UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PPG
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Aristóteles Antonio Lopes Miranda

A relação entre a Matemática e a Física: Um ensaio sobre os conceitos matemáticos aplicados à Cinemática e à Termometria.

São Luís - MA
2018

Aristóteles Antonio Lopes Miranda

A relação entre a Matemática e a Física: Um ensaio sobre os conceitos matemáticos aplicados à Cinemática e à Termometria.

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Maranhão – UEMA, como pré-requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática, através do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Orientador: Professor Dr. José Antonio Pires Ferreira Marão.

São Luís - MA

2018

Miranda, Aristóteles Antonio Lopes.
A relação entre a matemática e a física: um ensaio sobre os conceitos matemáticos aplicados à cinemática e à termometria / Aristóteles Antonio Lopes Miranda. – São Luís, 2018.
78 f.

Dissertação (Mestrado) – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Estadual do Maranhão, 2018.

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Pires Ferreira Marão.

1. Matemática. 2. Física. 3. Interdisciplinaridade. I. Título.

CDU 51:53

ARISTÓTELES ANTONIO LOPES MIRANDA

A relação entre a Matemática e a Física: Um ensaio sobre os conceitos matemáticos aplicados à Cinemática e à Termometria.

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Maranhão – UEMA, como pré-requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática, através do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Orientador: Professor Dr. José Antonio Pires Ferreira Marão.

Aprovado em: 26/10/2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Antonio Pires Ferreira Marão (Orientador)
(Universidade Estadual do Maranhão – UEMA)

Prof. Dr. Marlon César Santos Oliveira
(Universidade Estadual do Maranhão – UEMA)

Profa. Dra. Valeska Martins de Sousa
(Universidade Federal do Maranhão – UFMA)

São Luís
2018

Agradecimentos

Aos meus pais Francisco de Assis Miranda e Maria Ires Cardoso Lopes Miranda pelo apoio e ensinamentos dados ao longo de minha vida.

A todos os meus irmãos, em especial Francisco, Francilane, Célio e Flávio, os que me ajudaram a dar os primeiros passos.

À minha esposa Alexsandra Miranda e filhas Andréia e Airles Miranda pela colaboração nos momentos do desenvolvimento deste trabalho.

A todos os amigos que, direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste curso.

Ao Amigo Vilson Morais pela ajuda na montagem de algumas figuras.

Ao Professor Joaquim Teixeira Lopes que sempre incentivou a não parar na busca de conhecimentos.

Ao professor e Irmão Francisco de Assis Miranda Filho pela troca de ideias.

Ao professor José Antonio Pires Ferreira Marão pela dedicação e orientação na elaboração deste trabalho.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"A coragem é a primeira das qualidades humanas
porque garante todas as outras."

Aristóteles

RESUMO

Os indicadores de qualidade do ensino, como o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), por exemplo, mostram que o desempenho dos alunos na disciplina de Matemática, no Brasil, está abaixo do esperado. Os resultados insatisfatórios, segundo alguns teóricos, estão relacionados à forma como a Matemática é apresentada, com excesso de formalismo, falta de contextualização e métodos mecanizados de resolução de problemas. Por outro lado, tem-se verificado também que o aprendizado da Física deixa a desejar, sobretudo pela falta de conhecimento sobre como aplicar os fundamentos da Matemática na resolução de problemas físicos. Nesse sentido, apresenta-se neste trabalho uma proposta de como temas específicos de Matemática podem ser abordados e consequentemente aplicados e relacionados com a Física. Pretende-se fazer com que os envolvidos no processo de ensino-aprendizagem da Matemática e da Física percebam, que é necessário, de alguma forma conhecer as mais variadas aplicações de equações de primeiro e segundo graus, função afim, função quadrática, razões trigonométricas e teorema de Tales para melhor entendimento de demonstrações e aplicações desses conteúdos à Física. Pra ser mais específico neste estudo são abordadas as teorias e aplicações desses conteúdos na Cinemática e na Termometria.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática. Física. Interdisciplinaridade.

ABSTRACT

Educational quality indicators, such as the Basic Education Development Index (IDEB), for example, show that students' performance in Mathematics in Brazil is lower than expected. Unsatisfactory results, according to some theorists, are related to how mathematics is presented, with excess formalism, lack of contextualization and mechanized methods of problem solving. On the other hand, it has also been verified that the learning of Physics leaves something to be desired, mainly due to the lack of knowledge on how to apply the fundamentals of Mathematics in the resolution of physical problems. In this sense, it is presented in this work a proposal of how specific Mathematical themes can be approached and consequently applied and related to Physics. It is intended to make those involved in the teaching-learning process of Mathematics and Physics realize that it is necessary to somehow know the most varied applications of first and second degree equations, related function, quadratic function, trigonometric and Tales theorem for a better understanding of the demonstrations and applications of these contents to Physics. To be more specific in this study are the theories and applications of these contents in Kinematics and Thermometry.

KEYWORDS: Mathematics. Physical. Interdisciplinarity.

Lista de Figuras

2.1 Alinhamento dos pontos A, B e C. 18
2.2 Representação da parábola. 27
3.1 Feixe de retas paralelas. 29
3.2 Feixe de retas paralelas - n partes 29
3.3 Feixe de retas paralelas 30
3.4 Feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais. 31
3.5 Ângulo $A\widehat{O}B$ 32
3.6 Representação de um transferidor. 32
3.7 Ângulo: região convexa e côncava. 33
3.8 Ângulo $B\widehat{O}C$ 33
3.9 Representação da Terra. 34
3.10 Triângulo retângulo ABO. 36
3.11 Triângulo ABO 36
3.12 Triângulo retângulo. 37
3.13 Triângulo equilátero. 37
3.14 Triângulo isósceles 38
4.1 Velocidade escalar 42
4.2 Velocidade escalar 43
4.3 Trajetória da partícula 43
4.4 Movimento uniforme progressivo 45
4.5 Movimento uniforme retrógrado 46
4.6 Movimento de um ponto material 46
4.7 Representação gráfica da velocidade 47
4.8 Velocidade do ponto de vista matemático 47
4.9 Velocidade do ponto de vista matemático 48
4.10 Velocidade do ponto de vista matemático 48
4.11 Velocidade do ponto de vista matemático 49
4.12 Gráfico da Velocidade em Função do Tempo. 49
4.13 Posição dos veículos I e II. 50
4.14 Posição do veículo I 51
4.15 Posição do veículo II 51

4.16 Aceleração escalar constante. 53
4.17 Gráfico da aceleração (α) em função do tempo (t) 54
4.18 Movimento da partícula 54
4.19 Gráficos $V \times t$ quando a aceleração (α) é positiva. 55
4.20 Gráficos $V \times t$ quando a aceleração (α) é negativa. 55
4.21 Variação da velocidade escalar de um móvel. 56
4.22 Área sob o gráfico da velocidade em função do tempo 57
4.23 Objeto sobre um trajetória 57
4.24 A Área do Trapézio 58
4.25 Representações gráficas do função quadrática $S(t), t \geq 0$ 60
4.26 Representação do movimento... 61
4.27 Componentes vertical e horizontal de V_o (velocidade inicial de lançamento) 65
4.28 Lançamento Oblíquo 65
4.29 Componentes da Velocidade no Lançamento Oblíquo 66
4.30 Lançamento Obliquo 70
4.31 Modelo do Problema. 71
4.32 Escalas termométricas 74

Sumário

1 Introdução **11**

2 Números e Funções **15**

2.1 Produto Cartesiano 15

2.2 Plano Numérico $\mathbb{R}^2$ 16

2.3 Função Polinomial do 1º Grau Com Uma Variável 17

2.3.1 Função Linear 17

2.3.2 Gráfico de uma Função Polinomial do 1º Grau 18

2.3.3 Significados Analíticos de a e b na Função $f(x) = ax + b$ 19

2.3.4 Taxa de Variação da Função Polinomial do 1º Grau 19

2.3.5 Função Linear e Grandezas Diretamente Proporcionais 21

2.3.6 Razão 21

2.3.7 Proporção 21

2.4 Função Polinomial do 2º Grau 22

2.4.1 Forma Canônica da Função Quadrática 22

2.4.2 Zeros da Função Polinomial do 2º Grau 23

2.4.3 Soma e Produto das Raízes 25

2.4.4 Construção da Parábola 26

3 Geometria Euclidiana Plana **28**

3.1 Teorema de Tales 28

3.1.1 Teorema de Tales 30

3.2 A Trigonometria do Triângulo Retângulo 31

3.3 As Funções Trigonométricas do Ângulo Agudo 33

4 Aplicações dos Conteúdos na Cinemática **40**

4.1 Definições Preliminares 40

4.2 Movimento Retilíneo Uniforme 41

4.2.1 Representação Gráfica da Velocidade Escalar em função do Tempo . 42

4.2.2 Gráfico da Função Horária da Velocidade no Movimento Uniforme . 42

4.2.3 Função Horária do Espaço 43

4.2.4 Representação Gráfica do Espaço em Função do Tempo 45

4.3 Movimento Uniformemente Variado 52
4.3.1 Função Horária da Velocidade Escalar Instantânea 54
4.3.2 Função Horária do Espaço 57
4.3.3 Representação Gráfica dos Espaços em Função do Tempo 59
4.3.4 Movimento Parabólico em Campo Gravitacional 64
4.3.5 Outras Aplicações - Termometria 72

5 Conclusão **76**

Referências **78**

1 Introdução

Os livros adotados no Ensino Médio atualmente, e uma parte considerável de nós professores, tratamos os conteúdos básicos de Matemática de maneira bem isolada, abordamos conceitos, gráficos, fórmulas e principalmente questões com ênfase em conteúdos específicos da disciplina. Geralmente nos esquecemos de fazer a relação com outras áreas, isto é, apresentar a Matemática de forma interdisciplinar, deixamos a desejar justamente na aplicação desses conteúdos, principalmente no que diz respeito à Física, já que esse componente curricular sempre apresenta problemas cujo ponto de partida é a determinação de equações ou funções e posteriormente a análise, resolução e interpretação das mesmas. Uma das principais motivações deste trabalho foram as conversas com profissionais da educação, pra ser mais específico, professores de Física, pois os mesmos são enfáticos em afirmar que o aprendizado da referida disciplina torna-se muito complicado quando os discentes não tem uma base sólida de conhecimentos de Matemática. Assim, devemos entender a Matemática e a Física como disciplinas que possuem relação histórica, e além disso, que é pertinente que ensino dessas disciplina seja feito de maneira compartilhada entre os professores que ministram cada uma delas.

Ao longo da história, a Física e a Matemática estiveram sempre muito próximas, e um fato que torna latente essa proximidade é apresentado em (FITA, 1996):

> E toda esta audácia na compreensão da natureza foi permitida pelo rigor da linguagem matemática usada. Eis o paradigama do pensamento Newtoniano, a forma de raciocínio científico criador que viria a marcar as Ciências Físicas até aos nossos dias.

O trecho acima enfatiza que foi a Matemática o fundamento necessário para a consolidação dos conceitos de Física que Newton[1] desenvolveu.

A Matemática e a Física possuem relações bem definidas, tanto é que o desenvolvimento de uma está relacionado diretamente ao desenvolvimento da outra, em (KARAM, PIETROCOLA, 2009):

> Só para citar alguns exemplos: Einstein considera a geometria como a mais antiga das teorias físicas; a origem do cálculo está intimamente ligada à descrição matemática dos movimentos (BOYER, 1949); Poincaré (1995) destaca que a teoria das equações diferenciais desenvolveu-se, sobretudo, pela Física e

[1]Isaac Newton (1642-1727), autor da obra conhecida *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* e das leis da Gravitação Universal.

> para a Física; a álgebra vetorial está profundamente relacionada com a busca pela matematização do eletromagnetismo (SILVA, 2002); a análise de Fourier foi motivada por problemas relacionados com cordas vibrantes e propagação do calor (DAVIS e HERSH, 1995); entre muitos outros.

O trecho acima destaca essa relação, além de apresentar fatos que confirmam que o desenvolvimento da Física só é possível graças a uma fundamentação Matemática sólida.

Por outro lado, já que Física e Matemática tiveram e ainda tem seus desenvolvimentos atrelados, cabe a seguinte pergunta: o que pensar do ensino dessas disciplinas? Em relação à Física do Ensino Médio há um consenso entre os estudiosos do assunto, que é o seguinte: os conceitos de Física só podem ser bem entendidos pelos discentes quando há fundamentos matemáticos verdadeiramente consolidados em suas formações. Assim, segundo (PIETROCOLA, 2002):

> No ensino da Física, a linguagem matemática é muitas vezes considerada como a grande responsável pelo fracasso escolar. É comum professores alegarem que seus alunos não entendem Física devido à fragilidade de seus conhecimentos matemáticos. Para muitos, uma boa base matemática nos anos que antecedem o ensino de Física é garantia de sucesso no aprendizado.

O trecho destaca a importância de conhecimento matemático para o bom entendimento dos conceitos e problemas da Física, pois a Matemática nada mais é do que a linguagem necessária para o desenvolvimento de equações, funções e relações tão presentes na Física de qualquer uma das séries do Ensino Médio. Portanto, o correto entendimento, por parte do aluno, de conceitos matemáticos é um fato de fundamental importância para a consolidação dos fundamentos da Física que ele irá obter ao longo de sua vida acadêmica, em particular no Ensino Médio.

Percebemos então a necessidade de uma abordagem interdisciplinar em que os conteúdos básicos da Matemática venham a ser apresentados de forma aplicada à Física, mostrando o real sentido das funções e tendo como meta facilitar o ensino da Matemática por meio da modelagem e interpretação dos problemas físicos. Assim, podemos tornar nossas aulas mais interessantes, já que estaremos dando sentido ao que estamos estudando e ao mesmo tempo promovendo a interdisciplinaridade. Mas como devemos entrar nesse contexto sem levar em consideração a relação histórica entre a Matemática e a Física. Se formos buscar um pouco de história sobre essa relação concluiremos que muitos dos conceitos matemáticos possuem sua origem associadas a problemas que surgiram na Física.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1999) de Matemática para o Ensino Médio, destacam o ensino das funções:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.

Tendo em vista, a importância dada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais sobre a necessidade dessa ligação entre os componentes curriculares, o trabalho apresenta alguns exemplos de como apresentar a Matemática de maneira a ampliar os conhecimentos dos nossos discentes e também prepará-los para os desafios da vida cotidiana e exames para os quais serão submetidos. Devido a essa necessidade fizemos algumas aplicações à Física, especificamente à Cinemática[2]. O tema em questão, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1999):

> A necessária articulação entre as disciplinas da área de conhecimento para a promoção das competências gerais certamente inclui o desenvolvimento de instrumentos de investigação comuns, como conceitos e procedimentos partilhados pelas várias ciências, na investigação e compreensão de diferentes processos naturais.

Percebemos no trecho acima a preocupação com a articulação da Matemática com outras áreas do conhecimento, por isso fizemos tal conexão com a Física, mostrando as aplicações das funções polinomiais do 1º e 2º graus que são modelos matemáticos que descrevem os movimentos, a saber: Movimento Uniforme (MU), Movimento Uniformemente Variado (MUV), fizemos também uma ligação do Teorema de Tales e o estudo de escalas termométricas, além disso, apresentamos as funções horárias, descrevendo acima de tudo a relação entre os conceitos abstratos dessas funções com os conceitos físicos desses movimentos, ou seja, fizemos a resolução de problemas físicos usando as equações encontradas na Física, em seguida, apresentamos uma resolução do ponto de vista das funções e conceitos matemáticos. Incluímos no final do trabalho uma aplicação do teorema de Tales.

[2] É o ramo da Física que se ocupa da descrição dos movimentos dos corpos, sem se preocupar com as causas.

Portanto, o objetivo do trabalho aqui apresentado foi o de elaborar uma sequência de conteúdos que possa ser usado por professores e alunos do Ensino Médio ou por outros interessados em adquirir conhecimentos relativos a aplicações da Matemática à Física, em especial à Cinemática e Escalas Termométricas. Ainda é escopo do trabalho o desenvolvimento de novas formas de ensino desses conteúdos de Física, uma vez que o ensino de tais conteúdos não depende exclusivamente de conceitos isolados da Física, ou seja, todos podem ser desenvolvidos pelo simples conhecimento de Funções ou da Geometria Elementar. Por fim, é objetivo servir de inspiração para outros trabalhos, onde poderão ser abordados e aplicados outros conteúdos da Matemática em que a Física ou outras disciplinas possam ser inseridas. Estamos cientes que o desenvolvimento aqui é parte muito pequena do que ainda pode ser explorado.

2 Números e Funções

A apresentação da Funções Numéricas, em especial das Funções Polinomiais do Primeiro e Segundo Graus, é objeto do presente capítulo, e apresentaremos aspectos dessas funções que, serão usadas no capítulo 4, será necessário tanto para o entendimento das aplicações como também para a solução e interpretação dos casos apresentados. Os assuntos fazem parte da revisão de literatura cujas fontes são (LIMA, CARVALHO, WAGNER e MORGADO, 2012) e (IEZZI, DOLCE, DEGENSZAJN e ALMEIDA, 2006).

O assunto principal deste capítulo, e dos seguintes, são as funções reais de uma variável real, em particular as Funções Polinomiais do 1° e 2° Graus, ou seja, funções $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que tem como domínio um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e cujos valores $f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, são números reais. Em cada um desses capítulos, abordaremos as referidas funções, mas antes disso faremos uma breve introdução aos conceitos de plano cartesiano e o gráfico de uma função.

2.1 Produto Cartesiano

Definição 2.1. *Um par ordenado $P = (x, y)$ é formado por um objeto x, chamado a primeira coordenada de P e um objeto y, chamado a segunda coordenada de P.*

Dois pares ordenados $P = (x, y)$ e $Q = (u, v)$ serão iguais quando $x = u$ e $y = v$, isto é, quando tiverem as coordenadas iguais.

O produto cartesiano $X \times Y$ de dois conjuntos é o conjunto $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y) cuja primeira coordenada x pertence a X e a segunda coordenada y pertence a Y.

Simbolicamente escreve-se

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X e\ y \in Y\}$$

Se $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ são conjuntos finitos com m e p elementos respectivamente, então o produto cartesiano X e Y é finito e possui $m \cdot p$ elementos. Noutras palavras, $n(X \times Y) = n(X) \cdot n(Y)$. A melhor maneira de enxergar isto, é pensar no produto como um quadro retangular.

$$\begin{array}{cccc}
(x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \cdots & (x_1, y_p) \\
(x_2, y_1) & (x_2, y_2) & \cdots & (x_2, y_p) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(x_m, y_1) & (x_m, y_1) & \cdots & (x_m, y_p)
\end{array}$$

Com p colunas, cada uma possuindo m elementos.

O gráfico de uma função $f : X \longrightarrow Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um ponto qualquer de X e $y = f(x)$. Assim,

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x) = \{x, f(x); x \in X\}\}.$$

A fim de que um subconjunto $G \subset X \times Y$ seja o gráfico de alguma função f : $X \longrightarrow Y$ é necessário e suficiente que G cumpra as seguintes condições:

G_1. Para todo $x \in X$ existe um par ordenado $(x, y) \in G$. Cuja primeira ordenada é x

G_2. Se $P = (x, y)$ e $P' = (x, y')$. São pares pertencentes a G com a mesma primeira coordenada x, então $y = y'$ (isto é $P = P'$).

É claro que essas condições podem ser resumidas numa só, dizendo-se que para cada $x \in X$ existe um e somente um, $y \in Y$ tal que $(x, y) \in G$.

Resumindo, um subconjunto qualquer de X e Y é o gráfico de uma relação de X para Y. Se esse conjunto cumpre as condições G_1 e G_2 acima estipuladas, ele é o gráfico de uma função.

2.2 Plano Numérico $\mathbb{R}^2$

Os elementos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ são, naturalmente, os pares ordenados de números reais. Eles surgem como as coordenadas de um ponto P do plano π. (x = abscissa, y = ordenada), que se intersectam no ponto O, chamado a origem do sistema de coordenadas.

Dado o ponto $P \in \pi$, a abscissa de P é o número x, coordenada do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo OX, enquanto a ordenada de P é a coordenada y do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo OY. Diz-se que (x, y) é o par de coordenadas do ponto P relativamente ao sistema de eixos xOy. Os eixos dividem o plano em quatro regiões, chamadas quadrantes, caracterizadas pelos sinais das coordenadas de seus pontos.

No primeiro quadrante tem-se $x \geq 0$ e $y \geq 0$; no segundo $x \leq 0$ e $y \geq 0$; no terceiro $x \leq 0$ e $y \leq 0$; no quarto, $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

A função $f : \pi \longrightarrow \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto P do plano π seu par de coordenadas $f(P) = (x, y)$ relativamente ao sistema de eixos OXY, é uma correspondência biunívoca.

2.3 Função Polinomial do 1º Grau Com Uma Variável

Definição 2.2. *Define-se função polinomial do* 1° *grau na variável* x*, qualquer função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por uma lei da forma* $f(x) = ax + b$*, em que* a *e* b *são números reais e* $a \neq 0$*.*

Na lei $f(x) = ax + b$, o número real a é chamado coeficiente de x e o número b é chamado termo constante ou independente.

São funções polinomiais do 1º grau com uma variável:

Exemplo 2.1. $f(x) = 5x - 3$*, em que* $a = 5$ *e* $b = -3$*.*

Exemplo 2.2. $f(x) = -2x - 7$*, em que* $a = -2$ *e* $b = -7$*.*

Exemplo 2.3. $f(x) = 11x$*, em que* $a = 11$ *e* $b = 0$*.*

Exemplo 2.4. $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{5}$ *, em que* $a = \dfrac{1}{3}$ *e* $b = \dfrac{1}{5}$*.*

No estudo das funções acima o valor de a é chamado de taxa de variação e na geometria será denominado coeficiente angular da reta, pois é numericamente igual à tangente do ângulo que a reta (gráfico da função) faz com o eixo x (horizontal). Esse ângulo é medido no sentido anti-horário. Isso será evidenciado mais a frente dentro desse trabalho.

2.3.1 Função Linear

Um caso particular de uma função afim é aquela em que $b = 0$. Nesse caso, temos a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax$ com a real e $b = 0$, que recebe a denominação especial de função linear.

Exemplo 2.5. $f(x) = 3x$*, com* $a = 3$ *e* $b = 0$*.*

Exemplo 2.6. $f(x) = -4x$*, com* $a = -4$ *e* $b = 0$*.*

Nesses casos apresentamos as funções com $b = 0$, isto indica que são funções cujos gráficos são retas que passam pela origem, pois quando atribuirmos o valor zero à variável x teremos $f(x) = 0$. Indicando, portanto o ponto $(0, 0)$ (origem do plano cartesiano) pertence ao gráfico desse tipo de função.

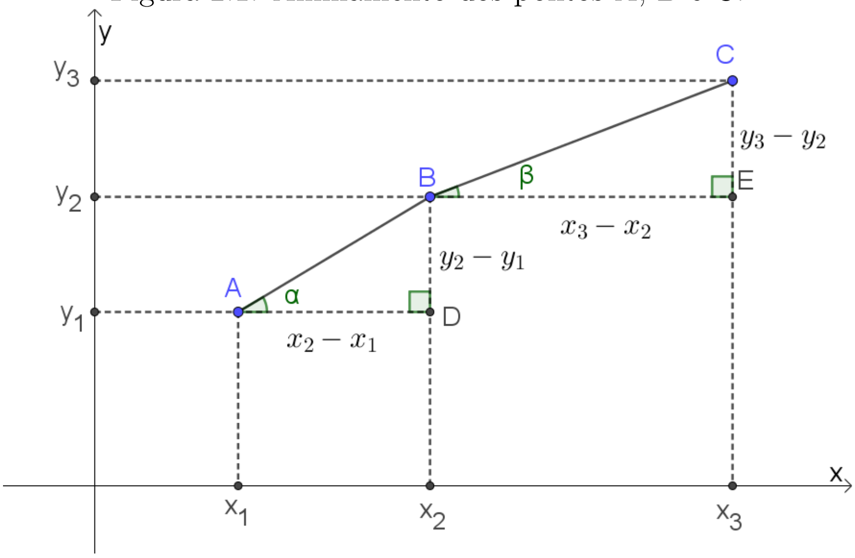
2.3.2 Gráfico de uma Função Polinomial do 1º Grau

O gráfico de uma função polinomial do 1º, dada por $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy.

Demonstração:

Tomemos três pontos distintos $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, cujas coordenadas satisfazem a lei $y = ax + b$ (com $a \neq 0$)

Figura 2.1: Alinhamento dos pontos A, B e C.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Temos:

$$y_1 = ax_1 + b \tag{2.1}$$

$$y_2 = ax_2 + b \tag{2.2}$$

$$y_3 = ax_3 + b \tag{2.3}$$

Subtraindo membro a membro, encontramos:

$$(2.3) - (2.2) \Rightarrow y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2)$$

$$(2.2) - (2.1) \Rightarrow y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

Daí, temos:

$$\frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} \tag{2.4}$$

Vamos mostrar que para os pontos A, B e C pertencem à mesma reta sempre que $\alpha = \beta$.

Observemos os triângulos ABD e BCE, que são retângulos e têm lados proporcionais, pois de acordo com (2.4), temos:

$$\frac{EC}{BD} = \frac{BE}{AD} \tag{2.5}$$

Logo os triângulos ABD e BCE são semelhantes, portanto $\alpha = \beta$. Daí se conclui que A, B e C estão alinhados, portanto o gráfico da função $f(x) = ax + b$ é uma reta não vertical e não horizontal.

2.3.3 Significados Analíticos de a e b na Função $f(x) = ax + b$

Os livros didáticos de referência bibliográfica desse trabalho referem-se aos números reais a e b presentes na lei de formação da função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$, e são chamados, respectivamente, de coeficiente angular e coeficiente linear.

Porém tais definições para a e b são associadas ao papel desempenhado no gráfico da reta que representa a função. Daí a necessidade de mostrar o significado analítico dos números a e b.

Essas definições são corretas em geometria pelo fato de que o valor de a pode ser calculado pela tangente do ângulo de inclinação da reta. E b é o valor de y (função) quando $x = 0$, ou seja, b é o valor onde a reta que representa a função intersecta o eixo das ordenadas (eixo y).

2.3.4 Taxa de Variação da Função Polinomial do 1º Grau

Na função polinomial do 1º grau, $f(x) = ax + b$, o coeficiente a será chamado de taxa de variação da função f, pois $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, em que x_2 e x_1 são elementos distintos do domínio da função f.

Definição 2.3. *Taxa de variação média denotada por* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *de uma função* f *em relação ao intervalo de* x_1 *e* x_2*, com* $x_1 \neq x_2$ *e dada por:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{2.6}$$

Como $f(x) = ax + b$, então

$$f(x_1) = ax_1 + b \tag{2.7}$$

$$f(x_2) = ax_2 + b \tag{2.8}$$

Fazendo as substituições das igualdades (2.7) e (2.8) em (2.6), segue que:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} \tag{2.9}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} \tag{2.10}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \tag{2.11}$$

Com $x_2 \neq x_1$, obtemos

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = a. \tag{2.12}$$

Com isso, na função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$, a taxa de variação média será denominada taxa de variação, devido ao fato que para quaisquer x_2 e $x_1 \in \mathbb{R}$, com $x_2 \neq x_1$ a taxa de variação média é sempre a mesma e igual ao coeficiente a.

Na função $f(x) = ax + b$, o número real b, será chamado de valor inicial da função, devido ao fato, a simples substituição de x por zero temos: $f(0) = a.0 + b$, isso implica $f(0) = b$.

Um exemplo disso são os casos em que as pessoas fazem planos de pacotes de internet, pagando uma taxa fixa e mais alguns centavos por minutos que ultrapassam o tempo de cobertura.

Assim, para exemplificar, vamos supor que eu tenha feito um plano onde pagarei $R\$34,00$ com direito a 100 minutos de ligações, pagando $R\$0,3$ por minutos que excederem esse tempo, nesse caso, chamando de y o valor que tenho que pagar no final do mês e de x o tempo, em minutos, que excedem o tempo estipulado no contrato. Posso escrever y em função de x da seguinte maneira.

$$y = 34 + 0,35x.$$

Observe que mesmo não tendo feito nenhuma ligação, precisarei pagar o valor de $R\$34,00$ para manter o acordo.

2.3.5 Função Linear e Grandezas Diretamente Proporcionais

2.3.6 Razão

Definição 2.4. *Dados dois números reais a e b, com $b \neq 0$, chama-se razão de a para b o quociente $\frac{a}{b}$, que também pode ser indicado por $a : b$*

O número a é chamado antecedente e o número b é chamado consequente.

2.3.7 Proporção

Definição 2.5. *Dadas duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, chama-se proporção a igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (Lê-se: a está para b, assim como c está para d).*

Em uma proporção, os números a e d são chamados extremos e os números c e d são chamados meios.

Dada a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, vale a propriedade:

$$ad = bc$$

Para demonstrá-la, basta multiplicar os dois membros de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por $bd \neq 0$:

$$bd\frac{a}{b} = bd\frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

Dizemos que o produto dos extremos (a e d) é igual ao produto dos meios (b e c), conhecida como Propriedade Fundamental das Proporções que iremos usar em algumas situações de nosso trabalho.

A função linear, dada pela fórmula $f(x) = a.x$, é o modelo matemático mais usual para problemas de proporcionalidade. Se fizermos pesquisas a respeito da proporcionalidade veremos que ela sempre foi difundida entre os povos.

Se consultarmos um compêndio antigo e muito bem conceituado, sem dúvida o texto matemático de mais longa utilização no Brasil. Trata-se da Aritmética Progressiva, de Antonio Trajano, cuja primeira edição ocorreu em 1883 e ainda se achava em circulação na década de 60 com mais de 80 edições publicadas.

Segundo Trajano, Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.

2.4 Função Polinomial do 2º Grau

Definição 2.6. *Chama-se função polinomial do 2º grau ou função quadrática, toda função definida* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, *sendo* a, b *e* c *números reais, com* $a \neq 0$

São funções quadráticas:

Exemplo 2.7. $f(x) = \sqrt{3}x^2 - 2x + 7$ *onde* $a = \sqrt{3}$, $b = -2$ *e* $c = 7$.

Exemplo 2.8. $f(x) = x^2 - 2x$ *onde* $a = 1$, $b = -2$ *e* $c = 0$.

Exemplo 2.9. $f(x) = -6x^2 + 8x$ *onde* $a = -6$, $b = 8$ *e* $c = 0$

2.4.1 Forma Canônica da Função Quadrática

A escrita canônica da função quadrática é uma forma mais simples e tem o objetivo de expor algo relevante que iremos mostrar agora.

Para obter a forma canônica da função quadrática, usaremos o método do completamento do quadrado perfeito. A função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) + c \tag{2.13}$$

Utilizando os produtos notáveis estudados em séries anteriores sabemos que:

$$x^2 + \frac{bx}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \tag{2.14}$$

Substituindo a igualdade (2.14) na igualdade (2.13) tem-se.

$$\begin{align} f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \tag{2.15}\\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \tag{2.16}\\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \tag{2.17}\end{align}$$

Podemos perceber, na última expressão, que se $x = \dfrac{-b}{2a}$, teremos o menor ou o maior valor assumido pela função. Chamaremos $\dfrac{-b}{2a}$ de coordenada x do vértice cuja notação é dada por x_v, que terá o valor correspondente na função de $y_v = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Representando por Δ a expressão $b^2 - 4ac$ também chamado de discriminante, temos a forma canônica:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ou ainda

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Com a função na forma canônica, podemos perceber $f(x)$ pôde ser escrita em função das coordenadas do vértice, isto é, o $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, já que se $x = \frac{-b}{2a}$ assume o máximo ou mínimo, dependendo do valor de a.

2.4.2 Zeros da Função Polinomial do 2º Grau

Chama-se zeros da função polinomial do 2º grau dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, os números reais x tais que $f(x) = 0$, logo as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, são os zeros da função.

Demonstração da fórmula que permite obter as raízes da equação.

Temos:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \tag{2.18}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a} \tag{2.19}$$

Adicionando $\dfrac{b^2}{4a^2}$ a ambos os membros, tem-se:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \tag{2.20}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{2.21}$$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{b^2 - 4ac}{2a} \tag{2.22}$$

Tornando $b^2 - 4ac = \Delta$.

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\Delta}{2a} \tag{2.23}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{2.24}$$

Daí, resulta a chamada fórmula atribuída a Bháskara $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante, pois esse valor define quantas raízes possui a equação.

Exemplo 2.10. *Obter os zeros da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = x^2 - 5x + 6$.*

Solução:

Identificando os coeficientes, teremos: $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$

Substituindo os coeficientes, encontramos: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 3$ e $x_2 = 2$.

As raízes são 2 e 3, nesse caso temos raízes diferentes, pois $\Delta = 1 > 0$.

Exemplo 2.11. *Vamos calcular os zeros reais da função, dada pela lei $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.*

Solução:

Identificando os coeficientes, teremos: $a = 4$, $b = -4$ e $c = 1$.

Substituindo os coeficientes, encontramos: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \dfrac{4 \pm 0}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}$ e $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

E as raízes são $\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{1}{2}$.

Observe que as raízes são iguais, pois $\Delta = 0$. (elemento neutro da adição)

Exemplo 2.12. *Obter os zeros da função dada por* $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$.

Solução:

Identificando os coeficientes, teremos: $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$.

Substituindo os coeficientes, encontramos: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 32}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-23}}{4}$, logo x não representa um número real.

Observe que ficamos impossibilitados de calcular as raízes, pois $\Delta = -23 < 0$, já que não existe raiz quadrada de número negativo.

Observação:

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado anteriormente de discriminante:

- Quando Δ é positivo, a função terá duas raízes reais e diferentes;
- Quando Δ é igual a zero, a função terá raízes reais iguais (raiz dupla);
- Quando Δ é negativo, a função não terá raízes reais.

2.4.3 Soma e Produto das Raízes

Sendo x_1 e x_2, as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, vamos calcular $x_1 + x_2$ e $x_1 \cdot x_2$.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} \tag{2.25}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} && (2.27)\\
x_1 \cdot x_2 &= \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{(2a)^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a} && (2.28)\\
x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} && (2.29)
\end{aligned}$$

Exemplo 2.13. *Queremos determinar as raízes de $x^2 - 13x + 40 = 0$. usando soma e produto.*

Temos: $a = 1$; $b = -13$ e $c = 40$

Precisamos encontrar dois números reais x_1 e x_2 e tal modo que:
$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{13}{1} = 13$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{40}{1} = 40$, logo x_1 e x_2 é igual, respectivamente, a 5 e 8, já que $5 \cdot 8 = 40$ e $5 + 8 = 13$.

As coordenadas do vértice da parábola são as coordenadas do ponto onde a parábola, que representa a função, atinge o ponto mais alto ou mais baixo, conforme foi analisado quando colocamos a função na forma canônica.

2.4.4 Construção da Parábola

Nosso objetivo aqui é traçar um roteiro para construir o gráfico da função polinomial do 2º grau, sem precisar estabelecer uma tabela de pares (x, y).

O valor do coeficiente $\boldsymbol{a}$ define a concavidade da parábola.

As raízes (ou zeros) definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo Ox.

O vértice $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ indica o ponto de mínimo (se $a > 0$) ou máximo (se $a < 0$) que são os pontos onde a função passa de decrescente para crescente ou de crescente para decrescente, respectivamente.

A reta que passa por V e é paralela ao eixo Oy é o eixo de simetria da parábola.

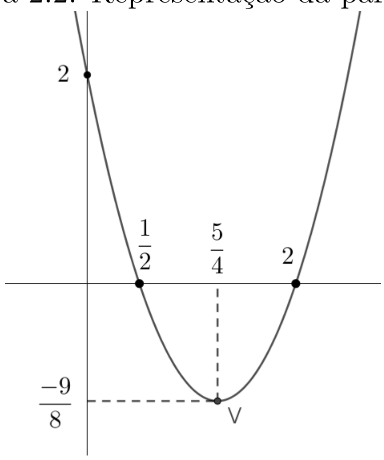
Para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$, então esse ponto $(0, c)$ a parábola intersecta o eixo Oy.

Caso não tenha raízes, escolhemos dois outros valores de x, simétricos em relação à coordenada x do vértice e calculamos suas imagens. Daí definimos a curva.

Exemplo 2.14. *Queremos esboçar o gráfico da função quadrática dada por $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.*

- Concavidade voltada para cima, pois $a = 2 > 0$.
- Raízes: $x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = 2$.
- Vértice: $V = \left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{-9}{8}\right)$.
- Interseção com eixo Oy, $(0, c) = (0, 2)$.

Figura 2.2: Representação da parábola.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observação

Note que o conjunto imagem da função são todos valores reais de y maiores que ou iguais a $\dfrac{-9}{2}$. Representamos por:

$$Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{-9}{8} \right\}$$

Observe que f é crescente se $x > \dfrac{5}{4}$ e decrescente se $x < \dfrac{5}{4}$.

A Função Polinomial do 2° Grau foi abordada nesse capítulo enfatizando a forma canônica, que configura uma ganho significativo para a resolução de problemas que serão abordados no ultimo capítulo. Assim, é importante notar que apesar de a teoria aqui apresentada não tocar em todos os pontos relativos a essa função, a abordagem apresenta os fundamentos básicos para o entendimento do capítulo dedicado aos problemas físicos, em que nele serão abordados os problemas de modo a contemplar a maneira matemática de solução desses problemas.

3 Geometria Euclidiana Plana

Os tópicos de Geometria, sobretudo aqueles necessários para o estudo interdisciplinar de escalas termométricas, é o objeto de estudo desse capítulo. Cabe citar que toda a teoria apresentada tem como único objetivo as aplicações, assim sendo,nem todas as passagens foram devidamente justificadas. O capítulo tem como fonte de pesquisa (BARBOSA, 2012) e (DOLCE e POMPEO,2005).

3.1 Teorema de Tales

Para se compreender o Teorema de Tales será necessário conhecer algumas definições preliminares, extraídas de Dolce e Pompeu (2015):

Definição 3.1. *Retas Paralelas são retas coplanares que coincidem (são iguais) ou não tem nenhum ponto comum.*

Definição 3.2. *Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.*

Definição 3.3. *Retas transversais ao feixe de paralelas são retas que concorrem com todas as retas do feixe.*

Definição 3.4. *Pontos correspondentes de duas transversais são pontos das transversais que estão numa mesma reta do feixe.*

Definição 3.5. *Segmentos correspondentes de duas transversais são aqueles cujos extremos são os respectivos pontos correspondentes.*

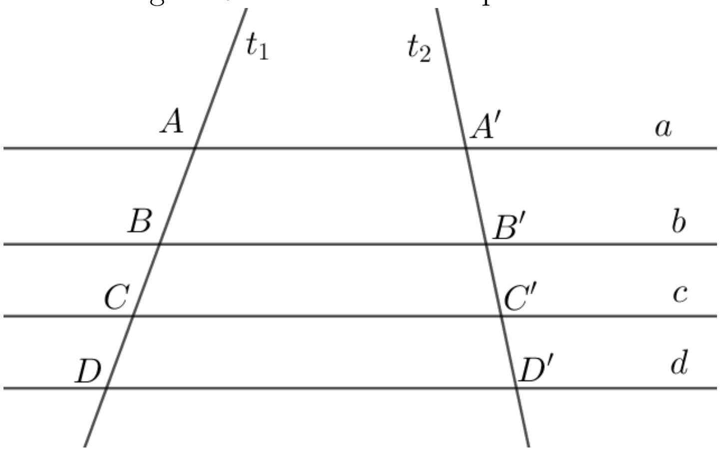
Na Figura 3.1, A e A' , B e B' , C e C' e D e D' são pontos correspondentes, as retas a, b, c e d são retas paralelas e as retas t_1 e t_2 são retas transversais.

$\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ são segmentos correspondentes.

Segundo Dolce e Pompeo (2005), se um feixe de retas paralelas distintas é intersectado por duas transversais distintas e um segmento de uma delas é dividido em n partes congruentes entre si e pelos pontos da divisão traçarmos retas paralelas do feixe, então o segmento correspondente da outra transversal também é dividido em n partes e essas partes também são congruentes entre si.

Demonstração

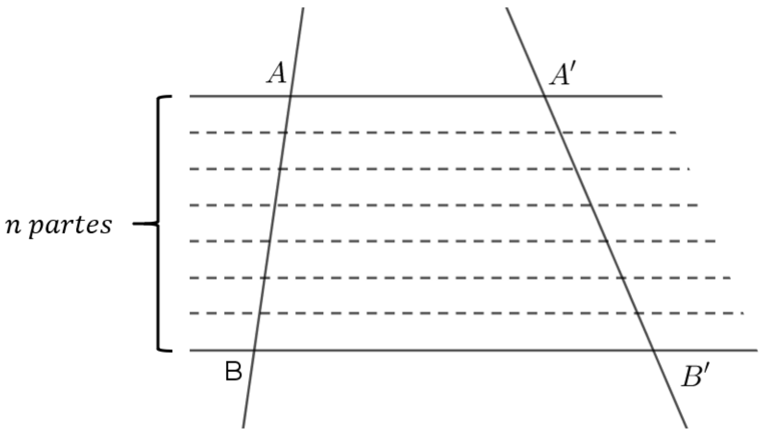
Figura 3.1: Feixe de retas paralelas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Parte 1 - $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são segmentos correspondentes e $\overline{AB}$ é dividido em n partes por retas do feixe. Vamos supor que $\overline{A'B'}$ ficasse dividido em menos partes, teríamos que pelo menos duas dessas retas do feixe iria se encontrar em pontos de $\overline{A'B'}$, o que é absurdo, pois as retas são paralelas.

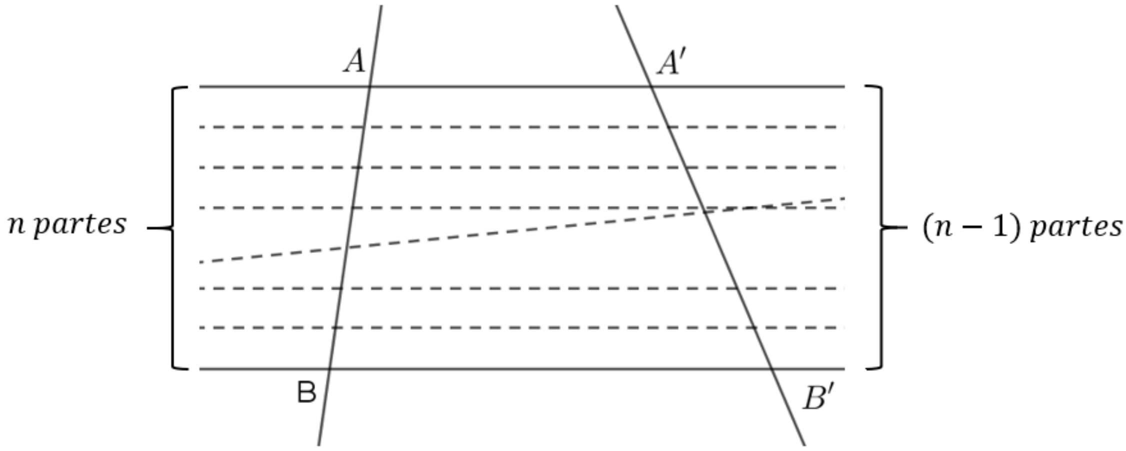
Figura 3.2: Feixe de retas paralelas - n partes



Fonte: Elaborado pelo autor.

Parte 2 – Se $\overline{AB}$ é dividido em partes congruentes a x e pelos pontos da divisão de $\overline{A'B'}$, conduzirmos paralelas a $\overline{AB}$, obteremos um triângulo para cada divisão. Esses triângulos assim obtidos são congruentes, pois possuem dois ângulos e lado entre estes congruentes. Com isso, $\overline{A'B'}$ é dividido em partes congruentes pelos pontos de divisão.

Figura 3.3: Feixe de retas paralelas



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.1.1 Teorema de Tales

Teorema 3.1 (Teorema de Tales). *Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.*

Hipótese

$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são dois segmentos de uma transversal, e $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ são os respectivos correspondentes da outra.

Tese

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

Demonstração

Vamos aqui nos prender ao caso em que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis[3]

Existe um segmento x que é submúltiplo de $\overline{AB}$ e de $\overline{CD}$.

$\overline{AB} = px$ e $\overline{CD} = qx \Rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{p}{q}$

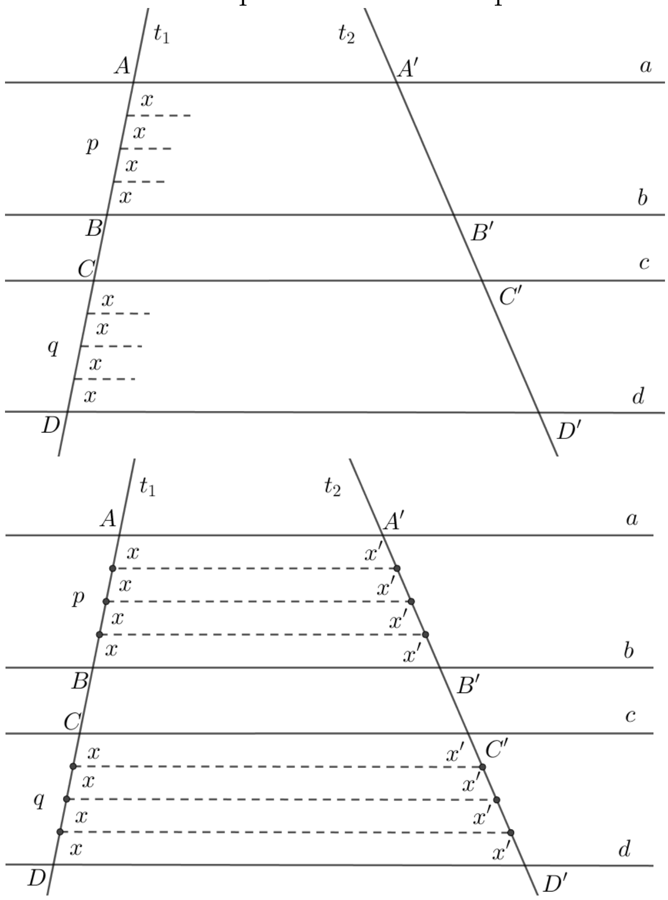
Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (de acordo com a figura) e aplicando a propriedade anterior, temos:

$\overline{A'B'} = px'$ e $\overline{C'D'} = qx' \Rightarrow \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \dfrac{p}{q}$

Comparando as igualdades, temos:

[3]Dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis quando a razão entre eles é um número racional.

Figura 3.4: Feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

3.2 A Trigonometria do Triângulo Retângulo

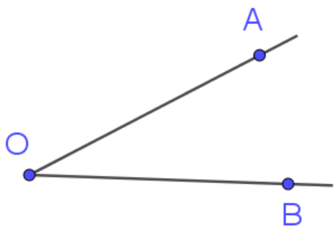
O ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas são os lados do ângulo e a origem comum é o seu vértice. Podemos representar um ângulo de várias maneiras. Se O é o vértice e A e B são pontos quaisquer pertencentes um a cada semirreta, este ângulo será representado por $A\widehat{O}B$ ou $B\widehat{O}A$.

Se usarmos esta notação, a letra que designa o vértice deve aparecer entre as outras duas.

Caso nenhum outro ângulo tenha o mesmo vértice, podemos utilizar apenas a letra que designa este vértice e representamos por $\widehat{O}$.

O instrumento utilizado para medir ângulos é o transferidor, que nada mais é que um círculo graduado.

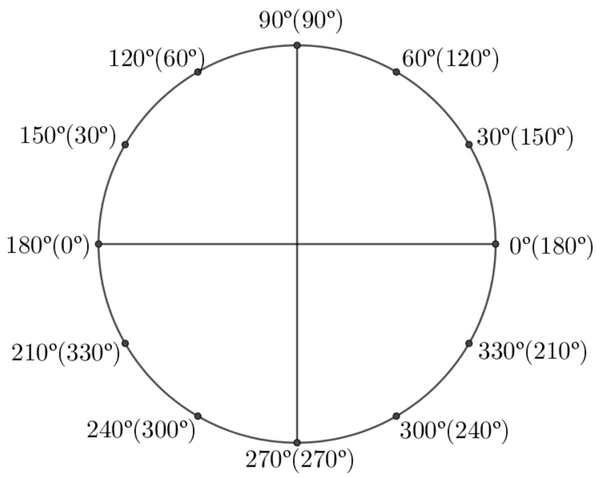
Figura 3.5: Ângulo $A\widehat{O}B$



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 3.6 mostra a representação de transferidor graduado em graus. O grau é a fração de $\frac{1}{360}$ de um círculo e será a única unidade utilizada neste capítulo, onde podemos observar uma escala dupla. Porque este instrumento pode ser percorrido tanto no sentido horário, quanto no sentido anti-horário. A maioria dos matemáticos adota o sentido anti-horário como positivo, mas em outras atividades, como por exemplo, navegação aérea, o sentido adotado é o horário.

Figura 3.6: Representação de um transferidor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A medição é feita da seguinte forma:

- Faz-se um dos lados coincidir com a linha zero do transferidor;

- Em seguida escolhe-se o sentido da medição;

- Anota-se o valor atingido pelo outro lado no aparelho.

É evidente que neste caso estamos nos referindo à região convexa. Nos livros didáticos, adotam a convenção gráfica exposta, para não deixar dúvida.

Figura 3.7: Ângulo: região convexa e côncava.

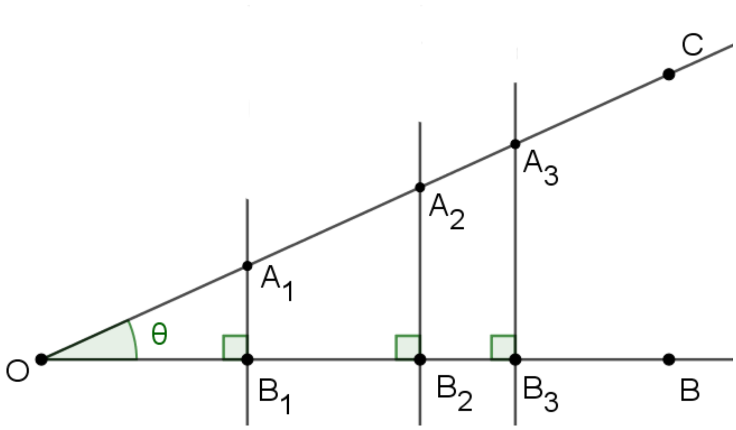
Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3 As Funções Trigonométricas do Ângulo Agudo

Consideremos agora um ângulo $A\widehat{O}B = \theta$, onde $0^o < \theta < 90^o$, e tracemos a partir dos pontos A_1, A_2, A_3, etc. da semirreta AO perpendiculares A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, etc. À semirreta OB. Os triângulo OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, etc. São semelhantes pelo caso (AA) estudado nas séries finais do ensino fundamental.

Podemos então escrever.

Figura 3.8: Ângulo $B\widehat{O}C$



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots \tag{3.1}$$

Esta relação depende apenas do ângulo θ e não dos comprimentos envolvidos. Convém dar um nome para esta função de θ, assim construída e definir para $0^o < \theta < 90^o$,

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = sen\theta \tag{3.2}$$

Que se lê: seno de θ. A ideia é simples. Usando triângulos pequenos, podemos construir uma tabela da função seno. Suponhamos agora que se quer medir o raio da terra, um comprimento geralmente inacessível.

Um processo usado pelos gregos, é o seguinte: Do alto de uma torre de altura h, mede-se o ângulo θ que faz a reta BC do horizonte de B com a vertical BO do lugar. Observando a figura temos que:

$$\frac{R}{R+h} = sen\theta$$

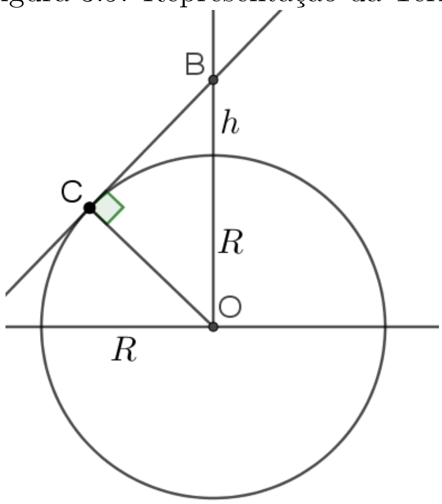
, donde

$$R \cdot sen\theta + h \cdot sen\theta = R$$

Isto é,

$$R = \frac{h \cdot sen\theta}{1 - sen\theta}$$

Figura 3.9: Representação da Terra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Se tivermos as medidas de h e θ (normalmente fáceis de obter) e uma tabela de senos, poderemos então calcular o raio R da terra.

Voltando aos triângulos semelhantes da Figura 3.8, vemos que as relações

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \cdots \tag{3.3}$$

Também dependem só do ângulo θ. Definimos então a função para $0^o < \theta < 90^o$. Como $cos\theta$, logo

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = cos\theta \tag{3.4}$$

Temos também,

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = \cdots \tag{3.5}$$

Que é definida por $tg\theta$ daí temos:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = tg\theta \tag{3.6}$$

Estas funções são chamadas funções trigonométricas e não são independentes. Duas relações aparecem naturalmente.

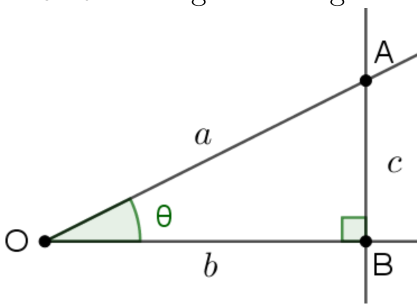
$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1 \tag{3.7}$$

$$tg\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} \tag{3.8}$$

Demonstração

Consideremos um ângulo θ de vértice O em um triângulo OAB retângulo em B como mostra a figura 3.10. Para facilitar faremos, $\overline{OC} = a$, $\overline{OB} = b$ e $\overline{BC} = c$ e lembrando

Figura 3.10: Triângulo retângulo ABO.



Fonte: Elaborado pelo autor.

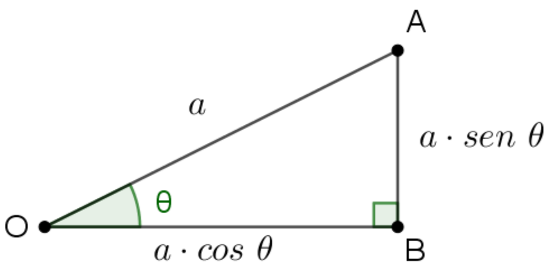
do Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1 \tag{3.9}$$

$$\frac{sen\theta}{cos\theta} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = tg\theta \tag{3.10}$$

Como para $0 < \theta < 90^o$, $sen\theta$, $cos\theta$ e $tg\theta$ são números positivos, vemos ainda que se uma das funções de θ for fornecida, podemos calcular as outras duas. E ainda que, se um triângulo retângulo tem um ângulo θ e hipotenusa a, então os catetos são $a \cdot sen\theta$ (cateto oposto a θ) e $a \cdot cos\theta$ (cateto adjacente a θ)

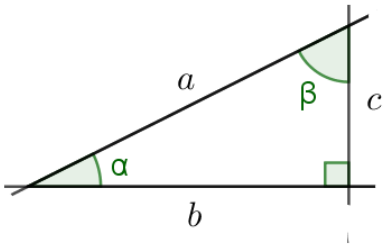
Figura 3.11: Triângulo ABO



Fonte: Elaborado pelo autor.

É fácil perceber que se dois ângulos α e β são complementares ($\alpha+\beta = 90^o$), então $sen\alpha = cos\beta$ e e $tg\alpha = \dfrac{1}{tg\beta}$.

Figura 3.12: Triângulo retângulo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

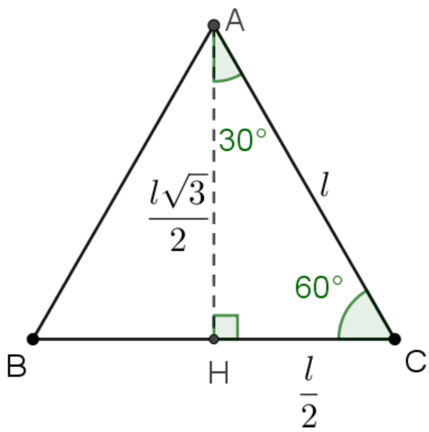
$$sen\alpha = \frac{b}{a} = cos\beta \tag{3.11}$$

$$tg\alpha = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{tg\beta} \tag{3.12}$$

Valores dos senos, cossenos e tangentes dos ângulos mais usados no ensino básico.

Demonstração: Ângulos de 30º e 60º

Figura 3.13: Triângulo equilátero.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No triângulo equilátero ABC de lado l da Figura 3.13 traçamos a altura AH (Nesse caso também mediana). Obtemos então, $\overline{CH} = \frac{1}{2}l$ e, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \overline{AH}^2 \Rightarrow$$

$$l^2 - \frac{l^2}{4} = \overline{AH}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{3l^2}{4} = \overline{AH}^2 \Rightarrow$$

$$\overline{AH} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\overline{AH} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Logo a altura é igual a $\frac{l\sqrt{3}}{2}$. Como $A\widehat{C}D = 60^o$ e $C\widehat{A}D = 30^o$. Pelo triângulo AHC, temos:

$$sen30^o = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$cos30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sen60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

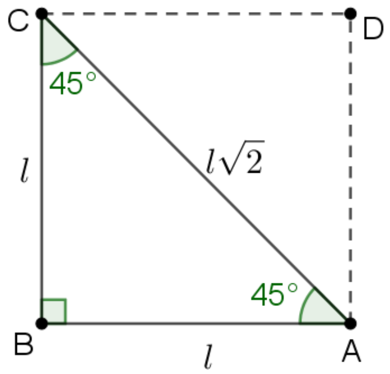
$$cos60^o = \frac{1}{2}$$

$$tg60^o = \sqrt{3}$$

Demonstração: Ângulo de 45^o.

Dado o triângulo isósceles da Figura 3.14 com catetos iguais a l e ângulos de 45^o

Figura 3.14: Triângulo isósceles



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{BC}^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow$$

$$\overline{BC}^2 = 2l^2 \Rightarrow$$

$$\overline{BC} = \sqrt{2l^2} \Rightarrow$$

$$\overline{BC} = l\sqrt{2}$$

Logo, temos que:

$$sen45^{\text{o}} = \frac{l}{\frac{l}{\sqrt{2}}} \Rightarrow sen45^{\text{o}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos45^{\text{o}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45^{\text{o}} = 1$$

A teoria apresentada nesse capítulo servirá como base para o entendimento das aplicações relativas a escalas termométricas, e além disso, o estudo da trigonometria no triângulo retângulo terá sua aplicação no movimento oblíquo. O conhecimento da trigonometria, em particular, dos valores dos ângulos notáveis serão os conhecimentos prévios necessários para fazer as decomposições de velocidades em relação aos eixos coordenados.

4 Aplicações dos Conteúdos na Cinemática

Nesta seção, apresentaremos algumas aplicações à Cinemática e à Termometria. No entanto, é importante ressaltar, que as aplicações aqui apresentadas serão norteadas pela interdisciplinaridade, deixando sempre evidente que a Matemática que há em cada uma das aplicações propostas é suficiente para resolver os problemas com razoável conhecimento da Física.

No entanto, a teoria Física deve ser apresentada mesmo que apenas em seus conceitos preliminares, e para que a abordagem seja feita de maneira satisfatória, foram utilizadas as referências [2] e [3] para as referidas definições e para alguns exemplos.

4.1 Definições Preliminares

Nesta seção iremos abordar as aplicações das funções polinomiais do 1º e 2º graus na cinemática, nesse caso é importante frisar que a nossa intenção é simplesmente mostrar que tendo um conhecimento básico dessas funções poderemos entender e resolver muitas questões trabalhadas nesse ramo da Física. Iremos então perceber que devemos restringir o domínio das funções aqui trabalhadas. Teremos então análise de funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, já que a variável independente que irá aparecer no decorrer do capítulo será o tempo t.

Agora iremos definir algumas grandezas físicas retiradas de [2].

Definição 4.1 (Velocidade Escalar Média)**.** *Velocidade Escalar Média* (Vm)*, definida como a razão entre a variação da posição* ($\Delta s = s - s_0$) *e a variação de tempo* ($\Delta t = t - t_0$) *em que a variação da posição ocorre.*

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

($\Delta s = s - s_0$) que é a diferença entre as posições ocupadas pelo móvel em diferentes instantes e ($\Delta t = t - t_)$) que é a diferença entre os tempos em que essa mudança de posição ocorre.

Note que, pela definição, a velocidade escalar média é a taxa de variação média da posição em relação aos instantes t e t_0, onde t é o instante final e t_0 é o instante inicial.

Definição 4.2 (Velocidade Instantânea)**.** *Denomina-se Velocidade Instantânea a velocidade com que um móvel percorre a trajetória num determinado instante t.*

Note que a velocidade escalar média não nos permite saber como foi o movimento em diferentes instantes de um determinado intervalo.

Por exemplo, o valor indicado pelo velocímetro em certo instante é o valor absoluto de a velocidade escalar instantânea.

Definição 4.3 (Aceleração Escalar Média)**.** *Define-se que aceleração escalar média entre dois instantes é a variação de velocidade escalar instantânea ocorrida, em média, por unidade de tempo, ou seja, é a a razão entre a variação de velocidade (ΔV) e a respectiva variação de tempo (Δt), indica-se.*

$$a_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

Observe que, por definição a aceleração escalar média é a taxa de variação é a taxa de variação média da velocidade em relação aos instantes t_1 e t_2.

A medida da taxa de variação da velocidade escalar com o tempo, feita num instante, é a aceleração escalar instantânea que simbolizaremos por α.

4.2 Movimento Retilíneo Uniforme

O Movimento Uniforme é um dos mais tipos simples de movimento, e ele será apresentado em algumas aplicações durante o texto. A definição abaixo foi retirada de [2].

Definição 4.4. *Um movimento é denominado uniforme quando ocorre com velocidade escalar que não se modifica com o passar do tempo.*

É o que ocorre, por exemplo, com alguns automóveis modernos quando estão com o piloto automático acionado.

Na natureza, encontraremos casos interessantes de movimentos uniformes, como a propagação da luz e do som em meios homogêneos ou movimento de uma rocha numa região do universo em que o campo gravitacional é desprezível.

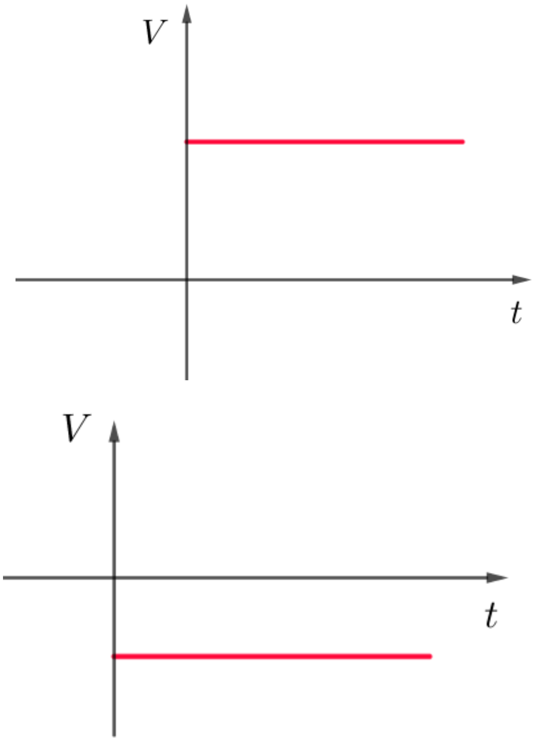
Define-se então, Movimento Retilíneo Uniforme (MRU), qualquer movimento realizado por um móvel, em trajetória retilínea, que percorre distâncias iguais em intervalos de tempo iguais. No movimento retilíneo uniforme a velocidade escalar instantânea é constante, não nula e igual a velocidade escalar média V_m em qualquer intervalo.

Nesse caso, como a velocidade escalar instantânea v é constante e diferente de zero, a aceleração escalar a é constante e nula.

4.2.1 Representação Gráfica da Velocidade Escalar em função do Tempo

Em todos os instantes do intervalo de tempo em que o movimento é uniforme, a velocidade escalar é sempre a mesma. Logo a representação gráfica dessa velociade em função do tempo pode ser assim representada.

Figura 4.1: Velocidade escalar

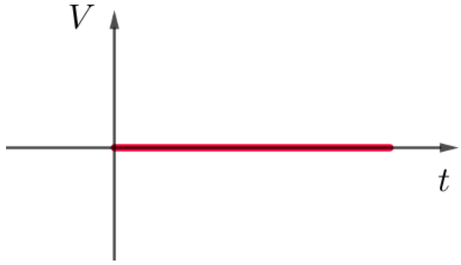


Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2.2 Gráfico da Função Horária da Velocidade no Movimento Uniforme

No repouso a velocidade é constante e nula. Nesse caso, a representação gráfica da velocidade escalar em função do tempo é.

Figura 4.2: Velocidade escalar

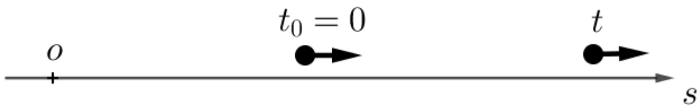


Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2.3 Função Horária do Espaço

Considerando uma partícula em movimento uniforme descrevendo a trajetória representada a seguir:

Figura 4.3: Trajetória da partícula



Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa trajetória está orientada, sendo o ponto O a origem dos espaços. No instante $t_0 = 0$ (origem dos tempos), a partícula estava em um ponto no qual o espaço era S_o (espaço inicial). Num instante qualquer t, a partícula está em ponto do espaço S.

Num movimento uniforme, a velocidade escalar média (V_m) em qualquer intervalo de tempo coincide com a velocidade escalar instantânea (V) em qualquer instante, uma vez que esta última é constante.

Assim, podemos escrever.

$$
\begin{aligned}
V = \frac{\Delta S}{\Delta t} &= \Rightarrow V = \frac{S - S_o}{t - t_o} = \frac{S - S_o}{t} \qquad (4.1) \\
S - S_o &= v \cdot t \Rightarrow S = S_o + v \cdot t. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Podemos então escrever S em função do tempo:

$$S(t) = S_o + v \cdot t. \qquad (4.3)$$

A expressão obtida é a função horária dos espaços em função do tempo t, para qualquer movimento uniforme.

Observe também que a função obtida é do primeiro grau em t. por isso podemos fazer uma relação com a função polinomial do primeiro grau $f(x) = ax + b$, da seguinte maneira.

- $a = v$ (taxa de variação dos espaços em função do tempo)
- $b = S_o$ (posição inicial dada no início da contagem), ou seja, $t = 0$. Associada ao coeficiente b da função, associado a $x = 0$ da função polinomial $f(x) = ax + b$.

Com essa ideia é fácil escrever a função horária do movimento de um móvel veja o exemplo.

Exemplo 4.1. *(**UFRGS-RS**) A tabela registra dados da posição x em função do tempo de um móvel. Qual a velocidade desse móvel? Escreva a função horária e determine a posição após* 15 *segundos.*

T(s)	x(m)
0	1
2	7
5	16
9	28

Solução:

Para tal situação, calcularemos a taxa de variação dos espaços. Assim, com os dados da tabela temos:

$S(0) = 1$ (S_1) posição inicial.

$S(2) = 7$ (S_2) posição final.

Daí, calculamos a velocidade média:

$$V_m = \frac{7-1}{2-0} = \frac{6}{2} = 3,0m/s. \tag{4.4}$$

(no Sistema Internacional de Unidades)

A situação apresenta a velocidade constante, e para a determinação da função horária do espaço, devemos determinar os valores de S_0 e de v, conforme a função abaixo:

$$S(t) = S_0 + v \cdot t,$$

ou seja, a função que representa a posição do móvel é uma função afim, em que a velocidade desempenha o papel de taxa de variação enquanto a posição inicial do móvel desempenha o papel de valor inicial da referida função, conforme apresentado no capítulo 2.

Assim, sabendo que $v = 3m/s$ e $S_0 = 1m$, a função horária é dada por:

$$S(t) = 1 + 3t.$$

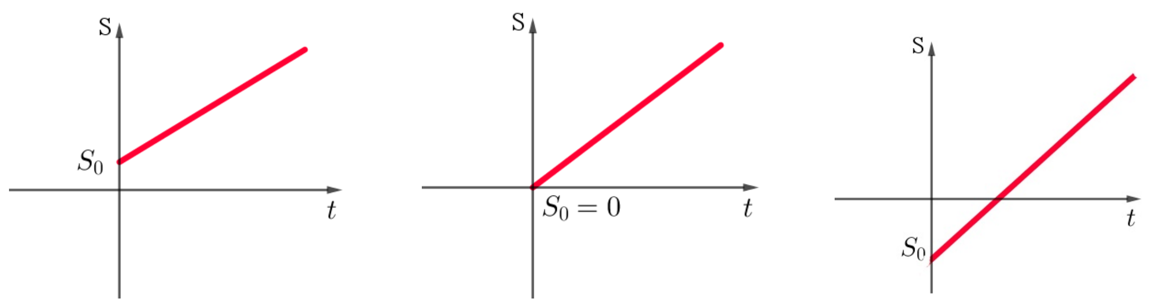
Logo, a posição do móvel no instante $t = 15s$ é

$$S(15) = 1 + 3 \cdot 15 = 46m.$$

4.2.4 Representação Gráfica do Espaço em Função do Tempo

Como vimos a função horária do movimento uniforme, $S(t) = S_o + v \cdot t$, é polinomial do 1º grau em t, sua representação é uma reta inclinada em relação aos eixos, podendo ser enquadrada em um dos casos apresentados a seguir.

Figura 4.4: Movimento uniforme progressivo

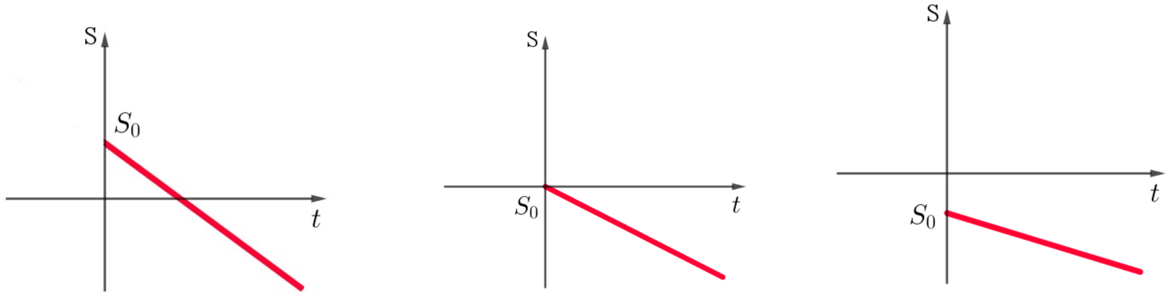


(a) Com posição inicial positiva ($S_o > o$ e $V > 0$)

(b) Com espaço inicial nulo ($S_o = o$ e $V > 0$)

(c) Com espaço inicial negativo ($S_o < 0$ e $V > 0$)

Figura 4.5: Movimento uniforme retrógrado



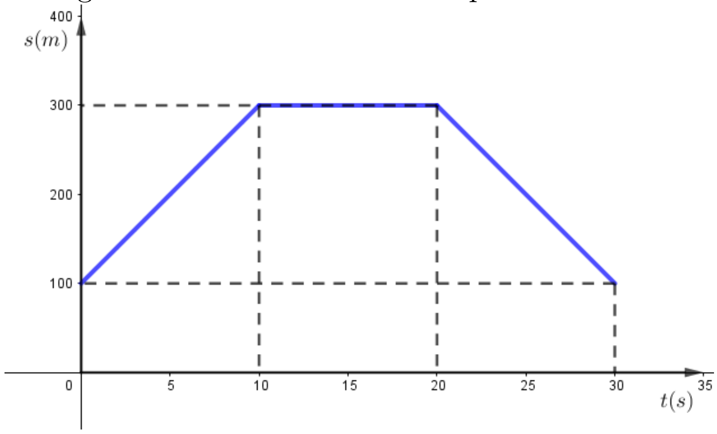
(a) Com espaço inicial nulo ($S_o = 0$ e $V < 0$)

(b) com espaço inicial positivo ($S_o > 0$ e $V < 0$)

(c) Com espaço inicial negativo ($s_o < 0$ e $V < 0$)

Exemplo 4.2. *É dado o gráfico $s \times t$ para o movimento de um ponto material.*

Figura 4.6: Movimento de um ponto material



Fonte: Elaborado pelo autor.

Represente graficamente a velocidade escalar do ponto material no intervalo de $0s$ a $30s$.

Solução: Ponto de vista Físico

Verificamos facilmente no intervalo de 0 a $10s$ a taxa de variação no espaço (v_m) é constante e positiva e vale:

$$v_m = \frac{300 - 100}{10 - 0} = \frac{200}{10} = 20m/s.$$

Já no intervalo de $10s$ a $20s$ podemos perceber que a taxa de variação é nula ($v_m = 0$)

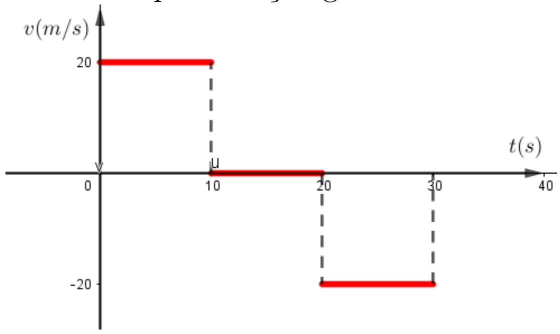
$$v_m = 0m/s \ (t_1 = 10s \text{ e } t_2 = 20s).$$

No intervalo de $20s$ a $30s$ a taxa de variação é negativa e vale:

$$v_m = \frac{S_{30} - S_{20}}{t_2 - t_1} = \frac{100 - 300}{10 - 0} = \frac{-200}{10} = -20m/s.$$

Logo o gráfico da velocidade fica representado na Figura 4.7.

Figura 4.7: Representação gráfica da velocidade

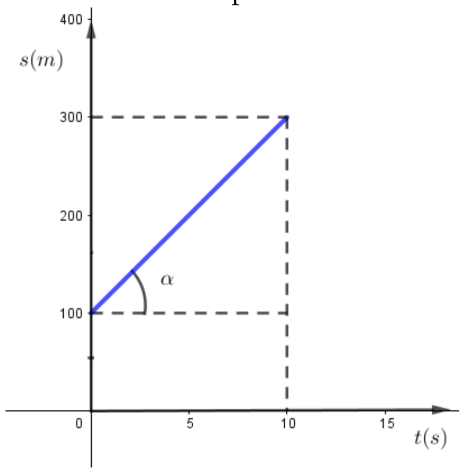


Fonte: Elaborado pelo autor.

Comentários: Ponto de Vista Matemático

Note que mesmo se saber a maneira de calcular v_m no trecho de $0s$ a $10s$. Temos como associar v_m ao valor de a (taxa de variação) da função $y = ax + b$, assim.

Figura 4.8: Velocidade do ponto de vista matemático

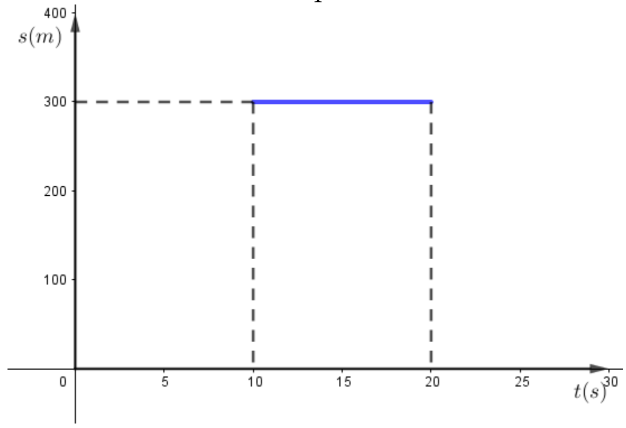


Fonte: Elaborado pelo autor.

$$a = \tan \alpha = \frac{200}{10} = 20$$

No trecho de $10s$ a $20s$, o gráfico possui um segmento horizontal, isso caracteriza variação nula, portanto $a = 0$. Conforme Figura 4.9.

Figura 4.9: Velocidade do ponto de vista matemático

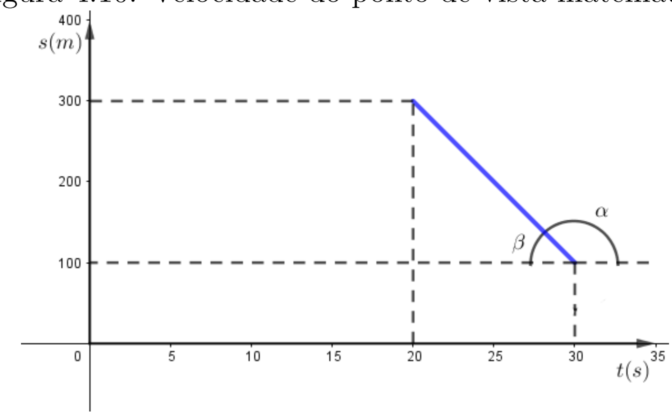


Fonte: Elaborado pelo autor.

$$a = \tan \alpha = \frac{0}{10} = 0$$

E por último de $20s$ a $30s$ o gráfico apresenta um trecho com espaços diminuindo o que caracteriza taxa de variação negativa, isso ocorre em função decrescente.

Figura 4.10: Velocidade do ponto de vista matemático

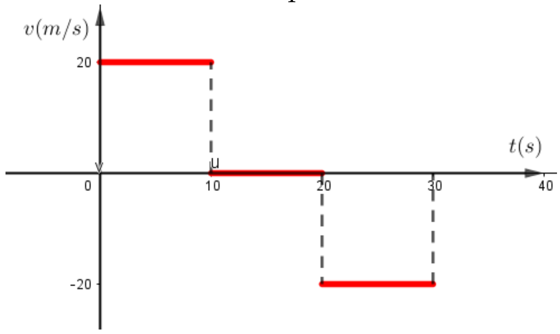


Fonte: Elaborado pelo autor.

$$a = -\tan \beta = \frac{300 - 100}{10} = -20.$$

O gráfico da velocidade fica representado na Figura 4.11.

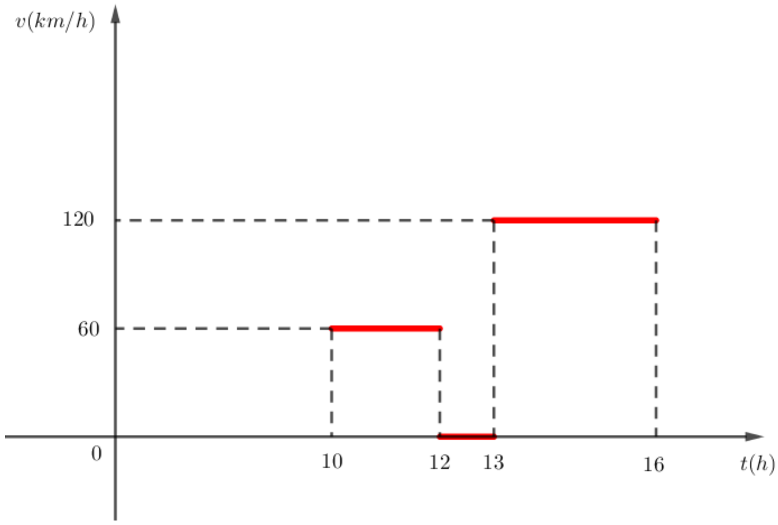
Figura 4.11: Velocidade do ponto de vista matemático



Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 4.3. *Das* $10h$ *às* $16h$*, a velocidade escalar de um móvel varia com o tempo. O gráfico a seguir mostra a variação aproximada da velocidade em função do tempo. Veja Figura 4.12. Calcule a velocidade escalar média do automóvel nesse intervalo de tempo.*

Figura 4.12: Gráfico da Velocidade em Função do Tempo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Solução: Ponto de Vista Matemático.

Sabendo que velocidade é definida como a razão entre o espaço percorrido e o tempo decorrido, temos apenas que calcular o espaço, pois o tempo de duração foi $6s$ (de $10s$ a $16s$).

Nesse caso temos a seguinte análise:

O automóvel percorreu um intervalo de 12 segundos com velocidade constante (reta horizontal) de $60km/h$, portanto.

$$S_1 = 60 \cdot 12 = 120km$$

No segundo trecho verifica-se no gráfico que o automóvel permaneceu “parado” (velocidade nula) logo:

$$S_1 = 0km$$

.

E por fim, no terceiro trecho de $13s$ a $16s$ o automóvel percorreu com velocidade de $120km/h$, então:

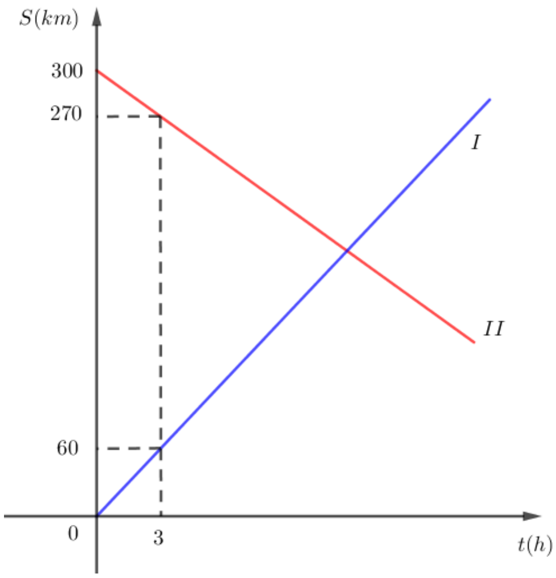
$$S_1 = 120 \cdot (16 - 13) = 120 \cdot 3 = 360km.$$

É fácil calcular então a velocidade média:

$$V_m = \frac{120 + 0 + 360}{6} = \frac{480}{6} = 80km/h.$$

Exemplo 4.4. *Dois tratores, I e II, percorrem a mesma rodovia e suas posições variam com o tempo, conforme o gráfico a seguir.*

Figura 4.13: Posição dos veículos I e II.

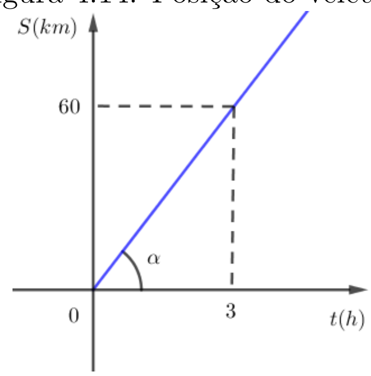


Fonte: Elaborado pelo autor.

Solução: ponto de vista Matemático

Para o veículo I temos uma função $y = ax + b$ crescente, onde o valor de a (taxa de variação positiva) (Figura 4.14) e $b = 0$, logo $y = 20x$.

Figura 4.14: Posição do veículo I

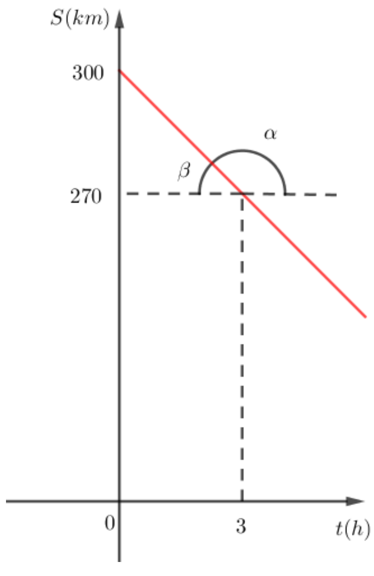


Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\tan \alpha = \frac{60}{3} = 20$$

Para o veículo II, temos uma função decrescente (taxa de variação negativa) com $a = -10$ e $b = 300$). Logo $y = -10x + 300$.

Figura 4.15: Posição do veículo II



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\tan \beta = \frac{300 - 270}{3} = 10.$$

Para descobrirmos o encontro basta resolvermos o sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} y = 20x \\ y = -10x + 300 \end{cases}$$

$$20x = -10x + 300 \Rightarrow 30x = 300 \Rightarrow x = 10.$$

Nesse o valor de x representa o instante do encontro. Logo o encontro vai ocorrer $10h$.

Fazendo uma análise do ponto de vista físico temos que as funções horárias dos espaços do móvel I e II são respectivamente $S_1 = 20 \cdot t$ e $S_2 = 300 - 10 \cdot t$. Logo quando os móveis estão na mesma posição temos:

$$S_1 = S_2$$

$$20 \cdot t = 300 - 10 \cdot t$$

$$20 \cdot t + 10 \cdot t = 300$$

$$30 \cdot t = 300$$

$$t = 10h$$

Podemos concluir que: após $10h$ de iniciado a contagem dos tempos ocorrerá o encontro, e se quiséssemos descobrir a posição de encontro basta substituir o valor encontrado em qualquer uma das funções horárias, então:

$$S_1 = 20 \cdot t$$

$$S_1 = 20 \cdot 10$$

$$S_1 = 200km.$$

Logo, podemos afirmar que o encontro vai acontecer no quilômetro 200 da estrada.

4.3 Movimento Uniformemente Variado

O Movimento Uniformemente Variado será utilizado em várias aplicações ao longo desse capítulo. Sendo assim, esse movimento carece de uma definição consistente, e essa é apresentada abaixo e foi retirada de [2].

Definição 4.5 (Movimento Uniformemente Variado)**.** *Define-se movimento uniformemente variado (MUV) como aquele em que a aceleração escalar é constante e diferente* *de zero. Consequentemente, a velocidade escalar sofre variações iguais em intervalos de tempo iguais.*

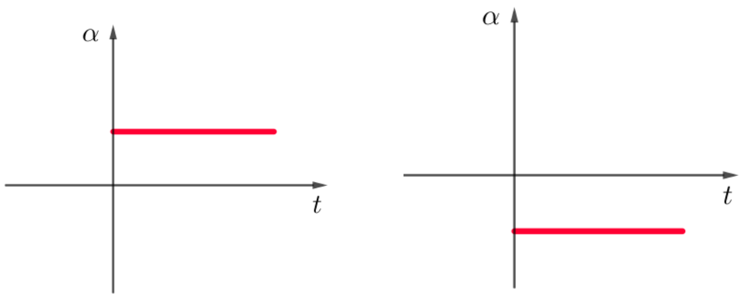
Um exemplo clássico e justificado na Dinâmica[4], é o movimento de um corpo, abandonado ou lançado verticalmente nas proximidades da superfície da Terra. Nesse caso o movimento vertical será regido pela aceleração da gravidade que tem módulo igual a $9,8\ m/s^2$.

Porém em nosso trabalho sempre usaremos $10\ m/s^2$, valor usado nas séries do ensino médio.

Representação Gráfica da Aceleração Escalar em Função do Tempo

Sendo constante e diferente de Zero, a aceleração escalar é representada graficamente por:

Figura 4.16: Aceleração escalar constante.



(a) Aceleração positiva (b) Aceleração negativa

Fonte: Elaborado pelo autor.

Propriedade do Gráfico da aceleração em função do Tempo:

No gráfico da aceleração α em função do tempo (t), vamos calcular a "área" A limitada pelo gráfico e **pelo eixo dos tempos dois instantes** t_1 e t_2 na figura.

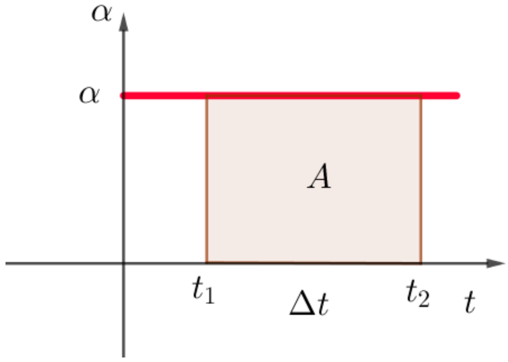
Temos que a área A destacada pode ser calculada por $A = \Delta t \cdot \alpha (I)$, como: $\alpha = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \Delta V = \alpha \cdot \Delta t (II)$, concluímos de (I) e (II) que:

$$A = \Delta V.$$

Logo no gráfico da aceleração (α) em função do tempo (t) , a "área" limitada pelo gráfico e o eixo dos tempos, calculada entre dois instantes t_1 e t_2, expressa numericamente o valor da velocidade entre t_1 e t_2:

[4] Parte da Física que estuda o movimento em suas causas e efeitos.

Figura 4.17: Gráfico da aceleração (α) em função do tempo (t)



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\text{"}Area\text{"} = \Delta V = V_2 - V_1$$

4.3.1 Função Horária da Velocidade Escalar Instantânea

Vamos supor uma partícula em movimento uniformemente variado com trajetória orientada. Chamemos de V_o sua velocidade no instante inicial ($t_o = 0$) início da contagem e de V sua velocidade escalar no instante t.

Figura 4.18: Movimento da partícula

Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos escrever:

$$\alpha = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \alpha = \frac{V - V_o}{t - t_o} \Rightarrow \alpha = \frac{V - V_o}{t} \Rightarrow V - V_o = \alpha \cdot t$$

$$V = V_o + \alpha \cdot t.$$

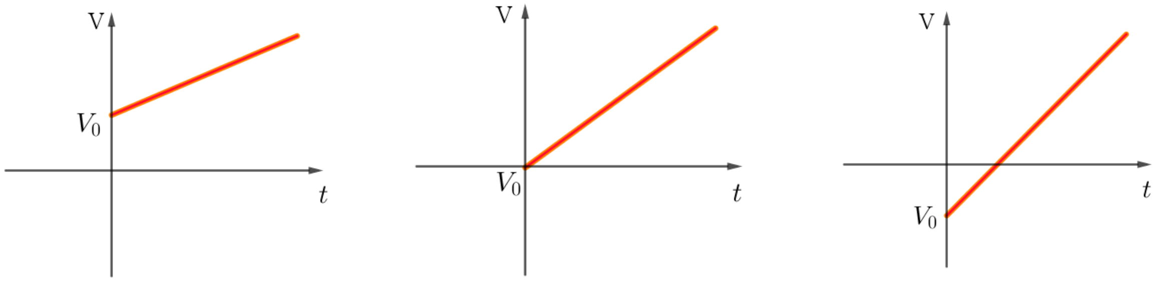
A expressão acima fornece a velocidade escalar num instante t qualquer do movimento, e ela é chamada de função horária da velocidade escalar instantânea. Além disso, na representação gráfica da velocidade escalar em função do tempo t, temos que a função horária da velocidade é de 1º grau em t.

$$V = V_o + \alpha \cdot t.$$

Sendo V_o o valor inicial e α a taxa de variação da velocidade.

Observe que se α é positiva, as retas representam funções crescentes.

Figura 4.19: Gráficos $V \times t$ quando a aceleração (α) é positiva.

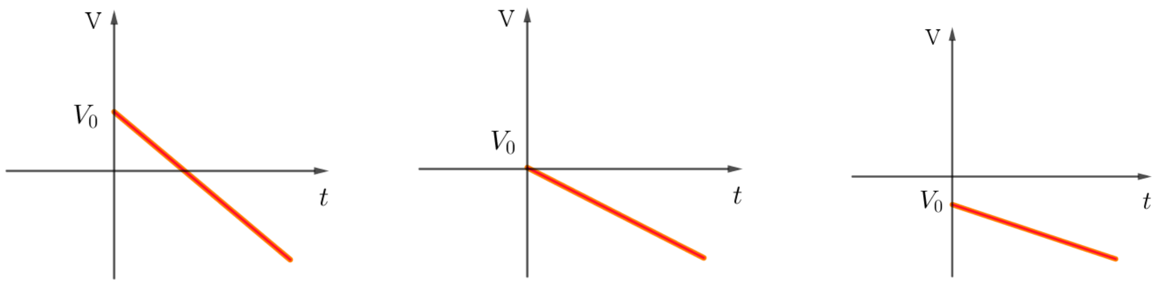


(a) V_o positiva. (b) V_o nula. (c) V_o negativa.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Caso a aceleração escalar seja negativa podemos ter também 3 situações:

Figura 4.20: Gráficos $V \times t$ quando a aceleração (α) é negativa.



(a) V_o positiva. (b) V_o nula. (c) V_o negativa.

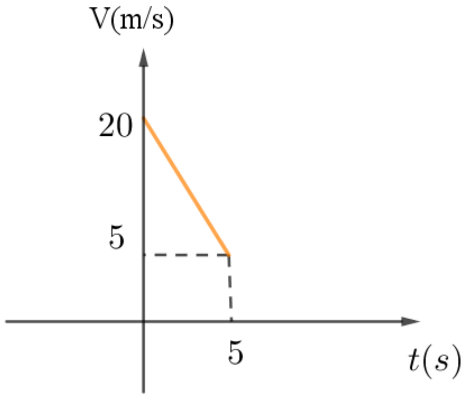
Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 4.5. *A velocidade escalar de um móvel variou com o tempo conforme o gráfico a seguir. Calcule a velocidade escalar do móvel no instante* $t = 3,5s$.

Solução: Temos nessa situação $v \times t$ representado por um segmento de reta, logo podemos obter uma função polinomial do 1° grau da velocidade em função do tempo $v(t) = v_o + \alpha \cdot t$. Daí segue que para $t = 0s$, a velocidade inicial é $20m/s$ ($v_o = 20m/s$).

Temos agora que determinar a taxa de variação que representará a aceleração do movimento, daí

Figura 4.21: Variação da velocidade escalar de um móvel.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\alpha = \frac{V - V_o}{t - t_o} = \frac{5 - 20}{5 - 0} \Rightarrow \alpha = -3.$$

Logo, a função dada pelo gráfico é:

$$V(t) = 20 - 3 \cdot t.$$

Por fim, podemos calcular a velocidade decorridos $3,5s$ de movimento

$$V(3,5) = 20 - 3 \cdot (3,5)$$

$$V(3,5) = 20 - 10,5$$

$$V(3,5) = 9,5m/s.$$

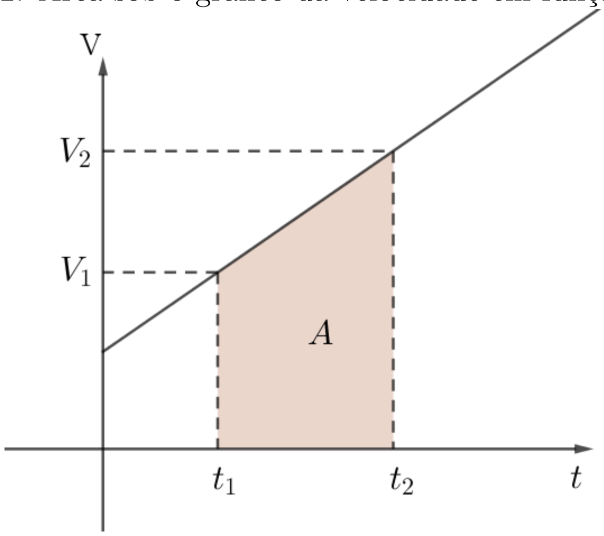
Concluímos então que após $3,5$ segundos o móvel estará se deslocando com velocidade de $9,5m/s$.

Propriedade do Gráfico da velocidade em função do tempo

No gráfico da velocidade escalar em função do tempo (t) a "área" A compreendida entre o gráfico e o eixo dos tempos, de um instante t_1 até outro instante t_2, expressa a variação do espaço ΔS entre esses instantes.

$$A = \Delta S = S_2 - S_1.$$

Figura 4.22: Área sob o gráfico da velocidade em função do tempo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa propriedade foi demonstrada anteriormente no movimento uniforme, é importante frisarmos que é válida para qualquer movimento.

4.3.2 Função Horária do Espaço

Consideremos uma partícula em movimento uniformemente variado numa trajetória orientada

Figura 4.23: Objeto sobre um trajetória

Fonte: Elaborado pelo autor.

No instante $t_o = 0$ (origem da contagem dos tempos), o espaço é s_o e a velocidade é v_o.

No instante t, o espaço é s e a velocidade escalar é v.

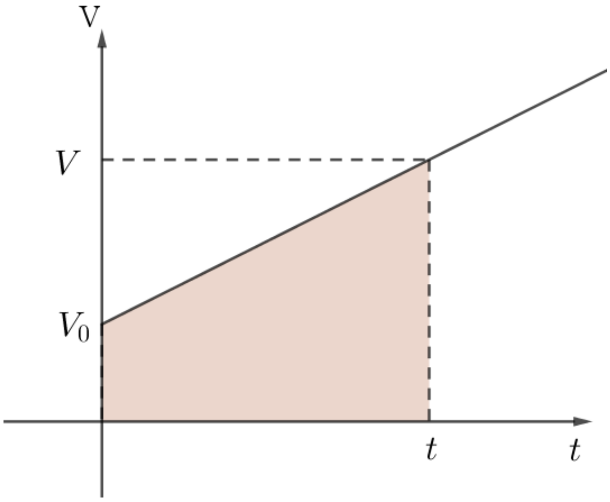
Queremos a expressão de s em função de t. para isso traçamos o gráfico $v \times t$.

Como já foi visto a área destacada representada na figura expressa a variação de espaço ΔS de $0s$ a t segundos.

Essa pode ser calculada pela fórmula da área do trapézio:

$$\Delta S = \frac{(V_o + V) \cdot t}{2}.$$

Figura 4.24: A Área do Trapézio



Fonte: Elaborado pelo autor.

Lembrando que $V = V_o + \alpha \cdot t$, temos que:

$$\Delta S = \frac{(V_o + V_o + \alpha \cdot t) \cdot t}{2}$$

$$\Delta S = V_o \cdot t + \frac{\alpha t^2}{2},$$

como $\Delta S = S - S_o$, chegamos ao resultado

$$S - S_o = V_o \cdot t + \frac{\alpha t^2}{2}.$$

Por fim obtemos a função horária dos espaços num Movimento Uniformemente Variado:

$$S = S_o + V_o \cdot t + \frac{\alpha t^2}{2},$$

em que ΔS é o deslocamento escalar ocorrido desde o instante $t_o = 0$ até o instante t.

Exemplo 4.6. *Os espaços de um móvel variam com o tempo, conforme a seguinte função horária.*

$$S(t) = t^2 - 12 \cdot t + 40,$$

em que os espaços (s) são medidos em metros, os tempos em segundos. Determine o(s) instante(s) em que o móvel passa pela origem dos espaços.

Solução: Ponto de vista da Matemática

a) Para calcularmos os instantes em que o móvel o móvel passa pela origem, precisamos reconhecer que nesse instante a posição do móvel é $S = 0m$, logo ele só vai precisar dos conhecimentos básicos de equação do 2º grau.

Temos: $0 = t^2 - 13 \cdot t + 40$ ou $t^2 - 13 \cdot t + 40 = 0$.

Daí, os coeficientes da equação serão $a = 1$, $b = -13$ e $c = 40$, e usando os cálculos da fórmula de Bhaskara, teremos:

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 9$$

$$t = \frac{13 + 3}{2} = 8$$

$$t = \frac{13 - 3}{2} = 5.$$

Concluímos então que o móvel passa pela posição $0m$ duas vezes, após 5 segundos e 8 segundos.

4.3.3 Representação Gráfica dos Espaços em Função do Tempo

De acordo com o que vimos o espaço varia com o tempo conforme uma função polinomial do 2º grau em t:

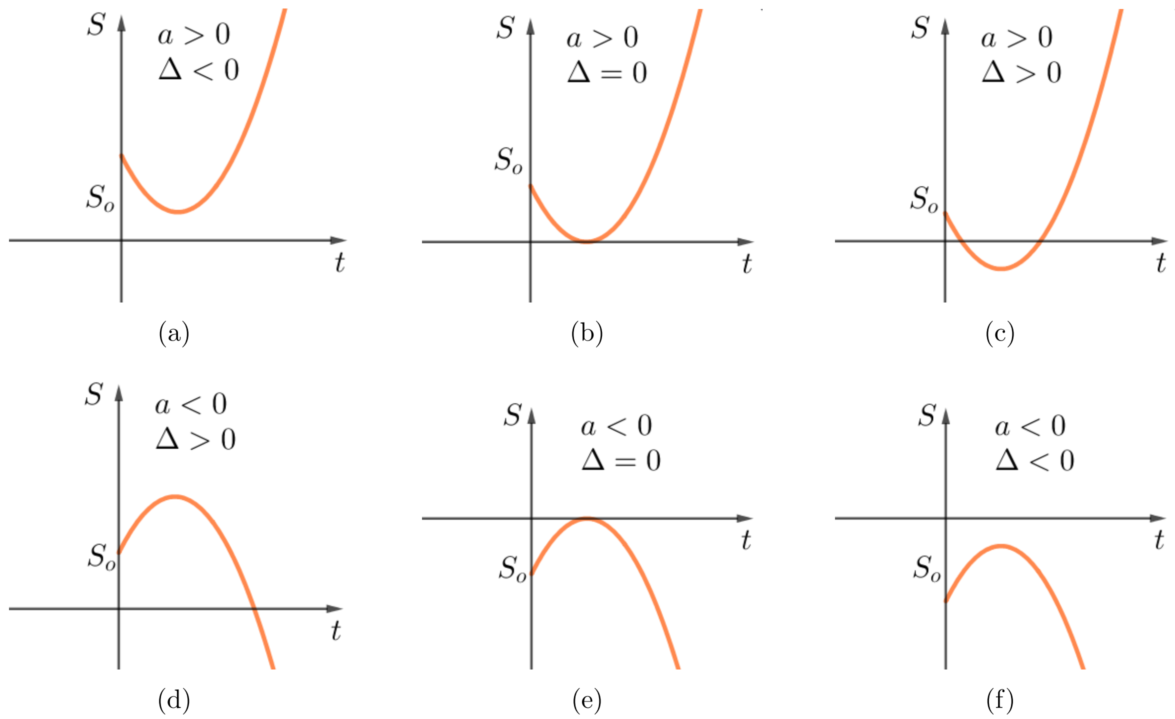
$$S = S_o + V_o \cdot t + \frac{\alpha t^2}{2},$$

e conforme foi visto anteriormente essa função tem como representação gráfica uma parábola. E nesse caso a concavidade pode ser voltada para cima ou para baixo, tudo depende de α ser aceleração positiva ou negativa.

Podemos ter então os seis gráficos abaixo, que também dependem do discriminante (delta) e do valor inicial S_o.

Exemplo 4.7. *O gráfico a seguir, do espaço em função do tempo t, refere-se a um movimento uniformemente variado.*

Figura 4.25: Representações gráficas do função quadrática $S(t), t \geq 0$



Fonte: Elaborado pelo autor.

a) Determine a velocidade do móvel no instante $t_o = 0$*;*

b) A aceleração escalar do móvel;

Solução: Ponto de vista da Matemática.

Observe que esse gráfico é representação da função horária dos espaços

$$S = S_o + V_o \cdot t + \frac{\alpha t^2}{2},$$

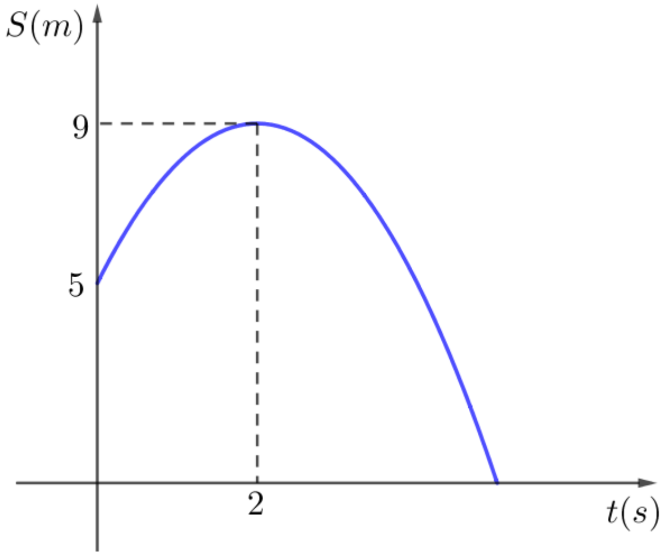
e nesse caso podemos fazer um estudo comparativo com a função $y = ax^2 + bx + c$, logo temos $S_o = 5 = c$. Não seria errado dizer que a coordenada x do vértice é igual a 2. Daí temos

$$x_v = 2 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow -b = 4a \Rightarrow b = -4a \tag{4.5}$$

e a coordenada y do vértice é igual a 9. Então $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a} = 9$, com $c = 5$.

$$\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 9 \tag{4.6}$$

Figura 4.26: Representação do movimento...



Fonte: Elaborado pelo autor.

De 4.5 e 4.6, temos:

$$\begin{cases} b = -4a \\ \dfrac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 9 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema de equações por qualquer método. Encontraremos $b = 0$ ou $b = 4$, mas b não pode ser igual zero, pois implicaria $a = 0$ o que fugiria da característica do gráfico. Com isso $b = v_o = 4$ velocidade inicial $(t = 0s)$.

c) O valor de a.

Da equação (4.5)

$$-b = 4a \Rightarrow -4 = 4a \Rightarrow a = -1.$$

Porém, na comparação entre as duas funções

$$a = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow -1 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = -2.$$

Nessa situação vimos que usando o conhecimento de função polinomial de 2° grau a resolução torna-se potencialmente compreendida.

Agora, utilizando analogia com o caso do movimento horizontal, serão apresentados exemplos de lançamento vertical, em que a aceleração será denotada por g e possui valor aproximado de $10m/s^2$. As funções horárias para o espaço e para a velocidade são:

- $h(t) = h_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} g t^2$;
- $v(t) = v_0 \pm gt$.

Nas funções acima, h_0 é a altura inicial e v_0 é a velocidade inicial. Para fins de utilização futura, também será apresentada a Equação de Torricelli

$$v^2 = v_0^2 \pm 2g\Delta h.$$

Exemplo 4.8. *(FUC-MT) Um corpo é lançado verticalmente para cima com uma velocidade inicial de $v_0 = 30m/s$. Sendo $g = 10m/s^2$, e desprezando a resistência do ar qual será a velocidade do corpo $2,0s$ após o lançamento?*

- $20m/s$;
- $10m/s$;
- $30m/s$;
- $40m/s$
- $50m/s$.

Solução:

Já sabemos que a função horária da velocidade para esse movimento é $v(t) = 30 - 10t$, considerando $g = 10m/s^2$. Assim, o problema é reduzido a achar o valor da função velocidade, $v(t)$ no instante $t = 2,0s$. Logo, o resultado do problema e $v(2,0) = 30 - 10(2,0) = 10m/s$, que é a velocidade do objeto no instante $2,0s$.

Exemplo 4.9. *(FUC-MT) Em relação ao exercício anterior, qual é a altura máxima alcançada pelo corpo?*

- $90m$;
- $135m$;
- $270m$;

- $360m$;
- $45m$.

Solução:

A solução do ponto de vista físico consiste em resolver o problema por meio da famosa equação de Torricelli, em que sabendo que a velocidade inicial é de $30m/s$ e que a velocidade na altura máxima (velocidade final) é igual a 0, a altura máxima é facilmente encontrada. Logo, utilizando a referida equação, temos

$$v^2 = v_0^2 - 2ah_{max}$$

$$0^2 = 30^2 - 2(10)h_{max}$$

$$200h_{max} = 900$$

$$h_{max} = 45,0m.$$

Agora apresentando a solução do ponto de vista matemático, o primeiro passo é achar o instante em que o objeto atinge a altura máxima, e isso ocorre quando o objeto tem velocidade nula, ou seja,

$$v(t) = 0$$

$$30 - 10t = 0$$

$$t = 3,0s.$$

Agora sabemos o instante em que instante o objeto atinge altura máxima, mas o objetivo agora é determinar qual a altura máxima, e para isso é necessário substituir o valor do tempo necessário para o objeto para atingir a altura máxima na função horária da posição

$$s(t) = 30t - 5t^2,$$

isto é,

$$s(3,0) = 30(3,0) - 5(3,0)^2 = 45,0m.$$

Logo, a altura máxima é de $45,0m$.

Exemplo 4.10. *(Aplicação da Forma Canônica) Utilizando a função horária da altura* *para o lançamento vertical, apresente os valores do tempo e da altura máxima.*

Faremos agora a utilização do princípio matemático utilizado para a obtenção da forma canônica buscando determinar uma fórmula para a altura máxima, além da obtenção do tempo que o objeto leva para atingir a altura máxima. Sendo assim, considerando que a função horária é:

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$h(t) = -\frac{1}{2}\left(t^2 - \frac{2v_0}{g}t - \frac{2h_0}{g}\right)$$

$$h(t) = -\frac{1}{2}\left(t^2 - \frac{2v_0}{g}t + \frac{v_0^2}{g^2}\right) - \frac{2h_0}{g} - \frac{v_0^2}{g^2}$$

$$h(t) = -\frac{1}{2}\left[\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 - \frac{(2h_0 g + v_0^2)}{g^2}\right].$$

Logo, é possível escrever a expressão acima do mesmo modo que fizemos para a forma canônica, e a função horária ficará dada como segue:

$$h(t) = -\frac{1}{2}\left[(t - t_{max})^2 - h_{max}\right],$$

e o tempo para o objeto chegar na altura máxima é

$$t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

enquanto a altura máxima é

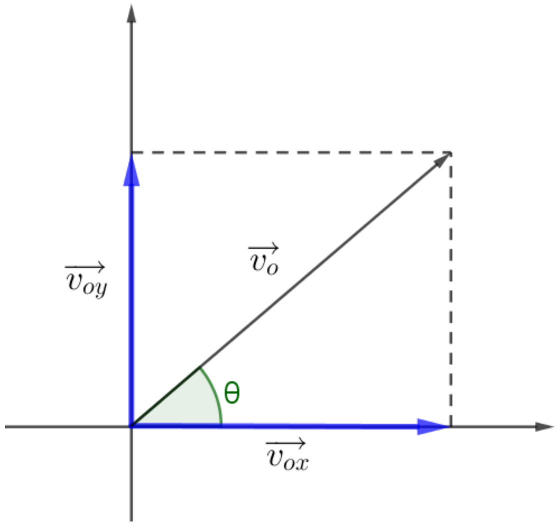
$$h_{max} = \frac{(2h_0 g + v_0^2)}{g^2}.$$

4.3.4 Movimento Parabólico em Campo Gravitacional

Lançamento Oblíquo – É aquele em que um móvel se desloca em duas direções, na vertical em movimento uniformemente variado e na horizontal regido de movimento uniforme.

Considere um móvel lançado obliquamente com velocidade inicial V_o, inclinada de um ângulo θ em relação ao plano horizontal, temos como origem o ponto de lançamento conforme figura.

Figura 4.27: Componentes vertical e horizontal de V_o (velocidade inicial de lançamento)

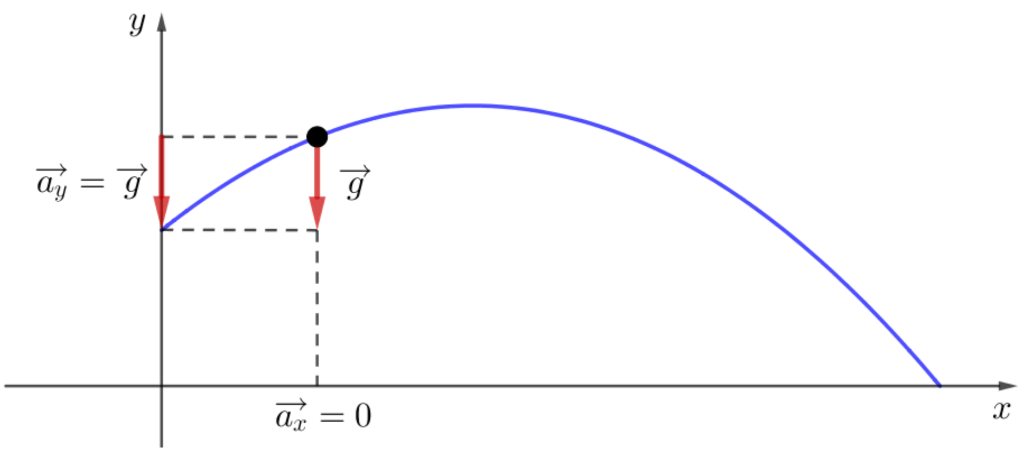


Fonte: Elaborado pelo autor.

Embasado pelo princípio da independência dos movimentos (quando um corpo se encontra sob a ação simultânea de vários movimentos cada um deles se processa como se os demais não existissem).

E considerando um sistema de eixos ortogonais Oxy no mesmo plano de um movimento parabólico de aceleração vetorial constante e igual a $\overrightarrow{g}$. Projetamos essa aceleração sobre os eixos. Dessas projeções concluímos que a aceleração segundo Oy (eixo vertical) é constante e igual a $|\overrightarrow{g}|$, ao passo que a aceleração vetorial segundo Ox (eixo horizontal) é constantemente nula. Assim, temos:

Figura 4.28: Lançamento Oblíquo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Se projetarmos sobre os eixos Ox e Oy as posições do móvel em movimento parabólico, obteremos na direção horizontal o movimento uniforme e a posição inicial é igual a zero, tem-se da seção que a função horária da posição é dada por

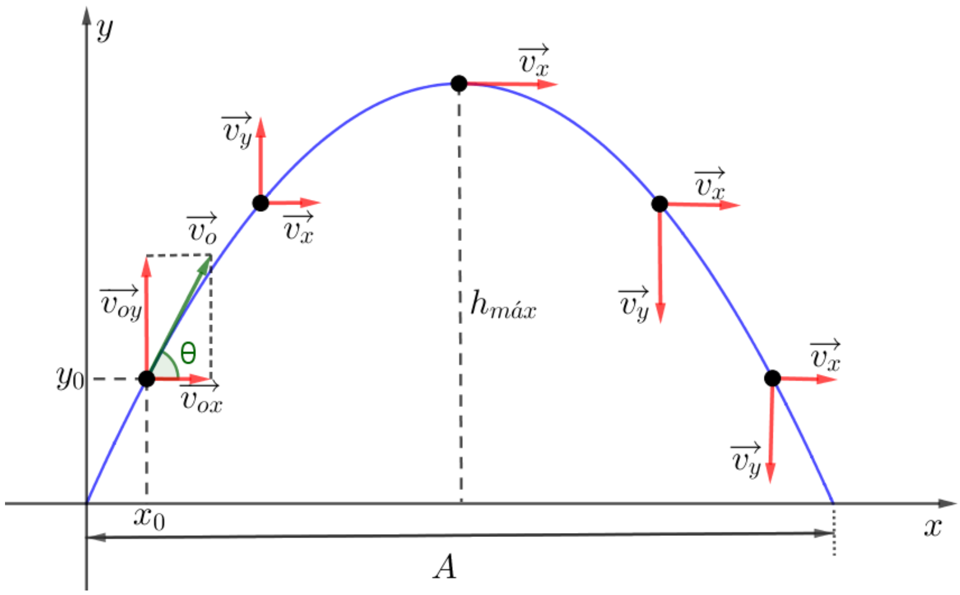
$$x(t) = x_o + v_{ox} \cdot t.$$

Na direção vertical, sendo uniformemente variado, a função horária da posição é dada por:

$$y(t) = y_o + v_{oy} - \frac{gt^2}{2}.$$

É importante notar o sinal negativo na função anterior, a explicação é pelo fato de que o eixo é orientado para cima e a aceleração gravitacional atua na direção contrária.

Figura 4.29: Componentes da Velocidade no Lançamento Oblíquo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Da Figura 4.29 temos que:

$v_{ox} = v_o \cdot cos\theta$ e $v_{oy} = v_o \cdot sen\theta$.

Lembrando que o movimento é uniforme segundo Ox, podemos escrever:

$$S = S_o + v \cdot t.$$

Em que: $S = x$, $S_o = x_o$ e $v = v_{ox}$, obtemos:

$$x = x_o + v_{ox} \cdot t$$

(função horária do espaço segundo Ox).

No eixo Oy, por sua vez, o movimento é uniformemente variado, o que nos permite escrever:

$$S = S_o + v_o \cdot t + \frac{\alpha \cdot t^2}{2}$$

$$v(t) = v_o + \alpha \cdot t,$$

em que: $s = y$; $S_o = y_o$; $v_o = v_{oy}$; $v = v_y$; $\alpha = \alpha_y = -g$.

Logo,

$$y = y_o + v_{oy} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

(função horária do espaço segundo Oy)

$$V_y = v_{oy} - g \cdot t$$

(função horária da velocidade escalar segundo Oy)

$$V_y^2 = v_{oy}^2 - 2g\Delta y$$

Cálculo dos Tempos de Subida (t_s) e de descida (t_d) e tempo total T.

Retornando a Figura 4.29, vamos calcular agora o intervalo de tempo decorrido desde o instante de lançamento até o instante em que o projétil atinge a altura máxima (tempo de subida: (t_s))

Para isso, devemos perceber que no ponto mais alto (V_y) vale zero, pois o móvel começa a mudar sentido. Assim usando a função horária velocidade escalar segundo Ou, temos:

$$V_y = v_{oy} - g \cdot t.$$

Quando $t = t_s$, temos que $V_y = 0$, nessa situação

$$V_y = v_{oy} - g \cdot t_s = 0$$

$$t_s = \frac{V_{oy}}{g} = \frac{V_o \cdot sen\theta}{g}.$$

O intervalo de tempo decorrido desde o instante em que o móvel atinge o ponto de altura máxima até o instante em que retorna ao mesmo nível horizontal do lançamento (tempo de descida t_d) é igual ao tempo de subida:

$$t_d = \frac{V_o \cdot sen\theta}{g}.$$

Com isso o tempo total do movimento (T) é dado por:

$$T = t_s + t_d = \frac{(2 \cdot V_o \cdot sen\theta)}{g}.$$

Cálculo da altura máxima

Voltando à Figura 4.29 temos que a altura máxima (h_{max}) em relação ao plano horizontal pode ser determinada, levando em consideração que é o valor de Δy, quando Δy se anula. Usando a equação de Torricelli segundo Oy, obtemos

$$V_y^2 = V_{oy}^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta y$$

$$V_{oy}^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta y = 0 \Rightarrow \Delta y = h_{max} = \frac{V_{oy}^2}{2 \cdot g} = \frac{V_o^2 \cdot sen^2\theta}{2 \cdot g}.$$

Cálculo do Alcance Máximo Chamamos de alcance horizontal ou simplesmente alcance a grandeza A correspondente ao deslocamento horizontal do móvel, desde o instante da partida até o instante em que retorna ao nível horizontal do lançamento.

É fato que A é o valor de Δx no instante correspondente ao tempo total (t).

Usando as equações horárias segundo Ox.

$x = x_o + v_{ox} \cdot t$ ou $\Delta x = v_{ox} \cdot t$.

Fazendo $t = T = \dfrac{2 \cdot V_o \cdot sen\theta}{g}$ temos $\Delta x = A$

$$A = v_{ox} \cdot \frac{2 \cdot V_o \cdot sen\theta}{g} = V_o \cdot cos\theta \cdot \frac{2 \cdot V_o \cdot sen\theta}{g}$$

$$A = \frac{V_o^2 \cdot (2sen\theta \cdot cos\theta)}{g} = \frac{V_o^2 \cdot sen2\theta}{g}.$$

Na última passagem usamos uma identidade bem conhecida a trigonometria:

$2sen\theta \cdot cos\theta = sen2\theta$.

Condição de máximo Alcance Horizontal

Suponhamos que o móvel deve ser lançado de modo a se obter o maior alcance horizontal (A) possível, com V_o e g fixados. Devemos notar que na expressão:

$$A = \frac{V_o^2}{g} \cdot sen(2\theta).$$

O valor máximo de A acontecerá quando $sen(2\theta) = 1$, pois o maior da função seno é 1, então o valor de A será maior possível no momento que $2\theta = 90°$, isso implica que $\theta = 45°$. Isso nos informa que para obter alcance máximo o corpo deve ser lançado sob um ângulo de 45° em relação à horizontal.

Equação da Trajetória Vamos mostrar que a trajetória descrita pelo móvel lançado obliquamente em campo gravitacional uniforme, sem influência do ar, é realmente parabólico.

Demonstração

Sabemos que:

$$x = x_o + v_o \cdot cos\theta \cdot t$$

$$y = y_o + v_o \cdot sen\theta \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}.$$

Para simplificar, suponha que o móvel seja lançado da origem do sistema O_{xy}, ou seja, considere $x_o = 0$ e $y_o = 0$. Assim temos:

$$x = v_o \cdot cos\theta \cdot t \tag{4.7}$$

e

$$y = v_o \cdot sen\theta \cdot t - \frac{gt^2}{2} \tag{4.8}$$

Manipulando as igualdades temos de 4.7 que:

$$t = \frac{x}{v_o \cdot cos\theta} \tag{4.9}$$

Substituindo em 4.8, resulta:

$$y = y_o \cdot sen\theta \cdot \frac{x}{v_o \cdot cos\theta} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_o^2 \cdot cos^2\theta}$$

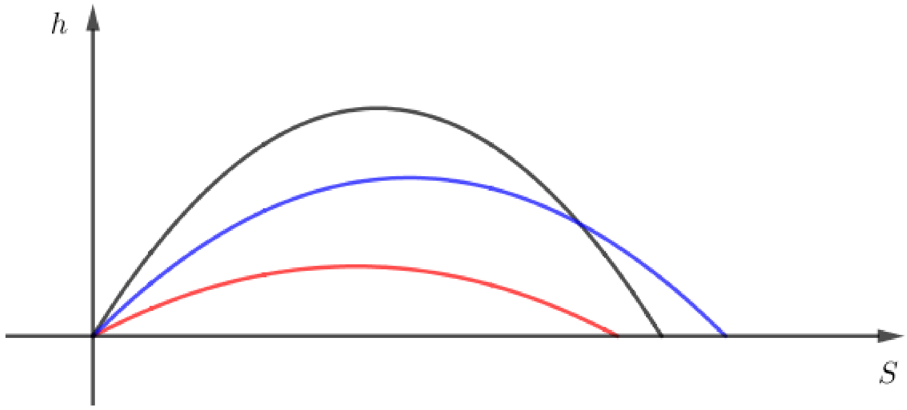
ou ainda,

$$y = tg\theta \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_o^2 \cdot cos^2\theta} \cdot x^2.$$

Essa última expressão é a expressão da trajetória do móvel. Observamos que é do 2° grau em x e que o coeficiente de seu termo de grau dois é negativo. Isso implica que a trajetória é um arco de parábola com concavidade voltada para baixo, conforme visto anteriormente.

Convém lembrar que nessa ultima relação entre x e y os valores de θ variam entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ não podendo assumir nenhum dos dois extremos. No entanto, se $\theta = \frac{\pi}{4}$ teremos o alcance máximo no lançamento, conforme visto anteriormente. Para fixar as ideias, serão apresentados os gráficos abaixo:

Figura 4.30: Lançamento Obliquo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os gráficos acima o comportamento da função para diferentes valores de θ. Sendo a trajetória vermelha com $\theta < \dfrac{\pi}{4}$, a trajetória azul com $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ e a trajetória preta com $\theta > \dfrac{\pi}{4}$.

Exemplo 4.11. *Um corpo é lançado obliquamente com velocidade v_o de módulo $50m/s$, sob um ângulo de lançamento θ ($sen\theta = 0,6$; $cos\theta = 0,8$), conforme indica a figura.*

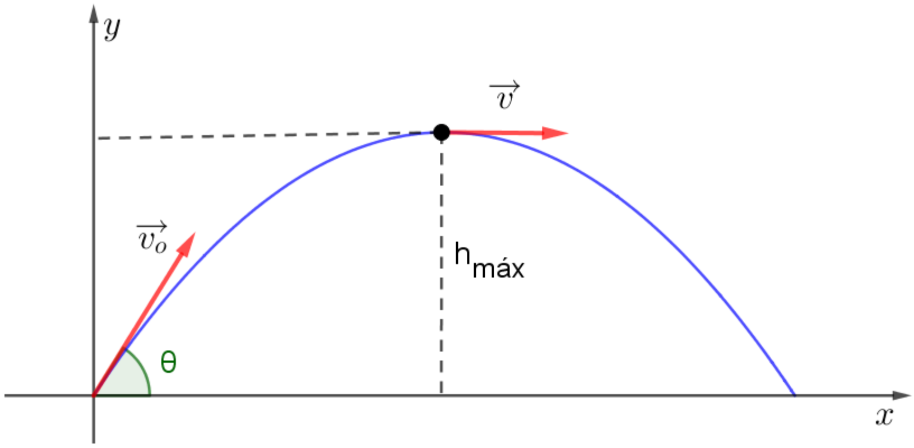
Calcule considerando $g = 10m/s$ e desprezando a influência do ar:

a) O tempo de subida;

b) A altura máxima atingida pelo corpo;

c)O alcance máximo horizontal;

Figura 4.31: Modelo do Problema.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Resolução usando as fórmulas do movimento.

a) O tempo de subida é dado por;

$$t_s = \frac{v_o \cdot sen\theta}{g} = \frac{50 \cdot 0,6}{10} = 3\ s.$$

b) A altura máxima é dada por:

$$h_{max} = \frac{v_o^2 \cdot sen^2\theta}{2 \cdot g} = \frac{50^2 \cdot 0,6^2}{2 \cdot 10} = 45\ m.$$

c) O alcance máximo é calculado por:

$$A = \frac{v_o \cdot 2sen\theta \cdot cos\theta}{g} = \frac{50^2 \cdot 2 \cdot 0,6 \cdot 0,8}{10} = 240\ m.$$

Resolução pelo ponto de vista matemático

Mostraremos as equações do movimento. Temos:

$$V_{ox} = V_o \cdot cos\theta = 50 \cdot 0,8 = 40\ m/s.$$

$$V_{yx} = V_o \cdot sen\theta = 50 \cdot 0,6 = 30\ m/s.$$

$x_o = 0$ e $y_o = 0$

Na vertical temos:

$$y = y_o + v_{oy} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \Rightarrow y = 30 \cdot t - 5 \cdot t^2.$$

$$V_y = v_{oy} - g \cdot t \Rightarrow V_y = 30 - 10 \cdot t.$$

Na horizontal temos:

$$x = x_o + v_{ox} \cdot t \Rightarrow x = 40 \cdot t.$$

a) O tempo de subida pode ser calculado usando $V_y = 30 - 10 \cdot t$, basta lembrar que o tempo de subida está relacionado com a altura máxima, basta percebermos que quando o corpo atinge a altura máxima ocorre a mudança no sentido do movimento, isso acontece por que a componente da velocidade V_y se anula, ou seja $V_y = 0\ m/s$, então podemos calcular o tempo de subida.

$$V_y = 30 - 10 \cdot t \Rightarrow 0 = 30 - 10 \cdot t \Rightarrow t = 3\ s.$$

b) A altura máxima pode ser calculada pela coordenada y do vértice da função $y = 30 \cdot t - 5 \cdot t^2$.

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[30^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 0]}{4 \cdot (-5)} = \frac{-900}{-20} = 45\ m.$$

c) O alcance máximo A pode ser obtido substituindo o tempo total que é o dobro do tempo de subida ($6\ s$) na função $x = 40 \cdot t$.

$$x = 40 \cdot t \Rightarrow x = 40 \cdot 6 = 240\ m.$$

4.3.5 Outras Aplicações - Termometria

A Termometria é o ramo da Física que estuda a temperatura e as diversas escalas criadas ao longo do tempo. Cabe citar que algumas das escalas utilizadas na aplicação proposta no texto não são amplamente utilizadas no nosso país, o que faz necessário o estudo da conversão dos valores dessas escalas. A conversão ou mudança de escala é baseada na existência de pontos fixos, como ponto de gelo e ponto de vapor, o que torna essa mudança possível graças à correspondência entre os referidos pontos e os resultados da teoria de proporções.

Segundo os livros didáticos de Física do ensino médio sempre é possível estabelecer uma relação entre duas escalas termométricas[5]. Isto é se refere ao fato de que é possível relacionar valores entre escalas Celsius[6] e Fahrenheit[7]

Veremos como isso funciona. Para a determinação de escala termométrica são necessários que se estabeleçam dois pontos fixos fundamentais; 1º Ponto Fixo – Ponto de gelo – Temperatura na qual o gelo e a água permanecem em equilíbrio térmico[8] quando sob pressão normal. 2º ponto Fixo – Ponto de Vapor – Temperatura na qual a água entra em ebulição sob pressão normal.

A escala termométrica mais utilizada no mundo inclusive no Brasil, foi criada por Anders Celsius: Ele utilizou o valor 0 (zero) para o ponto de ebulição da água e o vapor 100 para o ponto de congelamento. Foi um biólogo sueco, chamado Lineu (1707 – 1778) , que inverteu essa escala, tornando-a tal como a conhecemos hoje.

A escala do físico Daniel Gabriel Fahrenheit, utilizando as ideias do astrônomo dinamarquês OLe Römer (1944 – 1710), para o ponto 0 (zero) utilizou a temperatura de mistura gelo e cloreto de amônia e para o ponto 100, a temperatura do corpo humano. Somente mais tarde, utilizou água como referência, observou que sua escala assinalava 32 para o ponto de gelo e 212 para o ponto de vapor. A escala Fahrenheit é utilizada principalmente nos países de língua inglesa.

Para fazer a correspondência, foi utilizado dois termômetros idênticos de mercúrio, sendo um graduado na escala Celsius e outro na escala Fahrenheit. Ao serem colocados em contato com o mesmo corpo, observou-se que as alturas da coluna de mercúrio são iguais, mas por se tratarem de escalas distintas, os valores numéricos são diferentes (θ_c e θ_f). A figura ilustra a situação.

Observando a figura acima, os pontos de gelo e de vapor estão bem definidos nos seus respectivos intervalos, e isso permite que qualquer outra temperatura possa ser relacionada por meio da teoria de segmentos correspondente. Assim, caso seja necessário relacionar as temperaturas de $50°C$ para Fahrenheit, cuja unidade é $°F$, para isso vamos

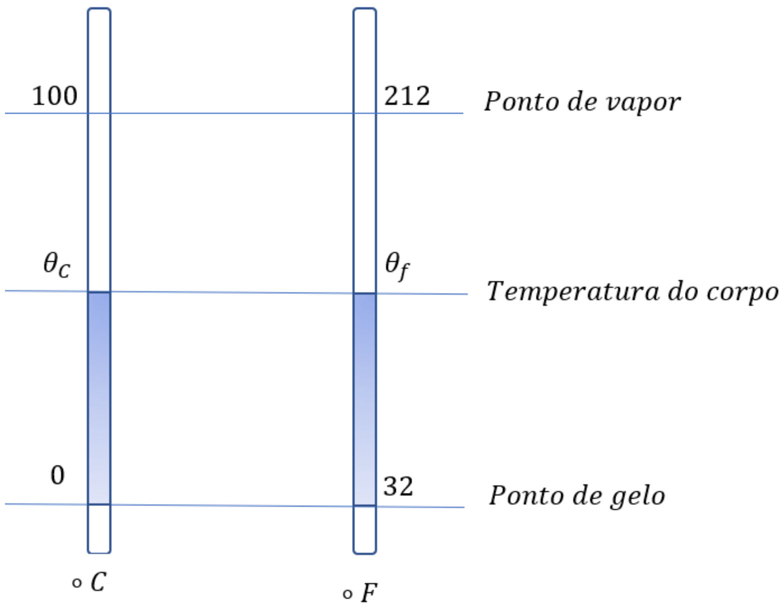
[5]Escalas termométricas – É um conjunto de valores numéricos em que cada valor está associado a uma determinada temperatura.

[6]Celsius – Anders Celsius – físico sueco (1701 – 1744)

[7]Fahrenheit – Daniel Gabriel Fahrenheit - físico alemão (1686 – 1736)

[8]Equilíbrio térmico – Quando dois corpos atingem a mesma temperatura.

Figura 4.32: Escalas termométricas



Fonte: Elaborado pelo autor.

proceder segundo o Teorema de Tales:

$$\frac{50-0}{100-0} = \frac{\theta_f - 32}{212-32},$$

e

$$\theta_f = 122F$$

Agora, para determinarmos uma fórmula válida para quaisquer valores, ou seja, para determinarmos uma equação de conversão, vamos novamente utilizar o Teorema de Tales:

$$\frac{\theta_c - 0}{\theta_f - 32} = \frac{100-0}{212-32}$$

$$\frac{\theta_c}{\theta_f - 32} = \frac{100}{180} = \frac{5}{9}$$

Essa equação de conversão pode ser escrita da seguinte maneira.

$$\frac{\theta_c}{5} = \frac{\theta_f - 32}{9}$$

Perceba nessa situação que temos uma aplicação direta do Teorema de Tales, que pode ser usado para relacionar quaisquer escalas, basta conhecemos os pontos fixos ou conhecermos pontos quaisquer que as relacione.

5 Conclusão

Nesse trabalho fizemos abordagem teórica de funções polinomiais de primeiro e segundo graus, razões trigonométricas e Teorema de Tales, nossa ideia foi apresentar informações relevantes sobre tais conteúdos que representam parte importante do currículo da Matemática. O que nos motivou a desenvolver o trabalho foi a possibilidade de contribuir para tornar o ensino da Matemática mais atrativo, já que mesmo com a necessidade já conhecida e citada nos Parâmetros Curriculares Nacionais de que se faz necessário a interdisciplinaridade para tornar o ensino-apredizagem um processo mais completo, esta ação interdisciplinar não vem sendo executada.

A apresentação dos conteúdos de matemática nos capítulos iniciais desse trabalho teve o objetivo de fundamentar as aplicações que foram discutidas no capítulo final. Cabe citar, que em quase todas as ocasiões em que foram resolvidos os exercícios de aplicação as soluções foram apresentadas do ponto de vista físico e do ponto de vista matemático. Na análise matemática do problema foi verificado que todas as questões podiam ser resolvidas com o conhecimento matemáticos apresentado nos capítulos anteriores, o que é um ganho por dois motivos, o primeiro pela aplicação direta, por parte dos alunos, do conhecimento matemático em outra disciplina, no caso em questão, a Física, e o outro aspecto está relacionado ao fato de que não é necessário o aluno memorizar um grande quantidade de fórmulas para resolver os problemas.

As teorias matemáticas sobre as Funções Polinomiais do Primeiro e Segundo Graus desenvolvidas nesse trabalho foram aplicadas em Movimento Uniforme, Movimento Uniformemente Variado, Lançamento Vertical e Lançamento Oblíquo e a aplicação do Teorema de Tales foi feita na Termometria, em que foram desenvolvidos conceitos e a fórmula de conversão de escalas termométricas. Ainda no bojo das aplicações das Funções Polinomiais, em particular da Função Polinomial do Segundo Grau, a forma Canônica que antes era apresentada com conotação puramente matemática, teve novo aspecto na obtenção do tempo e na altura máxima que um objeto alcança ao ser lançado verticalmente. Todos esses fatores são de extrema utilidade no processo interdisciplinar em que a Matemática e a Física são desenvolvidas de forma conjunta, conforme preconizados nos Parâmetros Curriculares Nacionais, por exemplo.

Mostramos as aplicações desses conteúdos na Cinemática e na Termometra e queremos deixar bem claro que não queremos de maneira alguma fazer o professor de Matemática se aprofundar em outro componente curricular. A ideia não é essa, e sim, mostrar que se houver interação entre os professores pode-se pensar em aulas planejadas, diferenciadas e bem executadas, de forma a atingir o público-alvo , que são os nossos alunos. Tivemos a preocupação de mostrar no desenvolvimento do trabalho que algumas questões de Física podem era resolvidas com as habilidades desenvolvidas no estudo da Matemática.

Por fim, esperamos que o nosso trabalho sirva de inspiração para os professores refletirem de como podem trabalhar e usar as questões da Física como exemplo de aplicações de muitos conteúdos meramente de Matemática, ou seja, devemos observar que o ensino da Matemática não deve ser restrito e útil apenas para o aprendizado de tal disciplina. Exemplo disso, é o cálculo da altura máxima atingida por um corpo lançado obliquamente, que pode ser calculado usando o conhecimento das coordenadas do vértice de uma parábola. Isto mostra a inter-relação existente entre essas duas disciplinas que sempre fizeram parte do cotidiano das pessoas.

Referências

[1] BARBOSA, J.L.M. **Geometria Euclidiana Plana.** 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2] BISCUOLA, G. J., BÔAS, N. V., DOCA, R. H. **Tópicos de Física 1 - Mecânica.** 20. ed. São Paulo: Saraiva, 2007.

[3] BISCUOLA, G. J., BÔAS, N. V., DOCA, R. H. **Tópicos de Física 2 - Termologia, ondulatória e óptica.** 18. ed. São Paulo: Saraiva, 2007.

[4] DOLCE, O. POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana** 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

[5] FITAS, Augusto J. Santos. **Os Principia de Newton, alguns comentários (Primeira parte, a Axiomática)**. Revista Vértice, 1996.

[6] KARAM, Ricardo. PIETROCOLA, Maurício. **Discursão das relações entre Matemática e Física no ensino da relativaidade restrita: Um estudo de caso.** VIIEnpec. Florianópolis, 2009.

[7] LIMA. E. L., CARVALHO. P. C. P., WAGNER. E., MORGADO. A. C., **A Matemática do Ensino Médio 1** 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[8] MARTINS, J. M. A.,**Funções Polinomiais do** 1° **e** 2° **Graus: Uma abordagem da Física** (Dissertação) – UFMA. São Luís, 2017.

[9] Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: MEC, 2000

[10] MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar 2: Geometria Euclidiana Plana.** 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

[11] PIETROCOLA, Maurício. **A Matemática como estruturante do conhecimento físico.** Cad. Cat. De Ens. DE Fis. Florianópolis: UFSC, 2002.

[12] IEZZI. G., MURAKAMI. C. **Fundamentos de Matemática Elementar 1: Conjuntos e Funções.** 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.