binômio risco-retorno: correlação entre dois ativos evidenciados na <i>fronteira eficiente</i> . . . . .	69

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Organização do PL na forma tableau . . . . .	50
Tabela 2 – Tableau antes do pivoteamento . . . . .	51
Tabela 3 – Tableau após o pivoteamento . . . . .	53
Tabela 4 – Risco diversificável e risco não-diversificável. . . . .	72
Tabela 5 – Setor econômico de atuação . . . . .	76
Tabela 6 – Rendimento percentual mensal dos ativos ao longo do ano de 2017 . . . . .	77
Tabela 7 – Correlação entre os ativos . . . . .	78
Tabela 8 – Variância e Covariância entre os ativos . . . . .	79
Tabela 9 – Rendimento percentual médio dos ativos no ano de 2017 . . . . .	80
Tabela 10 – Risco do ativo ITUB4 . . . . .	81
Tabela 11 – Risco do ativo BBAS3 . . . . .	81
Tabela 12 – Risco do ativo ECOR3 . . . . .	81
Tabela 13 – Risco do ativo UNIP5 . . . . .	81
Tabela 14 – Risco do ativo MGLU3 . . . . .	82
Tabela 15 – Risco do ativo RADL3 . . . . .	82

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	14
2	BREVE HISTÓRICO . . . . .	17
2.1	Pesquisa Operacional . . . . .	17
2.2	Programação Linear . . . . .	19
3	PROGRAMAÇÃO LINEAR E O MÉTODO SIMPLEX . . . . .	22
3.1	Problema de Programação Linear . . . . .	22
3.2	Solução de um Problema de Programação Linear . . . . .	25
3.2.1	Solução gráfica . . . . .	25
3.2.1.1	Exemplos de Problemas de Programação Linear . . . . .	28
3.2.2	Tipos de soluções de um problema de Programação Linear. . . . .	32
3.3	Soluções Básicas . . . . .	37
3.4	Teorema Fundamental da Programação Linear . . . . .	39
3.5	O método simplex . . . . .	40
3.6	Transição da solução gráfica para a solução algébrica . . . . .	41
3.7	Determinando os pontos extremos adjacentes . . . . .	42
3.8	Pivoteamento . . . . .	43
3.9	Regras para determinar a variável que entra e sai da base . . . . .	45
3.10	Determinando a solução factível ótima . . . . .	47
3.11	O método simplex em <i>tableau</i> . . . . .	49
3.12	Pivoteamento no <i>tableau</i> . . . . .	51
4	TEORIA DA DUALIDADE . . . . .	54
4.1	Problema de Programação Linear Primal-Dual . . . . .	54
4.1.1	Exemplo numérico: problema primal-dual . . . . .	57
4.2	Importantes propriedade relacionadas aos problemas primal-dual . . . . .	57
5	INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA DESCRITIVA . . . . .	59
5.1	Medidas de Centralidade e Variabilidade . . . . .	59
5.1.1	Média Aritmética . . . . .	59
5.1.2	Média Aritmética Ponderada . . . . .	60
5.1.3	Variância . . . . .	60
5.1.4	Desvio Padrão . . . . .	61

5.1.5	Escore Padronizado . . . . .	61
5.1.6	Coefficiente de Variação . . . . .	61
5.1.7	Covariância . . . . .	61
5.1.8	Coefficiente de Correlação . . . . .	62
6	TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIOS DE MARKOWITZ NA SELEÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS . . .	64
6.1	Conceitos básicos em economia . . . . .	64
6.2	Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz . . . . .	66
6.3	Critérios para análise de investimentos e perfil de investidores	69
6.4	Risco de uma carteira de investimentos . . . . .	71
7	SELEÇÃO DE ATIVOS E COMPOSIÇÃO DE UMA CAR- TEIRA DE INVESTIMENTOS . . . . .	73
7.1	Previsão dos melhores investimentos para o ano de 2018 . . . .	74
7.2	Formação da Carteira teórica de investimento . . . . .	76
7.3	Modelagem da carteira teórica de investimentos por meio de um problema de programação linear . . . . .	82
7.3.1	Restrições numa perspectiva de investidor conservador . . . . .	84
7.3.2	Problema de Programação Linear a ser otimizado numa pers- pectiva de perfil de investidor conservador . . . . .	85
7.3.3	Restrições numa perspectiva de investidor menos conservador	86
7.3.4	Problema de Programação Linear a ser otimizado numa pers- pectiva de perfil de investidor menos conservador . . . . .	87
7.4	Otimização dos problemas no MATLAB e análise dos resultados	88
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	92
	REFERÊNCIAS . . . . .	94

## 1 INTRODUÇÃO

A Pesquisa Operacional (PO), sem dúvidas, proporcionou grandes avanços e desenvolvimento em várias áreas do conhecimento. Como veremos mais adiante, trata-se de um ramo interdisciplinar cujo principal objetivo é auxiliar na tomada de decisões. É fato que, ao tomar uma decisão, do ponto de vista lógico, espera-se que a mesma seja a melhor possível. Neste sentido, a PO trata de problemas de otimização empregando modelos matemáticos e aplicando métodos computacionais para resolvê-los.

Muitos problemas encontrados no cotidiano são passíveis de serem modelados por funções lineares. A Programação Linear – campo importantíssimo da PO – visa encontrar a melhor solução para os problemas cujos modelos matemáticos são representados por funções lineares. O método Simplex (um algoritmo que viabiliza a resolução de problemas de programação linear), foi um importante avanço para a PO.

A Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz, também conhecida como Teoria da Média-Variância, é um importante exemplo de aplicação da Programação Linear na área de Economia. De acordo com Markowitz, o retorno esperado de uma carteira de investimento é calculado com base na combinação ponderada dos retornos médios esperados de cada ativo que a compõe.

Apoiados na teoria de Markowitz e fazendo uso do método Simplex (implementado pelo *software* MATLAB [21]) para a resolução de problemas de programação linear, temos por objetivo selecionar duas carteiras de investimentos ótimas, na qual o retorno esperado seja o maior possível. Contudo, as carteiras a serem formadas levarão em consideração o perfil de dois tipos de investidores, a saber: conservador e menos conservador.

Os critérios para a seleção dos ativos foram embasados nas opiniões de especialistas da área de finanças. Tais especialistas foram consultados pela revista *ISTO É Dinheiro* em dezembro de 2017 ([14],[15], [16], [17]). Tendo em vista que, ao todo, foram selecionados 12 ativos e a carteira formada é composta por apenas 6, ainda que o objetivo seja maximizar o retorno esperado, consideramos também a relação risco-retorno. Por este motivo, com base nos estudos estatísticos desenvolvidos a partir dos dados obtidos referentes ao ano de 2017, os ativos selecionados para compor a carteira foram aqueles que apresentaram menor coeficiente de correlação.

No mais, abaixo faremos uma breve explanação dos conteúdos abordados em cada capítulo com vistas a auxiliar o leitor na compreensão do trabalho desenvolvido.

O capítulo 2 apresenta um breve histórico da Pesquisa Operacional e da Programa-

ção Linear. No tocante a PO, destaca-se o início de suas atividades formais, bem como a sua rápida evolução e aplicação em diversas áreas do conhecimento. Com relação a Programação Linear, ressalta-se a grande contribuição do matemático George Dantzig para o desenvolvimento de um algoritmo geral (método Simplex) para a resolução de um problema de programação linear, e os importantes progressos realizados na área.

O Capítulo 3 aborda os temas Programação Linear (PL) e Método Simplex. Mais especificamente, apresenta a forma padrão de um Problema de Programação Linear (PLL) e discorre sobre algumas definições, propriedades, corolários e teoremas que são inerentes a este tipo de problema. Com o auxílio do *software* Geogebra [24] é mostrado a resolução gráfica de um PPL de duas variáveis. Além disso, é exposto diversos tipos de soluções que um problema de PL pode incorrer. Vale lembrar que os assuntos tratados neste capítulo nos auxiliarão para a formulação do PPL que nos fornecerá a carteira de investimento ótima.

Como veremos mais adiante, o método Simplex foi considerado de grande importância para o desenvolvimento da PL. Em síntese, o método Simplex é um algoritmo algébrico que permite encontrar uma solução ótima de um PPL. Para facilitar a compreensão do algoritmo, é feita uma analogia com a resolução gráfica apresentada neste mesmo capítulo. Por meio do *software* MATLAB, utilizaremos o método Simplex para resolver o problema da carteira de investimento que será formulado, a fim de obtermos uma carteira ótima.

O capítulo 4, por sua vez, discorre sobre a Teoria da Dualidade e sua importância para o desenvolvimento da Programação Linear. Esta teoria diz que para todo PPL primal tem um problema dual associado, de tal modo que a solução ótima de um deles coincide com a solução ótima do outro, caso existam. Em síntese, é apresentado a forma geral de um PPL primal e seu correspondente dual. Além das propriedades expostas, para facilitar o entendimento do leitor sobre o assunto é apresentado um exemplo numérico que relaciona o problema primal e dual.

O capítulo 5 é de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho. Neste capítulo é feita uma breve introdução à Estatística Descritiva. Em síntese, apresenta-se algumas medidas de centralidade e variabilidade, tais como: média, média ponderada, variância, desvio-padrão, coeficiente de variação, covariância etc. Convém ressaltar que esses parâmetros estatísticos são de fundamental importância para a compreensão da Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz, e também, para a seleção dos que farão parte da carteira teórica de investimento a ser formulada.

No capítulo 6 apresenta-se, formalmente, a Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz. Não apenas no que diz respeito a maximização do retorno esperado de uma carteira, mas também, da minimização de seu risco. De modo a facilitar a compreensão do leitor,

num primeiro momento é exposto alguns conceitos básicos em economia. Na sequência aponta-se alguns critérios para análise de investimentos relacionando-os com diferentes perfis de investidores. Por fim, trata da diversificação de ativos na composição de uma carteira de investimento como meio de reduzir os riscos.

O capítulo 7 é um dos pontos mais relevante deste trabalho. Nele é utilizado toda a teoria desenvolvida em capítulos anteriores com vistas à seleção de ativos e a composição da carteira teórica de investimento. É apresentada a modelagem da carteira por meio de um PPL, bem como a sua resolução pelo método Simplex. Por fim, faz-se uma análise dos resultados obtidos.

## 2 BREVE HISTÓRICO

### 2.1 PESQUISA OPERACIONAL

A Pesquisa Operacional (PO) é um ramo interdisciplinar que tem como principal objetivo ajudar na tomada de decisões, mais especificamente, trata de problemas de otimização empregando modelos matemáticos e aplicando métodos computacionais para resolvê-los, e assim, determinar uma solução ótima.

Um aspecto muito importante de problemas envolvendo decisões é o de otimização; quando se procura estabelecer qual a maneira mais eficiente de utilizar os recursos disponíveis para atingir certos objetivos. Em geral trata-se de recursos limitados e a sua utilização criteriosa possibilita melhorar o rendimento ou produtividade do processo em estudo [5].

As primeiras atividades formais de pesquisa operacional foram iniciadas na Inglaterra durante a Segunda Guerra Mundial, quando uma equipe de cientistas britânicos decidiu tomar decisões com bases científicas sobre a melhor utilização de material de guerra [1].

Devido à escassez de recursos para as diversas operações militares, houve uma grande necessidade de se alocar os recursos ainda disponíveis de forma eficiente. Para tal, os comandantes britânicos e norte-americanos convocaram a comunidade científica a encontrar soluções para problemas táticos, e conseqüentemente, a criarem estratégias de guerra, aplicando, para isso, uma abordagem científica. Na prática lhes foi solicitado a realização de pesquisas sobre operações (militares) [2], daí a expressão Pesquisa Operacional.

O termo pesquisa operacional é uma tradução literal do inglês *operational research*. Empregado pela primeira vez no contexto da 2ª Guerra, está ligado à invenção do radar na Inglaterra em 1934, e é atribuído ao superintendente da estação A. P. Rowe, que, em 1938, coordenava equipes para examinar a eficiência de técnicas de operações advindas de experimentos com interceptação de radar [3]. Convém ressaltar que essas equipes de cientistas foram as primeiras cujos trabalhos estavam voltados a PO.

Inaugurada em 1941, a Seção de Pesquisa Operacional do Comando da Força Aérea de Combate tinha por objetivo resolver problemas oriundos de guerra, tais como: escolha adequada do tipo de avião para determinadas missões; manutenção e inspeção de aviões; melhoria na probabilidade de destruição de submarinos etc. Além desses problemas, também era dedicado uma atenção especial ao dimensionamento de comboio de frotas e

controle de artilharia antiaérea.

Por meio do desenvolvimento de métodos eficientes de emprego da nova ferramenta de radar, essas equipes se tornaram instrumentos na vitória da Batalha Aérea em céus da Grã-Bretanha. Por intermédio dessas pesquisas sobre como melhor administrar operações de comboio e anti-submarino, esses cientistas desempenharam papel fundamental na vitória do Atlântico Norte [2].

Neste contexto a pesquisa operacional surge como ramo científico independente, investigando de forma sistemática e racional os processos envolvidos na realização de uma atividade produtiva, mesmo que de início com finalidades bélicas [4]. Deste modo, podemos dizer que a consolidação da PO se deu durante a 2ª Guerra, quando a escassez de recursos e armamentos fez com que os comandantes militares repensassem a melhor forma de alocar os recursos ainda disponíveis.

Devido ao grande sucesso das aplicações da PO no contexto da Segunda Guerra Mundial, o mundo acadêmico e empresarial passaram a enxergar a PO com outros olhos. Desta vez, procuraram aplicar as técnicas então criadas, em problemas de cunho administrativos. Com o fim da guerra, o sucesso da PO despertou interesses em sua aplicação não apenas no ambiente militar. Podemos dizer que, posteriormente a guerra, houve uma adaptação das ideias propostas para a resolução de problemas militares com vistas a melhorar a eficiência e produtividade no setor civil. Em 1950, a PO já estava sendo empregada em diversos setores da sociedade, tanto na área comercial, como na industrial e governamental.

No período pós-guerra os estudos envolvendo a PO teve um rápido crescimento tanto na Inglaterra como nos Estados Unidos, não se restringindo apenas a resolução de problemas militares, mas sim, abrangendo várias outras áreas de conhecimento, tais como: construção civil e militar, mineração, bancário, transporte, metalúrgico, têxtil, farmacêutico, etc.

Hillier e Lieberman (2006) apontam dois fatores que, segundo eles, contribuíram para a rápida disseminação da PO no período pós-guerra. O primeiro diz respeito ao progresso substancial feito no início em termos de melhorias das técnicas da PO [2], dado que muitos cientistas se propuseram a estudar sobre o assunto após a guerra, contribuindo significativamente para avanços importantes nessa área. Uma importante contribuição neste período foi a criação do Método Simplex desenvolvido pelo matemático George Dantzig em 1947. Esse método viabilizava a solução de problemas de programação linear. Mais adiante dedicaremos um capítulo para falar sobre esse método. Um segundo fator que impulsionou o desenvolvimento da PO foi a revolução computacional, devido a grande contribuição no processamento de cálculos para o tratamento eficiente dos problemas

complexos [2], uma vez que, resolver sistemas de equações de muitas variáveis sem auxílio computacional seria algo impraticável.

A partir dos anos de 1950 muitos países criaram centros de pesquisas nessa área, por exemplo, em 1952 foi fundada nos Estados Unidos a Sociedade Científica Americana de Pesquisa Operacional (Operations Research Society of America – ORSA) e a Americana de Ciências de Administração (The Institute of Management Sciences – TIMS) em 1953. Ainda neste ano foi fundada na Inglaterra a Sociedade Inglesa de Pesquisa Operacional (Operational Research Society – ORS).

Em 1957, foi realizada na universidade de Oxford, na Inglaterra, a primeira conferência internacional de PO. Nesta conferência foi possível constatar a característica multidisciplinar das aplicações da pesquisa operacional.

Atualmente, existem várias sociedades científicas pelo mundo que associam pessoas e entidades interessadas em desenvolver estudos na área de teoria e prática da pesquisa operacional, dentre as quais podemos citar: o Instituto de Pesquisa Operacional e Ciências da Administração (Institute for Operations Research and Management Sciences – INFORMS) nos Estados Unidos; a Sociedade canadense de Pesquisa Operacional (Canadian Operations Research Society – CORS) no Canadá; a Sociedade Alemã de Pesquisa Operacional (German Operations Research Society – GOR), na Alemanha; a Associação Portuguesa de Investigação Operacional – APDIO, em Portugal; Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional no Brasil; dentre muitas outras.

No Brasil, os estudos acerca da PO iniciaram-se na década de 1960. Em 1968 foi realizado no Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA, em São José dos Campos – SP, o primeiro simpósio brasileiro de pesquisa operacional.

## 2.2 PROGRAMAÇÃO LINEAR

A programação Linear (PL) é uma técnica amplamente difundida para resolver problemas de otimização, além de ser um elemento importantíssimo na Pesquisa Operacional (PO) [22]. As aplicações de PL se estende a várias situações do cotidiano, as quais podemos citar as aplicações relacionadas à área das indústrias, agricultura, saúde, transportes, finanças, economia, etc.

No início do século XX, a publicação de dois trabalhos científicos impulsionaram o desenvolvimento da Programação Linear. Em 1928, John Von Neumann publicou o *Teorema Central na Teoria dos Jogos*, e, em 1936, Leontief publicou o artigo intitulado *Quantitative input and output Relations in the Economic Systems of the United Sta-*

*tes*—Relações quantitativas de entrada e saída no sistema econômico dos Estados Unidos. O trabalho desenvolvido por Leontief tratava de um modelo matricial linear que, mais tarde, foi utilizado na forma de um Problema de Programação Linear (PPL).

Leonid V. Kantorovitch foi um matemático e economista que, em 1939, formulou e resolveu um dos primeiros PPL's sobre organização e planejamento de produção. Em 1975, em reconhecimento pelo seu trabalho, Kantorovitch recebeu o prêmio Nobel de Economia.

Em 1947, George Dantzig (um dos coordenadores do projeto SCOOP - Scientific Computation of Optmal Programs - cuja finalidade era auxiliar a força aérea americana na tomada de decisões e operações) desenvolveu, formalizou e testou o método Simplex para resolver problemas de programação linear [3]. Dantzig forneceu, não apenas os resultados de um único modelo matemático de PL, mas sim, um método que permitiu resolver qualquer PPL.

Em 1951, Tucker apresentou os primeiros resultados no campo da teoria da dualidade, que hoje se configura como parte de notória importância da Programação Linear. O método Simplex Revisado foi desenvolvido em 1952 por Charnes e Lemkes. Este método se mostrou de grande importância para a implementação do método Simplex por meio de softwares computacionais.

Dorfman, Samuelson e Solow, em 1958, publicaram “Linear Programming and Economics Analysis”, na qual apresentaram uma aplicação de PL na área de economia, o que impulsionou o desenvolvimento dessa área.

Embora o método Simplex tenha apresentado o primeiro algoritmo eficiente para a resolução de PPL, em 1972, Klee e Minty mostraram, por meio de um exemplo, que o método Simplex não era tão eficiente como se supunha. A análise de complexidade realizada por Klee e Minty demonstrou que o algoritmo Simplex tem complexidade exponencial (pior caso) [23], ou seja, apresenta um elevado crescimento exponencial (em alguns casos) no tempo de resolução.

Por meio dos trabalhos desenvolvidos por Khachiyan (1979) e Karmarkar (1984), um novo método de resolução de PPL foi desenvolvido. Conhecido como métodos de Pontos Interiores, tal método apresentou um algoritmo no qual o número de iterações é limitado por uma função polinomial [22].

Apesar da grande eficiência apresentada pelo método de Pontos Interiores, o mesmo é utilizado para a resolução de problemas de grande porte, onde ele apresenta melhor eficiência. Em problemas de pequeno porte, recomenda-se a implementação do algoritmo Simplex.

Tendo em vista o objetivo deste estudo, que é a formação de uma carteira teórica

de investimentos ótima, os próximos capítulos trazem uma breve explanação acerca de Programação Linear e do método Simplex, que são ferramentas de extrema importância para este fim.

### 3 PROGRAMAÇÃO LINEAR E O MÉTODO SIMPLEX

A programação Linear (PL) visa fundamentalmente encontrar a melhor solução para problemas que tenham seus modelos representados por expressões lineares. A sua grande aplicabilidade e simplicidade devem-se a linearidade do modelo. A tarefa da PL consiste na maximização ou minimização de uma função linear, denominada *Função Objetivo*, respeitando-se um sistema linear de igualdades ou desigualdades, que recebem o nome de *Restrições* do modelo [5].

Em 1947, o matemático George Dantzig, desenvolveu, formalizou e testou o método simplex para resolver problemas de programação linear [3]. Com vistas a desenvolver um estudo mais detalhado acerca desse método, este capítulo tem por objetivo apresentar alguns conceitos básico dessa temática.

#### 3.1 PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Um problema de Programação Linear (PL) é um problema de programação matemática que visa otimizar uma função objetivo considerando as restrições impostas. Além disso, a função objetivo e as funções de restrições são todas lineares, isto é, um problema de PL tem a seguinte forma:

$$\text{Otimizar: } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{Sujeito a: } g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_2$$

$$\vdots$$

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m.$$

onde:

- $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é chamada *Função Objetivo*;
- $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ , com  $i=1, 2, \dots, m$ , constituem o sistema de equações lineares que são as restrições do problema;
- $n$  é o número de variáveis do problema;
- $m$  é o número de restrições do problema;

- $c_j$  é o coeficiente de custo associado a variável  $x_j$ , com  $j=1, \dots, n$ , da função objetivo;
- $a_{ij}$  é o coeficiente da  $i$ -ésima restrição da variável  $x_j$ ;
- $b_i$  é o termo independente da  $i$ -ésima restrição.

**Definição 2.1** (*Forma padrão*) Dizemos que um problema de PL está escrito em sua forma padrão se tivermos uma minimização da função objetivo e se todas as restrições forem de igualdade, ou seja,

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i,$$

bem como se os termos constantes ( $b_i$ ) e as variáveis de decisão ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) assumirem valores não negativos. Em símbolos matemáticos, podemos representar um problema na forma padrão por:

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (3.1)$$

$$\text{Sujeito a: } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Assim, na forma padrão, o problema de otimização linear tem as seguintes características:

- a função objetivo deve ser minimizada/maximizada;
- as restrições do problema são definidas por um sistema de equações lineares;
- as condições de não negatividade complementam as restrições do problema.

Equivalentemente, por simplicidade de notação, podemos escrever o problema na forma padrão utilizando a notação matricial. Vejamos:

$$\text{Minimizar } f(x) = c^T x$$

$$\text{Sujeito a: } Ax = b$$

$$x \geq 0,$$

onde:

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$  é uma matriz de ordem  $m \times n$ , chamada matriz dos coeficientes;
- $c^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$  é o vetor de custos;
- $x^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$  é o vetor das variáveis de decisão;
- $b^T = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$  é o vetor dos termos independentes.

**Definição 2.2** (*Solução factível*) Dizemos que uma solução  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é factível se satisfazer todas as restrições e as condições de não negatividade do problema.

**Definição 2.3** (*Região factível*) É chamada de região factível o conjunto de todas as soluções factíveis, e é denotada por  $\mathbf{S} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0 \}$ .

**Definição 2.4** (*Solução ótima*) Uma solução factível que fornece o menor (ou maior) valor à função objetivo  $f$  é chamada *solução ótima*, denotada por  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ . Ou seja,  $x^* \in \mathbf{S}$  é uma solução ótima se e somente se:

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \mathbf{S}.$$

Além da forma apresentada na definição (2.1), várias outras formas de problemas de PL aparecem em problemas reais, por exemplo, podem existir restrições de desigualdade, ou ainda, as variáveis (algumas ou todas) não apresentarem condições de não negatividade. Contudo, sempre é possível reescrever qualquer problema de PL em sua forma padrão.

No caso em que as restrições apresentem inequações do tipo

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (3.2)$$

ou

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad (3.3)$$

podem ser convertidas na forma padrão com o auxílio de novas variáveis, as quais denominamos de *Variáveis de Folga*. Em outras palavras, a quantidade que falta (ou excede) para a igualdade é compensada com a inclusão de uma variável não negativa no lado esquerdo da inequação. Deste modo, temos que a igualdade (2.2) e (2.3), podem ser reescritas, respectivamente, como:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i,$$

em ambos os casos com  $x_{n+1} \geq 0$ .

Por outro lado, se o problema apresentar alguma variável  $x_i$  irrestrita de sinal (*variável livre*), ou seja, alguma variável de decisão que possa assumir qualquer valor - positivo, nulo ou negativo -, podemos substituir essa variável pela diferença de outras duas. Vejamos:

Seja  $x_i$  uma variável livre, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$x_i = x_i^+ - x_i^-, \text{ com } x_i^+ \geq 0, x_i^- \geq 0.$$

Observe que qualquer número pode ser escrito como a diferença entre dois outros números positivos. Assim, substituindo essa redefinição da variável livre, o problema resultante tem todas as variáveis não negativas. Em outras palavras, temos o problema na forma padrão como desejado.

## 3.2 SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

### 3.2.1 SOLUÇÃO GRÁFICA

O procedimento gráfico de resolução de um problema de otimização linear envolve duas etapas [1]:

1. Determinação da região factível **S**;
2. Determinação de uma solução ótima entre todos os pontos factíveis de **S**.

A solução gráfica de um problema de PL é um método muito eficiente e intuitivo quando estamos trabalhando com um problema de pequeno porte. Este método permite compreender alguns conceitos do Método Simplex que serão apresentados posteriormente.

Consideremos o seguinte PL:

$$\text{Minimizar: } f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\text{Sujeito a: } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Por simplicidade de notação, representaremos o problema anterior em notação matricial da seguinte forma:

$$\text{Minimizar } f(x) = c^T x$$

$$\text{Sujeito a: } Ax \leq b$$

$$x \geq 0,$$

com  $x \in R^2$ .

As restrições do problema determinam uma região a qual se dá o nome de *Região Factível*. A melhor das soluções factíveis, ou seja, aquela que minimiza (ou maximiza) a função objetivo, é chamada de *Solução Ótima*. Vale lembrar que o objetivo da Programação Linear é determinar uma solução ótima.

Notemos inicialmente que a região factível pode ser denotada por  $\mathbf{S} = \{x \in R^2 \text{ tal que } Ax \leq b, x \geq 0\}$ .

Para representar o conjunto de pontos tais que

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i,$$

traçamos, primeiramente, a reta

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i.$$

Observamos na Figura 1 que o espaço  $R^2$  fica dividido em três partes, a saber:

- $x \in R^2$  tal que  $(a^i)^T x = b_i$ ;
- $x \in R^2$  tal que  $(a^i)^T x < b_i$ ;
- $x \in R^2$  tal que  $(a^i)^T x > b_i$ .

Neste caso, em notação matricial, temos que a restrição é do tipo

$$(a^i)^T x \leq b_i,$$

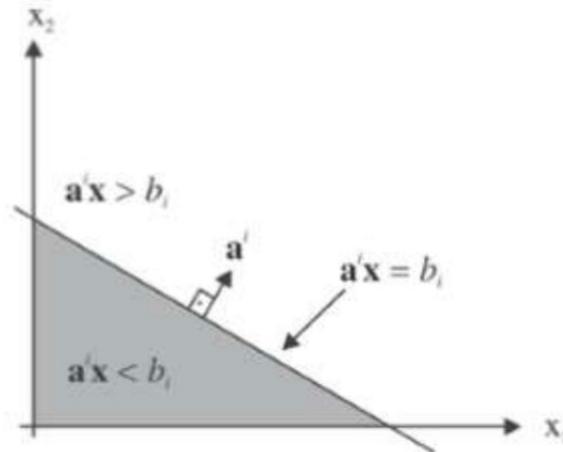
em que

$$(a^i)^T = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \end{pmatrix}$$

é a linha  $i$  da matriz  $\mathbf{A}$  e a equação da reta é

$$(a^i)^T x = b_i.$$

Figura 1 – As três regiões do plano.

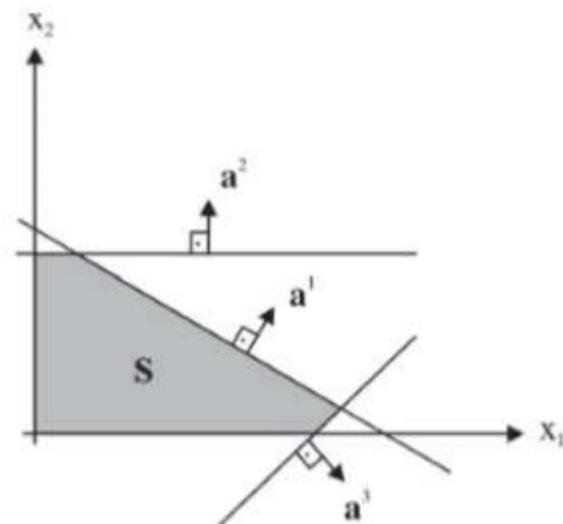


Fonte – Arenales et al, p.60, 2011.

Observe ainda, na Figura 1, que o gradiente  $a^i$ , que é perpendicular à reta  $(a^i)^T x = b_i$ , aponta para a região tal que  $(a^i)^T x > b_i$ , ou seja, aponta para o sentido oposto à região factível.

Sabemos que a região factível de um PL é dada pela intersecção de todas as regiões delimitadas pelas equações e/ou inequações de restrição do problema com o primeiro quadrante do espaço  $R^2$ . A Figura 2 representa a região **S** delimitada pela intersecção de todas as regiões do tipo  $(a^i)^T \leq b_i$  com o primeiro quadrante.

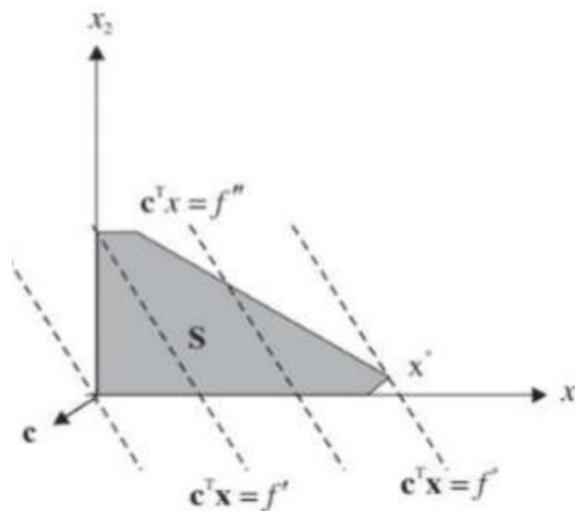
Figura 2 – Região factível (S).



Fonte – Arenales et al, p.60, 2011.

A Figura 3 ilustra várias curvas de nível da função  $f$ . Observando a curva de nível  $c^T x = f^*$  da função  $f$  (em que  $f^* = f(x^*)$ ), é possível notar que  $S$  está do lado oposto para onde o gradiente  $c$  de  $f$  aponta, ou seja, para todo  $x \in S$ , temos  $f(x) \geq f(x^*)$ , logo,  $f(x^*)$  é o valor mínimo que a função  $f$  assume. Vale lembrar que o vetor gradiente aponta sempre no sentido em que a função tem maior crescimento, logo, é natural que o valor mínimo da função seja obtido no sentido oposto ao mesmo.

Figura 3 – Curvas de nível da função objetivo (problema de minimização).



Fonte – Arenales et al, p.61, 2011

A solução ótima  $x^*$  representada no gráfico da Figura 3 é uma solução factível muito especial, e a ela é dado o nome de *vértice* ou *ponto extremo*.

### 3.2.1.1 EXEMPLOS DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

**Exemplo 1.** Problema de minimização. Consideremos o seguinte problema de otimização linear:

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2) = -2x_1 - x_2$$

$$\text{s.a } x_1 + x_2 \leq 4 \tag{3.4}$$

$$x_1 \leq 3 \tag{3.5}$$

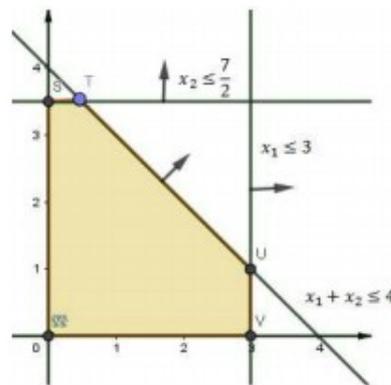
$$x_2 \leq \frac{7}{2} \tag{3.6}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \tag{3.7}$$

O método de resolução gráfica consiste em determinarmos a região factível em que todos os pontos que pertencem a esta região satisfaçam as condições de restrição do problema.

De forma prática, em um sistema de eixos coordenados representamos simultaneamente as inequações (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5). Note que a intersecção entre as regiões delimitadas por tais inequações geraram uma região poligonal (região factível), na qual, todos os pontos que pertencem ao seu interior e a fronteira dessa região, satisfazem simultaneamente todas as restrições do problema.

Figura 4 – Região factível de  $f$ .



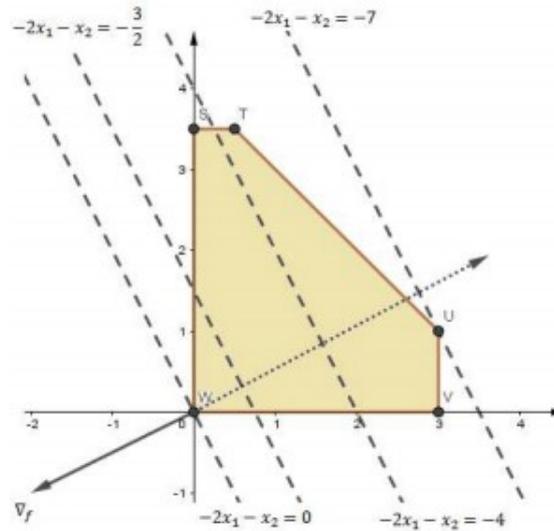
Fonte – Autor.

Para determinarmos a solução ótima do problema, ou seja, as coordenadas do ponto que minimiza a função objetivo, calculamos inicialmente o vetor gradiente de  $f$ ,  $\nabla_f$ .

$$\nabla_f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2) = (-2, -1).$$

O vetor gradiente  $\nabla_f$  é perpendicular a curva de nível  $f(x_1, x_2) = k$ . Deste modo, deslocamos a reta  $-2x_1 - x_2 = 0$ , curva de nível zero da função objetivo, no sentido oposto (já que trata-se de um problema de minimização) ao vetor gradiente até encontrarmos o(s) último(s) ponto(s) de contato com a região factível. A figura abaixo ilustra o trajeto percorrido até encontrarmos as coordenadas do ponto  $U = (3, 1)$ , que é o último ponto de contato da reta  $f(x_1, x_2) = k$  com a região factível.

Figura 5 – Deslocamento da reta  $f$  na direção oposta ao vetor gradiente.



Fonte – Autor.

O valor da função objetivo no ponto  $U$  é  $f(3, 1) = -7$ . Assim, concluímos que o problema apresentado tem solução ótima única, e o valor mínimo que a função objetivo assume é  $-7$ .

**Exemplo 2.** Problema de maximização. Consideremos o seguinte problema de otimização linear:

$$\text{Maximizar: } f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$\text{Sujeito a: } -3x_1 + x_2 \leq 2 \quad (3.8)$$

$$x_2 \leq 3 \quad (3.9)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9 \quad (3.10)$$

$$3x_1 + x_2 \leq 18 \quad (3.11)$$

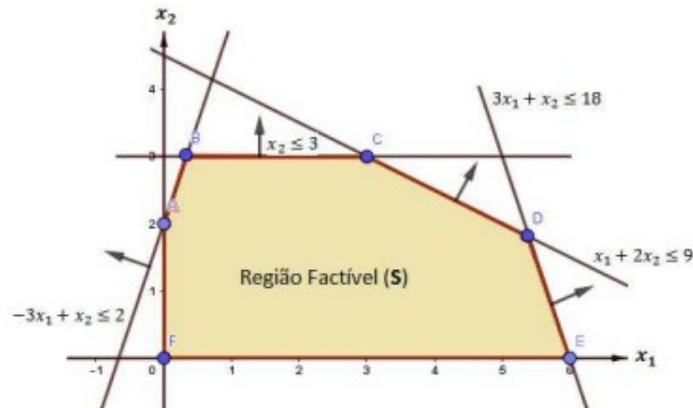
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (3.12)$$

O método de resolução gráfica consiste em determinarmos a região factível em que todos os pontos que pertencem a esta região satisfaçam as condições de restrição do problema.

De forma prática, em um sistema de eixos coordenados representamos simultaneamente as inequações (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12). Note que a intersecção entre as regiões delimitadas por tais inequações geraram uma região poligonal (região factível), na

qual, todos os pontos que pertencem ao seu interior e a fronteira dessa região, satisfazem simultaneamente todas as restrições do problema.

Figura 6 – Região factível de  $f$ .



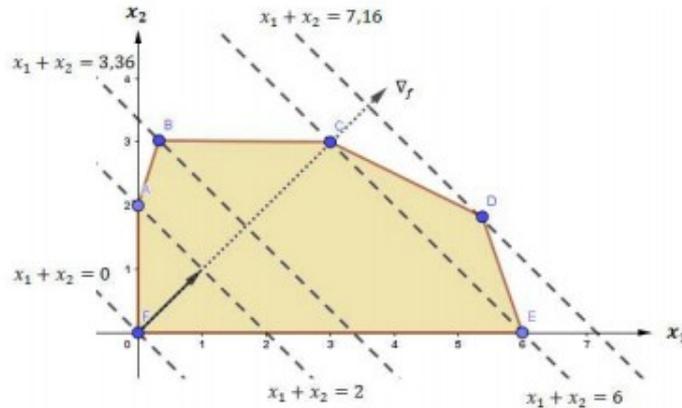
Fonte – Autor.

Para determinarmos a solução ótima do problema, ou seja, as coordenadas do ponto que maximiza a função objetivo, calculamos inicialmente o vetor gradiente de  $f$ ,  $\nabla_f$ .

$$\nabla_f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2) = (1, 1).$$

O vetor gradiente  $\nabla_f$  é perpendicular a curva de nível  $f(x_1, x_2) = k$ . Deste modo, deslocamos a reta  $x_1 + x_2 = 0$ , curva de nível zero da função objetivo, no mesmo sentido do vetor gradiente até encontrarmos o(s) último(s) ponto(s) de contato com a região factível. A figura abaixo ilustra o trajeto percorrido até encontrarmos as coordenadas do ponto  $D = (5, 37/18)$ , que é o último ponto de contato da reta  $f(x_1, x_2) = k$  com a região factível.

Figura 7 – Deslocamento da reta  $f$  na direção do vetor gradiente.



Fonte – Autor.

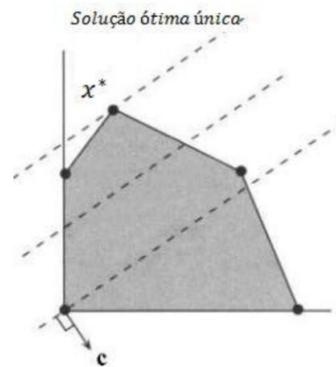
O valor da função objetivo no ponto  $D$  é  $f(5, 37; 1, 82) = 7, 16$ . Assim, concluímos que o problema apresentado tem solução ótima única, e o valor máximo que a função objetivo assume é 7,16.

### 3.2.2 TIPOS DE SOLUÇÕES DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR.

Os problemas apresentados na Seção 2.2.1.1 têm a região factível limitada e apresenta uma *única solução ótima*. No entanto, várias outras possibilidades podem ocorrer, o que pode ser concluído a partir dos gráficos apresentados nas figuras abaixo.

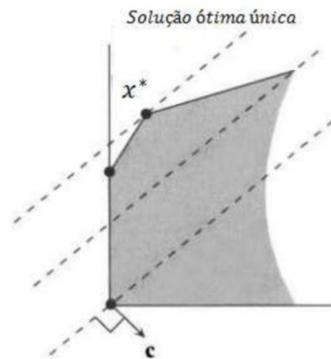
As Figuras 8 e 9 apresentam solução ótima única, isto é, em ambos os casos existe um único ponto extremo que minimiza a função objetivo. Contudo, note que a região factível da Figura 8 é limitada, enquanto na Figura 9 é ilimitada.

Figura 8 – Solução ótima única - Região factível limitada.



Fonte – BAZARAA, p.21, 201, adaptado pelo autor.

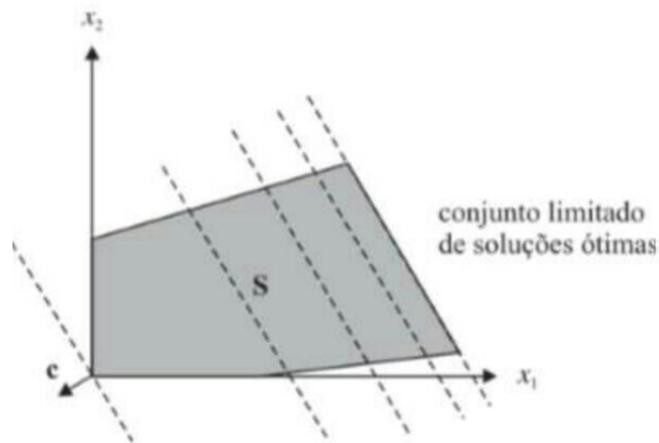
Figura 9 – Solução ótima única - Região factível ilimitada.



Fonte – BAZARAA, p.21, 2010, adaptado pelo autor.

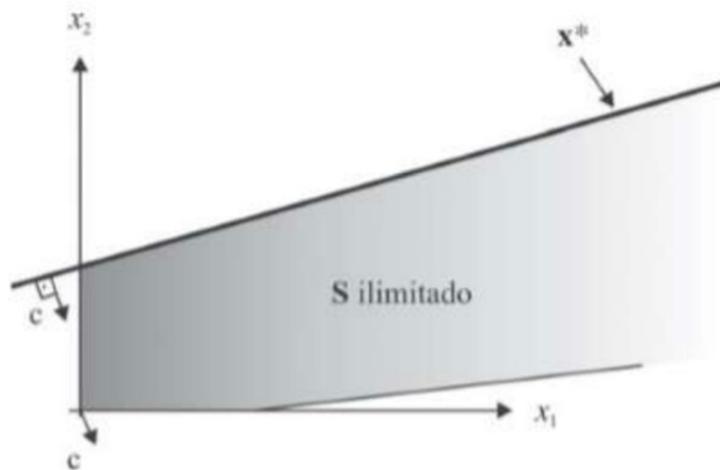
As Figuras 10 e 11 apresentam *múltiplas soluções ótimas*, isto é, as soluções ótimas consistem em um conjunto de pontos que minimizam a função objetivo.

Figura 10 – Múltiplas soluções ótimas - Região factível limitada.



Fonte – Arenales et al, p.63, 2011.

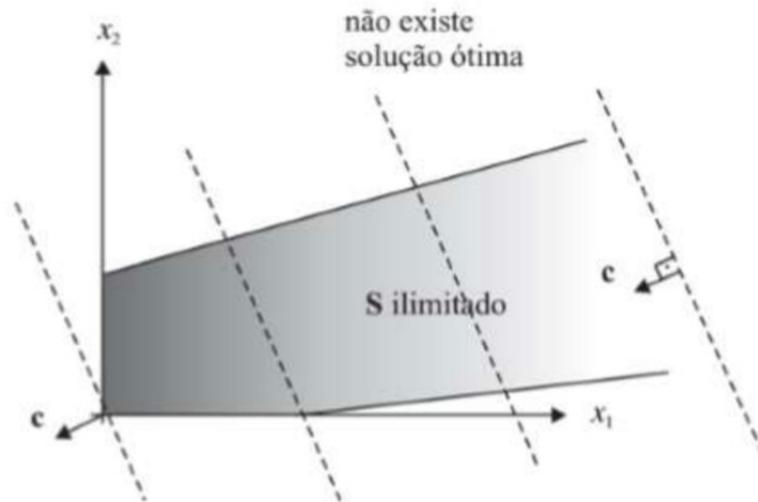
Figura 11 – Múltiplas soluções ótimas - Região factível ilimitada.



Fonte – Arenales et al, p.64, 2011.

As Figuras 12 e 13, por sua vez, apresentam situações em que *não existe solução ótima*. A Figura 12, apesar de o problema (minimização) ter soluções factíveis, tem solução ótima ilimitada. Já na Figura 13, a inexistência de solução ótima decorre do fato de as restrições do problema serem conflitantes.

Figura 12 – Não existe solução ótima - Região factível ilimitada.



Fonte – Arenales et al, p.65, 2011.

Figura 13 – Não existe solução ótima - Região factível vazia.

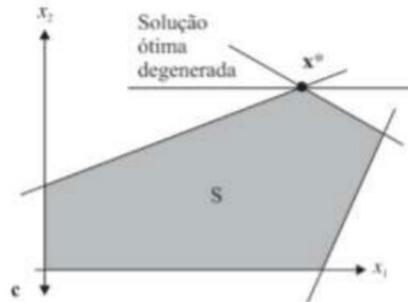


Fonte – Arenales et al, p.65, 2011.

Até aqui, com base nos exemplos gráficos, pudemos perceber que os vértices da região factível são determinados pela intersecção de (pelo menos) duas retas. Ainda, é possível intuir, que se um problema de PL apresentar uma solução, podemos encontrá-la entre os vértices da região factível.

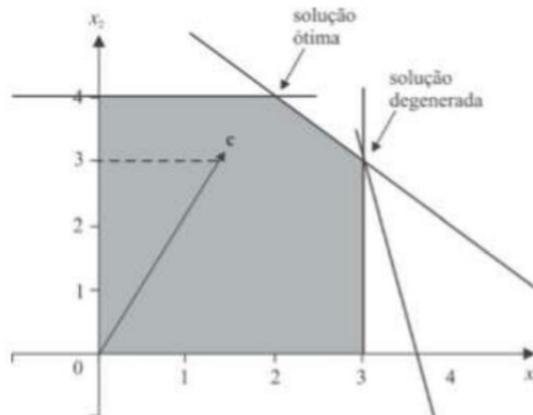
Por fim, quando um vértice da região factível é formado por três ou mais retas, dizemos que é um *vértice degenerado*. Tal vértice pode ser uma *solução ótima degenerada* (Figura 14) ou simplesmente uma *solução degenerada* (Figura 15).

Figura 14 – Solução ótima degenerada (minimização).



Fonte – Arenales et al, p.65, 2011.

Figura 15 – Solução degenerada e ótimo não degenerado (maximização).



Fonte – Arenales et al, p.67, 2011.

De modo geral, o que foi exposto até o momento pode ser resumido enunciando os seguintes corolários:

**Corolário 1.** Se uma região factível, que satisfaz um problema na forma padrão, é não vazia, então ela possui pelo menos um vértice [6].

**Corolário 2.** Se houver uma solução ótima para um problema de programação linear, então há uma solução ótima que é um vértice da região factível que satisfaz este problema [6].

### 3.3 SOLUÇÕES BÁSICAS

Como vimos anteriormente, a região factível de um problema de programação linear é formada pelas intersecções das regiões delimitadas por suas restrições. Além disso, a fronteira da região factível pode ser escrita como o lugar geométrico em que pelo menos uma variável (de decisão ou de folga) se anula [3]. Deste modo, se  $x_j = 0$  para algum  $j = 1, \dots, n$ , uma solução do problema está na fronteira.

Vale lembrar que na seção anterior intuímos, por meio da resolução gráfica de um problema de otimização linear, que para encontrar uma solução ótima para o problema, basta pesquisar entre os vértices da região factível.

Assim, dado um sistema linear  $Ax = b$  com  $m$  equações,  $n$  variáveis ( $n \geq m$ ) e  $n-m$  variáveis *independentes*, para resolvê-lo, basta atribuímos quaisquer valores às variáveis independentes. Em particular, assumindo que as  $n-m$  variáveis independentes sejam nulas, o sistema  $m \times m$  restante pode ser resolvido por algum método de resolução de sistema linear que se julgar mais conveniente. Se a matriz  $m \times m$  for invertível, a solução do sistema é bem determinada [3]. Convém ressaltar que este procedimento de resolução pode ser estendido para quaisquer sistemas lineares.

Supondo que a matriz  $\mathbf{A}$  tem posto completo por linhas (posto  $(\mathbf{A})=m$ ), sempre é possível selecionar  $m$  colunas de  $\mathbf{A}$  de modo que estas formem uma matriz invertível.

Se  $\text{posto}(\mathbf{A})=m$ , isso implica que o número de equações é menor que ou igual ao número de variáveis, ou seja,  $m \leq n$ . Se  $m = n$  o sistema  $Ax = b$  tem solução única. Por outro lado, se  $m < n$ , o sistema admite infinitas soluções, no entanto, fixando as  $n-m$  variáveis independentes em zero, o sistema passa a ter solução única e bem determinada.

**Definição 2.5** (*Partição básica*) As colunas da matriz  $\mathbf{A}$  podem ser reorganizada da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \left[ \mathbf{B} \quad \mathbf{N} \right], \quad (3.13)$$

onde:

- $\mathbf{B}$ , matriz quadrada de ordem  $m$ , é chamada *matriz básica*. É formada por  $m$  colunas da matriz  $\mathbf{A}$  e é invertível.

- $\mathbf{N}$ , matriz de ordem  $m \times (n - m)$ , é chamada *matriz não básica*. É formada pelas  $n - m$  colunas restantes de  $\mathbf{A}$ .

A partição básica da matriz  $\mathbf{A}$  sugere também uma partição do vetor  $\mathbf{x}$ . Assim temos:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

onde:

- $\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix}$  é o vetor das *variáveis básicas*; e
- $\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{bmatrix}$  é o vetor das *variáveis não básicas* (variáveis independentes).

Em síntese, se considerarmos a partição básica (2.13) e a partição (2.14), podemos reescrever o sistema  $Ax = b$ , de forma equivalente, por:

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b$$

ou ainda

$$B_{x_B} + N_{x_N} = b. \quad (3.15)$$

Multiplicando a expressão obtida em (2.15) pela matriz inversa de  $\mathbf{B}$ , ou seja,  $B^{-1}$ , e fazendo uma simples manipulação algébrica, obtemos a expressão

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N_{x_N},$$

chamada de *solução geral*.

Se atribuímos valores quaisquer às  $n - m$  variáveis não básicas, em  $x_N$ , podemos determinar qualquer solução do sistema, desde que, a solução assim obtida satisfaça o sistema  $Ax = b$ .

**Definição 2.6** (*Solução básica*) Se fixarmos as  $n - m$  variáveis não básicas em zero, isto é,  $x_N = 0$ , a solução obtida em  $x_B = B^{-1}b - B^{-1}N_{x_N}$  é chamada *solução básica*.

**Definição 2.7** (*Solução básica factível*) Se  $x_B = B^{-1}b \geq 0$ , isto é, se todas as variáveis básicas são não negativas, dizemos que  $x$  é uma *solução básica factível*.

**Definição 2.8** (*Solução básica factível não degenerada*) Se  $x_B = B^{-1}b > 0$ , isto é, se todas as variáveis básicas são positivas, dizemos que  $x$  é uma *solução básica factível não degenerada*.

A partir do que foi exposto, e tendo em vista a formalização do Método Simplex que será apresentado mais adiante, podemos enunciar duas propriedades importantes que estão relacionadas a resolução de um problema de programação linear:

**Propriedade 2.1** Considere a região factível

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \text{ tal que } \mathbf{Ax}=\mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}.$$

Um ponto  $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$  é um vértice de  $\mathbf{S}$  se e somente se  $\mathbf{x}$  for uma solução básica factível [3].

**Propriedade 2.2** Se um problema de otimização linear tem solução ótima, então existe um vértice ótimo [3].

A propriedade 2.2 sugere um método de resolução para um problema de PL que consiste em determinar todas as soluções básicas factíveis (vértices delimitados pelas restrições do problema) e dentre esses, determinar a solução que optimize a função objetivo.

Ainda que a região factível  $\mathbf{S}$  tenha um número finito de vértices, haja vista que o problema possui um número finito de partições básicas, tal número pode ser muito grande em problemas práticos, inviabilizando a determinação de uma solução ótima por esse método.

O método simplex, desenvolvido para resolver problemas de programação linear, parte de uma solução básica factível e pesquisa soluções básicas melhores, até encontrar uma solução ótima para o problema.

### 3.4 TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Se um problema de PL apresentar apenas duas ou três variáveis de decisão, este problema pode ser facilmente resolvido utilizando a representação gráfica, no entanto, como a maioria dos problemas reais apresentam mais de três variáveis, o método gráfico é inviável. Neste sentido, por meio do Teorema Fundamental da Programação Linear, utilizando-se de soluções básicas factíveis quaisquer, é possível resolver problemas com inúmeras variáveis. Em outras palavras, o teorema mostra que para encontrar uma solução

ótima do problema, basta considerar as soluções básicas factíveis, pois, se existem soluções básicas factíveis, a solução ótima estará entre elas.

Considerando o seguinte problema de programação linear na forma padrão:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } z = c^T x \\ & \text{Sujeito a } Ax = b \\ & \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Se uma solução factível atinge o valor mínimo da função objetivo, esta solução é chamada *solução factível ótima*. Se esta solução é básica, é chamada de *solução básica factível ótima*.

**Teorema 2.1** (*Teorema Fundamental da Programação Linear*) Dada uma função linear na forma padrão onde  $A$  é uma matriz  $(m \times n)$  de posto  $m$ ,

1. se existe uma solução factível, então existe uma solução básica factível;
2. se existe uma solução factível ótima, então existe uma solução básica factível ótima.

Este teorema possibilita a resolução de um problema de PL a partir de suas soluções básicas factíveis.

### 3.5 O MÉTODO SIMPLEX

Devido a grande evolução da pesquisa operacional após o final da guerra, em 1947, foi implantado no Pentágono o projeto *SCOOP* (*Scientific Computation of Optimal programs*), cujo objetivo era apoiar as forças aéreas americana na tomada de decisões em suas operações. O projeto continha um grupo de pesquisadores que foram coordenados pelo matemático George Dantzig e pelo economista Marshall Wood.

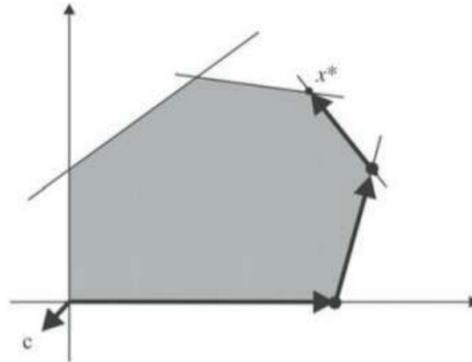
Durante esse projeto, Dantzig desenvolveu, formalizou e testou o método simplex para resolver problemas de otimização linear [3]. O método simplex, desenvolvido para resolver problemas de programação linear, parte de uma solução básica factível e pesquisa soluções básicas melhores, até encontrar uma solução ótima para o problema.

Como vimos anteriormente, resolver um problema de otimização linear consiste em determinar uma solução ótima para o problema. Em outras palavras, busca-se determinar uma solução que satisfaça todas as condições impostas (restrições do problema) e que atribua, simultaneamente, o melhor valor a função objetivo.

Em síntese, o método simplex é um algoritmo algébrico que nos permite determinar a solução ótima de um problema de otimização linear, pesquisando, dentre os vértices da

região factível (soluções básicas factíveis), aquele que otimiza a função objetivo. A figura a seguir ilustra iterações do método Simplex.

Figura 16 – Trajetórias percorridas pelo algoritmo simplex até a solução ótima (minimização).



Fonte – Arenales, p.67, 2007 adaptado pelo autor.

O que garante o sucesso deste método é que a região factível possui um número finito de bases, que pode ser calculado pela seguinte expressão:  $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ . Nas seções seguintes explicitaremos o processo envolvido na resolução de um problema linear utilizando o método simplex.

### 3.6 TRANSIÇÃO DA SOLUÇÃO GRÁFICA PARA A SOLUÇÃO ALGÉBRICA

Como mencionado na Seção 2.2, a solução gráfica de um problema de PL é um importante meio que nos possibilita compreender de que modo a solução algébrica deste tipo de problema pode ser determinada. Abaixo faremos algumas considerações que nos permitirão ver de que modo as ideias transmitidas pela resolução gráfica se associam com o método de resolução algébrica.

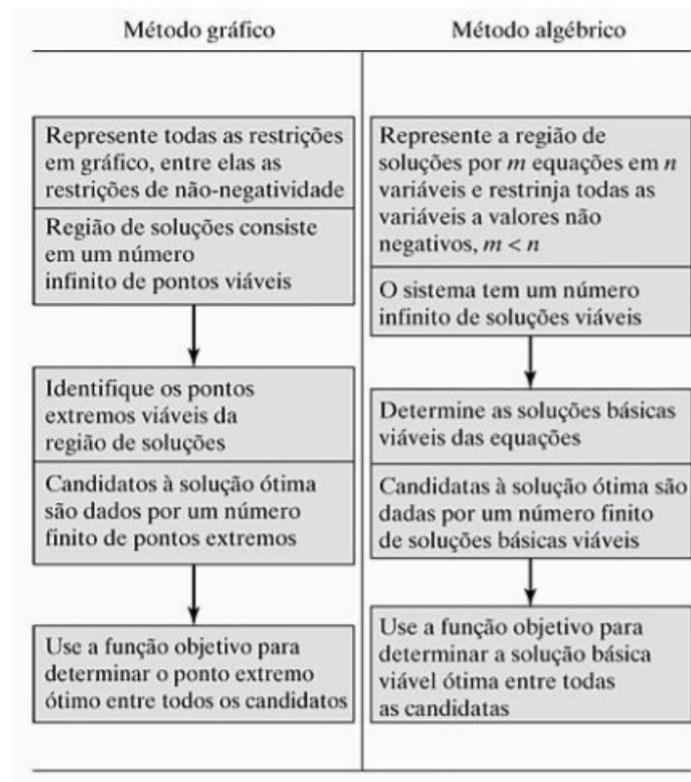
Na resolução gráfica, as restrições do problema delimitam meios-espacos, nos quais, todos os pontos que ali pertencem, são soluções do problema. O conjunto de todos os pontos que satisfazem as condições de restrição é chamado *Região factível*. Na resolução algébrica, por sua vez, a região de soluções é representada por  $m$  equações lineares simultâneas e  $n$  variáveis não negativas [1].

Visualmente, podemos verificar com o auxílio da resolução gráfica que, a região delimitada pelas restrições do problema possui um número infinito de pontos, logo, possui

um número infinito de soluções. Algebricamente também é possível fazermos essa mesma constatação, uma vez que, o número de equações ( $m$ ) é sempre menor que ou igual ao número de variáveis ( $n$ ). Vale lembrar que, se o número de equações for igual ao número de variáveis, isto é,  $m = n$ , e as equações forem consistentes, então, o sistema formado pelas restrições terá uma única solução. Mas, se  $m < n$  e as equações forem consistentes, então, o sistema formado pelo conjunto de restrições terá um número infinito de soluções.

A seguir, apresentamos as principais ideias que associam a resolução gráfica à solução algébrica.

Figura 17 – Transição da solução gráfica para a solução algébrica.



Fonte – Taha, p.40, 2008.

### 3.7 DETERMINANDO OS PONTOS EXTREMOS ADJACENTES

O algoritmo simplex parte sempre de uma solução básica factível, ou seja, de um ponto extremo em busca de um outro ponto extremo (adjacente) que atribua melhor valor a função objetivo. Um ponto extremo de um problema de PL pode ser determinado igualando as  $n - m$  variáveis não básicas a zero e resolvendo o sistema de ordem  $m \times m$

restante. Se este sistema resultar em uma solução única, então a solução encontrada é chamada solução básica e corresponde a um ponto extremo da região factível. Apesar de ser uma ideia relativamente simples de ser aceita, a pergunta que nos cabe é: Como passar de um ponto extremo (caso este não seja a solução ótima) para um outro ponto extremo da região factível? A resposta para essa pergunta é a seguinte: Deve-se substituir uma variável básica por uma variável não básica, e resolver, novamente, o novo sistema resultante. Essa técnica de substituição será melhor detalhada nas próximas seções.

Como podemos observar na figura 16 (seção 3.1), o método simplex percorre as bordas da região factível. O caminho percorrido a cada ponto extremo é chamado de **iteração**. A cada iteração o método simplex verifica se a presente solução obtida é o ótima, caso contrário, ele propõe uma mudança de vértice, em busca daquele que otimize a função objetivo.

Ao considerarmos um problema de PL onde cujo objetivo é maximizar (minimizar) a função objetivo, o processo de busca pelo vértice ótimo termina quando, estando num ponto extremo (vértice), os demais pontos extremos adjacentes fornecem valores menores (maiores) para a função objetivo.

A mudança de um vértice para outro, faz com que uma variável não básica assuma valor positivo, ao passo que, uma variável básica se anule, conservando sempre a factibilidade do problema a ser resolvido.

Em síntese, resolver um problema de PL pelo Método Simplex, consiste nos seguintes passos:

- i Encontrar uma solução básica factível inicial;
- ii Verificar se a solução encontrada (atual) é ótima. Se for, **pare!** E então o problema está resolvido. Caso contrário, continuar para o passo (*iii*).
- iii Determinar qual a variável não básica que deve entrar na base;
- iv Determinar qual a variável básica que deve sair da base;
- v Atualizar o sistema e resolvê-lo, a fim de obter uma nova solução básica factível, e voltar ao passo *ii*.

### 3.8 PIVOTEAMENTO

Para entender o processo envolvido no método simplex, faz-se necessário compreender o processo de pivoteamento de um sistema de equações lineares. Esse processo viabiliza

a resolução de sistemas de equações lineares. Para tanto, consideremos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (3.16)$$

com  $m \geq n$ . Por simplicidade de notação, o sistema acima pode ser reescrito em forma matricial como:

$$Ax = b.$$

Seja  $E^n$ , o espaço definido com um conjunto de  $m$  relações binárias que podem ser resolvidas por um vetor  $x$ , Denotando po  $a^i$  as linhas  $i$  da matriz  $A$ , podemos expressar o sistema (3.16) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a^1x &= b_1 \\ a^2x &= b_2 \\ &\vdots \\ a^mx &= b_m. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Assumindo que as equações em (3.2) são linearmente independentes, podemos substituir qualquer equação desse sistema por uma equação equivalente (múltipla), desde que, a mesma não seja nula. Esse método de substituição de equação por sua respectiva equação múltipla é conhecido como método da eliminação de Gauss-Jordan.

Sendo as  $m$  primeiras colunas do sistema linearmente independentes, depois de uma sequência de subtrações (por equações múltiplas), o sistema (3.1) pode ser expresso como:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & +y_{1,m+1}x_{m+1} & +y_{1,m+2}x_{m+2} & + \dots & +y_{1,n}x_n & = y_{10} \\ & x_2 & +y_{2,m+1}x_{m+1} & +y_{2,m+2}x_{m+2} & + \dots & +y_{2,n}x_n & = y_{20} \\ & & \vdots & & & \vdots & \\ & & & & & & \\ & x_m & +y_{m,m+1}x_{m+1} & + \dots & & +y_{m,n}x_n & = y_{m0} \end{array} \quad (3.18)$$

O sistema acima é conhecido como *forma canônica*, no qual, as variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_m$  são chamadas de variáveis *básicas* e as variáveis restantes, de *não básicas*. Este sistema também pode ser representado em forma matricial (ou tableau) a partir dos coeficientes das variáveis. Vejamos:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & \dots & 0 & y_{1,m+1} & \dots & y_{1n} & y_{10} \\
0 & 1 & \dots & 0 & y_{2,m+1} & \dots & y_{2n} & y_{20} \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & y_{m,m+1} & \dots & y_{mn} & y_{m0}
\end{array} \tag{3.19}$$

Se fixarmos as variáveis não básicas em zero, ou seja,  $x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0$ , o sistema apresentará solução básica do tipo

$$x_1 = y_{10}, x_2 = y_{20}, \dots, x_m = y_{m0}.$$

Um sistema de equações lineares resolvido pelo método do pivoteamento tem a seguinte forma: dado um sistema na forma canônica e supondo que uma variável básica se torne não-básica e vice-versa; o sistema original fica expresso em uma nova forma canônica que corresponderá ao novo conjunto de variáveis básicas e não-básicas. A pergunta que nos cabe aqui é: Como isso pode ser feito na prática? O procedimento é o seguinte: Consideremos, por exemplo, o sistema (3.2). Podemos substituir a variável básica  $x_p$ ,  $1 \leq p \leq m$ , pela variável não básica  $x_q$ . Convém ressaltar que isso pode ser feito se, e somente se,  $y_{pq}$  for diferente de zero, uma vez que  $y_{pq}$  tem que dividir toda a linha  $p$ , obtendo assim, um coeficiente unitário para  $x_p$  na equação de ordem  $p$ . Feito isso, e subtraindo adequadamente equações múltiplas da linha  $p$  de cada uma das outras linhas, podemos obter zero como coeficiente de  $x_q$  nas demais equações. Deste modo, a coluna de ordem  $q$  do tableau terá valor zero, exceto a variável  $x_p$ , que terá coeficiente unitário.

Os novos coeficientes da forma canônica são indicados por  $y'_{ij}$ , e podem ser representados algebricamente por

$$\begin{cases} y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{pj}}{y_{pq}} y_{iq}, & i \neq p \\ y'_{pj} = \frac{y_{pj}}{y_{pq}} \end{cases}$$

Na Programação Linear, as equações representadas acima são chamadas de *equação pivô*, e o elemento  $y_{pq}$  é chamado de *elemento pivô*.

### 3.9 REGRAS PARA DETERMINAR A VARIÁVEL QUE ENTRA E SAÍ DA BASE

Antes de discorrermos sobre as estratégias para determinar o par de variáveis que entra e sai da base, convém apresentarmos a seguinte definição que é amplamente utilizada em todo o desenvolvimento do método simplex:

**Solução não degenerada:** Toda solução básica factível de  $Ax = b$  com exatamente  $m$  componentes  $x_i > 0$ , é denominada solução básica factível não degenerada.

Para determinar qual variável entrará na base e qual sairá, duas condições precisam ser verificadas, a saber: **condição de otimalidade e condição de viabilidade**.

A *condição de otimalidade* diz que a variável que entra na base em um problema de minimização é a variável não básica que tiver o coeficiente mais positivos na função objetivo. Convém ressaltar que o valor ótimo da função objetivo é alcançado quando, após algumas iterações, todos os coeficientes da função objetivo das variáveis não básicas forem não positivos.

A *condição de viabilidade*, por sua vez, aponta, tanto para o problema de minimização quanto para o problema de maximização, a variável que deve sair da base. Assim, a variável que sai da base é a variável básica que apresentar a menor razão ( $\mathcal{E}$ ) não negativa, ou seja, que tenha um denominador estritamente positivo.

Mas afinal, como é determinada a razão  $\mathcal{E}$ , e de que modo ela contribui para a determinação de uma nova solução básica para o problema?

$\mathcal{E}$  é definido da seguinte forma:

$$\mathcal{E} = \min_{(i)} \left\{ \frac{x_i}{y_{iq}} : y_{iq} > 0 \right\}.$$

Consideremos  $x = x_1, x_2, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0$  como uma solução básica factível. Podemos representar esta solução da seguinte forma:

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_m a_m = b. \quad (3.20)$$

De acordo com a definição de *solução não degenerada*, para  $x_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) e  $a_q$  ( $q > m$ ), podemos representar  $a_q$  como variável básica da seguinte maneira:

$$a_q = y_{1q} a_1 + y_{2q} a_2 + \dots + y_{mq} a_m. \quad (3.21)$$

Multiplicando a expressão (3.6) por  $\mathcal{E} \geq 0$ , obtemos:

$$\mathcal{E} a_q = \mathcal{E} y_{1q} a_1 + \mathcal{E} y_{2q} a_2 + \dots + \mathcal{E} y_{mq} a_m \quad (3.22)$$

Por fim, subtraindo-se (3.7) de (3.5), tem-se:

$$(x_1 - \mathcal{E} y_{1q}) a_1 + (x_2 - \mathcal{E} y_{2q}) a_2 + \dots + (x_m - \mathcal{E} y_{mq}) a_m + \mathcal{E} a_q = b. \quad (3.23)$$

Deste modo, podemos constatar que, para qualquer  $\mathcal{E} \geq 0$ , a expressão (3.8) escreve o vetor  $b$  como uma combinação linear com no máximo,  $(m + 1)$  variáveis. Em particular, para  $\mathcal{E} = 0$ , tem-se uma solução básica factível para o sistema linear.

É interessante notar que, na medida em que  $\mathcal{E}$  aumenta, os coeficientes de  $a_q$  também aumentam. Para valores suficientemente pequenos de  $\mathcal{E}$ , tem-se uma solução factível não básica. Com isso, substituindo o vetor  $a_p$  (onde  $p$  corresponde ao índice mínimo na expressão  $\mathcal{E}$ ) por  $a_q$ , tem-se uma nova solução básica factível. Frente ao exposto, qualquer variável, cujo valor seja zero, pode ser candidata a deixar a base.

A seguir serão apresentados dois teoremas que nos auxiliarão na determinação da solução factível ótima de um problema de PL.

### 3.10 DETERMINANDO A SOLUÇÃO FACTÍVEL ÓTIMA

**Teorema 3.1** (*Melhor solução básica factível*): Seja  $z_0$  uma solução básica factível não degenerada, supondo para algum  $j$  tal que  $c_j - z_j < 0$ . Então existe uma solução básica factível com valor  $z < z_0$ . Se a coluna  $a_j$  puder ser substituída por algum vetor na base original que forneça uma nova solução básica factível, essa nova solução terá  $z < z_0$ . Caso  $a_j$  não possa ser substituída, então o conjunto de soluções factíveis é não limitado e a função objetivo pode se tornar arbitrariamente pequena.

*Demonstração:* Seja

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_1 & a_2 & \dots & a_m & a_{m+1} & \dots & a_n & b \\
 1 & 0 & \dots & 0 & y_{1,m+1} & \dots & y_{1,n} & y_{10} \\
 0 & 1 & \dots & 0 & y_{2,m+1} & \dots & y_{2,n} & y_{20} \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 1 & y_{m,m+1} & \dots & y_{mn} & y_{m0}
 \end{array} \tag{3.24}$$

a matriz dos coeficientes do sistema aumentado de  $Ax = b$ , o qual, apresenta uma matriz identidade nas  $m$  primeiras colunas, com

$$(x_B, 0) = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{m0}, 0, 0, \dots, 0), \tag{3.25}$$

sendo uma solução básica factível de (3.9).

Seja

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \tag{3.26}$$

a função objetivo a ser maximizada sujeita as restrições de  $Ax = b$ , com  $z_0$  sendo o valor da função  $z$  quando  $(x_B, 0)$ . Assim, podemos escrever  $z_0$  da seguinte forma:

$$z_0 = c_B^T x_B, c_B^T = (c_1, c_2, \dots, c_m). \quad (3.27)$$

Se atribuirmos valores arbitrários às variáveis  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ , por meio de operações elementares, os valores das  $m$  primeiras variáveis podem ser determinados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_{10} - \sum_{j=m+1}^n y_{1j} x_j \\ x_2 &= y_{20} - \sum_{j=m+1}^n y_{2j} x_j \\ &\vdots \\ x_m &= y_{m0} - \sum_{j=m+1}^n y_{mj} x_j. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Subtraindo  $x_1, x_2, \dots, x_m$  de (3.13) e usando a expressão descrita em (3.11), tem-se:

$$z = c^T x = z_0 + (c_{m+1} - z_{m+1})x_{m+1} + (c_{m+2} - z_{m+2})x_{m+2} + \dots + (c_n - z_n)x_n, \quad (3.29)$$

onde

$$z_j = y_{1j}c_1 + y_{2j}c_2 + \dots + y_{mj}c_m, \quad (3.30)$$

com  $m+1 \leq j \leq n$ . A expressão obtida em (3.15) auxilia na determinação da coluna pivô do sistema.

Além disso, se  $(x_B, 0)$  é uma solução básica factível com valor  $z_0$  e  $c_{m+1} - z_{m+1} < 0$ , então pode-se construir uma nova solução básica factível para o sistema na forma

$$x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m, 0, 0, \dots, 0), \quad (3.31)$$

com  $x'_{m+1} > 0$ .

Por fim, substituindo (3.16) em (3.14), obtem-se

$$z - z_0 = (c_{m+1} - z_{m+1})x'_{m+1} < 0,$$

o que implica

$$z < z_0$$

para qualquer solução factível do sistema. Contudo, deseja-se que  $x'_{m+1}$  assumo o maior valor possível. Como  $x'_{m+1}$  é crescente, as outras variáveis podem crescer, permanecerem

constantes, ou, decrescer. Logo,  $x'_{m+1}$  pode aumentar até  $x'_i = 0$ ,  $i \leq m$ , onde fornecerá uma nova solução básica factível para o sistema. Caso nenhum  $x'_i$  seja decrescente,  $x'_{m+1}$  pode crescer ilimitadamente [6].

**Teorema 3.2** (*Condição de otimalidade*): Se para alguma solução básica factível  $c_j - z_j \geq 0$ , para todo  $j$ , então a solução é ótima.

*Demonstração:* A demonstração deste teorema é uma consequência imediata de (3.14), pois, para qualquer solução básica do sistema tem-se que  $x_i \geq 0$  para todo  $i$ , portanto, o valor de  $z$  na função objetivo sempre satisfará  $z - z_0 \geq 0$  [6].

### 3.11 O MÉTODO SIMPLEX EM *TABLEAU*

A cada iteração do método simplex (mudança de ponto extremo), o novo sistema que equações lineares tem que solucionar  $Bx_B = b$ ,  $wB = c_B^T$  e  $By_k = a_k$ . Existem vários os procedimentos que podem nos conduzir a resolver e atualizar (se necessário) este sistema a fim de que possamos obter a melhor solução possível, ou seja, a solução que otimize a função objetivo.

A seguir, apresentaremos o método simplex na forma *tableau* [12].

O método simplex na forma *tableau*, devido a exposição simultânea de todos os elementos presentes no problema de PL, possibilita uma maior compreensão do algoritmo simplex.

Consideremos o seguinte problema de PL em sua forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} : z &= c^T x \\ \text{Sujeito a} : Ax &= b \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Seja  $x_B$  uma solução básica factível deste problema. Podemos reescrever (3.17) da seguinte forma:

$$\text{Minimizar} : z - c_B^T x_B - c_N^T x_N = 0 \tag{3.33}$$

$$\text{Sujeito a} : Bx_B + Nx_N = b \tag{3.34}$$

$$x_B, x_N \geq 0. \tag{3.35}$$

Multiplicando (3.19) por  $B^{-1}$  tem-se:

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \tag{3.36}$$

Novamente, multiplicando (3.21) por  $c_B^T$  e somando o resultado a equação (3.18) obtemos:

$$z + 0x_B + (c_B^T B^{-1}N - c_N^T)x_N = c_B^T b^{-1}b \quad (3.37)$$

Fixando  $x_N = 0$ , as equações (3.21) e (3.22) resultam em:

$$x_B = B^{-1}b \text{ e } z = c_B^T B^{-1}b.$$

Convenientemente, a partir de (3.21) e (3.22), podemos representar a solução básica factível atual no seguinte tableau:

Tabela 1 – Organização do PL na forma tableau

	$z$	$x_B$	$x_N$	
$z$	1	0	$c_B^T B^{-1}N - c_N^T$	$c_B^T B^{-1}b$
$x_B$	0	$I$	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

Fonte – Bazaraa et al, p.126, adaptado pelo autor

Neste tableau, representa-se por  $z$  uma variável básica a ser minimizada. A linha objetivo é denominada linha 0, e as demais linhas de 1 a  $m$ . A quarta coluna da tabela 1 indica os valores das variáveis básicas, incluindo os valores da função objetivo. Os valores das variáveis não básicas se encontram na terceira coluna. Além disso, na quinta coluna temos os valores das equações de restrição associados as variáveis básicas do sistema ( $B^{-1}$ ) e, o valor da função objetivo ( $c_B^T B^{-1}b$ ).

Vale ressaltar, mais uma vez, que as informações presentes no tableau possibilitam uma visão ampla do problema a ser resolvido. Por exemplo, a linha 0 (linha de custos), após cada iteração, permite verificar se o valor ótimo foi obtido por meio da análise dos valores das variáveis básicas.

Se após uma iteração, constata-se que nem todos  $z_j - c_j \leq 0$ , conclui-se que uma variável não básica irá crescer, e isso sugere que o valor da função objetivo pode ser melhorado. Se  $x_k$  (uma variável não básica) é crescente, o vetor  $y_k = B^{-1}a_k$  (que aparece nas linhas de 1 a  $m$ , abaixo de  $x_k$ ) ajuda a determinar o tamanho do aumento de  $x_k$ . Contudo, se  $y_k \leq 0$ ,  $x_k$  pode aumentar indefinidamente, o que acarreta que o valor da função objetivo também será ilimitado. Todavia, se pelo menos um dos componentes de  $y_k$  for positivo, então o crescimento de  $x_k$  será interrompido por alguma variável básica que, conseqüentemente, torna-se zero. A verificação da razão mínima determina o valor da variável de bloqueio, ou seja, a variável que deve deixar a base. E síntese, resolver um problema na forma tableau, implica seguir o seguinte esquema:

- i. Atualizar as variáveis básicas, bem como, os seus valores;
- ii. atualizar os valores  $(z_j - c_j)$  das novas variáveis não básicas;
- iii. Atualizar as colunas  $y_j$ .

O tableau em que  $z$  e  $x_B$  será resolvido em termos de  $x_N$  é chamado de forma canônica.

### 3.12 PIVOTEAMENTO NO *TABLEAU*

O algoritmo descrito na seção anterior pode ser desenvolvido no tableau através do pivoteamento. Seja  $x_k$  a variável a entrar na base e  $x_B$ , logo, o processo de pivoteamento pode ser iniciado seguindo os seguintes passos:

1. Divida a linha  $r$  por  $y_{rk}$ ;
2. Para  $i = 1, \dots, m$  e  $i \neq r$ , atualize a linha  $i$  adicionando a ela  $-y_{ik}$  vezes a nova linha  $r$ ;
3. Atualize a linha 0 adicionando a ela  $c_k - z_k$  vezes a linha  $r$ . As tabelas seguintes representam o problema de PL na forma tableau antes e depois do pivoteamento.

Tabela 2 – Tableau antes do pivoteamento

	$x_{B_1}$	$\dots$	$x_{B_r}$	$\dots$	$x_{B_m}$	$x_j$	$\dots$	$x_k$	$\dots$	
$x_{B_1}$	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$y_{1j}$	$\dots$	$y_{1k}$	$\dots$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$x_{B_r}$	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$y_{rj}$	$\dots$	$y_{rk}$	$\dots$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$x_{B_m}$	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$y_{mj}$	$\dots$	$y_{mk}$	$\dots$	$\bar{b}_m$
$z$	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$z_j - c_j$	$\dots$	$z_k - c_k$	$\dots$	$c_B^T \bar{b}$

Fonte – Bazaraa et al, p.127.

Vamos examinar algumas implicações da operação de pivoteamento:

1. No lado esquerdo do tableau fica registrado a substituição da variável  $x_{B_r}$  pela variável  $x_k$ , ou seja, a variável  $x_k$  entra na base e a variável  $x_{B_r}$  deixa a base. Deste modo, para a próxima iteração, a nova variável  $x_{B_r}$  é agora  $x_k$ .
2. O lado direito do tableau fornece os valores atuais das variáveis básicas. Os valores das variáveis não básicas são zero.

3. Suponha que as colunas originais das novas variáveis básicas e não básicas sejam respectivamente,  $\bar{B}$  e  $\bar{N}$ . Por meio de uma sequência de operações elementares (regras de pivoteamento de Gauss), o tableau é substituído pela matriz identidade  $\mathbf{I}$ . Desse modo o novo pivoteamento resultará em um novo tableau onde a nova  $\bar{B}^{-1}\bar{N}$  localizada abaixo das variáveis não básicas e um conjunto de valores atualizados  $(z_j - c_j)$  para as novas variáveis não básicas, como também, fornece os valores das novas variáveis básicas e da função objetivo.

Tabela 3 – Tableau após o pivoteamento

	$x_{B_1}$	$\dots$	$x_{B_r}$	$x_{B_m}$	$x_j$	$x_k$	
$x_{B_1}$	1	$\dots$	$-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}$	$\dots$	$y_{1j} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}y_{1k}$	$\dots$	$\bar{b}_1 - \frac{y_{1k}\bar{b}_r}{y_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{B_r}$	0	$\dots$	$\frac{1}{y_{rk}}$	$\dots$	$-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}$	$\dots$	$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{B_m}$	0	$\dots$	$-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}$	$\dots$	$y_{mj} - \frac{y_{rjk}}{y_{rk}}y_{mk}$	$\dots$	$\bar{b}_m - \frac{y_{mk}\bar{b}_r}{y_{rk}}$
Z	0	$\dots$	$\frac{c_k - z_k}{y_{rk}}$	$\dots$	$z_j - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k)$	$\dots$	$c_B^T \bar{b} - (z_k - c_k) \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$

Fonte – Bazaraa et al, p.128.

## 4 TEORIA DA DUALIDADE

Sem dúvida, o desenvolvimento da Teoria da Dualidade foi uma das mais importantes descobertas depois do desenvolvimento do algoritmo - método simplex - que viabilizou a resolução de problemas de programação linear.

Antes de discorrermos pontualmente sobre a teoria da dualidade, cabe aqui, fazermos um apontamento acerca das soluções factíveis de um problema de PL.

Como vimos nos capítulos anteriores, cada solução factível de um PL traz associado a ela um limite superior, no caso de um problema de minimização, ou um limite inferior, no caso de um problema de maximização.

Se considerarmos um problema de PL no qual busca-se a minimização da função objetivo, ao encontrar uma solução factível, fica estabelecido, automaticamente, um valor limite para a função objetivo, ou seja, podemos garantir que ela não assumirá valores maiores que o já encontrado. No entanto, não há como garantir que o valor mínimo de tal função tenha sido obtido por meio dessa solução. O mais comum é que outras soluções factíveis levem a função objetivo a obter valores cada vez menores. Para o caso de problemas de PL cujo objetivo é maximizar a função objetivo, o raciocínio acima é o mesmo, ainda que tenhamos de considerar as especificidades de cada um.

Embora o procedimento de estabelecer limites para o PL seja interessante, o mesmo não é suficiente para a determinação da solução ótima de um problema de otimização linear, uma vez que, a cada nova solução factível encontrada, novos limites são estabelecidos. Com isso, não é possível saber o quão perto estamos de obter a solução ótima do problema.

Contudo, uma vez que podemos estabelecer um limite superior (no caso de um problema de minimização), seria interessante se pudéssemos também, estabelecer um limite inferior para o mesmo problema. Assim, teríamos a garantia de que o valor ótimo estaria neste intervalo.

Na tentativa de estabelecer um limite superior e inferior para um problema de otimização linear, os quais determinariam um intervalo onde a solução ótima do problema estaria, surge a teoria da dualidade, a qual diz que para todo problema de minimização de PL na forma padrão, existe um problema de maximização associado, e vice-versa.

### 4.1 PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PRIMAL-DUAL

De maneira geral, todo problema de otimização linear em sua forma padrão está associado a um segundo problema de otimização, de modo que os dois possuem uma estreita relação e compartilham de algumas propriedades. Ao primeiro denominamos de *primal* e ao segundo, *dual*.

Estando estes dois problemas interrelacionados, convém ressaltar que a solução ótima de um fornece informações completas sobre o outro [9].

A seguir, representaremos de forma genérica os problemas *primal* e *dual* [9].

Consideremos o seguinte problema de programação linear - problema *primal* - em sua forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } z &= \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \\ \text{Sujeito a: } \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0. \end{aligned}$$

O *dual* desse problema pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } w &= \sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i \\ \text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i &\geq c_j, \quad j = 1, \dots, n \\ y_i &\geq 0. \end{aligned}$$

Aqui cabem algumas considerações acerca desses dois problemas:

1. Se o objetivo do problema primal é maximizar a função objetivo, o do outro será de minimizar, e vice-versa.
2. Cada restrição no problema primal corresponde a uma variável no dual, ou seja, se o primal possui  $m$  restrições, o dual terá  $m$  variáveis.
3. Os elementos  $b_m$  (valores localizados do lado direito das restrições) do problema primal serão os coeficientes da função objetivo do dual.
4. Se o problema primal tem restrições do tipo "menor que ou igual" ( $\leq$ ), o problema dual terá restrições do tipo "maior que ou igual" ( $\geq$ ).
5.  $x_j$  e  $y_i$  são não negativas.

Por simplicidade de notação, os problemas *primal* e *dual* podem ser representados da seguinte forma matricial:

i. Problema de PL *primal* na forma padrão:

$$\text{Maximizar } z = c^T x$$

$$\text{Sujeito a: } Ax \geq b$$

$$x \geq 0,$$

onde:

- $z$ : é o valor da função objetivo;
- $c^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$  é o vetor de custos;
- $x^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$  é o vetor das variáveis de decisão;
- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$  é uma matriz de ordem  $m \times n$ , chamada matriz dos coeficientes;
- $b^T = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$  é o vetor dos termos independentes.

ii. Problema *dual*:

$$\text{Minimizar } w = b^T y$$

$$\text{Sujeito a: } A^T y \leq c$$

$$y \geq 0,$$

onde:

- $w$ : é o valor da função objetivo;
- $y^T = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m)$  é o vetor das variáveis de decisão;
- $b^T = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$  é o vetor de custos;

- $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$  é uma matriz de ordem  $n \times m$ , chamada matriz dos coeficientes;
- $c^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$  é o vetor dos termos independentes.

Comparando ambos os problemas é possível perceber que matriz  $A$  é de ordem  $m \times n$ , e  $B$  e  $x$  são vetores colunas de dimensão  $n$ , sendo  $x$  o vetor das variáveis do problema *primal*. Também é possível observar que  $c^T$  e  $y^T$  são, respectivamente, vetores linhas de dimensões  $n$  e  $m$ ,  $y$  é o vetor das variáveis do problema *dual*.

#### 4.1.1 EXEMPLO NUMÉRICO: PROBLEMA PRIMAL-DUAL

Problema *primal*. Considere o seguinte problema de minimização na forma padrão:

$$\text{Minimizar } z = -2x_1 - x_2$$

$$\text{Sujeito a: } x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq \frac{7}{2}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Do problema *primal* apresentado acima, decorre o seguinte problema *dual*:

$$\text{Maximizar: } w = 4y_1 + 3y_2 + \frac{7}{2}y_3$$

$$\text{Sujeito a: } y_1 + y_2 \geq -2$$

$$y_1 + y_3 \geq -1$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

O exemplo apresentado tem por objetivo, simplesmente, ilustrar de forma prática a teoria apresentada na seção anterior.

## 4.2 IMPORTANTES PROPRIEDADES RELACIONADAS AOS PROBLEMAS PRIMAL-DUAL

Como mencionado anteriormente, os problemas primal e dual possuem uma inter-relação, de modo que a solução ótima de um deles, fornece importantes informações sobre o outro.

Partindo desse pressuposto, a seguir enunciaremos algumas propriedades que expressam uma relação básica entre os valores das funções objetivo dos problemas primal e dual.

**Propriedade 4.1** (*Teoria da dualidade fraca*) Se  $x$  for uma solução viável para o problema primal (problema de maximização) e  $y$  uma solução viável para o problema dual, então:

$$c^T x \leq b^T y.$$

**Propriedade 4.2** (*Teoria da dualidade forte*) Se  $x^*$  for uma solução ótima para o problema primal (problema de maximização) e  $y^*$  uma solução ótima para o problema dual, então:

$$c^T x^* = b^T y^*.$$

A propriedade 4.1 nos permite determinar um limite para o valor da função objetivo de ambos problemas. Assim, uma solução viável de um dos problemas, automaticamente, produz um limite com relação a solução factível do outro. Em outras palavras, é possível determinarmos um intervalo no qual podemos garantir que a solução ótima esteja.

A propriedade 4.2, por sua vez, nos garante que se ambas soluções (do problema primal e dual) forem ótimas, então elas serão iguais.

**Propriedade 4.3** (*Propriedade da simetria*) O dual de um problema dual é o primal.

Esta propriedade garante que todas as afirmações (propriedades) feitas anteriormente também valem se aplicadas no sentido inverso, deste modo, a solução ótima de um deles, leva a solução ótima do outro.

## 5 INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA DESCRITIVA

A Estatística é uma ciência cujo campo de aplicação estende-se a muitas áreas do conhecimento. Em sua essência, ela é a ciência que apresenta processos próprios para coletar, apresentar e interpretar adequadamente conjuntos de dados, sejam eles numéricos ou não. Pode-se dizer que o seu objetivo é o de apresentar informações sobre dados em análise para que se tenha maior compreensão dos fatos que os mesmos representam [7].

Estando os nossos estudos voltados para a área de economia, podemos dizer que a estatística, em especial a descritiva, desempenha um papel de fundamental importância, uma vez que proporciona aos gestores uma visão sistêmica do setor empresarial e econômico, auxiliando-os na tomada de decisões.

A estatística descritiva tem por objetivo básico sintetizar um conjunto de valores de mesma natureza, permitindo, dessa forma, que se tenha uma visão global da variação desses valores, e para isso, organiza e descreve os dados coletados [7].

A Teoria Moderna de Portifólios de Markowitz utiliza-se de alguns parâmetros estatísticos para a análise e seleção de carteiras de investimentos. Frente ao exposto, abaixo segue uma breve explanação de alguns parâmetros estatísticos que julgamos ser relevantes ao nosso estudo.

### 5.1 MEDIDAS DE CENTRALIDADE E VARIABILIDADE

As medidas de centralidade são números reais que tem por objetivo a representação de um conjunto de dados quantitativos, ou seja, dados um conjunto de dados numéricos, estes podem ser representados por um único valor. A este valor, denominamos medida de centralidade. Como exemplo de medida de centralidade, podemos citar: média aritmética, média aritmética ponderada, mediana e moda. A utilização de uma, em detrimento à outra, depende dos objetivos das análises a serem realizadas.

As medidas de variabilidade, por sua vez, tendem a expressar o grau de variação de um conjunto de dados numéricos com relação a sua média. Variância, desvio padrão e coeficiente de variação, são alguns exemplos de medidas de variabilidade.

#### 5.1.1 MÉDIA ARITMÉTICA

Seja  $x$  uma variável quantitativa e,  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  os valores assumidos por  $x$ . Define-se *média aritmética* de  $x$  - representada por  $\bar{x}$  - como sendo a divisão da soma de todos os termos  $(x_i, i = 1 \dots n)$  pelo número  $(n)$  de termos. Em símbolos matemáticos, temos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

### 5.1.2 MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_k$  os valores assumidos por  $x$  com frequências absolutas, respectivamente, iguais a  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . Define-se *média aritmética ponderada* de  $x$  - representada por  $\bar{x}$  - como a divisão da soma de todos os produtos  $x_i \cdot n_i (i = 1, \dots, k)$  pela soma das frequências. Em símbolos, temos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}.$$

### 5.1.3 VARIÂNCIA

A variância mede o grau de variabilidade de um conjunto de dados. Ela utiliza todos os dados da amostra coletada.

Seja  $x$  uma variável quantitativa;  $x_1, x_2, \dots, x_n$  os valores assumidos por  $x$ ; e,  $\bar{x}$  a média aritmética correspondente a esses valores. A diferença entre  $\bar{x}$  e  $x_i (i = 1, \dots, n)$  é chamada *desvio em torno da média*.

Assim, define-se *variância* desses valores  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - representada por  $\sigma^2$  - como:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

Notemos que cada termo do numerador corresponde ao quadrado da diferença entre um valor observado e o valor médio. Essa diferença traduz o quanto um valor observado se distancia do valor médio, sendo portanto, uma medida do grau de variabilidade dos dados em estudo [8].

Em síntese, a variância ( $\sigma^2$ ) é a média aritmética dos quadrados dos desvios em torno da média.

### 5.1.4 DESVIO PADRÃO

Seja  $x$  uma variável quantitativa e  $x_1, x_2, \dots, x_n$  os valores assumidos por  $x$ . Define-se *desvio padrão* como a raiz quadrada da variância de  $x$ . Em símbolos, tem-se:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}.$$

### 5.1.5 ESCORE PADRONIZADO

Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n$  por uma variável quantitativa  $x$  em uma amostra com  $n$  elementos. Sejam  $\bar{x}$  e  $\sigma$  a média aritmética e o desvio padrão dessa amostra. Define-se *escore padronizado* - representado por  $z$  - da seguinte maneira:

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}, (i = 1, \dots, n).$$

O escore padronizado é uma medida muito útil quando se deseja fazer uma comparação dos resultados individuais.

### 5.1.6 COEFICIENTE DE VARIAÇÃO

O coeficiente de variação é um parâmetro estatístico que expressa a variabilidade dos dados analisados em relação à média aritmética e ao desvio padrão. Geralmente, é expresso em termos percentuais. Define-se *coeficiente de variação* - representado por  $CV$  - como:

$$CV = \left(\frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\right)\%$$

É importante ressaltar que quanto menor o  $CV$ , mais homogêneo é o conjunto de dados analisados.

### 5.1.7 COVARIÂNCIA

A covariância é uma medida que determina como duas variáveis (ou mais) se relacionam em conjunto. Em outras palavras, ela mede o grau de dependência linear entre tais variáveis analisadas, no entanto, todas as variáveis precisam estar expressas numa mesma unidade de medida.

Sejam  $x$  e  $y$  duas variáveis quantitativas;  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $y_1, y_2, \dots, y_n$  os valores assumidos por  $x$  e  $y$ , respectivamente. Define-se *covariância* das amostras - representada por  $S_{xy}$  - da seguinte forma:

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}, i = 1, \dots, n.$$

Sendo a covariância uma medida de variabilidade conjunta, se as variáveis apresentarem um valor positivo, as mesmas tendem a mostrar um comportamento semelhante, ou seja, os menores (ou maiores) valores de uma variável estão relacionados com os menores (ou maiores) valores da outra variável.

Em síntese, podemos observar que o sinal da covariância expressa uma tendência linear entre as variáveis analisadas.

### 5.1.8 COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO

O coeficiente de correlação também é uma medida que expressa o grau de associação linear entre variáveis. Diferente da covariância, essa medida independe das unidades de medidas das mesmas.

Define-se *coeficiente de correlação* - representada por  $r_{xy}$  - da seguinte maneira:

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

onde:

- $S_{xy}$ : covariância das amostras;
- $\sigma_x$ : desvio padrão da amostra  $x$ ;
- $\sigma_y$ : desvio padrão da amostra  $y$ .

Cabe ressaltar que o coeficiente de correlação é uma medida que pode variar de  $[-1, 1]$ .

Se  $r_{xy} = +1,00$ , isso indica que as variáveis  $x$  e  $y$  têm uma correlação linear positiva perfeita. Em contrapartida, se  $r_{xy} = -1,00$ , diz-se que as variáveis têm uma correlação linear negativa perfeita. As variáveis analisadas podem ainda não possuir nenhuma relação linear, e isso é evidenciado quando  $r_{xy} = 0$ .

Em geral, se o coeficiente de correlação for próximo a  $-1,00$  e  $+1,00$ , dizemos que as variáveis têm uma correlação linear forte. Por outro lado, se for próximo a  $0$ , dizemos que têm uma correlação linear fraca.

## 6 TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIOS DE MARKOWITZ NA SELEÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS

A Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz é uma importante ferramenta que tende a auxiliar os investidores (e futuros investidores) na seleção de uma carteira de investimento ótima, levando em consideração o perfil de cada investidor. Para tanto, Markowitz utiliza-se da modelagem matemática, bem como de alguns parâmetros estatísticos para a formulação de um problema de programação linear que possibilita a obtenção de tal carteira.

Visando compreender a teoria de Markowitz em sua totalidade, iniciamos este capítulo apresentando alguns conceitos na área de economia que corroboram para este fim.

### 6.1 CONCEITOS BÁSICOS EM ECONOMIA

*Bolsa de valores:* são entidades, cujo objetivo básico é o de manter um local em condições adequadas para a realização, entre seus membros, de operações de compra e venda de títulos e valores mobiliários [13].

*Inflação:* é um índice percentual que reflete o aumento persistente e generalizado dos preços de bens e serviços num determinado período analisado e consequente perda do poder de compra. A inflação é uma média de aumento de preços, e por este motivo, não atinge todos os preços uniformemente. Alguns fatores causadores da inflação são: aumento da quantidade de moeda no mercado; aumento na demanda de produtos; aumento nos custos dos produtos ou serviços etc.

*Deflação:* é um índice percentual que reflete a queda persistente dos preços de bens e de serviços. Ao contrário do que se pensa, a deflação acarreta uma série de problemas, tais como, queda de investimentos e consequente aumento do desemprego.

*Juros:* é o rendimento que se obtém quando se empresta dinheiro por determinado período de tempo. É uma forma de compensar o credor (aquele que empresta o dinheiro) pelo tempo que ficará sem utilizar o dinheiro emprestado. Os juros são taxas percentuais fixadas pelo credor. Existem vários fatores que podem influenciar no cálculo das taxas de juros, a saber: inflação do período; risco do empréstimo; acordos em contrato das partes interessadas etc.

*Lucro:* é todo rendimento positivo obtido através de uma negociação econômica ou

de qualquer outro gênero. Na área econômica, dizemos que o lucro é tudo o que foi ganho ou recebido a partir de um ato de comercialização financeira.

*Capital:* é o valor a ser investido. Quando uma pessoa (física ou jurídica) faz determinado investimento financeiro, o valor monetário investido é chamado capital.

*Investimento:* é uma aplicação financeira que tem por expectativa a obtenção de lucro, ou simplesmente, a preservação do capital contra a inflação. Busca-se por meio de investimentos a geração de renda passiva. Os investimentos podem ser classificados em dois grandes grupos: os de renda fixa e os de renda variável. Os investimentos em renda fixa estão associados a uma taxa de juros pré-fixadas, ou seja, o investidor, ao final de um período de tempo, sabe exatamente quanto irá receber. Exemplos comuns de investimentos em renda fixa são: caderneta de poupança; certificados de depósitos bancários (CDBs); títulos públicos etc. Os investimentos de renda variável são investimentos em ações. Em via de regra, dão retorno maior quando comparados aos investimentos de renda fixa, no entanto, em certas circunstâncias, podem não dar retorno, ou até mesmo, retorno negativo (perda). Os investimentos de renda variável são negociados nas bolsas de valores. Convém ressaltar que o potencial de valorização de uma ação é ilimitado.

*Ativos:* representam as ações de uma empresa.

*Retorno:* é o lucro (ou prejuízo) obtido por meio de investimentos num dado período de tempo.

*Ações:* Ações representam um direito sobre os ativos e lucros de uma empresa. São frações do capital social de uma empresa aberta (Sociedade Anônima – S.A), isto é, são pequenas partes de uma empresa que podem ser obtidas por um investidor. O potencial de valorização de uma ação é ilimitado. Em síntese, ação é um título de renda variável, que oferece ao investidor resultados (ganhos ou perdas) de acordo com o comportamento de seus preços de mercado [13].

*Risco:* é a possibilidade de perda de um investimento financeiro. Os riscos de um investimento podem ser classificados em diversificável e não-diversificável. Os riscos diversificáveis são passíveis de redução. Este risco está associado a determinados setores específicos da economia, e por este motivo, não afeta todos os investimentos uniformemente. O risco não-diversificável ou risco de mercado são acontecimentos que afetam o mercado financeiro como um todo. A este tipo de risco está associado, por exemplo, a taxa de inflação, taxas de câmbio, juros, instabilidade política etc.

*Taxa Selic:* Selic é a abreviação de "Sistema Especial de Liquidação e Custódia". Em linhas gerais, é a taxa básica de juros da economia no Brasil. É determinada pelo cálculo da taxa média ponderada dos juros praticados pelas instituições financeiras.

*Portfólio*: é uma carteira de investimentos formado por diferentes ativos financeiros.

*Diversificação*: é uma forma de investir o capital de modo fracionado em ativos de diversos setores da economia, ou seja, o investidor divide o capital a ser investido e aplica cada parcela do capital em diferentes ativos. Em síntese, diversificação significa não concentrar todos os investimentos em um só ativo, procurando selecionar várias alternativas que apresentam comportamentos não coincidentes. O objetivo da diversificação é reduzir os riscos [13].

*Volatilidade*: Na área financeira a volatilidade é uma medida de risco, ou seja, é uma medida de dispersão dos retornos de um investimento. Quanto maior a oscilação no preço das ações de uma empresa, maior são os riscos.

## 6.2 TEORIA MODERNA DE PORTFÓLIOS DE MARKOWITZ

Na criação de uma carteira de investimentos, geralmente, o investidor busca obter o maior retorno possível com o menor risco de perda. Neste sentido, a Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz tende a nos auxiliar nas decisões a serem tomadas quando o assunto é o mercado financeiro. No modelo da média-variância de Markowitz, o retorno esperado e a volatilidade dos ativos são extremamente importantes para a seleção da carteira de investimento ótima. A teoria de Markowitz pressupõe a criação de uma carteira de investimento ótima de modo a maximizar o retorno esperado, ou, minimizar o risco do portfólio. Assim, de modo a atingir o objetivo estipulado, faz-se necessário a criação de um modelo matemático para auxiliar na seleção de ativos que irão compor tal carteira. Mas afinal, como se dá a formulação do modelo matemático que auxilia na seleção de ativos, de modo a otimizar a carteira de investimentos? Para a formulação do modelo matemático, Markowitz considera a rentabilidade de cada ativo como sendo uma variável aleatória, e assim, uma carteira é formada a partir da combinação ponderada de tais ativos. Deste modo, o retorno esperado de uma carteira é calculado com base na combinação ponderada dos retornos esperados de cada ativo. Em símbolos matemáticos, tem-se:

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i,$$

onde:

- $R_p$ : retorno esperado da carteira;
- $n$ : número de ativos;

- $R_i$ : retorno esperado de cada ativo; e,
- $w_i$ : peso do ativo  $i$  na composição da carteira.

Sendo o retorno da carteira uma variável aleatória, ela tem um valor esperado e uma variância.

Diferente do retorno esperado, o risco de um portfólio não é mensurado pela média ponderada dos riscos de cada ativo que compõe a carteira, mas sim, por uma função que correlaciona as variâncias de cada ativo. Deste modo, tem-se que para carteiras formadas por diferentes ativos, a variância é dada por [10]:

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j s_{ij},$$

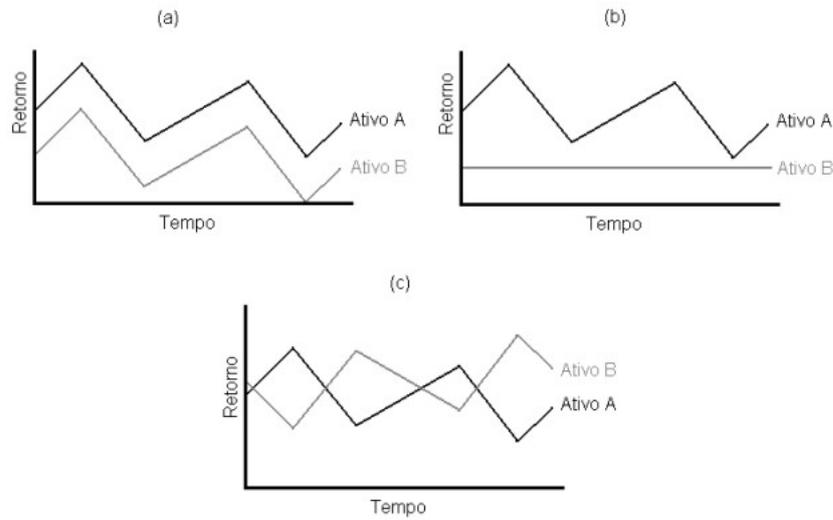
onde:

- $V$ : é a variância da carteira;
- $n$ : é o número de ativos;
- $w_i$ : peso do ativo  $i$  na composição da carteira;
- $w_j$ : peso do ativo  $j$  na composição da carteira; e,
- $s_{ij}$ : covariância entre o par de ativos  $i$  e  $j$ , se  $i$  for diferente de  $j$ , e variância se  $i$  for igual a  $j$ .

O risco de um ativo qualquer pode ser mensurado pela variabilidade dos retornos projetados em torno do retorno esperado, ou seja, pelo grau de dispersão dos retornos em relação à média. A medida estatística usualmente adotada para quantificar o risco de um ativo é o desvio-padrão [13].

De modo a obter uma carteira com riscos reduzidos, Markowitz relacionou o grau de correlação entre os retornos de dois ativos, procurando combinar ativos que apresentassem correlações baixas. Escolhendo ativos que apresentem correlações próximas de zero ou negativas, o risco do portfólio é reduzido. Assim, quanto mais próximo de +1 o valor da correlação entre dois ativos, dizemos que há uma proximidade entre o comportamento dos mesmos, ou seja, se um sofre uma alteração positiva, o outro também sofrerá a mesma variação. No entanto, quanto mais próximo de -1, dizemos que tais ativos sofrem variações contrárias, ou seja, se um aumenta, o outro diminui e vice-versa. Se o coeficiente de correlação for zero, dizemos que não existe uma relação entre os ativos analisados. A figura a seguir ilustra esses três casos apresentados.

Figura 18 – Correlação entre dois ativos (A e B): (a) coeficiente de correlação igual a  $+1$ ; (b) coeficiente de correlação igual a  $0$ ; e, (c) coeficiente de correlação igual a  $-1$

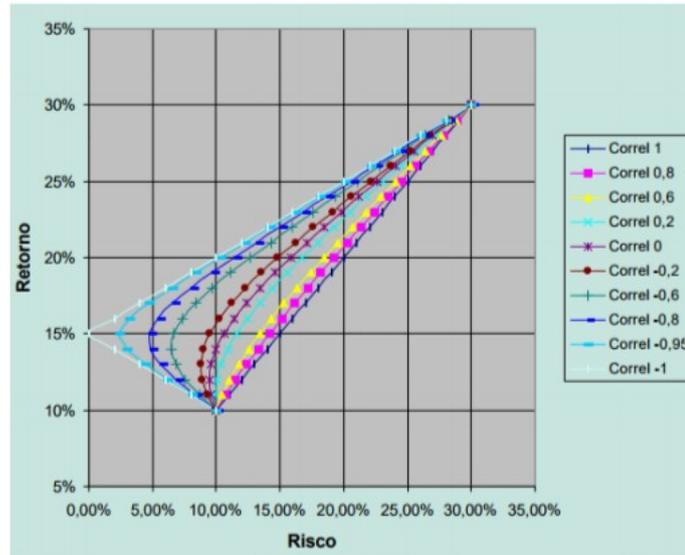


Fonte – Albuquerque, 2009.

Outro ponto relevante da teoria de Markowitz diz respeito ao conceito de **fronteira eficiente**. Dentre as inúmeras possibilidades de combinações para a composição de uma carteira com  $n$  ativos, o conjunto de carteiras cuja distribuição dos pesos dos ativos apresenta, para cada nível de risco o máximo retorno possível, e para cada nível de retorno o menor risco possível, é denominado fronteira eficiente.

Hipoteticamente, a figura a seguir ilustra a correlação entre dois ativos, evidenciando, na prática, a chamada fronteira eficiente.

Figura 19 – Binômio risco-retorno: correlação entre dois ativos evidenciados na *fronteira eficiente*



Fonte – Gonçalves Jr., 2002.

Do ponto de vista de um investidor, dentre todas as carteiras que apresente o menor risco, o investidor deverá escolher aquela que apresente o maior retorno possível. Segundo Markowitz, ao considerar o binômio risco-retorno, o investidor deverá sempre optar por uma carteira que compõe a fronteira eficiente. No tocante a análise da Figura 19, podemos perceber que quanto mais o coeficiente de correlação se aproxima de -1, menor é o risco. Por outro lado, quanto mais próximo de +1, na medida em que o retorno esperado sofre um aumento, o risco também aumenta proporcionalmente. Na prática, encontrar ativos com correlação perfeitamente negativa (-1) é impossível.

### 6.3 CRITÉRIOS PARA ANÁLISE DE INVESTIMENTOS E PERFIL DE INVESTIDORES

A decisão de investir em ações deve ser precedida de uma análise das expectativas dos rendimentos a serem auferidos ao longo do prazo de permanência em determinada posição acionária e, também, da valorização que venha a ocorrer nesses valores mobiliários. Em verdade, a principal tarefa de um investidor centra-se na avaliação do retorno esperado de seu capital aplicado, o qual deverá ser condizente com o risco assumido [13].

É fato que, se um investidor conhece os riscos e retornos que ele está sujeito ao montar uma carteira de investimentos, provavelmente ele optará por aquela que lhe ofereça

uma relação risco-retorno de acordo com suas expectativas e objetivos a curto, médio e longo prazo. Deste modo, se dois ativos apresentam o mesmo nível de retorno, certamente escolherá o ativo que apresente menor risco. Analogamente, se dois ativos apresentam o mesmo nível de risco, certamente escolherá o ativo que apresente maior retorno. Em síntese, diante da possibilidade de escolha em aplicar entre dois ativos que ofereçam o mesmo retorno esperado, o investidor deve escolher aquele que apresente um maior grau de certeza quanto a sua rentabilidade, isto é, aquele que apresente menor dispersão (variância ou desvio padrão).

Um critério extremamente importante que deve ser levado em consideração na análise de investimentos é a diversificação de ativos. A concentração de investimentos em um único ativo (ou em um mesmo segmento de mercado) gera maior risco para o investidor. A diversificação de ativos para a composição de uma carteira de investimentos, via de regra, pressupõe que os mesmos pertençam a setores econômicos diferentes, de modo que, se um ativo sofrer uma desvalorização decorrente de algum fator específico de seu setor, os demais ativos não estarão sujeitos aos mesmos riscos. Convém ressaltar que a diversificação de ativos pode proporcionar à carteira um risco igual (ou até mesmo menor) que o risco individual de cada ativo que a compõe, podendo ainda, em muitos casos, ser menor que o risco do ativo que apresenta maior segurança.

Os modelos de avaliação procuram, em essência, projetar o comportamento futuro dos ativos financeiros, formulando previsões com relação às variações de seus preços no mercado. Basicamente, são adotados dois critérios de análise para investimento em ações: *análise técnica* e *análise fundamentalista* [13].

A *análise técnica* tem por objetivo estabelecer projeções do comportamento futuro das ações a partir de observações realizadas no passado com relação ao desempenho das mesmas no mercado. A *análise fundamentalista*, por sua vez, consiste na atribuição, pela própria empresa, de um valor intrínseco para cada ação. Este valor é calculado com base em fatores internos (demonstrativos financeiros) e externos (mercado acionário) à empresa.

Contudo, a definição de carteira de investimento ótima é muito relativa, uma vez que, aquela que pode ser considerada ótima para um determinado investidor, pode não ser ótima para outro. Por exemplo, há investidores que abrem mão de um pouco de segurança em busca de grandes retornos, em contrapartida, há outro grupo de investidores que abre mão de retornos mais vantajosos em prol de não correr riscos e simplesmente preservar o seu capital da inflação. Com base no exemplo exposto, podemos concluir que existem diferentes tipos de investidores.

Costumeiramente, os investidores podem ser classificados em três categorias, a saber: conservadores, moderados, e agressivos (propensos a riscos). O investidor conservador

tem aversão a correr riscos em seus investimentos. Ele abre mão de maior retorno em prol de maior segurança. Na maioria das vezes, busca apenas proteger o seu capital da inflação. O moderado, por sua vez, busca um pouco mais de retorno, no entanto, não expõe todo o seu capital ao risco. Ele é mais ousado que o investidor conservador, contudo, toma suas decisões de forma bem planejada. Por fim, o investidor agressivo prioriza o máximo retorno financeiro possível. É um tipo de investidor que aceita correr mais riscos nos investimentos em prol de maior rentabilidade. Ao mesmo tempo que este perfil pode obter ótimos retornos em suas aplicações, também está sujeito a grandes perdas.

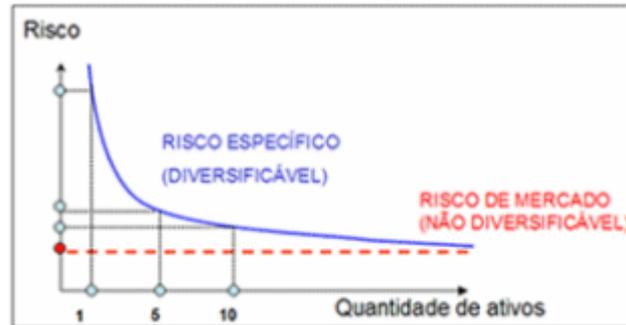
Com base no exposto acima, antes de criar uma carteira de investimentos, faz-se necessário que o investidor saiba, a priori, em qual perfil ele melhor se encaixa, uma vez que, é ele que deve ditar quais investimentos serão mais convenientes, a fim de minimizar os riscos ou maximizar a sua rentabilidade. Com isso, concluímos que nunca existirá uma única carteira ótima que contemple todos os perfis de investidores.

#### **6.4 RISCO DE UMA CARTEIRA DE INVESTIMENTOS**

A teoria do portfólio diz que o risco de um ativo fora de uma carteira é diferente de seu risco quando o mesmo está incluído na carteira. De modo geral, o risco de um ativo é mensurado pela sua contribuição ao risco total da carteira [13].

Uma maneira de reduzir o risco de uma carteira é diversificar os ativos que a compõe. Diversificar implica em selecionar ativos de diferentes setores econômicos, tais como: petróleo, têxtil, comércio varejista, finanças, saúde etc. Quanto maior for o número de ativos (diversificados) em uma carteira, é possível reduzir o seu risco, porém, o mesmo nunca deixará de existir, haja vista que, alguns riscos que os ativos estão sujeitos independem de suas correlações e diversificação. Frente ao exposto, podemos dizer que não existem carteiras de investimentos isentas de riscos, ainda que seja bem diversificadas.

Tabela 4 – Risco diversificável e risco não-diversificável.



Fonte – Banco do Brasil. Como administrar a sua carteira de investimentos. Disponível em: <<https://www.bb.com.br/docs/pub/voce/dwn/carteira6.pdf>>

Os riscos de uma carteira dependem não somente do risco de cada elemento que a compõe e de sua participação no investimento total, mas também da forma como seus componentes se relacionam entre si, ou seja, o risco é eliminado na hipótese de se implementar, por exemplo, duas alternativas de investimentos que possuam correlações perfeitamente opostas e extremas, que apresentem correlações iguais a  $-1$  e  $+1$ , respectivamente. Essa situação hipotética, dificilmente é encontrada na prática [13].

O próximo capítulo traz uma análise de mercado referente ao ano de 2017 apresentando os investimentos que foram melhores avaliados por especialistas da área de finanças, bem como, a seleção de uma carteira de investimentos.

## 7 SELEÇÃO DE ATIVOS E COMPOSIÇÃO DE UMA CARTEIRA DE INVESTIMENTOS

Os investimentos em fundos de renda fixa, nos últimos anos, mostraram-se um porto seguro para os investidores avessos ao risco, sobretudo, apresentaram rendimentos consideráveis. O mau momento econômico em que o país se encontrava, e também, devido aos escândalos de corrupção, impulsionaram grande volatilidade no mercado acionário. Em consequência disso, muitos investidores optaram pelos títulos de renda fixa como meio de proteger o capital investido. No entanto, a previsão para 2018 não é favorável aos investimentos em renda fixa. Com a taxa Selic em torno de 7%, aqueles que ainda optarem por manter seus investimentos em fundos de renda fixa terão que se habituar com retornos cada vez menores.

O ano de 2018 começa com juros e inflação sob controle. Essas duas variáveis são as que mais afetam a economia brasileira. Diferente do que ocorreu em anos anteriores, a queda das taxas parecem ser consistentes e duradouras, logo, os prognósticos para a economia são bons [14]. Contudo, o investidor que quiser finalizar o ano de 2018 com bons retornos terá que se esforçar muito. A liquidez de seus investimentos deverá ser substituída por aplicações a longo prazo, ou ainda, abrir mão da segurança e conseqüentemente, correr mais riscos.

Diante de todas essas condições, o investidor precisa de uma gestão estratégica, que vai depender de seu perfil de risco e da necessidade de liquidez. A diversificação vai ser muito importante ao longo do ano. A renda variável será de extrema importância, principalmente a bolsa de valores [15].

Com vistas a nortear os investidores em suas aplicações, a revista *ISTO É Dinheiro* (27 dez. 2017, p.58-60) consultou diversos especialistas da área. Ao todo foram consultados 11 analistas de bancos e corretoras, a saber: Santander, Bradesco, Citi, Ativa, Magliano, Planner, Guide, XP, Terra Investimentos, Coinvalores e Lerosa Investimentos.

Os analistas são unânimes em afirmar que, em 2018, a Bolsa de Valores (BOVESPA) deverá trazer boas recompensas para os investidores mais propensos a risco. Com juros mais baixos, as empresas gastam menos dinheiro para rolar suas dívidas e os consumidores têm mais folga para comprar. Somados, esses dois fatores indicam resultados mais polpudos na última linha do balanço. No entanto, esse resultado não virá sem susto [16].

Na seção seguinte serão apresentadas algumas recomendações importantes e indicações de ações que, na visão dos especialistas consultados, serão as mais promissoras no

ano de 2018 com a melhor relação risco-retorno para aqueles investidores que querem se aventurar em investir em fundos de renda variável.

## **7.1 PREVISÃO DOS MELHORES INVESTIMENTOS PARA O ANO DE 2018**

Com vistas a auxiliar os investidores em suas aplicações ao longo do ano de 2018, *ISTO É Dinheiro* consultou vários especialistas, os quais indicaram, por nível de risco, as ações que devem se destacar em 2018.

Ao todo os especialistas indicaram nove ações, considerando, para cada uma delas, o nível de risco que cada uma estava exposta. Houve três indicações para estratégias de baixo risco, três para risco médio, e, três para alto risco.

Tendo em vista um horizonte de maturação de um ano, os especialistas consultados recomendaram aplicações nas seguintes empresas: AMBEV (ABEV3), ITAÚ UNIBANCO (ITUB4), EQUATORIAL ENERGIA (EQTL3), VALE (VALE3), BR FOODS (RFS3), ECORODOVIAS (ECOR3), PETROBRAS (PETR4), BANCO DO BRASIL (BBAS3) e GERDAU (GGBR4).

Com o advento da Copa do Mundo a AMBEV deve se beneficiar de um cenário econômico mais benigno. O aumento de renda e menor taxa de desemprego entre os consumidores devem contribuir para isso. O Itaú Unibanco é o banco que, dentre seus pares, apresenta maior retorno para os seus investidores, e ainda, destaca-se por suas políticas serem defensivas, o que gera um conforto aos investidores. A Equatorial Energia, por sua vez, é uma empresa que se destaca por suas gestão eficiente. Há quatro anos a empresa vem demonstrando bons resultados aos investidores. De acordo com os especialistas, as três empresas apresentadas acima são de baixo risco, o que contempla as expectativas de um investidor moderado.

A Vale, BR Foods e Ecorodovias foram classificadas como estratégia de risco médio. Sendo a Vale uma empresa que atua no ramo da mineração, com a elevação do preço do minério de ferro a mineradora tende a ter bons resultados, sobretudo pela redução de investimentos, que deve contribuir ainda mais para o aumento da distribuição de dividendos. Apesar da BR Foods, que atua no setor de exportação de proteína animal, não ter demonstrado bons resultados ao longo do ano de 2017, os especialistas estão otimistas com o lançamento de uma terceira marca voltada para o público de baixa renda. A Ecorodovias, com a melhora significativa nos dados de tráfego, deve ser beneficiada com a queda dos juros. Em análises de períodos anteriores a empresa apresentou resultados

positivos, e os especialistas apostam na continuidade desses bons resultados.

Com os juros em níveis baixos, e com a retomada de investimento nos setores imobiliário, industrial e de infraestrutura, a Gerdau, uma empresa que atua no setor de siderurgia, deve ser beneficiada. Além disso, com a perspectiva de retomada das operações de subsidiárias nos EUA, os bons resultados devem favorecer os investidores. A Petrobras, com o avanço de seu plano estratégico, que prevê desinvestimentos de R\$69,3 bilhões, aumentou as expectativas do mercado para 2018. No entanto, por se tratar de um ano eleitoral, os especialistas preveem uma elevação da volatilidade de suas ações. O Banco do Brasil vem apresentando sólidos resultados ao longo dos anos. Os analistas projetam um crescimento de 18% nos lucros para o ano de 2018. Assim como a Petrobras o Banco do Brasil apresenta um risco de investimento elevado devido as incertezas decorrentes das eleições. Tanto a Gerdau, Petrobras e Banco do Brasil são classificadas como estratégias de alto risco.

Além das ações recomendadas pelos especialistas, as ações da empresa Magazine Luiza (MGLU3) também se destacaram em 2017. Ocupando uma posição privilegiada no cenário eletrônico, isso fez refletir em sua rentabilidade. O bom desempenho da empresa elevou a liquidez de suas ações.

As empresas Raia Drogasil (RADL3) e Unipar (UNIP5) também apresentaram resultados expressivos ao longo do ano de 2017. Atuando no setor de saúde e bem-estar, a Raia Drogasil tende a resistir frente a crise econômica que o país vem enfrentado, uma vez que seus produtos são consumidos por grande parte da população.

A tabela a seguir apresenta as 12 empresas mencionadas acima destacando o setor de atuação de cada uma delas.

Tabela 5 – Setor econômico de atuação

<b>Empresa</b>	<b>Código na Bolsa</b>	<b>Setor de atuação</b>
Ambev On	ABEV3	Comércio de bebidas
Itaú Unibanco	ITUB4	Finanças
Equatorial Energia	EQTL3	Energia elétrica
Vale On	VALE3	Mineração
BR Foods	BRFS3	Alimentício
Ecorodovias	ECOR3	Concessões rodoviárias
Petrobras PN	PETR4	Petróleo
Banco do Brasil On	BBAS3	Finanças
Gerdau PN	GGBR4	Siderurgia
Magazine Luiza	MGLU3	Varejo
Unipar A PRF	UNIP5	Química
Raia Drogasil	RADL3	Farmacêutico

Fonte – Autor

Na seção seguinte, fazendo uso de algumas medidas de centralidade e variabilidade apresentadas no capítulo 5, faremos uma seleção de 6 ativos dentre os apresentados, cujo objetivo é formar uma carteira teórica de investimentos. Apoiando-nos em estudos desenvolvidos no capítulos anteriores, buscaremos compor um portfólio de investimentos de modo que a relação risco-retorno seja a melhor possível.

## 7.2 FORMAÇÃO DA CARTEIRA TEÓRICA DE INVESTIMENTO

A formação da carteira teórica levará em consideração a *análise técnica*. Esta análise consiste em estabelecer projeções futuras considerando o comportamento das ações a partir de padrões observados no desempenho passado do mercado [13]. Os dados apresentados nesta seção, além de nos permitir selecionar os ativos que farão parte da carteira, também serão de grande valia no estudo que será desenvolvido na aplicação da Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz. Os cálculos estatísticos realizados nesta seção foram realizados pelo *software* Excel [18].

A tabela 5, apresenta a rentabilidade mensal dos 12 ativos selecionados, ao longo do ano de 2017.

Tabela 6 – Rendimento percentual mensal dos ativos ao longo do ano de 2017

Mês	ABEV3	ITUB4	EQTL3	VALE3	BRFS3	ECOR3	PETRA4	BBAS3	GGBR4	UNIP5	MGLU3	RADL3
jan/17	4,88%	10,01%	5,72%	21,26%	-7,85%	3,60%	1,01%	10,75%	12,96%	-1,63%	20,51%	7,03%
fev/17	3,72%	7,49%	2,45%	1,67%	-8,64%	7,66%	1,07%	6,40%	6,15%	-7,37%	62,63%	-9,31%
mar/17	2,24%	-5,32%	-1,22%	-8,94%	-4,95%	0,56%	-4,55%	2,02%	-15,91%	3,84%	-14,91%	-1,16%
abr/17	0,11%	3,59%	-1,22%	-4,72%	3,06%	4,42%	-3,60%	-2,72%	-10,01%	-25,89%	26,42%	14,96%
mai/17	2,46%	-9,45%	-7,11%	-1,09%	8,87%	-2,54%	-7,25%	-13,73%	-2,65%	36,54%	12,68%	6,74%
jun/17	-2,14%	3,38%	1,46%	6,74%	-9,51%	12,50%	-4,49%	-5,43%	7,76%	1,83%	1,98%	-2,63%
jul/17	4,59%	1,55%	4,65%	7,93%	-5,82%	3,29%	7,37%	7,09%	3,70%	27,31%	43,31%	-1,59%
ago/17	3,71%	8,12%	7,80%	12,08%	15,17%	-1,87%	2,71%	6,97%	11,16%	9,77%	54,82%	0,51%
set/17	5,94%	7,43%	0,21%	-10,12%	7,41%	6,67%	12,11%	13,68%	-6,84%	11,01%	3,90%	8,19%
out/17	-0,67%	-3,00%	-0,57%	0,73%	-3,11%	6,97%	9,63%	-1,32%	-0,82%	8,26%	-14,10%	4,27%
nov/17	-1,63%	-1,85%	4,83%	9,48%	-13,04%	0,50%	-8,30%	-13,10%	1,19%	25,88%	-10,87%	12,51%
dez/17	3,50%	3,17%	2,66%	14,50%	-4,89%	2,24%	4,69%	6,31%	11,73%	-0,85%	42,03%	4,21%

Fonte – Investing. Dados Históricos. Disponível em: <<https://br.investing.com/equities/brazil>>. Acesso em: 20 out. 2018

Tabela 7 – Correlação entre os ativos

	ABEV3	ITUB4	EQTL3	VALE3	BRFS3	ECOR3	PETRA	BBAS3	GGBR4	UNIP5	MGLU3	RADL3
ABEV3	1											
ITUB4	0,4328	1										
EQTL3	0,1961	0,6944	1									
VALE3	0,0636	0,3922	0,6927	1								
BRFS3	0,3640	0,0248	-0,2218	-0,2903	1							
ECOR3	-0,2584	0,3707	0,0212	-0,1158	-0,4318	1						
PETRA	0,5381	0,4233	0,2423	-0,0275	0,2150	0,2862	1					
BBAS3	0,7829	0,7377	0,4746	0,1188	0,1367	0,1942	0,7531	1				
GGBR4	0,1577	0,5326	0,6489	0,8992	-0,1630	0,1002	0,1610	0,2378	1			
UNIP5	0,1315	-0,5256	-0,1072	0,0616	0,1058	-0,4443	-0,0500	-0,3450	0,0363	1		
MGLU3	0,5220	0,5596	0,4141	0,0616	0,2254	-0,0983	0,2152	0,4483	0,5470	-0,2251	1	
RADL3	-0,2059	-0,1416	-0,1839	-0,0532	0,1958	-0,2977	-0,1598	-0,3082	-0,2872	-0,0072	-0,3953	1

Fonte – Autor

Tabela 8 – Variância e Covariância entre os ativos

	ABEV3	ITUB4	EQTL3	VALE3	BRFS3	ECOR3	PETRA	BBAS3	GGBR4	UNIP5	MGLU3	RADL3
ABEV3	0,0007											
ITUB4	0,0006	0,0034										
EQTL3	0,0002	0,0015	0,0015									
VALE3	0,0001	0,0021	0,0024	0,0084								
BRFS3	0,0008	0,0001	-0,0007	-0,0022	0,0068							
ECOR3	-0,0003	0,0009	0,0000	-0,0004	-0,0015	0,0017						
PETRA	0,0009	0,0015	0,0006	-0,0002	0,0011	0,0008	0,0041					
BBAS3	0,0017	0,0036	0,0015	0,0009	0,0010	0,0007	0,0041	0,0072				
GGBR4	0,0004	0,0027	0,0022	0,0072	-0,0012	0,0004	0,0009	0,0018	0,0077			
UNIP5	0,0003	-0,0048	-0,0005	0,0009	0,0014	-0,0030	-3,9622	-0,0047	0,0005	0,0261		
MGLU3	0,0035	0,0083	0,0041	0,0089	0,0048	-0,9212	0,0036	0,0098	0,0124	18,5632	0,0672	
RADL3	-0,0003	-0,0005	-0,0005	-0,0003	-3,2810	-0,0008	-0,0007	-0,0017	-0,0017	-0,0001	-0,0067	0,0043

Fonte – Autor

A Tabela 6, apresenta a correlação entre os pares de ativos selecionados. É importante notar que a forma triangular que a mesma se encontra se deve pelo fato da matriz ser simétrica, ou seja, a correlação entre os pares de ativos apenas com a ordem trocada é a mesma.

A Tabela 7, por sua vez, apresenta a variância (para pares de ativos iguais) e a covariância (para pares de ativos diferentes). Tanto os dados apresentados na tabela 6 como os apresentados na Tabela 7 foram obtidos com base nos dados da tabela 5.

Para a escolha dos seis ativos que farão parte da carteira teórica, devemos observar o que foi exposto no Capítulo 6, Seção 6.2, no que diz respeito a relação risco-retorno entre ativos. Vale lembrar que, quanto mais próximo de  $-1$  for o coeficiente de correlação entre dois ativos, menor são os riscos de investimento. Além de observarmos o coeficiente de correlação, outro ponto importante que também visa minimizar o risco do portfólio é a diversificação dos ativos, ou seja, realizar investimentos em setores econômicos diferentes.

Com base no que foi exposto no parágrafo anterior, observando atentamente tabela 6, nota-se que os seis ativos que apresentaram os menores valores de correlação foram: ITUB4, UNIP5, ECOR3, BBAS3, MGLU3, RADL3. Portanto, a carteira teórica a ser formada será composta por estes seis ativos, no entanto, devemos nos atentar para o fato de que os ativos ITUB4 e BBAS3 atuam no mesmo setor econômico.

Cabe ressaltar que, dentre os ativos selecionados para compor a carteira, apenas três, dentre os nove indicados pelos especialistas à revista *ISTO É Dinheiro*, foram selecionados.

Para modelar o problema de programação linear que nos fornecerá a carteira ótima considerando a relação risco-retorno, faz-se necessário calcularmos o rendimento percentual médio dos seis ativos referentes ao ano de 2017. Além disso, apresentaremos, para cada ativo, as informações sobre variância, desvio padrão, média e coeficiente de variação em uma mesma tabela, cujo objetivo é facilitar as análises posteriores, e que serão de grande valia para a aplicação da Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz. É importante notar que o risco individual de cada ativos é expresso pelo coeficiente de variação. Nas tabelas 9, 10, 11, 12, 13 e 14 eles aparecem na última linha de cada tabela.

Tabela 9 – Rendimento percentual médio dos ativos no ano de 2017

<b>Mês</b>	<b>ITUB4</b>	<b>ECOR3</b>	<b>BBAS3</b>	<b>UNIP5</b>	<b>MGLU3</b>	<b>RADL3</b>
<b>2017</b>	2,0933%	3,6667%	1,4100%	7,3917%	19,0333%	3,6442%

Fonte – Autor

Tabela 10 – Risco do ativo ITUB4

<b>Variância</b>	0,0034
<b>Desv. P.</b>	0,0571
<b>Média</b>	2,099%
<b>Coef. Var.</b>	272,9091

Fonte – autor

Tabela 11 – Risco do ativo BBAS3

<b>Variância</b>	0,0072
<b>Desv. P.</b>	0,0847
<b>Média</b>	1,4100%
<b>Coef. Var.</b>	600,8526

Fonte – autor

Tabela 12 – Risco do ativo ECOR3

<b>Variância</b>	0,0017
<b>Desv. P.</b>	0,0414
<b>Média</b>	3,6667
<b>Coef. Var.</b>	112,8644

Fonte – autor

Tabela 13 – Risco do ativo UNIP5

<b>Variância</b>	0,0261
<b>Desv. P.</b>	0,1614
<b>Média</b>	7,3917
<b>Coef. Var.</b>	218,3585

Fonte – autor

Tabela 14 – Risco do ativo MGLU3

<b>Variância</b>	0,0672
<b>Desv. P.</b>	0,2592
<b>Média</b>	19,0333%
<b>Coef. Var.</b>	136,1696

Fonte – autor

Tabela 15 – Risco do ativo RADL3

<b>Variância</b>	0,0043
<b>Desv. P.</b>	0,0656
<b>Média</b>	3,6442
<b>Coef. Var.</b>	180,0394

Fonte – autor

Na próxima seção apresentaremos a modelagem da carteira teórica de investimentos por meio de um problema de programação linear.

### 7.3 MODELAGEM DA CARTEIRA TEÓRICA DE INVESTIMENTOS POR MEIO DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Como exposto no capítulo 6 (seção 6.2), a Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz, também conhecida como Teoria da Média-Variância, pressupõe a criação de uma carteira de investimentos ótima de modo a maximizar o retorno esperado, ou, minimizar o risco de perda do capital investido.

Markowitz considera a rentabilidade de cada ativo como sendo uma variável aleatória, e assim, uma carteira é formada a partir da combinação ponderada de tais ativos. Em síntese, o retorno esperado de uma carteira é calculado com base na combinação ponderada dos retornos esperados de cada ativo. Em símbolos matemáticos, tem-se:

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i,$$

onde:

- $R_p$ : retorno esperado da carteira;

- $n$ : número de ativos;
- $R_i$ : retorno esperado de cada ativo; e,
- $w_i$ : peso do ativo  $i$  na composição da carteira.

Considerando a relação risco-retorno (correlação entre pares de ativos), de acordo com os dados apresentados na tabela 6, os ativos selecionados para fazer parte da carteira teórica foram: ITUB4, UNIP5, ECOR3, BBAS3, MGLU3, RADL3, cujos rendimentos médios percentuais no decorrer do ano de 2017 estão apresentados na tabela 8.

Com base no exposto acima, a formação da carteira teórica de investimentos pode ser modelada pelo seguinte problema linear:

$$R_p = 0,0141w_1 + 0,020933w_2 + 0,03644w_3 + 0,03666w_4 + 0,073917w_5 + 0,190333w_6 \quad (7.1)$$

onde:

- $R_p$ : retorno esperado da carteira;
- $w_1$ : peso do ativo BBAS3 na composição da carteira.
- $w_2$ : peso do ativo ITUB4 na composição da carteira.
- $w_3$ : peso do ativo RADL3 na composição da carteira.
- $w_4$ : peso do ativo ECOR3 na composição da carteira.
- $w_5$ : peso do ativo UNIP5 na composição da carteira.
- $w_6$ : peso do ativo MGLU3 na composição da carteira.

Com base nos estudos desenvolvidos em capítulos anteriores, mais especificamente nos capítulos 2 e 3, com a utilização do *software* MATLAB [21], buscaremos a maximização do retorno esperado para a carteira teórica formada. No entanto, para a composição das restrições do problema, consideraremos dois perfis de investidores, a saber: investidor conservador e investidor menos conservador (propenso a riscos), cujo objetivo é verificar se as projeções dos especialistas se confirmam na prática.

Convém ressaltar, de antemão, que modelar um problema perfeitamente de modo a atender o perfil de um investidor é algo impossível de se fazer, haja vista que muitas características que se fazem presente no cenário econômico corroboram para isso. Um exemplo é a taxa de corretagem e custódia que tendem a variar de uma corretora para outra. Outra característica difícil de modelar é a quantidade de impostos a serem pagos

pelo investidor, uma vez que as taxas sofrem variações constantes. Em síntese, existem restrições que são inerentes às carteiras de investimentos que não podem ser equacionadas de forma precisas.

Embora cada perfil de investidor possua as suas especificidades, todos compartilham de algumas restrições comuns. Como a modelagem da carteira trata de um problema de programação linear, uma restrição é imediata (restrição de não-negatividade), a saber:

$$w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (7.2)$$

Também, não podemos esquecer que o retorno esperado é dado pela média ponderada dos retornos médios dos ativos, logo, a soma dos pesos de tais ativos deve ser igual a 1. Em símbolos, tem-se:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 = 1 \quad (7.3)$$

Nas subseções seguintes, apresentaremos algumas restrições passíveis de serem modeladas considerando os perfis apresentados anteriormente.

### 7.3.1 RESTRIÇÕES NUMA PERSPECTIVA DE INVESTIDOR CONSERVADOR

Como vimos anteriormente, o investidor conservador é avesso a riscos. Preza pela segurança de seus investimentos, mesmo que para isso, tenha que sacrificar retornos mais elevados. Frente ao exposto, as restrições apresentadas abaixo foram pensadas no sentido de proteger o capital do investidor conservador de riscos. Vale lembrar, mais uma vez, que as restrições podem variar de um investidor para outro, ou seja, impor limites aos ativos depende dos objetivos e pretensões de cada investidor.

Ressaltamos que as análises que levaram a determinar limites para os investimentos foram embasadas nas Tabelas 7, 10,11,12,13,14 e 15, bem como, na seção 6.3 do capítulo 6.

Tendo em vista os benefícios que a diversificação da carteira proporciona ao investidor (minimização dos riscos), para cada ativo que compõe o portfólio, estipulamos uma participação mínima. Determinamos que nenhum ativo terá uma participação inferior a 3%. Assim, temos:

$$w_1 \geq 0,03, \quad w_2 \geq 0,03, \quad w_3 \geq 0,03, \quad w_4 \geq 0,03, \quad w_5 \geq 0,03, \quad w_6 \geq 0,03. \quad (7.4)$$

O ativo BBAS3 foi o que apresentou maior risco individual, e também, o que apresentou menor rendimento no período analisado. Considerando ainda que trata-se de

um ativo que pode ser afetado pelos resultados das eleições, optou-se por limitar sua participação em, no máximo, 5%. Logo,

$$w_1 \leq 0,05. \quad (7.5)$$

Vale lembrar que, diversificar a carteira não diz respeito somente em investir em ativos de empresas diferentes, mas também, em setores econômicos diferentes. Como os ativos BBAS3 e ITUB4 atuam no mesmo setor, e apresentam correlação próxima a +1 (0,7377), é prudente que se limite a participação de ambos na composição do portfólio. Deste modo, a soma dos pesos de tais ativos serão limitados em 10%.

$$w_1 + w_2 \leq 0,1. \quad (7.6)$$

O ativo MGLU3 é o que se mostrou mais rentável e o segundo mais seguro no período analisado. Por este motivo, limitaremos sua participação em 30%.

$$w_6 \leq 0,3. \quad (7.7)$$

Os ativos ITUB4 e UNIP5 apresentaram a menor correlação entre todos os apresentados, logo, parece interessante estipular um valor para a soma dos pesos de tais ativos em 35%.

$$w_2 + w_5 \leq 0,35. \quad (7.8)$$

A segunda menor correlação foi apresentada pelos ativos ECOR3 e UNIP5 (-0,4443). Considerando que a correlação quanto mais próxima de -1, apresenta maior segurança ao investimento, limitaremos a soma dos pesos de tais ativos em 40%.

$$w_4 + w_5 \leq 0,4. \quad (7.9)$$

Os ativos MGLU3 e RADL3, além de serem investimentos de baixo risco (Cf. Tabelas 14 e 15), apresentaram rendimentos médios consideráveis. Por este motivo, limitaremos os investimentos em tais ativos de modo que a soma de seus pesos não sejam menores que 40%.

$$w_3 + w_6 \geq 0,4. \quad (7.10)$$

### 7.3.2 PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR A SER OTIMIZADO NUMA PERSPECTIVA DE PERFIL DE INVESTIDOR CONSERVADOR

Considerando a função objetiva expressa em (7.1), bem como as restrições, apresentadas de (7.2) a (7.10), o problema de Programação Linear apresenta a seguinte forma:

$$\text{Maximizar: } R_p = 0,0141w_1 + 0,020933w_2 + 0,03644w_3 + 0,03666w_4 + 0,073917w_5 + 0,190333w_6$$

*Sujeito a:*

$$\begin{array}{rcccccc} w_1 & +w_2 & +w_3 & +w_4 & +w_5 & +w_6 & = 1 \\ w_1 & & & & & & \geq 0,03 \\ & w_2 & & & & & \geq 0,03 \\ & & w_3 & & & & \geq 0,03 \\ & & & w_4 & & & \geq 0,03 \\ & & & & w_5 & & \geq 0,03 \\ & & & & & w_6 & \geq 0,03 \\ w_1 & & & & & & \leq 0,05 \\ w_1 & +w_2 & & & & & \leq 0,1 \\ & & & & & w_6 & \leq 0,3 \\ & w_2 & & & +w_5 & & \leq 0,35 \\ & & & w_4 & +w_5 & & \leq 0,4 \\ & & w_3 & & & +w_6 & \geq 0,4 \\ w_1 \geq 0, & w_2 \geq 0, & w_3 \geq 0, & w_4 \geq 0, & w_5 \geq 0, & w_6 \geq 0. \end{array}$$

### 7.3.3 RESTRIÇÕES NUMA PERSPECTIVA DE INVESTIDOR MENOS CONSERVADOR

Um investidor menos conservador é aquele que se submete a riscos em busca de maiores ganhos em seus investimentos. Dizemos que este tipo de investidor é propenso a risco. Ao investir, suas decisões são tomadas com base na taxa de retorno de seus investimentos. Se por um lado este tipo de investidor pode ter grandes ganhos, por outro, pode ter grandes perdas.

Tendo em vista os benefícios que a diversificação da carteira proporciona ao investidor (minimização dos riscos), para cada ativo que compõe o portfólio, estipulamos uma participação mínima. Determinamos que nenhum ativo terá uma participação inferior a 5%. Assim, temos:

$$w_1 \geq 0,05, \quad w_2 \geq 0,05, \quad w_3 \geq 0,05, \quad w_4 \geq 0,05, \quad w_5 \geq 0,05, \quad w_6 \geq 0,05. \quad (7.11)$$

Os ativos ITUB4 e BBAS3, por atuarem no mesmo setor econômico, terão uma participação limitada na carteira. A soma de seus pesos não será maior que 20%.

$$w_1 + w_2 \leq 0,2. \quad (7.12)$$

Os ativos MGLU3 e UNIP5 apresentaram, respectivamente, rendimentos médios de 19,0333% e 7,3917% no período analisado. Dentre os selecionados, foram os que apresentaram melhores rendimentos. Por este motivo, a soma dos pesos desses ativos não deve ser menor que 50%, logo,

$$w_5 + w_6 \geq 0,5. \quad (7.13)$$

A ECOR3 e a RADL3, empresas que atuam em setores econômicos diferentes, de acordo com os dados apresentados nas tabelas 12 e 15, são de baixo risco. Além disso, apresentaram retornos médio consideráveis para o período analisado. Frente ao exposto, parece ser conveniente estipular que a soma dos pesos de tais ativos não seja inferior a 30%.

$$w_3 + w_4 \geq 0,3. \quad (7.14)$$

#### **7.3.4 PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR A SER OTIMIZADO NUMA PERSPECTIVA DE PERFIL DE INVESTIDOR MENOS CONSERVADOR**

Considerando a função objetivo expressa em (7.1), bem como as restrições apresentadas em (7.2), (7.3) e de (7.11) a (7.14), o problema de Programação Linear apresenta a seguinte forma:

Maximizar:  $R_p = 0,0141w_1 + 0,020933w_2 + 0,03644w_3 + 0,03666w_4 + 0,073917w_5 + 0,190333w_6$

Sujeito a:

$$\begin{array}{rcccccc}
 w_1 & +w_2 & +w_3 & +w_4 & +w_5 & +w_6 & = 1 \\
 w_1 & & & & & & \geq 0,05 \\
 & w_2 & & & & & \geq 0,05 \\
 & & w_3 & & & & \geq 0,05 \\
 & & & w_4 & & & \geq 0,05 \\
 & & & & w_5 & & \geq 0,05 \\
 & & & & & w_6 & \geq 0,05 \\
 w_1 & +w_2 & & & & & \leq 0,2 \\
 & & w_3 & +w_4 & & & \geq 0,3 \\
 & & & & w_5 & +w_6 & \geq 0,5 \\
 w_1 \geq 0, & w_2 \geq 0, & w_3 \geq 0, & w_4 \geq 0, & w_5 \geq 0, & w_6 \geq 0.
 \end{array}$$

#### 7.4 OTIMIZAÇÃO DOS PROBLEMAS NO MATLAB E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os Problemas de Programação Linear apresentados nas Seções (7.3.2) e (7.3.4) foram resolvidos utilizando o *software* MATLAB [21].

Nesta seção faremos uma análise individual de cada carteira obtida, e posteriormente, confrontaremos os resultados obtidos apresentando suas diferenças e semelhanças.

Iniciemos a análise pelos resultados obtidos a partir do PPL formulado com base no perfil de investidor conservador.

Os resultados computacionais, obtidos por meio do *software* MATLAB, mediante utilização do programa Linprog, foram os seguintes:

$$R_p = 0,09 = 9\%$$

$$w_1 = 0,03 = 3\%$$

$$w_2 = 0,03 = 3\%$$

$$w_3 = 0,24 = 24\%$$

$$w_4 = 0,08 = 8\%$$

$$w_5 = 0,32 = 32\%$$

$$w_6 = 0,30 = 30\%.$$

Considerando as restrições impostas para o problema, os resultados sugerem que: 3% do capital disponível seja investido no ativo BBAS3; 3% no ativo ITUB4; 24% no ativo RADL3; 8% no ativo ECOR3; 32% no ativo UNIP5; e, 30% no ativo MGLU3. De acordo com os percentuais indicados, estima-se que o retorno esperado para esta carteira seja de 9%.

É interessante notar que os ativos BBAS3 e ITUB4, ambos do setor financeiro, apresentaram um percentual de investimento estipulado como mínimo (3%) para cada ativo que compõe a carteira. Além de pertencerem ao mesmo setor, de acordo com as informações das tabelas 10 e 11, foram os que apresentaram maior risco individual dentre os seis ativos selecionados, e também, os menores retornos.

Os ativos MGLU3, UNIP5 e RADL3, em termos do binômio risco-retorno, foram os melhores avaliados. Conseqüentemente, obtiveram maior participação na composição da carteira.

Se comparados os ativos ECOR3 e RADL3, observa-se que na análise individual o ativo ECOR3 foi melhor avaliado, no entanto, a análise dos coeficientes de correlação apresentados na tabela 7 indicou que o ativo RADL3 apresentou melhor correlação (correlação negativa) quando relacionado com os demais ativos da carteira. Isso justifica o fato de o ativo ECOR3 apresentar uma participação de apenas 8% na carteira enquanto o ativo RADL apresenta uma participação de 24%.

No mais, considerando o perfil de investidor ao qual a carteira selecionada se destina, a diversificação dos ativos, tal como foi apresentadas, tende a dar maior segurança ao investidor.

Passemos agora a análise dos resultados obtidos a partir do PPL formulado com base no perfil de investidor menos conservador.

Assim como o primeiro problema, os resultados computacionais, obtidos por meio do *software* MATLAB, foram os seguintes:

$$R_p = 0,1211 = 12,11\%$$

$$w_1 = 0,05 = 5\%$$

$$w_2 = 0,05 = 5\%$$

$$w_3 = 0,05 = 5\%$$

$$w_4 = 0,25 = 25\%$$

$$w_5 = 0,05 = 5\%$$

$$w_6 = 0,55 = 55\%.$$

Considerando as restrições impostas para o problema, os resultados sugerem que: 5% do capital disponível seja investido no ativo BBAS3; 5% no ativo ITUB4; 5% no ativo RADL3; 25% no ativo ECOR3; 5% no ativo UNIP5; e, 55% no ativo MGLU3. De acordo com os percentuais indicados, estima-se que o retorno esperado para esta carteira seja de 12,11%.

Observando os resultados apresentados, constata-se que 80% do capital a ser investido está concentrado em apenas dois ativos da carteira, a saber: MGLU3 e ECOR3. Em termos de risco individual, são os mais seguros da carteira. Além disso, o ativo MGLU3 mostrou-se o mais rentável para o período analisado. Embora a concentração de investimento não seja recomendada, analisando a tabela 7 verifica-se que tais ativos apresentam correlação negativa, que é um aspecto favorável para o investimento nesses ativos.

Os demais ativos (BBAS3, ITUB4, RADL3, UNIP5) apresentaram um percentual de investimento estipulado como mínimo (5%) para cada ativo que compõe a carteira, o que garantiu o mínimo de diversificação para a mesma.

Comparando as duas carteiras formadas, observa-se que o ativo MGLU3 teve maior participação em ambas as carteiras. Além de ser o segundo mais seguro, é o ativo que apresenta maior rentabilidade.

Em linhas gerais, considerando os dois perfis de investidores, e ainda, os retornos esperados para cada uma das carteira formuladas, podemos concluir que as previsões dos analistas, de que a Bolsa deverá trazer boas recompensas para os investidores mais ousados, estão de acordo com os resultados apresentados nesta seção.

Tanto o investidor conservador, quanto o menos conservador tendem a colher bons

frutos em seus investimentos. Contudo, cabe ressaltar que os resultados obtidos neste trabalho estão embasados na *análise técnica*, ou seja, foram utilizados dados referentes ao desempenho das empresas no ano de 2017 para fazer previsões acerca do desempenho das mesmas no decorrer do ano de 2018.

Frente ao exposto, se as condições econômicas, as quais as empresas estavam expostas em 2017 permanecerem as mesmas, investir em ações parece ser um bom negócio.

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O método Simplex, sem dúvidas, representou um grande avanço no campo da Programação Linear, que, por sua vez, proporcionou notório desenvolvimento na área de Pesquisa Operacional. Como vimos no desenvolvimento deste trabalho, muitos problemas práticos do cotidiano são passíveis de modelagem e resolução por meio da PL.

Em especial, destaca-se neste trabalho a aplicação da PL na seleção de uma carteira ótima de investimentos considerando dois perfis de investidores, a saber: investidor conservador e investidor menos conservador. A modelagem do PL se deu por meio da Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz, a qual possibilitou selecionar uma carteira ótima tendo em vista o retorno esperado máximo que o portfólio pudesse oferecer.

Os ativos selecionados para a composição da carteira foram recomendados por especialistas à revista *ISTO É Dinheiro*. Tais ativos foram minuciosamente analisados por meio de alguns parâmetros estatísticos que contribuíram para a seleção de apenas seis, os quais compuseram o portfólio. Vale ressaltar que os mesmos foram selecionados considerando o binômio risco-retorno.

De acordo com os estudos desenvolvidos, à luz das teorias estudadas, os ativos mais indicados para a composição da carteira foram: BBAS3, ITUB4, RADL3, ECOR3, UNIP5, MGLU3. Embora os ativos BBAS3 e ITUB4 pertençam ao mesmo setor de atuação, a boa correlação com os demais ativos garantiu a participação de ambos na carteira.

Os resultados obtidos através dos PPL formulados indicam que as previsões dos especialistas, de que o ano de 2018 seria favorável aos investidores mais ousados, estão de acordo. Contudo, cabe ressaltar que a volatilidade a qual o mercado acionário está sujeito, sobretudo em ano de eleição presidencial, não garante a eficiência prática dos resultados aqui apresentados, no entanto, tendem a nortear os futuros investidores.

Considerando que o nível de segurança de um ativo, bem como o seu rendimento, pode sofrer variações de um ano para outro, podemos dizer que realizar investimentos no mercado de ações é uma prática de alto risco, uma vez que não é possível garantir de que modo o mercado reagirá frente às adversidades que podem encontrar.

Por fim, cabe aqui uma última consideração. Embora a ideia de investir no mercado de ações pareça ser convidativa, sobretudo pelos resultados aqui apresentados, vale lembrar que, embora a relação risco-retorno tenha sido considerada na escolha dos ativos, os nossos estudos não mediram o risco total da carteira formulada. Por este motivo, faz-se necessário

uma complementação dos estudos abordando a temática sobre o risco total de uma carteira de investimentos. Vale ressaltar, mais uma vez, que os resultados matemáticos apresentados não garantem a eficiência prática das carteiras formuladas, sobretudo, servem para auxiliar os investidores de modo que os mesmos possam investir conscientemente.

## REFERÊNCIAS

- [1] TAHA, Hamdy A. *Pesquisa Operacional: uma visão geral*. Tradução Arlete Simille Marques; revisão técnica Rodrigo Arnaldo Scarpel. 8.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.
- [2] HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J.. *Introdução à Pesquisa Operacional*. 8.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.
- [3] ARENALES, Marcos et al. *Pesquisa Operacional*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- [4] LOESCH, Cláudio; HEIN, Nelson. *Pesquisa Operacional: fundamentos e modelos*. São Paulo: Saraiva, 2009.
- [5] MARINS, Fernando Augusto Silva. *Introdução à Pesquisa Operacional*. São Paulo: Cultura Acadêmica - Universidade estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2011.
- [6] LUENBERGER, D.G.; YE, Y. *Linear and nonlinear programming*. 3. ed. Nova Iorque: Springer, 2008. 576 p..
- [7] GUEDES, Terezinha Aparecida et al. *Estatística Descritiva*. Disponível em: <<http://www.each.usp.br/rvicente/Guedes-et-al-Estatistica-Descritiva.pdf>> Acesso em: 02 jun. 2018.
- [8] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David Mauro. *Fundamentos de Matemática Elementar, 11: matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva*. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- [9] ANDRADE, Eduardo Leopoldino. *Introdução à Pesquisa Operacional: Métodos e Modelos para Análise de Decisões*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- [10] GONÇALVES JÚNIOR, C; MONTEVECHI, J.A.B.; PAMPLONA, E.O. *Seleção de carteiras através do modelo de Markovitz para pequenos investidores (com o uso de planilhas eletrônicas)*. In: SIMPEP, 2002. Bauru: SIMPEP, 2002, p.1-10.
- [11] ALBUQUERQUE, Guilherme Ulliana Vieira. *Um estudo do problema de escolha de portfólio ótimo*. 2009. Dissertação de Mestrado ICMC-USP, Universidade de São Paulo, 2009.
- [12] BAZARAA, Mokhtar S.; John J. Jarvis; Hanif D. Sherali. *Linear Programming and Network Flow*. Wiley, fourth edition, 2010.

- [13] ASSAF NETO, Alexandre. *Mercado Financeiro*. 10 ed. São Paulo: Atlas, 2011.
- [14] GRADILONE, Cláudio. Ponha seu dinheiro em forma. *ISTO É Dinheiro*, São Paulo: Editora Três, ano 20, n.1050, p.48-49, 27 dez. 2017.
- [15] KROEHN, Márcio. Em busca do equilíbrio. *ISTO É Dinheiro*, São Paulo: Editora Três, ano 20, n.1050, p.54-55, 27 dez. 2017.
- [16] ARROYO, Priscilla. Escolha os equipamentos. *ISTO É Dinheiro*, São Paulo: Editora Três, ano 20, n.1050, p.58-60, 27 dez. 2017.
- [17] CAETANO, Rodrigo. Hora de queimar gorduras. *ISTO É Dinheiro*, São Paulo: Editora Três, ano 20, n.1050, p.78-80, 27 dez. 2017.
- [18] EXCEL. Versão 2010. EUA: Microsoft, 2010.
- [19] BANCO DO BRASIL S.A. *Como administrar a sua carteira de investimentos*. Disponível em: <<https://www.bb.com.br/docs/pub/voce/dwn/carteira6.pdf>>. Acesso em: 02 nov. 2018.
- [20] INVESTING. *Dados Históricos*. Disponível em: <<https://br.investing.com/equities/brazil>>. Acesso em: 20 out. 2018.
- [21] MATLAB. Versão 2016.
- [22] PASSOS, A. N. *Estudos em Programação Linear*. Dissertação de Mestrado. Unicamp - Campinas, 2009.
- [23] PINTO, L. L. and MENEZES, M. A. F. Implementação de algoritmos Simplex e Pontos Interiores para Programação Linear. *Estudos*, Goiânia, v. 35, n. 2, p. 225-246, mar./abr. 2008.
- [24] GEOGEBRA: Site 2018. Disponível em: <<http://www.geogebra.org>>. Acesso em: 20 maio de 2018.