Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Números Complexos e Algumas Aplicações

Janaino Soares Vieira de Atahide

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Reinaldo de Marchi**

Trabalho financiado pela Capes e
Secretaria de Educação do Estado do Mato Grosso (SEDUC - MT)

Cuiabá - MT

Dezembro de 2018

Números Complexos e Algumas Aplicações

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Janaino Soares Vieira de Atahide e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 21/12/2018.

Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

A862n Atahide, Janaino Soares Vieira de.
Números complexos e algumas aplicações / Janaino Soares Vieira de Atahide. -- 2018
viii, 68 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Reinaldo de Marchi.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2018.
Inclui bibliografia.

1. História da Matemática. 2. Números Complexos. 3. Ensino. 4. Aplicações. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCACÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUACÃO

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - Profmat

Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança – 78.060-900 - Cuiabá/MT

Tel : (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "Números complexos e algumas aplicações"

Autor: Janaino Soares Vieira de Atahide

defendida e aprovada em 21/12/2018.

Composição da Banca Examinadora:

Reinaldo de Marchi

Presidente Banca/Orientador Doutor Reinaldo de Marchi
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Aldi Nestor de Souza

Examinador Interno Doutor Aldi Nestor de Souza
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Junior Cesar Alves Soares

Examinador Externo Doutor Júnior Cesar Alves Soares
Instituição: UNEMAT - Barra do Bugres

Cuiabá, 21/12/2018.

Dedico este trabalho a Deus, aos meus pais, meu irmão, aos meus professores de graduação e de pós-graduação, a CAPES e ao Estado de Mato Grosso/ SEDUC - MT.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por tudo de bom que tem me proporcionado até aqui, aos meus pais Rosa e José Carlos pelo apoio e por não medir esforços para me ajudar em meus estudos, ao meu irmão Edivaldo que sempre estiveram comigo nesta longa jornada.

Quero agradecer também aos professores do curso PROFMAT, em especial ao professor Aldi Nestor.

Agradeço ao meu orientador, professor Reinaldo de Marchi, pela colaboração na construção deste trabalho.

Por último aos colegas que estiveram comigo neste período em especial, Daniel e Fabrícia pela ajuda durante o período da qualificação.

Nenhum conhecimento se constrói só!

Muito obrigado a todos.

Não se pode ignorar o sentimento que as fórmulas matemáticas têm uma existência independente e uma inteligência próprias e são mais sábias do que nós, mais sábias que os seus descobridores e aprendemos mais com elas do que inicialmente julgamos.

——————— *Heinrich Rudolf Hertz.*

Resumo

Neste trabalho discutimos sobre o ensino de números complexos no ensino médio, buscando associar o contexto histórico a partir do surgimento desse tipo de número, além de resgatar importantes contribuições de notáveis matemáticos relacionados com esse assunto. Entendemos que o estudo dos números complexos não pode ser deixado de lado, dada a sua importância e possibilidade de se relacionar diretamente com vários conceitos matemáticos tais como geometria analítica, álgebra, vetores e álgebra linear, entre outros. Essa é, do nosso ponto de vista, a finalidade desse trabalho, que traz conceitos básicos sobre os números complexos e algumas possíveis aplicações.

Palavras chave: História da Matemática. Números Complexos. Ensino. Aplicações.

Abstract

In this work we discuss the teaching of complex numbers in high school, seeking to associate the historical context from the emergence of this type of number, in addition to retrieving important contributions of notable mathematicians related to this subject. We understand that the study of complex numbers can not be overlooked, given its importance and possibility of being directly related to several mathematical concepts such as analytical geometry, algebra, vectors and linear algebra, among others. This is, from our point of view, the purpose of this work, which brings basic concepts about complex numbers and some possible applications.

Keywords: History of Mathematics. Complex number. Teaching. Applications.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A matemática é uma das disciplinas fundamentais para o desenvolvimento intelectual dos indivíduos, proporcionando o raciocínio logico, o desenvolvimento cognitivo e possibilitando interpretações de situações problemas e possíveis soluções dos mesmos.

A matemática é apresentada previamente para os alunos das séries inicias e acompanha os estudantes até o ensino médio. No ensino fundamental, que compreende desde o anos inciais até o nono ano, é apresentado aos discentes alguns conjuntos numéricos, tais como o conjunto dos números naturais, dos números inteiros, dos números racionais, e um pouco sobre os números reais. Nesse nível, alguns autores preocupam-se em trazer alguns rudimentos do surgimento desses conjuntos numéricos, bem como algumas aplicações. Já no ensino médio, com três anos de duração e com um aluno um pouco mais amadurecido e apto a possíveis abstrações, esses conjuntos numéricos são novamente trabalhados e são manuseados no estudo de funções. Os números complexos são por vezes trabalhados apenas no último ano do ensino médio e cada vez mais tem tido pouca atenção.

Entendemos que é uma grande perda para o ensino de matemática, desprezar esse importante tópico, os números complexos, que ocupa um lugar único na história da matemática desenvolvida no decorrer dos séculos XVI-XVIII e que traz consigo grandes nomes tais como Cardano, Tartáglia, Fermat, Euler e Gauss.

Diante o exposto, o presente trabalho tem como proposta apresentar a construção dos números complexos, aliado com seu contexto histórico.

No primeiro Capítulo, o presente trabalho traz um relato histórico acerca dos números complexos e dos grandes percursores das teorias do mesmo, também discorre sobre o desenvolvimento de suas principais propriedades.

Já no segundo Capítulo, será feita uma abordagem em torno de suas propriedades operatórias de acordo com o que é ensinado no ensino médio, mas, com uma diferença, pois será dado ênfase no uso da condição de par ordenado, uma vez que no ensino básico, ele é apresentado como par ordenado e na forma algébrica, mas, não é dado tanta ênfase em seu ensino como par ordenado, apesar de ser mostrado, o que pode ser verificado no livro Matemática, ciências e aplicações, volume 3, ensino médio, Saraiva 2016, Iezzi; and et.al. (2016).

O terceiro Capítulo, fará uma breve apresentação da teoria dos complexos, na trigonometria e suas propriedades, tais como fórmula polar de um número complexo, o uso da fórmula de De Moivre, para a potenciação de complexos e radiciação.

No quarto Capítulo será feito uma breve apresentação de algumas possíveis aplicações dos complexos em diferentes áreas da matemática.

Capítulo 1

A História dos Números Complexos

A Teoria dos Números é o ramo da Matemática que investiga as propriedades acerca dos números naturais ou inteiros positivos. Os números naturais surgem do processo de contagem e é impossível imaginar a humanidade desprovida da habilidade de contar. O conceito de número natural foi axiomatizado durante o ano de 1889 pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), numa das primeiras manifestações da Axiomática Moderna e da Abstração Matemática. Os matemáticos estenderam os números naturais aos inteiros, racionais, irracionais, complexos e também aos quatérnios e octônios, desenvolvidos recentemente. Portanto podemos dizer que, a noção de número e suas extraordinárias generalizações estão intimamente ligadas à história da humanidade. E a própria vida está impregnada de matemática, por exemplo, grande parte das comparações que o homem faz, assim como atitudes e gestos do seu dia a dia, acenam conscientemente ou não a juízos a propriedades geométricas e aritméticas. Sem esquecer que a ciência, a indústria e o comércio nos colocam em permanente contato com o amplo mundo da matemática.

Os números complexos é o conjunto numérico que de certa forma, é uma extensão dos reais, contendo todos os demais conjuntos numéricos já estudados pelos alunos. É necessário, pois, compreender os processos das operações como, aritméticas, trigonométricas, algébricas, envolvendo elementos do complexos, assim como a representação geométrica do mesmo no plano. Entretanto antes do estudos acerca de suas propriedades, temos que analisar o processo histórico da construção dos números complexos.

Em relatos históricos, os números complexos estão ligados a resolução de equações, tal tema que fascinou inúmeros matemáticos por anos. Muito tempo se passou na construção da teoria para a solução de equações polinomiais, até chegar no que conhecemos hoje.

Para discutirmos sobre os complexos, devemos destacar a evolução da Álgebra, uma vez que em relatos nos levam a acreditar que essa evolução está diretamente ligada a construção da teoria dos números complexos.

Em matemática, **Álgebra** é o ramo que estuda a manipulação formal de equações, operações matemáticas, polinômios e estruturas algébricas. Ela é um dos principais ramos da matemática pura, juntamente com a Geometria, Topologia, Análise, e Teoria dos números. O termo *Álgebra*, na verdade, compreende um espectro de diferentes ramos da matemática, cada um com suas especificidades. Assim em Álgebra estudam-se várias áreas da matemática.

A álgebra elementar, que frequentemente faz parte do currículo da educação básica, adentra o conceito de variável como representante de números. Expressões usando estas variáveis são manipuladas de acordo com as regras das operações aplicáveis a números, como a adição e multiplicação. Estas considerações podem ser usados, por exemplo, na resolução de equações. Por sua vez, a adição e multiplicação podem ser generalizadas e as suas definições exatas conduzem a estruturas tais como os grupos, anéis e corpos, que são estudados na área da matemática intitulada álgebra abstrata.

De acordo com Struik (1987), as origens da Álgebra se encontram na antiga Babilônia, cujos matemáticos da época desenvolveram um sistema aritmético avançado, com o qual puderam fazer cálculos algébricos. Com esse sistema eles foram capazes de aplicar fórmulas e calcular soluções para incógnitas numa classe de problemas que, hoje, seriam resolvidos como equações lineares, equações quadráticas e indeterminadas. Por outro lado, a maioria dos matemáticos egípcios desta era e a maioria dos matemáticos indianos, gregos e chineses do primeiro milênio a.C. normalmente resolviam estas equações por métodos geométricos, como descrito no **Papiro Rhind, Sulba Sutras, Elementos de Euclides e Os Nove Capítulos da Arte Matemática**. Os estudos geométricos dos gregos, consolidado nos Elementos, deram a base para generalização de fórmulas, indo além da solução de problemas particulares para sistemas gerais especificar e resolver equações.

Figura 1.1: Papiro Rhind

A notação algébrica utilizada hoje normalmente por nós começou com François Viète e foi configurada na forma atual por René Descartes. Antes disso, os processos para achar as raízes de equações dos babilônios, gregos, hindus, árabes e mesmo dos algebristas italianos do século XV eram formulados com palavras e às vezes até com versos (Índia). Viète adotou vogais para representar as variáveis, e consoantes para representar as constantes. Atualmente, constantes são representadas pelas primeiras letras do alfabeto e variáveis pelas finais.

Entretanto, a história da Álgebra é extensa e havido de muitas circunstâncias adversas e grandes complexidades em todo o seu avanço. Todavia, podemos destacar que toda a teoria da Álgebra se divide em dois grandes períodos, a saber:

1º: O primeiro deles inclui seu início até o século XIX

2º: O segundo compreende os dois últimos séculos da nossa era.

Assim temos que a grande distinção entre eles era que, no primeiro, **o principal objetivo da Álgebra estava na resolução de equações algébricas**, por que se estuda e desenvolve todas as leis concernentes e que de um modo direto ou indireto está relacionado com as soluções de problemas do cotidiano. Já pelo contrário, na segunda etapa **os objetivos da álgebra são distintas**, isto é, fica mais abstrata, tendo uma formulação na prática. Também podemos destacar em Roque. (2012)

> Desde tempos muito antigos, povos como os babilônicos já saberiam resolver equações de segundo grau. Em seguida, cada época teria acrescentado uma pequena contribuição, até que, por volta do século XVI, a Álgebra começaria a se desenvolver na Europa, tendo adquirido os contornos definitivos da disciplina que chamamos por este nome.(Roque., 2012, pág 10),

em uma outra passagem do livro de Roque. (2012) lemos:

> Esse ponto de vista foi expresso em narrativas dos mais variados tipos, muitas influenciadas pela citação de Heródoto (século V a.C.), que creditou aos egípcios a invenção da geometria. Suas construções sofisticadas, como pirâmides e templos, favoreceram a imagem do Egito como o ancestral da cultura moderna. Assim, durante a maior parte do século XX, a Mesopotâmia e o Egito foram vistos como o berço da matemática, com lugar garantido nos primeiros capítulos dos livros gerais sobre a história desse saber...(Roque., 2012, pág 24)

Apesar de todas as controvérsias, do que seria realmente Álgebra, fica evidente que não podemos considerar os conceitos, utilizados hoje da Álgebra moderna, para identificar o começo da mesma na história da matemática, isso fica bem evidente no livro de Tatiane Roque, ou fato que vem a corroborar com à afirmação de que a evolução dos conceitos acerca de soluções das equações contribuíram para construção dos conceitos da álgebra.

> Em geral, considera-se que a primeira ocorrência da notação simbólica que caracteriza nossa álgebra, remonta ao livro Aritmética, escrito em grego por Diofanto. Acredita-se que esse autor tenha vivido no século III, ainda que tal data seja contestada. Além disso, embora se tenha notícia de que Diofanto viveu em Alexandria, não se pode assegurar que fosse grego, apesar de seu texto ser escrito nessa língua...(Roque., 2012, pág 196).

além disso, temos:

> [...] as melhores contribuições dadas pelos seus matemáticos foram no campo da álgebra geométrica. Entre as mais importantes está o desenvolvimento e aperfeiçoamento de métodos de resolução de equações quadráticas e cúbicas. Um dos métodos utilizado pelos árabes era a resolução por falsa

> posição. Este método consistia em assumir um valor para a quantidade desconhecida, e este, se errado, era corrigido por um processo parecido com a regra de três. O matemático que literalmente deu nome à álgebra foi o árabe Mohammadibn Musa al-Khwarizmi8. O livro que ele escreveu em Bagdá, em torno do ano 800 a.C, tornou-se um sinônimo da teoria das equações durante séculos. Embora tal livro não tenha sido revolucionário em termos de conteúdo, foi o primeiro a expor sistematicamente as soluções das equações quadráticas...(Peruzzo, 2013, pág 15 - 16).

Assim, podemos destacar, os árabes eram familiarizados com as soluções geométricas das equações quadráticas e tentavam obter as soluções geometricamente das equações cúbicas. Eles também se interessavam por essas equações. Alguns avanços foram obtidos nessa área, entre eles a resolução dessas equações cúbicas usando seções cônicas. Esta última foi uma grande conquista dos árabes, dentre muitas outras. Contudo, fica evidente que apesar das controvérsias, fica claro que a construção da teoria em Álgebra esta associado a soluções das equações e entre vários nomes podemos destacar o matemático árabe e em especial o matemático Al-Khwarizmi, que viveu durante o século IX, que em seus trabalhos contribuiu muito para esta evolução.

O que mais fascinou os matemáticos foram as raízes de números negativos, chamado por alguns matemáticos como "números estranhos", como solução de equações e aplicação em diversos ramos da Matemática, diferente do que é proposto hoje no ensino médio, de que os números complexos surgiram da necessidade de se obter soluções para equações quadráticas, como, também é destacado por Lima (1991):

> Não se julgue, entretanto, que a importância dos números complexos resulta apenas do Teorema Fundamental da Álgebra. Eles se fazem presentes em praticamente todos os grandes ramos da Matemática como Álgebra, Teoria dos Números, Topologia,...(Lima, 1991, pág 31-32)

Acerca de toda teoria acima também podemos citar Boyer (1974), que em seu livro traz mais informações que vem corroborar com o discursos de diversos pesquisadores desta teoria.

Assim podemos destacar que a construção de números complexos está além de somente obter a raiz de equações do segundo grau, como vamos comprovar no desenvolvimento deste capítulo, que os números complexos surgiram a partir de soluções das equações cúbicas, do tipo:

$$x^3 + ax = b$$

De acordo com Peruzzo (2013),

> Uma das primeiras conquistas na solução das equações cúbicas foi dado pelo matemático italiano Scipione del Ferro. Del Ferro estudou na Universidade de Bolonha, e em 1496 tornou-se professor de matemática nessa mesma instituição, cargo onde permaneceu pelo resto da vida. Algumas fontes o descrevem como um grande algebrista, no entanto, nenhum dos seus textos originais sobreviveram. Em 1501 Scipione conheceu Luca Pacioli, quando este estava dando conferências em Bolonha. Frustrado com sua incapacidade de resolver a equação cúbica, Pacioli pode ter convencido o próprio Scipione a tentar. Por volta de 1515, del Ferro conseguiu resolver a equação cúbica...(Peruzzo, 2013, pág 43).

Mas em alguns manuscrito descreve que Del Ferro, manteve suas descobertas em segredo o que era muito comum no período XVIII, e alguns anos depois veio confidenciar a descoberta com um amigo.
A equação citada, também pode ser encontrada na formula $x^3 = b+ax$ ou $x^3+b = ax$, isso ocorre pela extrema dificuldade que os matemáticos antigos apresentavam em trabalhar com números negativos.

> Os mais antigos registros da utilização de equações pelo ser humano datam de cerca do ano 2000 a.C., e vem das regiões do Egito e da Mesopotâmia. A matemática primitiva teve um embasamento prático para se desenvolver, inicialmente na atividade da mensuração...(Peruzzo, 2013, pág 03).

De acordo com Kleiner (2007) e van der Waerden (1985), os antigos matemáticos Babilônicos (c. 1700 a.C), em sua época já tinham desenvolvidos métodos próprios para resolução de equações quadráticas, método este que ficou conhecido como completamento de quadrado, entretanto a existência de números negativos nas soluções das equações eram geralmente descartada pelos matemáticos egípcios e babilônios, desta forma sendo formalizada em seguida por Brahmagupta (589 - 668), matemático indiano, por volta do século V. Enquanto que os hindus resolviam equações quadráticas pelo método de completar quadrados, Bháskara (1114 - 1185) finalmente encontrou uma solução geral, resolutiva para esse tipo de equação, por volta do século XII.

Em contra partida os matemáticos Gregos, que em particular sua geometria e teoria dos números era avançada e sofisticada, por outro lado, eles tinham uma Álgebra fraca, mas, o conjunto de livros chamado **Elementos**, trabalho de Euclides (c. 300 a.C) contém vários conteúdos que foram interpretadas pelos historiadores, como exceções notáveis de produções algébricas.Tais proposições geométricas que, se traduzidas em linguagem algébrica, produziam resultados algébricos, como leis da Álgebra, bem como soluções de equações quadráticas. Este trabalho ficou conhecido como Álgebra geométrica, que desempenhou importante papel no desenvolvimento da matemática até os dias de hoje.

A conquista da Grécia por Roma acabou com o domínio da Matemática pelos gregos. Em seguida com o fim do Império Romano e a Ascensão do Cristianismo, a Europa entrou na Idade das Trevas, com isso o desenvolvimento de toda a Matemática ficou nas mãos dos Árabes e Hindus.

1.1 Solução de Equações Cúbicas

A solução de uma equação cúbica está ligada diretamente ao matemático Niccolò Tartaglia.

Figura 1.2: Niccolò Tartaglia

O matemático Tartaglia (1500 -1557), desenvolveu um método para equações da forma,

$$x^3 + ax^2 = b,$$

a princípio, sem demonstrá-lo. Tal método proporcionou aos matemáticos Tartaglia e Antônio Maria Fior vencer um desafio matemático da época, tal competição consistia em propor problemas matemáticos para que o outro resolvesse, assim o matemático Fior propôs cerca de 30 problemas, que em sua maioria exigia conhecimentos sobre solucionar equações cúbicas, conhecimentos esses já desenvolvidos por Tartaglia em trabalhos anteriores.

Esse desafio ficou conhecido entre os matemáticos da época, entre eles, podemos destacar o Girolamo Cardano (1501 - 1576), que na época estava escrevendo um livro chamado **"Ars Magna"**, que trazia conhecimentos para cálculos com raízes cúbicas e racionalizações de tais radicais.

Figura 1.3: Girolamo Cardano

Assim Cardano, viu no método desenvolvido por Tartaglia a possibilidade de enriquecer sua obra. Vale ressaltar que as soluções trazidas no livro tinham muita influência de matemáticos anteriores, isto é, o que já havia sido demonstrado anteriormente, foi aproveitado por Cardano em seu livro. Depois de muita insistência Cardano consegui que

Niccolò lhe contasse o método utilizado, sobre promessa de nunca divulgar, entretanto Girolamo quebrou a promessa que havia feito a Tartaglia e não deu os créditos a Niccolò, em seu livro **Ars Magna**, ao matemático Tartaglia por ter lhe ensinado o método de resolução de equações cubicas, e assim conseguiu publicar a sua obra **Ars Magna** que, na época, se tornou uma referência importante para os demais matemáticos. Todavia, para que publicasse todos os resultados Cardano teve que demostra-los, no entanto foi um matemático contemporâneo de Cardano, chamado Rafael Bombelli (1526 - 1572), que deu sequência ao estudo de raízes quadradas dos números negativos apresenta na obra de Cardano. Bombelli foi o primeiro matemático no ano de 1572 a acreditar na existência dos números "imaginários", em seu livro **L' Algebra**, Rafael apresentou um problema sobre uma equação cúbica, reduzindo à forma para que pudesse aplicar o método de Tartaglia/Cardano, encontrando assim três soluções distintas para esta equação proposta, sendo uma das soluções real e as outras, com raízes quadradas de números negativos. Bombelli pensou: *"Como poderia um mesmo problema, encontrar soluções reais e números até então "estranhos"?"*

O problema consistia em resolver a equação $x^3 = 15x + 4$. Usando o método de Tartaglia/Cardano para solucionar a equação acima, Bombelli encontrou:

$$x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121})} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}},$$

como solução. Porém, ele sabia previamente que a equação acima era a forma reduzida de um problema anterior que ele já havia solucionado e que tinha três soluções reais, portanto, isso representava que as raízes quadradas de números negativos passavam a ter uma legitimidade, pois admitindo a sua existência, era possível encontrar raízes reais para um problema e mais, assim Rafael também mostrou que tais números estranhos eram operacionais diante das leis da Álgebra.

Contudo, não foi o matemático Rafael Bombelli que finalizou as propriedades acerca dos números "estranhos", mas suas contribuições foram muito significativas, uma vez que, a partir de Bombelli, sabemos que, podemos operar com estes números algebricamente. Como exemplo desta contribuição de Bombelli, podemos destacar algumas regras de operação com $\sqrt{-1}$, destacado por Peruzzo, em seu livro **"Evolução dos Métodos**

de Resolução de Equações Algébricas", 2013, na [pág 75],

$$(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1$$

$$(-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = 1$$

$$(-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = -1$$

Podemos destacar também que i só foi usado por volta de 1777, por Euler, entretanto, passou-se um período razoável para que os números imaginários passassem a serem bem mais aceitos e para que os resultados e as notações obtidas fossem de grande valia para o desenvolvimento do assunto. Após Bombelli, grandes matemáticos se destacaram e contribuíram para a construção da teoria em torno do conjunto dos números complexos. Assim podemos destacar o matemático Girard Desargues (1591 - 1661), foi o primeiro matemático a associou o número de raízes de uma equação com seu grau e estabeleceu uma relação entre os coeficientes da equação e suas raízes, admitindo que as raízes seriam reais ou não. Desargues, também foi o primeiro a introduzir o simbolo:

$$\sqrt{-1},$$

para operações com os números complexos, por fim, foi Girard o primeiro matemático a enunciar o Teorema Fundamental da Álgebra. Assim, podemos destacar os dois matemáticos que formalizaram a teoria acerca dos números complexos.

Leonhard Euler nasceu em Basileia, Suíça, no ano de 1707, quando o Cálculo Diferencial e Integral, inventado por Newton e Leibniz, estava em expansão. Foi um dos matemáticos que mais produziu e publicou em todos os tempos, um fato interessante sobre Euler é que aos 28 anos perdera a vista e viveu totalmente cego os últimos 18 anos de sua vida. No entanto, sua condição parece ter pouco efeito sobre sua produtividade, compensando com suas habilidades de cálculo mental e de memória fotográfica. Por exemplo, Euler conseguiu repetir a Aeneid Virgil, do começo ao fim, sem hesitação. Com a ajuda de seus escribas, a produtividade de Euler em muitas áreas de estudo, na verdade, aumentou. Produziu, em média, um artigo matemático durante todas as semanas do ano 1775. Ele faleceu de uma hemorragia cerebral em 1783 na cidade São Petersburgo. Até hoje ele é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos, suas obras não era restrito ao campo da matemática, ele também atuava na área da física, astronomia e outras.

Figura 1.4: Leonhard Euler

Dentre as inúmeras contribuição de Euler, podemos destacar seu empenho em melhorar a simbologia. De acordo com Boyer Boyer and Merzbach (1991)[pag 400 à 420], acerca de números complexos Euler foi o primeiro a introduzir o simbolo i para $\sqrt{-1}$ e também que um número complexos poderia ser representado da forma $z = a+ib$, onde $i^2 = -1$. Um fato de extrema importância para os complexos demostrada por Euler, é que as equações do tipo $z^n = w$, w não nulo, tinham n soluções nos complexos. Os matemáticos passaram a acreditar que toda equação de grau n deveria ter n raízes complexas. Vários matemáticos tentaram demostrar esta conjectura feita por Leonhard, mas sem sucesso, até que um jovem matemático, Carl Friedrich Gauss, com 21 anos, em 1799, apresentou o que ainda hoje é considerado a maior tese de doutorado em Matemática de todos os tempos. Nesta tese, está a prova do Teorema Fundamental da Álgebra cuja denominação foi dada pelo próprio Gauss, tal teorema afirmava que: *Toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, pelo menos, uma raiz complexa.*

Johann Carl Friedrich Gauss,nasceu em Braunschweig, 30 de abril de 1777 e morreu em Göttingen, 23 de fevereiro de 1855, foi um matemático, astrônomo e físico alemão, que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletrostática, astronomia e óptica em especial a construção da teoria dos complexos.

Figura 1.5: Carl Friedrich Gauss

Capítulo 2

A Álgebra dos Números Complexos

Números complexos são ensinados no Ensino Médio de duas formas distintas. Uma é através de par ordenado e a outra forma é algébrica. Como podemos observar no livro de **Matemática, ciências e aplicações, volume 3, ensino médio, Saraiva 2016**, Iezzi; and et.al. (2016), a introdução sobre números complexos é através de pares ordenados, mas não é dada uma enfase neste tipo de representação dos complexos.

Neste trabalho, nosso foco vai ser à de par ordenados, apesar que em determinado momentos vamos usar a forma algébrica de um número em $\mathbb{C}$, para isso vamos usar as definições proposta em estudos de geometria analítica. Neste capítulo vamos definir as propriedades dos números complexos.

Nos livros de ensino médio atuais, no capítulo que trata de números complexos, é apresentada algumas definições que foram construídas ao longo da história acerca dos complexos, mas, um exemplo é a seguinte igualdade:

$$i^2 = -1,$$

a qual é tratada como condição já imposta para a resolução do problema, sem muita explicação de sua criação, mas, os alunos sempre questionam, *"Por que?" ou "De onde surgiu?"*. Portanto a justificativa dada nos livros didáticos do ensino médio, é que essa igualdade está geralmente associada à resolução de equações do $2^{\underline{o}}$ grau com raízes quadradas negativas, o que não é toda verdade, pois a justificativa algébrica da expressão $i^2 = -1$, esta associada a propriedades de pares ordenados, como vamos verificar no decorrer deste trabalho.

No que segue iremos assumir que a definição e as propriedades básicas dos números reais são conhecidas. Seja $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos pares ordenados com entradas reais. Dados dois pares ordenados de números reais $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$ quaisquer, temos as seguintes definições:

Igualdade: $z = w \iff (a, b) = (c, d) \iff a = c$ e $b = d$

Adição: $z + w = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Multiplicação: $z \cdot w = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

O elemento $z + w \in \mathbb{R}^2$ é dito a soma de z e w e o elemento $z \cdot w \in \mathbb{R}^2$ é dito o produto de z e w. Assim, em $\mathbb{R}^2$ temos definido duas operações binárias.

Exemplo 2.1. *Sejam $z = (-3, 7)$ e $w = (2, -4)$. Então*

$$
\begin{aligned}
z + w &= (-3, 7) + (2, -4) = (-1, 3) \text{ e} \\
z \cdot w &= (-3, 7) \cdot (2, -4) = (-6 + 28, 12 + 21) = (22, 33)
\end{aligned}
$$

Observação 2.1. *Usando a definição de adição e multiplicação, acima para pares ordenados, verificamos que se $z_1 = (x, 0) \in \mathbb{R}^2$ e $w_1 = (y, 0) \in \mathbb{R}^2$, então:*

$$
\begin{aligned}
z_1 + w_1 &= (x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \\
z_1 \cdot w_1 &= (x, 0) \cdot (y, 0) = (x \cdot y, 0).
\end{aligned}
$$

Observação 2.2. *Também temos que se $z_2 = (0, x) \in \mathbb{R}^2$ e $w_2 = (0, y) \in \mathbb{R}^2$, então:*

$$
\begin{aligned}
z_2 + w_2 &= (0, x) + (0, y) = (0, x + y) \\
z_2 \cdot w_2 &= (0, x) \cdot (0, y) = (-x \cdot y, 0).
\end{aligned}
$$

Definição 2.1. *O conjunto $\mathbb{R}^2$, juntamente com as operações de adição e multiplicação, é chamado de conjunto dos números complexos e denotado por $\mathbb{C}$. Um elemento $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ é chamado de número complexo.*

Para manipulação algébrica, não é conveniente representar um número complexo como um par ordenado. Por essa razão, outra forma de escrita é preferida, conhecida como forma algébrica. Para introduzir essa nova notação, observamos inicialmente que todo número real x pode ser identificado biunivocamente com o número complexo $(x, 0)$. Além disso, pela Observação 2.1, operar adição e multiplicação de números x e y em $\mathbb{R}$ é similar fazer essas operações com $(x, 0)$ e $(y, 0)$ em $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$. Assim, bem entendida essa identificação, escrevemos $x = (x, 0)$ e daí

$$x + y = (x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \quad \text{e} \quad x \cdot y = (x, 0) \cdot (y, 0) = (x \cdot y, 0).$$

Denotando o símbolo $i = (0, 1)$ introduzido por Euler e usando a Observação 2.2, temos que

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Com isso, podemos escrever qualquer número complexo $z = (x, y)$ da seguinte forma:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi.$$

Essa é a chamada forma normal ou forma algébrica de um número complexo.

Chamamos a atenção que na conta acima, chegamos à famosa igualdade $i^2 = -1$, tanto questionada pelos alunos no ensino médio e até mesmo no ensino superior. Aqui neste contexto essa igualdade faz sentido. Mais a frente iremos apresentar a interpretação geométrica da multiplicação complexa e esperamos esclarecer mais ainda essa equação.

Usando a notação na forma algébrica, temos que se $z = a + bi$ e $w = c + di$, então as operações de adição e multiplicação de números complexos são expressas pelas seguintes fórmulas

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ac + bc)i.$$

Exemplo 2.2. *Neste exemplo apresentamos a representação dos vários números complexos em coordenadas e forma algébrica*

a) $z_1 = (3, -3) = 3 - 3i$

b) $z_2 = (-2, 2) = -3 + 2i$

c) $z_3 = (2, 0) = 2 + 0i = 2$

d) $z_4 = (0, 2) = 0 + 2i = 2i$

Exemplo 2.3. *Considerando os números complexos* $z_1 = 4+3i$ *e* $z_2 = 1+4i$*, da definição de adição, temos que*

$$z_3 = z_1 + z_2 = (4 + 1) + (3 + 4)i = 5 + 7i.$$

Exemplo 2.4. *Multiplicação de dois números em* $\mathbb{C}$*: Seja* $z_1 = (3, 2)$ *e* $z_2 = (1, -2)$*, então* $z_1 \cdot z_2 = (3 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)) + (3 \cdot (-2) + 2 \ \cdot 1)i = 7 - 4i.$

A fórmula de multiplicação de números complexos não é natural para ser memorizada. Contudo, na forma algébrica, podemos utilizar a propriedade distributiva e observar que i^2 será -1 e isso é muito mais natural de ser executado. A propriedade distributiva será demonstrada na próxima seção.

2.1 Propriedades da Adição e Multiplicação em $\mathbb{C}$

Teorema 2.1. *A adição de números complexos satisfaz as seguintes propriedades:*

1) Comutatividade: $z + w = w + z$ *para quaisquer* $z, w \in \mathbb{C}$*.*

2) Associatividade: $(z + w) + u = z + (w + u)$ *para quaisquer* $z, w, u \in \mathbb{C}$*.*

3) Elemento Neutro: *Existe um único número complexo* $0 = (0, 0) = 0 + 0i$ *tal que*

$$z + 0 = z \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}$$

4) Elemento Oposto: *Para qualquer complexo* $z = (a, b)$*, existe um único* $-z = (-a, -b) \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$z + (-z) = 0$$

Demonstração. 1)

$$\begin{aligned} z + w &= (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \\ &= (c + a) + (d + b)i = (c + di) + (a + bi) = w + z \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
z+(w+u) &= (a+bi)+((c+di)+(e+fi)) = (a+bi)+((c+e)+(d+f)i)\\
&= (a+(c+e))+(b+(d+f))i = ((a+c)+e)+((b+d)+f)i\\
&= ((a+c)+(b+d)i)+(e+fi) = ((a+bi)+(c+di))+(e+fi) = (z+w)+u
\end{aligned}$$

3)

$$z+0 = (a+bi)+(0+0i) = (a+0)+(b+0)i = a+bi = z$$

4)

$$z+(-z) = (a+bi)+((-a)+(-b)i) = (a+(-a))+(b+(-b))i = 0+0i = 0$$

□

Exemplo 2.5. *Para o número complexo $z = 2+3i$, temos que o oposto de z será $-z = -2-3i$, pois a soma de ambos resulta no elemento neutro da adição, isto é, $0 = 0+0i$.*

A subtração de números complexos pode ser aplicada como o oposto do número que está subtraindo, isto é, seja dados dois números em $\mathbb{C}$, tal que, z_1 e z_2, então $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, sendo o $(-z_2)$ o oposto de z_2.

Exemplo 2.6. *Subtração de Números Complexos: Seja $z = 2+3i$ e $w = 5+2i$, dois números complexos. Assim $z-w$ será dado por $z+(-w)$, onde $(-w)$ representa o oposto de w, portanto:*

$$z-w = u = z+(-w) = (2+3i)+(-5-2i) = (2-5)+(3-2)i = -3+i.$$

Teorema 2.2. *A multiplicação de números complexos satisfaz as seguintes propriedades:*

1) Comutatividade: $z \cdot w = w \cdot z$ *para quaisquer* $z, w \in \mathbb{C}$.

2) Associatividade: $(z \cdot w) \cdot u = z \cdot (w \cdot u)$ *para quaisquer* $z, w, u \in \mathbb{C}$.

3) Elemento Neutro: *Existe um único número complexo* $1 = (1,0) = 1+0i$ *tal que*

$$z \cdot 1 = z \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}$$

4) Elemento Inverso: *Para qualquer complexo* $z = a + bi \neq 0$*, existe um único* $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

Demonstração. 1)

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i \\ &= (ca-db)+(da+cb)\cdot i = (c+di)\cdot(a+bi) = w\cdot z \end{aligned}$$

2) Escrevendo $u = e + fi$, temos

$$\begin{aligned} z\cdot(w\cdot u) &= (a+bi)\cdot((c+di)\cdot(e+fi)) = (a+bi)\cdot((ce-df)+(cf+de)i) \\ &= [a(ce-df)-b(cf+de)]+[a(cf+de)+b(ce-df)]i \\ &= [ace-adf-bcf-bde]+[acf+ade+bce-bdf]i \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (z\cdot w)\cdot u &= (a+bi)\cdot((c+di)\cdot(e+fi)) = ((ac-bd)+(ad+bc)i)\cdot(e+fi) \\ &= [(ac-bd)e-(ad+bc)f]+[(ac-bd)f+(ad+bc)e]i \\ &= [ace-bde-adf-bcf]+[acf-bdf+ade+bce]i \end{aligned}$$

o que demonstra a associatividade.

3)

$$z\cdot 1 = (a+bi)\cdot(1+0i) = (a\cdot 1 - b\cdot 0)+(a\cdot 0+b\cdot 1)i = a+bi = z$$

4)

$$\begin{aligned} z\cdot z^{-1} &= (a+bi)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i\right) \\ &= \left(a\frac{a}{a^2+b^2}-b\frac{-b}{a^2+b^2}\right)+\left(a\frac{-b}{a^2+b^2}+b\frac{a}{a^2+b^2}\right)i \\ &= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\right)i = 1+0i = 1 \end{aligned}$$

□

Agora, iremos apresentar a propriedade distributiva dos números complexos. Essa propriedade nos permite operar de duas formas diferentes quando nos deparamos com as operações de multiplicação e adição em uma mesma expressão. Mais precisamente, temos:

Teorema 2.3 (Distributividade). *Para números complexos z, w e u, temos que vale*

$$z \cdot (w + u) = z \cdot w + z \cdot u.$$

Demonstração. Como a mesma notação do teorema anterior, temos

$$\begin{aligned}
z \cdot (w + u) &= (a + bi) \cdot ((c + di) + (e + fi)) \\
&= (a + bi) \cdot ((c + e) + (d + f)i) \\
&= (a(c + e) - b(d + f)) + (a(d + f) + b(c + e))i \\
&= (ac + ae - bd - bf) + (ad + af + bc + be)i \\
&= ((ac - bd) + (ad + bc)i) + ((ae - bf) + (af + be)i) \\
&= (a + bi) \cdot (c + di) + (a + bi) \cdot (e + fi) \\
&= z \cdot w + z \cdot u
\end{aligned}$$

□

2.2 Módulo e Conjugado

Definição 2.2. *(Valor Absoluto ou Módulo de um Número complexo) Dado um número complexo da forma $z = a + bi$, o valor absoluto (modulo) deste número é dado por*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Definição 2.3. *(**Conjugado de um Número Complexo**) Dado um números em $\mathbb{C}$ do tipo $z = a + bi$, chama-se conjugado deste número complexo, ao número complexo $\bar{z} = a - bi$.*

Exemplo 2.7. *Considere o número complexo, $z = 2 + 4i$ em complexo, o conjugado de z indicado por $\bar{z}$ será, $\bar{z} = 2 - 4i$*

Proposição 2.4. *Sendo z e w números complexos, temos que valem as seguintes propriedades:*

a) $\bar{\bar{z}} = z$

b) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

c) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

d) $z\bar{z} = |z|^2$

e) $|zw| = |z||w|$

Demonstração. Vamos denotar $z = a + bi$ e $w = c + di$. Daí,
a) $\bar{\bar{z}} = \overline{a - bi} = a - (-b)i = a + bi = z$
b) $\overline{z + w} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{w}$
c) $\overline{zw} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i$
e
$\bar{z}\bar{w} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$. Logo vale a igualdade.
d) $\bar{z}z = (a - bi)(a + bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = |z|^2$
e) $|zw|^2 = \overline{zw}zw = \bar{z}z\bar{w}w = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2$
extraindo a raiz quadrada, obtemos a igualdade requerida. □

Exemplo 2.8. *Seja $z = 3 + 4i$, o conjugado de z e indicado por $\bar{z}$ será $\bar{z} = 3 - 4i$.*

Note que $z \cdot \bar{z} = (3^2 + 4^2) = 25$.

Proposição 2.5. *(***Divisão de um número em $\mathbb{C}$***) Dados dois números $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di \neq 0$, temos que $\dfrac{z_1}{z_2}$ será:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + (b \cdot c - a \cdot d)i}{c^2 + d^2},$$

isto é, a divisão de dois números complexos será o produto do primeiro pelo inverso do divisor.

Demonstração. Dado um número complexo $z = a + bi$ não nulo, temos pelo Teorema 2.2 que seu inverso será estabelecido pela fórmula, $\dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$ e indicado por z^{-1}.

Considere $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ e $z_2^{-1} = \dfrac{c - di}{c^2 + d^2}$,

temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1},$$

assim,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = (a + bi) \cdot \frac{(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + (b \cdot c - a \cdot d)i}{c^2 + d^2}.$$

Portanto, concluímos que a fórmula é válida para qualquer dois números complexos, com o divisor $z_2 \neq 0$. $\square$

Para um número complexo $z = x + yi$, dizemos que a parte real de z, denotada por $\Re(z)$ é x. A parte imaginária de z, denotada por $\Im(z)$ é y. Assim, podemos escrever $z = \Re(z) + \Im(z)i$. Por exemplo $\Re(-3 + 2i) = -3$ e $\Im(-3 + 2i) = 2$.

Proposição 2.6. *Sejam z, w números complexos quaisquer. Então*

a) $\Re(z + w) = \Re(z) + \Re(w)$

b) $\Im(z + w) = \Im(z) + \Im(w)$

c) $\Re(zw) = \Re(z)\Re(w) - \Im(z)\Im(w)$

d) $\Im(zw) = \Im(z)\Re(w) + \Re(z)\Im(z)$

Demonstração. Escrevendo $z = a + bi$, com $a = \Re(z)$, $b = \Im(z)$, e $w = c + di$ com $c = \Re(w)$, $d = \Im(w)$, basta observar que

$$z + w = (a + c) + (b + d)i = \Re(z + w) + \Im(z + w)i$$

$$zw = (ac - bd) + (ac + bc)i = \Re(zw) + \Im(zw)i.$$

$\square$

O que foi apresentado neste capítulo serve para mostrar que as propriedades bem conhecidas dos números reais, também são válidas quando trabalhamos com os complexos, isto é, a soma e multiplicação de números complexos são operações comutativas e associativas, verifica-se a existência do elemento neutro para adição e multiplicação, todo número complexo possui um simétrico aditivo e um inverso multiplicativo, caso não seja nulo. Expresso em uma expressão curta, neste capítulo provamos que o conjunto dos números complexos com as operações de adição e multiplicação satisfazem as propriedades de corpo, assim como o conjunto dos números reais ou o conjunto dos números racionais.

2.3 Interpretação Geométrica das Operações Algébricas

Tendo apresentado a definição de um número complexo $z = (x, y) = x + yi$ como um par ordenado de números reais (x, y) em $\mathbb{R}^2$, é natural que um número complexo $z = x + yi$ corresponda a um ponto $P(x, y)$ no plano. Para uma introdução formal, considere um plano Π equipado de um sistema de coordenadas xOy. Considere a bijeção $\varphi : \mathbb{C} \to \Pi$, $\varphi(z) = P(x, y)$.

Definição 2.4. *O ponto $P(x, y)$ é chamado de imagem geométrica do número complexo $z = x + yi$.*

O número complexo $z = x + yi$ é chamado de coordenada complexa do ponto $P(x, y)$. Alguns autores chamam o ponto $P(x, y)$ de afixo do número complexo z.

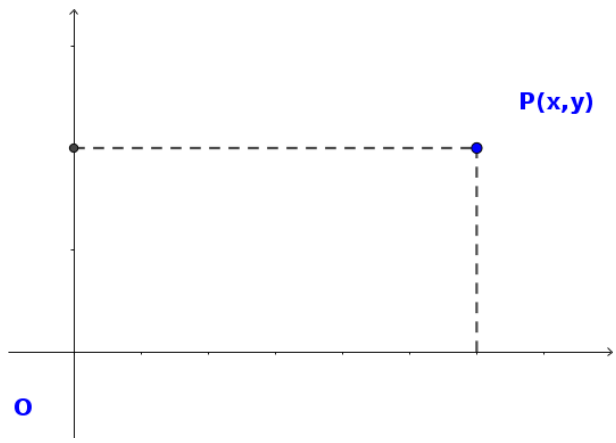


Figura 2.1: Afixo de um número complexo $z = a + bi$

Por exemplo, considerando o número complexo $z = 4 + 2i$, a representação no plano de sua imagem geométrica $P(4, 2)$ será:

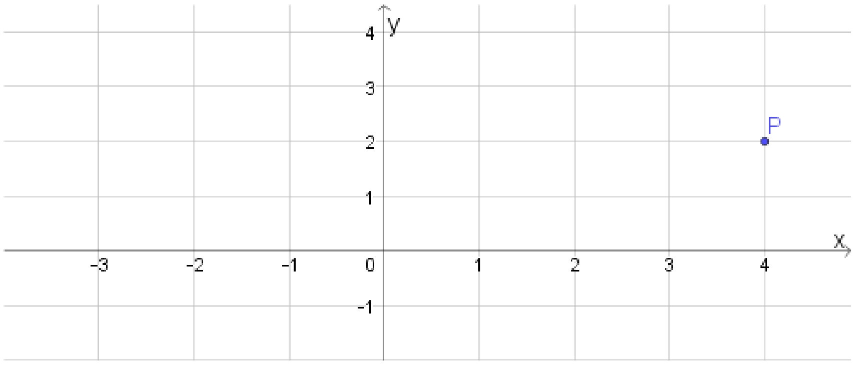


Figura 2.2: Representação de $z = 4 + 2i$ no plano complexo

A representação geométrica dos números complexos 2 e $3i$, com imagens geométricas sendo $P(2, 0)$ e $T(0, 3)$, respectivamente, será:

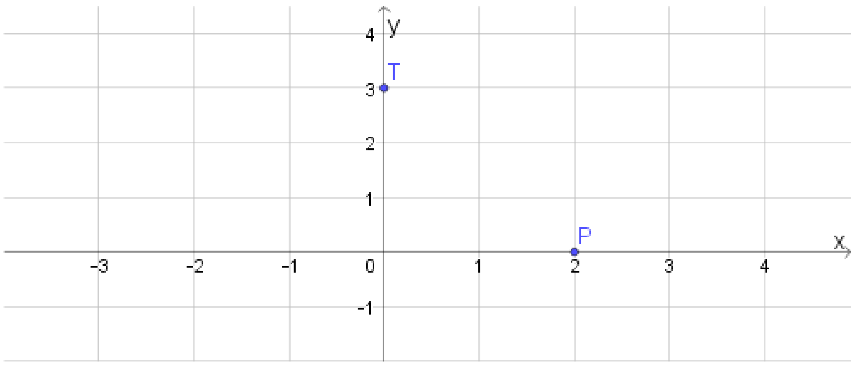


Figura 2.3: Representação de 2 e $3i$ no plano complexo

Por vezes, omitimos a notação do ponto $P(x, y)$ na representação geométrica do número $z = x + yi$, pondo somente o ponto z.

Exemplo 2.9. *Para os números complexos na forma algébrica* $z_1 = 3 - 3i$*,* $z_2 = -3 + 2i$*,* $z_3 = 2 + 0i = 2$ *e* $z_4 = 0 + 2i = 2i$*, temos geometricamente:*

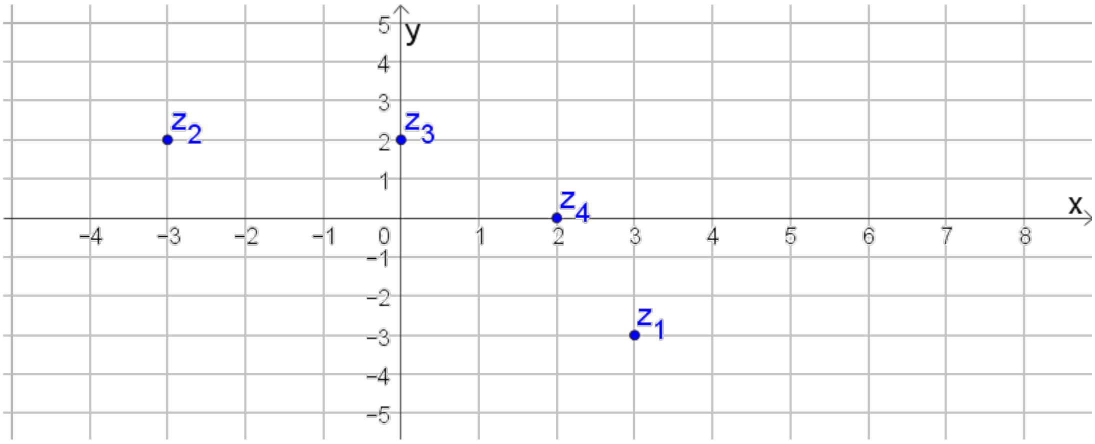


Figura 2.4: Representação de números complexos z_1, z_2, z_2 e z_4

.

Exemplo 2.10. *O oposto de $z = 2 + 3i$ é $-z = -2 - 3i$, que é a reflexão de z em torno da origem. Graficamente, temos:*

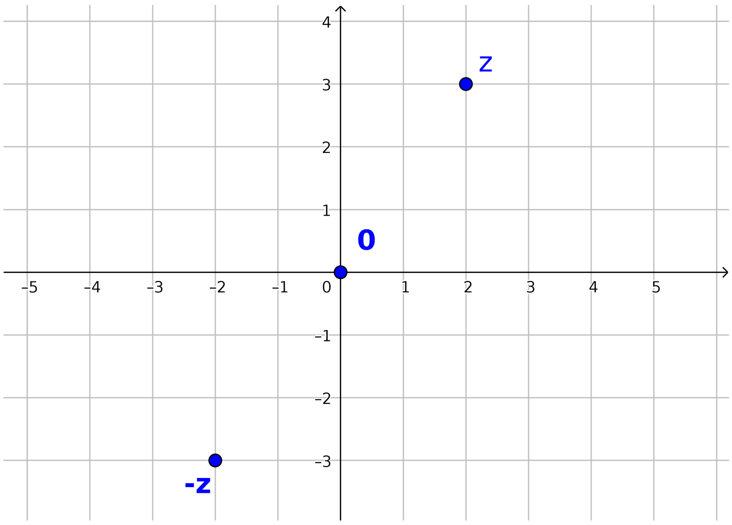


Figura 2.5: Oposto

A imagem geométrica do conjugado complexo de $z = x + yi$ é o ponto $P'(x, -y)$ obtido pela reflexão do ponto $P(x, y)$ em torno do eixo x, conforme a figura a seguir.

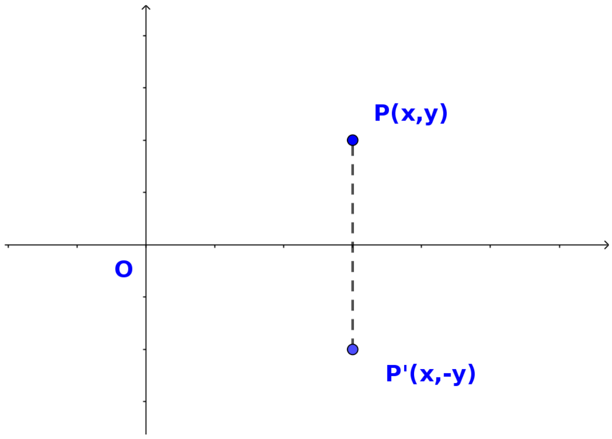


Figura 2.6: Imagem geométrica do conjugado

Às vezes, também identificamos o número complexo $z = x + yi$ com o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, onde $P(x, y)$ é a imagem geométrica do número complexo z. Assim, escrevemos $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i}+y\vec{j}$, onde $\vec{i}, \vec{j}$ são vetores diretores unitários dos eixos x e y, respectivamente.

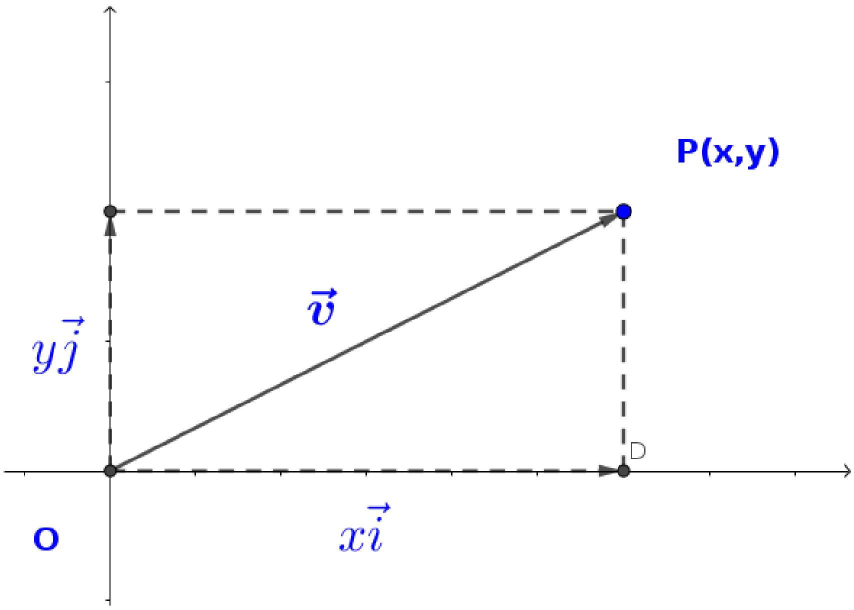


Figura 2.7: Representação vetorial

2.3.1 Interpretação Geométrica do Módulo

Dado um número z em $\mathbb{C}$, com imagem no plano complexo, o ponto $P(x, y)$, a distância euclidiana OP é dada pela fórmula

$$OP = \sqrt{(x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2},$$

de modo que resulta em $OP = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = |\vec{v}|$. Em outras palavras, o módulo de um número complexo é o comprimento do segmento OP ou a magnitude do vetor $\vec{v}$. Veja a figura

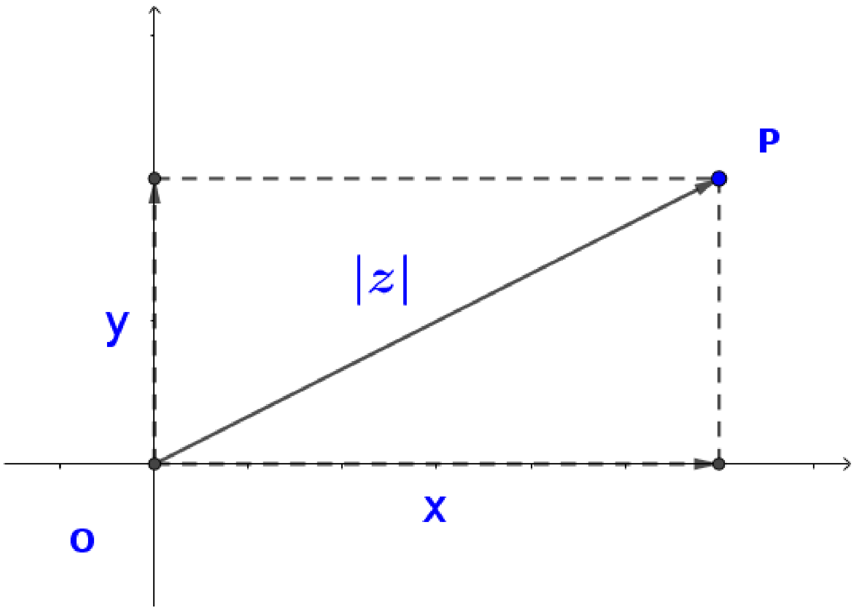


Figura 2.8: Módulo de z geométricamente

Exemplo 2.11. *Os números complexos*

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad e \quad z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

representam no plano complexo quatro pontos sobre o círculo unitário centrado na origem, desde que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$.

2.3.2 Adição e Subtração

Considere os números complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$ e os vetores $\vec{v_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ e $\vec{v_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$. Observando que a soma de números complexos é

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

e a soma de vetores é

$$\vec{v_1} + \vec{v_2} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}.$$

Desse modo, a soma de $z_1 + z_2$ corresponde a soma $\vec{v_1} + \vec{v_2}$.

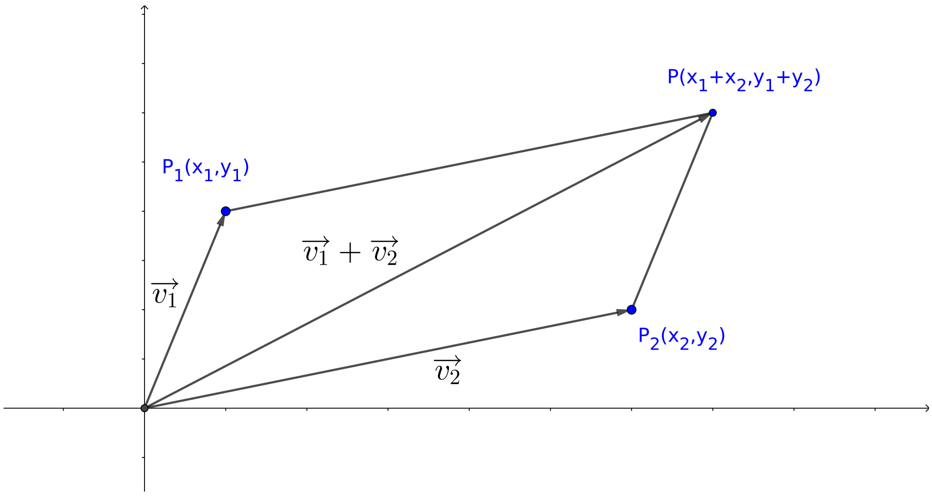


Figura 2.9: Interpretação geométrica da adição

Exemplo 2.12. *A soma dos números complexos* $z_1 = 4+3i$ *e* $z_2 = 1+4i$ *é* $z_3 = z_1+z_2 = (4+1)+(3+4)i = 5+7i$*. Graficamente temos:*

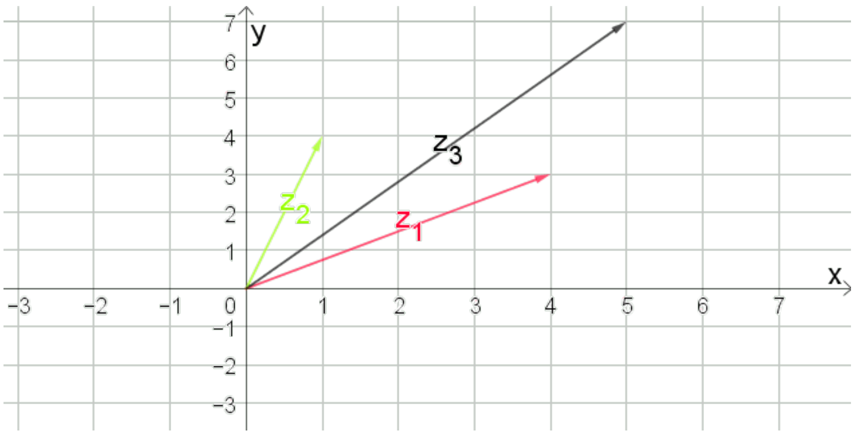


Figura 2.10: Adição de números complexos

Assim a imagem geométrica da soma dos números complexos z_1 *e* z_2 *é o ponto* $P(5,7)$*.*

A diferença de dois números complexos z_1 e z_2 é

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

e a diferença dos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ é

$$\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j}.$$

Assim, a diferença $z_1 - z_2$ corresponde a diferença $\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$.

Exemplo 2.13. *Sendo $z = 2 + 3i$ e $w = 5 + 2i$, temos que*

$$u = z - w = (2 - 5) + (3 - 2)i = -3 + i.$$

Graficamente temos:

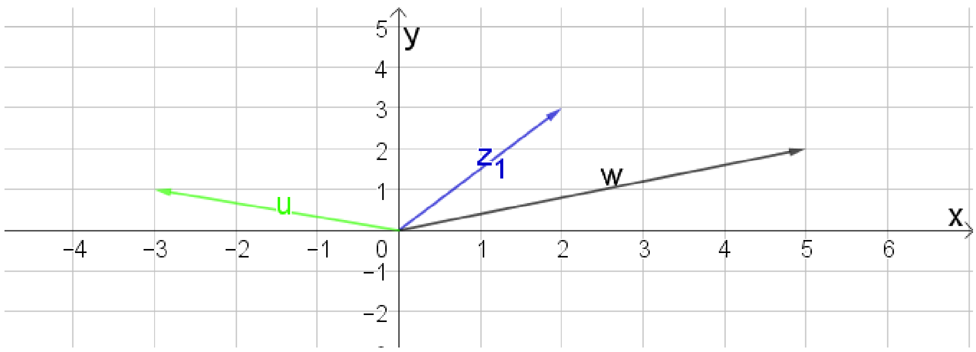


Figura 2.11: Diferença de números complexos

Nesse caso, a imagem geométrica da diferença $z - w$ é o ponto $P(-3, 1)$.

Um fato importante deve ser observado aqui. A distância de $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é igual ao módulo do número complexo $z_1 - z_2$ ou o comprimento do vetor $\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$. De fato,

$$P_1P_2 = |z_1 - z_2| = |\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

2.3.3 Múltiplos Reais de um Número Complexo

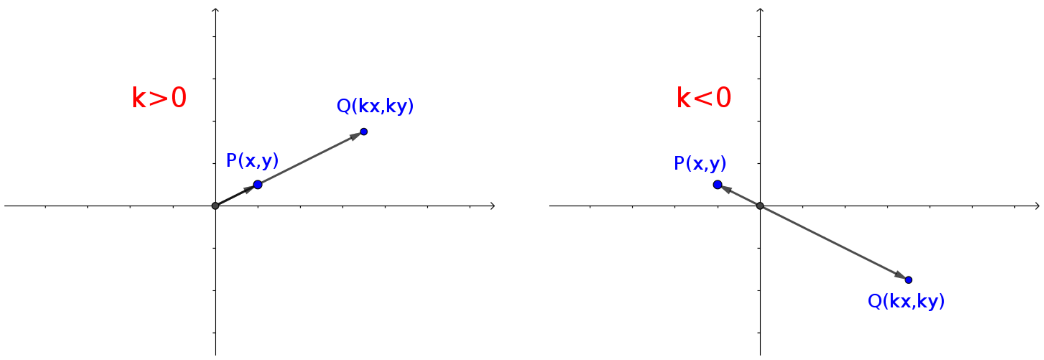
Considere um número complexo $z = x + yi$ e o vetor correspondente $\overrightarrow{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Se k é um número real, então o múltiplo real $kz = kx + kyi$ corresponde ao vetor

$$k\overrightarrow{v} = kx\vec{i} + ky\vec{j}.$$

Note que se $k > 0$, os vetores $k\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v}$ tem a mesma orientação e

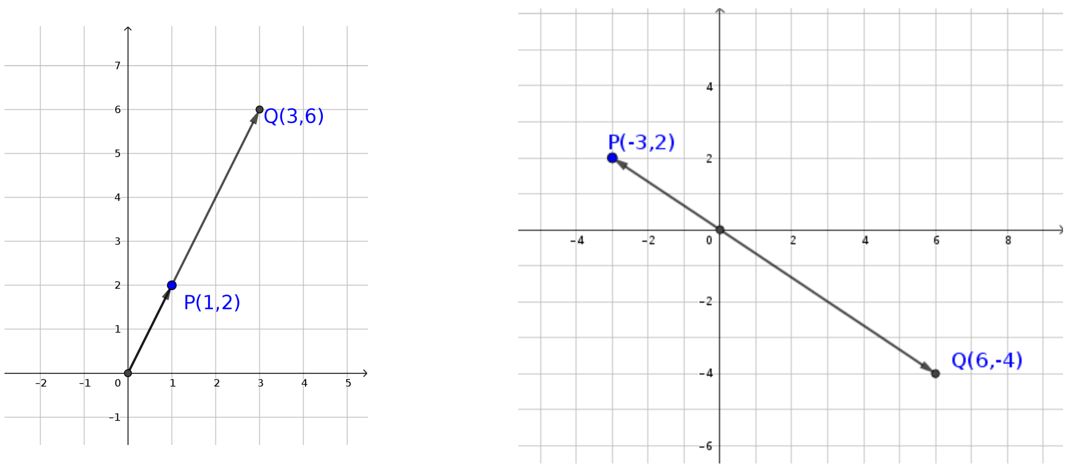
$$|k\overrightarrow{v}| = k|\overrightarrow{v}|.$$

Se $k < 0$, o vetor $k\overrightarrow{v}$ muda para a orientação oposta de $\overrightarrow{v}$ e $|k\overrightarrow{v}| = -k|\overrightarrow{v}|$. Se $k = 0$, então $k\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.



Exemplo 2.14. 1. *Temos que* $3(1+2i) = 3+6i$. *Logo* $Q(3,6)$ *é a imagem geométrica do produto de* 3 *e* $z = 1+2i$.

2. *Observando que* $-2(-3+2i) = 6-4i$, *temos que o ponto* $Q(6,-4)$ *é a imagem geométrica do produto de* -2 *por* $z = -3+2i$.



Capítulo 3

Números Complexos e Trigonometria

De acordo com Boyer (1974) e Roque. (2012), o surgimento da trigonometria está diretamente ligado aos povos egípcios e babilônicos. Eles utilizavam as razões entre os lados de um triângulo na resolução de problemas cotidianos. Mas foi na Grécia que a trigonometria obteve ascensão. Hiparco é o possível mentor desta ciência, pois é atribuído a ele o estabelecimento das bases trigonométricas.

A necessidade de medir ângulos e distância inacessíveis nos problemas relacionados à astronomia contribuiu para o uso da trigonometria como ferramenta auxiliar. Os hindus e os árabes também tiveram participação incisiva no seu desenvolvimento. Mas até então a trigonometria era uma parte da astronomia. Foi na Europa, por volta do século XV, que a trigonometria foi separada da astronomia, surgindo inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento. O termo trigonometria é de origem grega e está associado ao triângulo e suas medidas.

Podemos destacar que foi a partir da representação de um complexo no plano, que possibilitou a inserção dos conceitos da trigonometria nos complexos, partindo deste pressuposto neste capítulo será apresentados tais conceitos.

Como um número complexo é definido por um par ordenado de números em reais, temos imediatamente que um tal número está identificado com um ponto pertencendo ao plano cartesiano, com o eixo ox sendo a parte real do número complexo e oy a parte imaginaria do mesmo. Uma outra identificação, muito útil, é obtida através das coordenadas polares, definida como (r, θ).

Por definição, se $(x, y) \neq (0, 0)$ é um ponto do plano então a coordenada r desse ponto é sua distância à origem e a coordenada θ é o ângulo determinado pelo segmento de reta que une o ponto à origem e o semi-eixo positivo dos x, medido no sentido anti-horário, portanto as coordenadas cartesianas e polares estão relacionadas de acordo pode ser observado na imagem seguinte.

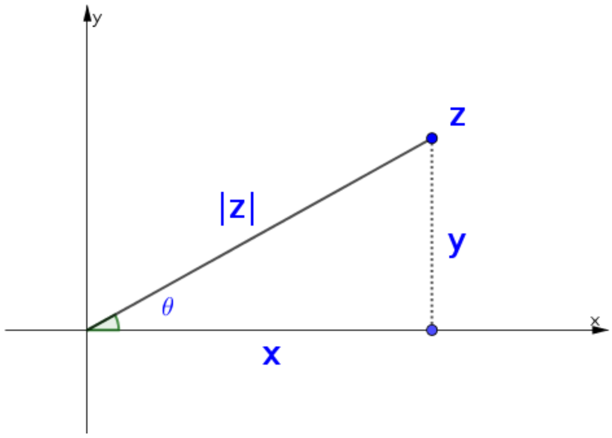


Figura 3.1: Representação de z em coordenadas polares

Observando que

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

segue que um número complexo $z = x + yi$ não nulo, pode ser escrito da forma

$$z = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta),$$

onde $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Esta representação de z é chamada de forma polar.

Para qualquer valor de θ, para o qual a igualdade acima se verifica é chamado de argumento de z, e será denotado por $\theta = arg(z)$. É importante observar que θ não é único, já que, se a igualdade é verdadeira para um determinado θ, será valido também para um valor do tipo $\theta + 2k\pi$, com k um número inteiro arbitrário.

Exemplo 3.1. *Escreva o número complexo* $z = 3 + 3i$ *na forma polar: Note que:* $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, *assim* $r = |z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
Por outro lado, temos $\theta = arg(z)$ *logo* $\theta = 45°$.
Portanto a forma polar do número z *será* $z = 3\sqrt{2} \cdot (\cos 45° + i\,\text{sen}\,45°)$

Sejam dados dois complexos, não nulos, z e w, na formula polar, com representação polar:

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$
$$w = \rho(\cos\Phi + i\,\text{sen}\,\Phi)$$

Efetuando o produto zw, obtemos

$$\begin{aligned}
zw &= [r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)][\rho(\cos\Phi + i\,\text{sen}\,\phi)]\\
&= r\rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)(\cos\Phi + i\,\text{sen}\,\phi)\\
&= r\rho(\cos\theta\cos\Phi - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\Phi) + i(\cos\theta\,\text{sen}\,\Phi + \text{sen}\,\theta\cos\Phi)
\end{aligned}$$

Da trigonometria, temos que

$$\cos\theta\cos\Phi - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\Phi = \cos(\theta+\Phi) \quad \text{e} \quad \cos\theta\,\text{sen}\,\Phi + \text{sen}\,\theta\cos\Phi = \text{sen}(\theta+\Phi).$$

Desse modo, concluímos que

$$zw = r\rho(\cos(\theta+\Phi) + i\,\text{sen}(\theta+\Phi))$$

Observação: Esta fórmula implica que $|zw| = |z||w|$ e que $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$, ou seja o argumento do produto de dois números complexos é a soma dos argumentos desses números.

3.1 Interpretação Geométrica da Multiplicação dos Número Complexo

Considere os números complexos:

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$
$$w = \rho(\cos\Phi + i\,\text{sen}\,\Phi)$$

Com imagens geométricas $M_1(r, \theta)$ e $M_2(\rho, \Phi)$, respectivamente. Considere P_1, P_2 pontos de intersecção com o circulo de raio um e centro na origem, com raios OM_1 e OM_2. Construa o ponto P_3 pertencendo a circunferência dada, com o argumento polar $\theta + \Phi$ e escolhemos o ponto $M_3 \in (0p_3)$, tal que:

$$OM_3 = OM_1 \cdot OM_2.$$

Seja t a coordenada complexa de M_3. O ponto $M_3(r \cdot \rho, \theta + \Phi)$ é a imagem geométrica do produto $z \cdot w$. Seja A a imagem geométrica do número complexo 1. Porque:

$$\frac{OM_3}{OM_1} = \frac{OM_2}{1},$$

isto é,

$$\frac{OM_3}{OM_2} = \frac{OM_2}{OA}$$

e

$$\widehat{M_2OM_3} = \widehat{AOM_1},$$

segue -se que os triângulos OAM_1 e OM_2M_3 são semelhantes.

Observação: Note que para construir a imagem geométrica do quociente, basta observar que a imagem de $\dfrac{t}{w}$ é M_1.

Exemplo 3.2. *Considere os números complexos $z = 2 + i$ e $w = 1 + i$, determine o produto $z \cdot w$.*

Note que:

$z = \sqrt{5}\ (\cos 27^\circ + i \operatorname{sen} 27^\circ)$*;*

$w = \sqrt{2}\ (\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$*.*

Logo

$z \cdot w = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}\ [\cos(27^\circ + 45^\circ) + i \cdot \operatorname{sen}(27^\circ + 45^\circ)$,

cuja as coordenadas complexas será $(\cos(72^\circ) \cdot \sqrt{10}\ ,\ \operatorname{sen}(72^\circ) \cdot \sqrt{10})$*, ou,* $(0,30\sqrt{10}\,; 0,95\sqrt{10})$, *usando aproximação de duas casas decimais.*

Exemplo 3.3. *Considere os complexos $z = 1 + i$, determine a multiplicação de z por $w = i$.*

Note que $z \cdot w$ causa uma rotação de um quarto de volta, isto é 90°*.*

De fato, $(1, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 1)$ *pela definição dada no capítulo 2, assim,* $z \cdot w = p = -1 + i$

Graficamente temos:

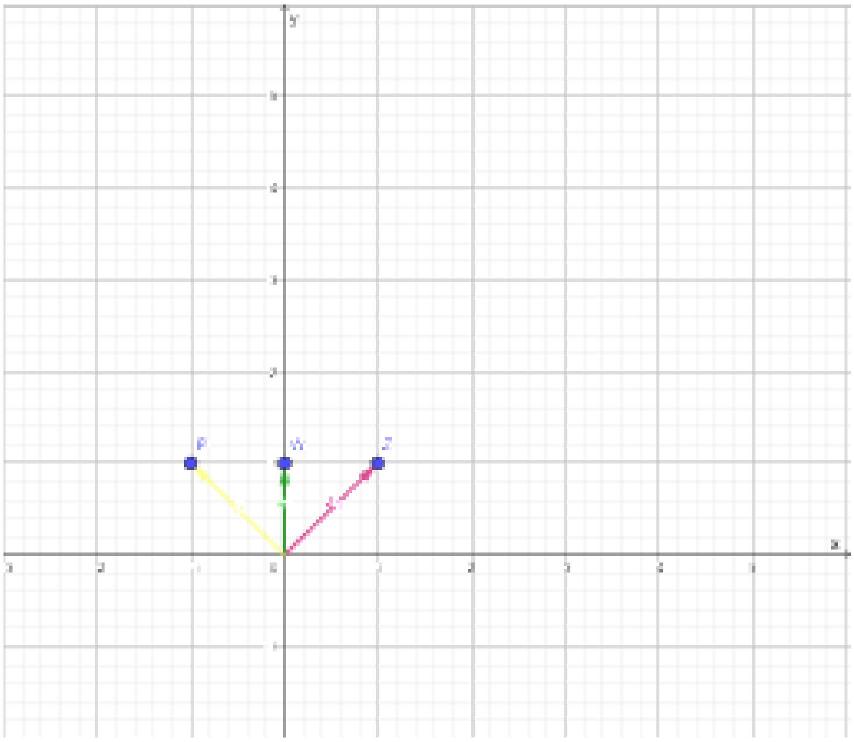


Figura 3.2: Multiplicação por i

3.2 Fórmula de De Moivre e a Potenciação de um Número Complexo

Abraham de Moivre nasceu no dia 26 de maio de 1667 em Vitry, em uma cidade próximo a Paris, France, ele morreu no dia 27 de novembro de 1754 em Londres. Depois de passar cinco anos de sua vida, em uma academia protestante em Sedan, Moivre estudou lógica em Saumur de 1682 até as 1684. Ele foi então para Paris, estudando no Collège de Harcourt, e tendo aulas particulares de matemática com Ozanam. Um protestante francês, Moivre emigrou para a Inglaterra em 1685 seguindo a revogação do Édito de Nantes e a expulsão de Huguenots.

Ele se tornou tutor particular de matemática e esperou por uma cadeira de matemática, mas não conseguiu, visto que os estrangeiros estavam em desvantagem. Em 1697 ele foi eleito um membro da Sociedade Real. Em 1710 Moivre foi designado à Comissão montada pela Sociedade Real para revisar as reivindicações rivais de Newton e Leibniz de quem seria o descobridor do cálculo. Sua nomeação para esta Comissão foi devido à sua amizade com Newton.

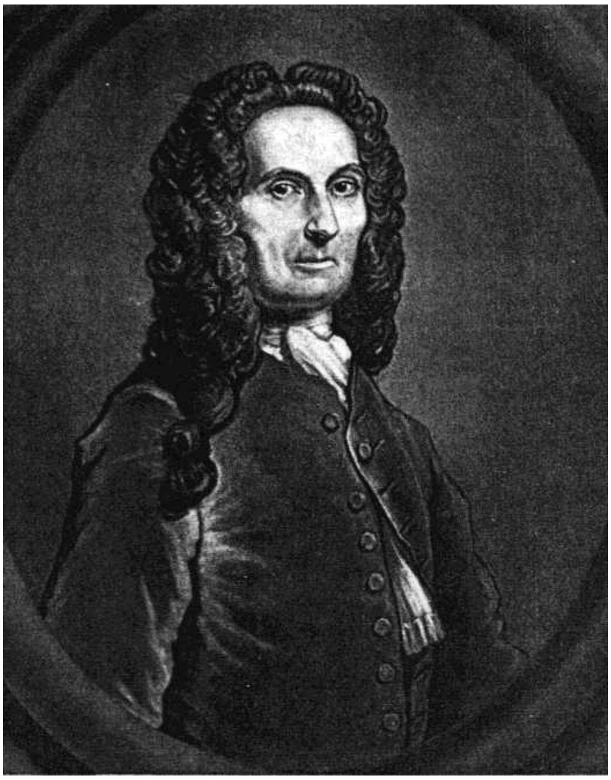


Figura 3.3: Abraham De Moivre

Moivre abriu caminho para o desenvolvimento da geometria analítica e a teoria de probabilidade. Ele publicou A Doutrina de Chance em 1718, o mesmo foi o primeiro livro didático sobre teoria das probabilidades, escrito pelo matemático francês Abraham, no século XVIII. De Moivre escreveu em inglês porque residia na Inglaterra na época, tendo fugido da França para escapar da perseguição de Huguenotes. O título do livro passou a ser sinônimo de teoria da probabilidade e, consequentemente, a frase foi usada no famoso ensaio póstumo de Thomas Bayes. Um Ensaio para Resolver um Problema na Doutrina das Chances, no qual uma versão do teorema de Bayes foi introduzida. A definição de independência estatística aparece neste livro junto com muitos problemas jogos de dados e outros. Ele também investigou estatísticas de mortalidade e a fundação da teoria de anuidades, entretanto, Moivre ganhou destaque com uma formula, que leva o seu nome, tal fórmula é de extrema importância para o desenvolvimento de potenciação e radiciação de um número complexo, como será apresentado no desenvolvimento deste capítulo.

Um das grandes dificuldade dos números complexos é determinar a raízes do mesmo. Considerando a definição para produto de dois números na forma polar e fazendo

$z = w$, onde $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, temos $z \cdot z = z^2$, chegando na equação

$$z^2 = r^2[\cos(2\theta) + i\,\text{sen}(2\theta)],$$

o que nos sugere que :

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)],$$

também seja verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Isso de fato ocorre e essa identidade é conhecida como *fórmula de De Moivre*, que tem interessantes consequências, como por exemplo, facilitar a potenciação de números complexos e nos permitir a determinação de raízes n-ésima de número complexo.

Teorema 3.1 (Fórmula de De Moivre). *Dado um número complexo não nulo na forma polar $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale*

$$z^n = r^n[cos(n\theta) + i\ sen(n\theta)]$$

Demonstração: A demostração será por indução em n. Para $n = 1$, temos que

$$z^1 = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

Suponhamos válido para para algum n, isto é, $z^n = r^n[cos(n\theta) + i\ sen(n\theta)]$ e vamos mostrar que vale para $n + 1$. De fato,

$$z^{n+1} = [r(cos\theta + i\ sen\theta)]^{n+1}$$

Então

$$r^{n+1}(cos\theta + i\ sen\theta)^{n+1}$$

Logo

$$r^n.r^1[(cos\theta + i\ sen\theta)^n.(cos\theta + i\ sen\theta)^1]$$

$$r^{n+1}[[cos(\ n\theta) \cdot cos\theta -\ i\ sen(n\theta) \cdot sen\theta] \cdot [cos\theta + cos\theta]]$$

$$r^{n+1}[cos((n+1)\theta) +\ i\ sen((n+1)\theta)]$$

Logo vale para $n + 1$. Portanto por indução finita vale para n. Uma das aplicações da *formula de De Moivre* é a potenciação em $\mathbb{C}$

Exemplo 3.4. *Determine z^{10} para $z = 3+3i$*

Primeiramente vamos escrever z na forma polar. Temos que $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, logo $r = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$ e $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{b}{a}$, ou seja, $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{3}{3} = 1$ e assim, obtemos $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Daí, $z = 3\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4})$ e usando o teorema anterior, temos

$$z^{10} = (3\sqrt{2})^{10}\left(cos(10.\frac{\pi}{4}) + \ i\ sen(10.\frac{\pi}{4})\right)$$
$$z^{10} = 1889568\left(cos\frac{5\pi}{2} + \ i\ sen\frac{5\pi}{2}\right)$$

3.3 Cálculo da Raiz n-ésima de Números Complexos

Para números complexos, a definição de raiz n-ésima é definida como os números complexos que satisfazem uma equação com potenciação associada. Mais precisamente, temos a definição a seguir.

Definição 3.1. *Dados um número complexo w e um número $n \in \mathbb{N}$, dizemos que $z \in \mathbb{C}$ é uma raiz n-ésima de w se*

$$z^n = w.$$

Se $w = 0$, é claro que $z = 0$ será a única solução da equação $z^n = w$, logo, o número 0 possui uma única raiz n-ésima que é o próprio 0. Se $w \neq 0$, não teremos mais unicidade das raízes, como por exemplo, para $w = -1$, temos que $z = i$ ou $z = -i$ satisfazem a equação $z^2 = -1$. Provaremos a seguir que se $w \neq 0$, então existem exatamente n soluções distintas da equação $z^n = w$. Mais precisamente, vamos determinar uma fórmula que descreve cada uma dessas n soluções distintas para a raiz n-ésima de um número complexo, obtidas com o auxílio da fórmula de **De Moivre** para potenciação de números complexos com expoente natural.

Teorema 3.2. *Fixe $n \in \mathbb{N}$, todo número complexo não nulo w possui exatamente n raízes n-ésimas em $\mathbb{C}$, distintas, a saber,*

$$z_k = \sqrt[n]{w} = r(\cos\theta_k + i\operatorname{sen}\theta_k) \tag{3.1}$$

com $r = \sqrt[n]{|w|}$, $\theta_k = (\theta + 2k\pi)/n$, $\theta = \arg w$ e $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Exemplo 3.5. *Determine a raiz cubica do número complexo $w = 8i$. Inicialmente devemos expressar w na forma polar:*

$$w = 8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

Logo $r = \sqrt[3]{|w|} = \sqrt[3]{8} = 2$, $\theta = \arg w = \dfrac{\pi}{2}$,

e

$\theta_k = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} = \dfrac{\pi/2 + 2k\pi}{3} = \dfrac{\pi + 4k\pi}{6}$. *Usando a fórmula* (3.1), *temos que as raízes cúbicas de* $w = 8i$ *são dadas por*

$$z_k = 2\left(\cos\frac{\pi + 4k\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi + 4k\pi}{6}\right)$$

com $k = 0, 1$ *e* 2.

Par $k = 0$, *temos*

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i,$$

para $k = 1$,

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$$

e finalmente para $k = 2$, *obtemos*

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0 + (-1)i) = -2i.$$

Capítulo 4

Números Complexos e Algumas Possíveis Aplicações em Outras Áreas da Matemática

Por volta do período de 1806, matemático Jean Robert Argand (1768-1822), publicou um ensaio sobre a representação geométrica dos números complexos. Logo em seguida o matemático Gauss, no período de 1831, formulou com precisão a equivalência matemática da Geometria plana ao domínio do conjunto dos números complexos, isto é, introduziu também a representação gráfica dos números complexos, com as mesmas características que já havia sido feita pelos matemáticos Wessel e Argand. Apesar de ter sido o matemático Wessel, o primeiro a conjecturar essa representação no plano para um complexo, o mérito da descoberta ficou associado aos nomes dos matemáticos Gauss e Argand, de modo que o plano dos números complexos é usualmente chamado de Plano Argand-Gauss ate hoje. Assim neste capítulo vai ser discutido o uso da teoria dos complexos em problemas da Geometria, Geometria analítica.

4.1 Alguns Conceitos da Geometria no Plano Complexos, propriedades e definições

Proposição 4.1. *Considere dois números complexos z_1 e z_2, tal que suas imagens geométricas, sejam respectivamente m_1 e m_2. Assim a distância entre m_1 e m_2 é:*

$$d(m_1 m_2) = |z_1 - z_2|$$

A função $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow [0, \infty)$ é definida como:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Com esta definição temos que:

1º A distância entre dois números complexos pode ser positiva ou nula, isto é:

$$d(z_1, z_2) \geq 0, \ se \ \ z_1, z_2 \in \mathbb{C};$$

$$d(z_1, z_2) = 0, \ se \ \ z_1 = z_2;$$

2º Simetria ou seja:

$$d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1), \ para \ \ todos \ z_1, z_2 \in \mathbb{C};$$

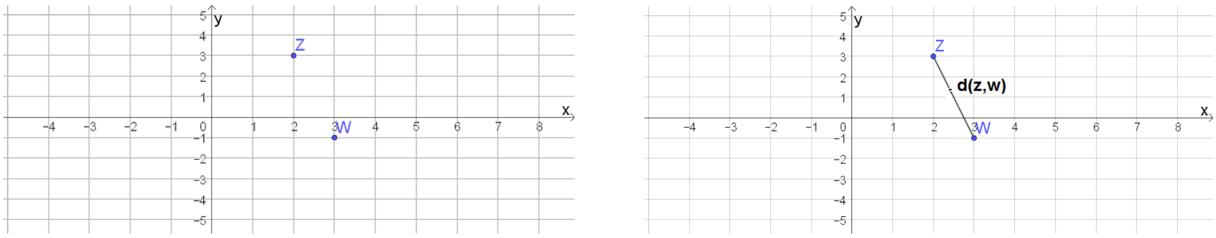
3º Desigualdade Triangular:

$$d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) \ + \ d(z_2, z_3), \ para \ qualquer \ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Exemplo 4.1. *Considere $z = 2 + 3i$ e $w = 3 - i$, com $z, w \in \mathbb{C}$, determine a distância entre os dois números complexos.*
De acordo com a definição anterior temos: $d(z, w) = |z - w|$ então

$$d(z, w) = |(2 + 3i) - (3 - i)| = | - 1 + 4i| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

Graficamente temos:



(a) Representação dos números z e w no plano Argand-Gauss.

(b) Representação da distância de z e w no plano Argand-Gauss

Figura 4.1: A representação do exemplo 7 no plano

Usando a definição de distância entre dois números em $\mathbb{C}$, podemos definir o ponto médio entre os dois números dado, isto é, dado z_1 e z_2 dois números complexos distintos, e um número M pertencendo ao segmento que une os números z_1, z_2, tal que $d(z_1, M) = d(z_2, M)$ e a representação do número M será $M = (x_m, y_m)$ com

$$x_m = \frac{a+c}{2} \qquad \text{e} \qquad y_m = \frac{b+d}{2}.$$

Exemplo 4.2. *Determine o ponto médio entre os números $z = (4,6)$ e $w = (-2,8)$. Temos: $M = (x_n, y_m)$, assim:*

$$x_m = \frac{a+c}{2} = \frac{4+(-2)}{2} = 1 \qquad e \qquad y_m = \frac{b+d}{2} = \frac{6+8}{2} = 7.$$

Portanto $M = (1,7)$.

Graficamente temos:

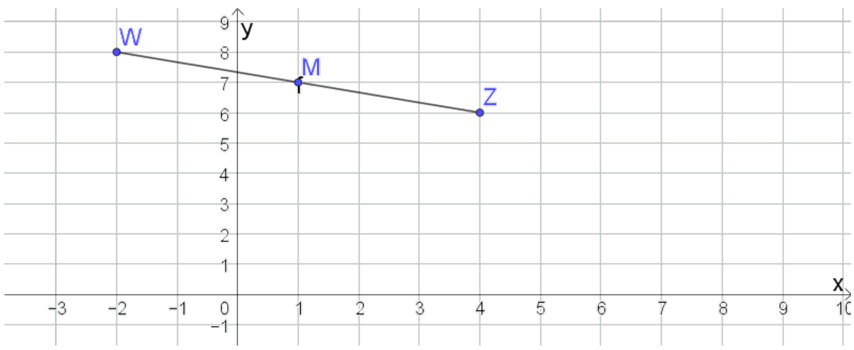


Figura 4.2: Gráfico do exemplo 11

Podemos generalizar esse resultado

Exemplo 4.3 (Divisão em partes proporcionais:). *Sejam z_1, z_2 e z os afixos de dois* *pontos* Z_1, Z_2 *e do ponto* Z *que divide o segmento* Z_1Z_2 *na razão* $k = Z_1Z/ZZ_2$*. Então*

$$z = \frac{z_1 + kz_2}{1 + k}$$

Pela geometria analítica, sabemos que se $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ *e* (x, y) *são as coordenadas cartesianas de* Z_1, Z_2 *e* Z*, então*

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \qquad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}$$

Desde que $z = x + yi$*,* $z_1 = x_1 + y_1 i$ *e* $z_2 = x_2 + y_2 i$*, vemos que a fórmula acima é válida.*

Notemos que para $k = 1$*, a fórmula resulta no ponto médio. Esse resultado nos permite determinar as coordenadas do baricentro de um triângulo, que é o conteúdo do nosso próximo resultado.*

Exemplo 4.4 (Baricentro de um triângulo:). *Se* a, b *e* c *são os afixos dos vértices* A, B *e* C*, de um triângulo* ABC*, então o afixo* g *do baricentro* G *desse triângulo é dado por*

$$g = \frac{a + b + c}{3}.$$

De fato, se A' *é o ponto médio do segmento* BC*, conforme a figura abaixo, temos que* $a' = (b + c)/2$*. Como sabemos da geometria analítica* $AG/GA' = 2$*. Usando o resultado do exemplo anterior, temos que*

$$g = \frac{a + 2a'}{1 + 2} = \frac{a + b + c}{3}$$

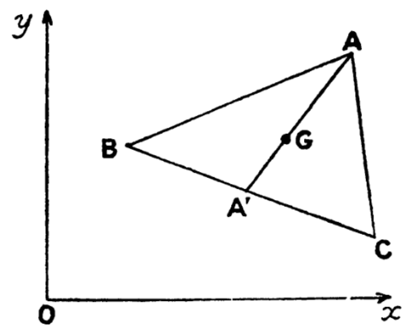


Figura 4.3: Baricentro

Como aplicação desse resultado, considerando os números em $\mathbb{C}$ *dados por* $a =$

$5+4i, b=-3+2i$ e $c=2-3i$, afixos dos pontos A, B e C respectivamente, temos que o afixo do baricentro G do triângulo ABC é dado por

$$g=\frac{a+b+c}{3}=\frac{(5+4i)+(-3+2i)+(2-3i)}{3}=\frac{4+3i}{3}=\frac{4}{3}+i.$$

Graficamente temos:

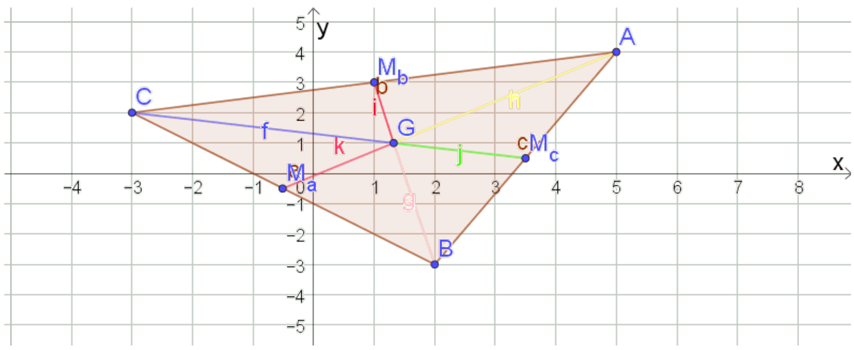
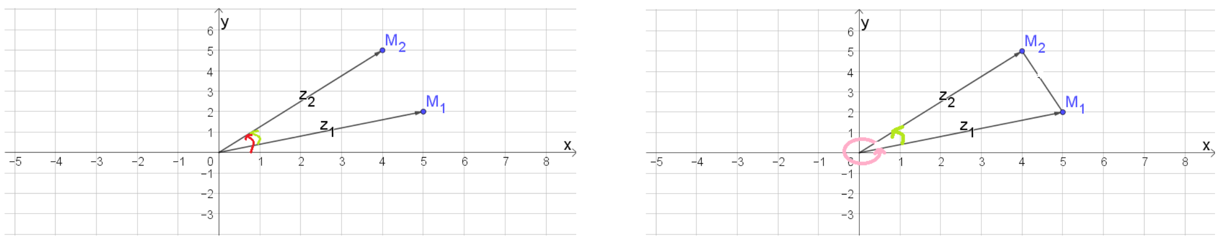


Figura 4.4: Baricentro do triângulo no plano complexo

Proposição 4.2 (Representação de um ângulo:). *Sejam z_1 e z_2 dois números complexos e M_1 e M_2 dois pontos com origem no plano complexo, então, a medida de um ângulo orientado $\widehat{M_1OM_2}$, em $\mathbb{C}$ será igual a $arg\dfrac{z_2}{z_1}$.*

De fato:

Note que temos dois casos a analisar, como segue nas figuras abaixo.



(a) Imagem 1 (b) Imagem 2

Figura 4.5: Representação dos ângulos entre complexos no plano

Caso 1:

Se o triângulo M_1OM_2 é negativamente orientado de acordo com a figura (a), temos:

$$\widehat{M_1OM_2}=\widehat{xOM_2}-\widehat{xOM_1}=argz_2-argz_1=arg\frac{z_2}{z_1}$$

Caso 2

Se o triângulo M_1OM_2 é orientado de forma positiva, de acordo com a figura (b), segue:

$$\widehat{M_1OM_2} = 2\pi - \widehat{M_1OM_2} = 2\pi - arg\frac{z_2}{z_1},$$

como o triângulo M_2OM_1, também é negativamente orientado, então:

$$\widehat{M_1OM_1} = 2\pi - arg\frac{z_1}{z_2} = 2\pi - (2\pi - arg\frac{z_2}{z_1})$$

Exemplo 4.5. *Determine o ângulo formado entre os números complexos $z = 1 + i$ e $w = -1 + i$. Graficamente temos:*

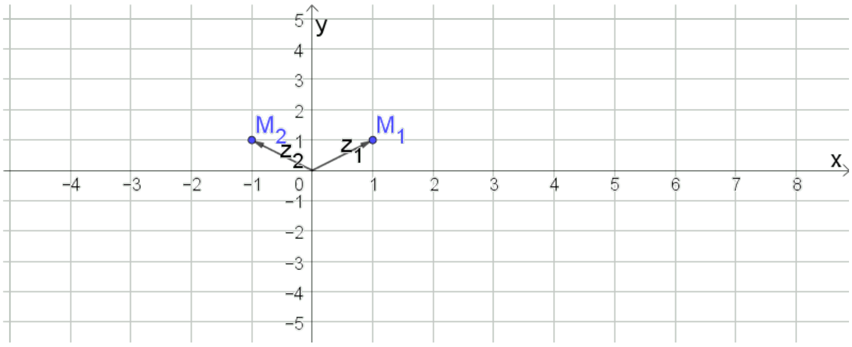


Figura 4.6: Gráfico Exemplo 13

Portanto os ângulos a serem calculados são $\widehat{M_1OM_2}$ e $\widehat{M_2OM_1}$. De acordo com a definição acima, será $\widehat{M_1OM_2} = arg\frac{w}{z}$, segue:

$$\frac{w}{z} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{-1+i)\cdot(1-i)}{2} = i,$$

assim, $\widehat{M_1OM_2} = arg\ (i) = \frac{\pi}{2}$, quando o triângulo é orientado negativamente, por outro lado, se a orientação do mesmo for positiva, temos:$\widehat{M_1OM_2} = arg\ (-i) = (2\pi - arg\ w/z) = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$.

Proposição 4.3. *Dados três números complexos z_1, z_2, z_3, com M_1, M_2, M_3 pontos com origem no plano complexos, a medida do ângulo orientado $\widehat{M_1M_2M_3}$ é $arg\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.*

De fato: Note que a translação do vetor $-z_1$, mapeia os pontos M_1, M_2, M_3 para os pontos O, M_2', M_3', com coordenadas complexas, $O, z_2 - z_1, z_3 - z_1$, logo, $\widehat{M_1M_2M_3} = \widehat{M_2'OM_3'}$, assim pelo resultado anterior temos $\widehat{M_2'OM_3'} = arg\frac{M_3'}{M_2'}$, como $M_2' = z_2 - z_1$ e

$M_3' = z_3 - z_1$, segue o resultado.

De mesma forma, temos que dados quatro números em $\mathbb{C}$, o ângulo formado entre eles será expresso por $arg\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2}$ ou $arg\dfrac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1}$ e tem sua comprovação feita de modo análogo ao anterior.

OBS: *O ângulo entre quatro números complexos também pode ser interpretado como ângulo entre duas retas em* $\mathbb{C}$

Exemplo 4.6. *Determine o ângulo entre os números complexos* $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = -2 + 4i$, $z_4 = -2 - i$.

Pela notação da obs. temos $arg\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2}$, *considerando* $a = z_3 - z_1$ *e* $b = z_4 - z_2$ *assim* $a = -4 + i)$ *e* $b = -3 - 5i$, *logo* $\theta = arg\dfrac{a}{b} = arg(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i)$, *portanto* $\theta = \pi/4$ *No gráfico temos:*

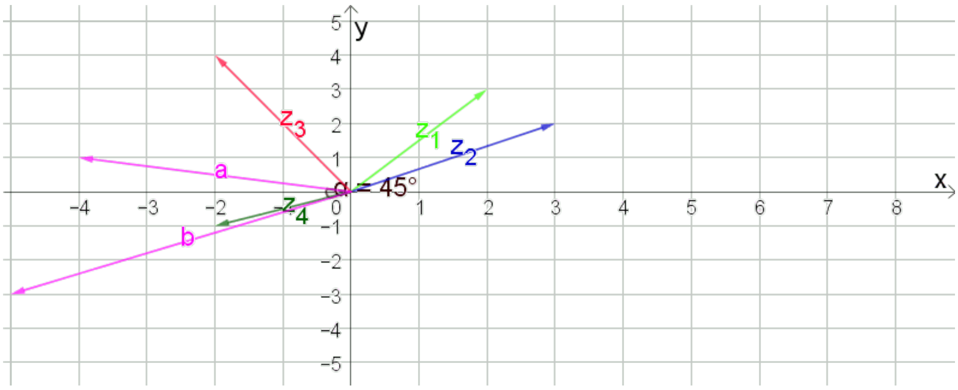


Figura 4.7: Gráfico Exemplo 14

Usando o plano complexo, podemos tratar diversas situações de geometria em $\mathbb{C}$, como pode ser observado na sequência do estudo deste capítulo.

4.2 Plano Argand-Gauss e Geometria Analítica, algumas aplicações

Nesta seção apresentamos alguns conceitos de geometria analítica, mas com o uso da notação de $\mathbb{C}$

Proposição 4.4. *Dados* $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$ *e* $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, *a equação de uma reta no plano do complexo é:*

$$\bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \beta = 0$$

Segue da teoria de geometria analítica que a equação de uma reta pode ser descrita por:

$$Ax + By + C = 0$$

em que A, B e $C \in \mathbb{R}$ e $A^2 + B^2 \neq 0$, tomando um número complexo $z = x + yi$ então $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ e $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$. Assim:

$$A(\frac{z + \bar{z}}{2}) - B\ i\ (\frac{z - \bar{z}}{2}) + C = 0$$

que é equivalente a

$$\bar{z}(\frac{A + Bi}{2})\ +\ z\ (\frac{A - Bi}{2}) + C = 0.$$

Sejam os números $\alpha = \dfrac{A - Bi}{2} \in \mathbb{C}^*$ e $\beta = C \in \mathbb{R}$. Portanto vale a equação $\bar{\alpha}\ \bar{z}\ +\ \alpha\ z\ +\ \beta\ =\ 0$.

Note que se $\alpha = \bar{\alpha}$, o coeficiente B será zero e a equação vai ser uma reta vertical, caso contrário podemos definir o coeficiente da reta por $m = \dfrac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}}\ i$.
Com estes conceitos de equação no plano Argand - Gauss, podemos juntar condições para verificar quando duas retas em $\mathbb{C}$, são perpendiculares ou paralelas, além de determinar a reta que passa por dois pontos, que são imagens de números complexos.

Proposição 4.5. *Dados duas retas t_1 e t_2, com equações:*

$$t_1 : \bar{\alpha_1}\ .\ \bar{z} + \alpha_1\ .\ z + \beta_1 = 0$$

e

$$t_2 : \bar{\alpha_2}\ .\ \bar{z} + \alpha_2\ .\ z + \beta_2 = 0,$$

logo as retas dadas são:

1 - Paralelas, se, e somente se,

$$\frac{\bar{\alpha_1}}{\alpha_1} = \frac{\bar{\alpha_2}}{\alpha_2}$$

2 - Perpendiculares, se, e somente se,

$$\frac{\bar{\alpha_1}}{\alpha_1} + \frac{\bar{\alpha_2}}{\alpha_2} = 0$$

3 - Concorrentes, se, e somente se,

$$\frac{\bar{\alpha_1}}{\alpha_1} \neq \frac{\bar{\alpha_2}}{\alpha_2}$$

Justificativa:

1) Da geometria analítica temos que duas retas quaisquer são paralelas quando seus coeficientes angulares são iguais, logo, $t_1 // t_2$, se,e somente se, $m_1 = m_2$, assim,

$$\frac{\alpha_1 + \bar{\alpha_1}}{\alpha_1 - \bar{\alpha_1}}\, i = \frac{\alpha_2 + \bar{\alpha_2}}{\alpha_2 - \bar{\alpha_2}}\, i,$$

logo, $\alpha_2 \bar{\alpha_1} = \alpha_1 \bar{\alpha_2}$. Portanto $\dfrac{\bar{\alpha_1}}{\alpha_1} = \dfrac{\bar{\alpha_2}}{\alpha_2}$.

De modulo análogo é feito a justificativa para 2 e 3, com base nos conceitos de geometria analítica.

OBS: A razão $m_r = -\dfrac{\bar{\alpha}}{\alpha}$ é chamado de **coeficiente angular complexo** da reta r a equação $\bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \beta = 0$.

Proposição 4.6. *Dados os pontos $P_1(z_1), P_2(z_2)$, em complexo, a equação da reta determinada pelos mesmo é dado por:*

$$det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z_1} & 1 \\ z_2 & \bar{z_2} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

De fato.

Sabemos que a equação de uma reta determinada por dois pontos $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ no plano cartesiano satisfaz a seguinte equação:

$$det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Usando números complexos temos:

$$det \begin{bmatrix} \frac{z_1 - \bar{z_1}}{2} & \frac{z_1 + \bar{z_1}}{2i} & 1 \\ \frac{z_2 - \bar{z_2}}{2} & \frac{z_2 + \bar{z_2}}{2i} & 1 \\ \frac{z - \bar{z}}{2} & \frac{z + \bar{z}}{2i} & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

ou equivalentemente

$$\frac{1}{4i}det\begin{bmatrix} z_1-\bar{z}_1 & z_1+\bar{z}_1 & 1\\ z_2-\bar{z}_2 & z_2+\bar{z}_2 & 1\\ z-\bar{z} & z+\bar{z} & 1\end{bmatrix}=0.$$

Assim pelas propriedades de determinantes obtemos,

$$det\begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1\\ z_2 & \bar{z}_2 & 1\\ z & \bar{z} & 1\end{bmatrix}=0.$$

Portanto a proposição é valida para dois números complexos qualquer.

Usando o mesmo conceitos podemos verificar se três números complexos são colineares, isto é, dados três pontos em $\mathbb{C}$, serão colineares, se, e somente se,

$$det\begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1\\ z_2 & \bar{z}_2 & 1\\ z_3 & \bar{z}_3 & 1\end{bmatrix}=0.$$

Observação 4.1. *O coeficiente angular complexo de uma reta determinada pelos pontos de coordenadas complexas z_1, z_2 será:*

$$m=\frac{z_2-z_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_1}.$$

Exemplo 4.7. *Verifique se os pontos com coordenadas complexas $P_1(2,3), P_2(1,6), P_3(-1,-2)$ são colineares.*

Consideramos, $z_1=2+3i, z_2=1+6i, z_3=-1-2i$, de acordo com a **obs**, *temos*

$$det\begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1\\ z_2 & \bar{z}_2 & 1\\ z_3 & \bar{z}_3 & 1\end{bmatrix}=det\begin{bmatrix} 2+3i & 2-3i & 1\\ 1+6i & 1-6i & 1\\ -1-2i & -1+2i & 1\end{bmatrix}=$$

$$=(2+3i)(1-6i)+(2-3i)(-1-2i)+(-1+2i)(1+6i)-(-1-2i)(1-6i)-(1+6i)(2-3i)-(2+3i)(-1+2i)$$

$$=(20-9i)+(-8-i)+(-13-4i)-(-13+4i)-(20+9i)-(-8+i)(20-8-13+13-20+8)+(-9-1-4-4-9-1)i=0-28i\neq 0$$

Portanto os pontos P_1, P_2, P_3 não são colineares, como podemos verificar no *gráfico.*

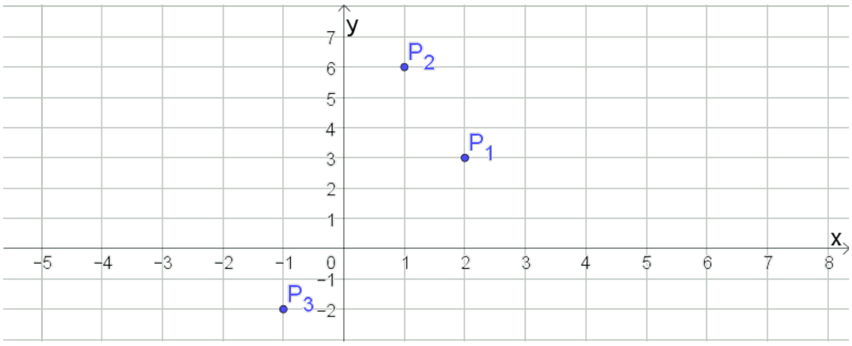


Figura 4.8: Gráfico do exemplo 15

Exemplo 4.8. *Verifique se os pontos em* $\mathbb{C}$*,* $P_1(1,2), P_2(-1,-2), P_3(2,4)$*, são colineares.*

Temos que $\det\begin{bmatrix} 1+2i & 1-2i & 1 \\ -1-2i & -1+2i & 1 \\ 2+4i & 2-4i & 1 \end{bmatrix}$ *é igual a*
$(1+2i)(-1+2i)+(1-2i)(2+4i)+(2-4i)(-1-2i)-(2+4i)(-1+2i)-(2-4i)(1+2i)-(-1-2i)(1-2i) = -5+10+(-10)-(-5)-(-10)-10 = 0$. *Portanto os pontos dados são colineares, como podemos verificar graficamente.*

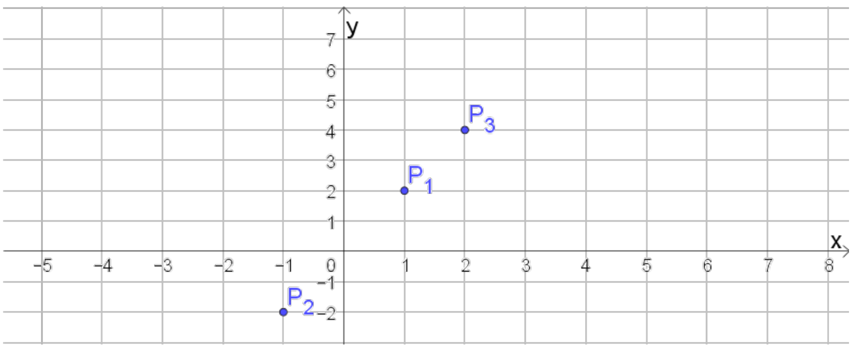


Figura 4.9: Gráfico do exemplo 16

Os conceitos de números complexos vai alem da solução de equações, como ficou claro neste capitulo, os números complexos tem enumeras aplicações em diversos campos da matemática, citado anteriormente neste trabalho.

4.3 O Uso das Raízes de um Número Complexo na Geometria

Como podemos perceber a geometria não é um ramo novo da matemática, isso fica bem evidente na passagem, destacada por Peruzzo (2013) .

> Dentre todos os antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias atuais, os mais famosos são os papiros egípcios de Ahmes e de Moscou. O papiro de Ahmes, também chamado papiro Rhind, é de cerca do ano 1650 a.C., onde há 85 problemas resolvidos de aritmética e geometria. O papiro de Moscou, de cerca do ano 1850 a.C., contém 25 problemas de aritmética e de geometria, os quais são descritos de maneira verbal (na época desconheciam - se o conceito de fórmulas gerais), com o cálculo (correto) do volume de um tronco da pirâmide...(Peruzzo, 2013, pág 04).

Assim, podemos destacar a importância da geometria, ao longo da historia matemática. Como ja foi destacados neste trabalho a geometria tem vários de seus conceitos estendidos ao complexos. Neste capitulo será destacado o uso das raízes de um número complexos na geometria.

O Teorema Fundamental da Álgebra afirma que qualquer polinômio, com coeficientes complexos de uma variável de grau $n > 0$, tem alguma raiz complexa e, em consequência, possui exatamente n raízes não necessariamente distintas. Outro fato é que, a equação $x^n = a$, tem n raízes distintas com mesmo módulo.

Obs: Como podemos destacar no exemplo 7, o número $(0, 8)$ ou $z = 8i$ possui exatamente três raízes em $\mathbb{C}$. Representando no plano Argand - Gauss, das raízes deste número complexo.

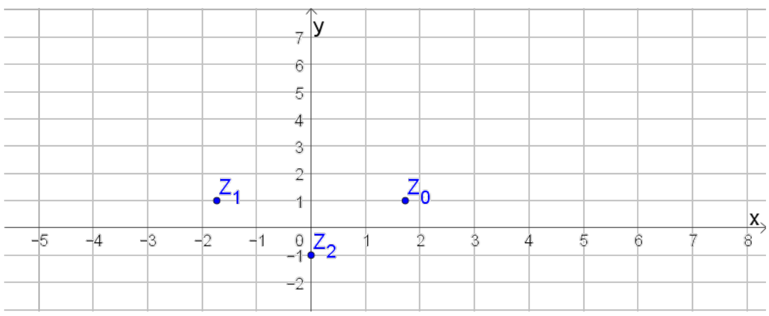


Figura 4.10: Representação das Raízes de $z = 8i$, no plano

Note que se ligarmos z_0, z_1, z_2, obtemos um triângulo, cujo vértices serão as raízes do complexo $z = 8i$.

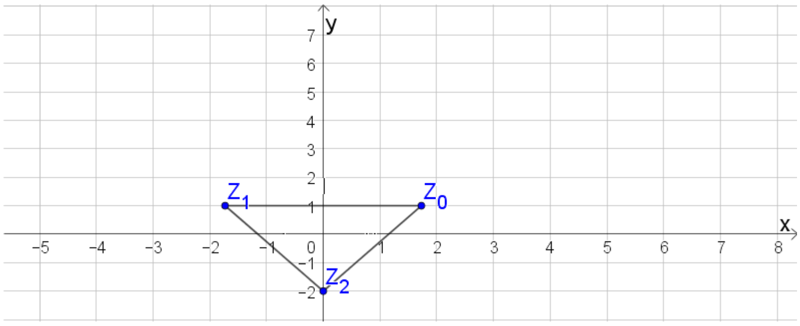


Figura 4.11: Triângulo formado a partir das raízes de $z = 8i$

O que fica bem evidente é que a raiz cúbica de um complexo qualquer será sempre vértices de um triângulo.

Exemplo 4.9. *Determine as raízes cúbica em $\mathbb{C}$ do número 8. Note que apesar do mesmo ser real, e ter uma raiz real 2, o mesmo apresentara duas raízes complexas de acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, que vamos determinar usando a fórmula (*) representada no capitulo 3, sub secção 2, Consideramos $z = 8 + 0i$, assim o argumento de z será 0, assim usando a formula $\sqrt[n]{|z|} = \sqrt[n]{|z|}[cos(\frac{arg(z) + 2k\pi}{n}) + i \ \ sen(\frac{arg(z) + 2k\pi}{n})]$, para $K = 0, 1, 2$, temos:*

$k = 0$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8}[cos(\frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}) + i \ \ sen(\frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3})]$$
$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8}[cos(0) + i \ \ sen(0)]$$
$$\sqrt[3]{8} = 2[cos(0) + i \cdot sen(0)]$$
$$\sqrt[3]{8} = 2[1 + i \cdot 0] = 2$$

$k = 1$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8}[cos(\frac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}) + i \ \ sen(\frac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3})]$$
$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8}[cos(\frac{2\pi}{3}) + i \ \ sen(\frac{2\pi}{3})]$$
$$\sqrt[3]{8} = 2[cos(2\pi/3) + i \cdot sen(2\pi/3)]$$

$k = 2$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8}[cos(\frac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}) + i \quad sen(\frac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3})]$$
$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8}[cos(4\pi/3) + i \quad sen(4\pi/3)]$$

Graficamente:

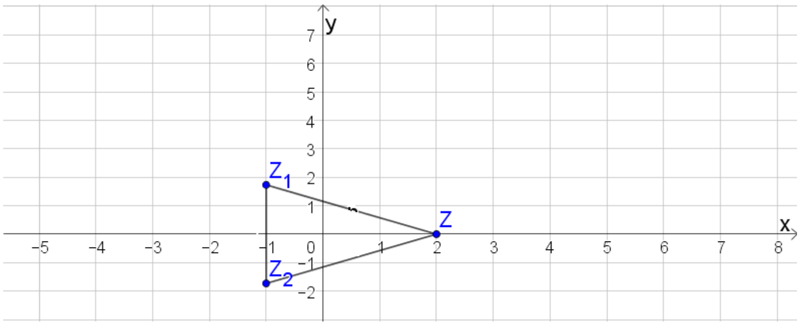


Figura 4.12: Triângulo formado a partir das raízes do números complexo $z = 8$

Para a determinação dos valores para seno e cosseno, tanto no exemplo 14 e 15, foram considerado duas casas decimais.

Portanto podemos afirmar que toda raiz cúbica de um número em $\mathbb{C}$, formara um triângulo no plano Argand - Gauss, isso fica assegurado pelo teorema fundamental da álgebra.

Agora será analisada a raiz quarta de um número complexo. Consideramos $z = 16i$, as raízes de z será:

Note que $|z| = 16$ e argumento de $z = 0$, pois $arg(z) = tang\frac{b}{a}$. Usando a formula (*) para $k = 0, 1, 2, 3$ temos:

$k = 0$

$$\sqrt[4]{16i} = \sqrt[4]{16} \ [cos(\frac{\pi/2 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{4}) + i \quad sen(\frac{\pi/2 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{4})]$$
$$\sqrt[4]{16i} = 2 \ [cos(\frac{\pi/2 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{4}) + i \quad sen(\frac{\pi/2 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{4})]$$
$$\sqrt[4]{16i} = 2 \ [cos(\pi/8) + i \quad sen(\pi/8)]$$

$k = 1$

$$\sqrt[4]{16i} = \sqrt[4]{16}\ [cos(\frac{\pi/2 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4}) + i\ \ sen(\frac{\pi/2 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4})]$$

$$\sqrt[4]{16i} = 2\ [cos(5\pi/8) + i\ \ sen(5\pi/8)]$$

$k = 2$

$$\sqrt[4]{16i} = \sqrt[4]{16}\ [cos(\frac{\pi/2 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4}) + i\ \ sen(\frac{\pi/2 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4})]$$

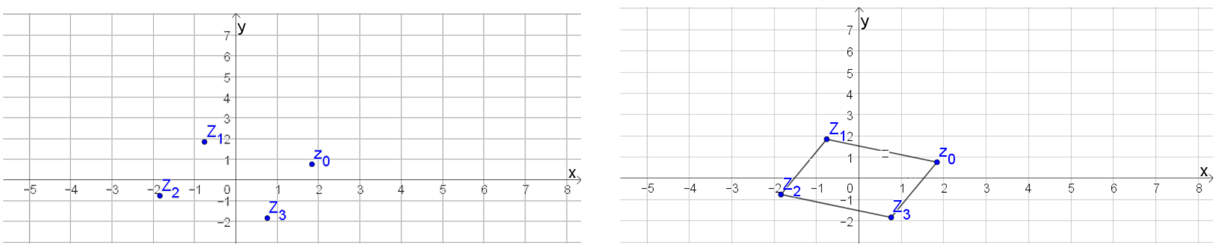
$$\sqrt[4]{16i} = 2\ [cos(9\pi/8) + i\ \ sen(9\pi/8)]$$

$k = 3$

$$\sqrt[4]{16i} = \sqrt[4]{16}\ [cos(\frac{\pi/2 + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{4}) + i\ \ sen(\frac{\pi/2 + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{4})]$$

$$\sqrt[4]{16i} = 2\ [cos(13\pi/8) + i\ \ sen(13\pi/8)].$$

Note a representação das raízes do número z no plano e a figura que forma.



(a) Representação das raízes de z no plano Argand-Gauss.

(b) Forma geometrica das raízes do complexo z

Figura 4.13:

Logo a raiz quarta de um complexo no plano forma um quadrilátero. Portanto isso vai ocorre com todas as raízes em $\mathbb{C}$, isto é para qualquer $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 3$ formará uma figura geométrica, com os vértices nas respectivas raízes.

4.4 Representação da circunferência no Plano Complexo

Neste capítulo, vamos analisar a fórmula de uma circunferência dada no plano complexo. Por exemplo, considere a equação $|z+2|=3$, podemos perceber que $|z+2|$ é a distância entre os dois números z e -2 em $\mathbb{C}$, e tal que este valor é 3. Entretanto, o complexo z não está definido, já o número -2 esta bem determinado em $\mathbb{C}$. Logo podemos então concluir que a distância entre um ponto fixo e um número complexo qualquer é sempre constante, neste caso será 3. Com base nesta situação, percebemos que o lugar geométrico descrita nessa equação dada é uma circunferência de centro em $(-2,0)$ e raio 3. Para obter a equação cartesiana, escrevendo $z=x+yi$, segue que

$$|z+2|=3 \Longrightarrow |x+yi+2| \Longrightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2}=3$$

portanto, $(x+2)^2+y^2=3^2$, isto é, obtemos a equação da circunferência de centro $(-2,0)$ e raio 3. Graficamente temos:

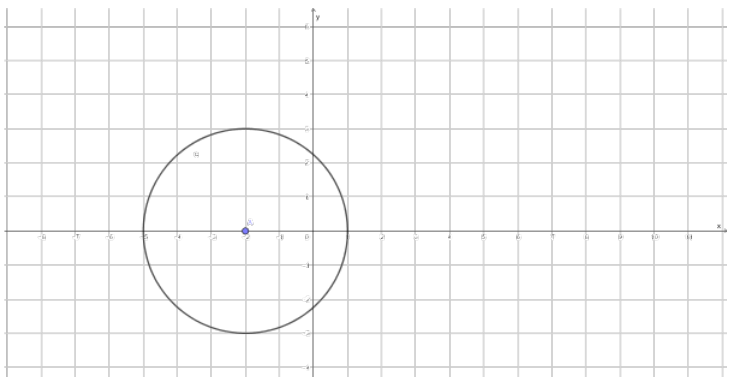


Figura 4.14: Circunferência de centro C:(-2,0) e raio 3

Portanto, generalizando, temos que a região dada por: $z=(z–z_1)=r$, com $z,z_1\in\mathbb{C}, r\in\mathbb{R}$, será o conjuntos dos pontos tais que sua distância ao complexo z_1 será constante e tem valor r. Assim considerando $z=x+yi$ e $z_1=a+bi$, temos

$$|z+z_1|=|(x+yi)+(a+bi)|=|(x+a)+(y+b)i|=r$$

assim

$$\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}=r \Longrightarrow (x+a)^2+(y+b)^2=r^2,$$

que será a equação reduzida de uma circunferência na qual o centro será $C = (-a, -b)$ e o raio será r.

Exemplo 4.10. *Determine o centro das circunferências e represente as no plano Argand - Gauss.*

a) $|z - 2i| = 4$

b) $|z - 1 + i| = 5$

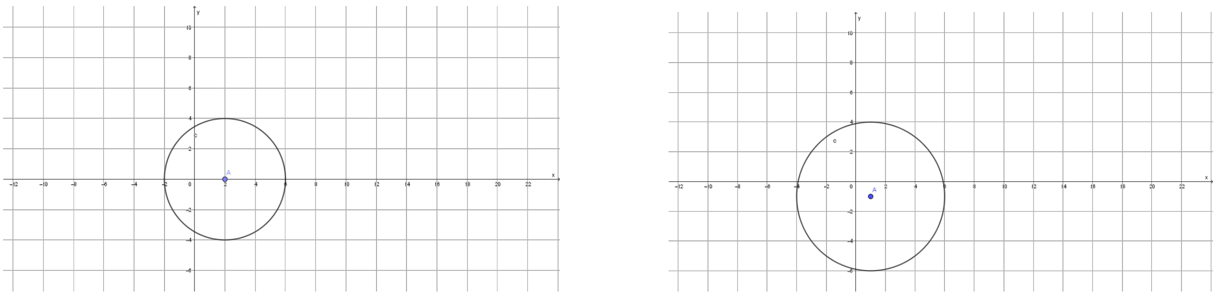
Resolução:item[a)], segue:

$z = |z + z_1| = r \Longrightarrow$ *considerando* $z = x + yi$ *e* $z_1 = -2i$ *temos*

$|x^2 + (y-2)^2 = 4^2 \Longrightarrow C = (0, 2)$ *e* $r = 4$

De modo análoga temos no item [b)] $|(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5^2$ *então o centro será* $C = (1, -1)$ *raio* $r = 5$.

No plano complexo temos:



(a) (b)

Figura 4.15: Exemplo 18

4.5 O Uso de Notação de Complexos para Cálculo de Área de Triângulo

Teorema 4.7. *A área do triângulo ABC cujos vértices tem coordenadas em complexos* z_1, z_2, z_3 *é igual ao valor absoluto do número:*

$$\frac{i}{4} \cdot det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Considere as Coordenadas cartesianas dos vértices do triangulo ABC, tais que, $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, sua área será determinada pela expressão:

$$\text{Área (ABC)} = \frac{1}{2}\, det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere um número complexo $z_k = x_k + y_k i$, com $k \in (1, 2, 3)$, tal que $x_k = \dfrac{z_k + \bar{z}_k}{2}$ e $y_k = \dfrac{z_k - \bar{z}_k}{2i}$.

Assim,

$$\text{Área (ABC)} = \frac{1}{2}\, det \begin{bmatrix} \dfrac{z_1 + \bar{z}_1}{2} & \dfrac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} & 1 \\ \\ \dfrac{z_2 + \bar{z}_2}{2} & \dfrac{z_2 - \bar{z}_2}{2i} & 1 \\ \\ \dfrac{z_3 + \bar{z}_3}{2} & \dfrac{z_3 - \bar{z}_3}{2i} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{4}\, det \begin{bmatrix} z_1 + \bar{z}_1 & z_1 - \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 + \bar{z}_2 & z_2 - \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 + \bar{z}_3 & z_3 - \bar{z}_3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{i}{8} \cdot det \begin{bmatrix} z_1 + \bar{z}_1 & z_1 - \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 + \bar{z}_2 & z_2 - \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 + \bar{z}_3 & z_3 - \bar{z}_3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{i}{8} \cdot 2det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{i}{4} \cdot\ det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{bmatrix},$$

Como queríamos mostrar. □

Lema 4.8. *Se A, B e C, com coordenadas complexas z_1, z_2 e z_3, são vértices de um triângulo ABC, que esta orientado positivamente, então vale a seguinte desigualdade:*

$$\frac{i}{4} \cdot\ det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{bmatrix} > 0$$

Corolário 4.9. *A área de um triângulo ABC, com coordenadas complexas z_1, z_2, z_3, ori-*

entada positivamente, será:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \Im(z)(z_1 \cdot \bar{z_3} + z_2 \cdot \bar{z_1} + z_3 \cdot \bar{z_2}).$$

Demonstração. De acordo com o teorema da área de um triângulo com coordenadas complexas, temos:

$$A_{ABC} = \frac{i}{4} \cdot \ det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z_1} & 1 \\ z_2 & \bar{z_2} & 1 \\ z_3 & \bar{z_3} & 1 \end{bmatrix},$$

$$= \frac{i}{4}(z_1\bar{z_2} + \bar{z_1}z_3 + \bar{z_3}z_2 - z_3\bar{z_2} - z_2\bar{z_1} - z_1\bar{z_3})$$

$$= \frac{1}{4}[(z_1\bar{z_2} + \bar{z_1}z_3 + \bar{z_3}z_2) - (\overline{z_3\bar{z_2} + z_2\bar{z_1} + z_1\bar{z_3})}$$

$$= \frac{1}{4}[2i\Im(z)((z_1\bar{z_2} + \bar{z_1}z_3 + \bar{z_3}z_2)]$$

$$= \frac{1}{4}[-2i\Im(z)(z_2\bar{z_1} + \bar{z_3}z_1 + \bar{z_2}z_3)]$$

$$= \frac{1}{2}(z_1\bar{z_3} + z_2\bar{z_1} + z_3\bar{z_2})$$

Como queríamos mostrar. □

Exemplo 4.11. *Determine a área do triângulo cujo vértices são os pontos* $A = (3, 2), B = (-2, 1)$ *e* $C = (2, -2)$.

Considerando o teorema 4.6, temos:

$z_1 = 3 + 2i, \bar{z_1} = 3 - 2i,\ z_2 = -2 + i, \bar{z_2} = -2 - i$ *e* $z_3 = 2 - 2i, \bar{z_3} = 2 + 2i,$ *assim,*

$$A_{ABC} = \frac{i}{4} \cdot \ det \begin{bmatrix} z_1 & \bar{z_1} & 1 \\ z_2 & \bar{z_2} & 1 \\ z_3 & \bar{z_3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{i}{4} \cdot \ det \begin{bmatrix} 3+2i & 3-2i & 1 \\ -2+i & -2-i & 1 \\ 2-2i & 2+2i & 1 \end{bmatrix}$$

$= (3 + 2i)(-2 - i)1 + (3 - 2i)1(2 - 2i) + 1(2 - 2i)(-2 + i) = -8 - 19i$

$= -[(2 - 2i)(-2 - i)1 + (-2 + i)(3 - 2i)1 + (3 + 2i)1(2 + 2i) = 8 - 19i$

Assim,

$= \frac{i}{4} \cdot [(-8 - 19i) + (8 - 19i)$

$= \dfrac{i}{4} \cdot (-38i)$
$= \dfrac{19}{2}.$
Portanto, a área do triângulo ABC é 9,5 ud (unidade de área).

Considerações finais

Esperamos com esse trabalho ter contribuído, para uma melhor compreensão de conceitos acerca de números complexos, com isso contribuir a resposta dada quando um discente perguntar **Por que estudar isso? ou Onde vou usar isso?**.

Com o desenvolvimento da parte histórica do trabalho, esperamos ter contribuído com a falsa ideia de que os números complexos foram desenvolvido meramente para determinar raízes não positivas (não reais) de equação quadráticas, ideia que é compartilhada por alguns professores e alunos do ensino médio.

Quanto ao ensino do determinado conteúdo no ensino médio, oferece dificuldade para os estudantes que o vê pela primeira vez, geralmente, no último ano do ensino médio e outro fato que podemos destacar é que até chegar ali, o discente vem adquirindo uma base solida sobre números reais, e como o complexo isso muda, com tudo um professor bem embasado sobre o tema vai transpor estas limitações.

Os números complexos permite várias representações, as mais usadas são par ordenados de números reais como foram destacadas neste trabalho, uma outra é a conhecida como forma algébrica " $a+bi$ " com $a, b \in \mathbb{R}$, a mais trabalhada, uma outra que podemos destacar é a forma polar apresentada no capitulo 3.

Quanto a questão primordial buscada, este trabalho, é " **Onde vou usar isso?**", usualmente é dito, em Engenharia Elétrica, Civil, Física, Mecânica de Fluidos, ou seja só em assuntos que serão estudados no ensino superior.

Por fim, acreditamos que este trabalho possa contribuir para um melhor embasamento dos professores de matemática do ensino médio e com as possíveis aplicações de tais números vão além do que é ensinado.

Referências Bibliográficas

Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática, tradução: Elza F. Gomide.* Edgard Blucher - Ed da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Boyer, C. B. and Merzbach, U. (1991). *A history of mathematics.* Third, New Jersey.

Iezzi;, G. and et.al., . (2016). *Matemática, ciências e aplicações.* Saraiva, São Paulo.

Kleiner, I. (2007). *A History of Abstract Algebra.* Birkhauser Boston, Boston.

Lima, E. L. (1991). *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* IMPA/SBM, Rio de Janeiro.

Peruzzo, J. (2013). *Evolução dos Métodos de Resolução de Equações Algébricas.* do Autor, Irani - SC.

Roque., T. (2012). *História da matemática
Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Jorge Zahad, Rio de Janeiro.

Struik, D. J. (1987). *A Concise History of Mathematics.* Dover, New York.

van der Waerden, B. L. (1985). *A History of Algebra.* Springer, Berlin.