Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Rafael Souza Azevedo Oliveira

Atividades lúdicas com triângulos

Rio de Janeiro

2018

Rafael Souza Azevedo Oliveira

Atividades lúdicas com triângulos

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior

Rio de Janeiro

2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

O48 Oliveira, Rafael Souza Azevedo.
Atividades lúdicas com triângulos / Rafael Souza Azevedo Oliveira. – 2018.
101 f. : il.
Orientador: Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.
1. Geometria – Estudo e ensino – Teses. 2. Jogos em educação matemática - Teses. I. Oliveira Junior, Rogerio Luiz Quintino de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.
CDU 514.07

Rinaldo C Magallon *CRB-7/5016 - Bibliotecário responsável pela elaboração da ficha catalográfica.*

Rafael Souza Azevedo Oliveira

Atividades lúdicas com triângulos

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 22 de agosto de 2018.

Banca Examinadora:

Rogerio Luiz Q. de O. Junior

Prof. Dr. Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Cláudia Ferreira Reis Concordido

Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Ana Carolina Carius

Prof.ª Dra. Ana Carolina Carius
Instituto Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2018

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação a todos os professores de Matemática, em especial aos professores da rede pública, que assim como eu se deparam com dificuldades para abordar certos conteúdos de forma lúdica com poucos recursos materiais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a minha família, que sempre me forneceu apoio emocional para esta longa caminhada. Em especial, aos meus pais Paulo e Regina, que sempre estiveram ao meu lado e foram fundamentais para a minha formação.

Agradeço aos meus professores do mestrado que me inspiraram a escolher este tema para o meu trabalho. E também aos meus colegas de turma que compartilharam diversos momentos de aprendizado ao longo do curso que vão além de qualquer livro didático.

Agradeço ao Dr. Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior pela orientação deste trabalho.

Agraceço também à Francisca, que me incentivou ao longo de toda a formulação deste trabalho, além de me ajudar com ideias para a elaboração das atividades propostas. Agradeço a Suziane pela apoio e incentivo nos momentos mais complicados.

O presente trabaho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.

Paulo Freire

RESUMO

OLIVEIRA, Rafael S. A.. *Atividades lúdicas com triângulos.* 2018.101f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional / PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

Os triângulos são estudados na Geometria Euclidiana e as aulas, puramente teóricas, não despertam o interesse dos alunos. O primeiro contato dos alunos com o conteúdo da Geometria sendo de forma apenas teórica desmotiva e faz crescer o mito de que a Matemática é difícil. Usando a metodologia de pesquisa bibliográfica e de campo, e acreditando que atividades e jogos motivam o aprendizado, este trabalho apresenta atividades voltadas ao ensino de triângulos para turmas de sexto ao nono ano do ensino fundamental. Foram elaboradas atividades, algumas das quais foram aplicadas em sala de aula pelo autor em turmas da rede pública, com o intuito de despertar o maior interesse dos alunos pelo assunto, tratando de maneira mais lúdica com apoio de material concreto. Após a realização das atividades, foi observado um maior interesse dos alunos, que passaram a participar mais das aulas, sem o medo de cometer erros e encarando os assuntos que antes eram ditos chatos e difíceis como desafios, o que gerou uma maior autonomia dos mesmos.

Palavras-chave: O lúdico na Matemática. Jogos matemáticos. Atividades com triângulos. Atividades na Geometria Euclidiana.

ABSTRACT

OLIVEIRA, Rafael S. A.. *Atividades lúdicas com triângulos*. 2018.101f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional / PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

Triangles are studied in Euclidean geometry and classes, purely theoretical, do not arouse students' interest. The first contact of students with the content of geometry being only theoretically demotivates and grows the myth that mathematics is difficult. Using the methodology of bibliographical and field research, and believing that activities and games motivate learning, this work presents activities aimed at teaching triangles for classes from sixth to ninth grade of elementary school. Activities were developed, some of which were applied in the classroom by the author in classes of the public network, in order to arouse the students' greatest interest in the subject, treating in a more playful way with the support of concrete material. After the activities were carried out, there was a greater interest of the students, who started to participate more in the classes, without the fear of making mistakes and facing the subjects that were once said boring and difficult as challenges, which generated a greater autonomy of the same ones.

Keywords: The ludic in Mathematics. Mathematical games. Activities with triangles. Activities in Euclidean Geometry.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No que diz respeito à Geometria, as disciplinas encontradas na grade curricular do curso de Matemática no ensino superior possuem uma carga horária que parece não atender à demanda da formação dos professores de ensino básico. Com excessão da Geometria Analítica, que possui uma disciplina separada, a ementa de Geometria mostra que o conteúdo de Geometria Plana, Geometria Espacial, Geometria Métrica e Geometria Analítica presentes, acabam tendo seus conteúdos diluídos em uma mesma disciplina de prática de ensino. Assim como Lima (2014) observa, tomando como base instituições de Ensino Superior do Estado de São Paulo, “os professores precisam aprender estratégias eficientes sobre como ensinar e as instituições que oferecem a prática de ensino ajudam o professor a desenvolver habilidades necessárias que vão além do conteúdo”. Entretanto, as práticas de ensino costumam ser disciplinas com pouca carga horária, o que gera uma insuficiência no que parece ser necessário à formação do professor. As carências na formação dos docentes tornam evidente que diversos professores que atuam no ensino fundamental não possuem o domínio do conteúdo de Geometria e, mesmo para aqueles que o possuem, não há garantia de uma boa aula. Assim, os primeiros contatos com a Geometria proporcionados ao aluno ficam comprometidos, além desta disciplina acabar sendo preterida pelo professor, que dá mais importância a outras áreas da Matemática. A propagação do desinteresse sobre a Geometria acaba acontecendo naturalmente e os conteúdos de Geometria estudados nas escolas se enxugam cada vez mais.

Segundo Silveira (2002), em um estudo junto a professores de Matemática, estes identificam na voz do aluno que ela é considerada chata e misteriosa, que assusta e causa pavor, e, por consequência, o aluno sente medo da sua dificuldade e vergonha por não aprendê-la. Como resultado de tantos sentimentos ruins que esta disciplina proporciona ao aluno, somado ao bloqueio em não dominar sua linguagem e não ter acesso ao seu conhecimento, vem o sentimento de ódio pela Matemática. Ódio, porque ela é difícil!

Com o pouco contato de Geometria dos professores e o pavor que a Matemática causa nos alunos, a Geometria é tida como algo muito difícil de ser ensinado e aprendido... Mas não é bem assim. A Geometria Euclidiana bidimensional ou Geometria Plana costuma ser o ponto inicial no estudo da Geometria, e as figuras geométricas despertam o interesse dos alunos pois são facilmente associadas a construções e elementos da natureza, ou seja, estão presentes no dia a dia do aluno.

Considerando isso, foram escolhidas as figuras geométricas como o assunto da Geometria que será abordado nesta dissertação por ser um tema que sofre menos resistência por parte dos alunos, já que os conceitos podem ser relacionados a suas experiências. Dentre as figuras geométricas temos os triângulos, as figuras mais básicas, que facilmente podem ser usados, através de uma composição dos mesmos, para montar outras diversas figuras geométricas. Com isso, o triângulo é o foco principal deste trabalho, pois estudando os triângulos aprendemos propriedades que podem ser também utilizadas em outras figuras.

O objetivo deste trabalho é propor e aplicar uma sequência de atividades para o estudo dos triângulos centrada em uma ideia lúdica, desenvolvendo o raciocínio lógico do aluno. Para isso, fez-se uma pesquisa bibliográfica ampla e, posteriormente, uma pesquisa de campo.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: no capítulo 1, intitulado “O lúdico na sala de aula”, aborda-se a importância das atividades lúdicas na construção do conhecimento tendo como base autores da área pedagógica. No capítulo 2, “A importância dos triângulos na Geometria Euclidiana”, a ideia é falar da contribuição dos gregos ao seu estudo, dentre eles Euclides, citar definições que usam triângulos e colocar o triângulo como um elemento importante no embasamento axiomático da Geometria dita Euclidiana. No capítulo 3, “Teoria de Van Hiele”, apresenta-se a proposta metodológica dos autores citados que nortearam a construção das atividades pedagógicas. No capítulo 4, “Elementos e propriedades”, apresentam-se algumas definições de elementos e demonstrações de propriedades que serão destacadas nas atividades do capítulo seguinte. Finalmente, no capítulo 5, “Atividades”, há propostas de atividades lúdicas com triângulos que foram realizadas em duas escolas municipais da cidade do Rio de Janeiro com alunos de ensino fundamental II no período de 02/03/2017 a 02/05/2018. As atividades visam que os alunos desenvolvam os conceitos sobre triângulos, mas também utiliza-se destes para ensinar outros assuntos, como por exemplo, potência através do triângulo de Sierpinski.

Levanta-se um questionamento, para o qual tenta-se obter uma resposta no final deste trabalho: “as atividades lúdicas facilitam a compreensão dos conteúdos e podem ser uma alternativa pedagógica utilizada dentro do cotidiano da prática da sala de aula?”

1 O LÚDICO NA SALA DE AULA

Os professores têm encontrado muita dificuldade para transmitir o conteúdo para seus alunos (BÖHM, 2015). O uso de atividades lúdicas em sala de aula têm sido um assunto de ampla discussão entre os professores de todas as disciplinas escolares como busca por uma metodologia que alcance efetivamente os objetivos em sala de aula.

A palavra lúdico tem diferentes interpretações, de acordo com o período histórico que levamos em consideração e, quando se procura pela origem da palavra, podemos notar o porquê de existir diferentes interpretações. A origem da palavra é do latim *LUDOS*, que remete para divertimento e jogos. Para alunos até o primeiro segmento, ou seja, alunos até o 5º ano, as atividades lúdicas são vistas como brincadeiras que auxiliam a memorizar fatos e favorecem testes cognitivos. Massa (2015) realiza uma síntese entre o modelo de ludicidade abordado por Lopes (2014) e o lúdico como estado de consciência abordado por Luckesi (2002), no que diz respeito ao termo atividade lúdica: “... denominamos Atividade Lúdica as atividades que utilizam o lúdico apenas como instrumental ...”. Massa segue a mesma linha de raciocínio de Lopes no que diz respeito ao termo atividade lúdica. Para estes autores, a atividade lúdica está relacionada com uma recreação, onde o objetivo das atividades lúdicas seriam puramente a busca por um preenchimento do tempo livre com brincadeiras ou jogos sem fins didáticos.

Contrapondo a essa ideia, para Luckesi (2002), o que é lúdico para uma pessoa pode não ser para outra. No que diz respeito ao termo atividades lúdicas, para Luckesi, o lúdico não está na atividade, mas sim em como o indivíduo vivencia aquela atividade, o que determina se a vivência será lúdica ou não. Quando se trata de alunos a partir do segundo segmento, ou seja, alunos a partir do 6º ano, determinadas atividades ou jogos que desafiam o aluno e geram uma construção de raciocínio para chegar em um determinado resultado podem gerar no mesmo o sentimento de prazer e conquista e assim, chamaremos essa atividade de atividade lúdica, mesmo que com um fim didático.

As atividades lúdicas muitas vezes são utilizadas como forma de complementação à aula tradicional, visando uma melhor fixação do conteúdo. Entretanto, os professores encontram obstáculos para aplicar esse tipo de metodologia em sala de aula. Dentre eles podemos destacar a falta de preparo, falta de material, dificuldade de controle da turma, infraestrutura, entre outros.

Deve-se observar que a utilização de jogos e atividades na sala de aula requer do professor um planejamento prévio, estando sempre atento ao público alvo que se deseja atingir e levando em consideração a idade, os conhecimentos adquiridos, a cultura, o meio social no qual o aluno se encontra, entre outros aspectos. Assim como Piaget (1998) afirma, os jogos são essenciais à vida das crianças: eles fazem parte de seu desenvolvimento. Segundo Vygotsky (1989 e 1998), o desenvolvimento ocorre ao longo da vida do indivíduo e de maneira interativa com o ambiente, levando em consideração principalmente as relações sociais estabelecidas e o lúdico tem papel fundamental neste desenvolvimento, pois é através dele que a criança desperta curiosidade e é estimulada a agir. Além disso, Vygotsky também coloca em pauta o papel do professor no desenvolvimento do aluno, tendo o professor o papel fundamental de assistir o aluno lhe proporcionando apoio para que ele seja capaz de exercer seu conhecimento melhor do que se não tivesse ajuda.

Os jogos são vistos como um importante meio educacional, já que eles são responsáveis pelo desenvolvimento integral, dinâmico e social de várias áreas do cérebro, como a cognição, o afeto, a fala, a formação social, além de contribuir para a construção do sujeito como um todo, dando-lhe autonomia, responsabilidade e fazendo-o trabalhar em equipe (MORATORI, 2003).

Na disciplina de Matemática, tanto professores quanto alunos encontram dificuldades no ensino-aprendizagem. Por vezes, os alunos não conseguem compreender a Matemática e, quando conseguem, não enxergam nenhuma utilização prática em seu cotidiano (FIORENTINI & MIORIM, 1990). O professor, quando se depara com a dificuldade de seus alunos e percebe que não conseguiu atingir o seu objetivo, deve buscar métodos alternativos de ensino, dentre eles as atividades lúdicas.

É importante para o professor de Matemática elaborar atividades que tenham como objetivo principal estimular, nas crianças, a construção de esquemas de raciocínio lógico-matemático, de forma a tornar a atividade escolar menos enfadonha e mais enriquecedora.

No presente trabalho, considera-se, portanto, que as atividades propostas possuem um fim pedagógico previamente planejado. Não são apenas brincadeiras para preencher um tempo vazio, mas, por estimularem a criatividade e terem o auxílio de objetos concretos, com um caráter semelhante ao jogo que gera experiências e tentativas, são capazes de estimular a consciência lúdica, fazendo com que o aluno aprenda com naturalidade e de forma mais leve.

2 A IMPORTÂNCIA DOS TRIÂNGULOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA E O APARECIMENTO DE FIGURAS TRIANGULARES NA CONSTRUÇÃO

Geometria é uma palavra de origem grega que significa medição de terra. De acordo com Roque e Pitombeira (2012), uma das hipóteses do surgimento da Geometria está presente nos escritos de Heródoto.

> [Quando das inundações do Nilo,] o rei Sésostris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos. Aí está, creio eu, a origem da Geometria que migrou, mais tarde, para a Grécia. (Heródoto, Oeuvres complètes II 109, p.183).

Desse modo, junto com o crescimento da agricultura, tornou-se necessário que as divisões de terra fossem realizadas corretamente evitando conflitos pela posse do território. Assim, as medidas geométricas passaram a ter uma importância na construção das relações sociais da época.

A Geometria utilizada pelos povos babilônios e egípcios era basicamente voltada para cálculos onde eram utilizadas propriedades geométricas de figuras planas e sólidos geométricos, mas não se tem documentação confiável que possibilite verificar como estes povos chegavam aos resultados geométricos.

Inicialmente, a Geometria possuia aplicações práticas, sem a necessidade de demonstrações. Segundo Eves (2011), deve-se creditar a Tales de Mileto as primeiras deduções sistemáticas por volta de 600 a.c.. Dizemos portanto que com Tales de Milete deu-se início ao processo de transição da Geometria, e cronologicamente, passou por Pitágoras, as ideias de Platão, até chegar em Euclides e a Geometria Euclidiana. Euclides de Alexandria, matemático grego dos séculos IV e III a.C., e um dos mais importantes da antiguidade. O tratado dos Elementos foi a sua maior contribuição para a ciência em geral, pois foi a primeira obra em que o conhecimento matemático parte de um sistema lógico e dedutivo bem definido. Sendo assim, a Geometria Euclidiana apresenta uma Geometria lógico-dedutiva e utiliza-se de demonstrações com figuras geométricas. Este modelo de Geometria é o que encontramos até hoje nas escolas.

No livro Os elementos de Euclides, podemos encontrar algumas definições:

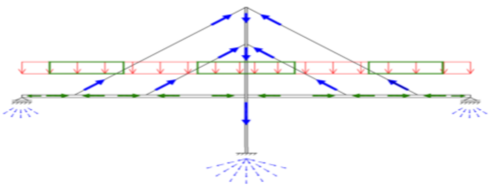
> 19. Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas.
> 20. E, das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem três lados desiguais.
> 21. E, ainda as figuras triláteras, por um lado, triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem os três ângulos agudos. (EUCLIDES, 2009, p.98).

Essas três definições acima, fazem parte de um grupo de 23 definições encontradas inicialmente no livro I de Os Elementos de Euclides.

Comparando a Geometria dos egípcios e a dos gregos quanto aos triângulos, vemos que os egípcios não eram tão rigorosos em provas e demonstrações quanto eram em outras áreas da Matemática, estando interessados na prática e não na Trigonometria pura. Já os gregos foram responsáveis pelo desenvolvimento da Trigonometria, destacando portanto o estudo dos triângulos, preocupando-se mais com a parte teórica. A Trigonometria não estava nos estudos de Euclides no sentido estrito da palavra, porém seu trabalho apresenta teoremas que são análogos a leis ou fórmulas trigonométricas.

Podemos dizer que os triângulos, por serem das figuras geométricas mais simples, tiveram um papel importantíssimo no desenvolvimento do raciocínio lógico e dedutivo da Geometria. Além disso, existem inúmeras aplicações de construções que usam triângulos como base. Por exemplo, as pontes estaiadas. De acordo com Vargas (2007), a ideia da ponte estaiada surgiu como uma alternativa para substituir os pilares que serviam de apoios intermediários para o tabuleiro por cabos inclinados e ancorados em um pilão. Consequentemente, o vão poderia ser prolongado a distâncias maiores. A forma estrutural básica da ponte estaiada é uma série de triângulos sobrepostos constituídos de pilão, estais e tabuleiro, como mostra a Figura 1. Existem pontes famosas pelo mundo que usam este tipo de construção que remetem a triângulos, como por exemplo o viaduto de Millau (Figura 2), localizado no sudoeste da França.

Figura 1- Conceito de Ponte Estaiada – caminho das cargas.



Fonte: VARGAS, 2007.

Figura 2 – Viaduto de Millau.

Fonte: Imagem disponível em <https://www.tecmundo.com.br/imagens/2012/4/materias/337556510282719-o.jpg>. Data de acesso: 02/05/2018.

Procurando descobrir o que faz com que uma determinada estrutura tenha sustentabilidade para não cair, chega-se às técnicas de treliças e tesouras, que independente do grau de complexibilidade, nos remetem a triângulos e a sua característica de rigidez.

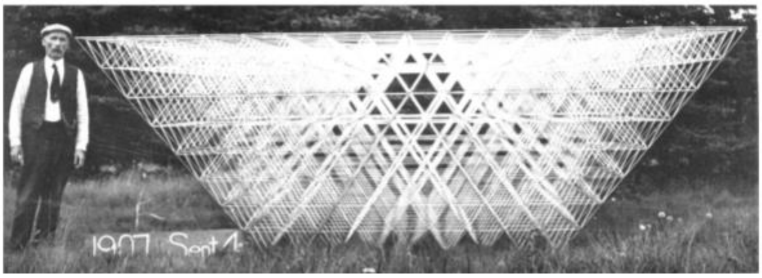
As primeiras aplicações de estruturas espaciais foram em cúpulas. Na antiguidade, estas eram construídas de pedras naturais, sendo a madeira somente utilizada a partir da Idade Média (séculos V a XV). As primeiras estruturas reticuladas surgiram na França e na Alemanha nos séculos XVIII e XIX (MAGALHÃES & MALITE, 1998).

O uso do aço nestas estruturas tem como primeiro registro uma cúpula construída no ano de 1811 por Bellange e Brunet. As abóbadas em aço surgem apenas em 1892 com Floppl (MAKOWSKI, 1968? apud MAGALHÃES e MALITE, 1998).

O primeiro protótipo de estruturas tridimensionais pré-fabricadas foi feito por Alexander Graham Bell, o famoso inventor do telefone que, em 1906, juntamente com alguns colegas, fundou a “Aerial Experiment Association” para tentar construir kits de torres e biplanos de estruturas tridimensionais pré-fabricadas. Bell construiu vários protótipos destas estruturas com barras de mesmo comprimento ligadas por nós bastante simples e padronizados. Ele referiu-se a estas estruturas como de “extraordinária resistência”. Foi ele, provavelmente, o primeiro engenheiro a mostrar como se podem fabricar estruturas simples, leves e resistentes, dando-se atenção especial à possibilidade de redução de custos com a sua industrialização (MAKOWSKI, 1968? apud MAGALHÃES & MALITE, 1998).

Na Figura 3, podemos observar uma foto de Graham Bell com um de seus protótipos.

Figura 3 – Graham Bell e seu protótipo.



Fonte: MAGALHÃES; MALITE, 1998.

É muito comum as pessoas associarem as pirâmides do Egito a triângulos (Figura 3). Podemos encontrar os triângulos em placas de trânsitos (Figura 4), ou até mesmo na natureza quando observamos um pinheiro de natal.

Figura 4 - Placa de trânsito “Dê a preferência”.

Fonte: Imagem disponível em<http://www.sfnoticias.com .br/de-quem-e-a-preferencia> Data de acesso: 20/0 4/2018.

Figura 5 - Pirâmides do Egito.

Fonte: Imagem disponível em: <https://abrilmundoestranho.files.wordpress.com/2016/08/569 002c382bee110460a5babpiramides-face.jpeg?quality=70&strip=all&strip=info> Data de acesso: 20/04/2018.

Além da sua importância nas construções principalmente pela sua característica de rigidez, o triângulo é um símbolo que possui inúmeras interpretações e crenças. Por exemplo, nas culturas cristã, hindu, egípcia e babilônica, o triângulo pode ser visto como o símbolo da trindade dos deuses.

3 TEORIA DE VAN HIELE

Segundo Passos (2015, apud FUYS; GEDDES; TISCHLER, 1988), no período entre as décadas de 1930 e 1950, muitos professores de ensino médio relatavam a dificuldade que os alunos encontravam para realizarem provas formais na geometria. Estes relatos motivaram alguns educadores e psicólogos soviéticos a estudarem o aprendizado da geometria, na tentativa de responder quais seriam as causas paara as dificuldades dos alunos em realizarem provas formais em geometria.

Pierre Marie Van Hiele, educador holandês, foi um dos educadores que chamou a atenção dos soviéticos, influenciando diretamente no desenvolvimento do estudo da aprendizagem da geometria, a ponto dos soviéticos reverem o currículo de geometria baseados nos níveis de Van Hiele.

De acordo com Passos (2015), no que diz respeito a vida de Pierre Marie Van Hiele, ele nasceu em 1909 na cidade de Amsterdan e 24 anos depois, concluiu a graduação. No período de 1939 a 1951, P.M. Van Hiele teve sua experiência como professor de Matemática e a partir de 1951, quando tornou-se uma espécie de orientador individual, viu a necessidade de aprimorar o conhecimento didático na matemática, e em especial, interessou-se pela aprendizagem da geometria. Ele e sua esposa, Dina (Dieke) Van Hiele-Geldof, concluíram no mesmo ano as suas teses de doutorado que se complementavam e posteriormente deram origem ao que chamamos de Teoria de Van Hiele.

Van-Hiele (1984) criou um modelo de aprendizagem baseado em níveis de desenvolvimento mental relacionados à Geometria que possui 5 níveis: visualização ou reconhecimento, análise, dedução informal ou classificação, dedução formal e rigor. Cada nível tem características próprias que serão descritas a seguir.

- Nível 1 – Visualização ou reconhecimento: O aluno identifica as figuras associando-as a formas do seu cotidiano, como por exemplo a forma geométrica de um losango a uma pipa, não realizando correspondência com as propriedades matemáticas da figura. Há necessidade do material concreto como referência.
- Nível 2 – Análise: O aluno passa a realizar a correspondência entre a imagem da figura e suas propriedades. Já consegue perceber as características, mas ainda necessita do material concreto e da intervenção direta do professor como um apoio,

como por exemplo, consegue identificar a altura relativa a uma determinada base visualizando o triângulo em uma malha quadriculada, mesmo que este ainda não tenha compreendido como traçar uma altura.

- Nível 3 – Dedução informal: Em um primeiro momento há uma dedução informal ou classificação. O aluno entende as relações abstratas entre as figuras e a seguir consegue realizar as deduções com o auxílio do professor. Como exemplo, o aluno através de experimentos consegue chegar a conclusão da condição de existência de um triângulo, utilizando suas próprias palavras.
- Nível 4 – Dedução formal: Nesta fase, há percepção das propriedades a partir de observações, possibilitando que o aluno consiga fazer as demonstrações e chegue a uma fórmula matemática. Como exemplo, neste nível o aluno é capaz de demonstrar algumas das propriedades dos triângulos e quadriláteros utilizando congruência.
- Nível 5 – Rigor: Há um grande nível de abstração em que não há mais necessidade do uso do material concreto e o aluno não precisa de uma intervenção direta do professor. Neste nível a abstração é indispensável. O aluno já identifica que propriedades ele poderá utilizar na resolução dos problemas. Enquanto nos níveis iniciais era necessário o uso do concreto e o aluno baseava-se na intuição, neste nível, com a abstração, o aluno possui um conhecimento prévio, sendo capaz de inventar métodos genéricos para resolução do problema.

O estudo de Van Hiele sugere que o aprendizado é um processo descontínuo e que existem saltos no processo, e esses saltos determinam os diferentes níveis. Esses diferentes níveis justificam o insucesso do professor em determinadas explicações em que o professor utiliza um tipo de linguagem de um nível que os alunos ainda não atingiram. Os alunos aceitam as explicações do professor, mas o assunto estudado não é absorvido por eles. Muitos alunos até podem conseguir imitar determinadas ações, mas não entendem o que realmente estão fazendo até que alcancem o nível exigido pelo professor. Assim, a barreira da linguagem é um ponto que os níveis de Van Hiele levam em consideração. O aluno não aprende se o professor apresenta uma aula com uma linguagem de um nível que não é o seu.

É possível que determinados métodos de ensino não permitam que os alunos progridam de nível. Estes tipos de métodos fazem com que os níveis seguintes permaneçam inacessíveis para os mesmos. Por exemplo, quando o professor realiza a demonstração de um determinado teorema sem que o aluno tenha as ferramentas necessárias para compreender as etapas da resolução e acaba apenas copiando e gravando o resultado final. Desta forma, o aluno não consegue desenvolver as habilidades que deveria em um determinado nível, tendo assim um aprendizado reduzido.

O progresso de um nível para outro é mais dependente da experiência instrucional do que a idade ou maturidade.

De acordo com Van Hiele (1984), o progresso de um nível para o outro envolve 5 fases: informação, orientação direta, explicitação, orientação livre e integração. Essas fases de aprendizagem são aproximadamente, mas não estritamente sequencial.

- Fase de informação - Nesta fase, o professor e os alunos estabelecem um diálogo versando sobre o material de estudo deste nível. São feitas observações, questões não levantadas e é introduzido o vocabulário específico do nível. O propósito desta fase é que o professor tenha informação dos conhecimentos prévios dos alunos e que os alunos aprendam que direção seguirá o estudo.
- Fase de orientação direta - Nesta fase, os alunos devem ser guiados por meio de atividades e problemas para que possam descobrir e apreender os componentes, propriedades e relações básicas dos objetos de estudo. O professor deve selecionar cuidadosamente estas atividades, orientando os alunos para a solução quando seja necessário.
- Fase de explicitação - Nesta fase, com base nas experiências anteriores, os alunos devem expressar verbalmente ou por escrito os resultados obtidos, trocar experiências e discutir sobre elas com o professor.
- Fase de orientação livre - Nesta fase o professor deve propor ao aluno problemas mais complexos, que não sejam de aplicação simples de um dado ou algoritmo conhecido. O professor deve limitar ao máximo a sua ajuda nos problemas, estimulando a independência dos alunos, que devem consolidar a aprendizagem realizada nas fases prévias.
- Fase de integração – Nesta fase os alunos revisam e sintetizam o que aprenderam nas fases anteriores, com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações. O professor pode ajudar nesta síntese, fornecendo um resumo global sobre o que os alunos aprenderam. Entretanto, é importante que estes resumos não apresentem novos conhecimentos. No final desta fase, é importante que os

> alunos consigam progressar ao seguinte nível de raciocínio. Os estudantes devem ser orientados a repetir as fases de aprendizagem neste novo nível.

As atividades criadas para esta dissertação, juntamente com as folhas contendo orientações para a realização da atividade e perguntas para serem respondidas, foram construídas baseadas nos cinco níveis da teoria de Van Hiele. A ideia é fazer com que o aluno avance gradualmente os conceitos estudados, obedecendo certas etapas que seguem um padrão do mais simples para o mais complexo. A ideia do lúdico atende bem para que, mesmo quando trabalhado um assunto de total desconhecimento do aluno, o mesmo possa atingir os níveis 1 e 2 manipulando o material concreto. As folhas com perguntas atuam para o direciomento da observação do aluno, onde o professor através delas chama a atenção do aluno para que sejam analisadas certas características com o auxílio do material concreto. O nível 3 é atingido quando o aluno consegue fazer uma dedução informal, ou seja, quando as observações anteriores são suficientes para que ele consiga responder uma pergunta com suas palavras ou fazer algum tipo de classificação a partir do que tinha observado e analisado anteriormente. As atividades visam que todos os alunos sejam capazes de chegar ao menos até este nível. O nível 4 já exige uma abstração maior e espera-se que parte dos alunos consiga chegar neste nível. O nível 5 é o nível do rigor, e por se tratar de atividades voltadas para o ensino fundamental, principalmente para alunos que apresentam grande dificuldade, não espera-se atingir este nível.

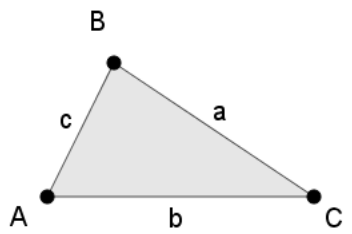
4 **ELEMENTOS E PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO**

Devido à experiência diária, quando falamos em ponto, reta ou plano, podemos assumir essas noções como conceitos primitivos. Os triângulos possuem alguns elementos gerais.

4.1 **Definições**

- Lados:. O lado também pode ser chamado de segmento, onde o segmento AB é uma porção de uma reta que fica situada entre os pontos A e B. Os lados de um triângulo podem ser associados a tiras, pedaços de retas ou linhas retas, que se conectam pelos extremos. Um triângulo possui 3 lados. Na Figura 6, tem-se um triângulo de lados AB, BC e CA. É comum associarmos cada lado a letras minúsculas a, b e c, de acordo com o nome do ponto oposto ao lado (vértice).

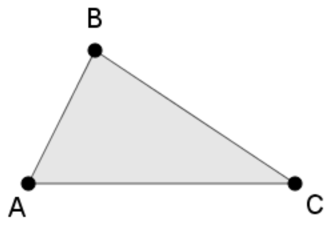
Figura 6 – Lados do triângulo.



Fonte: O autor, 2018.

- Vértices: nos triângulos, o vértice é o ponto comum de dois lados. Assim, temos que os triângulos possuem 3 vértices. Abaixo, na Figura 7, vemos os vértices A, B e C que, por pertencerem a um triângulo, possuem a característica de serem pontos não colineares.

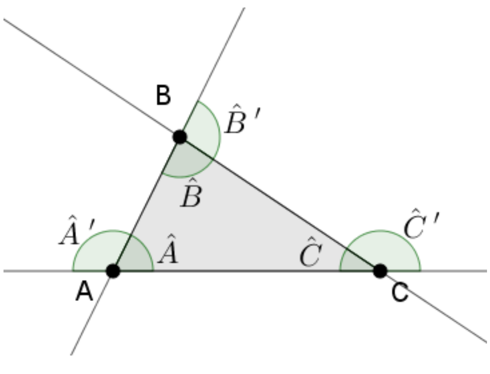
Figura 7 – Vértices do triângulo.



Fonte: O autor, 2018.

- Ângulos internos e externos: os ângulos internos são 3. Podemos entender como ângulos internos as mudanças de inclinação dos lados quando se encontram no vértice. Os ângulos internos possuem uma propriedade importante: a soma dos 3 ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180º que será provada mais adiante. O ângulos externo, como o nome diz, é um ângulo do lado de fora do triângulo que aparece quando prolongamos um dos lados que determinam o ângulo interno. Na Figura 8, temos os ângulos internos $\hat{A}, \hat{B}\ e\ \hat{C}$ e os ângulos externos $\widehat{A'}, \widehat{B'}\ e\ \widehat{C'}$ de um triângulo respectivos. A soma de um ângulo interno com seu ângulo externo adjacente é 180º.

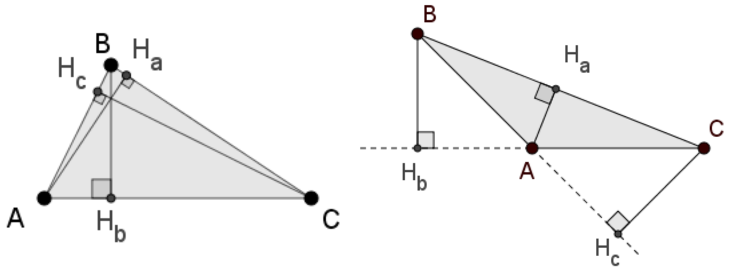
Figura 8 – Ângulos internos e externos do triângulo.



Fonte: O autor, 2018.

- Altura (Pé da altura): para traçarmos a altura do triângulo, devemos escolher um dos lados do triângulo como base. A altura é um segmento perpendicular à base, ou seja, o segmento forma um ângulo de 90º com a base ou com a reta que contém a base, indo até o ponto mais alto do triângulo que é o vértice oposto. Assim, temos 3 alturas em um triângulo: uma altura referente a cada lado. O ponto sobre a base pertencente a altura é chamado pé da altura (Figura 9).

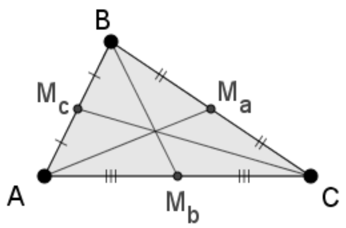
Figura 9 – Alturas de um triângulo.



Fonte: O autor, 2018.

- Mediana: é o segmento de reta que liga um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a este vértice. Assim, existem três medianas em um triângulo (Figura 10).

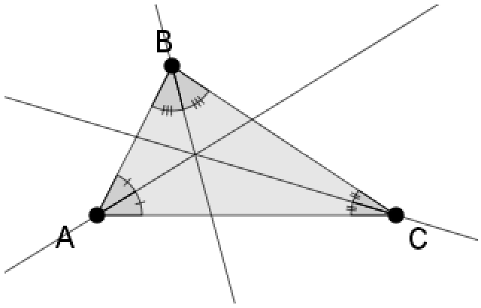
Figura 10 – Medianas de um triângulo.



Fonte: O autor, 2018.

- Bissetriz: as bissetrizes são retas que dividem ângulos na metade. No caso das bissetrizes de um triângulo, entenderemos como bissetrizes as retas que dividem os ângulos internos na metade. Assim, temos três bissetrizes internas em um triângulo (Figura 11).

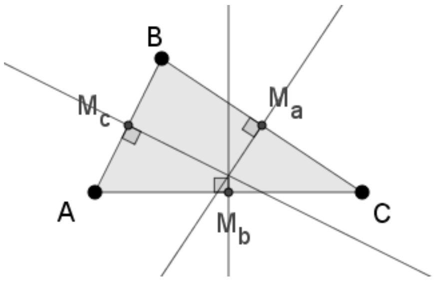
Figura 11 – Bissetrizes de um triângulo.



Fonte: O autor, 2018.

- Mediatriz: a mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a este segmento que determina o ponto médio do mesmo. Existe uma mediatriz para cada lado do triângulo.

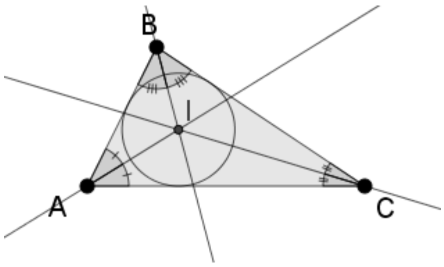
Figura 12 – Mediatrizes de um triângulo.



Fonte: O autor, 2018.

- Incentro: é o ponto I de interseção entre as bissetrizes do triângulo. Ele é o centro da circunferência inscrita ao triângulo, que é aquela que está contida no triângulo e tangencia seus lados (Figura 13).

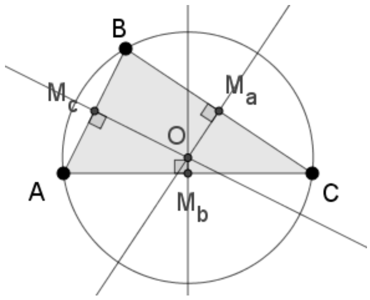
Figura 13 – Incentro de um triângulo.



Fonte: O autor, 2018.

- Circuncentro: é o ponto de interseção entre as mediatrizes do triângulo. Ele é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, que é aquela que contém o triângulo e passa pelos seus três vértices (Figura 14).

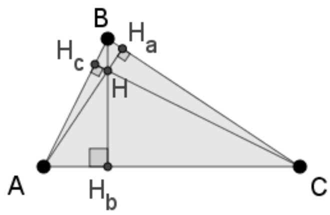
Figura 14 – Circuncentro de um triângulo.



Fonte: O autor, 2018.

- Ortocentro: é o ponto H de interseção entre as alturas do triângulo.

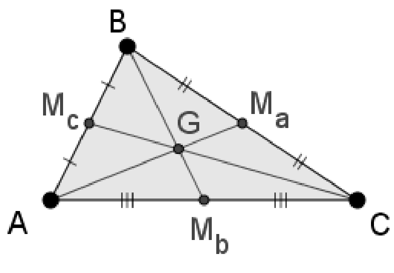
Figura 15 – Ortocentro de um triângulo.



Fonte: O autor, 2018.

- Baricentro: é o ponto G de interseção entre as medianas de um triângulo. Também é chamado de centro de gravidade do triângulo (Figura 16).

Figura 16 – Baricentro de um triângulo.

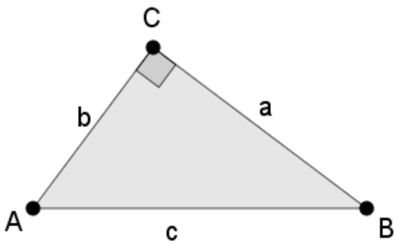


Fonte: O autor, 2018.

4.2 **Elementos de um triângulo retângulo**

- Ângulo reto: No triângulo retângulo, temos que um dos ângulos internos tem medida igual a 90º (Figura 17).

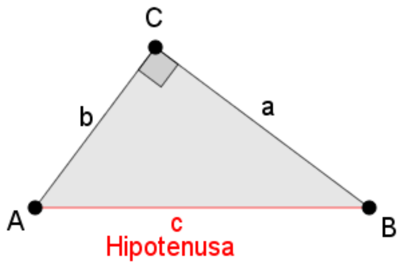
Figura 17 – Triângulo retângulo e ângulo de 90º.



Fonte: O autor, 2018.

- Hipotenusa: é o nome dado ao lado do triângulo que é oposto ao ângulo reto (Figura 18).

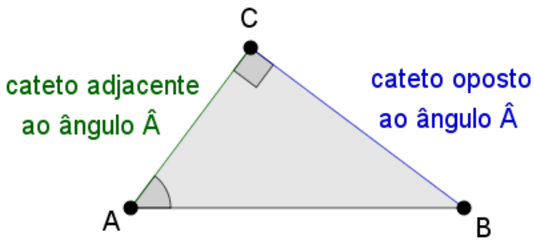
Figura 18 – Hipotenusa do triângulo retângulo.



Fonte: O autor, 2018.

- Cateto oposto e cateto adjacente: o cateto oposto a um dos ângulos do triângulo é o nome dado ao lado oposto ao vértice deste ângulo, e o cateto adjacente é o nome dado ao lado que forma este ângulo juntamente com a hipotenusa (Figura 19).

Figura 19 – Catetos do triângulo retângulo.



Fonte: O autor, 2018.

4.3 **Propriedades dos triângulos**

4.3.1 Condição de existência do triângulo

Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo, ou seja, números reais positivos. A condição de existência de um triângulo nos dá uma relação entre os tamanhos do triângulo: para que exista tal triângulo, devemos ter

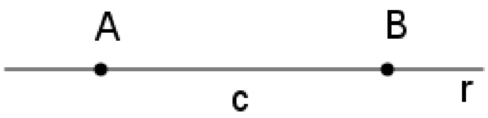
$$a + b > c \quad ; \quad a + c > b \quad \text{e} \quad b + c > a.$$

Demonstração:

A condição de existência nos diz que a soma de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que a medida do terceiro lado.

Sejam A e B dois pontos sobre uma reta r. Tomemos a distância entre os pontos A e B como sendo $\overline{AB} = c$. (Veja Figura 20)

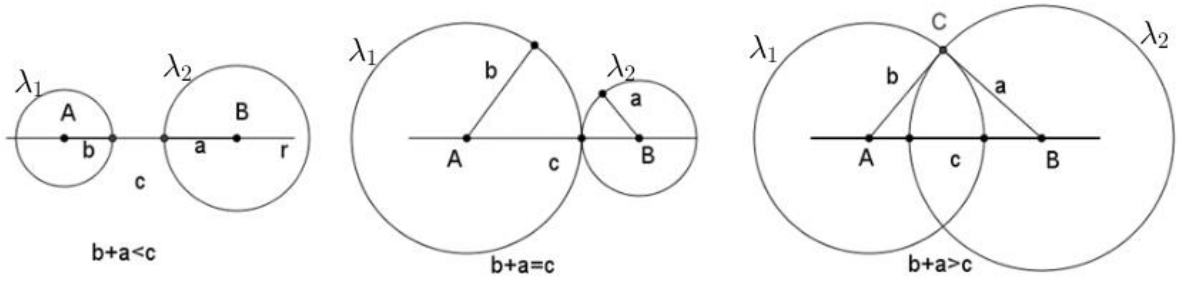
Figura 20 – Segmento $\overline{AB} = c$.



Fonte: O autor, 2018.

Consideremos duas circunferências λ_1 de raio b e centro em A e λ_2 de raio a e centro em B (Figura 21).

Figura 21 – Condição de existência de um triângulo.



Fonte: O autor, 2018.

Como $a + b > c$, as duas circunferências se intersectam em dois pontos. Seja C um dos pontos de interseção. Conseguimos, então, formar um triângulo ABC de lados medindo a, b e c. ■

4.3.2 Soma dos ângulos internos em um triângulo qualquer

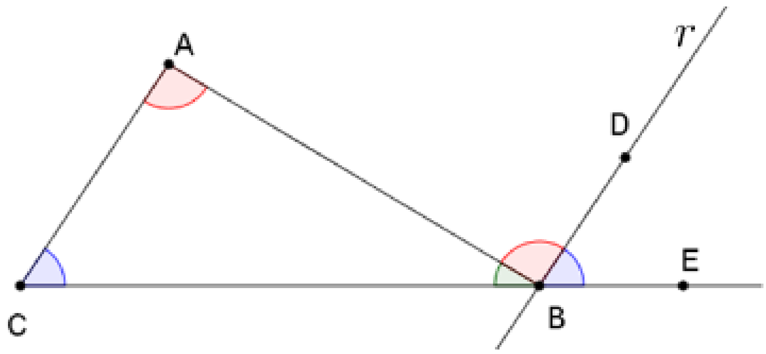
A soma das medidas dos ângulos internos é sempre igual a 180º, isto é, se $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são as medidas dos ângulos internos do triângulo, então

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°.$$

Demonstração:

Após construirmos um triângulo ABC qualquer, podemos traçar uma reta r passando por B paralela ao lado AC (Figura 22). Seja D um outro ponto sobre r. Temos que $A\widehat{B}D = \widehat{A}$ (ângulos alternos internos) e $D\widehat{B}E = \widehat{C}$ (ângulos correspondentes). Como $\widehat{B}$, $A\widehat{B}D$ e $D\widehat{B}E$ formam um ângulo raso, segue-se que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$. ■

Figura 22 – Soma dos ângulos internos de um triângulo.



Fonte: O autor, 2018.

4.3.3 Propriedades dos ângulos externos

Em um triângulo, a medida de um dos ângulos externos é igual a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes ao ângulo externo. Por exemplo, se $\hat{A}'$ é a medida do ângulo externo de vértice A, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são as medidas dos dois ângulos internos não adjacentes ao ângulo $\hat{A}'$, temos:

$$\hat{A}' = \hat{B} + \hat{C}.$$

Demonstração: segue-se diretamente da soma dos ângulos internos de um triângulo e do fato que a soma de um ângulo interno com seu externo adjacente é $180°$.

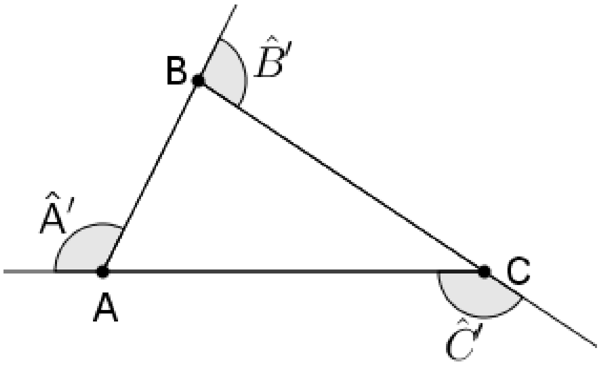
4.3.4 Soma dos ângulos externos

A soma dos ângulos externos de um triângulo qualquer é sempre igual a 360º: se $\hat{A}'$, $\hat{B}'$ e $\hat{C}'$ são os ângulos externos do triângulo, temos

$$\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 360°.$$

Demonstração: Sejam $\hat{A}'$, $\hat{B}'$ e $\hat{C}'$ os ângulos externos adjacentes aos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente, como mostrados na Figura 23.

Figura 23 – Ângulos externos de um triângulo



Fonte: O autor, 2018.

Temos que

$$\hat{A}' = 180° - \hat{A},$$

$$\hat{B}' = 180° - \hat{B} \text{ e}$$

$$\hat{C}' = 180° - \hat{C}.$$

Somando os três ângulos externos, temos:

$$\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 180° - \hat{A} + 180° - \hat{B} + 180° - \hat{C} =$$

$$= 540° - \left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}\right).$$

Como a soma dos ângulos internos é igual a 180°, segue-se que

$$\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 360° \quad \blacksquare$$

5 ATIVIDADES

Neste capítulo, apresentaremos um detalhamento de cada uma das atividades, separando-as em apresentação, descrição, objetivo, conteúdos estruturantes, conteúdos básicos, expectativa de aprendizagem, série e nível de aprendizagem, série e nível sugeridos, mídias existentes (quando houver), material necessário, como construir, desenvolvimento da atividade, potencialidades, limitações e durabilidade.

5.1 Atividade 1 (Condição de existência)

1. Apresentação

Com três traços, faz-se um triângulo. Porém não são quaisquer três traços que podem "gerar" um triângulo. Nesta atividade, o aluno irá experimentar casos em que é possível e outros casos em que não é possível a construção de um triângulo utilizando tiras de papel.

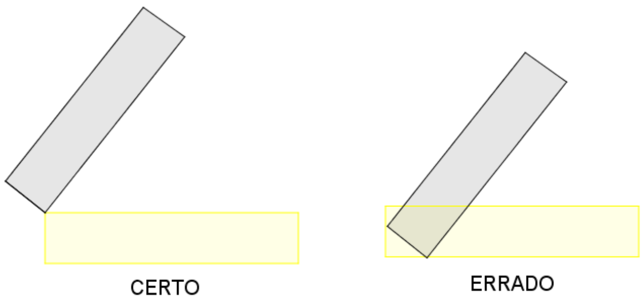
2. Descrição

O aluno recebe tiras de diferentes cores e tamanhos dentro de um saco plástico transparente anexadas a uma folha de atividades, a qual se encontra na seção de anexos deste trabalho. Inicialmente, o aluno deve ter contato com as tiras recebidas, contando quantas tiras de cada cor havia no saco e conferindo se a quantidade de 3 tiras azuis, 2 tiras vermelhas, 5 tiras pretas, 3 tiras verdes e 5 tiras amarelas descrita está correta. Inspirada nos níveis da teoria de Van Hiele, neste momento da atividade o aluno ainda não faz a correspondência entre as tiras e os lados de um triângulo, e podemos associar este momento ao nível 1.

Em seguida, o aluno mede as tiras com o auxílio de uma régua, indicando quantos centímetros possui cada tira, sendo importante apenas o reconhecimento visual de que as tiras de mesma cor têm o mesmo tamanho. Sendo assim, neste momento o aluno analisa algumas características das tiras e o uso do concreto o ajuda a fazer comparações de tamanhos, ou seja, colocar uma tira sobre a outra faz com que o aluno perceba que não é necessário medir todas as tiras de mesma cor, já que todas possuem o mesmo tamanho.

Na etapa seguinte da atividade, o aluno deve montar triângulos. São 6 montagens propostas que utilizam as tiras recebidas, porém nem sempre será possível a construção de um triângulo. O aluno é orientado a tentar montar triângulos utilizando 3 tiras conforme o que foi descrito nos itens da folha de atividades do anexo A. No item a, o aluno deve montar um triângulo utilizando uma tira azul, uma tira preta e uma tira amarela. A montagem deve ser feita sobre o papel, arrastando as tiras, e sempre conectando uma tira com a outra apenas nos extremos. É importante destacar para o aluno que a conexão entre as tiras deve ser feita com cuidado (Figura 24). Nesta etapa de montagem, o aluno atinge o nível 2 da teoria de Van Hiele, onde os alunos poderão classificar a montagem como possível ou não a partir da análise das características da figura formada.

Figura 24 – Conectando as tiras.



Fonte: O autor, 2018.

Tendo conseguido montar o triângulo, o aluno deve colar as tiras formando o triângulo no espaço destinado para a montagem e completar com a letra S (Sim) a lacuna. Caso não consiga montar o triângulo, o aluno também deverá colar as tiras, sempre conectando os extremos, mas mostrando que não foi possível “fechar” um triângulo com as três tiras. Neste caso, a lacuna deve ser completada com a letra N (Não).

Na penúltima etapa da atividade, o aluno deverá completar lacunas de acordo com as figuras montadas no item anterior. É feita a comparação entre dois valores: o primeiro é a medida da soma de dois lados e o segundo é a medida do lado restante. Assim, é analisado se a medida da soma de dois lados é maior, menor ou igual do que a medida do lado restante. Relacionando com os níveis da teoria de Van Hiele, nesta penúltima etapa, o aluno entra no nível 3, último nível que se pretende atingir nesta atividade, onde ele deve relacionar os dados numéricos obtidos em relação às medidas dos lados com a existência ou não do triângulo. O aluno passa a desenvolver um raciocínio dedutivo informal.

Por fim, na etapa conclusiva, o aluno deve completar o raciocínio de quando é possível e quando não é possível construir um triângulo conhecendo a medida de 3 lados.

3. Objetivo

O objetivo é o aluno concluir que nem sempre com 3 tiras é possível construir um triângulo e que o triângulo não será construído quando a soma das medidas de dois lados é menor ou igual à medida do lado restante.

4. Conteúdos estruturantes

A condição de existência do triângulo.

5. Conteúdo básico

Comparação de valores, adição de números decimais e conversão de unidades de medida.

6. Expectativa de aprendizagem

Espera-se que o aluno consiga realizar as etapas de maneira independente, não sendo necessárias grandes intervenções do professor para que ele chegue à conclusão da atividade. Espera-se que o aluno consiga identificar se é possível montar um triângulo sem a necessidade do uso concreto, conhecendo apenas as medidas dos lados, ou descobrir um tamanho mínimo para um terceiro lado “fechar” um triângulo.

7. Série e nível de aprendizagem

6º e 7º anos do ensino fundamental.

8. Série e nível sugeridos

8º ano do ensino fundamental.

9. Material necessário

Tiras de papel colorido (com tamanhos previamente selecionados), saco plástico (sacolé), cola e régua.

10. Como construir

As tiras para a atividade foram previamente produzidas, apesar de poderem ser produzidas juntamente com os alunos, o que acarretaria numa necessidade maior de tempo para a realização da atividade. Foram utilizados papéis coloridos com uma gramatura de 120g, ou seja, um papel mais grosso que a folha comum A4, semelhante a um papel cartão, com o intuito de não rasgar ou não haver grande deformação com o manuseio. Para cortar as tiras em grande quantidade foi utilizada uma refiladora de papel, onde é possível agilizar o processo de obtenção das tiras.

Foram utilizadas 5 cores diferentes, onde as tiras pretas foram cortadas com 3 cm, as azuis com 5 cm, as vermelhas 2 cm, verdes com 7 cm e as amarelas com 3,5 cm. Os tamanhos foram previamente escolhidos no intuito das montagens propostas na folha de atividades terem espaço suficiente para serem coladas.

11. Desenvolvimento da atividade

O tempo previsto para a relização da atividade é de 100 minutos, equivalente a 2 tempos de aula, sendo necessário um tempo ainda maior caso opte-se por cortar as tiras juntamente com os alunos. Os alunos podem sentar-se em duplas para que possam compartilhar o uso da cola, caso seja necessário. A atividade é realizada de forma individual e o professor pode fazer o papel de controlar o tempo, verificando se algum aluno está com grande dificuldade em alguma etapa a ponto de ficar muito atrasado em relação aos colegas. Após os alunos completarem a atividade, é proposto que os mesmos comparem seus resultados, vendo se alguém encontrou algum resultado diferente e se existe a possibilidade de acharem resultados diferentes.

12. Potencialidades

Após a atividade, deixar para os alunos desafios de construções de polígonos, como por exemplo:

- É possível construir um quadrilátero com apenas 3 ângulos retos?
- É possível construir um quadrilátero com lados 1cm, 1cm, 1cm e 3cm?

Sugerir que os alunos pensem, por exemplo, se seria possível criar uma condição de existência para os polígonos com mais lados.

13. Limitações

A dificuldade dos alunos no manuseio das tiras no momento da colagem pode fazer com que eles tenham a falsa impressão de que conseguiram montar um triângulo quando na verdade não é possível. Se as tiras foram sobrepostas, o que é preciso ser reforçado que não pode acontecer, os alunos podem não chegar à conclusão prevista da atividade. É importante, portanto, que o professor acompanhe de perto a atividade, principalmente a etapa em que os alunos colam as tiras. É válido o professor ter sempre uma sobra de material, pois é comum que algumas tiras sejam danificadas por mal uso e tenham a necessidade de serem substituídas.

O uso desta atividade para as turmas de 6º ano do ensino fundamental requer que o conteúdo de operações com números decimais tenha sido previamente estudado para que os alunos não fiquem restritos ao conjunto de números inteiros positivos.

14. Durabilidade

O material produzido pode ser anexado ao caderno do aluno, servindo como material de estudo. Também, podem ser escolhidas as melhores construções para serem colocadas em um mural. O mateiral tem baixa durabilidade, dependendo do modo de armazenamento.

5.2 **Atividade 2 (Rigidez)**

1. Apresentação

A grande importância dos triângulos na construção é devida a uma característica desta figura: a rigidez. Quando conectamos três lados formando um triângulo não é possível mover os mesmos sem que eles se deformem, diferentemente do que acontece com os quadriláteros e figuras com mais lados.

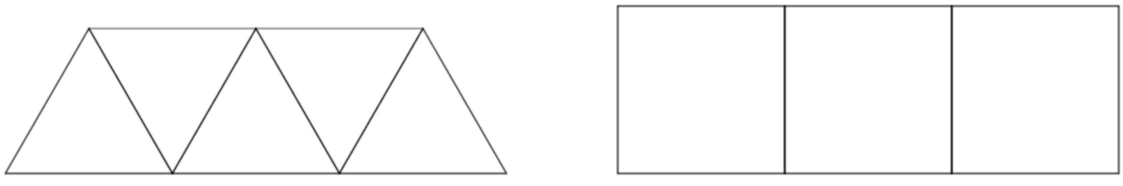
Os alunos realizarão uma experiência que consiste em pendurar um peso em um dos nós de uma estrutura montada com palitos de sorvete em formato de dois tipos diferentes de treliças: uma formada por quadriláteros e outra formada por triângulos. O peso pode ser, por exemplo, uma chave. O aluno irá perceber que, pendurado na estrutura da treliça, o peso da chave fará com que ocorra modificação nas estruturas com quadriláteros, ao passo que na estrutura com triângulos não haverá modificação.

2. Descrição

De forma introdutória, os alunos terão contato com um triângulo feito com pedaços de madeira e com um quadrado onde os lados são conectados pelos extremos por parafusos e porcas, possibilitando a mobilidade dos seus lados. De acordo com a teoria de Van Hiele, neste momento da atividade, os alunos encontram-se no nível inicial, que conta com a observação, diferenciando o quadrado e o triângulo pelo formato visual. Ao manipularem os objetos, os alunos começam a analisar características que vão além da simples diferença visual. Eles poderão perceber que, no triângulo, não é possível mover os lados, mas já no quadrilátero, conseguimos moldá-lo, mudando o formato inicial da figura. Neste momento, os alunos já estão no segundo nível, analisando e fazendo correspondências. Ao serem perguntados, instigados a pensar quanto ao que conseguiram observar manipulando as treliças, os alunos tentam dar uma justificativa com suas próprias palavras dizendo que o triângulo está mais preso, por exemplo, chegando assim no nível 3 de uma dedução informal da propriedade observada. A atividade prática feita pelos alunos consiste em construir uma treliça com auxílio de palitos de sorvete e tiras de arame. Eles irão comparar a resistência de uma treliça feita com diversas estruturas triangulares com uma outra estrutura montada apenas com quadriláteros. Os alunos irão receber palitos de sorvete com furos em suas extremidades (os furos serão feitos com o auxílio de uma furadeira) e tiras de arame dobráveis, semelhantes às usadas para fechar saco de pão.

Será proposto que os alunos montem dois tipos diferentes de treliças planas, uma formada por triângulos e outra formada por quadriláteros.

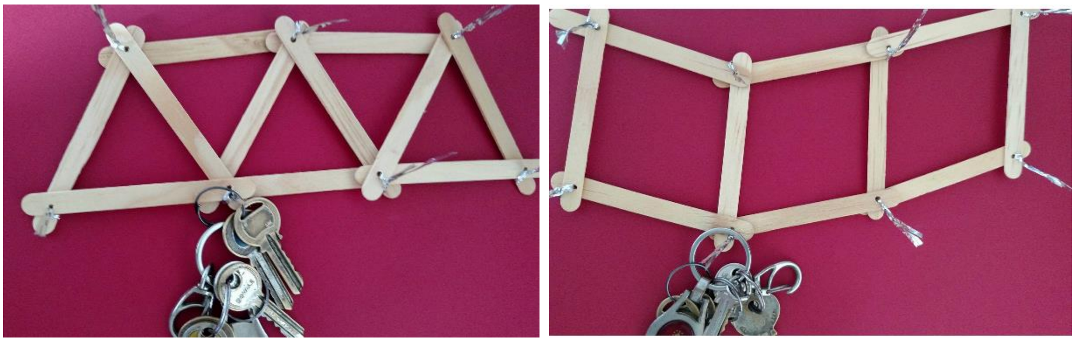
Figura 25– Treliça formada por triângulos ou quadriláteros.



Fonte: O autor, 2018.

Os alunos devem conectar os palitos pelos furos utilizando as tiras de arame e deixando a sobra da tira esticada para frente (ver Figura 25).

Figura 26- Treliça conectada com arame.



Fonte: O autor, 2018.

Após montarem as treliças, será pedido que um aluno fique em pé e segure a treliça fixando dois dos nós dados. Enquanto isso, outro aluno irá pendurar um peso sobre a sobra do arame (Figura 26). Ao montarem as treliças, os alunos estão aplicando o que foi anteriormente observado quanto à deformação do quadrado e a não-deformação dos triângulos. Os alunos não farão cálculos para medir a resistência das treliças, não chegando assim a uma fórmula ou uma demonstração do resultado, o que sugeriria o nível 4 da teoria de Van Hiele. No entanto, para reforçar que os alunos tenham a percepção de que esta propriedade está presente nas mais diversas construções, o professor deve propor aos alunos uma pesquisa em relação a construções que tenham a característica da rigidez do triângulo.

3. Objetivo

O objetivo desta atividade é o aluno perceber que a construção feita por triângulos é mais rígida e não sofre alterações com a adição do peso.

4. Conteúdos estruturantes

Rigidez do triângulo.

5. Conteúdo básico

Conhecimento de figuras geométricas.

6. Expectativa de aprendizagem

Espera-se que o aluno observe que, dados 3 lados, conseguimos montar apenas um triângulo. Já quando temos 4 lados, é possível variarmos os ângulos internos do polígono e, portanto, montar diferentes formatos de quadriláteros.

7. Série e nível de aprendizagem

7º ano ou 8º ano do ensino fundamental.

8. Série e nível sugeridos

8º ano do ensino fundamental.

9. Mídias existentes

Esta atividade teve como inspiração inicial as pontes de macarrão que são formadas por treliças. Então, surgiu a ideia de construir uma treliça juntamente com os alunos. Inicialmente a treliça seria feita com jornal e cola, e teria o formato de ponte. Porém, a dificuldade encontrada na construção desta maneira fez com que se optasse por treliças planas. É possível encontrar no vídeo “Treliças – Como funcionam?” (Vida Engenharia, 2017) algumas dicas de como montar as treliças planas que serviram de ideia para as treliças montadas nesta atividade com arame e palitos de sorvete.

10. Material necessário

Furadeira, palitos de sorvete, tiras de arame dobráveis e algum objeto para servir como um peso, como por exemplo uma chave.

11. Como construir

É necessário que os palitos de sorvete estejam previamente furados. Para isto, deve-se utilizar uma furadeira para realizar um furo no ponto mais próximo possível do extremo do palito com cuidado para não causar rachaduras. Depois, deve-se conectar os palitos usando os arames, formando as treliças.

12. Desenvolvimento da atividade

A atividade pode ser realizada em pequenos grupos de cerca de 4 alunos. Dois alunos montam uma treliça triangular enquanto os outros dois montam uma treliça composta por quadriláteros. Será apresentada a imagem da Figura 25 para os alunos terem como base o formato da treliça que devem montar. As duplas são necessárias pois o encaixe dos palitos se torna mais fácil de ser executado. Enquanto um aluno segura os palitos na posição correta, o outro faz a conexão com arame.

Após realizarem a montagem das treliças, um dos alunos escolhe dois nós (conexão entre os palitos) e segura a treliça enquanto o outro coloca o peso sobre o arame esticado para observar o comportamento da treliça. Em alguns dos nós, os alunos não perceberão grandes mudanças, mas em alguns nós dos quadriláteros, poderão observar que ocorrerá a deformação da estrutura. Os alunos devem fazer vários testes segurando dois dos nós quaisquer, colocando o peso nos arames dos outros nós de modo a observar em quais dos nós ocorrem maiores alterações na estrutura e quando não ocorrem.

Como forma de avaliação, será pedido que os alunos realizem uma pesquisa sobre construções em que se possa destacar os triângulos.

13. Potencialidades

Pode-se explorar os conceitos de ângulos internos, conservação de área e polígonos regulares. Dependendo da habilidade manual dos alunos, é possível explorar as treliças tridimensionais, criando um projeto junto com os alunos.

14. Limitações

É preciso furar os palitos com cuidado para não haver rachaduras. Para fazer o teste com pesos maiores, seria necessário utilizar um outro tipo de material que não fossem as tiras de arame.

15. Durabilidade

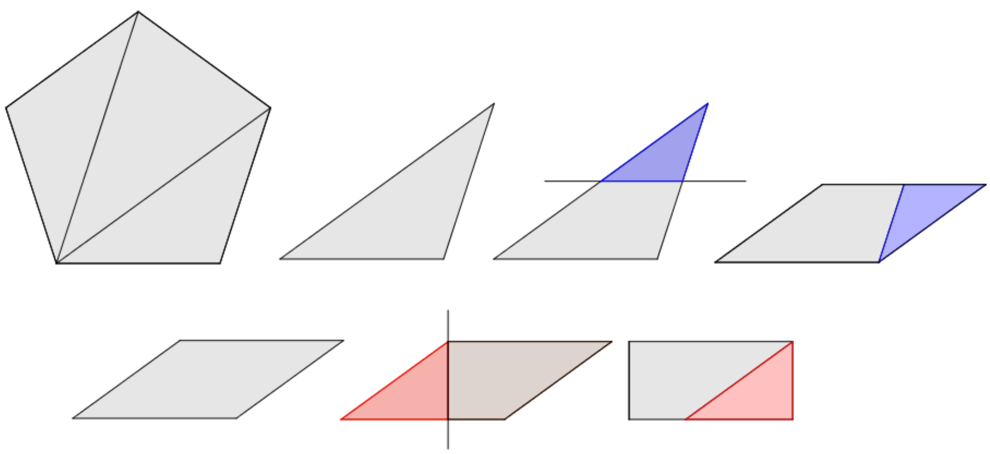
O material possui boa durabilidade, condicionada ao local de armazenamento.

5.3 **Atividade 3 (Descobrindo a área)**

1. Apresentação

Utilizando o processo de Euclides que consiste em obter uma figura de área equivalente para a qual seja mais simples a obtenção da área, transformaremos o triângulo em um retângulo para chegarmos ao valor da área deste triângulo. Segundo Moreira (2010), os gregos consideravam o quadrado como uma figura de fácil comparação, e como todo polígono pode ser repartido em triângulos, os triângulos podem ser “transformados” em pararalelogramos (como descrito na Figura 27) e todo paralelogramo pode ser transformado em um quadrado, podemos obter a área de qualquer figura . Com essas sucessivas transformações, que podem ser feitas através de recortes como sugere a Figura 27 a partir de um pentágono, obtemos triângulos, e cada triângulo pode ser recortado paralelamente a uma de suas bases pela metade da respectiva altura para montarmos um paralelogramo com as duas partes obtidas. Já no paralelogramo formado, ao fazermos um corte perpendicular à base passando por um dos vértices, podemos montar um retângulo com as peças obtidas, polígono o qual facilmente pode ser comparado com um quadrado. Euclides desenvolve sua teoria de área iniciando com o conceito de congruência de triângulos.

Figura 27 – Transformando em retângulo.



Fonte: O autor, 2018.

2. Descrição

O contato inicial com a área de figuras geométricas se dá pela contagem de quadrados unitários utilizados como unidade de medida presentes em uma malha quadriculada. A partir do momento em que os alunos se deparam com triângulos, esta contagem de quadrados se torna não tão eficiente, sendo necessária uma outra estratégia, já que para determinados triângulos, não teremos quadrados completos, o que dificulta a contagem dos mesmos. A atividade consiste em transformar um triângulo quadriculado com uma contagem visual não exata dos quadrados em um retângulo cujo a contagem dos quadrados seja simples. Serão feitos dois cortes em um triângulo dado de forma que possamos montar um retângulo com as 3 peças obtidas. Os triângulos recebidos pelos alunos na atividade facilitam a visualização, já que o objetivo da atividade é obter sua área, e ao receberem os triângulos quadriculados, os alunos já fazem uma associação à área considerando a parte interior do triângulo. Este momento de visualização é considerado o nível 1 da teoria de Van Hiele. O nível 2 é atingido na primeira parte da atividade, em que o aluno identifica elementos do triângulo. O nível 3 desta teoria é atingido quando o aluno transforma o triângulo em um retângulo e, assim, consegue perceber que a área de um triângulo é equivalente à área de um determinado retângulo. O aluno consegue deduzir a fórmula da área do triângulo a partir da fórmula da área do retângulo com o auxílio visual. Apesar disso, não podemos dizer que o aluno chegou ao nível 4 da teoria, já que este nível exige uma maior formalidade e a capacidade do aluno em provar determinado fato de forma mais abstrata. Mesmo assim, o aluno já está apto a resolver questões de área de triângulos em que seja possível identificar o tamanho da base e da altura, não sendo necessária a presença do quadriculado.

3. Objetivo

Deduzir a fórmula da área de um triângulo conhecendo a medida de uma das bases e a respectiva altura e perceber que, para cada lado que tomamos como base, temos uma altura relativa. Espera-se que o aluno encontre uma facilidade maior em calcular a área da figura quando temos um retângulo do que quando temos um triângulo. Dessa forma, explora-se que a área do triângulo corresponde à área de um retângulo de mesmo tamanho de base, porém com metade da altura.

4. Conteúdos Estruturantes

Elementos básicos de um triângulo: base, altura, pé da altura. Área do triângulo.

5. Conteúdo Básico

Área do retângulo.

6. Expectativa de aprendizagem

Fazer com que os alunos não contem mais um a um o número de “quadradinhos” que podem ser observados em questões onde são dadas as figuras geométricas em uma malha quadriculada com o intuito de descobrir a área. A expectativa é que os alunos passem a utilizar as medidas do lado e da altura do triângulo para o cálculo de sua área, entendendo como foi obtida a fórmula para esta área.

7. Série e nível de aprendizagem

A partir do 6º ano do ensino fundamental.

8. Série e nível sugeridos

A partir do 6º ano do ensino fundamental.

9. Mídias existentes

SILVA (2016?).

10. Material necessário

Triângulos feitos no papel quadriculado, lápis de cor, cola e folha de atividade.

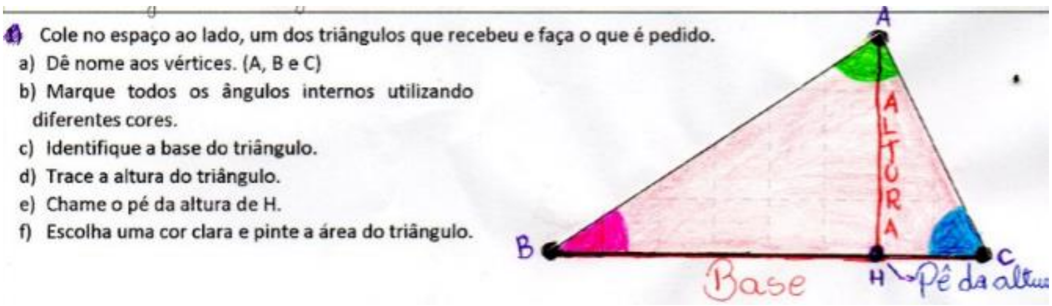
11. Como construir

Os triângulos quadriculados podem ser feitos em qualquer programa de Geometria. Aqui, utilizamos o software GeoGebra. Para obter melhor resultado em relação ao material, os triângulos foram impressos em folhas com maior gramatura, pois o risco de deformação das figuras dimini e também se torna mais difícil rasgar ou amassar os triângulos.

12. Desenvolvimento da atividade

Os alunos receberam dois triângulos e uma folha de atividades contendo três etapas. Esta folha pode ser encontrada na sessão de anexos deste trabalho, no anexo B. A atividade foi separada em etapas de forma que o aluno evoluísse de forma gradativa o seu entendimento de como seria a estratégia para calcular a área de um triângulo. A primeira etapa consiste em identificar alguns elementos do triângulo. O aluno deve colar no espaço indicado na folha um dos triângulos recebidos, onde ele irá marcar elementos básicos do triângulo como base, altura, pé da altura e vértices. Na Figura 28 temos um exemplo desta etapa mostrando os passos que o aluno devia seguir.

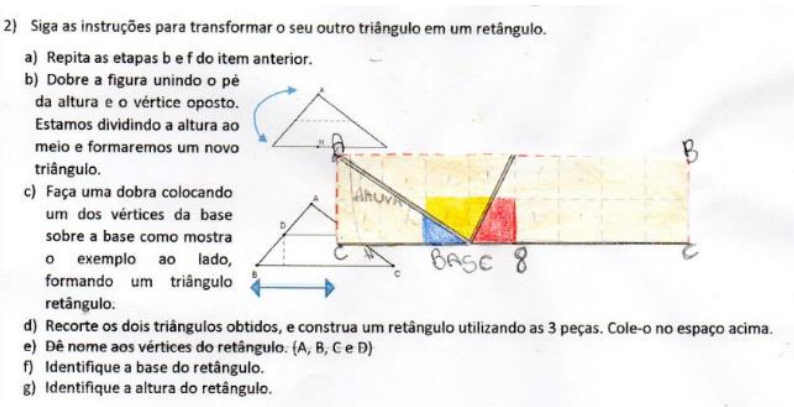
Figura 28 – Elementos de um triângulo por um aluno.



Fonte: O autor, 2018.

Na segunda etapa, com o outro triângulo, o aluno fará recortes seguindo o roteiro como na Figura 29 e montará um retângulo com as 3 peças obtidas, destacando alguns elementos do retângulo. Na Figura 29, o aluno optou por fazer a dobra referente à letra c a partir do vértice direito da base do triângulo.

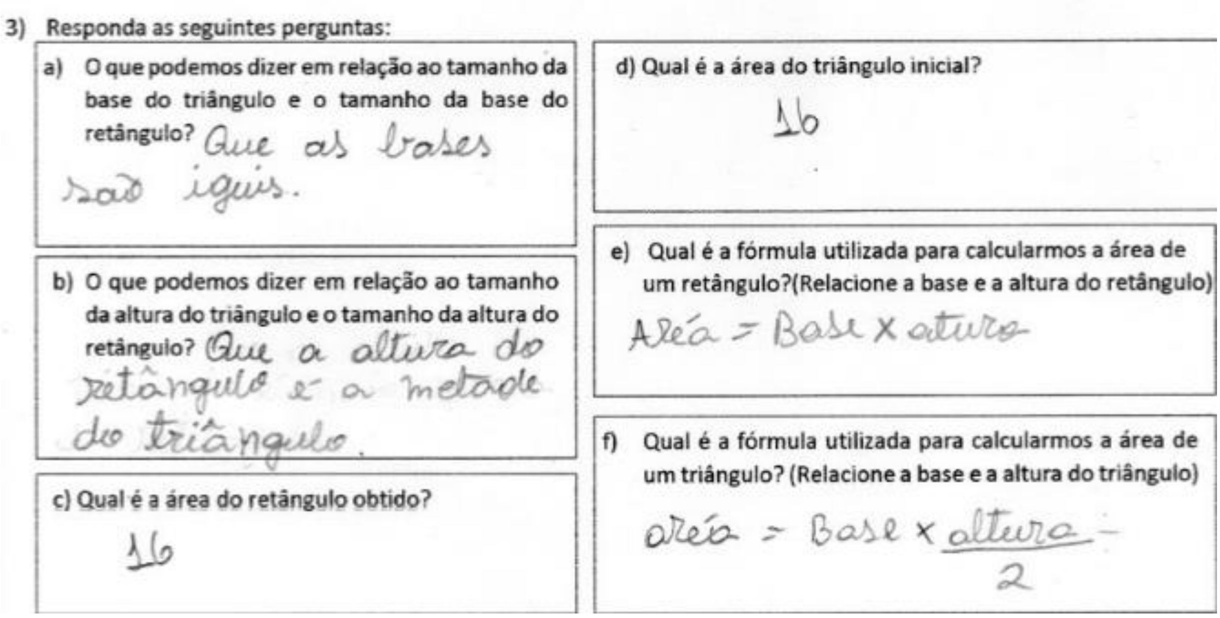
Figura 29 – Retângulo obtido a partir do triângulo.



Fonte: O autor, 2018.

Na terceira etapa da atividade, o aluno deve responder a algumas questões, como se vê na Figura 30:

Figura 30 – Respostas dadas por um aluno.


3) Responda as seguintes perguntas:

a) O que podemos dizer em relação ao tamanho da base do triângulo e o tamanho da base do retângulo? Que as bases saõ iguis.

b) O que podemos dizer em relação ao tamanho da altura do triângulo e o tamanho da altura do retângulo? Que a altura do retângulo e a metade do triângulo.

c) Qual é a área do retângulo obtido?
16

d) Qual é a área do triângulo inicial?
16

e) Qual é a fórmula utilizada para calcularmos a área de um retângulo?(Relacione a base e a altura do retângulo)
Areá = Base x atura

f) Qual é a fórmula utilizada para calcularmos a área de um triângulo? (Relacione a base e a altura do triângulo)
areá = Base x $\frac{\text{altura}}{2}$

Fonte: O autor, 2018.

13. Potencialidades

Nesta atividade, o aluno aprenderá a chegar à fórmula da área do triângulo. É importante o aluno notar que, para cada lado que tomamos como base, temos uma altura relativa, e que, apesar disso, o cálculo da área é o mesmo, independentemente de qual dos lados do triângulo tomamos como base. É importante também destacar que existem algumas outras maneiras de descobrir a área de um triângulo, dependendo de quais medidas conhecemos, como por exemplo a Fórmula de Herón, que utiliza as medidas dos 3 lados.

14. Limitações

É preciso tomar certo cuidado com a construção dos triângulos que são inicialmente distribuídos aos alunos, já que eles são feitos sobre uma malha quadriculada, para que assim os alunos não tenham dificuldades em perceber a quantidade de quadrados que compõem o retângulo formado. Como esta atividade visa uma aprendizagem inicial da fórmula da área de triângulos, devemos priorizar inicialmente figuras onde seja fácil o aluno contar os quadradinhos da malha, apesar disto não ser o objetivo da atividade.

15. Durabilidade e Resistência

A atividade pode ser anexada ao caderno do aluno, servindo de material de estudo.

5.4 **Atividade 4 (Classificação)**

1. Apresentação

Será realizado um jogo inspirado no dominó onde os participantes devem conectar as peças considerando a classificação dos triângulos quanto aos ângulos e quanto aos lados.

2. Descrição

Os alunos se dividirão em grupos de 4 alunos, onde criarão as peças de dominó e jogarão com o intuito de fixar o conteúdo aprendido.

3. Objetivo

Aplicar o conhecimento sobre a classificação dos triângulos quanto aos ângulos e quanto aos lados adquirido anteriormente, de forma lúdica.

4. Conteúdos estruturantes

Classificação dos triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos.

5. Conteúdos básicos

Ângulos.

6. Expectativa de aprendizagem

Espera-se que os alunos não encaixem apenas as peças iguais, mas sim observando as classificações acima.

7. Série e nível de aprendizagem

6º e 7º ano do ensino fundamental.

8. Série e nível sugeridos

7º ano do ensino fundamental.

9. Material necessário

EVA (placa emborrachada), papel, tesoura e cola.

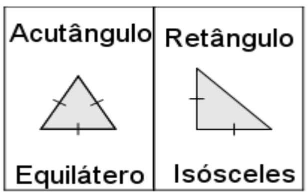
10. Como construir

Os alunos desenharão os triângulos em pedaços de papel e colarão nas placas emborrachadas para criarem o dominó.

As peças devem ser construídas juntamente com os alunos seguindo o modelo apresentado na figura 31. O professor deve avaliar de acordo com a turma se é interessante ou não pedir para os alunos escreverem as classificações na peça ou deixar apenas os triângulos desenhados nas mesmas. São 7 tipos de triângulos, onde temos a classificação quanto aos lados e quanto aos ângulos destacada nas peças. Fazendo uma referência ao dominó numerado de 0 a 6, temos:

0 – Triângulo equilátero e acutângulo
1- Triângulo escaleno e acutângulo
2- Triângulo escaleno e retângulo
3- Triângulo escaleno e obtusângulo
4- Triângulo isósceles e acutângulo
5- Triângulo isósceles e retângulo
6- Triângulo isósceles e obtusângulo

Figura 31 – Exemplo de peça do dominó das classificações.

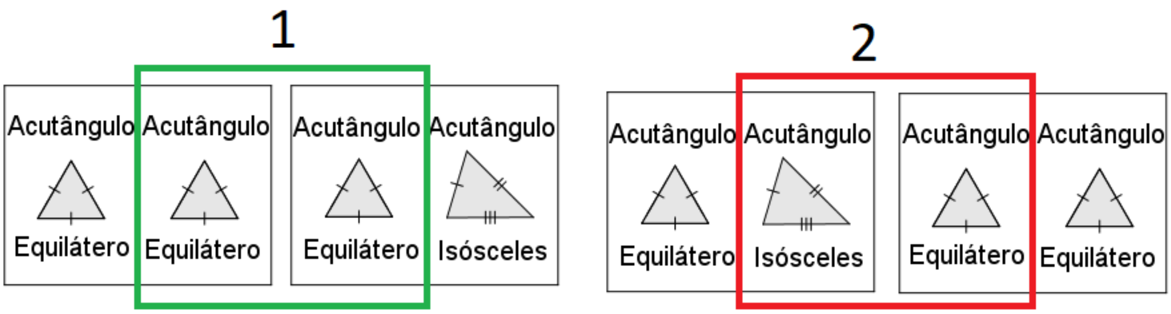


Fonte: O autor, 2018.

11. Desenvolvimento da atividade

As peças serão construídas pelos alunos, sendo que cada aluno fica responsável pela confecção de uma determinada quantidade de peças. Após criarem as peças, os alunos devem jogar o dominó, com regras equivalentes ao jogo original. O jogo pode ser jogado com 2 até 4 pessoas, onde cada pessoa começa com 7 peças. O jogador mais novo começa colocando a primeira peça na mesa. O próximo jogador a colocar uma peça deve ser aquele posicionado de acordo com o sentido horário. A peça colocada deve ter um dos triângulos com as duas classificações iguais, quanto aos ângulos e quanto aos lados, a um dos triângulos da peça sobre a mesa. A junção de peças com apenas a classificação quanto ao ângulo ou apenas a mesma classificação quanto aos lados não é permitida. Observe os exemplos de uma junção 1 possível assinalada em verde e uma junção 2 não possível assinalada em vermelho na figura 32.

Figura 32 – Juntando as peças do jogo.



Fonte: O autor, 2018.

Observe que a junção 2 não é possível pois, apesar de ambos triângulos serem acutângulos, eles se diferenciam quanto à classificação do lado, um sendo isósceles e o outro equilátero. Vale ressaltar que os triângulos que se conectam nem sempre terão o mesmo desenho, já que cabe ao aluno desenhar os triângulos.

Não tendo peças para juntar com as opções da mesa, o jogador deve pegar uma das peças não utilizadas até encontrar uma que possa ser encaixada. Caso o jogador precise pegar novas peças e não tenha mais peças à disposição, ele passa a vez. Ganha o jogador que ficar sem peças na mão primeiro.

12. Potencialidades

Durante a confecção das peças, podem ser explorados conceitos como a soma dos ângulos internos de um triângulo, área e o porquê de não existir um triângulo equilátero retângulo ou um triângulo equilátero obtusângulo.

13. Limitações

O conteúdo já deve ser de conhecimento dos alunos. A rapidez das partidas pode fazer com que os alunos percam o interesse pelo jogo.

14. Durabilidade

O material tem boa durabilidade, podendo ser utilizado por diversas vezes.

5.5 **Atividade 5 (Semelhança)**

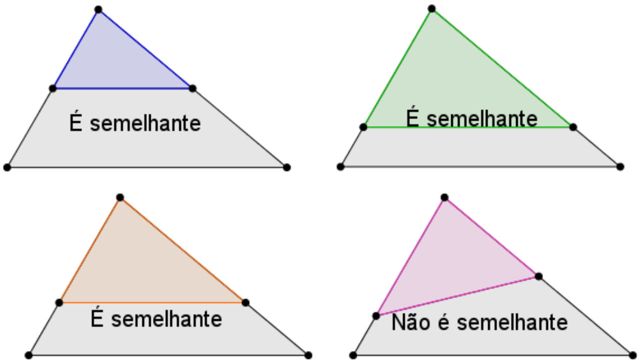
1. Apresentação

Os alunos receberão uma folha de atividades que utilizarão como base para as observações e uma outra folha contendo triângulos impressos em papel cartão. Estas folhas se encontram nos anexos desse trabalho. Os triângulos estão separados em 3 grupos, onde cada grupo de triângulos será destinado a observação de um dos casos de semelhança. Os alunos devem seguir o roteiro apresentado na folha de atividades para chegar a conclusões em relação à semelhança de triângulos. O trabalho com o concreto facilita o aprendizado dos alunos que não possuam bem definidos alguns conceitos básicos necessários para o entendimento de semelhança, como por exemplo o cálculo da razão de semelhança e a noção de ângulos. O nível 1 da teoria de Van Hiele está presente neste atividade com a visualização e o contato com o concreto, que ajudam os alunos a reforçarem conceitos de ângulos e a relação entre os tamanhos dos lados do triângulo. O nível 2 de análise acontece quando o aluno passa a comparar os triângulos sobrepondo-os para encontrar as semelhanças de cada um dos casos. O nível 3 aparece na atividade quando o professor atenta aos alunos para observarem que os casos são maneiras “reduzidas” de notar que existe a semelhança, sem precisar observar muitos elementos do triângulo. Faz parte ainda do nível 3 a capacidade de calcular a razão de semelhança, conseguindo fazer cálculos para descobrir as medidas das razões de triângulos semelhantes e até mesmo fazer deduções de forma a verificar a semelhança pelos três casos: ângulo-ângulo, lado-ângulo-lado e lado-lado-lado. O nível 4 não é atingido nesta atividade, já que exige uma maior habilidade quanto a demonstrações e provas de teoremas. Para o nível 5, é necessário que o aluno relacione os conceitos de semelhança com outras áreas da matemática, exigindo uma abstração que não é o foco desta atividade, já que é um momento inicial, onde os níveis iniciais da teoria de Van Hiele são mais explorados.

2. Descrição

A atividade consiste em recortar os triângulos recebidos e compará-los por sobreposição com os triângulos desenhados na folha de modo a observar triângulos semelhantes ou triângulos que não são semelhantes. Pelo Teorema Fundamental da Semelhança, sabemos que ao tomar um dos lados do triângulo como base e fazer um corte paralelo a essa base, obtém-se um triângulo semelhante ao original (Figura 33). Os triângulos foram feitos de modo a facilitar a medição dos elementos importantes para cada caso de semelhança. Por exemplo, no caso 1, AA (ângulo-ângulo), os ângulos internos do triângulo desenhado na folha possuem medidas iguais a 60^0, 40^0 e 100^0, que são medidas de fácil obtenção com um transferidor . Foram destacados alguns pontos sobre os lados dos triângulos que sugerem um encaixe com o objetivo de facilitar a visualização da semelhança. Para cada caso de semelhança estudado, tem-se 4 triângulos, onde serão observados que três destes são semelhantes e um não é semelhante ao triângulo da folha de atividades. Os triângulos semelhantes foram feitos a partir de cortes do triângulo desenhado na folha de atividades obedecendo as razões 1:2, 2:3 e 3:4, respectivamente.

Figura 33 – Semelhança de triângulos.



Fonte: O autor, 2018.

3. Objetivo

Fazer com que o aluno compreenda os três casos de semelhanças de triângulos de uma forma experimental, trabalhando com um material concreto que possibilita um maior dinamismo.

4. Conteúdos estruturantes

Semelhança de triângulos.

5. Conteúdos básicos

Ângulos, conversão de unidades.

6. Expectativa de aprendizagem

Espera-se que o aluno consiga realizar a distinção entre dois triângulos semelhantes e dois triângulos não semelhantes utilizando os casos de semelhança e que também seja capaz de obter a razão de semelhança quando esta ocorre.

7. Série e nível de aprendizagem

8º e 9º ano do ensino fundamental.

8. Série e nível sugeridos

9º ano do ensino fundamental.

9. Material necessário

Tesoura, folha de atividades, régua e transferidor.

10. Como construir

Os triângulos para a atividade foram feitos com o auxílio do software GeoGebra e impressos em papel cartão.

11. Desenvolvimento da atividade

O aluno recebe a folha de atividades juntamente com uma outra folha contendo triângulos que devem ser recortados. Os triângulos desenhados na folha de atividades servem como uma base para comparação. A atividade está dividida em 3 etapas, onde é abordado cada um dos casos de semelhança, verificando se o triângulo desenhado na folha é semelhante ou não aos triângulos recortados. Os alunos devem identificar quais triângulos são ou não semelhantes. Na sequência, será pedido que os alunos descubram a razão de semelhança existente entre o triângulo da folha e os triângulos semelhantes recortados. É necessário que o aluno meça os lados e ângulos para que se possa chegar num resultado preciso, apesar das figuras já sugerirem certas medidas e proporções. A folha de atividades que se encontra em anexo e a folha em papel cartão contendo os triângulos para recortar são o ponto incial do estudo de semelhança, e para reforçar os conceitos dos casos de semelhanças foram propostos alguns exercícios, que também se encontram nos anexos deste trabalho.

12. Potencialidades

Explorar a congruência a partir do caso em que a razão de semelhança é igual a 1.

13. Limitações

A semelhança será bastante explorada quanto aos triângulos, sendo necessário explicar quando outros polígonos são semelhantes entre si.

14. Durabilidade

Uso imediato.

5.6 **Atividade 6 (Relações métricas no triângulo retângulo)**

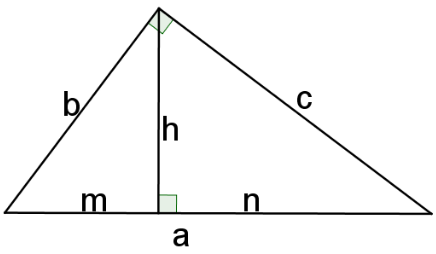
1. Apresentação

Nesta atividade, demonstramos as relações métricas no triângulo retângulo com o auxílio de material concreto. Esta atividade foi retirada de Lamas e Mauri (2014) e adaptada para o uso de papel cartão ao invés de EVA (placa emborrachada). A atividade pode ser relacionada com os níveis da teoria de Van Hiele. O nível 1 se dá pelo contato com o material concreto, que é utilizado inicialmente como um quebra-cabeça. O nível 2 surge a partir do momento em que se começa a fazer a análise, pelo aluno, das peças de um quadrado montado para o outro, identificando quais peças mudaram e as medidas relacionadas nas peças. O nível 3 de dedução informal aparece quando percebe-se que, pelo fato dos quadrados montados terem o mesmo tamanho, as peças distintas formam a mesma área. A partir do momento em que o aluno entende a relação entre as áreas das figuras como uma relação métrica a ser utilizada nos triângulos, ele faz uma dedução informal. Não se espera atingir o nível 4 da teoria nesta atividade. Para o aluno atingir este nível é preciso primeiro um pouco mais de prática com as fórmulas para que, assim, ele possa obtê-las de outras formas, relacionando com outros conceitos aprendidos, como por exemplo a semelhança e congruência de triângulos.

2. Descrição

A atividade foi realizada com a turma dividida em cinco grupos, cada um dos quais deve chegar à conclusão de alguma relação métrica no triângulo retângulo. Na figura 34, podemos observar alguns elementos do triângulo retângulo que serão importantes nesta atividade: a hipotenusa a, os catetos b e c, a altura h e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa m e n. No grupo 1, os alunos devem mostrar o teorema de Pitágoras, ou seja, no triângulo retângulo de hipotenusa medindo a e catetos medindo b e c, que vale a seguinte relação: $a^2 = b^2 + c^2$. No grupo 2, os alunos irão mostrar que o produto da hipotenusa a pela altura h relativa a esta é igual ao produto dos catetos b e c, ou seja, $a.h = b.c$. No grupo 3, os alunos irão mostrar que o quadrado do cateto b é igual ao produto da hipotenusa a pela projeção m do cateto b sobre a hipotenusa: $b^2 = a.m$. No grupo 4, os alunos irão mostrar que o quadrado do cateto c é igual ao produto da hipotenusa a pela projeção n do cateto c sobre a hipotenusa: $c^2 = a.n$. Finalmente, no grupo 5, os alunos mostrarão que o quadrado da altura h é igual ao produto das das projeções m e n dos catetos: $h^2 = m.n$.

Figura 34 - Elementos do triângulo retângulo.



Fonte: O autor, 2018.

3. Objetivo

Facilitar o aprendizado levando os alunos ao entendimento das fórmulas das relações métricas acima através da manipulação do material concreto.

4. Conteúdos estruturantes

Relações métricas no triângulo retângulo.

5. Conteúdos básicos

Ângulos, classificação dos triângulos, fatoração, área.

6. Expectativa de aprendizagem

Espera-se que os alunos consigam perceber a relação de conservação das áreas que existirá entre as figuras, de modo a concluir que as áreas de determinadas figuras são as mesmas e, assim, chegarem às fórmulas das relações métricas no triângulo retângulo por meio de uma experimentação.

7. Série e nível de aprendizagem

8º e 9º ano do ensino fundamental.

8. Série e nível sugeridos

9º ano do ensino fundamental.

9. Mídias existentes

Assim como foi dito anteriormente, esta atividade foi inspirada em Lamas e Mauri (2014).

10. Material necessário

Papel cartão (3 cores), tesoura, caneta hidrocor, cola e régua.

11. Como construir

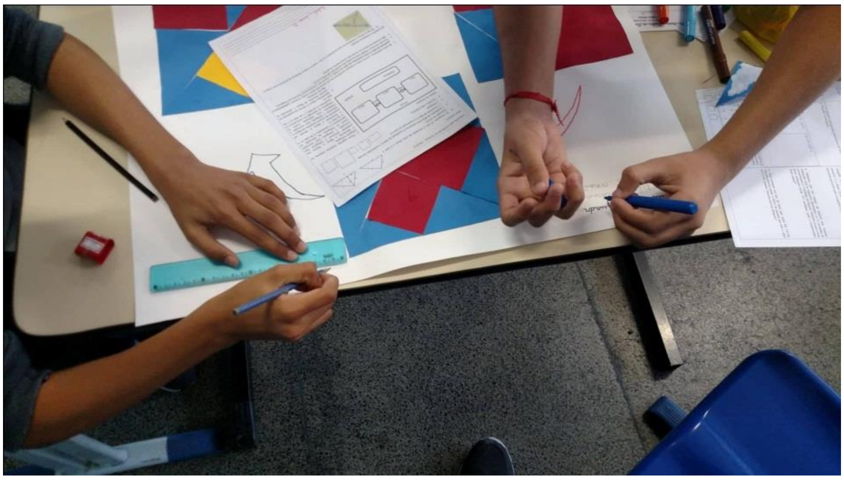
Utilizando o papel cartão, serão construídos triângulos retângulos congruentes de lados a, b e c, quadrados de lados a, b, c, h e m, respectivamente, e retângulos de lados a e m, a e n, m e n, respectivamente, onde as medidas utilizadas são: $a = 15$ cm, $b = 12$ cm, $c = 9$ cm,

$m = 9{,}6$ cm, $n = 5{,}4$ cm, $h = 7{,}2$ cm. A quantidade de figuras feitas depende de cada grupo, como detalhado no item abaixo.

12. Desenvolvimento da atividade

A turma será dividida em cinco grupos, onde cada grupo fica responsável por uma das relações métricas no triângulo retângulo que serão distribuídas de forma aleatória. Cada grupo recebe um roteiro, o qual está presente nos anexos desta dissertação, para a construção de um cartaz juntamente com as peças necessárias para montarem as figuras sugeridas neste roteiro (Veja a Figura 35).

Figura 35 – Confecção dos cartazes.



Fonte: O autor, 2018.

O cartaz deve ter um título, as figuras devem ser montadas conforme as instruções, deve haver um texto explicativo descrevendo quais mudanças acontecem de uma figura para outra, ou seja, quais peças foram mudadas da figura 1 para a figura 2 a fim de obter um quadrado de mesmo tamanho, e a fórmula relacionando as áreas que se pode explorar.

Figura 36 – Relações métricas no triângulo retângulo.

Fonte: O autor, 2018.

Após a confecção do cartaz, cada grupo deverá fazer uma breve apresentação e resolver para a turma as questões propostas no mesmo roteiro, aplicando assim a fórmula aprendida.

O grupo 1 deve ter em mãos um quadrado de lado a, um quadrado de lado b, um quadrado de lado c e oito triângulos retângulos de lados a, b e c. Serão montadas duas figuras, cada uma gerando um quadrado de lado $b + c$. A primeira figura utiliza o quadrado de lado a, e 4 triângulos. Os alunos devem compor estas figuras de modo a montar um quadrado de lado $b + c$, como mostra a cartolina superior à esquerda da figura 36. A segunda figura a ser montada na cartolina utiliza os quadrados de lado b e lado c, e 4 dos triângulos retângulos congruentes. Os alunos também devem compor um quadrado de lado $b + c$ com estas figuras, como mostra a mesma cartolina presente na figura 36. Desta forma, os alunos poderão perceber que, como as duas figuras montadas representam um quadrado de mesma área, temos que a área do quadrado de lado a da primeira figura é igual a soma das áreas dos quadrados de lado b e lado c da segunda. Estas observações devem ser escritas na cartolina e a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$ obtida colocada em destaque.

O grupo 2 deve ter em mãos 4 triângulos de lados a, b e c, onde 2 destes triângulos devem ser divididos em dois a partir da altura h em relação à hipotenusa a e os outros dois completos. Serão montadas duas figuras, sendo dois retângulos distintos. A primeira figura deve utilizar 2 triângulos, um deles sendo um triângulo completo e o outro dividido em 2 pela altura

h em relação à hipotenusa a. Os alunos devem compor um retângulo com estas 3 peças. Pode ser construído, por exemplo, um retângulo de lados b e c. A segunda figura da cartolina utiliza os outros 2 triângulos, sendo um deles um triângulo completo e o outro sendo um dos triângulos dividido em dois pela altura h em relação à hipotenusa a. Os alunos devem compor um novo retângulo com estas 3 peças que não pode ser o mesmo retângulo da figura anterior. O aluno deve portanto montar um retângulo com lados a e h. Desta forma, os alunos poderão perceber que, como as duas figuras montadas usam as mesma 3 peças, temos que a área do primeiro retângulo é igual a área do segundo retângulo. Estas observações devem ser escritas na cartolina e a fórmula $a.h = b.c$ obtida colocada em destaque.

O grupo 3 deve ter em mãos 8 triângulos de lados a, b e c, 1 quadrado de lado b, 2 quadrados de lado c e um retângulo de lados m e a. Serão montadas duas figuras na cartolina, cada uma gerando um quadrado de lado $b + c$. A primeira figura deve utilizar 4 triângulos, sendo 2 deles divididos pela altura h relativa à hipotenusa a e os outros dois completos, 1 quadrado de lado c e o retângulo de lados m e a. Os alunos devem compor um quadrado de lado $b + c$ utilizando essas peças como mostra a cartolina da esquerda inferior da figura 36. Já a segunda figura da cartolina deve conter 1 quadrado de lado b, 1 quadrado de lado c e 4 triângulos completos. Os alunos devem compor um quadrado de lado $b + c$ utilizando essas peças, como mostra a mesma cartolina citada da figura 36. Desta forma, os alunos poderão perceber que, como as duas figuras montadas representam um quadrado de lado $b + c$, temos que a soma das áreas das figuras distintas são iguais, o que mostra que a área do retângulo de lados m e a é igual à área do quadrado de lado b. Estas observações devem ser escritas na cartolina e a fórmula $b^2 = a.m$ obtida colocada em destaque.

O grupo 4 deve ter em mãos 8 triângulos completos, 2 quadrados de lado b, 1 quadrado de lado c e 1 retângulo de lados n e a. Serão montadas duas figuras, cada uma formando um quadrado de lado $b + c$. A primeira figura da cartolina deve utilizar 4 triângulos, onde 2 destes devem ser divididos pela altura h em relação à hipotenusa a e os outros dois completos, 1 quadrado de lado b e 1 retângulo de lados a e n. Os alunos devem compor um quadrado de lado $b + c$ utilizando essas peças. A segunda figura da cartolina deve utilizar 4 triângulos completos, 1 quadrado de lado b e 1 quadrado de lado c. Os alunos devem compor um quadrado de lado $b + c$ utilizando essas peças. Desta forma, os alunos poderão perceber que, como as duas figuras montadas representam um quadrado de lado $b + c$, temos que a soma das áreas das figuras distintas são iguais, o que mostra que a área do retângulo de lados a e n é igual à área do quadrado de lado c. Estas observações devem ser escritas na cartolina e a fórmula $c^2 = a.n$ obtida colocada em destaque. O processo descrito é análogo ao desenvolvido pelo grupo 3.

Finalmente, o grupo 5 deve ter em mãos 12 triângulos completos, 1 quadrado de lado b, 3 quadrados de lado c, 2 quadrados de lado m e 1 quadrado de lado c. Serão montadas três figuras, cada uma gerando um quadrado de lado $b + c$, como mostra a cartolina superior à direita da figura 36. A primeira figura da cartolina utiliza 4 triângulos completos e 1 quadrado de lado b e 1 de lado c. Os alunos devem compor um quadrado de lado $b + c$ utilizando essas peças. A segunda figura da cartolina deve usar 4 triângulos, onde 2 deles serão divididos pela altura em relação à hipotenusa e os outros dois completos, 1 quadrado de lado m, 1 quadrado de lado h e 1 quadrado de lado c. Os alunos devem compor um quadrado de lado $b + c$ utilizando essas peças. A terceira figura da cartolina deve utilizar 4 triângulos, sendo 2 deles divididos pela altura em relação à hipotenusa e os outros dois completos, 1 quadrado de lado m, 1 quadrado de lado c e um retângulo de lados m e n. Os alunos deverão, também, montar um quadrado de lado $b + c$ com essas figuras. Desta forma, os alunos poderão concluir que da primeira para a segunda figura, temos que a área do quadrado de lado b é igual a soma das áreas dos quadrados de lado m e o de lado h, e da segunda figura para a terceira figura, temos que a área do quadrado de lado h é igual a área do retângulo de lados m e n. Estas observações devem ser escritas na cartolina e as fórmulas $b^2 = m^2 + h^2$ e $h^2 = m.n$ colocadas em destaque.

Este último grupo faz uma figura a mais que os outros e acaba por descobrir 2 fórmulas. Da primeira para a segunda figura na cartolina, chega-se à fórmula $b^2 = h^2 + m^2$. Temos aí o teorema de Pitágoras revisitado, que já foi visto pelo grupo 1, porém agora ele está associado a um triângulo de hipotenusa b e catetos h e m. Apesar desta fórmula não ser a principal a ser obtida por este grupo, a opção de manter as três figuras montadas na cartolina e não apenas as duas últimas, que já gerariam a fórmula final $h^2 = m.n$, acontece por entender-se que aqui se tem uma boa oportunidade para os alunos fazerem uma comparação com o resultado obtido pelo grupo 1 e não somente decorar a fórmula do teorema de Pitágoras sem fazer as associações necessárias.

13. Potencialidades

A dedução das fórmulas através do concreto não impede que a mesma também seja feita de outra maneira, como por exemplo utilizando semelhança de triângulos, ou seja, usando uma demonstração mais algébrica.

14. Limitações

Como a confecção dos cartazes foi proposta de ser feita em sala de aula, é necessário que as apresentações dos alunos sejam feitas em dias seguintes devido ao tempo da atividade.

15. Durabilidade

O material fica exposto em sala de aula durante todo o bimestre, auxiliando os alunos em exercícios de aula.

5.7 **Atividade 7 (Triângulo de Sierpinski)**

1. Apresentação

O triângulo de Sierpinski, que é obtido por um processo recursivo, é uma forma elementar da geometria fractal. Ele tem muitos casos curiosos, como por exemplo, sua relação com o triângulo de Pascal, porém, nesta atividade, o triângulo de Sierpinski será utilizado para o ensino de potências. Seguindo os níveis da teoria de Van Hiele, a atividade passa pela nível 1 com a manipulação da cartolina para a construção do triângulo equilátero, pelo nível 2 quando se faz o processo para obtenção de cada etapa do triângulo de Sierpinski e chega no nível 3 quando os alunos contam a quantidade de triângulos em cada uma das etapas e conseguem determinar a quantidade de triângulos na n-ésima etapa de confecção do triângulo.

2. Descrição

O triângulo de Sierpinski é o conjunto resultante da remoção sucessiva do triângulo equilátero do centro quando se divide um triângulo equilátero em quatro triângulos equiláteros congruentes. A divisão do triângulo maior nesses quatro outros triângulos é feita de forma que os pontos médios dos lados do triângulo maior sejam os vértices do triângulo localizado no centro. Cada uma das cinco etapas da construção, como na Figura 37, é destacada na atividade. Esta será realizada em grupos, onde teremos triângulos equiláteros iniciais com 40 cm de lado feitos de cartolina colorida.

Figura 37 – Etapas do triângulo de Sierpinski

Fonte: O autor, 2018.

3. Objetivos

Estimular a investigação matemática, fazendo com que os alunos definam uma fórmula para calcular a quantidade de triângulos da n-ésima figura. Também, temos a percepção visual, por meio da qual os alunos podem observar que a quantidade de triângulos que sobram em cada etapa é o triplo da quantidade de triângulo de uma etapa anterior. Dessa forma, desenvolveremos o conceito de potência.

4. Conteúdos Estruturantes

Potenciação.

5. Série e nível sugeridos

A partir do 6º ano do ensino fundamental

6. Mídias existentes

Assis et al (2008) e Mollá (2009).

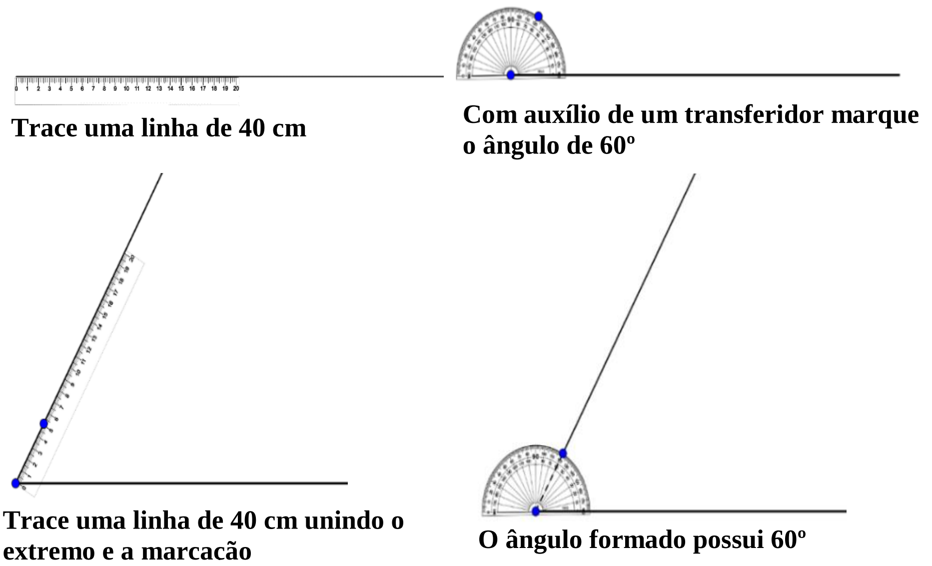
7. Material necessário

Cartolina, régua, lápis, canetinha e lápis de cor.

8. Como construir

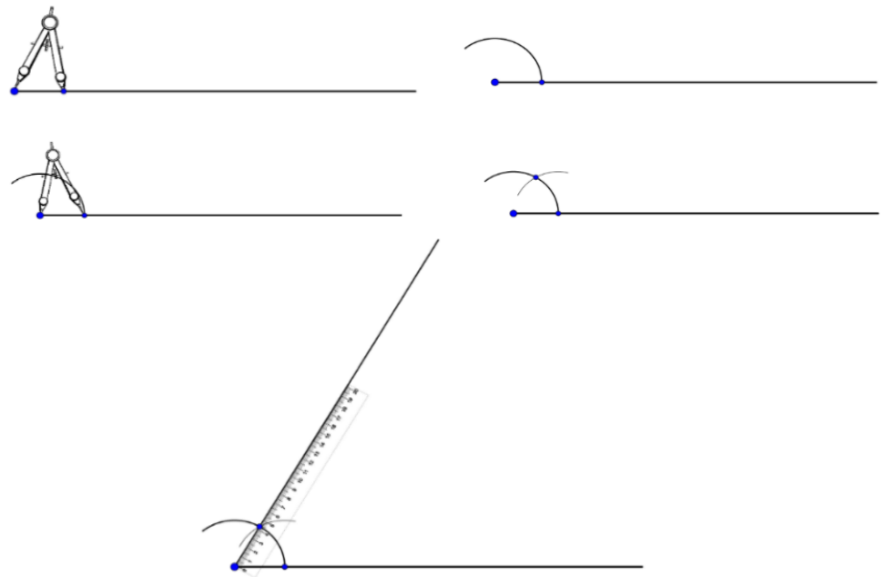
A construção dos triângulos equiláteros pode ser feita pelos próprios alunos com o auxílio de uma régua e um transferidor, régua e compasso ou até mesmo o esquadro, cabendo ao professor julgar o que é mais interessante para seus alunos. Como muitas escolas não têm desenho geométrico, a maior parte dos alunos não sabe manipular os instrumentos de construções geométricas. Assim, esta atividade é uma oportunidade para ensinar este tipo de construção, como a construção de um ângulo de 60º mostrada nas Figuras 38, 39 e 40.

Figura 38 – Construindo um ângulo de 60° com régua e transferidor



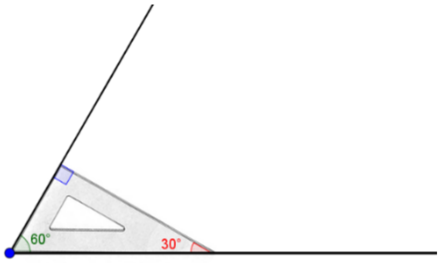
Fonte: O autor, 2018.

Figura 39 – Construindo um ângulo de 60° com régua e compasso



Fonte: O autor, 2018.

Figura 40 – Construindo um ângulo de 60° com esquadro



Fonte: O autor, 2018.

9. Cuidados necessários

A atividade pode ser realizada a partir de um triângulo equilátero dado, sem que seja necessária a construção do triângulo inicial pelo aluno, nem mesmo classificar o triângulo como sendo equilátero. Isto ajuda em casos em que o tempo para a atividade não é muito grande. Porém, entende-se que seria uma boa oportunidade para falar rapidamente sobre a classificação dos triângulos quanto aos lados e ângulos. Para alunos de sexto ano do ensino fundamental, pode não ser necessário que os alunos utilizem uma notação algébrica para representar a quantidade de triângulos em uma n-ésima etapa. O professor deve acompanhar os alunos para que não ocorra nenhum erro em medições e traçados.

10. Desenvolvimento da atividade

Os alunos serão separados em grupos, e cada grupo ficará responsável por uma ou mais etapas do triângulo. Por exemplo, os grupos A e B chegam até a etapa 3, utilizando 3 cartolinas: a primeira com a etapa 1, a segunda passando pela etapa 1 e chegando à etapa 2 e, a terceira cartolina, passando pelas etapas 1 e 2 e chegando à etapa 3, enquanto os grupos C e D fazem as etapas 2, 3 e 4, seguindo o mesmo raciocínio que os grupos A e B. Nestas cartolinas, os alunos devem escolher uma das 3 estratégias descritas no tópico 7 “Como construir" para desenhar o triângulo equilátero, como mostram as figuras 38, 39 e 40. Como 3 triângulos serão feitos por cada grupo, é possível colocar cerca de 6 alunos por grupo, onde 2 alunos trabalham juntamente em cada cartolina.

A etapa inicial do triângulo de Sierpinski consiste apenas de um triângulo equilátero de 40 cm de lado. Para ela, os alunos devem, com o auxílio de uma régua, dividir o triângulo equilátero de 40 cm em 4 triângulos equiláteros de 20 cm. Para isto, basta traçar linhas retas que unam os pontos médios dos lados do triângulo inicial. Dos 4 triângulos formados, o triângulo central deve ser retirado. Todos os triângulos retirados em todas as etapas não serão pintados, enquanto os demais triângulos devem ser pintados.

Para a 2ª etapa, segue-se o mesmo raciocínio da anterior e os alunos continuam dividindo os triângulos unindo os pontos médios dos lados dos triângulos não retirados. Os alunos devem, então, pintar somente os triângulos que sobrarem depois que todos os triângulos centrais forem retirados. As etapas seguintes devem seguir o mesmo raciocínio.

São sugeridas apenas 4 etapas, porém é importante deixar claro para os alunos que é possível a realização de mais etapas de acordo com a sua vontade, tendo como limitante apenas o tamanho do material usado para confeccionar os triângulos.

Após construírem os triângulos, os alunos devem ser instigados a completarem as tabelas presentes numa folha que está nos anexos deste trabalho, a fim de atingirem o objetivo da atividade.

11. Durabilidade e Resistência

Consumo imediato. O material obtido é bom para ser exposto em um mural.

5.8 **Atividade 8 (Tangram)**

1. Apresentação

Tangram é um quebra-cabeça geométrico composto por 7 peças, sendo 2 triângulos maiores, 2 triângulos menores, 1 triângulo médio, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Utilizando todas essas peças sem sobreposição podemos montar diversas figuras, como por exemplo, um quadrado. A folha de atividades, que está no anexo F deste trabalho, foi montada baseando-se nos níveis da teoria de Van Hiele. Inicialmente, será construído o Tangram simplesmente criando as 7 peças seguindo as etapas sugeridas na folha. Nesta fase, estamos no nível 1 da teoria, onde o aluno tem o contato com as 7 peças do Tangram sem saber para que serão utilizadas. Ainda no nível 1, o aluno deve fazer algumas montagens com as peças como se fosse um quebra-cabeça, manipulando as figuras e diferenciando-as apenas quanto ao formato. Referente ao nível 2, serão feitas comparações de determinadas peças em relação a outras a fim de comparar o tamanho das mesmas. No nível 3, os alunos farão anotações relacionando as áreas das figuras, utilizando uma das figuras do Tangram como unidade. Para confirmar que os alunos se encontram no nível 3 da teoria, eles terão que perceber que as figuras montadas com as mesmas peças possuem a mesma área, compreendendo assim a ideia de conservação da mesma. Esta verificação é feita através de perguntas propostas na folha de atividades.

2. Descrição

O ato de montar uma figura com as sete peças ou com parte das peças cria um desafio para o aluno. As diferentes formas produzidas quando utilizamos as mesmas peças sem sobreposição geram uma observação importante quanto à área das figuras formadas: a sua conservação. A atividade proposta com o uso do Tangram consiste em desenvolver alguns conceitos relacionados à área, como por exemplo, utilizar o triângulo menor como unidade de medida para o cálculo da área das figuras formadas e relacionar as áreas das figuras obtidas. Também pode ser explorado o conceito de frações.

3. Objetivos

Instigar no aluno à experimentação através da observação das figuras. Desenvolver o conceito de conservação de área de forma lúdica utilizando o Tangram.

4. Conteúdos Estruturantes

Área, figuras geométricas.

5. Conteúdos Básicos

Figuras geométricas.

6. Expectativa de aprendizagem

Espera-se que os alunos aprendam que a área de duas figuras que são compostas pelas mesmas peças possuem a mesma medida. O perímetro pode mudar, mas a área é mantida.

7. Série e nível de aprendizagem

6º ano, 7º ano, 8º ano e 9º ano do ensino fundamental.

8. Série e nível sugeridos

8º ano do ensino fundamental.

9. Mídias existentes

Podemos citar Miranda (2016?).

10. Material necessário

É necessário construir as 7 peças do Tangram juntamente com os alunos. São utilizados papel, lápis, régua e tesoura para a motagem do Tangram.

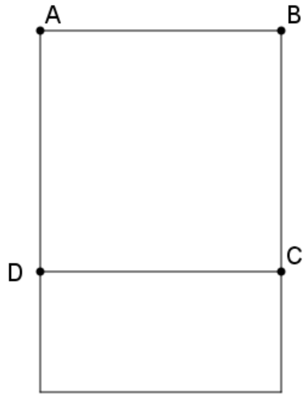
11. Como construir

Os alunos seguirão os seguintes passos para a construção das 7 peças do Tangram:

1º passo: Recorte o papel em forma de um quadrado, conforme mostra a Figura 41.

Figura 41 – Obtendo um quadrado

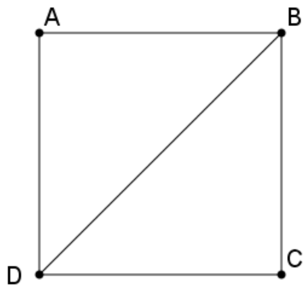
1º passo.



Fonte: O autor, 2018.

2º passo: Trace uma das diagonais do quadrado, conforme Figura 42.

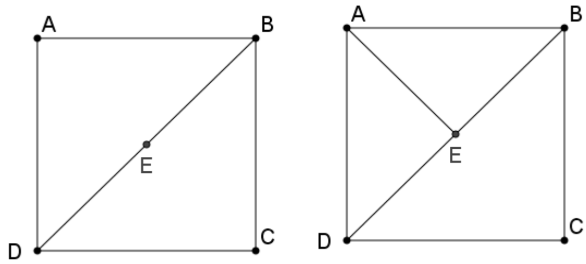
Figura 42 – Traçando a diagonal do quadrado – 2º passo.



Fonte: O autor, 2018.

3º passo: Obtenha o ponto médio E da diagonal. Para isto basta pegar um dos vértices do quadrado (B) que fazem parte da diagonal traçada e dobrar unindo com o outro extremo da diagonal (vértice D). Na sequência, trace um seguimento de reta que vai do ponto médio da diagonal (E) até o vértice do quadrado (A), formando assim três triângulos (Figura 43).

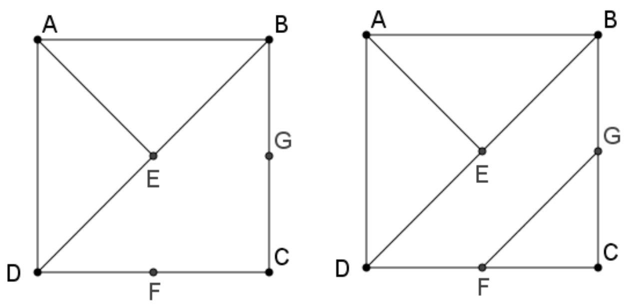
Figura 43 – 3º passo da montagem do Tangram.



Fonte: O autor, 2018.

4º passo: Dobre o vértice C do quadrado sobre o ponto E, marcando os pontos médios F e G sobre os lados do quadrado. Trace o seguimento de reta que une os pontos F e G (Figura 44).

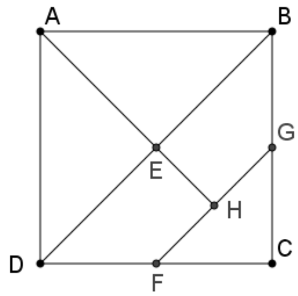
Figura 44 – 4º passo da montagem do Tangram.



Fonte: O autor, 2018.

5º passo: Trace uma reta perpendicular do ponto E ao seguimento FG, marcando o pé da perpendicular sobre o mesmo (H), conforme indicado na Figura 45.

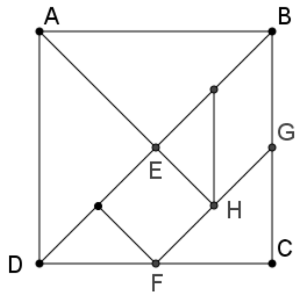
Figura 45 – 5º passo da montagem do Tangram.



Fonte: O autor, 2018.

6º passo: Trace um seguimento de reta paralelo ao seguimento EH com extremo no ponto F, indo até a diagonal BD, e outro seguimento paralelo ao lado BC com extremo no ponto H indo até BD. Assim, formamos as 7 peças do Tangram, como na Figura 46.

Figura 46 – 6º passo da montagem do Tangram.



Fonte: O autor, 2018.

12. Desenvolvimento da atividade

Os alunos receberão uma folha de papel e montarão as peças do Tangram seguindo os passos assinalados no tópico anterior. Na sequência, serão propostas algumas observações que seguem o roteiro de uma folha de atividades que se encontra no anexo F deste trabalho. Cada aluno fará algumas montagens propostas com as peças, e, em seguida, algumas comparações entre as figuras; por fim, terá que montar uma casa utilizando as 7 peças do Tangran e depois um peixe. Serão feitas algumas perguntas até que o aluno chegue à conclusão de que as figuras possuem a mesma área, já que são compostas pelas mesmas peças.

13. Potencialidades

Possibilidade de trabalhar conceitos geométricos como retas paralelas e perpendiculares, características de figuras geométricas e unidades de medida.

13. Limitações

A construção do material por parte dos alunos requer um certo tempo e por isso é necessário que a atividade seja bem dividida para que as conclusões de cada aula não fiquem perdidas. As peças precisam ser cortadas de maneira precisa para que as observações não sejam comprometidas.

14. Durabilidade

Se o Tangram for feito com o material de EVA, tem uma boa durabilidade, podendo ser um material de apoio durante todo o ano letivo. Já se o material utilizado for um papel cartão, o armazenamento do mesmo se torna um pouco mais difícil, o que faz com que facilmente possa ocorrer danificações, inutilizando o material.

6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Das atividades elaboradas neste trabalho, foram realizadas cinco delas em sala de aula: triângulo de Sierpinski (atividade 7), rigidez (atividade 2), condição de existência atividade (1), área (atividade 3) e relações métricas no triângulo retângulo (atividade 6). A atividade de triângulo de Sierpinski foi realizada no 6º ano e a da rigidez no 8º ano do ensino fundamental, e foram aplicadas em apenas uma turma de cada série. Estas duas atividades foram feitas durante o 3º bimestre de 2017 em uma mesma escola da rede municipal localizada no bairro Lins de Vasconcelos, na cidade do Rio de Janeiro. A primeira delas teve duração de 3 tempos e a segunda, de 2 tempos. As atividades de condição de existência e área do triângulo foram aplicadas em duas turmas do 7º ano do ensino fundamental, turmas de escolas distintas, uma delas sendo na mesma escola do Lins citada acima e a outra, em uma escola do bairro do Méier, situado também na cidade do Rio de Janeiro. Estas atividades foram realizadas no 1º bimestre de 2018, levando 2 tempos de aula cada uma. Finalmente, a atividade sobre relações métricas no triângulo retângulo foi aplicada em duas turmas do 9º ano de uma mesma escola, no bairro do Lins, no 2º bimestre de 2018, sendo necessários 4 tempos de aula para sua realização. A quantidade de alunos em cada turma por atividade está descrita na tabela 1.

Tabela 1 – Total de alunos por turma e atividade.

Atividade	Turma	Nº de Alunos que realizou a atividade em cada turma	Nº total de alunos que realizou a atividade
A1	T1	26	45
	T2	19	
A2	T3	30	30
A3	T1	26	45
	T2	19	
A6	T4	20	42
	T5	22	
A7	T6	25	25

Legenda: A1= Condição de existência; A2= Rigidez; A3= Área do triângulo; A6= Relações Métricas no Triângulo Retângulo; A7= Tiângulo de Sierpinski; T1= Turma 1 do 7º ano; T2= Turma 2 do 7º ano; T3= Turma do 8º ano; T4= Turma 1 do 9º ano; T5= Turma 2 do 9ºano; T6= Turma do 6ºano.

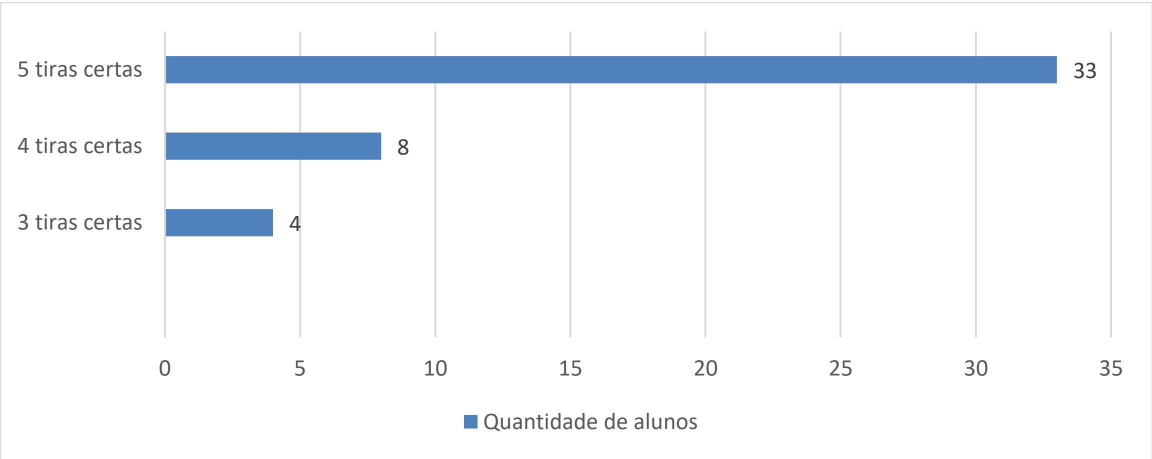
Fonte: O autor, 2018.

6.1 **Atividade 1 (Condição de existência do triângulo)**

A atividade 1, condição de existência, foi aplicada em duas turmas do 7º ano de duas escolas da rede municipal do Rio de Janeiro distintas. Esta atividade foi aplicada no primeiro bimestre do ano de 2018. Já na primeira etapa da atividade, onde os alunos tinham apenas que conferir o material recebido e medir as tiras com o auxílio de uma régua, surgiram algumas surpresas. Foi comum nas duas escolas a maioria dos alunos ter dificuldades em utilizar a régua para medir. O fato deles não saberem que era necessário colocar a ponta da tira sobre a marcação do zero para medir fez com que os alunos demonstrassem uma outra deficiência no aprendizado, que era não saber responder que cada tracinho da régua correspondia a 1 mm, já que as tiras que tinham tamanhos inteiros em cm não coincidiam exatamente nos números da régua.

Apesar da dificuldade com o manuseio da régua ser evidente na maioria dos alunos, a primeira etapa da atividade que consiste em medir as tiras foi realizada por 100% dos alunos, com nenhuma folha sendo deixada de ser preenchida com os tamanhos das tirinhas. Foi considerado um erro de medição caso o aluno encontrasse uma diferença maior que 2 mm do esperado. Desta forma, mesmo após explicações de como medir, puderam ser observados alguns erros no preenchimento. O gráfico a seguir mostra a quantidade de alunos que mediram corretamente 3 das 5 tiras, 4 das 5 e todas as 5 tiras corretamente.

Gráfico 1 – Quantidade de alunos por quantidade de medições certas das tiras.

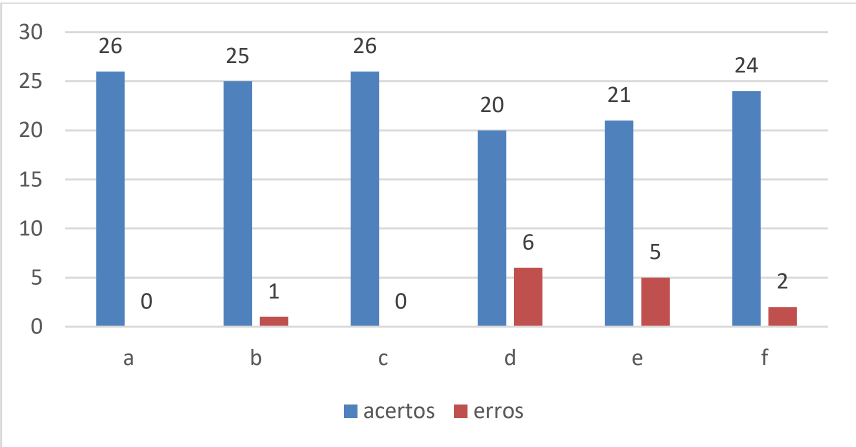


Fonte: O autor, 2018.

Os erros cometidos pelos alunos foram principalmente na tira amarela, cuja medida era de 3,5 cm, onde muitos acabaram colocando 3 cm ou 4 cm, e também na tira vermelha, que era a menor, medindo 2 cm.

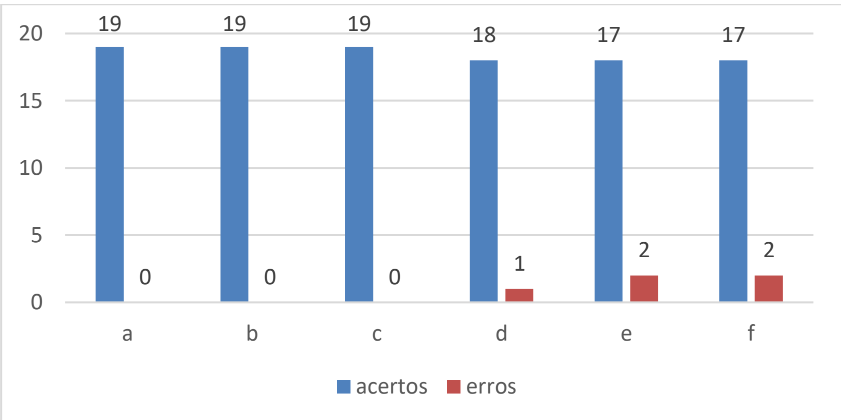
Na segunda etapa da atividade, em que os alunos devem montar ou tentar montar triângulos, foi exemplificado como a conexão das tiras era permitida, podendo ser conectadas apenas pelos extremos. Esta regra não foi compreendida por alguns alunos, o que fez com que montassem triângulo sobrepondo as tiras. A dificuldade manual na colagem das tiras fez com que naturalmente, na hora da colagem, algumas tiras ficassem sobrepostas ou espaçadas, apesar da montagem antes da colagem estar correta. A maioria dos alunos conseguiu marcar o S (sim) e o N (não) corretamente em todos os itens da folha de atividades proposta.

Gráfico 2 – Quantidade de acerto e erros por montagem na Turma 1(T1).



Fonte: O autor, 2018.

Gráfico 3 - Quantidade de acertos e erros por montagem na Turma 2 (T2)

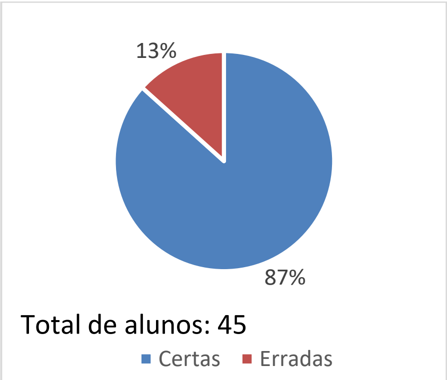


Fonte: O autor, 2018.

Na terceira etapa, cada aluno recebeu uma nova folha após terminar a segunda etapa, e para que fosse possível todos os alunos chegarem à conclusão desejada da atividade, nesta folha foram informados os tamanhos esperados das tiras e em quais itens era ou não possível, de fato, construir o triângulo.

A terceira etapa foi a de comparação de valores, onde o aluno vai preencher lacunas com a soma da medida de dois lados, qual é a medida do lado restante e a comparação entre esses dois valores. O preenchimento deveria ser feito com números associando as cores. Aqui temos uma breve introdução a um pensamento algébrico, onde o aluno acaba por obter o valor numérico da soma das tiras coloridas. Foi notada grande dificuldade na comparação dos valores mesmo quando se tratava de números inteiros. Os símbolos $>$, $<$ e $=$ já eram de conhecimento dos alunos, mas a dificuldade com o seu uso chamou atenção. A comparação foi feita corretamente pela maioria dos alunos.

Gráfico 4 – Comparações.



Fonte: O autor, 2018.

A quarta etapa consistia em preencher as lacunas presentes na conclusão. Após chegarem à conclusão da atividade, foram passados exercícios de fixação onde foi verificado um excelente resultado, o que mostrou que mesmo os que erraram alguma coisa no decorrer da atividade conseguiram atingir o aprendizado. Dos alunos que conseguiram atingir corretamente as comparações dos valores, apenas um em cada uma das turmas não conseguiu completar corretamente as lacunas na conclusão.

Considera-se que os níveis da teoria de Van Hiele foram observados de maneira sutil, sendo importantes no desenvolvimento do raciocínio. Vale ressaltar que a mudança de um nível para o outro pode ocorrer de maneira brusca, e a maior preocupação foi que os alunos não sentissem grandes dificuldades logo no início da atividade. Os recursos oferecidos pela atividade visam principalmente atingir os níveis 1 e 2 da teoria com visualização, uso do concreto e experimentação. Acredita-se que para identificar de forma precisa a qual dos níveis chegou cada um dos alunos após a realização da atividade seriam ainda necessárias outras avaliações. Ainda assim, analisando o que foi observado durante a atividade, pode-se dizer que a maioria dos alunos conseguiu sair do nível 1 e chegar até o nível 2, sendo que poucos chegaram até o nível 3, com a característica de desenvolver um raciocínio dedutivo informal, já que foi notada a necessidade de interferência do professor, o que mostra que o raciocínio informal existe mas ainda não está bem desenvolvido. Vale ressaltar que o nível obtido em um dado tema não determina o nível em um outro tema.

6.2 **Atividade 2 (Rigidez)**

A atividade 2 foi realizada em uma turma do oitavo ano do ensino fundamental em uma escola do município do Rio de Janeiro durante o terceiro bimestre de 2017. O contato incial com um quadrado feito de madeira cujos vértices eram conectados de forma que os lados pudessem se mover e um triângulo de madeira com os vértices conectados com o mesmo material por parafusos e porcas foi esclarecedor para os alunos, pois já ali eles perceberam que no caso do triângulo não conseguíamos mover os lados. A característica de rigidez e uma aplicação dela foram facilmente executadas com sucesso por todos os grupos de alunos, que não tiveram problemas em montar as treliças conectando pelos arames os palitos previamente furados.

Nesta atividade, a avaliação foi feita através de uma pesquisa posterior a esta realizada em sala, em que os alunos trouxeram imagens onde o triângulo estava presente nas construções. Os alunos apresentaram um trabalho sobre a importância dos triângulos nas construções, pesquisando sobre estruturas e curiosidades sobre os mesmos.

O resultado obtido nesta atividade foi excelente, com os alunos atingindo em sua totalidade os objetivos propostos.

Quando toma-se como tema a rigidez do triângulo e faz-se um paralelo com os níveis da teoria de Van Hiele, os alunos apresentam grande crescimento em pouco tempo. Mais uma vez, a atividade é bastante focada nos níveis 1 e 2, com material concreto e experimentação. Acredita-se que, nesta atividade, todos os alunos conseguiram ultrapassar esses 2 primeiros níveis, chegando até o nível 3, uma vez que já eram capazes de relacionar o que tinham acabado de experimentar usando palitos de sorvete com construções de prédios ou pontes. Existiu aqui um raciocínio dedutivo informal, onde pela experimentação os alunos conseguiram entender a rigidez do triângulo. Os alunos mostraram interesse e a atividade gerou uma boa pesquisa sobre construções em que aparecem triângulos.

6.3 **Atividade 3 (Área do triângulo)**

Esta atividade foi realizada nas mesmas turmas em que ocorrera a atividade 1. Na primeira etapa, os alunos não tiveram grandes dificuldades em destacar os elementos do triângulo pedido. Mesmo o material não especificando em relação a qual dos lados a altura deve ser traçada, o espaço destinado à colagem do triângulo acabou fazendo com que todos os alunos posicionassem o triângulo da mesma maneira. Neste momento, percebeu-se a necessidade em falar das três alturas de um triângulo. Muitos alunos pularam o item e da folha de atividades e não sinalizaram o pé da altura.

Na segunda etapa, os alunos recortaram o triângulo e juntaram as 3 peças formando um retângulo, mas mesmo com os triângulos tendo sido feitos sobre uma malha quadriculada, foi possível ver cortes de maneira errada e montagens que não correspondiam a um retângulo.

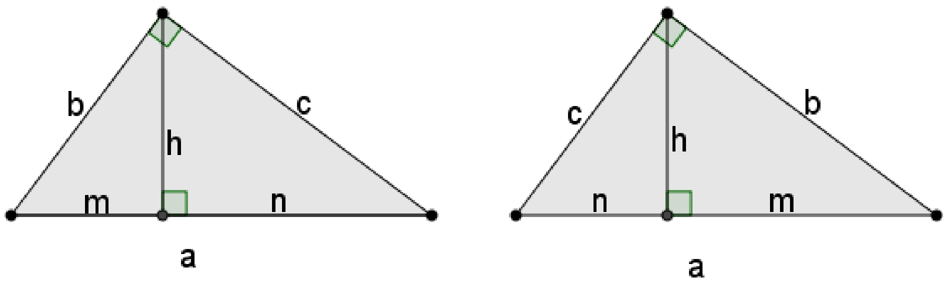
Na terceira etapa, apenas pouco mais da metade conseguiu responder todas as 6 perguntas corretamente. Os itens e e f da folha de atividades entregue pelos alunos apareceram, algumas vezes, em branco.

Quanto aos níveis da teoria de Van Hiele, pode-se destacar que os níveis 1, 2 e 3 estão presentes nesta atividade. Vale ressaltar que o conhecimento prévio do aluno deve ser levado em consideração, o que muitas vezes pode acabar gerando um desestímulo, já que nesta atividade tem-se como característica começar por algumas observações básicas e a fórmula da área do triângulo pode já ser de conhecimento de alguns. O objetivo é sim chegar à fórmula da área do triângulo, porém, vale ressaltar que a maneira com que a atividade se desenrola cria um espaço para se discutir alguns assuntos de geometria que foram anteriormente estudados ou que poderiam ser introduzidos. Cerca de metade dos alunos conseguiu, de fato, chegar ao nível 3, escrevendo a relação entre a área do triângulo e a área do retângulo obtido de maneira satisfatória sem grandes intervenções do professor. Os que chegaram ao nível 3 conseguiram deduzir as fórmulas com a ajuda do concreto. A questão da conservação da área foi destacada de maneiras diferentes pelos alunos, com uns falando que “o retângulo é o triângulo recortado, e por isso tem a mesma área”, ou até mesmo “o corte do triângulo não fez perder área”. A maior parte dos alunos, no entanto, teve dificuldade em escrever as fórmulas, sendo necessário que o professor ajudasse a observarem que a base do triângulo e a base do retângulo possuíam a mesma medida, mas já em relação às alturas relativas a essa base, a altura do retângulo era a metade da altura do triângulo.

6.4 **Atividade 6 (Relações métricas no triângulo retângulo)**

Esta atividade foi aplicada em duas turmas do 9º ano do ensino fundamental de uma mesma escola, no bairro do Lins, no 2º bimestre de 2018. Todos os grupos de alunos conseguiram montar a cartolina da forma proposta seguindo o roteiro, apesar de ocorrerem dificuldades na montagem do quadrado em alguns grupos. Todos chegaram corretamente às fórmulas desejadas e conseguiram responder às perguntas do roteiro proposto corretamente utilizando, principalmente, o conceito de conservação de área. Devido à forma com que a atividade foi feita, não é simples quantificar os alunos que conseguiram atingir o objetivo esperado. A turma do turno da manhã apresentou uma frequência de 20 alunos no dia da atividade, sendo dividida em 4 grupos de 5 alunos. Já a turma do turno da tarde apresentou uma frequência de 24 alunos, sendo dividida em 4 grupos de 5 alunos e 1 grupo de 4 alunos. Na turma da manhã nenhum grupo que à relação $c^2 = n.a$, porém vale ressaltar que esta relação é equivalente a $b^2 = m.a$, já que os catetos que são chamados de b e c podem ter suas nomeações trocadas juntamente com a projeção m do cateto b e a projeção n do cateto c, conforme indica a Figura 47. Até mesmo por isso, os grupos que chegaram nessas relações tiveram as mesmas questões propostas para resolverem.

Figura 47 – Trocando os catetos b e c.



Fonte: O autor, 2018.

A dinâmica da apresentação do trabalho após a confecção dos cartazes contou com cerca de 15 minutos para cada grupo apresentar como foi feita a cartolina e para resolver duas questões propostas no roteiro. Foram escolhidos dois alunos de cada grupo de forma aleatória pelo professor para resolverem as questões propostas. Os alunos sabiam que seriam escolhidos dois dentre eles, mas não sabiam quem seria escolhido, e por ser dada uma nota para o grupo, ocorreu a cobrança entre os alunos para que todos fossem capazes de resolver as questões. A verificação se de fato houve entendimento das fórmulas apresentadas por um outro grupo foi feita em aulas posteriores, em um teste. O resultado mostrou que os alunos fixaram melhor a fórmula que fazia parte de seu grupo. Por exemplo, um aluno que fazia parte do grupo 1, conseguiu realizar com êxito as questões que envolviam o teorema de Pitágoras no teste, a relação $a^2 = b^2 + c^2$, porém cometeu erros em exercícios que cobravam as outras relações, seja no desenvolvimento da expressão ou até mesmo na identificação dos elementos do triângulo.

A forma de interação entre os grupos por meio de uma apresentação não surtiu o efeito esperado. Os alunos aparentavam um certo nervosismo e vergonha por não estarem acostumados com apresentações orais de trabalho. Enquanto um dos grupos aparesentava seu trabalho e resolvia suas questões, os demais alunos assistiam atentamente em silêncio. Ficou evidente que alguns passos da resolução não estavam claros para alguns alunos que assistiam e, ao contrário do que é feito quando é o professor que está explicando determinado assunto, os alunos ouvintes não fizeram perguntas com o intuito de tirar dúvidas para o colega que apresentava. Aparentemente, os alunos estavam entendendo as explicações de seus colegas, mas isto não foi comprovado no teste posteriormente aplicado. Observou-se que a interação funcionou muito bem apenas dentro de cada grupo e não entre os grupos.

O fato de os alunos não terem tido dificuldade em resolver as questões que envolviam a relação métrica proposta ao seu grupo, mas terem apresentado uma certa dificuldade nas questões com as demais relações métricas, gerou uma certa especialização dos alunos, ou seja, os alunos conseguiam resolver as questões parecidas com as que seu grupo havia resolvido, mas não conseguiam ter a mesma eficiência com as questões que utilizavam as relações utilizadas pelos outros grupos. Uma forma de amenizar isso seria começar a atividade da mesma forma: que cada grupo ficasse responsável por uma das fórmulas das relações métricas assim como foi feito. Também cada grupo continuaria com a apresentação dos cartazes, onde seria cobrado que os alunos explicassem para os seus colegas o que aconteceu de um quadrado de uma das figuras da cartolina para o outro quadrado na outra figura e a qual relação métrica se chegou. Porém, de outra maneira, não aconteceriam as resoluções de questões no quadro, mas sim, todos resolveriam todas as questões com as diversas relações métricas, não se restringindo à relação métrica que o seu grupo apresentou.

Os níveis 1 e 2 da teoria de Van Hiele são atingidos pela manipulação do concreto e pela experimentação, montando-se o quebra-cabeça com as peças. A relação entre as peças associada à conservação da área gera uma fórmula. Os alunos que chegam a esta relação sem grandes intervenções do professor são considerados no nível 3. Como todos os grupos realizaram a atividade de maneira eficaz, tem-se como avaliação que todos conseguiram avançar até o nível 3 da teoria.

6.5 **Atividade 7 (Triângulo de Sierpinski)**

Esta atividade foi realizada em uma turma do 6º ano do ensino fundamental durante o 3º bimestre de 2017, em uma escola da rede municipal do Rio de Janeiro localizada no bairro Lins de Vasconcelos. Como os alunos não têm o costume de utilizar compasso, par de esquadrados ou o transferidor durante as séries iniciais do ensino fundamental, esta atividade apresentou-se como um primeiro contato de muitos deles com o material de desenho geométrico que foi utilizado para a construção do triângulo equilátero da atividade.

O objetivo era explorar a potenciação, chegando à identificação de um padrão, mas inicialmente isto acabou por ficar em segundo plano devido à grande dificuldade no manuseio do material para construção do triângulo equilátero. Foi necessário explicar o uso e até mesmo informar o nome do material usado na construção dos triângulos, já que alguns alunos nunca tinham ouvido falar em transferidor, por exemplo. Apesar disso, ao serem perguntados o que era ângulo, passaram a ideia de ângulo como uma abertura. Os alunos utilizaram bastante a borracha para acertar seus traços na montagem de um triângulo equilátero de 40 cm de lado, já que sempre acabavam por deslizar a régua sobre a cartolina, mudando assim o ângulo. A atividade teve grande importância para o aluno usar o transferidor, conhecer as medidas dos ângulos do par de esquadros e até mesmo aprender como marcar um ângulo de 60º, seja utilizando o transferidor, o esquadro ou o compasso.

A divisão dos lados do triângulo na metade foi feita com o auxílio da régua, medindo-se os lados. Na etapa 1, divimos 40 cm por 2, na etapa 2, 20 cm por 2, na etapa 3, 10 cm por 2, e quando chegamos na etapa 4, o aluno deve dividir 5 cm por 2. Neste momento, mesmo o aluno que ainda não desenvolveu a habilidade de dividir e encontrar um número decimal como quociente, utiliza-se da régua para contar os milímetros. Desta forma, vimos que o aluno entendeu que a régua é milimetrada e que 10 mm correspondem a 1 cm, já que 2 cm junto com 5 mm correspondem a 2,5 cm. Esta última etapa tornou-se bastante demorada.

As conclusões desejadas inicialmente em relação à potência tiveram que ser retomadas em outras aulas, já que os alunos ainda não tinham a base suficiente esperada para que a atividade fosse realizada em 100 minutos de aula. Na aula seguinte, os alunos tiveram que responder a 3 perguntas. A primeira foi:

"Quantos triângulos foram pintadas em cada uma das 4 etapas?"

Como as etapas construídas em um momento anterior estavam expostas no mural da sala, os alunos não tiveram dificuldades em contar de um em um os triângulos pintados em cada uma das atividades. Assim, o índice de acerto foi de 100%. A segunda pergunta foi:

"Quantos triângulos serão pintados na 5ª etapa?"

Nesta, poucos alunos arriscaram um palpite. Alguns deles perceberam que os números 3, 9, 27, 81 faziam parte de uma sequência, mas os primeiros palpites foram 87 (somando 6 ao 81) e 90 (somando 9 ao 81). Até que um dos alunos percebeu que os números estava sendo multiplicados por 3. A partir da fala deste aluno, todos os demais conseguiram observar que bastava então multiplicar o 81 por 3 para encontrar o próximo número desta sequência. Caso nenhum aluno percebesse, eles receberiam dicas de modo a chegarem cada vez mais perto da resposta.

A generalização foi feita pedindo para o aluno completar o seguinte raciocínio:

1ª etapa: $3 = 3^1$

2ª etapa: $3 \times 3 = 3^2 = 9$

3ª etapa: $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$

4ª etapa: $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$

5ª etapa: $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$

10ª etapa: $3 \times 3 \times ... \times 3 = 3^{10}$

n-ésima etapa: $3 \times 3 \times ... \times 3 =$?

Dois alunos dentre os 25 do total não conseguiram completar com 3^n. Um colocou como resposta 3^3 e o outro $3n$. Apesar da atividade ter levado mais tempo que o programado incialmente, teve um retorno muito positivo por parte dos alunos.

Quanto aos níveis da teoria de Van Hiele observados na atividade, nota-se que a grande dificuldade em uma escrita mais formal influencia na generalização dos alunos que conseguem ir bem enquanto tem o visual à sua disposição. Portanto, a abstração para as etapas seguintes do triângulo de Sierpinski ainda é de difícil assimilação por parte dos alunos. Apesar desta atividade conter a parte concreta dos triângulos, que podem ser manipulados por eles, devido à necessidade de construção dos triângulos equiláteros ser parte do trabalho dos alunos, notou-se que, ao contrário das atividades anteriores, o concreto não serve como um auxílio mas sim faz parte do desenvolvimento da atividade. Para que a atividade não ganhasse um grau de dificuldade alto já no início, foi necessário grande preparação dos alunos para a construção dos triângulos equiláteros, sendo explicitadas três maneiras distintas de se obter um triângulo equilátero. A forma recursiva de se obter os triângulos etapa por etapa no triângulo de Sierpinski foi feita de maneira mecânica e, por isso, houve a necessidade do professor intervir com as observações importantes sobre o que aconteceu de uma etapa para a outra, destacando a quantidade de triângulos que vão aparecendo. Quando fazem essa análise, sendo capazes de observar que aparecem as potências de base 3 sem grandes intervenções do professor, os alunos atingem o nível 3 da teoria. Poucos alunos, no entanto, perceberam a presença de números que poderiam ser relacionados com potências, ou que de uma etapa para outra a quantidade de triângulos observada foi multiplicada por 3. Os alunos observaram que a quantidade de triângulos aumentava, mas não associaram o aumento a uma progressão com um fator multiplicativo. Ao serem perguntados se os números obtidos de uma etapa para a outra estavam sendo multiplicados por um mesmo valor, a maioria dos alunos finalmente conseguiu observar a presença da multiplicação por 3, conseguindo assim fazer, com o auxílio do professor, a associação com as potências de base 3.

CONCLUSÃO

É importante a busca por alternativas que atraiam o olhar dos alunos para a Geometria, fazendo com que a resistência e o mito da dificuldade da Matemática sejam amenizados. Com o grande obstáculo em relação à estrutura de ensino proposta aos professores da rede municipal, onde existem provas obrigatórias e materiais próprios da rede que de certa forma acabam engessando o conteúdo, é necessário que a criatividade seja utilizada para que as aulas sejam mais interessantes e dinâmicas.

Relações e propriedades envolvendo os triângulos, em que todos dizem ser difícil o entendimento, podem ser amenizadas quando a abordagem parte de algo mais concreto até chegar ao mais abstrato. A ideia de trabalhar com material concreto, lúdico, que gere um maior dinamismo, faz com que o público atingido inicialmente seja maior. Entretanto, ao realizar este trabalho, percebeu-se que o uso constante destes materiais, quando se torna rotineiro, passa a não despertar o mesmo interesse inicialmente observado. Desta forma, o professor deve estar sempre na tentativa de criar métodos diferenciados de abordagem do conteúdo para continuar despertando o interesse do seu alunado.

Foi observado também que a diversidade de alunos influencia diretamente no tipo de metodologia a ser utilizada, já que alguns alunos preferem aulas mais tradicionais, pois já estão mais adaptados a esses tipos de aula, enquanto outros preferem aulas mais dinâmicas, uma vez que estas possibilitam um aprendizado mais interativo. Contudo, para o tema proposto de triângulos, as atividades elaboradas mostraram eficiência e um resultado satisfatório no que diz respeito à aprendizagem do conteúdo, com ressalvas de que a dificuldade de preparação do material e a criatividade necessária para utilizar os materiais possam desmotivar o professor. Porém, essas dificuldades são compensadas ao ver o entusiasmo do aluno ao entender um determinado problema e desenvolver um raciocínio lógico, mostrando que este método pode ser uma alternativa eficiente sem que necessite ser a única forma utilizada no aprendizado do conteúdo.

O uso da teoria de Van Hiele seguindo os seus níveis para montar as atividades se mostrou eficaz. Um grande ganho foi que, após as atividades, os alunos criaram uma base forte, sem a necessidade de decorar as fórmulas, tendo havido um entendimento principalmente graças ao uso inicial do concreto.

REFERÊNCIAS BIBLIGRÁFICAS

ASSIS, T.A.; MIRANDA, J.G.V.; MOTA, F.B.; ANDRADADE, R.F.S.A.; CASTILHO,C.M.C. *Geometria fractal:* propriedades e características de fractais ideais. Revista Brasileira de Ensino de Física, v.30, n.2, 2304, 2008.

BÖHM, O. *Jogo, brinquedo e brincadeira na educação*. Universidade Comunitária da Região de Chapecó. Santa Catarina. Chapecó, 2015.

CARVALHO, J. B. P. ; ROQUE, T. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2012.

EUCLIDES. *Os elementos/Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo*. São Paulo: Editora UNESP, 2009. 600p.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*, tradução Hygino H. Domingues 5ª ed., Unicamp, Campinas, 2011.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. *Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática*. Boletim SBEM-SP, n. 7, 1990.

GALEAZZI, W. R. *Proposta de ensino de Geometria euclidiana plana para o sexto ano do ensino fundamental sob a ótica do raciocínio lógico-dedutivo*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2015.

LIMA, E. M. B. *Um estudo sobre as disciplinas de Geometria em cursos de licenciatura em Matemática*. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul, 2014. 34p.

LOPES, M. C. *Ludicidade homana: contributos para a busca dos sentidos do humano*. Aveiro: Universidade de Aveiro, 2004.

LUCKESI, C. C. *Ludicidade e atividades lúdicas: uma abordagem a partir da experiência interna*. Salvador: GEPEL, Programa de Pós-Graduação em Educação, Faced/UFBA, 2002. (Coletânea Educação e Ludicidade – Ensaios 02).

MAGALHÃES, J.R.M.; MALITE, M. *Treliças metálicas espaciais:* alguns aspectos relativos ao projeto e à construção. Em caderno de engenharia de estruturas, nº2. Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

MASSA, M. S. *Ludicidade: da Etimologia da Palavra à Complexidade do Conceito*. APRENDER – Cad. de Filosofia e Psic. Da Educação. Vitória da Conquista. Ano IX, n.15, p.111-130, 2015.

MIRANDA, D. *Como construir o tangram*. [2016?] .Disponível em: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/como-construir-tangram.htm>. Acesso em 2 abr. de 2018.

MOLLÁ, J. G. *Fractal Triángulo Sierpinski com tijera y papel.* 2009. (4m53s). Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=aepxB7Y-0UA >. Acesso em 2 abr. de 2018.

MORATORI, P. B. *Por que utilizar os jogos educativos no processo de ensino aprendizagem?* Dissertação de Mestrado de Informática aplicada à educação, UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.

MOREIRA, M. D. D. *Revisitando Euclides para o Ensino de Áreas:* Uma Proposta para as Licenciaturas. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, 2010.

PASSOS, A. Q. *Van Hiele, Educação matemática realística e gepema:* algumas aproximações. 2015. 148 f. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina, 2015 apud FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. *An investigation of the Van Hiele modelo f thinking in geometry among adolescentes.*New York: Brooklyn College, CUNY School of Education, 1985.

PIAGET, J. *A psicologia da criança.* Ed. Rio de Janeiro. Bertrand Brasil, 1998.

SILVA, D. D. *Área de um triângulo.* [2016?] Disponível em: <https://www.infoescola.com/Geometria/area-de-um-triangulo/>. Acesso em 2 abr. de 2018.

SILVEIRA, M. R. A. *"Matemática é difícil": Um sentido pré-constituído evidenciado na fala dos alunos*. 2002. Disponível em: <www.25reuniao.anped.org.br/marisarosaniabreusilveirat19.rtf >. Acesso em 12 jul. de 2018.

VAN HIELE, P. M. (1984). *A child's thought and geometry*. In D. Fuys, D. Geddes, & R. Tischler (Eds.), English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele (pp. 243-252). Brooklyn: Brooklyn College. (Original document in French. La pensee de 1'enfant et la geometrie, Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathematiques de l'Enseignment Public. 1959, 198, 199-205)

VARGAS, L. A. B. *Comportamento estrutural de pontes estaiadas: efeitos de segunda ordem.* Ed. São Paulo, 2007. 153 p. p.1- 29.

VIDA ENGENHARIA. *Treliças – Como funcionam?.* 2017. (8m32s). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Zc3TVaNZzjA>. Acesso em 23 de junho de 2018.

VYGOTSKY, L. S. *O papel do brinquedo no desenvolvimento.* In: A formação social da mente. São Paulo: Ed. Martins Fontes, 1989. 168p. p.106-118.

______. *A formação social da mente.* São Paulo: Martins Fonte, 1998.

ANEXO A – Atividade 1: Condição de existência do triângulo (2 folhas)

Atividade de Matemática – Condição de existência do triângulo

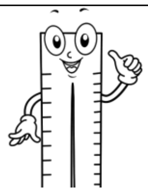
Professor: Rafael Souza

Matemática – ___ ano Turma: ____ Data: ___/___/_____

PROFMAT

Aluno: ____

Você recebeu:



- 3 tiras azuis; 2 tiras vermelhas; 5 tiras pretas; 3 tiras verdes; 5 tiras amarelas.

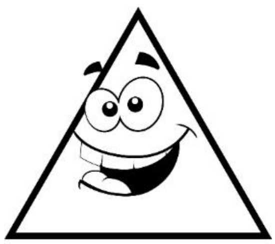
Observação: As tiras de mesma cor, possuem o mesmo tamanho.

MEDIR

Com o auxílio de uma régua, meça as tiras, e complete com a medida de cada uma delas em cm.

Azul: ____ Vermelha: ____ Preta: ____ Verde: ____ Amarela: ____

MONTAR TRIÂNGULOS



O triângulo é uma figura geométrica formada por 3 lados. Para formarmos um triângulo utilizando as tiras como lados, devemos ter 3 tiras cujos os extremos estejam conectados, formando uma figura com 3 lados.

Tente montar os triângulos de acordo com cada item, e responda se foi ou não possível essa montagem. Complete com S para quando é possível, e com N para quando não é possível.

a) 1 tira azul, 1 tira preta e 1 tira amarela. ( )	b) 1 tira preta, 1 tira verde e 1 tira amarela. ( )	c) 3 tiras pretas. ( )
d) 1 tira verde e 2 tiras amarelas. ( )	e) 1 tira azul, 1 tira amarela e 1 tira verde. ( )	f) 2 tiras vermelhas e 1 tira azul. ( )

Atividade de Matemática – Condição de existência do triângulo

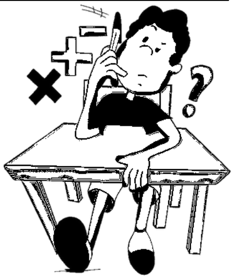
Professor: Rafael Souza

Matemática – ___ ano Turma: ____ Data: ___/___/_____

Aluno: ____

PROFMAT

COMPARAR VALORES



João estava estudando os triângulos, e acha que o tamanho dos lados nos diz quando é possível ou não construir um triângulo.

A partir dos tamanhos obtidos, faça os seguintes cálculos:

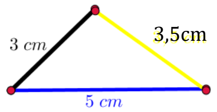
Soma de dois lados | Lado restante | Comparação entre os valores: >, < ou =

a)

azul+preto = ☐ amarela = ☐

azul+amarela = ☐ preto = ☐

preto+amarela = ☐ azul = ☐

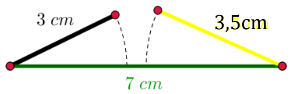


b)

preto+verde = ☐ amarela = ☐

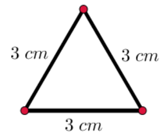
preto+amarela = ☐ verde= ☐

verde+amarela = ☐ preto= ☐



c)

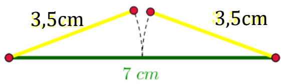
preto+preto = ☐ preto = ☐



d)

verde+amarela = ☐ amarela = ☐

amarela+amarela = ☐ verde = ☐

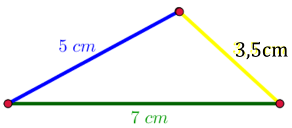


e)

azul+amarela = ☐ verde = ☐

azul+verde= ☐ amarela = ☐

amarela+verde= ☐ azul = ☐



f)

vermelha+vermelha = ☐ verde = ☐

verde+vermelha = ☐ vermelha = ☐

CONCLUSÃO

Observe que as vezes a soma de dois dos lados é maior do que o lado restante, e as vezes é menor que o outro lado. Nos itens ___ , ___ e ___ foi possível formar um triângulo. Nestes casos a soma de dois lados é ____________ do que o lado restante. Nos itens ___ , ___ e ___ não foi possível formar um triângulo. Nestes casos, uma das somas de dois lados é ___________ ou ____________ ao lado restante.

ANEXO B – Atividade 3: Descobrindo a área do triângulo

Atividade de Matemática – Descobrindo a área do triângulo

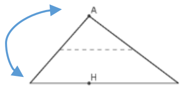
Professor: Rafael Souza

Matemática – ___ ano Turma: ____ Data: ___/___/_____

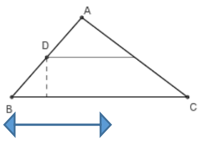
Aluno: ____

1) Cole no espaço ao lado, um dos triângulos que recebeu e faça o que é pedido.
   a) Dê nome aos vértices. (A, B e C)
   b) Marque todos os ângulos internos utilizando diferentes cores.
   c) Identifique a base do triângulo.
   d) Trace a altura do triângulo.
   e) Chame o pé da altura de H.
   f) Escolha uma cor clara e pinte a área do triângulo.

2) Siga as instruções para transformar o seu outro triângulo em um retângulo.
   a) Repita as etapas b e f do item anterior.
   b) Dobre a figura unindo o pé da altura e o vértice oposto. Estamos dividindo a altura ao meio e formaremos um novo triângulo.



   c) Faça uma dobra colocando um dos vértices da base sobre a base como mostra o exemplo ao lado, formando um triângulo retângulo.



   d) Recorte os dois triângulos obtidos, e construa um retângulo utilizando as 3 peças. Cole-o no espaço acima.
   e) Dê nome aos vértices do retângulo. (A, B, C e D)
   f) Identifique a base do retângulo.
   g) Identifique a altura do retângulo.

3) Responda as seguintes perguntas:

a) O que podemos dizer em relação ao tamanho da base do triângulo e o tamanho da base do retângulo?

b) O que podemos dizer em relação ao tamanho da altura do triângulo e o tamanho da altura do retângulo?

c) Qual é a área do retângulo obtido?

d) Qual é a área do triângulo inicial?

e) Qual é a fórmula utilizada para calcularmos a área de um retângulo?(Relacione a base e a altura do retângulo)

f) Qual é a fórmula utilizada para calcularmos a área de um triângulo? (Relacione a base e a altura do triângulo)

Anexo C – Atividade 5: Semelhança de triângulos (3 folhas)

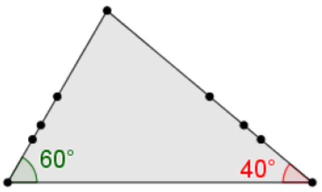
Atividade de Matemática – Semelhança de triângulos

Professor: Rafael Souza

Matemática - __ ano Turma: _______ Data: ____/____/_______

Aluno:____

PROFMAT

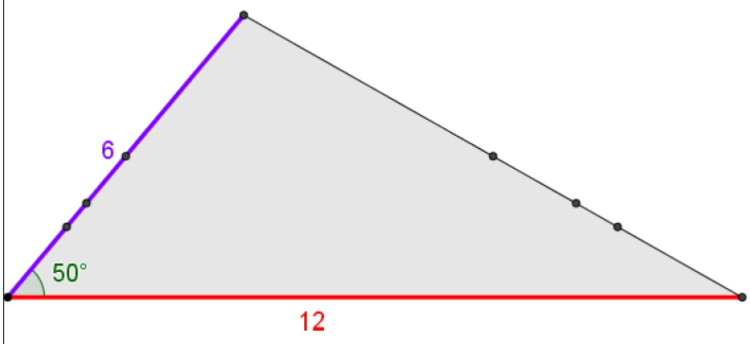


1) Caso AA: Quando dois triângulos possuem 2 ângulos congruentes, eles são ditos semelhantes.

Verifique qual dos triângulos recebidos não é o semelhante ao da figura ao lado.

____

____



2) CASO LAL: Quando dois triângulos possuem dois lados proporcionais e o ângulo entre esses lados congruente, eles são ditos semelhantes.

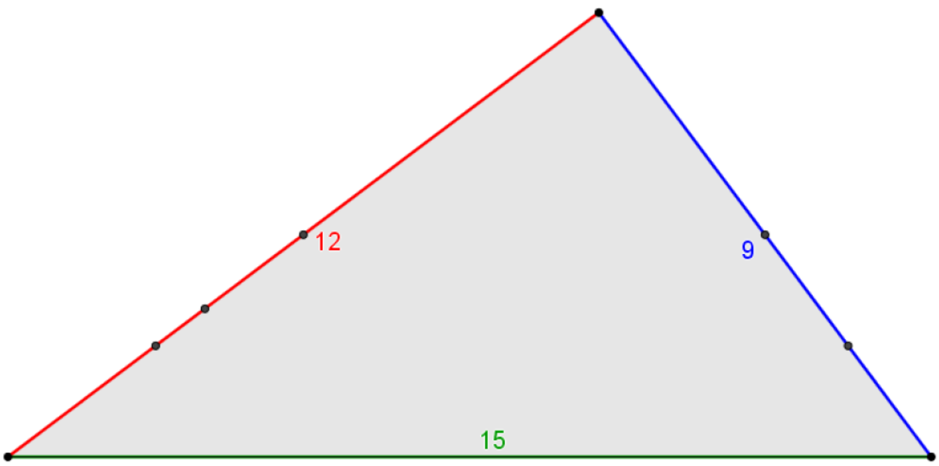
Verifique qual dos triângulos recebidos não é o semelhante.

____

____

____

____

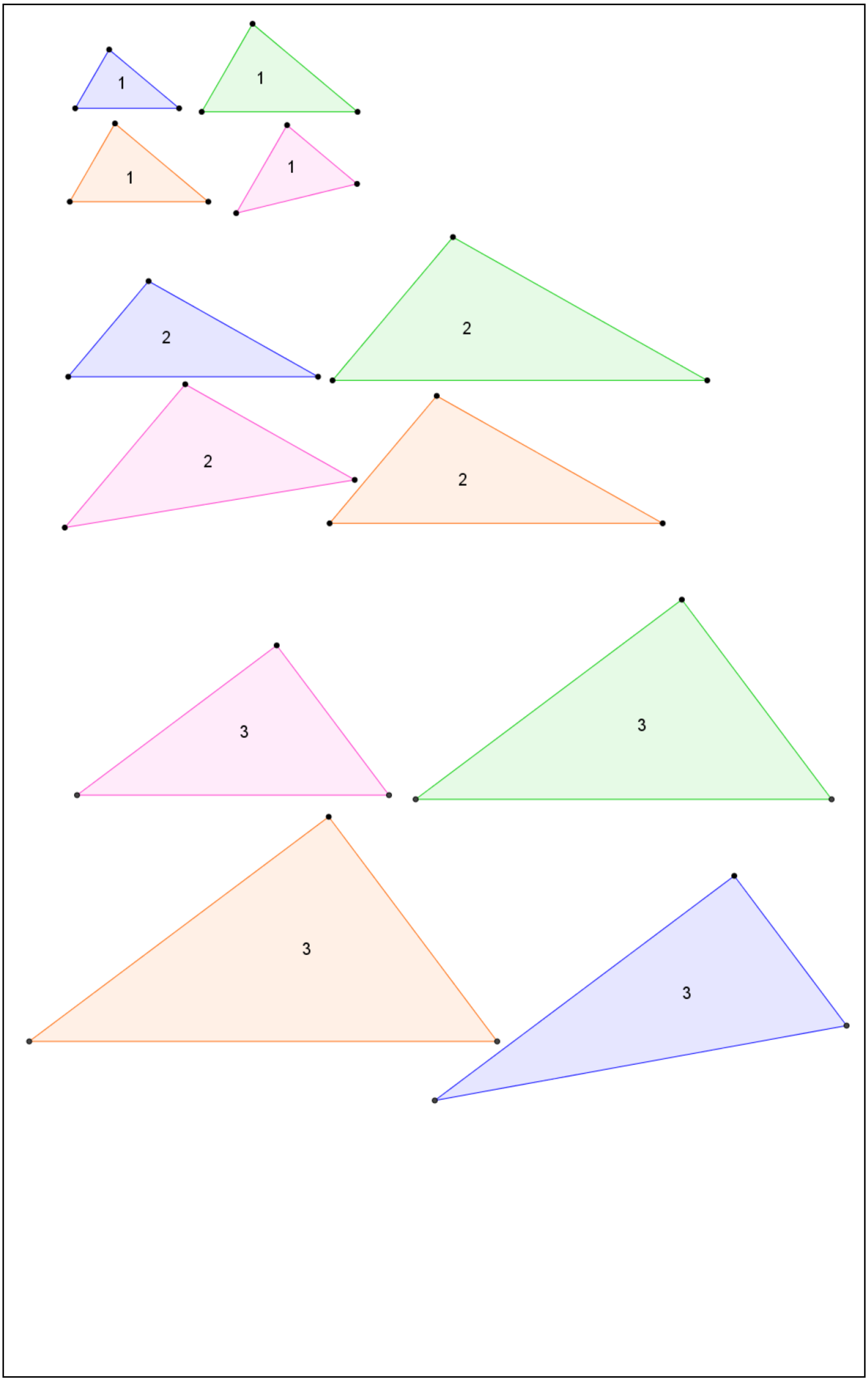


3) CASO LLL: Quando dois triângulos possuem os 3 lados proporcionais, eles são ditos congruentes.

Verifique qual dos triângulos recebidos não é o semelhante.

____

____


1
1
1
1
2
2
2
2
3
3
3
3

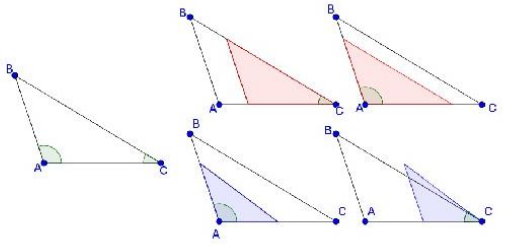
Exercícios – Semelhança de triângulos

Professor: Rafael Souza

Matemática - __ ano Turma: _______ Data: ____/____/_______

Aluno:____

1) Júlio recebeu dois triângulos, um azul e um vermelho. Para descobrir se o triângulo recebido é semelhante ao triângulo ABC, Júlio colocou os triângulos recebidos sobre o triângulo ABC de modo a observar dois dos ângulos, assim como mostra a figura. A que conclusão Júlio pode chegar quanto a semelhança entre os triângulos azul e vermelho em relação ao triângulo ABC?

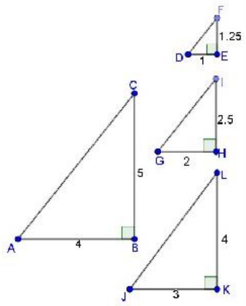


____

____

____

2) O triângulo ABC possui lado AB=4, BC=5 e o ângulo B=90º. Os triângulos DEF, GHI e JKL também retângulos, podem ser observados na figura ao lado. Complete as lacunas com V para uma afirmativa verdadeira e F para as falsas, justificando quando falsas.



( ) Os triângulos DEF e ABC são semelhantes e possuem razão de semelhança igual a 1:2.

____

( ) Os triângulos JKL e ABC não são semelhantes.

____

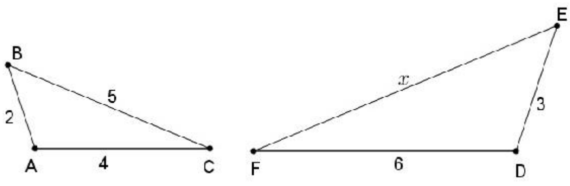
( ) O triângulo GHI não é semelhante ao triângulo DEF.

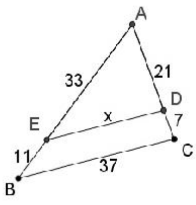
____

( ) Todos os triângulos retângulos são sempre semelhantes.

____

3) Sabendo que os triângulos são semelhantes, calcule o valor de x.

a) 

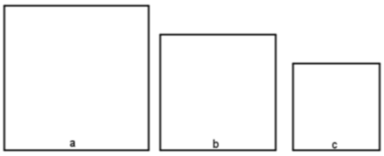
b) 

4) Para descobrir a altura de um prédio, Luiz mediu a sombra do edifício e, em seguida, mediu sua própria sombra. A sombra do prédio media 7 metros, e a de Luiz, que tem 1,6 metros de altura, media 0,2 metros. Qual a altura desse prédio?

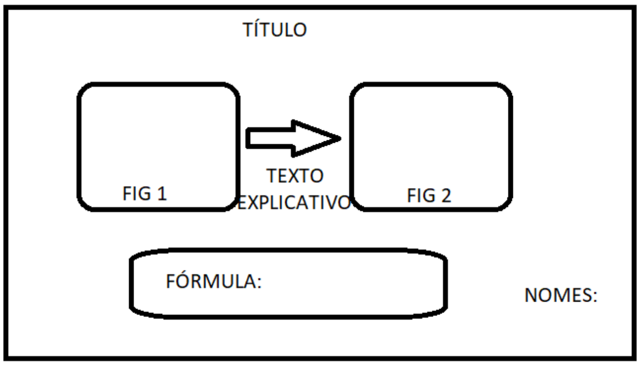
Anexo D – Atividade 6: Relações métricas no triângulo retângulo (5 folhas, 1 por grupo)

Você recebeu:

- 8 triângulos (4 com a marcação de uma altura e 4 sem a marcação da altura)
- 3 quadrados de diferentes tamanhos (a, b e c)
- Cartolina, cola e tesoura.



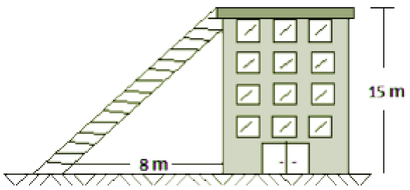
Esboço da cartolina



- Título sugerido: Relações métricas no triângulo retângulo
- Montando a figura 1: Monte um quadrado utilizando 2 triângulos sem marcação, 2 triângulos com marcação (corte os triângulos na marcação se necessário) e o quadrado maior (lado a)
- Montando a figura 2: Monte um quadrado do mesmo tamanho da figura 1, utilizando as figuras restantes.
- No texto explicativo, escreva quais mudanças acontecem de um quadrado para o outro. Exemplo: Substituímos o quadrado de lado ‘a’ pelos quadrados de lado ‘b’ e lado ‘c’, mantendo a mesma área.
- Fórmula: Escreva a relação entre as áreas dos quadrados de lados a, b e c.
- Não esqueça de colocar o nome dos componentes do grupo.

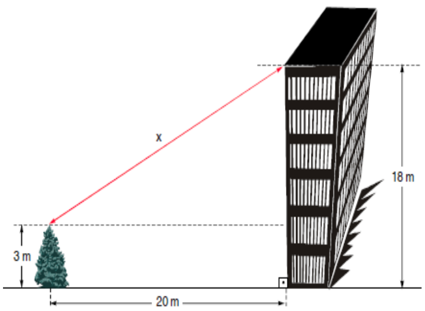
APLICANDO A FÓRMULA OBTIDA:

1) A figura mostra um edifício que tem 15 m de altura, com uma escada colocada a 8 m de sua base ligada ao topo do edifício



O comprimento dessa escada é de:

2) A altura de uma árvore é 3 m e ela está a 20 m de um edifício cuja altura é 18 m. Qual a distância entre o ponto mais alto da árvore e o ponto mais alto do edifício?

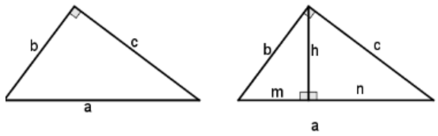


NOMES: ____
____
____
____

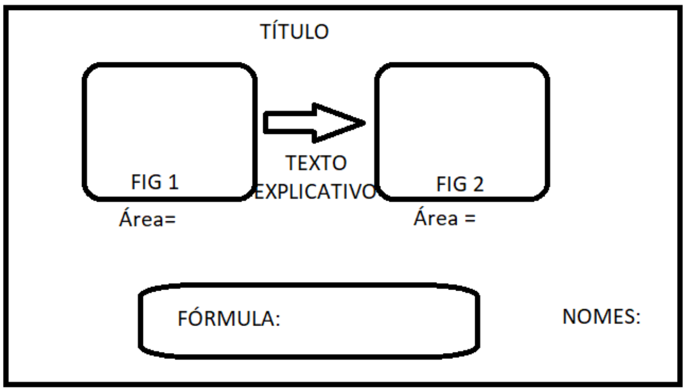
Instruções para confecção da cartolina – GRUPO 2

Você recebeu:

- 4 triângulos (2 com a marcação de uma altura e 2 sem a marcação da altura)
- Cartolina, cola e tesoura.



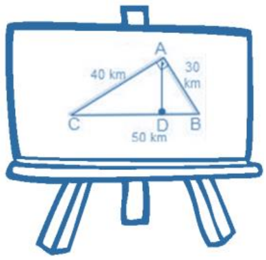
Esboço da cartolina



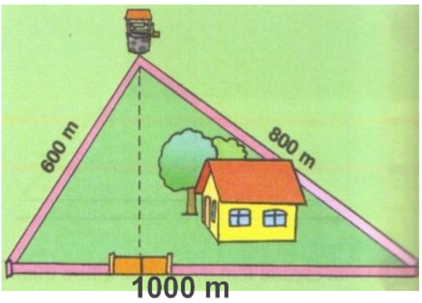
- Título sugerido: Relações métricas no triângulo retângulo
- Montando a figura 1: Monte um retângulo utilizando 1 triângulo sem a marcação e 1 triângulo com a marcação (se necessário, corte o triângulo na marcação).
- Montando a figura 2: Monte um novo retângulo, (com diferente cálculo de área) utilizando as peças restantes.
- No texto explicativo, escreva quais mudanças acontecem de um quadrado para o outro. Exemplo: Mudamos a posição dos triângulos, e construímos um outro retângulo.
- Área: Escreva como podemos calcular a área do retângulo obtido na figura 1, e como podemos calcular a área do retângulo obtido na figura 2.
- Fórmula: Escreva a relação entre as áreas dos retângulos obtidos
- Não esqueça de colocar o nome dos componentes do grupo.

APLICANDO A FÓRMULA OBTIDA:

1) A professora Carolina passou um exercício para Sebastião, no qual ele precisa descobrir a distância entre os pontos A e D. Vamos ajudá-lo a resolver. Qual a resposta correta?



2) A chácara de Ângela tem a forma de um triângulo retângulo e as dimensões indicadas na figura. Qual a distância entre o portão e o poço?

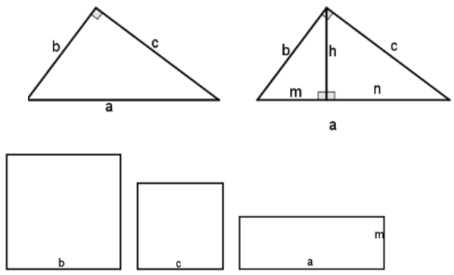


NOMES: ____
____
____
____
____

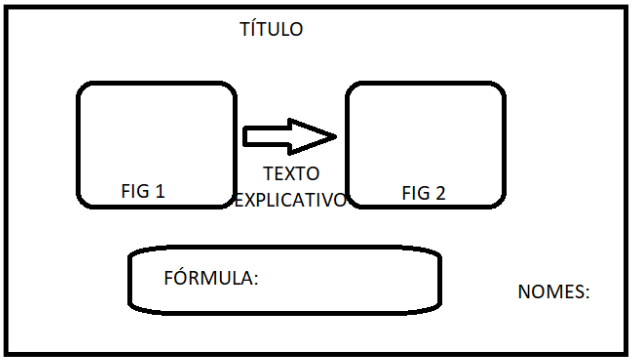
Instruções para confecção da cartolina – GRUPO 3

Você recebeu:

- 8 triângulos (4 com a marcação de uma altura e 4 sem a marcação da altura)
- 3 quadrados (1 de lado b e 2 de lado c)
- 1 retângulo
- Cartolina, cola e tesoura.



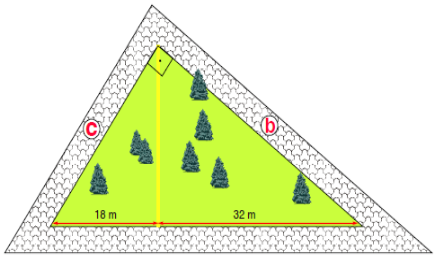
Esboço da cartolina



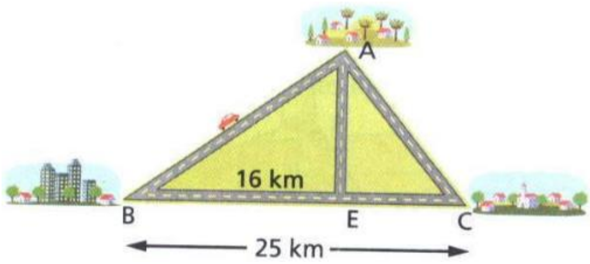
- ➢ Título sugerido: Relações métricas no triângulo retângulo
- ➢ Montando a figura 1: Monte um quadrado utilizando 2 triângulos sem marcação, 2 triângulos com marcação (corte os triângulos na marcação se necessário) e os dois quadrados
- ➢ Montando a figura 2: Monte um quadrado do mesmo tamanho da figura 1, utilizando as figuras restantes.
- ➢ No texto explicativo, escreva quais mudanças acontecem de um quadrado para o outro. Exemplo: Substituímos o quadrado de lado ‘b’ por um retângulo de lados ‘a’ e ‘m’, mantendo a mesma área.
- ➢ Fórmula: Escreva a relação entre as áreas do quadrado de lados ‘b’ e o retângulo de lados ‘a’ e ‘m’.
- ➢ Não esqueça de colocar o nome dos componentes do grupo.

APLICANDO A FÓRMULA OBTIDA:

1) Uma praça tem a forma de um triângulo retângulo, com uma via de passagem pelo gramado, que vai de um vértice do ângulo reto até a calçada maior, como ilustrado pela figura ao lado. Sabendo que esta via divide o contorno maior do gramado em dois pedaços, um de 32 m e outro de 18 m, quanto mede o contorno b, em metros?

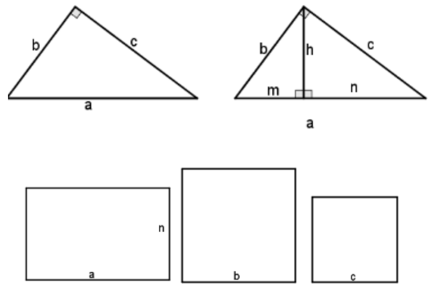


2) Um motorista vai da cidade A até a cidade E, passando pela cidade B, conforme mostra a figura. Ele percorreu: (atv 4)



NOMES: ____
____
____
____

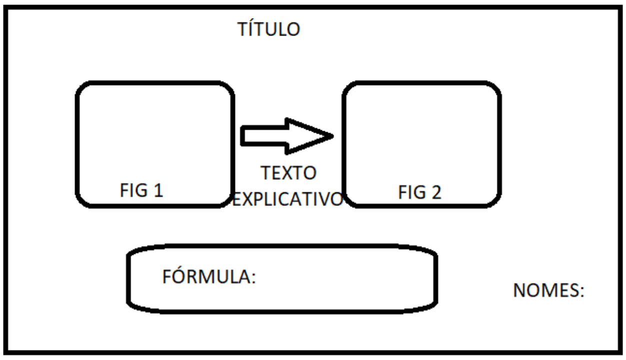
Instruções para confecção da cartolina – GRUPO 4



Você recebeu:

- 8 triângulos (4 com a marcação de uma altura e 4 sem a marcação da altura)
- 3 quadrados (2 de lado b e 1 de lado c)
- 1 retângulo
- Cartolina, cola e tesoura.

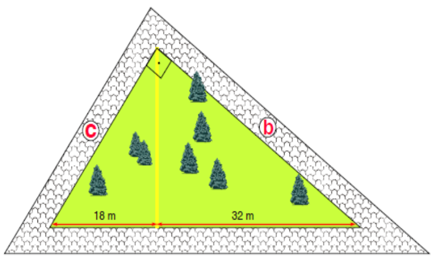
Esboço da cartolina



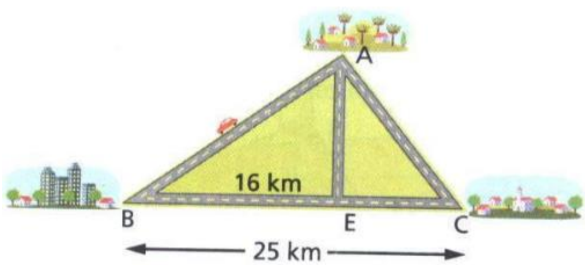
- ➢ Título sugerido: Relações métricas no triângulo retângulo
- ➢ Montando a figura 1: Monte um quadrado utilizando 2 triângulos sem marcação, 2 triângulos com marcação (corte os triângulos na marcação se necessário) e dois quadrados, um de lado b e outro de lado c.
- ➢ Montando a figura 2: Monte um quadrado do mesmo tamanho da figura 1, utilizando as figuras restantes.
- ➢ No texto explicativo, escreva quais mudanças acontecem de um quadrado para o outro. Exemplo: Substituímos o quadrado de lado ‘c’ pelo retângulo de lados ‘a’ e ‘n’ , mantendo a mesma área.
- ➢ Fórmula: Escreva a relação entre as áreas do quadrado de lados c e o retângulo de lados ‘a’ e ‘n’.
- ➢ Não esqueça de colocar o nome dos componentes do grupo.

APLICANDO A FÓRMULA OBTIDA:

1) Uma praça tem a forma de um triângulo retângulo, com uma via de passagem pelo gramado, que vai de um vértice do ângulo reto até a calçada maior, como ilustrado pela figura ao lado. Sabendo que esta via divide o contorno maior do gramado em dois pedaços, um de 32 m e outro de 18 m, quanto mede o contorno b, em metros?

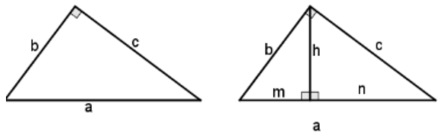


2) Um motorista vai da cidade A até a cidade E, passando pela cidade B, conforme mostra a figura. Ele percorreu: (atv 4)



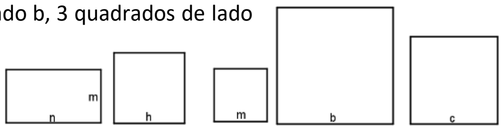
NOMES: ____
____
____
____
____

Instruções para confecção da cartolina – GRUPO 5

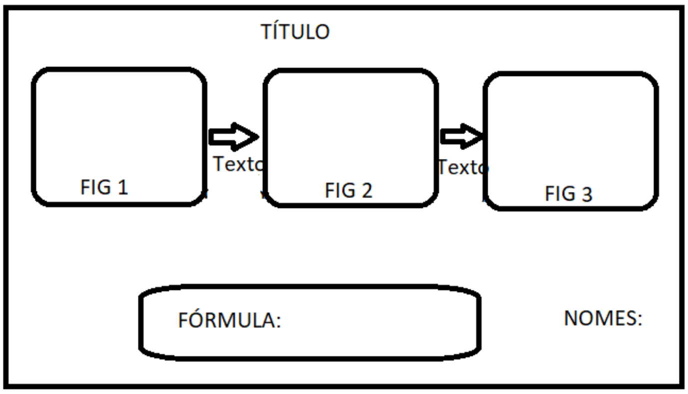


Você recebeu:

- 12 triângulos (6 com a marcação de uma altura e 6 sem a marcação da altura)
- 7 quadrados de diferentes tamanhos (1 quadrado de lado b, 3 quadrados de lado c, 1 quadrado de lado h e 2 quadrados de lado m)
- 1 retângulo
- Cartolina, cola e tesoura.



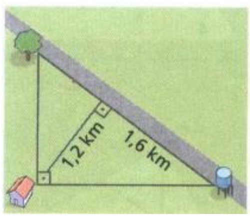
Esboço da cartolina



- Título sugerido: Relações métricas no triângulo retângulo
- Montando a figura 1: Monte um quadrado utilizando 2 triângulos sem marcação, 2 triângulos com marcação (corte os triângulos na marcação se necessário) e 2 quadrados (1 de lado ‘b’ e ‘1’ de lado ‘c’)
- Montando a figura 2: Monte um quadrado do mesmo tamanho da figura 1, utilizando 2 triângulos sem marcação, 2 triângulos com marcação (corte os triângulos na marcação se necessário) e 3 quadrados (1 de lado c, 1 de lado h e 1 de lado m)
- Montando a figura 3: Monte um quadrado do mesmo tamanho da figura 1, utilizando as figuras restantes.
- No texto explicativo, escreva quais mudanças acontecem de um quadrado para o outro. Exemplo: Substituímos o quadrado de lado ‘b’ pelos quadrados de lado ‘m’ e lado ‘h’, mantendo a mesma área (Teorema de Pitágoras).
- Fórmula: Escreva a relação entre as áreas dos quadrados de lados a, b e c.
- Não esqueça de colocar os nomes dos componentes do grupo.

APLICANDO A FÓRMULA OBTIDA:

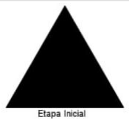
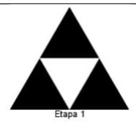
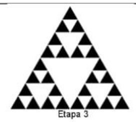
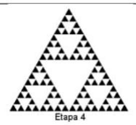
1) Na figura abaixo, a distância da casa à estrada é 1,2 km. Qual é a menor distância da árvore à caixa d’água?



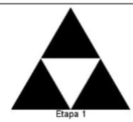
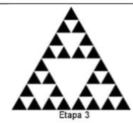
NOMES: ____
____
____
____
____
____

Anexo E – Atividade 7: Triângulo de Sierpinski (1 folha)

Atividade - Triângulo de Sierpinski
Professor: Rafael Souza
Matemática - __ ano Turma: ______ Data: ____/____/______
Aluno: ____

Interação	Configuração	Total de triângulos restantes	Progressão (Total de triângulos restantes em forma de potência)
Etapa Inicial - 0		1	3^0
Etapa 1		3	3^1
Etapa 2			
Etapa 3			
Etapa 4			
Etapa n			

A partir das construções feitas, complete os quadros a seguir. Considere que o comprimento do lado do triângulo inicial é igual a 1 unidade, lembre-se de que o perímetro é a soma dos lados da figura (utilize representação fracionária), e de que a progressão deve representar a expressão do perímetro em forma de potência.

Interação	Configuração	Comprimento do lado	Perímetro	Progressão (Perímetro em forma de potência)
Etapa Inicial - 0		1	3	3^1
Etapa 1		$\frac{1}{2}$	$9.\frac{1}{2}$	$3^2.\frac{1}{2}$
Etapa 2				
Etapa 3				
Etapa 4				
Etapa n				

Anexo F – Atividade 8: Tangram (1 folha)

Atividade de Matemática – TANGRAM

Professor: Rafael Souza

Matemática - ___ ano Turma: ________ Data: ____/____/________

Aluno:____

Montando o TANGRAM

1- Dobre a folha, de modo que represente um quadrado ABCD, destacando com o auxílio de uma régua a sobra de papel que excede o quadrado.
2- Trace uma das diagonais do quadrado. (BD)
3- Trace um segmento que una o ponto médio da diagonal traçada e um dos vértices do quadrado.(AE)
4- Trace um segmento que una os pontos médios F e G dos lados CD e BC.
5- Trace um segmento que una o ponto médio H do segmento FG ao ponto E.
6- Trace um seguimento paralelo a EH que une o ponto F a diagonal traçada e um outro seguimento perpendicular a CD unindo o ponto H a diagonal traçada. Corte as 7 peças do Tangram obtidas.

Quebra-cabeça – manipulando as peças do TANGRAM

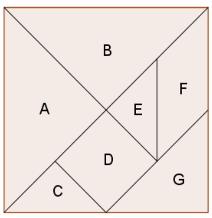
1) Construir um triângulo usando:

a) 2 peças
b) 3 peças
c) 4 peças
d) 5 peças
e) 7 peças

2) Construir um quadrado usando:

a) 2 peças
b) 3 peças
c) 4 peças
d) 5 peças
e) 7 peças

Comparar figuras – Equivalência entre áreas



Baseado no Tangram da figura acima responda:

1. Supondo que a área da figura C ou E do TANGRAM tem valor igual a 1 (um) unidade de área.

a) Qual o valor da área da figura D?
b) Qual o valor da área da figura F?
c) Qual o valor da área da figura G?
d) Qual o valor da área da figura A ou B?
e) Qual o valor da área do TANGRAM inteiro?

2. Supondo agora que a área da figura D do TANGRAM tem valor igual a 1(um) unidade de área.

a) Qual o valor da área da figura C ou E?
b) Qual o valor da área da figura F?
c) Qual o valor da área da figura G?
d) Qual o valor da área da figura A ou B?
e) Qual o valor da área do TANGRAM inteiro?

3. Vamos agora considerar que a área da figura A (ou B) tem valor igual a 1 unidade de área.

a) Qual o valor da área da figura D?
b) Qual o valor da área da figura F?
c) Qual o valor da área da figura G?
d) Qual o valor da área da figura C(ou E)?
e) Qual o valor da área do TANGRAM inteiro?

4. Considere agora que a área do TANGRAM inteiro tem valor igual a 1 unidade de área.

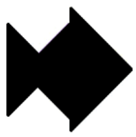
a) Qual o valor da área da figura A ou B?
b) Qual o valor da área da figura D?
c) Qual o valor da área da figura F?
d) Qual o valor da área da figura G?
e) Qual o valor da área da figura C (ou E)?

5.Qual é a fração que representa a peça do quadrado em relação ao quadrado composto pelas sete peças?

6.Qual é a fração que representa a peça do triângulo grande em relação ao quadrado composto pelas sete peças?

Conservação de área

Monte uma casa utilizando as 7 peças e um peixe utilizando as 7 peças.

Agora responda:

Qual das figuras possui maior área? Por quê?