Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Bruno Guimarães da Silva

Gráficos de funções utilizando o GeoGebra em *smartphones*

Rio de Janeiro

2017

Bruno Guimarães da Silva

Gráficos de funções utilizando o GeoGebra em *smartphones*

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa

Coorientadora: Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S586 Silva, Bruno Guimarães da.
Gráficos de funções utilizando o GeoGebra em *smartphones* / Bruno Guimarães da Silva. – 2017.
119f. : il.

Orientador: Augusto Cesar de Castro Barbosa.
Coorientadora: Cláudia Ferreira Reis Concordido.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1.Funções (Matemática) - Estudo e ensino - Teses. 2.Álgebra - Métodos gráficos - Teses. 3. Novas tecnologias - Teses. 4. Ensino auxiliado por computador - Teses. I. Barbosa, Augusto Cesar de Castro. II. Concordido, Cláudia Ferreira Reis. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 517.5

Rosalina Barros *CRB/7 - 4204* - Responsável pela elaboração da ficha catalográfica.

Bruno Guimarães da Silva

Gráficos de funções utilizando o GeoGebra em *smartphones*

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao programa de mestrado profissional em Matemática em rede nacional - PROFMAT, do instituto de Matemática e Estatística, da universidade do estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 07 de fevereiro de 2018.

Banca Examinadora

____

Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa (Orientador)

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

____

Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido (Coorientadora)

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

____

Prof. Dr. Fernando Antonio de Araujo Carneiro

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

____

Prof. Dr. Ronaldo da Silva Busse

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2018

DEDICATÓRIA

Ao meu pai, meu mentor, meu tutor, meu orientador em todos os caminhos da Matemática. Sem sua presença em minha vida, sem seus ensinamentos desde quando eu era pequeno, mesmo quando eu dizia não querer, sem toda a sua insistência, eu não teria sido metade do profissional que sou hoje. Obrigado meu pai, por ser meu exemplo de matemático a seguir.

Mesmo após sua partida, ainda lembro-me do seu jeito de pensar e viver a vida interpessoal e matemática, e concluo que mesmo após ter partido, continua me levando para a escola.

Obrigado meu pai. Você sempre foi o verdadeiro mestre.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus: sem Você, não há vida. Obrigado por tudo.

Aos meus guias espirituais: Obrigado pela proteção que sempre me dão.

Aos meus amigos e familiares: Sempre dispostos a propagar o amor em suas diversas maneiras.

Vocês todos merecem muito mais que uma dedicatória, vocês merecem meu eterno agradecimento e sensação de dívida. Pois quando eu achar que não devo nada a vocês, quando eu achar que não preciso fazer nada por vocês, é porque deixei de amar e não estou mais evoluindo.

A tecnologia é somente uma ferramenta. No que se refere a motivar as crianças e conseguir que trabalhem juntas, um professor é o recurso mais importante.

– Bill Gates

RESUMO

Silva, Bruno Guimarães da. *Gráfico de funções utilizando o GeoGebra em smartphones.* 2017.119f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em rede nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

Durante a vida escolar, os alunos se deparam com diversos cálculos e conteúdos matemáticos e, independente do gosto e prazer pela Matemática de cada um deles, é importante modificar o método de ensino, se adequando ao mundo atual no qual vivemos, para que assim o interesse pela Matemática possa ser renovado, principalmente dos alunos que dizem (a princípio) não gostar da mesma. Esta mudança pode ser percebida nos livros de Matemática e na evolução no método de ensino de funções, como poderá ser visto neste trabalho. Muitos estudos e trabalhos publicados focam em como ensinar Matemática de um jeito diferente, utilizando programas de computador, origamis, jogos e diversas atividades lúdicas. Levando em consideração a evolução tecnológica, principalmente dos celulares, tornando-os *smartphones*, foi decidido que talvez seja possível, prazeroso, didático e renovador utilizar um aplicativo já conhecido por muitos professores, o GeoGebra, porém focado em *smartphones*. Assim, são propostas atividades para turmas do 9º do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio, e feita uma análise de quais dificuldades e aprendizados os alunos obtiveram utilizando este aplicativo em sala de aula com gráficos de funções, haja vista que devido a uma análise do ENEM e sua evolução, é um conteúdo recorrente neste exame.

Palavras-chave: GeoGebra. *Smartphones*. Gráficos.

ABSTRACT

Silva, Bruno Guimarães da. *Graph of functions using the GeoGebra in smartphones.* 2017. 119f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em rede nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

Alongside with school life, the students face many calculations and mathematical topics and, besides the joy and pleasure for Math of each one of then, it is important to modify the teaching method, fitting into the actual world in which we live, for this matter the interest for Math can be renewed, especially from the students who say (at first) that they don’t like it. This change can be seen in the Math’s book and in the evolution of the methods of teaching functions, as it can be seen in this work. Many published studies and papers pay attention to how to teach Math in a different way, using computer apps, origami, games e many ludic activities. Taking into consideration the technological evolution, especially in cellphones, making then *smartphones*, the author of the work has decided that maybe it can be possible, pleasurable, didactic and refreshing to use an app already known by a lot of teachers, the GeoGebra, but focused on *smartphones*. That way, propositions of activities for the 9º grade of the elementary school and 1st grade of the high school, are made and an analysis of the difficulties and the learning that the students receive using that app in the classroom with graph of functions, given that due to an analysis of ENEM and its evolution, it is a recurrent content in this exam.

Keywords: GeoGebra. *Smartphones*. Graph.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FUVEST	Fundação Universitária para o Vestibular
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFF	Universidade Federal Fluminense
PUC-RJ	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
IFES	Instituições Federais de Ensino Superior
u.a.	Unidades de área
LDB	Lei de Diretrizes e Bases

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A evolução da tecnologia dos celulares, computadores e de aparelhos eletrônicos em geral, é consideravelmente rápida hoje em dia, haja vista que um aparelho eletrônico comprado hoje pode estar desatualizado amanhã, bastando que haja uma atualização de qualquer aplicativo, ou o lançamento de um novo *hardware*. Não há como prever quando um aparelho eletrônico deixará de ser o mais atualizado.

Os alunos hoje em dia acompanham essas mudanças, basta comparar os dias de hoje com aproximadamente trinta anos atrás. Crianças pequenas não eram vistas com *tablets*, adolescentes não eram vistos passando horas nos celulares, pois não existiam todas essas tecnologias da forma que existem hoje.

Dentre os aparelhos eletrônicos, um dos que possui maior destaque é o celular, em especial o *smartphone*, mas não pela sua tecnologia, e sim pela demanda da população. No Brasil tem-se uma crescente venda de celulares *smartphones*.

O uso dos *smartphones* pelas crianças e adolescentes, ou seja, os alunos com os quais os professores trabalham, é algo no qual é aconselhável prestarem atenção, tanto os professores, quanto os pais dos alunos, e até a escola como um todo. Já é sabido que o aluno não deve usar nenhum aparelho eletrônico em sala de aula, salvo para fins pedagógicos, entretanto, é perceptível que os alunos possuem uma vontade, aparentemente alta, de estar sempre utilizando o celular, principalmente, para trocar mensagens com outros amigos (inclusive em alguns casos com amigos que estão próximos, ou até ao lado) e em redes sociais. Isso pode levar à conclusão de que "o professor vem disputando com o *smartphone* a atenção dos alunos, tal disputa vem trazendo prejuízo ao ambiente e à aprendizagem do alunado" (PIRES, 2016, p. 1). Sendo assim, considera-se o seguinte questionamento: talvez seja útil utilizar, de alguma maneira, esse recurso tecnológico em sala de aula?

Entretanto, antes de desenvolver mais esse assunto, pergunta-se: Qual tópico matemático tratar com os alunos utilizando as tecnologias citadas? Como tratar? Um assunto sempre utilizado nos vestibulares é o estudo das funções. Além da recorrência da cobrança desse assunto nos vestibulares, principalmente no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), tem-se a utilidade prática, ou seja, a fácil percepção da contextualização deste conteúdo no dia a dia das pessoas. Por estes motivos e outros que serão aprofundados posteriormente, o conteúdo matemático escolhido para esta dissertação foi o estudo de funções, com principal enfoque em gráficos de funções.

Existem diversas maneiras de realizar o estudo de gráficos de funções. Eis a seguir algumas:

1) desenhando gráficos no papel comum, utilizando régua, por exemplo;

2) desenhando gráficos no papel milimetrado;

3) utilizando barbante e cola;

4) utilizando programas de computador para construir ("plotar") gráficos.

Considerando os programas de computador, existem diversos já utilizados em salas de aula como ferramenta de auxílio ao professor para tornar a aula mais dinâmica, mudar o estilo de "aula-palestra", em que o professor somente fala e escreve no quadro, enquanto os alunos copiam, prestam atenção e ficam quietos. Os programas também podem funcionar simplesmente como auxílio visual, para que os alunos possam verificar propriedades de gráficos de funções, visualizar figuras planas ou espaciais com mais detalhes, etc.

Um programa muito utilizado atualmente é a "calculadora gráfica" GeoGebra, um programa com boa aceitação entre professores e alunos, devido à gratuidade e à sua interface de fácil manuseio, levando-se em consideração os relatos em conversas informais com outros professores e alunos.

O estopim que resultou nas ideias para desenvolver essa dissertação foi o somatório de 3 itens:

1) a percepção de que os adolescentes usam muito o celular;

2) a utilização do GeoGebra em sala de aula;

3) a importância do bom entendimento de gráficos para o ENEM.

Considerando os 3 itens anteriores, surgiu o seguinte questionamento: "E se os professores trabalhassem gráficos de funções, com o GeoGebra em celulares?"

A utilização do GeoGebra como aplicativo para computador, em sala de aula, já é comum pelo autor, assim como por outros professores, entretanto, a utilização do GeoGebra como aplicativo de celular, como uma atividade para as turmas, não é de comum utilização.

Muitos questionamentos surgem: "Vai dar certo?", "Quais dificuldades os alunos terão?", "Quais atividades propor?"

Sendo assim, este trabalho se propôs a procurar as respostas para estes questionamentos.

Infelizmente, foram grandes as dificuldades sentidas pelos alunos. Sem dúvida, as dificuldades podem ser decorrentes das turmas, do tipo da escola, das atividades propostas, mas, independente do motivo, é de real importância relatar as dificuldades surgidas, servindo como um guia inicial para futuros professores que tentarem realizar atividades semelhantes, proporcionando assim um relato de experiências positivas e negativas pela pesquisa prática.

Este trabalho foi inicialmente construído realizando uma breve comparação entre o ensino de funções, com alguns livros de Matemática, em seguida estudando as funções no ENEM, a evolução do tipo de cobranças nas questões e, finalmente, focando a análise nas questões de gráficos de funções do ENEM de 2009 a 2016.

Em seguida, é apresentada uma breve explicação sobre o GeoGebra e como realizar o *download* para um *smartphone*, para então seguir com a apresentação das atividades propostas. Atividades estas que foram testadas em salas de aula.

É registrado um relato da experiência, finalizando com uma conclusão, contendo sugestões para futuras atividades.

1 **O ENSINO DE FUNÇÕES AO LONGO DOS ANOS**

Ao longo dos anos houve mudanças no ensino de funções no Rio de Janeiro, possivelmente no Brasil. Décadas atrás o foco era outro, como será mencionado a seguir, e estas mudanças se devem em grande parte ao vestibular, principalmente ao ENEM (situação esta que será aprofundada em capítulos posteriores).

Esta diferença pode ser observada comparando-se livros e vestibulares antigos, com os de hoje (2017). Anteriormente existia uma atenção maior aos estudos das relações que não são funções, dos gráficos de produtos cartesianos, uma atenção maior a exercícios para apenas realizar cálculos algébricos, enquanto que hoje em dia a atenção se voltou mais para as questões contextualizadas, questões em que haja não somente o domínio algébrico, mas também a interpretação de um texto, de uma história, ou seja, de uma contextualização do conteúdo.

Não que atualmente não se dê atenção ao ensino das “relações que não são funções”, mas devido ao interesse das escolas em preparar os alunos para realizar questões, focando em fazer as provas dos vestibulares, este início do conteúdo de funções acaba sendo deixado um pouco de lado.

É importante que os alunos compreendam bem estes conceitos iniciais das relações, que compreendam bem a construção de gráficos, sejam estes áreas, linhas, pontos, etc. Quando estes conceitos e os exercícios sobre estes tópicos iniciais se tornam triviais para os alunos, a compreensão das funções se torna mais fácil. E como atualmente as questões aparecem de forma bem contextualizada, o esforço do aluno poderia ser melhor direcionado à interpretação do texto, ou algo semelhante e, consequentemente, os alunos teriam menos dificuldades (o que seria o esperado) nos tópicos matemáticos, por assim dizer.

Se os alunos compreenderem bem a relação entre grandezas, a relação entre dois conjuntos (Domínio e Contradomínio), é esperado que futuramente consigam compreender melhor as questões contextualizadas, em que não se tem simplesmente o domínio da função como “os elementos que devem ser usados para o x”, e o entendimento do contradomínio da função não ser simplesmente “os elementos que podem ser encontrados para o y”. Se os alunos conseguirem compreender bem os conceitos destes tópicos, futuramente podem dedicar a atenção à contextualização, e consequentemente a questão, como um todo, se tornará mais fácil.

Mas, infelizmente, há uma “correria” (para cumprir o planejamento, em muitos casos) e alguns entendimentos que poderiam ser melhores internalizados pelos alunos acabam sendo deixados em segundo plano.

Foram analisados alguns livros e apostilas tratando do assunto. A escolha destes livros foi realizada pela disponibilidade destes, para o autor desta dissertação. Nestes livros foram contabilizados os números de páginas dedicados ao tema função e, então, foi realizado um cálculo da área das páginas de cada livro, pois como um livro pode ser maior que o outro, foi cogitado que o ideal é que fosse realizada uma análise da área das páginas, e não do número de páginas. Todavia, em alguns livros, o espaçamento entre as linhas, ou o tamanho da fonte, entre outros motivos, faz com que a análise da área das páginas também não seja a melhor maneira de se analisar quantitativamente. Sendo assim, foi decidido mostrar algumas páginas dos livros, e realizar apenas uma análise qualitativa, a qual é citada previamente ou posteriormente às imagens de cada livro.

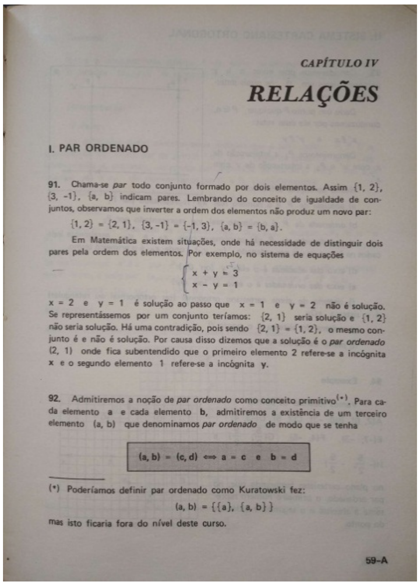
Em todos os livros analisados, as definições de função, de função afim e de função quadrática, não eram distintas em relação ao conteúdo propriamente dito, apenas na questão didática, ou seja, as maneiras dos livros ensinarem eram distintas, mas todos definiam função basicamente da mesma forma: função é uma relação entre dois ou mais conjuntos, tal que para todo x, exista uma única imagem y. Ou seja, deve-se usar todos os elementos do domínio, e cada elemento do domínio deve possuir apenas uma única imagem no contra-domínio.

Para as funções afim e quadrática, o processo nos livros analisados também é semelhante, tem-se que a função afim é toda função com a lei de formação do tipo $f(x) = ax + b$, com a e $b \in \mathrm{IR}$, e para a quadrática tem-se que é toda função com a lei de formação do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathrm{IR}$. A principal diferença nos livros será citada ao final deste capítulo, após as imagens e análises.

Um dos livros analisados foi o “Fundamentos de Matemática elementar”, Volume I, de 1977, do matemático Iezzi - autor de diversos outros livros - e outros três co-autores (Murakami, Dolce e Hazzan). Para quem conhece o livro ou tiver a oportunidade de manuseá-lo, poderá perceber que há diversas páginas dando atenção ao estudo da introdução à função, das relações. Há um capítulo inteiro sobre estes assuntos, isto tudo antes de iniciar “função afim”.

Observando a figura 1, o leitor poderá perceber o início de como este livro sugere ensinar as relações, nesta página iniciando com “par ordenado”.

Figura 1 – Fundamentos de Matemática elementar (I)



CAPÍTULO IV

RELAÇÕES

I. PAR ORDENADO

91. Chama-se *par* todo conjunto formado por dois elementos. Assim $\{1, 2\}$, $\{3, -1\}$, $\{a, b\}$ indicam pares. Lembrando do conceito de igualdade de conjuntos, observamos que inverter a ordem dos elementos não produz um novo par:

$\{1, 2\} = \{2, 1\}$, $\{3, -1\} = \{-1, 3\}$, $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Em Matemática existem situações, onde há necessidade de distinguir dois pares pela ordem dos elementos. Por exemplo, no sistema de equações

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$x = 2$ e $y = 1$ é solução ao passo que $x = 1$ e $y = 2$ não é solução. Se representássemos por um conjunto teríamos: $\{2, 1\}$ seria solução e $\{1, 2\}$ não seria solução. Há uma contradição, pois sendo $\{2, 1\} = \{1, 2\}$, o mesmo conjunto é e não é solução. Por causa disso dizemos que a solução é o *par ordenado* $(2, 1)$ onde fica subentendido que o primeiro elemento 2 refere-se a incógnita x e o segundo elemento 1 refere-se a incógnita y.

92. Admitiremos a noção de *par ordenado* como conceito primitivo(*). Para cada elemento a e cada elemento b, admitiremos a existência de um terceiro elemento (a, b) que denominamos *par ordenado* de modo que se tenha

$$\boxed{(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d}$$

(*) Poderíamos definir par ordenado como Kuratowski fez:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

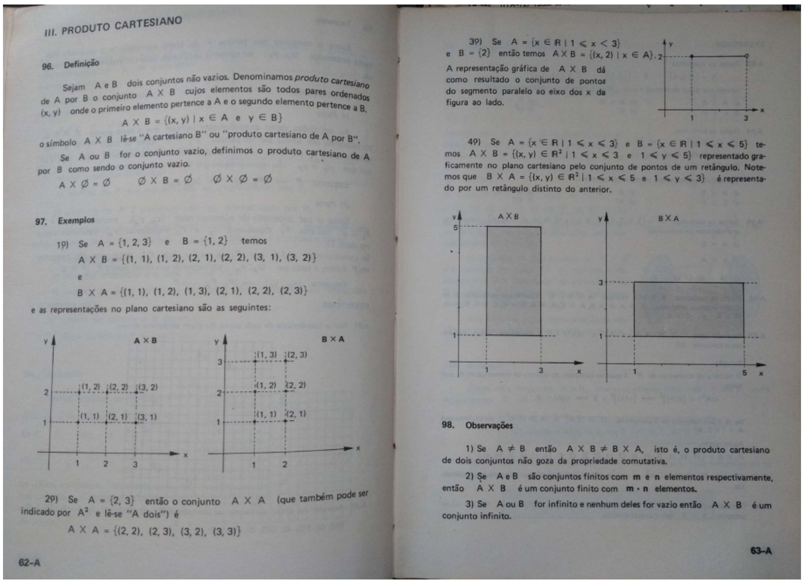
mas isto ficaria fora do nível deste curso.

59-A

Fonte: IEZZI, et al, 1977, p. 59.

Na figura 2, há o ensino do produto cartesiano e a montagem de alguns gráficos destes produtos. É perceptível o teor matemático formal.

Figura 2 – Fundamentos de Matemática elementar (II)



III. PRODUTO CARTESIANO

96. Definição

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Denominamos *produto cartesiano* de A por B o conjunto $A \times B$ cujos elementos são todos pares ordenados (x, y) onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

o símbolo $A \times B$ lê-se "A cartesiano B" ou "produto cartesiano de A por B".

Se A ou B for o conjunto vazio, definimos o produto cartesiano de A por B como sendo o conjunto vazio.

$A \times \emptyset = \emptyset$ $\quad \emptyset \times B = \emptyset$ $\quad \emptyset \times \emptyset = \emptyset$

97. Exemplos

1º) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$ temos

$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

e

$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

e as representações no plano cartesiano são as seguintes:

2º) Se $A = \{2, 3\}$ então o conjunto $A \times A$ (que também pode ser indicado por A^2 e lê-se "A dois") é

$A \times A = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

62-A

3º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x < 3\}$ e $B = \{2\}$ então temos $A \times B = \{(x, 2) \mid x \in A\}$.

A representação gráfica de $A \times B$ dá como resultado o conjunto de pontos do segmento paralelo ao eixo dos x da figura ao lado.

4º) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$ temos $A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 5\}$ representado graficamente no plano cartesiano pelo conjunto de pontos de um retângulo. Notemos que $B \times A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 5 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 3\}$ é representado por um retângulo distinto do anterior.

98. Observações

1) Se $A \neq B$ então $A \times B \neq B \times A$, isto é, o produto cartesiano de dois conjuntos não goza da propriedade comutativa.

2) Se A e B são conjuntos finitos com m e n elementos respectivamente, então $A \times B$ é um conjunto finito com $m \cdot n$ elementos.

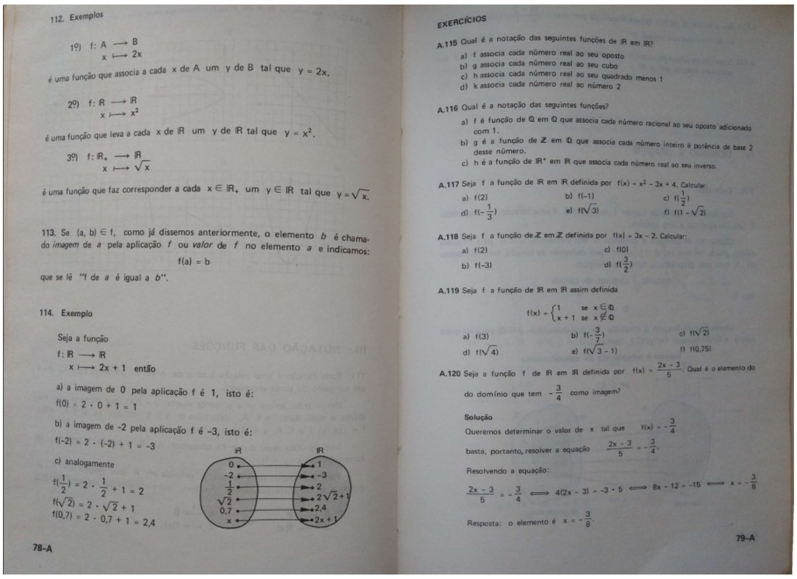
3) Se A ou B for infinito e nenhum deles for vazio então $A \times B$ é um conjunto infinito.

63-A

Fonte: IEZZI, et al,1977, p.62 e 63.

A figura 3 mostra alguns exercícios sobre funções. Há exercícios com questões diretas.

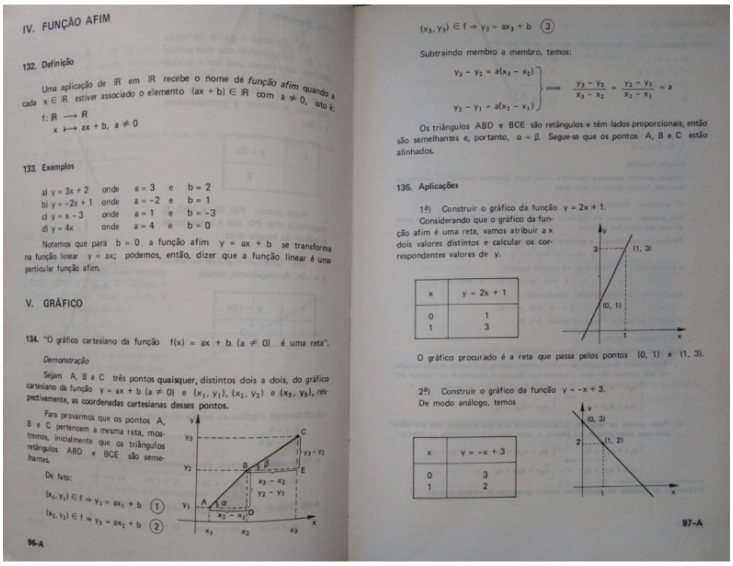
Figura 3 – Fundamentos de Matemática elementar (III)



Fonte: IEZZI, et al, 1977, p.78 e 79.

Na figura 4, é possível observar uma dita aplicação da função afim. As aplicações ainda continuam de forma direta, com pouca preocupação com a contextualização.

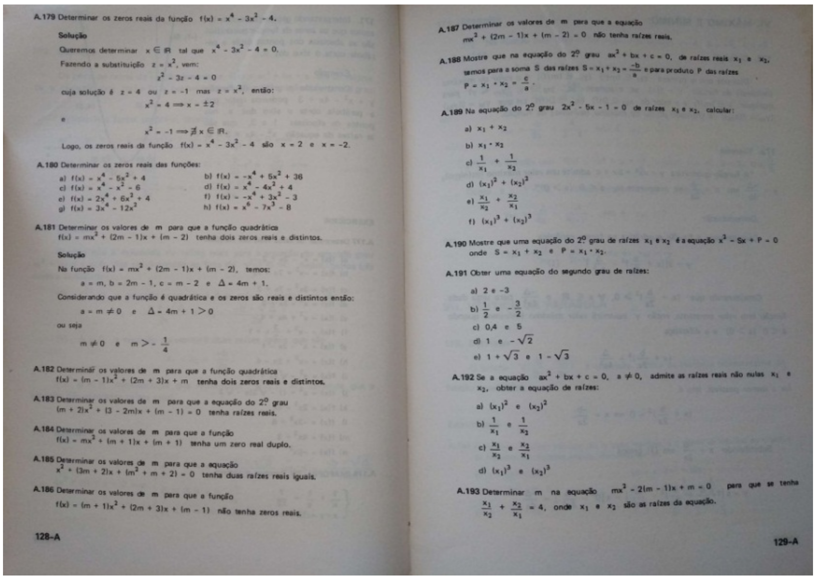
Figura 4 – Fundamentos de Matemática elementar (IV)



Fonte: IEZZI, et al, 1977, p. 96 e 97.

Em se tratando de funções quadráticas, o livro possui algumas páginas sobre exercícios também de forma direta. A contextualização aparece de forma branda quando o livro fala sobre as coordenadas do vértice, propondo, por exemplo, exercícios em que se deseja saber a área máxima de um retângulo, dadas algumas informações sobre o perímetro, o que é um mínimo de aplicação demonstrado.

Figura 5 – Fundamentos de Matemática elementar (V)



A.179 Determinar os zeros reais da função $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$.

Solução

Queremos determinar $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Fazendo a substituição $z = x^2$, vem:

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

cuja solução é $z = 4$ ou $z = -1$ mas $z = x^2$, então:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

e

$$x^2 = -1 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}.$$

Logo, os zeros reais da função $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ são $x = 2$ e $x = -2$.

A.180 Determinar os zeros reais das funções:

a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ b) $f(x) = -x^4 + 5x^2 + 36$
c) $f(x) = x^4 - x^2 - 6$ d) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$
e) $f(x) = 2x^4 + 6x^2 + 4$ f) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 3$
g) $f(x) = 3x^4 - 12x^2$ h) $f(x) = x^6 - 7x^3 - 8$

A.181 Determinar os valores de m para que a função quadrática $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$ tenha dois zeros reais e distintos.

Solução

Na função $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$, temos:

$a = m$, $b = 2m - 1$, $c = m - 2$ e $\Delta = 4m + 1$.

Considerando que a função é quadrática e os zeros são reais e distintos então:

$a = m \neq 0$ e $\Delta = 4m + 1 > 0$

ou seja

$m \neq 0$ e $m > -\frac{1}{4}$

A.182 Determinar os valores de m para que a função quadrática $f(x) = (m - 1)x^2 + (2m + 3)x + m$ tenha dois zeros reais e distintos.

A.183 Determinar os valores de m para que a equação do 2º grau $(m + 2)x^2 + (3 - 2m)x + (m - 1) = 0$ tenha raízes reais.

A.184 Determinar os valores de m para que a função $f(x) = mx^2 + (m + 1)x + (m + 1)$ tenha um zero real duplo.

A.185 Determinar os valores de m para que a equação $x^2 + (3m + 2)x + (m^2 + m + 2) = 0$ tenha duas raízes reais iguais.

A.186 Determinar os valores de m para que a função $f(x) = (m + 1)x^2 + (2m + 3)x + (m - 1)$ não tenha zeros reais.

128-A

A.187 Determinar os valores de m para que a equação $mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2) = 0$ não tenha raízes reais.

A.188 Mostre que na equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, de raízes reais x_1 e x_2, temos para a soma S das raízes $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ e para produto P das raízes $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

A.189 Na equação do 2º grau $2x^2 - 5x - 1 = 0$ de raízes x_1 e x_2, calcular:

a) $x_1 + x_2$
b) $x_1 \cdot x_2$
c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$
d) $(x_1)^2 + (x_2)^2$
e) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$
f) $(x_1)^3 + (x_2)^3$

A.190 Mostre que uma equação do 2º grau de raízes x_1 e x_2 é a equação $x^2 - Sx + P = 0$ onde $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.

A.191 Obter uma equação do segundo grau de raízes:

a) 2 e −3
b) $\frac{1}{2}$ e $-\frac{3}{2}$
c) 0,4 e 5
d) 1 e $-\sqrt{2}$
e) $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$

A.192 Se a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, admite as raízes reais não nulas x_1 e x_2, obter a equação de raízes:

a) $(x_1)^2$ e $(x_2)^2$
b) $\frac{1}{x_1}$ e $\frac{1}{x_2}$
c) $\frac{x_1}{x_2}$ e $\frac{x_2}{x_1}$
d) $(x_1)^3$ e $(x_2)^3$

A.193 Determinar m na equação $mx^2 - 2(m - 1)x + m = 0$ para que se tenha $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4$, onde x_1 e x_2 são as raízes da equação.

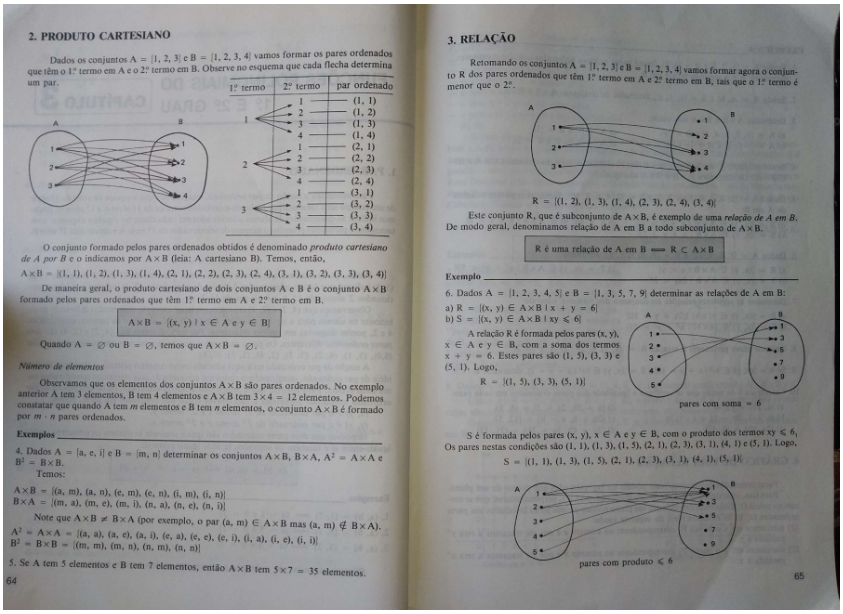
129-A

Fonte: IEZZI, et al, 1977, p. 128 e 129.

O segundo livro analisado foi o “Matemática – Temas e metas”, volume I, de 1988, do matemático Machado.

Também é possível observar uma cobrança relativamente direta nos exercícios, e o conteúdo sobre as relações e produtos cartesianos, apesar de ainda existir, foi reduzido e simplificado, em relação ao livro anteriormente analisado. O que pode ser observado na figura 6 a seguir.

Figura 6 – Temas e metas



2. PRODUTO CARTESIANO

Dados os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {1, 2, 3, 4} vamos formar os pares ordenados que têm o 1º termo em A e o 2º termo em B. Observe no esquema que cada flecha determina um par.

1º termo	2º termo	par ordenado
1	1	(1, 1)
	2	(1, 2)
	3	(1, 3)
	4	(1, 4)
2	1	(2, 1)
	2	(2, 2)
	3	(2, 3)
	4	(2, 4)
3	1	(3, 1)
	2	(3, 2)
	3	(3, 3)
	4	(3, 4)

O conjunto formado pelos pares ordenados obtidos é denominado *produto cartesiano de A por B* e o indicamos por $A \times B$ (leia: A cartesiano B). Temos, então,

$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

De maneira geral, o produto cartesiano de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \times B$ formado pelos pares ordenados que têm 1º termo em A e 2º termo em B.

$$\boxed{A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}}$$

Quando $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, temos que $A \times B = \varnothing$.

Número de elementos

Observamos que os elementos dos conjuntos $A \times B$ são pares ordenados. No exemplo anterior A tem 3 elementos, B tem 4 elementos e $A \times B$ tem $3 \times 4 = 12$ elementos. Podemos constatar que quando A tem *m* elementos e B tem *n* elementos, o conjunto $A \times B$ é formado por $m \cdot n$ pares ordenados.

Exemplos

4. Dados A = {a, e, i} e B = {m, n} determinar os conjuntos $A \times B$, $B \times A$, $A^2 = A \times A$ e $B^2 = B \times B$.

Temos:

$A \times B = \{(a, m), (a, n), (e, m), (e, n), (i, m), (i, n)\}$
$B \times A = \{(m, a), (m, e), (m, i), (n, a), (n, e), (n, i)\}$

Note que $A \times B \neq B \times A$ (por exemplo, o par $(a, m) \in A \times B$ mas $(a, m) \notin B \times A$).

$A^2 = A \times A = \{(a, a), (a, e), (a, i), (e, a), (e, e), (e, i), (i, a), (i, e), (i, i)\}$
$B^2 = B \times B = \{(m, m), (m, n), (n, m), (n, n)\}$

5. Se A tem 5 elementos e B tem 7 elementos, então $A \times B$ tem $5 \times 7 = 35$ elementos.

64

3. RELAÇÃO

Retomando os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {1, 2, 3, 4} vamos formar agora o conjunto R dos pares ordenados que têm 1º termo em A e 2º termo em B, tais que o 1º termo é menor que o 2º.

$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

Este conjunto R, que é subconjunto de $A \times B$, é exemplo de uma *relação de A em B*. De modo geral, denominamos relação de A em B a todo subconjunto de $A \times B$.

$$\boxed{R \text{ é uma relação de A em B} \iff R \subset A \times B}$$

Exemplo

6. Dados A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {1, 3, 5, 7, 9} determinar as relações de A em B:

a) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 6\}$
b) $S = \{(x, y) \in A \times B \mid xy \leqslant 6\}$

A relação R é formada pelos pares (x, y), $x \in A$ e $y \in B$, com a soma dos termos $x + y = 6$. Estes pares são (1, 5), (3, 3) e (5, 1). Logo,

$R = \{(1, 5), (3, 3), (5, 1)\}$

pares com soma = 6

S é formada pelos pares (x, y), $x \in A$ e $y \in B$, com o produto dos termos $xy \leqslant 6$. Os pares nestas condições são (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (4, 1) e (5, 1). Logo,

$S = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}$

pares com produto ≤ 6

65

Fonte: MACHADO, 1988, p. 64 e 65.

Este livro já consta com algumas poucas questões contextualizadas. A quantidade é consideravelmente pequena, aparecendo basicamente quando se trata de funções quadráticas e o vértice da parábola, assim como no livro anterior. Entretanto a quantidade dessas questões é um pouco maior.

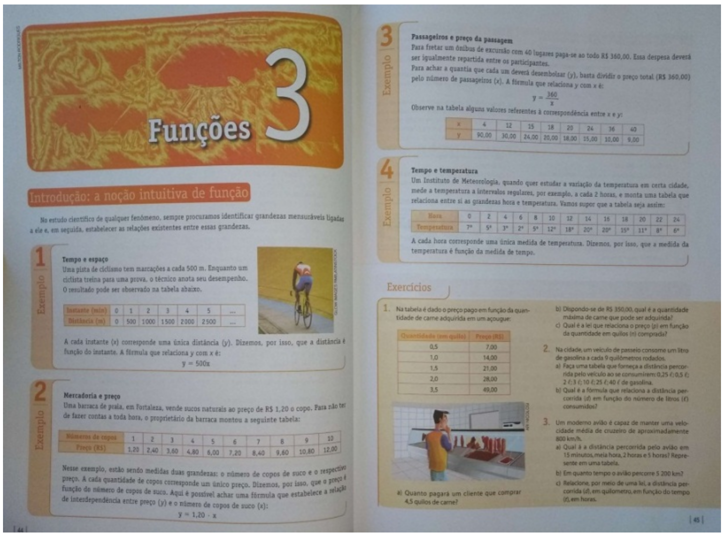
Continuando a análise de outros livros, há dois em destaque:

- “Matemática – Ciência e aplicações”, 2010, dos matemáticos Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida.
- “Matemática – Volume único”, 2011, dos matemáticos Iezzi, Dolce, Degenszajn e Périgo.

Interessante análise de dois livros com apenas um ano de diferença, com quase todos os autores de um livro tendo contribuído para o segundo.

Para o “Ciência e Aplicações”, é perceptível a mudança drástica em relação aos dois primeiros livros analisados. O livro inicia o conteúdo de funções já contextualizando, dando a noção intuitiva de função como uma relação entre dois conjuntos, para só então começar a formalizar o conteúdo. Observe na figura 7 a primeira página deste livro sobre este assunto em questão.

Figura 7 – Ciência e aplicações



Fonte: IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PÉRIGO; ALMEIDA, 2010, p. 44 e 45.

Não somente a maneira de ensinar muda, como também há uma presença maior de cores (que não o preto e branco) e também de imagens. A maneira de ensinar contextualizada, mais lúdica, menos formal na linguagem matemática, está claramente presente neste livro, que até pelo próprio nome já induz que terá uma abordagem diferente, em comparação aos livros anteriormente analisados.

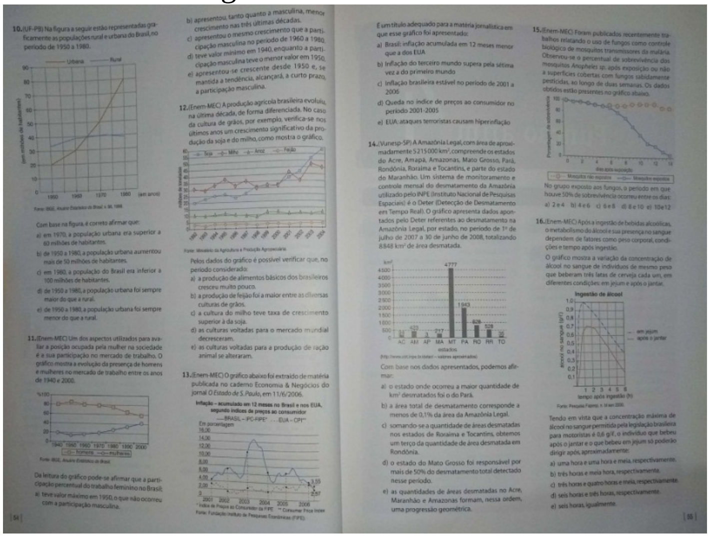
Pode-se perceber nos exercícios que na primeira página não há um exercício mais direto, como um simples “Calcule” ou “Efetue” alguma conta qualquer. Posteriormente neste livro aparecem algumas questões mais diretas, mas percebe-se que não é o foco inicial.

A contextualização permanece em todos os capítulos sobre funções, e nas funções quadráticas a contextualização não reside apenas ao falar sobre o vértice da parábola, mas sim durante todo o conteúdo inicial desta função.

Para o livro “Matemática – Volume único”, como dito anteriormente, com praticamente os mesmos autores do livro da última análise, tem-se uma abordagem semelhante, praticamente idêntica em sua maior parte, sendo até utilizadas algumas questões e exemplos iguais nos dois livros, inclusive algumas ilustrações são as mesmas. Apesar de poucas diferenças no conteúdo, o livro “Volume único” possui mais exercícios, contendo diversas páginas de exercícios somente de vestibulares, isso após os exercícios para fixar o conteúdo.

Observando a figura 8, pode-se visualizar que muitas destas questões são do ENEM, o que é sabido, por quem trabalha no meio, que tem o costume de contextualizar bastante as questões atualmente (conforme será comentado no capítulo 2).

Figura 8 – Volume único

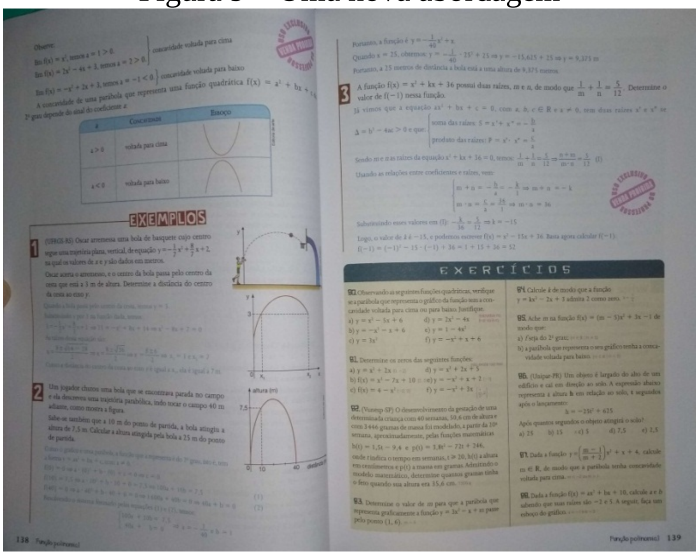


Fonte: IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PÉRIGO; ALMEIDA, 2011, p. 54 e 55.

O próximo livro analisado é o “Matemática Fundamental – Uma nova abordagem”, de volume único, de 2011, dos matemáticos Giovanni, Giovanni Jr e Bonjorno.

Este livro dá continuidade às análises feitas anteriormente, ou seja, a atenção ao conteúdo “Relações” vem diminuindo ao longo dos anos, enquanto a atenção às questões contextualizadas é uma crescente, como na figura 9.

Figura 9 – Uma nova abordagem



Fonte: GIOVANNI; GIOVANNI JR; BONJORNO, 2011, p. 138 e 139.

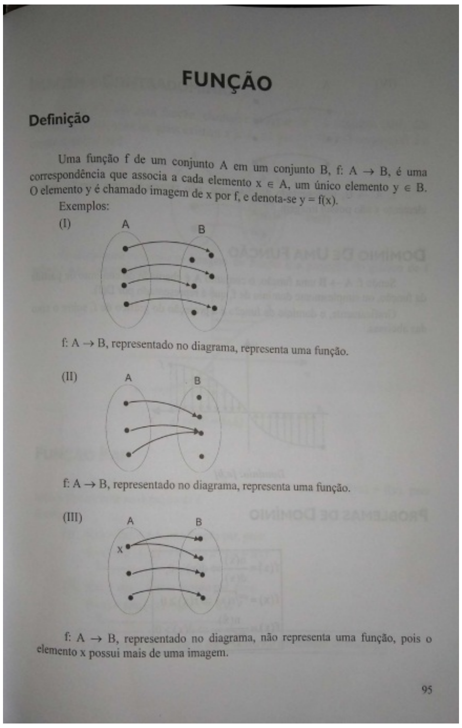
E por último, o livro “Matemática para vestibular”, 2003, de Cataldo, Chaves e Brener.

Apesar de ter o ano de publicação anterior aos últimos livros analisados, este livro foi destacado para o final desta análise, pois demonstra uma realidade que será posteriormente discutida com mais profundidade, que é a preparação dos alunos, pelas escolas, para os vestibulares, em especial para o ENEM.

Este livro contém apenas um resumo dos conteúdos, de forma que a maior parte do tempo de estudo seja dedicada aos exercícios.

Este livro não possui, em momento algum, um capítulo sobre “relações que não são funções”. Começando o estudo destes tópicos diretamente por “função”, como nas figuras 10 e 11.

Figura 10 – Para vestibular (I)



FUNÇÃO

Definição

Uma função f de um conjunto A em um conjunto B, $f: A \to B$, é uma correspondência que associa a cada elemento $x \in A$, um único elemento $y \in B$. O elemento y é chamado imagem de x por f, e denota-se $y = f(x)$.

Exemplos:

(I)

$f: A \to B$, representado no diagrama, representa uma função.

(II)

$f: A \to B$, representado no diagrama, representa uma função.

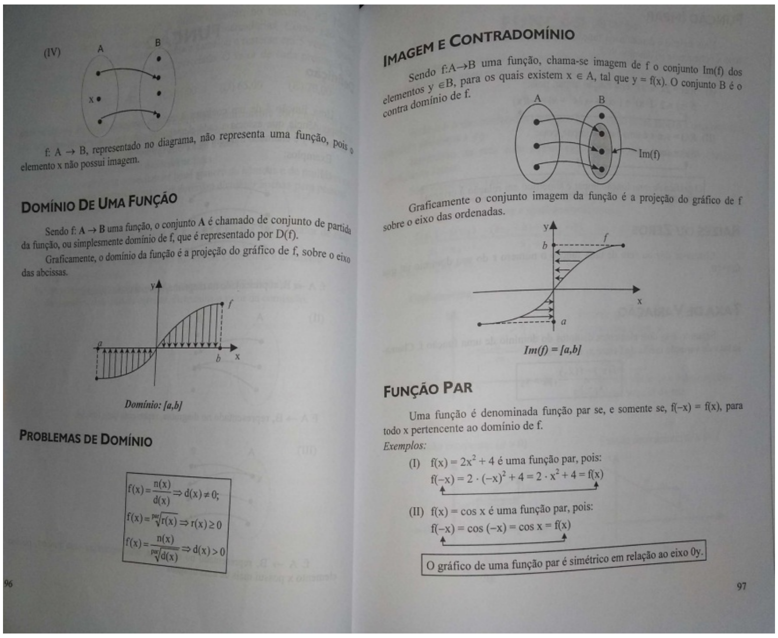
(III)

$f: A \to B$, representado no diagrama, não representa uma função, pois o elemento x possui mais de uma imagem.

95

Fonte: CATALDO; CHAVES; BRENER, 2003, p. 95.

Figura 11 – Para vestibular (II)



(IV)

$f: A \to B$, representado no diagrama, não representa uma função, pois o elemento x não possui imagem.

Domínio De Uma Função

Sendo $f: A \to B$ uma função, o conjunto A é chamado de conjunto de partida da função, ou simplesmente domínio de f, que é representado por D(f).

Graficamente, o domínio da função é a projeção do gráfico de f, sobre o eixo das abcissas.

Domínio: [a,b]

Problemas De Domínio

$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)} \Rightarrow d(x) \neq 0;$

$f(x) = \sqrt[par]{r(x)} \Rightarrow r(x) \geq 0$

$f(x) = \frac{n(x)}{\sqrt[par]{d(x)}} \Rightarrow d(x) > 0$

96

Imagem E Contradomínio

Sendo $f: A \to B$ uma função, chama-se imagem de f o conjunto Im(f) dos elementos $y \in B$, para os quais existem $x \in A$, tal que $y = f(x)$. O conjunto B é o contra domínio de f.

Graficamente o conjunto imagem da função é a projeção do gráfico de f sobre o eixo das ordenadas.

Im(f) = [a,b]

Função Par

Uma função é denominada função par se, e somente se, $f(-x) = f(x)$, para todo x pertencente ao domínio de f.

Exemplos:

(I) $f(x) = 2x^2 + 4$ é uma função par, pois:
$f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 + 4 = 2 \cdot x^2 + 4 = f(x)$

(II) $f(x) = \cos x$ é uma função par, pois:
$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo 0y.

97

Fonte: CATALDO; CHAVES; BRENER, 2003, p. 96 e 97.

Numa breve análise, pode-se perceber que de fato houve uma redução nas páginas sobre o tópico das “relações que não são funções”, e a quantidade de exercícios nos livros atuais é maior que nos livros mais antigos. É perceptível mais páginas somente de exercícios e menos páginas no total sobre o conteúdo, assim como o rigor matemático está abrindo o caminho para as noções intuitivas e os exemplos contextualizados aparecerem primeiro, ou pelo menos com maior intensidade, para somente assim o conteúdo ser “formalizado matematicamente”.

Sobre os conteúdos de função afim e função quadrática, o método de ensinar, pelos livros, não mudou drasticamente (em se tratando do rigor matemático). A diferença principal é uma contextualização a mais ou a menos, exercícios contendo mais ou menos gráficos, etc.

Consequentemente o que provavelmente fará a real mudança no ensino destes tipos de funções (e provavelmente outros) será a didática que o professor irá empregar, e neste momento (das aulas) é que as atividades propostas neste trabalho podem ser boas sugestões para o professor. Vale lembrar que o foco do trabalho não é apresentar uma abordagem distinta da que os professores costumam fazer, e sim apresentar uma sugestão de complementação das aulas, haja vista que, como será visto posteriormente, o professor já terá ensinado o conteúdo para o aluno antes de realizar tais atividades.

Sobre os gráficos de funções, a evolução do ensino nos livros segue alterações semelhantes ao ensino algébrico das funções. Ao passar dos anos, a contextualização nas questões com gráficos se torna cada vez maior. Entretanto, não há mudanças significativas no ensino de gráficos.

As pequenas mudanças que ocorrem são pelo fato já citado, de os livros terem reduzido o ensino das relações e produto cartesiano com as representações gráficas destes tópicos.

O aumento de questões de vestibulares nos livros não foi somente para a parte puramente algébrica das funções, mas também para a parte geométrica, ou seja, dos gráficos. O que pode ser comprovado na página do livro “Matemática – Volume único”, mostrada na figura 8, onde há diversas questões com gráficos de funções e de tratamento da informação.

Em suma, as mudanças ocorridas na parte geométrica das funções, acompanharam as mudanças ocorridas na parte puramente algébrica.

Antes de apresentar as atividades, cabe uma análise do ENEM e dos gráficos de funções e de questões de análise de gráficos em geral. Esta análise foi uma grande motivadora para a elaboração das atividades propostas, e segue no próximo capítulo.

Para a elaboração das atividades e todo o trabalho realizado nesta dissertação, foram escolhidas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º do Ensino Médio, justamente por serem turmas em que são estudados os conteúdos citados neste capítulo, ou seja, as funções.

2 **ESTUDO DE FUNÇÕES NO ENEM**

O conteúdo matemático "Função" é muito importante para a compreensão de generalizações (em alguns casos até de relações entre duas ou mais grandezas). A didática nos ensina que os professores devem mostrar contextualizações para os conteúdos, fazendo assim com que o aluno consiga ver utilidades práticas para o assunto trabalhado, e fazendo com que o interesse na matéria se mantenha.

As funções são facilmente contextualizadas em diversas situações do nosso dia a dia, e muitos alunos e pessoas já formadas devem se lembrar dos clássicos exemplos em que se utilizavam as funções para relacionar o preço a ser pago em uma corrida de táxi, com a quantidade de quilômetros rodados. Entretanto, vale lembrar aos professores que esta contextualização não está 100% correta, haja vista que para os táxis também se considera o tempo em que o taxímetro está ligado, portanto este exemplo deveria ser uma função de duas variáveis. Mas como neste momento os alunos estão começando a aprender o significado das funções e suas aplicações, é muito comum o tempo ser desconsiderado neste caso,

Se o tempo for desconsiderado, ou considerando outros meios de transporte que hoje em dia utilizem somente a quilometragem, como o Uber, seriam ótimos exemplos de contextualizações de funções.

Outros exemplos são contas de telefone (função afim), crescimento de colônias de bactérias (função exponencial), decaimento radioativo (função exponencial), lançamento de um projétil (função quadrática), entre diversos outras possibilidades de contextualizações.

A ampla contextualização das funções é um facilitador para elaboração de questões para o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio). Muitos vestibulares hoje em dia, não somente o ENEM, apresentam diversas questões contextualizadas, dando um sentido para o porquê de se efetuar determinado cálculo pedido, diferentemente de alguns anos atrás, em que as questões se resumiam, muitas vezes, ao simples "Calcule", "Determine" ou “Efetue” determinada conta.

Nas figuras 12 e 13, são apresentados recortes de provas da FUVEST (Fundação Universitária para o Vestibular). O primeiro recorte é do vestibular de 1980, enquanto o segundo é de 2016.

Figura 12 - Recorte do vestibular da FUVEST de 1980

MATEMÁTICA

25. Cada um dos cartões abaixo tem de um lado um número e do outro lado uma letra.

$\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

Alguém afirmou que todos os cartões que tem uma vogal numa face tem um número par na outra. Para verificar se tal afirmação é verdade:

a) é necessário virar todos os cartões.

b) é suficiente virar os dois primeiros cartões.

c) é suficiente virar os dois últimos cartões.

d) é suficiente virar os dois cartões do meio.

e) é suficiente virar o primeiro e o último cartão.

26. O valor da expressão $\dfrac{1-(\frac{1}{6}-\frac{1}{3})}{(\frac{1}{6}+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}}$ é:

a) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{3}{4}$ e) $-\frac{3}{5}$

c) $\frac{7}{6}$

27. O valor da expressão $\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$ é:

a) $\sqrt{2}$ d) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e) $\sqrt{2}+1$

c) 2

32. O valor de $(\operatorname{sen} 22°30' + \cos 22°30')^2$ é:

a) $\frac{3}{2}$ d) 1

b) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ e) 2

c) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

34. Na figura abaixo o ângulo $O\hat{C}A$ mede 90°, o ângulo $C\hat{O}A$ mede 45° e o segmento $\overline{OC}$ mede $\sqrt{2}$

.

A equação da reta AB é:

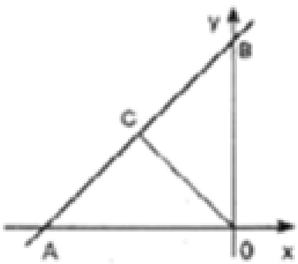
a) $x + y - 2 = 0$

b) $x + y - 1 = 0$

c) $x - y + 2 = 0$

d) $x - y + 1 = 0$

e) $x - y - 1 = 0$



Fonte: http://acervo.fuvest.br/vest1980/provas/p1f80.stm

Observe que há questões diretas, como a de número 26.

A seguir um recorte da prova de 2016.

Figura 13 - Recorte do vestibular da FUVEST de 2016

01

De 1869 até hoje, ocorreram as seguintes mudanças de moeda no Brasil: (1) em 1942, foi criado o cruzeiro, cada cruzeiro valendo mil réis; (2) em 1967, foi criado o cruzeiro novo, cada cruzeiro novo valendo mil cruzeiros; em 1970, o cruzeiro novo voltou a se chamar apenas cruzeiro; (3) em 1986, foi criado o cruzado, cada cruzado valendo mil cruzeiros; (4) em 1989, foi criado o cruzado novo, cada um valendo mil cruzados; em 1990, o cruzado novo passou a se chamar novamente cruzeiro; (5) em 1993, foi criado o cruzeiro real, cada um valendo mil cruzeiros; (6) em 1994, foi criado o real, cada um valendo 2.750 cruzeiros reais.
Quando morreu, em 1869, Brás Cubas possuía 300 contos.
Se esse valor tivesse ficado até hoje em uma conta bancária, sem receber juros e sem pagar taxas, e se, a cada mudança de moeda, o depósito tivesse sido normalmente convertido para a nova moeda, o saldo hipotético dessa conta seria, aproximadamente, de um décimo de

a) real.
b) milésimo de real.
c) milionésimo de real.
d) bilionésimo de real.
e) trilionésimo de real.

> Dados:
> Um conto equivalia a um milhão de réis.
> Um bilhão é igual a 10^9 e um trilhão é igual a 10^{12}.

04

A igualdade correta para quaisquer a e b, números reais maiores do que zero, é

a) $\sqrt[3]{a^3+b^3}=a+b$

b) $\dfrac{1}{a-\sqrt{a^2+b^2}}=-\dfrac{1}{b}$

c) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=a-b$

d) $\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

e) $\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=a-b$

05

Em um experimento probabilístico, Joana retirará aleatoriamente 2 bolas de uma caixa contendo bolas azuis e bolas vermelhas. Ao montar-se o experimento, colocam-se 6 bolas azuis na caixa. Quantas bolas vermelhas devem ser acrescentadas para que a probabilidade de Joana obter 2 azuis seja $1/3$?

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

09

Use as propriedades do logaritmo para simplificar a expressão

$$S=\frac{1}{2\cdot\log_2 2016}+\frac{1}{5\cdot\log_3 2016}+\frac{1}{10\cdot\log_7 2016}$$

O valor de S é

a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{3}$

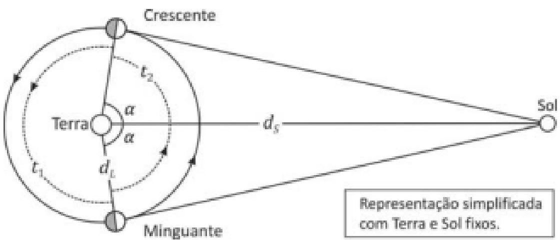
c) $\dfrac{1}{5}$

d) $\dfrac{1}{7}$

e) $\dfrac{1}{10}$

12

Quando a Lua está em quarto crescente ou quarto minguante, o triângulo formado pela Terra, pelo Sol e pela Lua é retângulo, com a Lua no vértice do ângulo reto. O astrônomo grego Aristarco, do século III a.C., usou este fato para obter um valor aproximado da razão entre as distâncias da Terra à Lua, d_L, e da Terra ao Sol, d_S.



É possível estimar a medida do ângulo α, relativo ao vértice da Terra, nessas duas fases, a partir da observação de que o tempo t_1, decorrido de uma lua quarto crescente a uma lua quarto minguante, é um pouco maior do que o tempo t_2, decorrido de uma lua quarto minguante a uma lua quarto crescente. Supondo que a Lua descreva em torno da Terra um movimento circular uniforme, tomando $t_1 = 14{,}9$ dias e $t_2 = 14{,}8$ dias, conclui-se que a razão d_L/d_S seria aproximadamente dada por

a) $\cos 77{,}7^{\circ}$
b) $\cos 80{,}7^{\circ}$
c) $\cos 83{,}7^{\circ}$
d) $\cos 86{,}7^{\circ}$
e) $\cos 89{,}7^{\circ}$

Fonte: http://acervo.fuvest.br/fuvest/2016/fuv2016_1fase_prova_V.pdf

Observe que também há questões diretas, como as de números 09 e 04, por exemplo, e outras mais contextualizadas, como as questões 01, 05 e 12.

O vestibular da FUVEST possui muitas questões diretas, mas mesmo assim, com o passar dos anos, surgiram cada vez mais questões contextualizadas. Obviamente, pode-se ver, tanto na prova da figura 12, como em outras provas da década de 1980 e 1990, questões contextualizadas, assim como também há questões diretas, não contextualizadas, nas provas das últimas duas décadas. Entretanto, é perceptível o crescimento da quantidade e uma maior preocupação com as questões contextualizadas ao passar dos anos 1980 até os dias de hoje.

Além dos vestibulares, há o ENEM, que como o nome já afirma, é um exame em escala nacional, em que todo o Brasil realiza a mesma prova, e com isso é possível obter acesso a algumas universidades ou conseguir pontos para aumentar as chances de ingresso em uma determinada instituição. Alguns exemplos de universidades que adotam o ENEM como prova única de ingresso são a UFRJ (Universidade Federal do Rio de Janeiro) e a UFF (Universidade Federal Fluminense).

A PUC-RJ (Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro), por exemplo, reserva 50% das vagas para ingresso pelo ENEM, e os outros 50% das vagas pelo vestibular próprio da instituição, e permite que o vestibulando faça o ENEM e o vestibular da PUC-RJ, podendo assim ficar com a melhor nota entre as duas provas.

Outras universidades, como a UFSC (Universidade Federal de Santa Catarina) utilizam a nota do ENEM para aumentar os pontos que o vestibulando possui ao realizar o vestibular próprio da universidade.

Pode-se perceber que, sendo em uma universidade pública ou privada, em muitos casos, o ENEM é utilizado de alguma maneira para permitir o acesso dos vestibulandos aos cursos de graduação. Sendo assim, o ENEM torna-se um instrumento de avaliação de muita importância e, portanto, é esperado que a maioria das escolas e cursos pré-vestibulares se preocupem em focar o ensino para preparar os alunos para a realização deste exame. Em consequência desta atitude, o ENEM acaba sendo um direcionador do ensino das escolas no Brasil, sejam essas públicas ou particulares.

Infelizmente, o autor deste trabalho, que é professor, percebe e tem recebido reclamações diversas de conhecidos e colegas de trabalho, constatando que muitas escolas deixaram de ser um local de aprendizagem, formação de caráter e conscientização de novos cidadãos, para ser um local onde se prepara para fazer uma prova ao atingir o 3º ano do Ensino Médio e, nos dias de hoje, especificamente, preparando para o ENEM.

Em outras palavras, o que se tem percebido é que se o ENEM retirar um tópico dos conteúdos matemáticos possíveis de serem cobrados na prova, a tendência é que as escolas também deem menos atenção a este tópico em questão. Por este motivo o autor acredita que, como dito anteriormente, o ENEM seja um direcionador do ensino das escolas no Brasil.

Considerando este fato como uma verdade, é relevante que os professores prestam atenção nos tipos de questões que o ENEM costuma cobrar, ou seja, nos conteúdos matemáticos cobrados, como esses conteúdos são cobrados, os níveis de dificuldade, etc.

Isto pode ser verificado em Santos (2015). Após uma entrevista com alguns professores, e analisando os dados coletados, Santos (2015, p. 88) pôde perceber que um professor “adaptou sua forma de ensinar, dando menos importância àquilo que não é muito cobrado”, enquanto outro professor “se mostra insatisfeito com a mudança em sua prática de ensino, com a supressão de conteúdos, mas diz que essa mudança ocorreu de forma imposta.”; um terceiro professor “diz que não mudou, que somente o ENEM foi acrescido em suas aulas, trabalhando com as questões”. Ou seja, o ENEM está inserido no dia a dia dos professores, das escolas e dos alunos, mesmo os que não estejam prestes a realizar este exame.

Santos finaliza (2015, p. 88) concluindo que:

> “(...) após esses longos meses de estudo e pesquisa, pudemos verificar que realmente é necessário refletir, pensar e repensar sobre que tipos de influências o ENEM vem trazendo para o Ensino, não só de matemática. É preciso sim dar enfoque ao ENEM, durante o ensino”.

E em seguida, em relação aos conteúdos matemáticos cobrados no ENEM e nas escolas, Santos (2015, p. 89) afirma que “alguns conteúdos já foram suprimidos e cada vez mais o currículo tende a se adaptar e a se remoldar às exigências do ENEM.”.

2.1 **A criação do ENEM e a sua evolução**

Em 1911 o político Rivadávia da Cunha Corrêa percebeu que a quantidade de alunos que desejavam realizar um curso de ensino superior em faculdades públicas era maior que a quantidade de vagas oferecidas (fato que se manteve até os dias de hoje), sendo assim ele decidiu criar uma prova para selecionar os alunos que teriam o direito de realizar o curso superior. Esta prova foi denominada "exame de admissão aos cursos superiores", posteriormente alterada para "exame vestibular" e, somente então, reduzida para "vestibular". A palavra vestibular vem do latim *vestibulum*, que significa entrada, devido a esta análise percebe-se o sentido da denominação "exame vestibular", ou seja, "exame de entrada".

Apesar da criação do vestibular como uma prova, o exame não era o mesmo que se tem hoje em dia, tanto pelos tipos de questões cobradas (como já citado anteriormente), como pelo próprio formato do exame, haja vista que antigamente os estudantes também realizavam um teste oral.

Os vestibulares continham quase sempre duas matérias, tidas como principais ou mais importantes, que eram línguas (português e uma língua estrangeira) e ciências (Matemática, Física e Química).

Os primeiros exames unificados, ou seja, um único exame que proporcionava a possibilidade de ingresso em diversas faculdades, começaram a surgir na década de 1960, evoluindo para finalmente em 1998 ser criado o Exame Nacional do Ensino Médio, ou seja, o ENEM.

O site do INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) descreve a história do ENEM. O INEP é uma autarquia vinculada ao Ministério da Educação (ou seja, uma entidade administrativa com órgãos próprios e que possui autonomia), cuja missão é promover estudos, pesquisas e avaliações sobre o sistema educacional brasileiro.

> O ENEM foi criado com o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao final de sua jornada pela educação básica, buscando contribuir para a melhoria na qualidade da escolarização.
> A partir de 2004, passou a ser utilizado também como mecanismo de seleção para o ingresso no Ensino Superior, seja utilizando resultados do Enem como fase única de seleção ou combinando com os próprios processos seletivos de cada universidade, assim democratizando as oportunidades de acesso as vagas oferecidas por Instituições Federais de Ensino Superior (IFES).
> (http://portal.inep.gov.br/web/guest/enem)

O ENEM também pode ser realizado por pessoas privadas de liberdade e jovens que cumprem medida socioeducativa com privação de liberdade. Entretanto essas provas são realizadas em dias distintos do exame para pessoas livres.

O modelo de prova do ENEM durante a primeira década de aplicação era distinto do modelo atual. Anteriormente, a prova não distinguia especificamente qual matéria era a principal abordada em algumas questões, o que levava alguns professores a terem dúvida se a questão poderia ser classificada como Matemática, Física, Química, etc.

Em 2009 houve uma reformulação do exame, que passou a separar as disciplinas, como é feito até hoje. As provas passaram a ser estruturadas em matrizes de referência, para cada uma das 4 áreas de conhecimento. Cada área é composta por 45 questões.

A tabela 1 separa as áreas de conhecimento aplicadas em cada dia de prova.

Tabela 1 - Áreas de conhecimento do ENEM

PROVAS	ÁREAS DE CONHECIMENTO
1º dia de prova	**Ciências humanas e suas tecnologias** (História, Geografia, Filosofia, Sociologia e Conhecimentos Gerais).
	Ciências da natureza e suas tecnologias (Biologia, Física e Química).
2º dia de prova	**Linguagens, códigos e suas tecnologias** (Redação, Língua Portuguesa, Literatura, Artes, Educação Física, Tecnologia da informação, Língua Estrangeira (Inglês ou Espanhol) e Comunicação).
	Matemática e suas tecnologias (Matemática).

Fonte: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/edital/2017/edital_enem_2017.pdf

Entretanto, neste mesmo ano de mudanças no ENEM, ocorreu um problema considerado seríssimo: o do vazamento de uma das provas. Devido a este incidente, esta prova vazada foi disponibilizada para o público, para que os estudantes pudessem utilizar a prova como um simulado. Apesar do problema, os alunos, professores e as escolas puderam aproveitar e analisar o novo modelo de prova, treinando e preparando os alunos para este novo ENEM. Didaticamente falando foi algo valioso, pois, para o aluno, a tensão e a ansiedade de um novo estilo de prova, podem atrapalhar o desempenho.

Outros problemas em outros anos também foram registrados, sendo assim o ENEM não é uma avaliação livre de erros e falhas, mas independente disto, sem a intenção propriamente dita, este exame continua ditando considerável parcela do rumo da educação no Brasil.

Para o ano de 2017, devido a uma reformulação do edital do exame, houve as seguintes mudanças, que podem ser observadas na tabela 2:

Tabela 2 - Comparação do ENEM de 2009 a 2016, com o ENEM de 2017.

ENEM de 2009 a 2016	**ENEM de 2017**
Prova em um final de semana (sábado e domingo)	Prova em dois domingos
Resultados do ENEM divulgados, também, por escolas.	Fim dos resultados do ENEM por escola
Cartão de resposta sem identificação da cor da prova, sendo necessário o aluno realizar este registro.	Cartão de resposta já com identificação da cor da prova e encartados dentro do caderno de questões.
Redação no 2º dia de prova.	Redação no 1º dia de prova.
Isenção da taxa de inscrição obtida via auto declaração de baixa renda.	Isenção da taxa de inscrição será verificada via CadÚnico[1].
Sem qualquer tipo de cobrança de atestados médicos para candidatos que faltarem a um dos dias do exame.	Candidato que faltar a um dos dias exame, e que tenha benefício de isenção, deverá apresentar atestado médico, para que não perca a isenção no ano seguinte.
Solicitação de tempo adicional para atendimento especial feito no momento do exame.	Solicitação de tempo adicional para atendimento especial feito na hora da inscrição.
ENEM serve como certificação do ensino médio.	ENEM não servirá como certificação do ensino médio.

Fonte: Diário Oficial da União: Edital nº 60, de 7 de abril de 2017. (Edital do ENEM 2017)

[1] CaduÚnico: também conhecido como CAD, é um banco de dados do governo federal, com as principais informações das famílias que podem ser beneficiadas pelos programas sociais.

2.2 **Gráficos de funções e tratamento da informação no ENEM**

Após as ponderações sobre o ENEM ditar os rumos do ensino nas escolas, e também sobre a importância do entendimento do conteúdo matemático “Funções”, o autor realizou uma pesquisa para analisar a quantidade de questões tratando deste assunto específico, no ENEM. Entretanto, o foco desta análise não foi simplesmente em qualquer questão sobre funções, mas sim tendo total parcialidade em analisar somente as questões que envolviam gráficos. Pois, como dito na introdução, já existia uma vontade no autor em trabalhar com um aplicativo para construir gráficos de funções.

Foram analisadas provas do ENEM de 2009 até 2016. A análise foi criteriosa em começar pelo ano de 2009, pois foi o ano em que houve mudanças consideráveis no estilo de prova do ENEM. A seguir é destacada uma subsecção para relatar os dados da pesquisa feita pelo autor, citada anteriormente.

2.2.1 Análise de provas

Foram catalogadas e analisadas questões sobre gráficos de funções, na área de “Matemática e suas tecnologias” do ENEM. Para esta análise foram selecionadas provas de 2009 a 2016, considerando também a prova de 2009 que foi cancelada e a segunda aplicação da prova de 2015, formando assim um total de 10 provas analisadas.

Seguem alguns resultados e algumas análises da pesquisa:

1) foram analisadas 450 questões;

2) 71 das 450 questões analisadas envolvem gráficos;

3) das 71 questões com gráficos, os principais tipos de funções encontradas foram: função afim, função quadrática, função exponencial e função logarítmica.

Com 71 das 450 questões envolvendo gráficos, tem-se aproximadamente 15,78% das questões sendo de gráficos. Dentre esses tipos de gráficos, encontram-se:

- ✓ 12 de função afim;
- ✓ 3 de função quadrática;
- ✓ 1 de função exponencial;

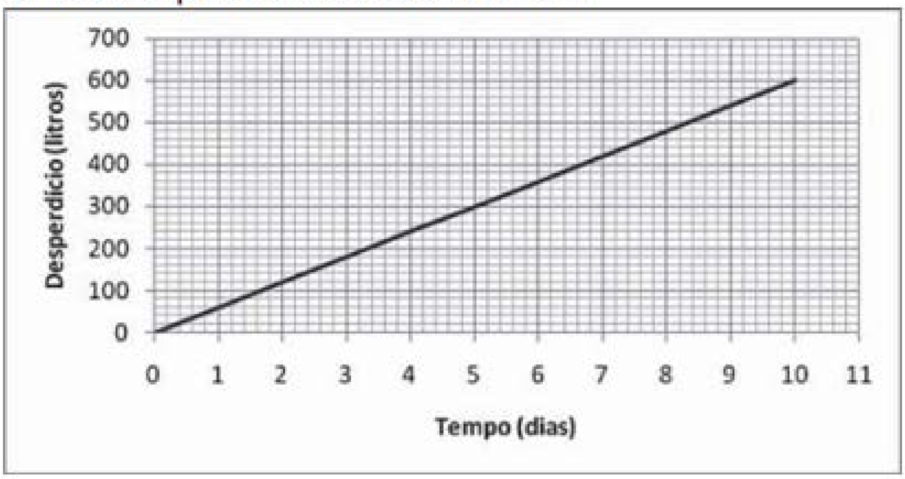
- ✓ 1 de função logarítmica;
- ✓ 54 de tratamento da informação[2].

A seguir, alguns exemplos das questões citadas anteriormente.

Na figura 14 é apresentada uma questão de gráfico de função afim, do exame de 2010, 2ª aplicação:

Figura 14 – ENEM 2010, 2ª aplicação (Função afim).

Uma torneira gotejando diariamente é responsável por grandes desperdícios de água. Observe o gráfico que indica o desperdício de uma torneira:



Se y representa o desperdício de água, em litros, e x representa o tempo, em dias, a relação entre x e y é

- **A** $y = 2x$
- **B** $y = \frac{1}{2}x$
- **C** $y = 60x$
- **D** $y = 60x + 1$
- **E** $y = 80x + 50$

Fonte: ENEM 2010, 2º aplicação.

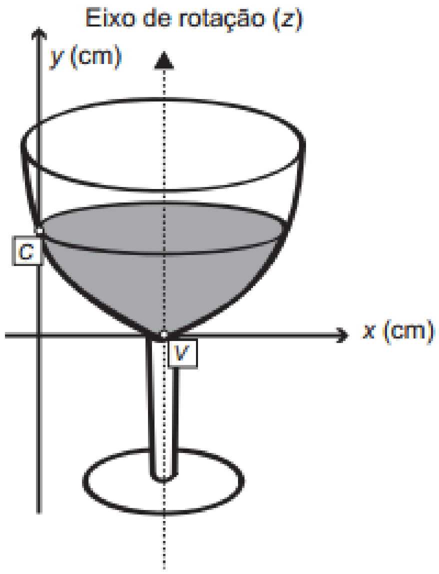
---

[2] Tratamento da informação vem a ser um bloco de questões que engloba a leitura de gráficos, tabelas simples e de dupla entrada, etc. Nelas, o aluno deve encontrar dados para resolver problemas, não necessariamente há aplicações de conhecimentos técnicos diretamente.

Na figura 15 tem-se uma questão do exame de 2013, sobre gráfico de função quadrática.

Figura 15 – ENEM 2013 (Função quadrática)

A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo *z*, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

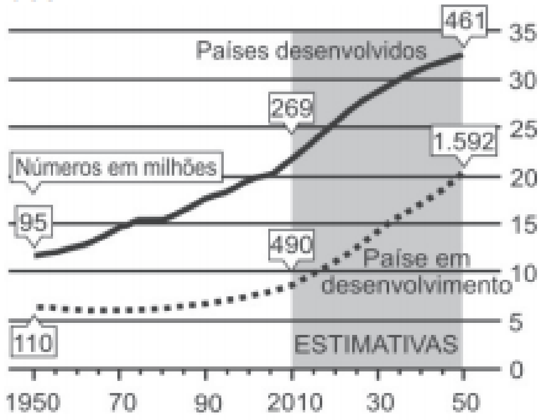
- A 1.
- B 2.
- C 4.
- D 5.
- E 6.

Fonte: ENEM 2013.

Na figura 16 há uma questão do exame de 2009, sobre gráfico de função exponencial.

Figura 16 – ENEM 2009 (Função exponencial)

A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Fonte: "Perspectivas da População Mundial", ONU, 2009

Disponível em: www.economist.com.
Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

Questão 138

Suponha que o modelo exponencial $y = 363e^{0,03x}$, em que $x = 0$ corresponde ao ano 2000, $x = 1$ corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0,3} = 1,35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre

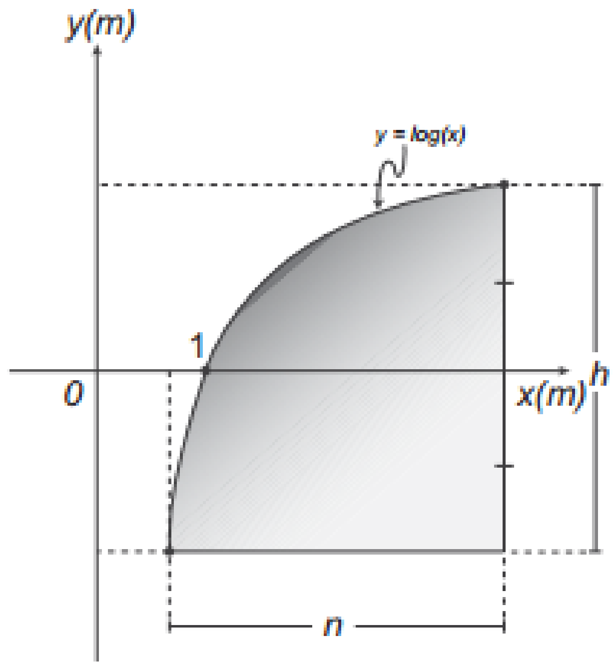
- Ⓐ 490 e 510 milhões.
- Ⓑ 550 e 620 milhões.
- Ⓒ 780 e 800 milhões.
- Ⓓ 810 e 860 milhões.
- Ⓔ 870 e 910 milhões.

Fonte: ENEM 2009.

Na figura 17 é apresentada uma questão do exame de 2015, sobre gráfico de função logarítmica.

Figura 17 – ENEM 2015 (Função logarítmica)

Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação y = log (x), conforme a figura.



A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo *x* sempre divida ao meio a altura *h* do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo *x*. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura *h* do vidro em função da medida *n* de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é

A $\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right) - \log\left(\dfrac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

B $\log\left(1+\dfrac{n}{2}\right) - \log\left(1-\dfrac{n}{2}\right)$

C $\log\left(1+\dfrac{n}{2}\right) + \log\left(1-\dfrac{n}{2}\right)$

D $\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

E $2\log\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)$

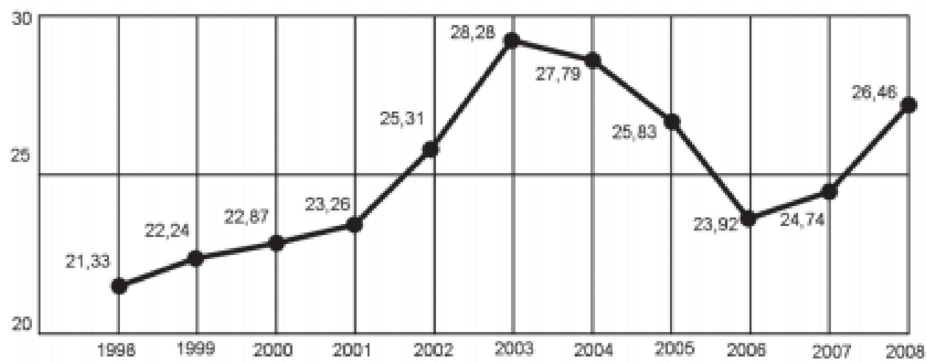
Fonte: ENEM 2013.

Na figura 18 há uma questão da prova de 2011, sobre tratamento da informação.

Figura 18 – ENEM 2011 (tratamento da informação)

O termo agronegócio não se refere apenas à agricultura e à pecuária, pois as atividades ligadas a essa produção incluem fornecedores de equipamentos, serviços para a zona rural, industrialização e comercialização dos produtos.

O gráfico seguinte mostra a participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro:



Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (CEPEA). **Almanaque abril 2010**. São Paulo: Abril, ano 36 (adaptado).

Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro e a posterior recuperação dessa participação, em termos percentuais.

Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre os anos de

A. 1998 e 2001.
B. 2001 e 2003.
C. 2003 e 2006.
D. 2003 e 2007.
E. 2003 e 2008.

Fonte: ENEM 2011.

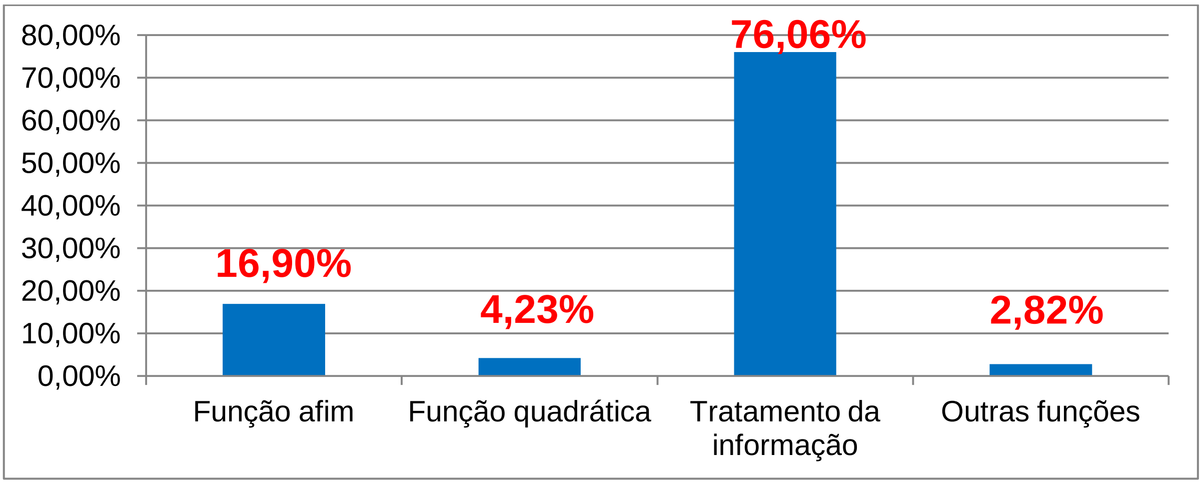
Com base nesta análise, pode-se perceber que a quantidade de questões envolvendo leitura de gráficos (quer seja necessário um conhecimento prévio de, por exemplo, funções ou não), é consideravelmente grande. Pode parecer um valor pequeno (aproximadamente 16%), todavia não o é.

Deve-se lembrar que o ENEM pode cobrar em um exame qualquer conteúdo de todo o ensino fundamental e/ou todo o ensino médio. Dentre esses conteúdos há os que possuem maior probabilidade de serem cobrados, seja devido a uma simples análise das provas antigas pelos professores durante suas aulas, ou por serem conteúdos que exigem conhecimentos importantes para os estudantes. Como exemplo pode-se citar análise combinatória, probabilidade, porcentagem, áreas de figuras planas, área ou volume de sólidos, regra de três, análise de gráficos, funções em geral, etc. Entretanto, mesmo tendo ciência dos conteúdos mais prováveis de serem cobrados, ainda há uma gama de conteúdos a serem estudados pelos alunos. Sendo assim, após constatar através desta análise das provas, que aproximadamente 16% da prova de “Matemática e suas tecnologias” envolve gráficos, conclui-se que isso representa uma quantidade considerável de questões. Ou seja, restam 84% da prova para todos os outros conteúdos de todo o ensino fundamental e médio, considerando as variações dentro de um mesmo conteúdo, pois é sabido que em um conteúdo pode-se tender a questão para diferentes cobranças e exigências de conhecimento.

Dentre as 71 questões de gráficos, o resultado da pesquisa também surpreendeu no fato de ter-se poucas questões de funções, sendo a sua maioria (12) de função afim, e a maior parte das questões de gráficos serem baseadas em tratamento da informação (Lembrando que uma questão que solicite o cálculo de determinada probabilidade, por exemplo, pode ser considerada como tratamento da informação, se os dados estiverem simplesmente dispostos em um gráfico e/ou tabela).

São 54 questões de tratamento da informação, das 71 questões de gráficos, o que expressa uma quantidade bastante relevante. Para efeito de melhor compreensão segue na figura 19 uma análise visual desta relevância citada:

Figura 19 - Porcentagem das questões de gráficos nas avaliações analisadas.



Fonte: Provas do ENEM de 2009 a 2016, “ENEM 2009 cancelado” e segunda aplicação de 2015

Percebe-se então a importância da compreensão da leitura de gráficos pelos estudantes que irão prestar o ENEM. Deve-se levar em consideração que apesar da análise ter sido feita com base nas avaliações do ENEM, a leitura de gráficos também é importante para alunos que pretendem realizar outros vestibulares, assim como para compreender gráficos que constantemente surgem no dia a dia, seja em jornais, trabalhos, televisões, etc.

Todas essas pesquisas, assim como toda essa análise realizada, reforçaram no autor deste trabalho a importância que o ENEM tem no ensino das escolas do Brasil, e também a necessidade de se fazer decentemente um estudo de gráficos para os estudantes que, imagina-se, um dia irão prestar um vestibular.

3 GEOGEBRA

Antes de falar sobre o aplicativo GeoGebra, o qual foi utilizado amplamente na confecção e realização das atividades para este trabalho, segue uma breve explicação sobre as TD e TIC.

3.1 Tecnologias digitais (TD), tecnologias de informação e comunicação (TIC)

Inicialmente é necessário definir a diferença entre cada uma das tecnologias citadas no título deste capítulo.

As Tecnologias Digitais (TD) representam qualquer tecnologia digital, por exemplo, computadores, internet, *scanners*, Datashow, etc.

Enquanto as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), englobam dentre as TD, as que podem fornecer especificamente informação ou proporcionar a comunicação, por exemplo, o Datashow não é considerado uma TIC, pois ele não fornece informação e nem comunicação, enquanto um celular *smartphone* já é considerado uma TIC, pois proporciona comunicação. A internet, facilmente acessada pelos *smartphones* com um plano de internet ou por redes *wi-fi*, é uma TIC, haja vista que nela pode ser realizada uma comunicação (*e-mails*, etc) e contém um imenso acervo de informações.

Na própria Lei de Diretrizes e Bases (LDB) (2017), há um trecho que informa sobre o uso de tecnologias na educação. Na seção IV (Do Ensino Médio), artigo 36 (sobre o currículo do Ensino Médio), parágrafo 11 (cumprimento das exigências curriculares), inciso VI cita:

> "§ 11. Para efeito de cumprimento das exigências curriculares do ensino médio, os sistemas de ensino poderão reconhecer competências e firmar convênio com instituições de educação a distância com notório reconhecimento, mediante as seguintes formas de comprovação:"
>
> "VI – Cursos realizados por meio de educação à distância ou educação presencial mediada por tecnologias." (p. 27 e 28)."

Assim como, também na LDB, no Título VI (Dos Profissionais da Educação), artigo 62 (Formação de docentes para atuar na educação básica), parágrafo 2º, cita:

> "§ 2º. A formação continuada e a capacitação dos profissionais de magistério poderão utilizar recursos e tecnologias de educação a distância." (p. 42)

Portanto há até um incentivo, na própria lei, para que sejam usadas as tecnologias na educação. Entretanto, estas não podem ser usadas de qualquer maneira, sem que seja feito um planejamento pelo professor e pela instituição, pois a tecnologia usada de forma inadequada pode trazer prejuízos à educação e aprendizagem do aluno. Não se deve esquecer que a tecnologia está ao alcance para servir de auxílio, e dar continuidade ao ensino do professor, sendo este o centralizador do conhecimento, ou sendo este quem vai encaminhar os alunos para que eles próprios sejam os centralizadores do conhecimento, ou seja, o professor é quem guia o aluno, ensinando o conteúdo, ou indicando como e onde procurar para que o próprio aluno estude. A tecnologia deve servir como uma extensão dos braços do professor; caso ela seja apenas inserida na sala de aula, pode atrapalhar o que o professor já lecionava.

A análise anterior possui embasamento de Nunes (2013, p.2), defensor do uso das TIC em sala de aula:

> "Não estamos afirmando que essa mudança traga, obrigatoriamente, melhorias para a educação, pelo contrário, em alguns casos a presença das TD podem até dificultar os processos de ensino e de aprendizagem."

Ou seja, mesmo um defensor do uso e especialista no assunto, afirma que não basta apenas "inserir as tecnologias", ou seja, deve haver um planejamento, assim como com qualquer disciplina, qualquer conteúdo a ser lecionado. Entretanto, as faculdades e as experiências de vida ensinam aos professores a arte do magistério, mas não como utilizar as TD de forma adequada a uma escola com suas particularidades, ou a uma disciplina ou conteúdo específico. E isso normalmente não é ensinado nas universidades.

Em Araújo, D. (2017, p. 14) há uma citação que reflete esta preocupação, pois ele diz que "às escolas cabe o desafio de qualificar os alunos para que possam explorar os recursos dessas tecnologias e capacitar o interlocutor de todo o rico processo: o professor.". Em outras palavras, se tudo for devidamente planejado, testado, discutido e preparado, a provável solução serão aulas mais divertidas para os alunos, fugindo do método clássico e antigo, onde o professor escrevia no quadro e o aluno simplesmente copiava no caderno.

As TD são uma crescente na sociedade. Em 2011 um estudo realizado pela University of Southern California, estimou que somados os dispositivos de armazenamento analógicos e digitais, a quantidade de informações armazenadas chegava ao total de 295 exabytes[3]. Esta pesquisa sugere, ao autor desta dissertação, que seria difícil, em algum momento do presente ou do futuro, negar a utilização massiva das TD em sala de aula.

O *smartphone* é uma TIC que diversos alunos (a maioria? Todos?) possuem, e a utilização deste recurso tecnológico vem crescendo ao longo dos anos. Não se usa mais o celular apenas para fazer ligações, pois tendo se tornado um *smartphone*, a capacidade de recursos que o mesmo armazena é consideravelmente maior do que apenas utilizar para ligações. Inclusive alunos vêm perguntando ao realizador deste trabalho, nas salas de aula, se “o celular serve para fazer ligações, e outras coisas, ou fazer outras coisas e também ligações?”, ou seja, uma brincadeira com o fato de que a principal função dos celulares hoje em dia, para muitas pessoas, deixou de ser realizar ligações, haja vista que muitas informações são transmitidas e obtidas por mensagens (SMS, whatsapp, facebook, etc). Enquanto as ligações são utilizadas apenas em último caso.

> “É característica marcante dessa sociedade a convergência de diversas tecnologias. O celular é um exemplo clássico dessa convergência, pois, embora tenha surgido como um aparato tecnológico de comunicação móvel atualmente é usado como máquina fotográfica, filmadora, TV, GPS, computador, rádio, etc., essa convergência amplia ainda mais a produção e o compartilhamento das informações que é a principal característica da Sociedade na qual estamos vivendo.” (NUNES, 2013, p. 3)

Araújo, J. (2015, p. 46) comenta sobre as TIC nas escolas:

> “As tecnologias da informação e da comunicação (TICs) dentro das escolas já consiste em uma realidade, são inúmeras as escolas que mantém um laboratório de informática, os alunos já dispõem de acesso às tecnologias para seus estudos,

---

[3] Uma comparação sobre o tamanho, em potências de dez, dos bytes, megabytes, gigabyte e exabytes, segue:
Byte: 10^0.
Megabyte: 10^6
Gigabyte: 10^9
Exabyte: 10^{18}

> contudo, ainda persiste uma abordagem instrucionista, onde o professor fica no comando do conhecimento, sendo papel dos alunos apenas obedecer:"

O intuito deste trabalho, como poderá ser visto com mais detalhes nos capítulos por vir, não é que o professor seja somente o instrutor, o detentor, que esteja no comando do conhecimento, o objetivo é que o aluno consiga aprender a ter gosto pela Matemática, e pelo conteúdo específico (funções). E através do uso do *smartphone* venha, por si só, ser o construtor de seus próprios saberes, realizando de forma mais significativa a aprendizagem de maneira prática.

Sendo assim, referente ao uso da TIC, o aluno precisará obedecer aos comandos dos professores por um período, entretanto, após este período inicial, o aluno já possuindo o domínio da ferramenta, ele será capaz de, em casa mesmo, ou no caminho para casa, trilhar a estrada do conhecimento com os próprios pés.

A possibilidade do aluno caminhar de maneira independente (o que é diferente de sozinho, pois um professor nunca deixará de ser necessário), neste caso utilizando a internet e as TD, é o que o filósofo francês Pierre Lévy já defendia, antes mesmo da tecnologia estar tão evidente no dia a dia da escola e da educação.

Lévy é um reconhecido pesquisador das tecnologias da inteligência, também sendo mestre em História da Ciência e Ph.D. em Comunicação e Sociologia e Ciências da Informação. Lévy defende o uso dos computadores e da internet, como meios para ampliar o conhecimento humano.

Em uma entrevista, durante o V Congresso Internacional Conexão RCE (Rede Católica de Educação) Lévy diz:

> "(...) a internet se expandiu mais rapidamente do que qualquer outro sistema de comunicação na história. No começo dos anos 1990, havia 1% da população mundial conectada. Uma geração depois, já eram 40%. Avançamos rapidamente para 50% e mais… Estamos apenas no começo da revolução do meio do algoritmo. Nas próximas décadas, acompanharemos várias mutações. (...) Teremos cada vez mais imagens de nosso funcionamento coletivo em tempo real. A educação vai se focar na formação crítica e no tratamento coletivo de dados."

Como o que já tem sido defendido neste trabalho, o uso da internet e de TD na educação é de fato importante e proveitoso para o aprendizado. E a tendência é o aumento do uso da tecnologia dentro e fora da escola.

3.2 **O aplicativo GeoGebra**

O GeoGebra é um aplicativo para plataforma de computador no Windows, Linux, Mac e também pode ser acessado online, através do navegador *Chrome*, para *tablets* e *Ipads*, através da "*Windows Store*", "*Google play*" ou "*App Store*", e para *smartphones* somente para o sistema *Android*, através da "*Google play*".

Ao final desta dissertação, como apêndice, há um breve tutorial dos principais comandos do GeoGebra.

No próprio site do GeoGebra (www.geogebra.org), há o seguinte anúncio, seguido de 3 perguntas com respostas:

"*GeoGebra: the Graphing calculator for functions, geometry, algebra, calculus, statistics and 3D math!*", ou seja, "GeoGebra, a calculadora gráfica para funções, geometria, álgebra, cálculo, estatística e matemática 3D!"[4]

Como pode ser visto no site citado, também há as seguintes perguntas com respostas:

#1) Os estudantes o adoram porque...

Respostas:

- **Ele torna a Matemática tangível.** O Geogebra cria uma conexão entre Geometria e Álgebra de um modo inovador e visual - Os estudantes podem finalmente ver, tocar e experimentar a Matemática
- **Ele torna a Matemática dinâmica, interativa e divertida.** O GeoGebra oferece aos estudantes uma maneira nova e excitante de se aprender Matemática que vai além do quadro e giz.
- **Ele torna a Matemática acessível e disponível.** O GeoGebra permite que os estudantes se conectem com a Matemática a qualquer hora e em qualquer lugar - Na escola, em casa, onde quer que se esteja.
- **Ele torna a Matemática mais fácil de se aprender.** O GeoGebra cria as interações que os alunos precisam para "absorver" os conceitos matemáticos.

#2) Os professores o adoram porque...

Respostas:

---

[4] Tradução do autor.

- **Ele permite que os professores continuem a ensinar.** O GeoGebra não substituiu os professores. Ele os ajuda a fazer o que fazem de melhor - Ensinar.
- **Ele potencializa o trabalho do professor.** O GeoGebra dá aos professores a liberdade e a autonomia para criarem aulas que eles sabem que os alunos acharão interessantes.
- **Ele permite que os professores se conectem uns com os outros.** Os professores que usam o GeoGebra fazem parte de uma comunidade global.

#3) As escolas o adoram porque...

Resposta:

- **"Estudantes que usam o GeoGebra"** = **"Estudantes mais motivados"** = **"Estudantes que obtêm melhores resultados."**

Na figura 20, a página inicial do site do Geogebra

Figura 20 – Tela inicial do site do Geogebra

Fonte: https://www.geogebra.org/?lang=pt_BR

O foco deste trabalho foi utilizar o GeoGebra para celular como material de sala de aula, considerando o estudo de gráfico de funções.

Como já citado, foi percebido que poderia ser não somente interessante para os alunos como útil para seu aprendizado a utilização do aplicativo Geogebra em *smartphones*, haja vista o uso crescente destes aparelhos entre os jovens.

3.3 **GeoGebra para *smartphones* e *tablets***

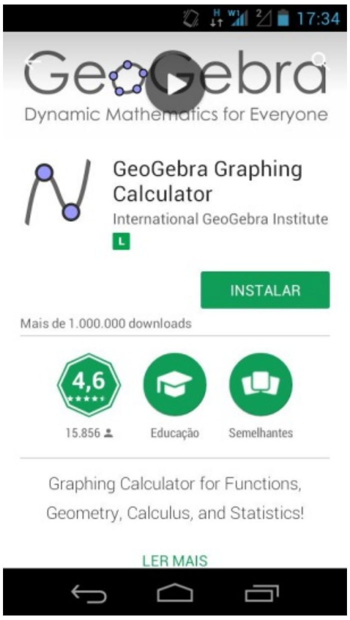
Para realizar o *download* do aplicativo basta acessar o "*Google play*", como mostrado na figura 21, e no mecanismo de busca digitar "Geogebra".

Figura 21 – Tela inicial do google play

Fonte: Print screen do google play

Ao selecionar o aplicativo correto, basta clicar em instalar e aguardar o *download*, e em seguida a instalação, como pode ser observado na figura 22.

Figura 22 – Tela do google play para download do GeoGebra



Fonte: Print screen do google play

A tela inicial do aplicativo segue nas figuras 23, 24, 25, 26, 27 e 28. O foco não é desenvolver o conhecimento e habilidades, no leitor, para manusear o aplicativo, entretanto a importância deste ato de desenvolvimento correto será citada posteriormente.

Conforme brevemente citado anteriormente, o aplicativo GeoGebra – até o ano da realização das atividades propostas (2016) – pode ser instalado em:

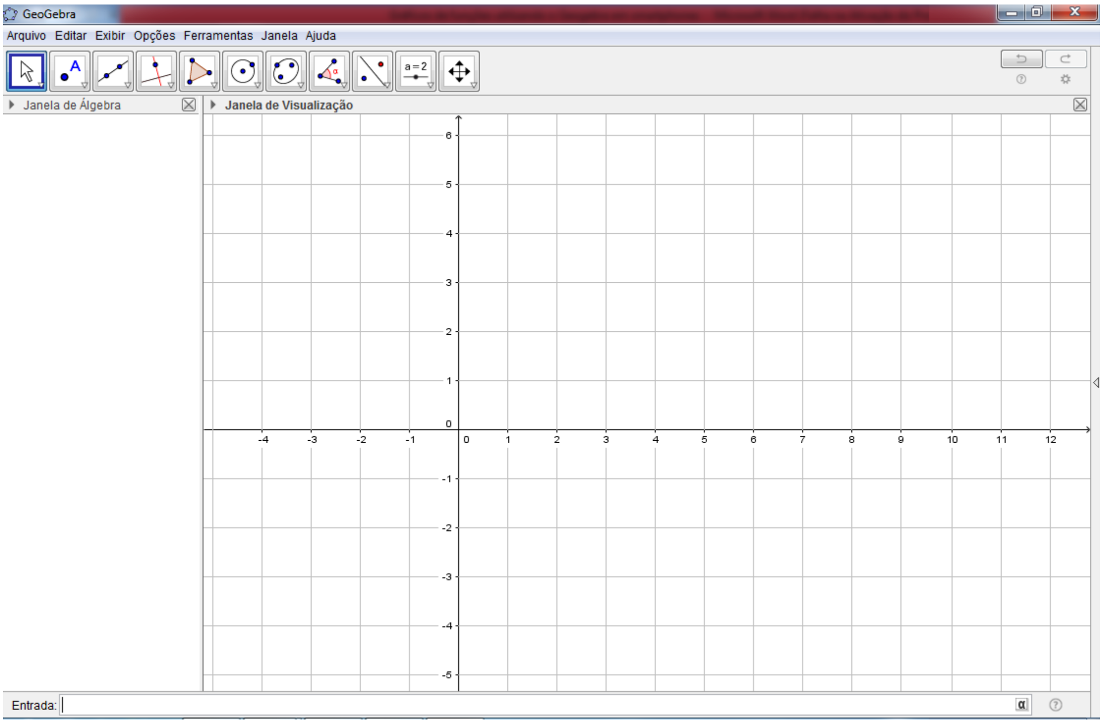
1) Computadores, instalando o aplicativo por um *setup*.
2) Utilizado online, através do navegador de internet.
3) Para celulares e *tablets* com sistema *Android*.
4) Para o *Ipad*[5], da *Apple*, com sistema iOS.

Um tópico importante para a conclusão e análise das atividades foi o fato de que o aplicativo pode ser instalado no *Ipad*, todavia não pode ser instalado no *Iphone*, o qual também utiliza o mesmo sistema iOS do *Ipad*.

A seguir algumas comparações das telas do aplicativo para computadores e do aplicativo para *smartphones* e *tablets* (figuras 23 e 24)

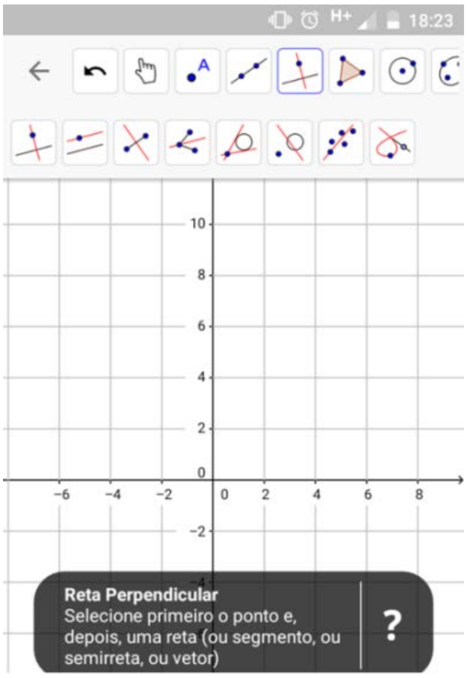
[5] ***iPad*** é o nome de um *tablet* produzido pela empresa Apple Inc. Pelo seu tamanho e peso se situa entre um *smatphone* e um computador portátil.

Figura 23 – Tela inicial do GeoGebra para computador



Fonte: *Print screen* do Geogebra

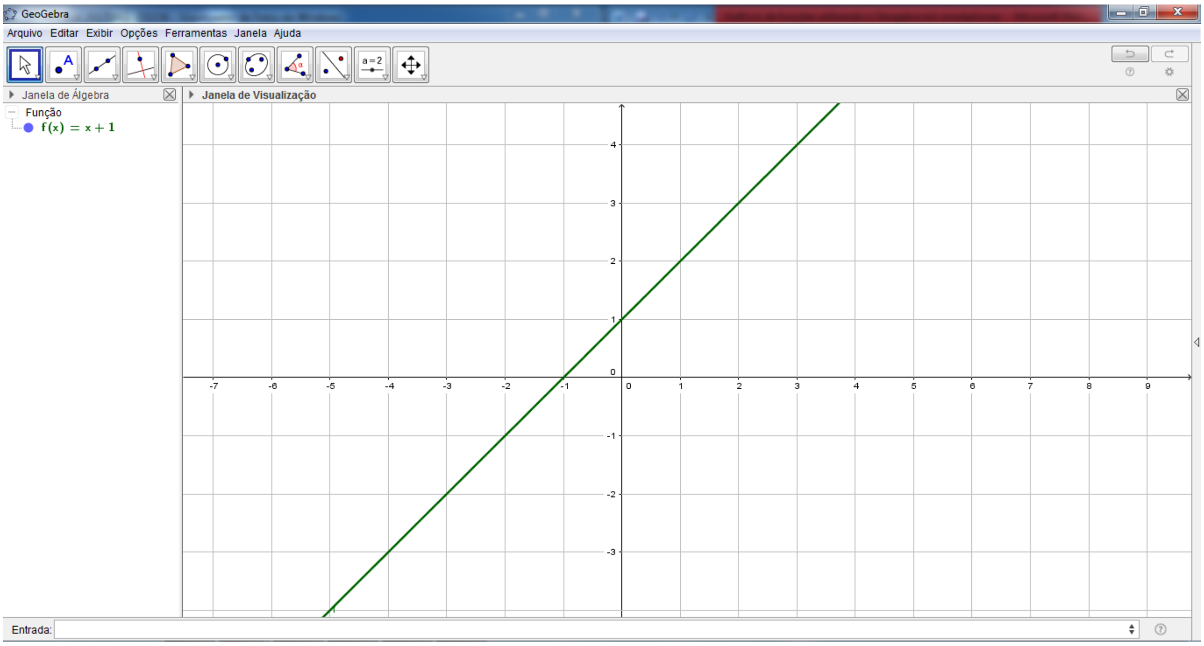
Figura 24 – Tela inicial do GeoGebra para *smartphone*



Fonte: *Print screen* do Geogebra

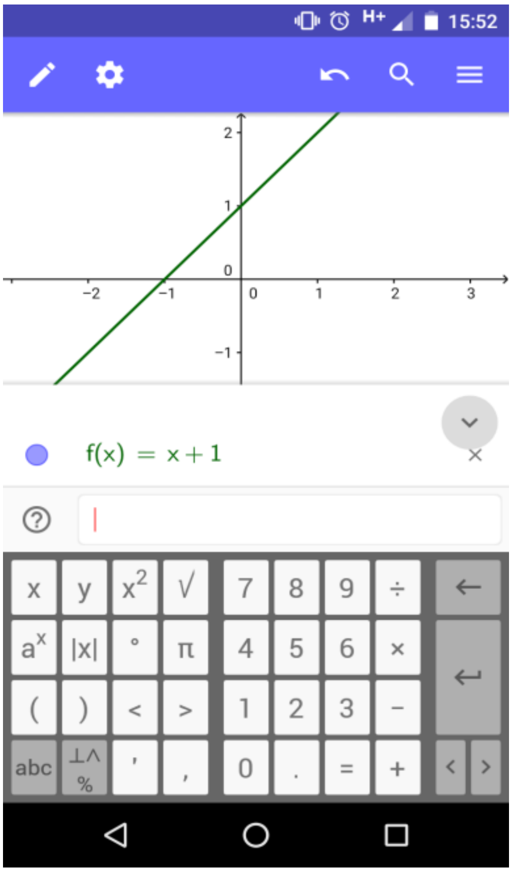
Nas figuras 25 e 26, seguem imagens de funções afim nos 2 modelos (computador e *smartphone*).

Figura 25 – GeoGebra para computador com o gráfico de uma função afim



Fonte: O autor, 2017.

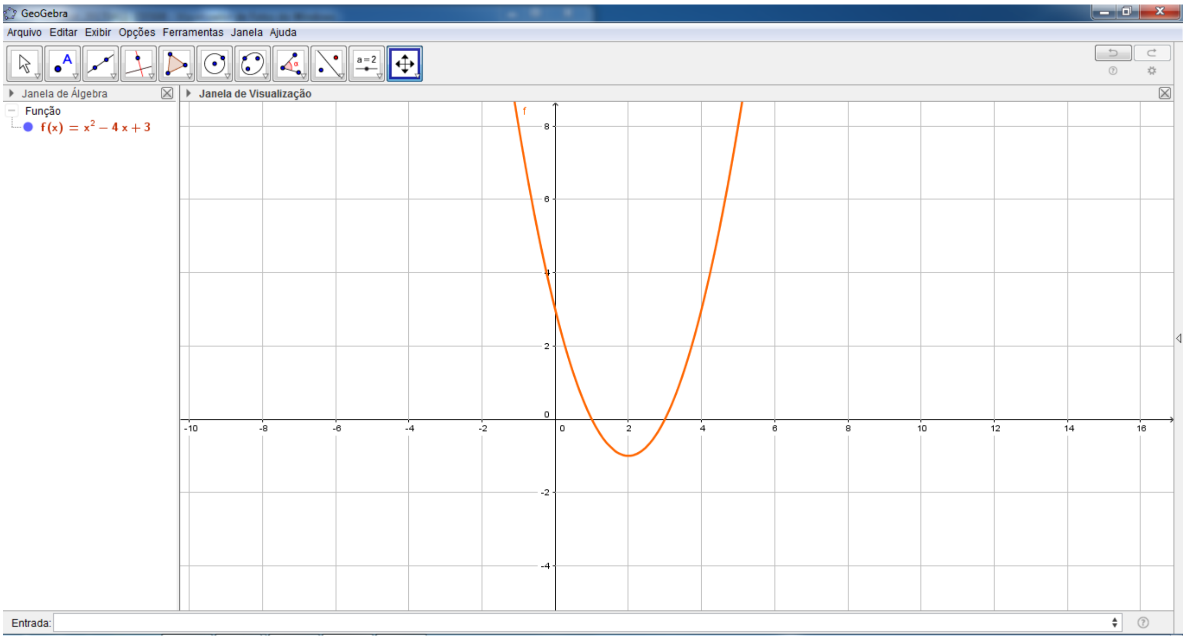
Figura 26 – GeoGebra para *smartphone* com o gráfico de uma função afim



Fonte: O autor, 2017.

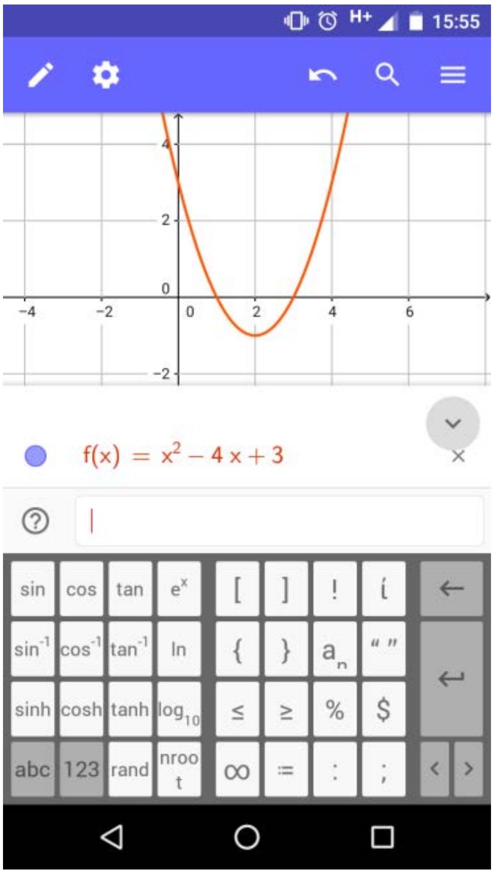
É perceptível a mudança no formato de escrita e na facilidade de acesso aos comandos necessários, em um computador há uma maior facilidade para digitação devido ao próprio teclado do computador, entretanto em um *smartphone* (ou *tablet*) há uma tentativa de simplificação dos comandos, já com “botões” pré-estabelecidos para algumas operações, como potências em geral, elevar ao quadrado especificamente, raízes, módulos, etc. Como pode ser visto nas figuras 27 e 28, com gráficos de parábolas.

Figura 27 – GeoGebra para computador com o gráfico de uma função quadrática



Fonte: O autor, 2017.

Figura 28– GeoGebra para *smartphone* com o gráfico de uma função quadrática



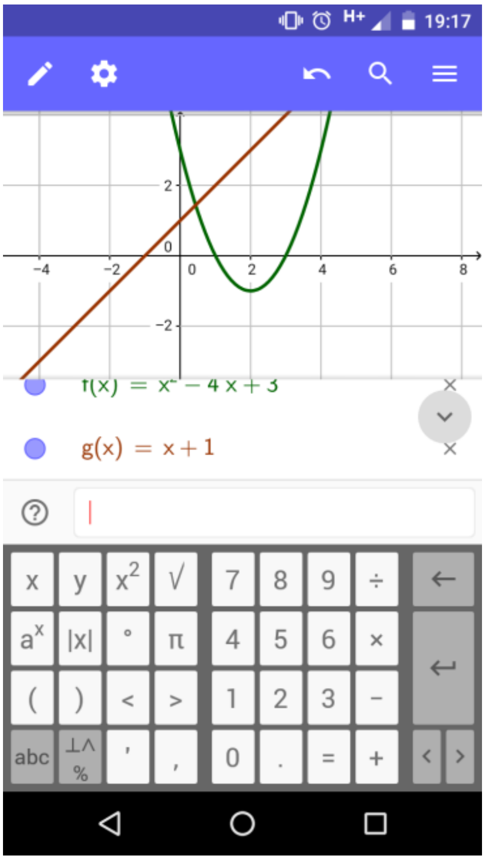
Fonte: O autor, 2017.

Essa diferença no modelo de digitação foi de extrema importância para análise das atividades durante e após as aplicações.

Devido ao tamanho e formato da tela do computador, é possível que em uma única tela estejam presentes, por exemplo, os gráficos de algumas funções, a lei de formação das mesmas, assim como quaisquer pontos e informações necessárias para a realização de alguma atividade proposta pelo professor.

Entretanto, o formato e tamanho da tela de um *smartphone*, por ser consideravelmente menor que a tela de um computador, poderia proporcionar uma experiência desagradável ao manter todas as informações (lei de formação, pontos, etc) utilizadas na atividade, juntamente com os gráficos, em uma única tela. Observar a figura 29, com os gráficos de duas funções na tela do aplicativo para smartphone.

Figura 29– GeoGebra para *smartphone*: comandos para digitação

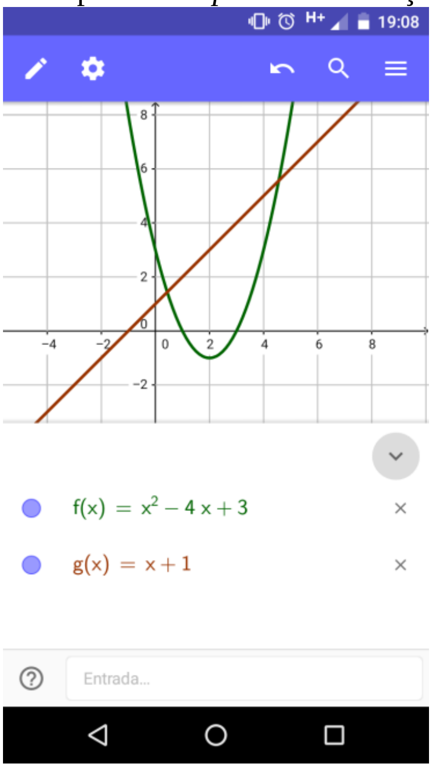


Fonte: O autor, 2017.

Visando evitar esta poluição visual, no *smartphone* é possível “minimizar” a tela com as informações que possam ser irrelevantes para um momento em que se deseja apenas a visualização de um ou mais gráficos. Essa minimização das informações destacadas anteriormente pode ser vista nas figuras 30 e 31.

A figura 30 contém os mesmos gráficos da figura 29, porém com o teclado do aplicativo minimizado.

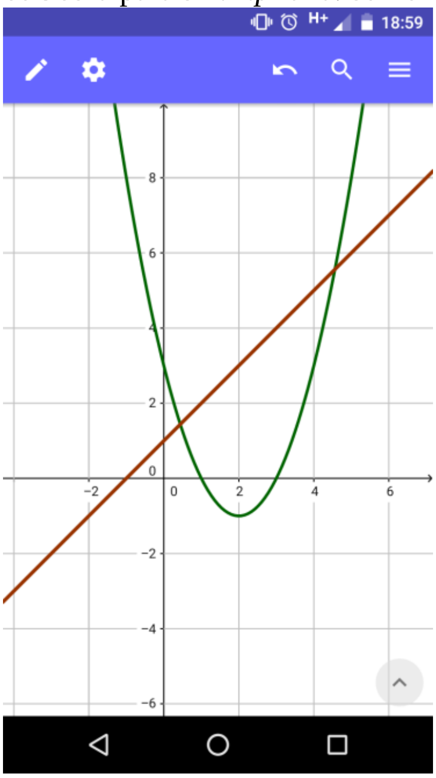
Figura 30– GeoGebra para *smartphone*: construções realizadas



Fonte: O autor, 2017.

A figura 31 contém a tela com as leis de formação também minimizadas.

Figura 31– GeoGebra para *smartphone*: somente os gráficos



Fonte: O autor, 2017.

4 **ATIVIDADES PARA O GEOGEBRA**

Foram realizadas quatro atividades em três turmas de 9º ano do Ensino Fundamental e uma turma do 1º ano do Ensino Médio, em duas unidades de um colégio particular da zona oeste do Rio de Janeiro, uma unidade em Jacarepaguá (turmas 901 e 902) e outra na Barra da Tijuca (turmas 903 e 1002).

O GeoGebra, ao construir uma determinada imagem ou gráfico, seleciona automaticamente a cor preta como padrão. Didaticamente não é sugerida esta cor, para evitar confusão com os eixos do plano cartesiano, portanto é aconselhável, ao professor que realizar as atividades, ensinar aos alunos a modificar a cor de cada construção, para facilitar a visualização e compreensão. Nas imagens que seguem neste tópico, as cores já foram modificadas.

Para as atividades sugeridas, foram selecionadas as funções afim e quadrática, pois estas funções aparecem em um maior número de questões no ENEM, em comparação com outros tipos de funções, como a exponencial, logarítmica, etc. A princípio é sugerido começar com essas questões também pelo fato de, nos planejamentos de Matemática da maioria das escolas, estas funções são as inicialmente lecionadas.

As atividades estão descritas nas seções desse capítulo.

4.1 **Atividade 1 – Função afim**

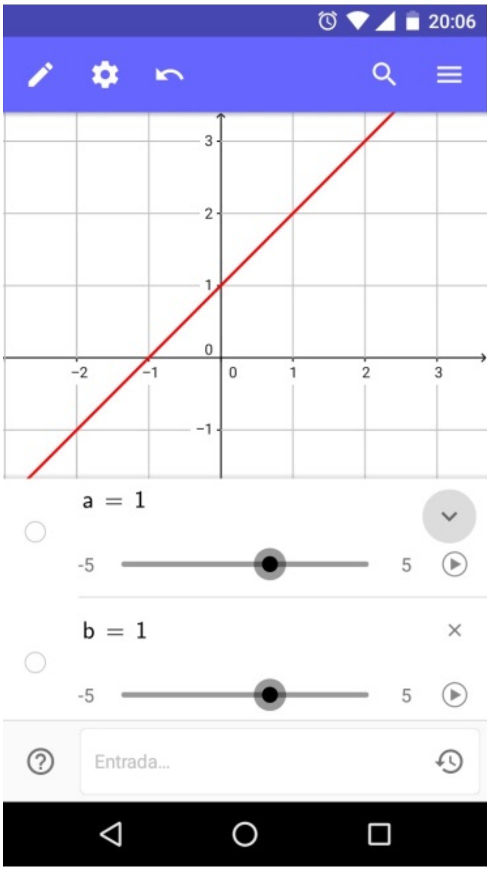
A atividade 1 possui como foco as funções afins. Esta atividade consiste em revisar (pois o professor já deverá ter lecionado o conteúdo inicial) o significado dos coeficientes das funções afins, ou seja, das funções do tipo $y = ax + b$, assim como relacionar as mudanças nos valores dos coeficientes a e b com as consequentes alterações nos gráficos das funções.

Para tal atividade, os alunos devem digitar no aplicativo GeoGebra, nos seus celulares, a função $y = ax + b$. Ao teclar o botão “enter”, o qual possui apenas o símbolo ↵, já conhecido por alguns no teclado de um computador, o aplicativo irá gerar o gráfico de função afim e automaticamente irá criar dois “deslizadores”, como são denominados no GeoGebra.

Um deslizador criado será para o coeficiente a, e o outro para o coeficiente b. Esses deslizadores têm a função de determinar os possíveis valores dos coeficientes num dado intervalo (o qual pode ser modificado). Ao deslizar o dedo na tela do celular nestes deslizadores, os coeficientes podem ir assumindo valores distintos, e assim ao mesmo tempo em que os coeficientes são modificados, de maneira dinâmica, o gráfico da função também é alterado, seguindo os valores dos coeficientes.

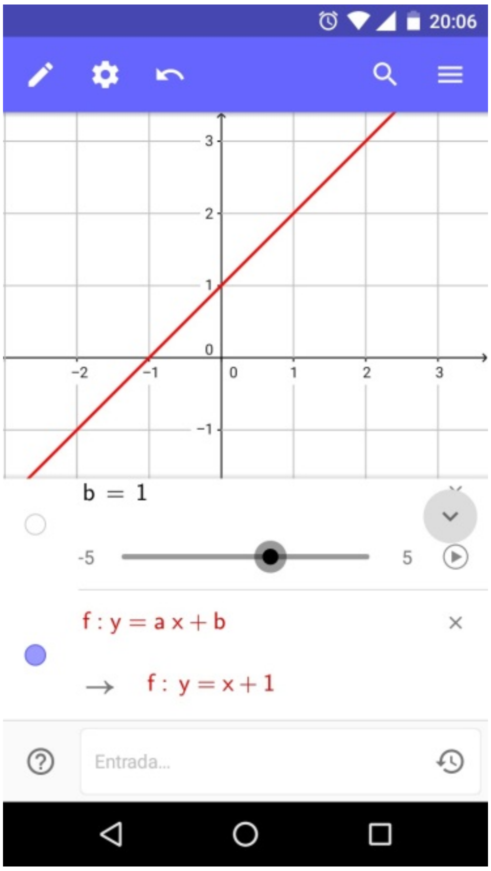
Seguem nas figuras 32 e 33 a construção citada, mostrando os deslizadores.

Figura 32 – Atividade 1: construção da função afim e os deslizadores (I)



Fonte: O autor, 2017.

Figura 33 – Atividade 1: construção da função afim e os deslizadores (II)



Fonte: O autor, 2017.

Após construir o gráfico pedido, o professor pode permitir aos alunos modificarem conforme desejarem os deslizadores, para que possam alterar os valores dos coeficientes a e b, permitindo assim analisar o que ocorre com o gráfico.

Após aproximadamente 5 minutos, ou o tempo que o professor julgar suficiente para os alunos modificarem a função conforme o desejo de cada um, o professor pode pedir para que os alunos modifiquem apenas o coeficiente b. A seguir, perguntar o que eles puderam perceber ao realizar essa modificação.

Espera-se que os alunos possam identificar que o coeficiente b, também denominado de coeficiente linear:

- faz com que o gráfico da função $y = ax + b$ seja movido no sentido vertical;
- representa a ordenada do ponto no qual o gráfico intercepta o eixo Y.

Após esta análise, o professor deve pedir para que os alunos modifiquem apenas o coeficiente a e, então, perguntar o que eles puderam perceber ao realizar essa modificação.

Espera-se que os alunos possam identificar que o coeficiente *a*, também denominado de coeficiente angular:

- modifica o ângulo que a reta faz com o eixo X;
- e que para $a > 0$, a reta é crescente, e para $a < 0$, a reta é decrescente.
- para $a = 0$, a função deixa de ser afim para se tornar uma função constante.

Para esta atividade ser realizada completamente, estima-se aproximadamente 25 minutos.

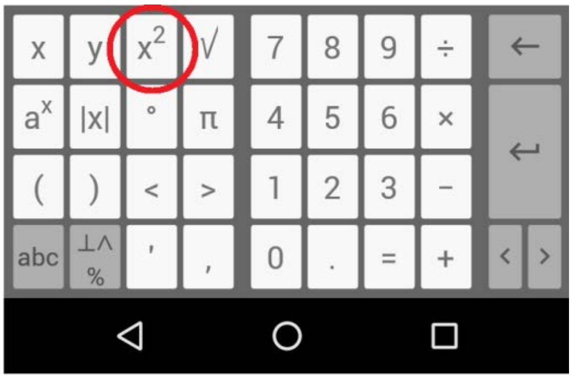
Caso os alunos já tenham tido algum contato com o GeoGebra, é possível que o tempo seja menor, caso contrário, os alunos podem apresentar algumas dificuldades no manuseio do aplicativo e, portanto, o tempo de 25 minutos já possui sobra de tempo para estas dificuldades. Todavia é aconselhado para cada professor considerar as particularidades de suas turmas, para flexibilizar (para mais ou para menos) o tempo sugerido para cada atividade.

4.2 **Atividade 2 – Função quadrática**

A atividade 2 possui como foco as funções quadráticas. Esta atividade consiste em revisar (pois o professor já deverá ter lecionado o conteúdo inicial) o significado dos coeficientes das funções quadráticas, ou seja, das funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathrm{IR}$, assim como relacionar as mudanças nos valores dos coeficientes *a*, *b* e *c* com as consequentes alterações nos gráficos das funções.

Para tal atividade, os alunos devem digitar no aplicativo GeoGebra, nos seus celulares, a função $y = ax^2 + bx + c$. Com atenção ao digitar o expoente 2, pois deve-se clicar na tecla com o símbolo destacado na figura 34 a seguir (com uma circunferência vermelha, a qual também será usada para realizar destaques em outras imagens):

Figura 34 – Atividade 2: comando do expoente 2



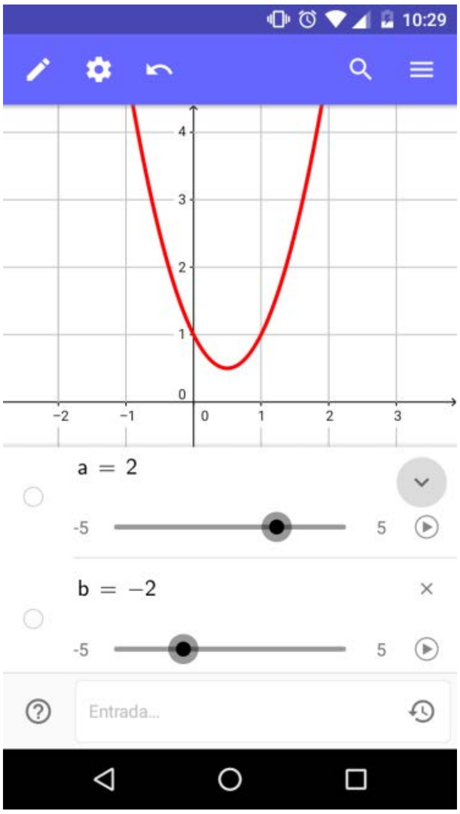
Fonte: O autor, 2017.

Há outras maneiras para digitar o expoente 2, entretanto esta é a mais simples e mais direta.

O aplicativo irá gerar o gráfico de função quadrática e automaticamente irá criar três “deslizadores”, um para cada coeficiente, assim como ocorreu com a função afim da atividade 1.

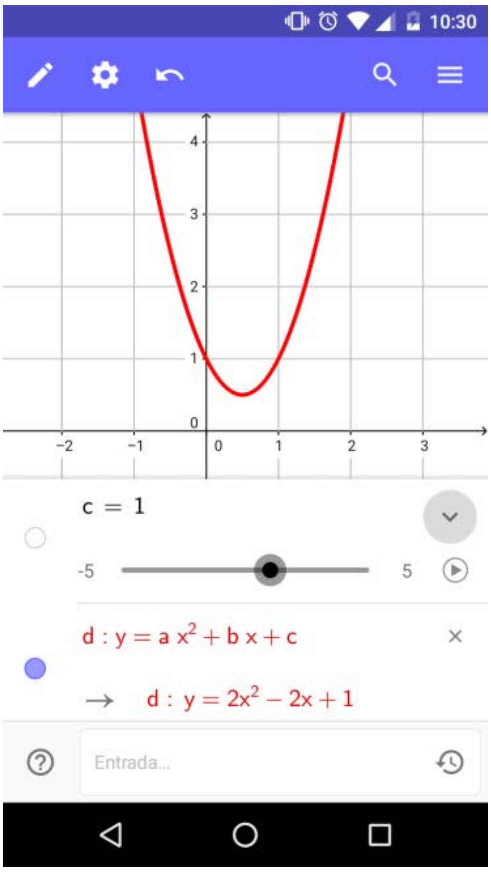
Segue nas figuras 35 e 36, a construção citada, mostrando os deslizadores.

Figura 35 – Atividade 2: construção da função quadrática e os deslizadores (I)



Fonte: O autor, 2017.

Figura 36 – Atividade 2: construção da função quadrática e os deslizadores (II)



Fonte: O autor, 2017.

Depois de construir o gráfico pedido, o professor pode permitir aos alunos modificarem conforme desejarem os deslizadores, para que possam alterar os valores dos coeficientes *a*, *b* e *c*, permitindo assim analisar o que ocorre com o gráfico.

Após um tempo que o professor considerar suficiente para os alunos modificarem a função conforme o desejo de cada um, o professor pode pedir para que os alunos modifiquem apenas o coeficiente *c*. A seguir perguntar o que eles puderam perceber ao realizar essa modificação.

Espera-se que os alunos possam identificar que o coeficiente *c*:

- faz com que o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ seja movido no sentido vertical;
- representa a ordenada na qual o gráfico intercepta o eixo Y.

Dessa forma, o coeficiente c na função quadrática possui a mesma propriedade do coeficiente b na função afim. Em qualquer função polinomial, o termo independente de x realizará a mesma mudança no gráfico.

Após esta análise, o professor deve pedir para que os alunos modifiquem apenas o coeficiente a, perguntando o que eles puderam perceber ao realizar essa modificação.

Espera-se que os alunos possam identificar que o coeficiente a:

- modifica a concavidade da parábola, ou seja, em termos menos técnicos, a "abertura" da parábola;
- para $a > 0$, a parábola possui concavidade voltada para cima, e para $a < 0$, a parábola possui concavidade voltada para baixo;
- para $a = 0$, a função deixa de ser quadrática para se tornar uma função afim.

Em seguida, o professor deve pedir aos alunos que modifiquem apenas o coeficiente b, perguntando o que eles perceberam ao realizar essa modificação.

Espera-se que os alunos possam identificar que o coeficiente b:

- faz com que o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ seja movido no sentido horizontal, entretanto sempre mantendo o valor onde intercepta o eixo Y, haja vista que o valor de c não foi modificado;
- para $b = 0$, a parábola possui o eixo de simetria coincidindo com o eixo Y.

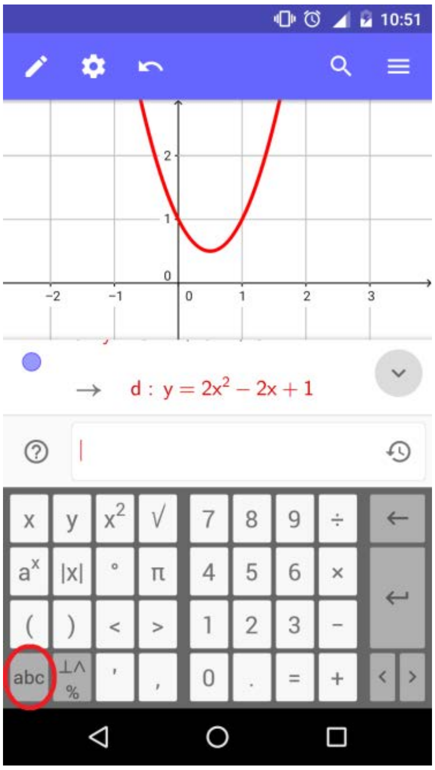
Para esta atividade, recomendam-se aproximadamente 25 minutos.

4.3 **Atividade 3 – Análise do discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) e de sua relação com o gráfico e as raízes da função quadrática**

A atividade 3 possui como foco a análise do Δ e sua relação com as raízes da função quadrática. Para tal atividade, os alunos devem digitar no aplicativo GeoGebra, nos seus celulares, a função $y = ax^2 + bx + c$. Em seguida digitar $\Delta = b^2 - 4ac$.

Para conseguir digitar a letra grega Δ, o aluno deve obedecer ao passo a passo a seguir e selecionar, inicialmente, a tecla das letras destacada na figura 37.

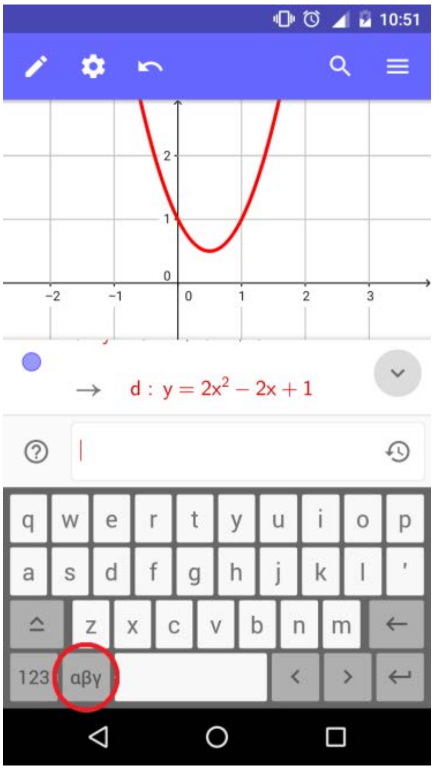
Figura 37 – Atividade 3: construção do Δ (I)



Fonte: O autor, 2017.

Em seguida a tecla das letras gregas, destacada na figura 38.

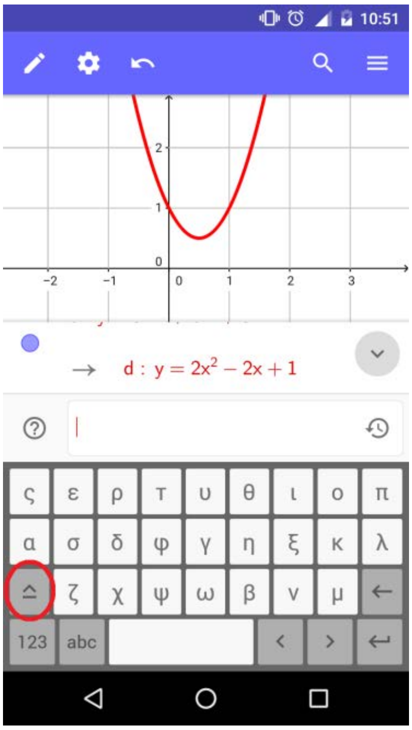
Figura 38 – Atividade 3: construção do Δ (II)



Fonte: O autor, 2017.

O próximo passo é selecionar o símbolo de seta para cima, para alterar para as letras maiúsculas, destacado na figura 39.

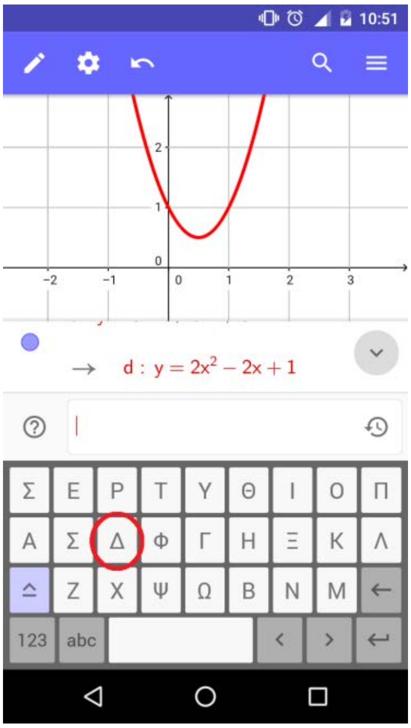
Figura 39 – Atividade 3: construção do Δ (III)



Fonte: O autor, 2017.

E somente então selecionar a letra grega delta, como mostrado na figura 40.

Figura 40 – Atividade 3: construção do Δ (IV)



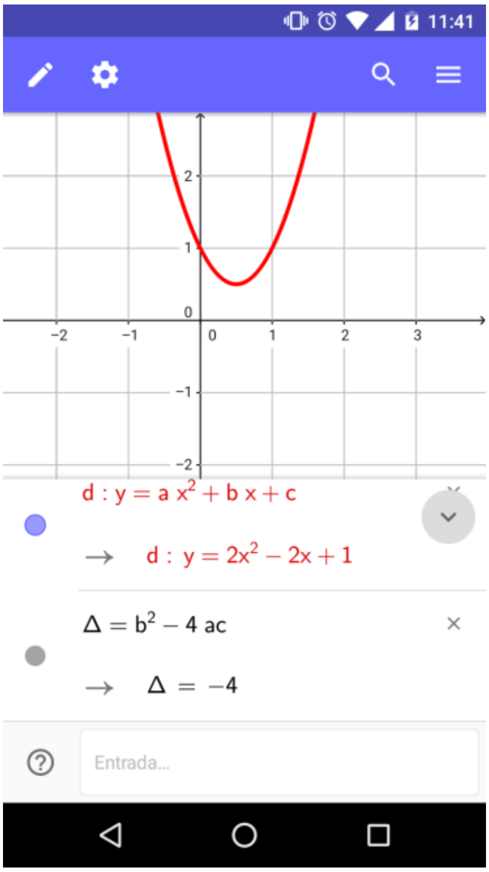
Fonte: O autor, 2017.

Ao conseguir digitar a fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$, o GeoGebra irá calcular o valor de Δ de acordo com os valores dos coeficientes a, b e c. Isto proporciona ao aluno a capacidade de, conforme for mudando o valor dos coeficiente pelos deslizadores, simultaneamente poder perceber a mudança sofrida no valor de Δ.

Observe nas figuras 41, 42 e 43 três exemplos dos possíveis casos para Δ, ou seja, $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta > 0$, e suas respectivas alterações nos gráficos.

A figura 41 contém o $\Delta < 0$.

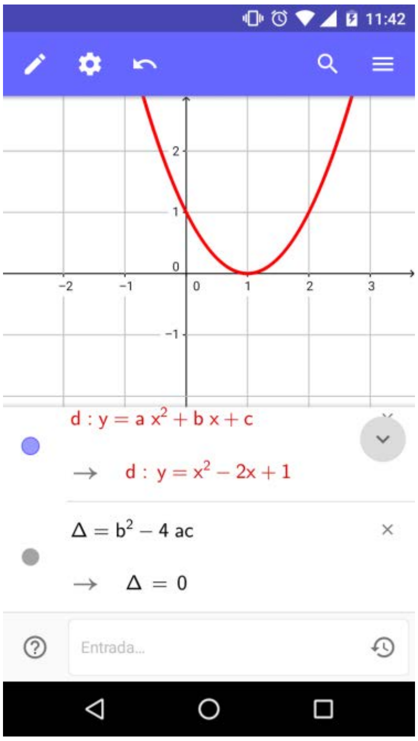
Figura 41 – Atividade 3: relação do Δ com a parábola (I)



Fonte: O autor, 2017.

A figura 42 contém o $\Delta = 0$.

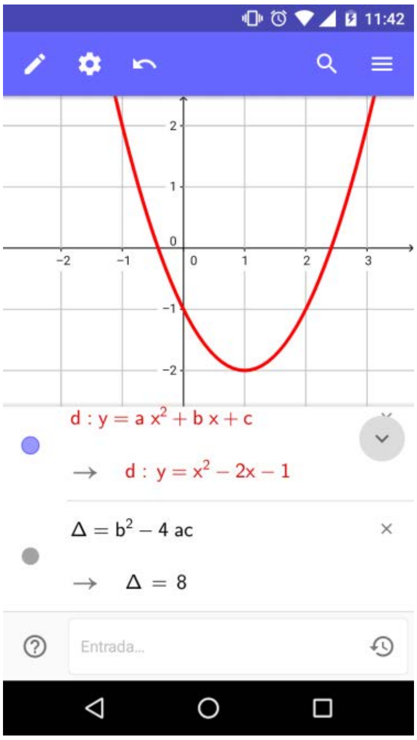
Figura 42 – Atividade 3: relação do Δ com a parábola (II)



Fonte: O autor, 2017.

A figura 41 contém o $\Delta > 0$.

Figura 43 – Atividade 3: relação do Δ com a parábola (III)



Fonte: O autor, 2017.

Para esta atividade, recomendam-se aproximadamente 25 minutos, caso seja realizada após as atividades anteriores. Caso contrário, recomenda-se de 30 a 35 minutos.

4.4 **Atividade 4 – Análise do vértice e do eixo de simetria da parábola**

A atividade 4 possui como foco a análise do vértice da parábola, assim como de seu eixo de simetria. Para tal atividade, os alunos devem digitar no aplicativo GeoGebra, nos seus celulares, a função $y = ax^2 + bx + c$. Em seguida digitar $\Delta = b^2 - 4ac$. Se esta atividade for realizada após as atividades 2 e 3, a função e o Δ já estarão digitados no aplicativo.

Esta atividade requer um maior domínio das construções no GeoGebra, portanto recomenda-se a realização desta atividade apenas se o professor dispuser de um período maior de tempo, em comparação com cada uma das outras atividades, para que não realize esta atividade às pressas, tornando o entendimento e compreensão da atividade inúteis.

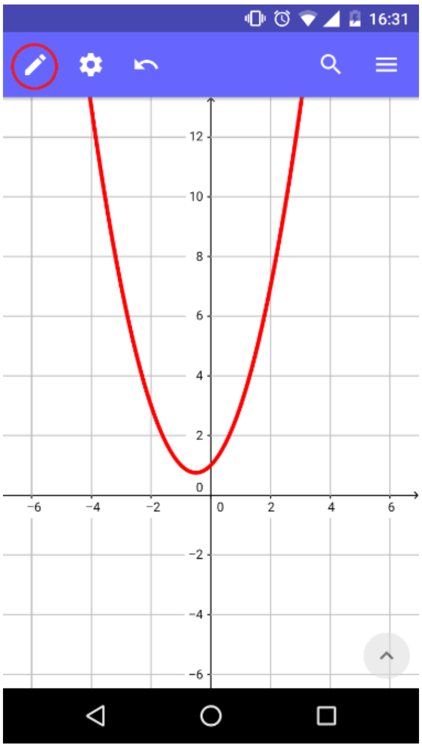
Após digitar a função quadrática e o Δ, o aluno deve traçar uma reta paralela ao eixo X, de forma que esta reta intercepte a parábola em dois pontos quaisquer. Para construir esta reta, deve-se clicar no símbolo de um “lápis”, que se encontra no canto superior esquerdo da tela do aplicativo.

Ao clicar neste símbolo será aberto o menu de construções do GeoGebra, no qual será possível selecionar diversos tipos de construções geométricas.

Nas figuras 44, 45 e 46, como tem sido apresentado até o momento, seguem as explicações e imagens com o passo a passo para conseguir construir cada etapa da atividade.

Na figura 44, abre-se o menu de construções.

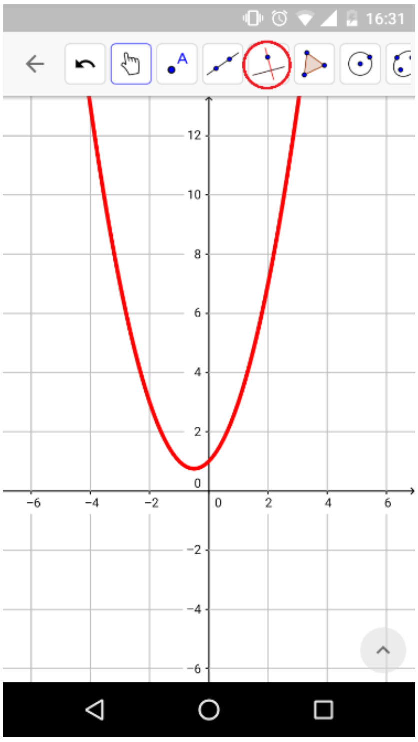
Figura 44 – Atividade 4: construção de uma reta paralela ao eixo OX (I)



Fonte: O autor, 2017.

Na figura 45, seleciona-se o menu que contém a construção de reta paralela.

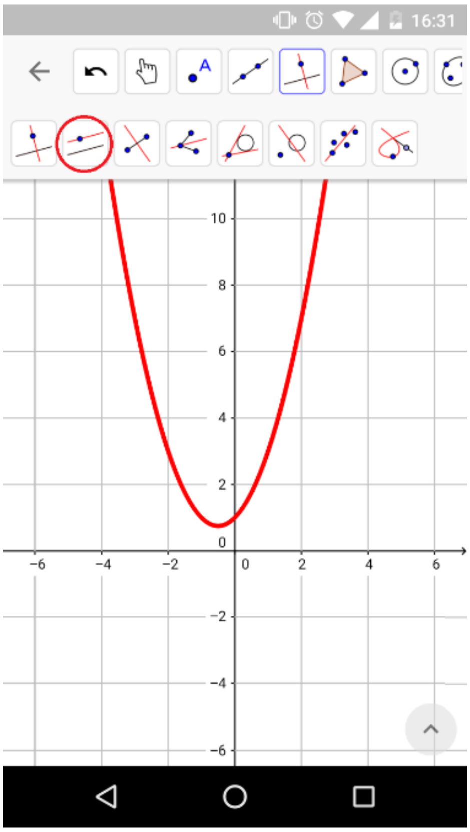
Figura 45 – Atividade 4: construção de uma reta paralela ao eixo OX (II)



Fonte: O autor, 2017.

Na figura 46, seleciona-se o comando para a construção da reta paralela.

Figura 46 – Atividade 4: construção de uma reta paralela ao eixo OX (III)

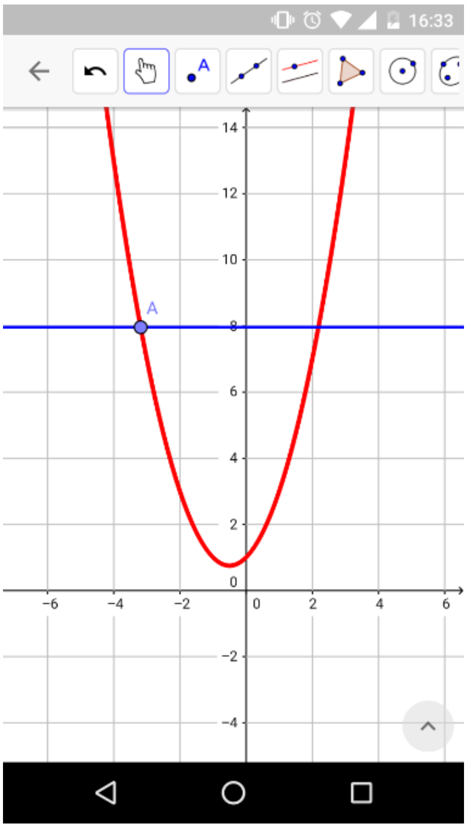


Fonte: O autor, 2017.

Ao abrir o menu de construções, cada item clicado faz abrir outro menu, com as construções do tipo selecionado, como mostrado nas figuras anteriores. Para esta etapa da atividade, deseja-se construir uma reta paralela, portanto deverá ser selecionado o item que fornece algumas posições relativas envolvendo retas, com isso abrirá outro menu e então bastará procurar o símbolo das retas paralelas. Muitos dos símbolos que o aplicativo fornece são fáceis de identificar e intuitivos.

Ao selecionar a construção de retas paralelas, o aluno deverá clicar no eixo X e então em algum ponto qualquer da parábola. E será então construída uma reta paralela ao eixo X passando pelo ponto selecionado, como mostra a figura 47 a seguir (O nome A do ponto é automaticamente gerado).

Figura 47 – Atividade 4: construção de uma reta paralela ao eixo OX (IV)

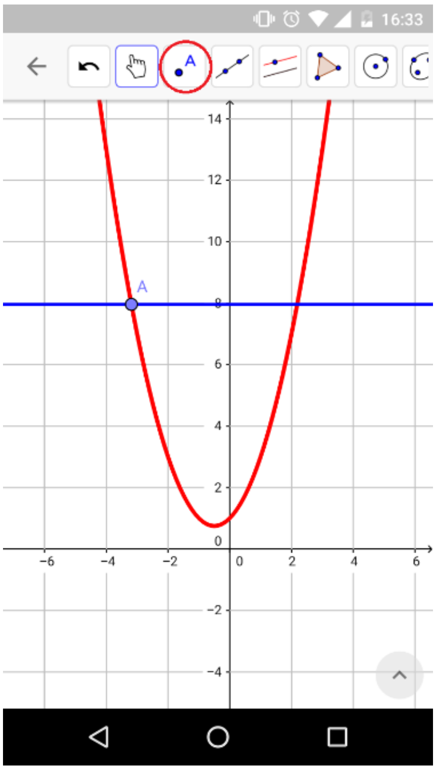


Fonte: O autor, 2017.

Em seguida, será necessário abrir o menu relacionado aos pontos, para que possa ser criado o 2º ponto de intersecção da reta com a parábola. Seguem as figuras 48, 49 e 50, mostrando como realizar o processo.

Na figura 48 seleciona-se o menu de construção de pontos.

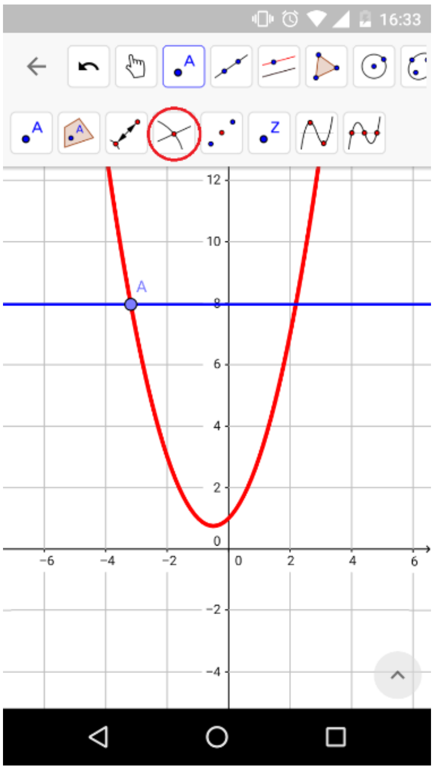
Figura 48 – Atividade 4: segundo ponto de intersecção da reta com a parábola (I)



Fonte: O autor, 2017.

Na figura 49 seleciona-se o comando para o ponto de intersecção.

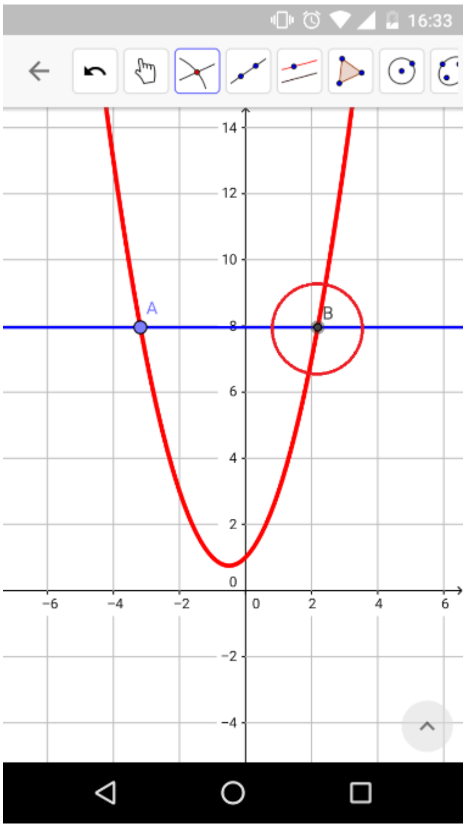
Figura 49 – Atividade 4: segundo ponto de intersecção da reta com a parábola (II)



Fonte: O autor, 2017.

Na figura 50 seleciona-se o local onde se deseja construir o ponto de intersecção.

Figura 50 – Atividade 4: segundo ponto de intersecção da reta com a parábola (III)



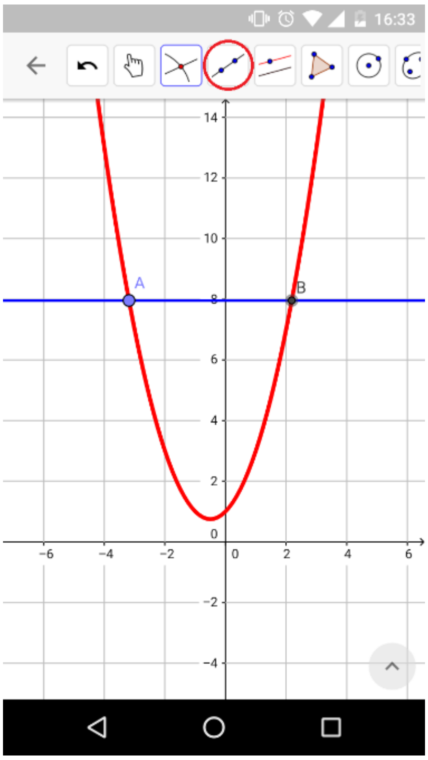
Fonte: O autor, 2017.

Após a criação do 2º ponto de intersecção, denominado pela letra B, o objetivo passa a ser criar um segmento de reta que una os pontos A e B. É importante ressaltar que caso o aluno já tenha criado outros pontos por vontade própria ao longo da atividade, ou por intervenção do professor, o GeoGebra irá seguir a ordem alfabética na criação dos nomes dos pontos conforme forem criados.

Seguem as figuras 51 e 52, para auxiliar na construção do segmento de reta $\overline{AB}$.

Na figura 51 seleciona-se o menu que contém a construção do segmento de reta.

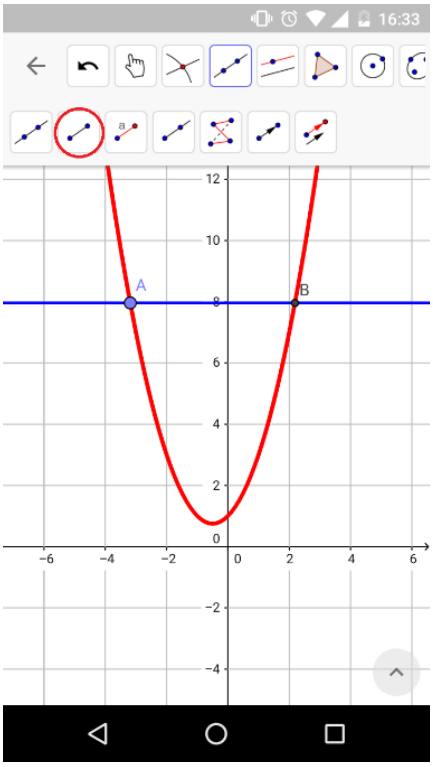
Figura 51 – Atividade 4: construção do segmento de reta (I)



Fonte: O autor, 2017.

Na figura 52 seleciona-se o comando que constrói o segmento de reta.

Figura 52 – Atividade 4: construção do segmento de reta (II)

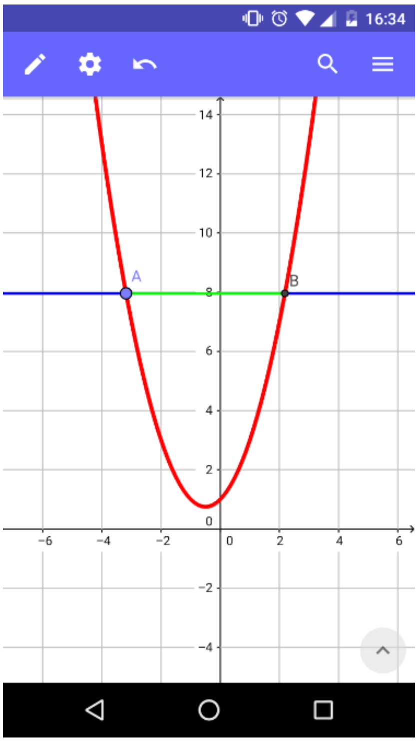


Fonte: O autor, 2017.

Seleciona-se o menu de construções que inicialmente apresenta o símbolo de uma reta, e então deve-se selecionar o botão com o símbolo de um segmento de reta. Clica-se no 1º ponto do segmento, e então no ponto final, os quais devem ser os pontos A e B criados anteriormente.

A seguir a figura 53, mostra segmento de reta criado por cima da reta paralela ao eixo X.

Figura 53 – Atividade 4: construção do segmento de reta (III)



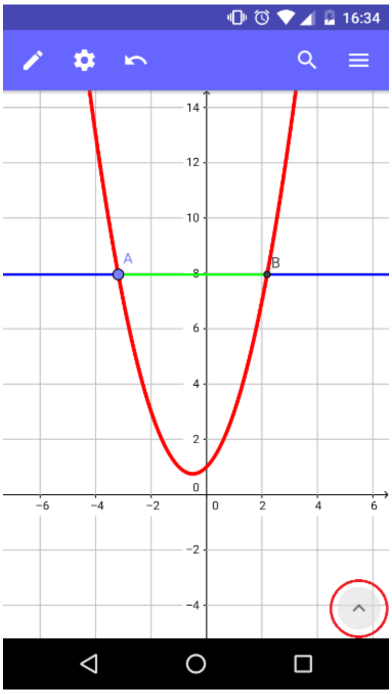
Fonte: O autor, 2017.

O próximo passo, cuja importância é facilitar a visualização dos alunos, é esconder a reta paralela criada, fazendo com o que a imagem não fique "poluída visualmente", ou seja, não fique com muitas construções desnecessárias para a atividade. É sugerido que todas ou quase todas as construções realizadas como suporte para outras construções sejam escondidas (como neste caso, em que a reta paralela ao eixo X foi utilizada para a construção do segmento de reta). É valido ressaltar que "deletar" uma construção é diferente de "esconder", pois qualquer outra construção que tenha utilizado a construção deletada, se tornará indefinida. Enquanto ao esconder uma construção, ela ainda existe, mas apenas não está sendo mostrada na imagem. Como citado anteriormente, é um ótimo recurso para evitar a poluição visual, mantendo assim o foco visual do aluno no que realmente interessa para a atividade que estiver sendo realizada.

Figuras 54, 55 e 56 apresentam o que foi relatado.

Na figura 54 seleciona-se a seta para subir a tela com os detalhes construções já realizadas.

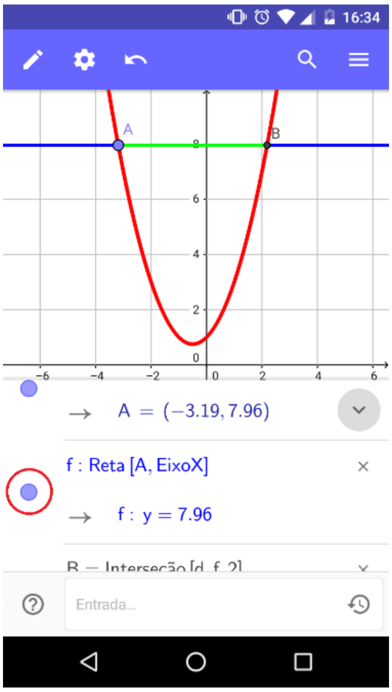
Figura 54 – Atividade 4: escondendo a reta (I)



Fonte: O autor, 2017.

Na figura 55 identifica-se a reta que se deseja “esconder”.

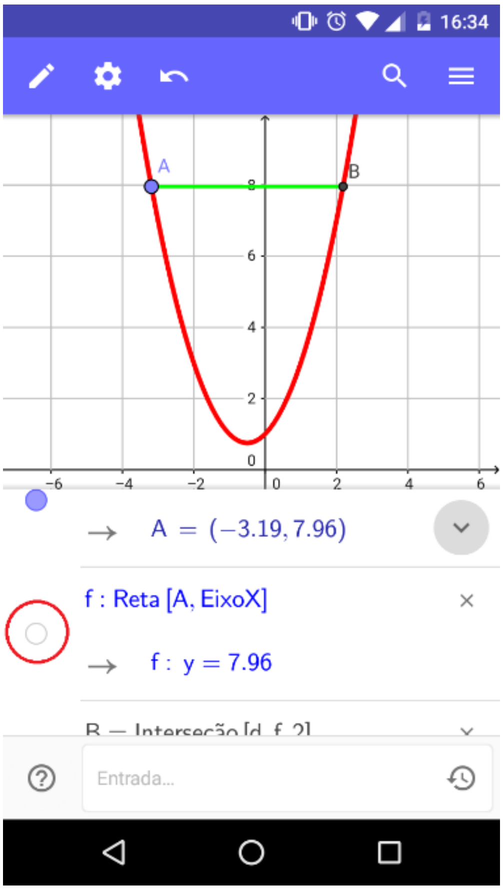
Figura 55 – Atividade 4: escondendo a reta (II)



Fonte: O autor, 2017.

Na figura 56 seleciona-se o círculo azul, para que o mesmo fiquei branco, escondendo assim a construção em questão.

Figura 56 – Atividade 4: escondendo a reta (III)



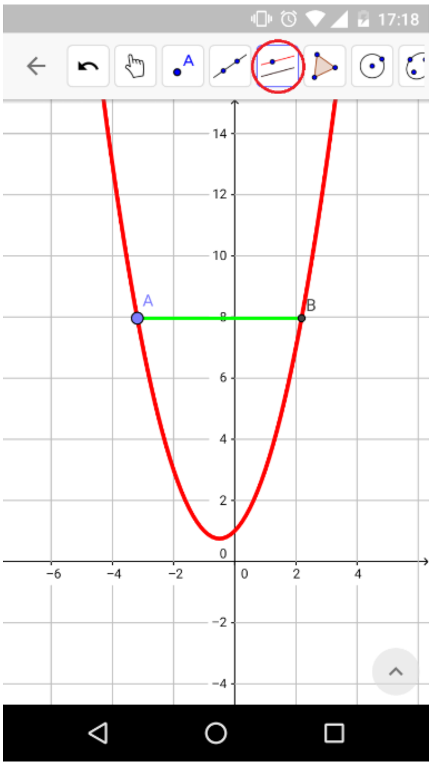
Fonte: O autor, 2017.

É possível esconder um objeto de forma simples, clicando na seta no canto inferior direito, para "levantar" a janela com todas as construções já realizadas. Em cada construção há um círculo na lateral esquerda, em que para o círculo "preenchido" (cor azul) indica que a construção está visível, enquanto o círculo "não preenchido" (cor branca ou sem cor) indica que a construção não está visível, ou seja, está escondida. Basta clicar neste círculo para alternar entre uma construção estar visível ou não (visível nas figuras 54, 55 e 56 anteriores). Para tal atividade é sugerido que o professor indique os alunos para esconder a reta paralela ao eixo X.

A próxima etapa é para construir uma mediatriz para o segmento de reta $\overline{AB}$. Observe as figuras 57, 58 e 59.

Na figura 57 seleciona-se o menu que contém a mediatriz de um segmento.

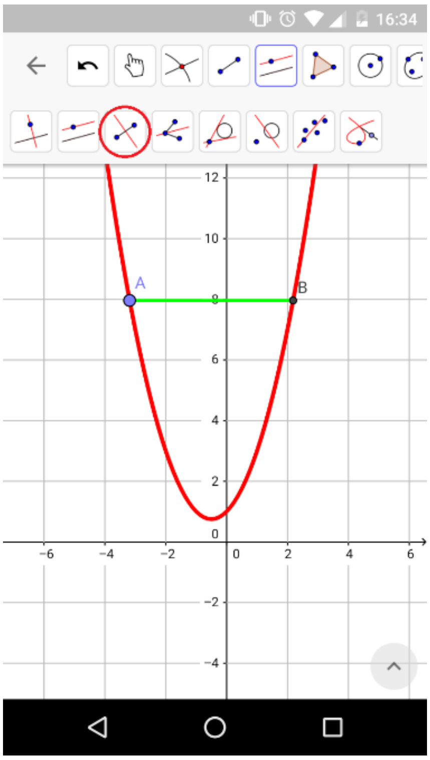
Figura 57 – Atividade 4: eixo de simetria da parábola (I)



Fonte: O autor, 2017.

Na figura 58 seleciona-se a mediatriz de um segmento de reta.

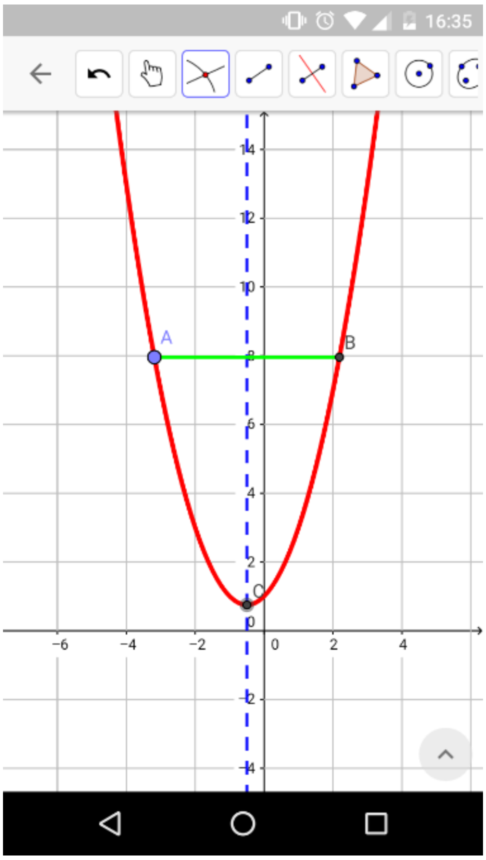
Figura 58 – Atividade 4: eixo de simetria da parábola (II)



Fonte: O autor, 2017.

Na figura 59 segue a mediatriz construída.

Figura 59 – Atividade 4: eixo de simetria da parábola (III)



Fonte: O autor, 2017.

Deve-se selecionar o menu de construções com retas, e então selecionar aquela que representa a mediatriz. Clicar no segmento no qual deseja-se construir a mediatriz, ou então nos pontos que limitam este segmento.

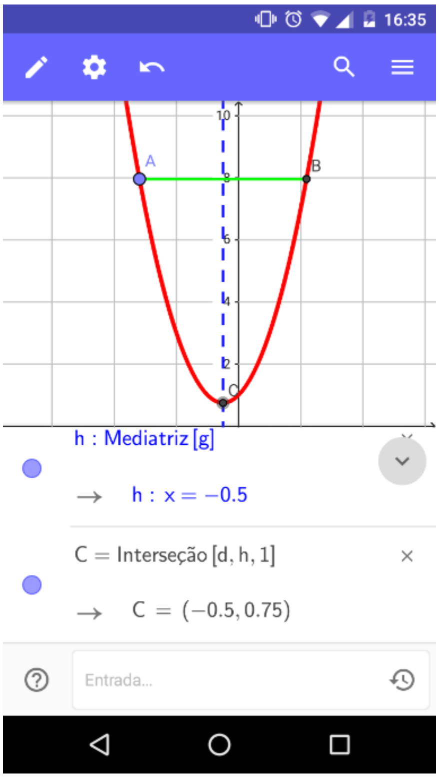
Ao construir a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, a intersecção da mediatriz com a parábola será o ponto mínimo ou máximo do gráfico da função quadrática. E é este ponto um dos objetivos principais desta atividade.

Deve-se pedir para o que o aluno marque este ponto, seguindo as mesmas instruções utilizadas para marcar o ponto B. Ao destacar esta nova intersecção, será criado o ponto C (ver figura 59).

As construções para esta atividade se encerram e, cabe ao professor, comentar mostrando para os alunos ou pedir para os alunos verificarem qual a relação que possuem os pontos A, B e C, em relação às suas abscissas (figuras 60, 61 e 62).

Figura 60 destacando o ponto C.

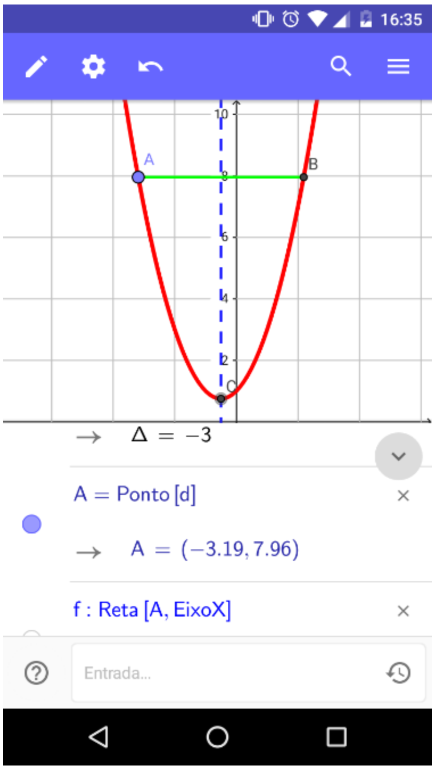
Figura 60 – Atividade 4: análise das coordenadas do vértice (I)



Fonte: O autor, 2017.

Figura 61 destacando o ponto A.

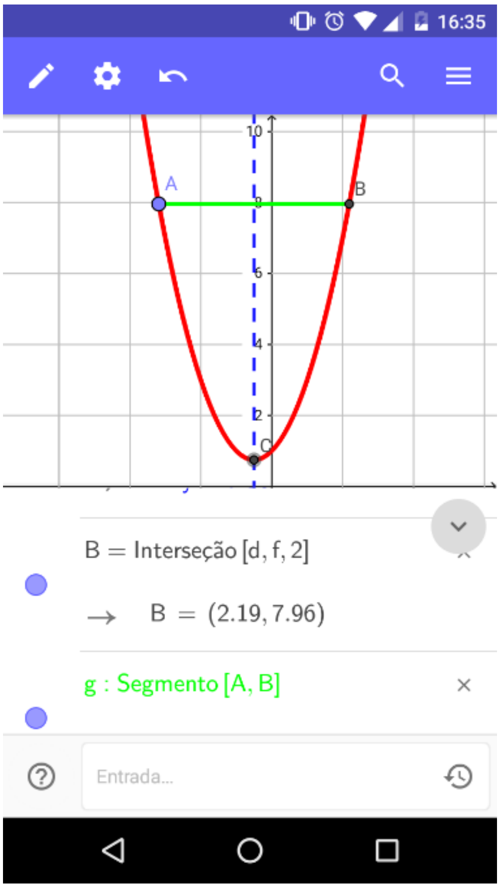
Figura 61 – Atividade 4: análise das coordenadas do vértice (II)



Fonte: O autor, 2017.

Figura 62 destacando o ponto B.

Figura 62 – Atividade 4: análise das coordenadas do vértice (III)



Fonte: O autor, 2017.

Espera-se que os alunos possam perceber que a abscissa do ponto C é a média aritmética das abscissas do ponto A e B. Fazendo com que os alunos possam ver sentido na fórmula do “x do vértice”, $X_v = -\dfrac{b}{2a}$. Pois $-\dfrac{b}{a}$ representa a soma das raízes, como já é sabido pelos alunos ao trabalharem com equações do 2º grau, e ao dividir por 2, tem-se exatamente a média aritmética, porém não é necessário que se utilize somente as raízes para determinar o x do vértice, como é visto no exemplo acima.

Para as ordenadas dos pontos A e B, espera-se que os alunos possam perceber que possuem o mesmo valor, fazendo com que os alunos possam verificar visualmente a simetria da parábola, na qual a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ traçado anteriormente representa o eixo de simetria da parábola.

Para a ordenada do ponto C, o aluno pode verificar o valor do Δ, trocar o sinal que este possui e dividir por “4*a*". Comprovando a fórmula do “Y do vértice” $Y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$, a qual o aluno (provavelmente) já viu em sala de aula, quando professor lecionou o conteúdo de função quadrática. Para esta etapa fica a critério do professor decidir se os alunos devem ou não utilizar calculadora, para verificar o valor do "Y do vértice" através da fórmula.

5 **RELATO DA EXPERIÊNCIA**

Como dito anteriormente, estas atividades foram realizadas em duas unidades de um colégio particular: uma unidade localizada em Jacarepaguá e a outra unidade na Barra da Tijuca, ambos da Zona Oeste do Município do Rio de Janeiro.

É uma escola que permite aos professores terem liberdade para lecionarem as suas aulas utilizando diferentes recursos, tais como datashow, computadores, celulares, trabalhos artesanais, etc., o que o professor acreditar ser ideal para o aprendizado. Tendo essa facilidade proveniente da escola, foi possível realizar as atividades propostas durante as aulas de Matemática do próprio autor.

Um dos últimos conteúdos a serem lecionados no 9º do Ensino Fundamental nesta escola coincide com um dos primeiros conteúdos a serem lecionados no 1º do Ensino Médio, que é o conteúdo foco deste trabalho: funções.

Nas turmas de 9º ano são lecionadas apenas as funções polinomiais de 1º e 2º graus, e sem um considerável aprofundamento, o qual é realizado no 1º ano.

Durante o período de realização desta atividade nas salas de aula, as três turmas de 9º ano (que possuíam, em média, 30 alunos cada uma), estavam iniciando o aprendizado das funções quadráticas, já tendo sido utilizado o GeoGebra para as funções afins. Entretanto a visualização havia sido realizada com o professor projetando a imagem do computador no quadro, ou seja, alunos não tiveram a oportunidade de manusear o aplicativo. Foi recomendado que os alunos fizessem o *download* do programa para o computador, para que pudessem utilizá-lo para estudar em suas residências.

Apesar de o autor já ter ciência da existência do aplicativo para *smartphones*, esta utilização não foi mencionada em sala, justamente para ter a experiência completa da utilização desta versão do aplicativo em sala de aula.

Durante a aplicação, as turmas de 9º ano estavam revisando as funções afins, e finalizando o aprendizado das quadráticas. Enquanto a turma de 1º ano (somente 14 alunos na turma) estava revisando os dois tipos de funções.

Para os relatos das experiências, serão citados os principais problemas e dificuldades encontrados durante a realização das atividades, sendo assim, algum colega de profissão que deseje utilizar-se destas ou outras atividades, terá ciência das necessidades prévias para tal realização.

Após cada dificuldade encontrada, seguem algumas sugestões para, possivelmente, tornar a experiência tanto dos professores como dos alunos mais proveitosa, e, consequentemente, fazer com que as atividades possuam um melhor aproveitamento dos alunos. Afinal, a aprendizagem dos alunos é o principal objetivo (ou pelo menos deveria ser) do magistério, seja na esfera do corpo discente ou na esfera da instituição que promete educar.

5.1 **Dificuldade 1 – *Iphones***

Os alunos foram avisados para realizarem o *download* do aplicativo para o *smartphone* pessoal, com aproximadamente um mês de antecedência. E foram periodicamente lembrados.

Muitos alunos relataram impossibilidade de realização do *download*, devido ao celular não possuir mais memória disponível, entretanto o professor instruiu para que os alunos apagassem alguns aplicativos temporariamente, apenas para realizar tal atividade em sala, a qual seria proveitosa para o aprendizado.

O professor também forneceu algumas dicas de como liberar espaço na memória dos *smartphones* sem a necessidade de apagar outros aplicativos, o que seria uma alternativa para quem não desejasse seguir a primeira sugestão dada.

No dia da realização da atividade, alguns alunos haviam esquecido de realizar o *download*, o que infelizmente já era esperado. Era previsto que mesmo com constantes avisos, e com antecedência, alguns alunos iriam esquecer.

O maior problema inicial não foi o esquecimento, mas sim a impossibilidade real. Muitos dos alunos possuíam *Iphone*, e como já citado em capítulos anteriores, não existe GeoGebra para *Iphone* (considerando a época da produção deste trabalho e realização das atividades). Portanto, aproximadamente metade dos alunos não puderam realizar as atividades propostas, devido a esta impossibilidade.

Este problema inicial se tornou uma das maiores dificuldades, pois a proposta era que cada aluno pudesse realizar a atividade individualmente, fazendo com que o aluno pudesse não somente recordar o que foi visto em sala, mas também o que foi realizado pelas próprias mãos.

Tendo em vista esse problema, somado com a quantidade de alunos que esqueceram, a atividade que era para ser individual teve que ser realizada em grupos. Isso fez com que a atividade perdesse grande parte do seu propósito, ou seja, fazer com o que o aluno adquirisse independência ao manusear o aplicativo e obtivesse uma proximidade com a Matemática distinta das contas realizadas em um papel, mas sim percebesse que ela pode ser manuseada de forma dinâmica, e com isso ir reduzindo um pouco os medos, traumas e bloqueios que muitos alunos possuem em relação à Matemática.

Com a atividade tendo que ser realizada em grupo, os alunos tiveram que visualizar e mexer no *smartphone* um de cada vez, o que atrasou consideravelmente o planejamento de tempo das atividades, além de ter feito com que algumas dificuldades encontradas pelos alunos ao manusear o aplicativo tivessem que ser explicadas diversas vezes.

5.1.1 Sugestão 1

Como eliminar o problema da “Dificuldade 1 – *Iphones*”? Ou seja, como eliminar ou pelo menos reduzir o problema da não existência do aplicativo para Iphone (considerando a data da confecção e realização das atividades desta obra)?

Há esperanças de que em um futuro, preferencialmente próximo, seja criada uma versão do GeoGebra para *Iphones*, porém até lá, uma sugestão para contornar este problema é realizar estas atividades em um laboratório de informática, caso a escola possua um.

Seria ideal que cada aluno pudesse ter acesso a um computador, mas caso não seja possível, que a turma seja dividida em grupos com a menor quantidade possível de integrantes, para que a interação seja a mais próxima possível de uma interação individual.

Desta maneira os alunos irão conseguir aproveitar melhor o que as atividades prometem proporcionar, e após o aluno adquirir essa segurança em utilizar o GeoGebra, o professor pode aconselhar que cada aluno faça o *download* do aplicativo nos *smartphones* de cada um. Esta sugestão de solução tem uma grande vantagem, assim como uma grande desvantagem em relação à maneira como as atividades foram testadas.

A vantagem é que reduz para quase nula a situação de o aluno não conseguir utilizar o aplicativo, como ocorreu por não terem feito o *download* ou possuírem *Iphone*. Entretanto a desvantagem é que um dos objetivos era que o aluno pudesse utilizar no próprio *smartphone*, o qual está quase sempre em fácil acesso para o proprietário. E desta maneira (laboratório de informática) a atividade não está treinando o aluno para a utilização do aplicativo no *smartphone*. Em suma, esta sugestão possui vantagens e desvantagens. Cabe ao professor analisar qual seria mais interessante para ele, sua turma, e os projetos e planejamentos da disciplina e/ou do professor.

5.2 **Dificuldade 2 – Tela pequena**

No GeoGebra para computador, ao manusear o gráfico das funções, basta selecionar a ferramenta “Mover janela de visualização” ou a ferramenta “Mover” para clicar e segurar o botão em qualquer parte da tela (plano cartesiano) e arrastar para onde desejar. Ao clicar e segurar o botão no gráfico da função, na verdade, o que estará sendo movido é o gráfico, e consequentemente a lei de formação da função estará sendo modificada. Portanto, deve-se ter esta atenção ao manusear o plano cartesiano para visualizar outras partes da função.

Já no GeoGebra para *smartphone*, uma dificuldade surgida foi em relação ao tamanho da tela dos celulares.

O problema que foi encontrado nas atividades é que o tamanho da tela do celular é pequeno se comparado com o tamanho da tela de um computador, e o tamanho do dedo é maior que a seta do mouse (consequentemente uma possível precisão menor), portanto, mesmo que o aluno saiba que não deve arrastar o gráfico da função (pois ocorrerá o que foi citado no primeiro parágrafo desta sessão), a probabilidade de errar e, mesmo sem a intenção, arrastar o gráfico da função ao invés do plano cartesiano é bem maior em um celular do que no computador.

E infelizmente este erro aconteceu mais vezes do que o esperado. Os motivos para este erro acontecer são diversos, por exemplo, a ansiedade dos alunos em mexer no gráfico o mais rápido possível, ou de um aluno (como estavam em grupos) esbarrar no outro, ou simplesmente por ter errado a tela e arrastado o gráfico, simplesmente como um “erro de pontaria”. Independente do motivo pelo qual esta dificuldade surgiu, ela foi maior do que o previsto, e os alunos tinham dificuldade em consertar a lei de formação da função alterada (ao ser arrastada) para a função original da atividade. E o que se provou ser mais fácil foi pedir para eles deletarem a função e criar uma “nova”, a que eles já tinham aprendido minutos atrás.

Esta dificuldade também fez com que o tempo de realização das atividades fosse aumentado.

5.3 **Dificuldade 3 – Comandos**

Ao analisar os teclados e ferramentas fornecidos pelo aplicativo GeoGebra para *smartphones*, foi suposto que os comandos eram intuitivos, e que, na verdade, seriam mais fáceis de se trabalhar do que os comandos necessários no aplicativo para o computador, haja vista que para o computador são necessários conhecimentos de comandos de linguagem matemática para a informática, como, por exemplo, os expoentes serem representados após o acento circunflexo (^), a multiplicação ser representada por um asterisco (*), a raiz quadrada de um número X ser representada por sqrt(X), significando “square root” (“raiz quadrada” em inglês), ou os módulos de X através do comando abs(X), representando “Absolute” (“absoluto” em inglês, para representar o “valor absoluto”), etc.

Todavia, a realidade encontrada não foi a esperada, tanto perante aos alunos, como perante a amigos, também professores de Matemática, com os quais o autor realizou algumas perguntas em busca de sugestões para testar e melhorar as atividades.

Estes professores e os alunos, em forma unânime, sentiram mais dificuldades em manusear os comandos no celular do que no computador. E somente os professores que já conheciam o GeoGebra não acharam os comandos do aplicativo para *smartphones* difícil. O que impressionou foi que esta opinião também ocorreu com um aluno (o único que já havia feito o *download* do aplicativo para computador em sua residência), entretanto, este aluno mesmo não considerando os comandos difíceis, afirmou que no computador continua sendo mais fácil o manuseio em geral.

Devido ao problema 1 (muitos alunos com *Iphone*), alguns alunos ficaram manuseando o aplicativo pelo computador da sala de aula, e outros por um *notebook*, levado para a sala de aula no dia da realização das atividades. Estes alunos sentiram dificuldades por não terem conhecimento das palavras necessárias para os comandos, mas sentiram menos dificuldades que os alunos que estavam mexendo no celular.

Este tipo de dificuldade não foi esperada ao planejar as atividades, mas durante uma leitura do livro "Rápido e devagar, duas formas de pensar", de Daniel Kahneman; o autor pôde se deparar com o trecho em que Kahneman (2012) afirma:

> Quando confrontado com um problema – escolher um movimento no xadrez ou decidir-se por investir em determinadas ações –, o mecanismo do pensamento intuitivo faz o melhor que pode. Se o indivíduo tem uma especialização relevante, ele vai reconhecer a situação, e a solução intuitiva que vem à sua mente é provavelmente a correta. (p. 21)

O trecho citado descreve perfeitamente a situação anteriormente relatada, pois para os professores que já tinham conhecimento, seja ele matemático ou do GeoGebra, o manuseio do aplicativo para *smartphone* foi intuitivo, devido à especialização já possuída, o que também aconteceu em menor escala com o aluno que já havia manuseado o GeoGebra no computador previamente.

5.3.1 Sugestão 2

Para os problemas da "Dificuldade 2 – Tela pequena" e "Dificuldade 3 – Comandos", a sugestão é que em ambos os casos os alunos precisam de maior familiaridade com o aplicativo, e para resolver esta pendência os alunos podem ser incentivados a realizar o *download* (para computador ou *smartphones*) em suas casas, e irem mexendo e descobrindo por si só como utilizar, como manusear o GeoGebra, alguns meses antes da realização das atividades. Fazendo com que assim os alunos já tenham mais segurança e já conheçam melhor os comandos a serem realizados, facilitando a utilização do mesmo.

O ideal é que já ganhassem conhecimento para manusear o aplicativo para *smartphone*, mas com receio dos alunos terem dificuldades por causa dos comandos (como relatado na "Dificuldade 3 – Comandos"), talvez seja interessante sugerir o *download* do aplicativo para computador inicialmente.

A segunda e mais importante sugestão para estas duas dificuldades, 2 e 3, é que houvesse um minicurso de GeoGebra, antes da realização das atividades. Desta maneira independente se estão usando o aplicativo para computador ou para *smartphones*, os alunos estariam sendo guiados, sem a grande preocupação de realizar o passo a passo das atividades, seria quase como um momento mais relaxante e divertido para os alunos. E automaticamente preparando os mesmos para realizarem as atividades posteriores, com maior tranquilidade e segurança.

Não sendo possível um “minicurso de GeoGebra”, o professor pode realizar as atividades no GeoGebra do computador, projetando no datashow da sala de aula. Entretanto deve-se prestar muita atenção nas orientações, haja vista que não são somente versões diferentes, mas até aplicativos diferentes, com interfaces e comandos distintos. Em outras palavras, o professor poderá mostrar como ficará o gráfico final, porém as orientações de onde clicar, qual o símbolo do comando a ser selecionado, etc., devem ser verificadas mesa a mesa, ou no máximo mostrando de longe o próprio celular do professor, ou (quando possível) mostrar a imagem do símbolo no GeoGebra que estará projetado, nos casos em que os símbolos forem iguais.

5.4 **Dificuldade 4 – Dificuldades normais**

Foram classificadas como “dificuldades normais” todas as outras dificuldades que apareceram durante as realizações das atividades, mas que seriam dificuldades esperadas em qualquer turma, ou seja, dificuldades habituais de uma sala de aula. Como exemplo, podem ser citados os alunos estarem empolgados, excitados, exaltados com a atividade, com a possibilidade de cada um poder mexer na função e fazer o que quiser com os coeficientes dela, verificando assim o que acontece com o gráfico. Os alunos gostaram de constantemente fazer com o que o valor do coeficiente “*a*” tanto na função afim quanto na quadrática mudasse de sinal, pois dessa maneira eles podiam ver a função (reta) ficando decrescente ou mudando o sentido da concavidade (quadrática), entre outras coisas que deixaram os alunos bem agitados.

Tudo isso é algo bom, pois é importante o professor deixar um tempo para os alunos mexerem nos gráficos antes de começar propriamente a atividade, para que possam saciar as curiosidades iniciais, e assim a aula fluir mais tranquila.

Alguns alunos de tão curiosos não prestavam atenção nas ordens para realizar os comandos para os próximos passos das atividades, o que fez com que o professor tivesse que repetir algumas vezes a explicação de determinado passo. E como os alunos estavam tendo algumas dificuldades com o problema da tela pequena, foi necessário administrar simultaneamente a atenção aos alunos que não haviam prestado atenção por estarem mexendo no aplicativo, aos que estavam tendo problema ao esbarrar na função e modificar a lei de formação da mesma, e também aos alunos que estavam nos grupos e, como não estavam com aplicativo nos seus *smartphones*, estavam conversando alto, ou atrapalhando outros mais interessados.

Apesar de todas essas considerações não serem dificuldades importantes, e que é esperado que os professores estejam acostumados com esse tipo de comportamento quando a turma fica agitada, não deixam de ser válidas para registro, pois assim o professor que realizar uma atividade como esta saberá exatamente o que lhe espera.

Para a “Dificuldade 4 – Dificuldades normais”, cada professor sabe como melhor lidar com a sua turma. Portanto não há recomendações ou sugestões específicas neste sentido, no entanto, vale apenas lembrar aos professores que devem ficar atentos aos alunos curiosos, para que consigam prestar atenção às orientações.

CONCLUSÃO

Foi realizado um breve estudo da criação e evolução do vestibular, em especial, do ENEM, seguido de uma pesquisa com 10 provas do ENEM e, como resultado desta pesquisa, pode-se perceber a importância das questões envolvendo gráficos de funções, em um vestibular que determina como e o que as escolas irão lecionar, tornando-se assim necessário um ensino significativo sobre a análise de gráficos.

Considerando a evolução das tecnologias, TD, focando nas TIC em sala de aula e, em especial, a evolução do uso dos *smartphones*, foram propostas atividades utilizando o aplicativo GeoGebra, nos *smartphones* de cada aluno.

As atividades propostas foram testadas em sala de aula, proporcionando uma análise e um relato das vantagens e desvantagens do projeto proposto. Em seguida, foram mencionadas sugestões para evitar que as desvantagens se sobreponham às vantagens que tais atividades podem proporcionar.

Após toda a análise realizada com o conhecimento e consolidação do aprendizado que os alunos tiveram com essas atividades, foi possível concluir que as atividades são válidas, porém com ressalvas.

As atividades proporcionam uma experiência que o aluno não poderá adquirir em uma aula expositiva. Dentre todas as possibilidades de aprendizado, entre elas as aulas expositivas, as aulas de experimentações, etc., a possibilidade dos alunos terem a oportunidade de aprender, além da aula normal, com uma projeção no quadro de um aplicativo e no final poderem manusear, transformando as funções a critério de cada aluno, cada um com a sua própria função, é uma experiência distinta do utilizado há anos atrás, quando se apresentava apenas o conteúdo no quadro com uma explicação oral do professor.

O aluno tem a oportunidade de lembrar os conhecimentos adquiridos não apenas através da lembrança visual do quadro, do caderno ou algo semelhante, mas sim da utilização do tato, e das experiências e visualizações individuais criadas para cada função. Ele pode comprovar na prática o que é dito pelo professor, ou nos casos dos alunos com maior gosto pela Matemática, verificar as demonstrações realizadas pelo professor em sala. Enquanto o que normalmente ocorre é o aluno simplesmente acreditar que acontece o que o professor fala.

O que pôde ser percebido, apesar das dificuldades já citadas, é que os alunos gostaram da comprovação visual-dinâmica do que foi dito pelo professor durante as aulas, através do manuseio do aplicativo GeoGebra para *smartphones*. Ou seja, as atividades conseguem agradar quem já tem um prazer pelo estudo da Matemática, fazendo com que revisem um conteúdo, assim como quem não tem este prazer (ainda), fazendo com que a compreensão do conteúdo seja mais significativa.

Em outras disciplinas, como na Química, por exemplo, é fácil imaginar a realização de uma experiência, uma demonstração das reações químicas, mas na Matemática pode ficar um pouco mais difícil essa demonstração dinâmica para alguns, e considerando o caso de funções, mostrar um programa que faça com que o aluno possa visualizar de maneira dinâmica o que ocorre com os gráficos das funções, seria considerada uma experimentação, pois os alunos estão visualizando não um conteúdo exposto no quadro, mas sim o que acontece com o gráfico a cada mudança de coeficientes.

Uma ótima vantagem que o uso do GeoGebra no celular proporcionou é o fato de que possibilitou uma transformação da sala de aula clássica em um laboratório de informática, ou seja, caso a escola não possua um, a sala de aula pode fazer este papel, com essas atividades e outras que podem ser criadas.

Sendo assim, com base nestas análises e nas considerações dos alunos, é possível reafirmar que a atividade é válida, porém com ressalvas, como dito anteriormente. Estas ressalvas são baseadas nos problemas que foram encontrados, pois a atividade não deveria ocorrer da forma que foi realizada, uma vez que o aproveitamento poderia ter sido consideravelmente melhor se fossem conhecidos os problemas de antemão.

Mas como muitas descobertas, como muitos experimentos, existem naturalmente as falhas, para que os eventos futuros sejam aperfeiçoados, o que não é considerado demérito, e sim uma preparação, uma evolução na descoberta. Ou seja, a realização desta atividade com todas as dificuldades encontradas proporciona um estudo para que um próximo profissional e colega de área possa seguir estes passos e não cometer os mesmos erros, aperfeiçoando assim uma atividade que pode proporcionar um aprendizado significativo. Dessa forma, o autor incentiva e sugere que as atividades e sugestões sejam estudadas e aperfeiçoadas, da mesma maneira que um aluno recém-formado estuda e pratica, para que anos mais tarde, possa lecionar de maneira exemplar.

REFERÊNCIAS

ALVES, Simone Bastos. 29 de agosto de 2008. Disponível em <http://vestibular.brasilescola.uol.com.br/especial/a-origem-vestibular-no-brasil.htm>. Acessado em: 13 de março de 2017

ARAÚJO, Daniel Oliveira de. *O uso de tecnologias na formação continuada de professores de Matemática, no âmbito da Educação a Distância, em uma diretoria de ensino no estado de São Paulo, 2017*. 54 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia – UFSCar – São Paulo, 2017.

ARAÚJO, José Ricardo de Souza. *Uso de smartphones e tablets como ferramenta do ensino de matemática: O software GeoGebra, 2015*. 51 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – UFAC – Acre, 2015.

BRASIL. Diário Oficial da União, nº 69, seção 3, Edital nº 13, de 7 de abril de 2017, Brasília, DF, 2017.

BRASIL. Lei n. 9394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 25 de março de 2017.

CATALDO, João Carlos; CHAVES, João Jorge Fernandes; BRENER, Carlos: *Matemática para vestibular*, Imprinta editora, Rio de Janeiro, 2003.

EDUCAR PARA CRESCER. Invenção do vestibular. Disponível em <http://educarparacrescer.abril.com.br/politica-publica/invencao-vestibular-398694.shtml>. Acessado em: 17 de março de 2017.

ESCOLA LOURENÇO CASTANHO. 7 de outubro de 2016. Não se faz mais vestibular como antigamente. Disponível em: <http://educacao.estadao.com.br/blogs/lourenco-castanho/nao-se-faz-mais-vestibular-como-antigamente/>. Acessado em: 13 de março de 2017

ESTADÃO. Enem erra e todos podem pedir uma nova prova. Disponível em <http://educacao.estadao.com.br/blogs/mateus-prado/enem-erra-e-todos-podem-pedir-pra-fazer-uma-nova-prova/> Acessado em: 17 de março de 2017.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio: *Investigação em educação Matemática*, editora Autores associados, São Paulo, 2009.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JR., José Ruy; BONJORNO, José Roberto: *Matemática fundamental – Uma nova abordagem,* FTD editora, São Paulo, 2011.

HILBERT, Martin. How much information is there in the world?. University of Southern California. ScienceDaily, 11 February 2011. Disponível em <https://www.sciencedaily.com/releases/2011/02/110210141219.htm>. Acesso em: 27 de outubro de 2017.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos: *Fundamentos da Matemática elementar, volume 1, conjuntos e funções*, Atual editora, São Paulo, 1977.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, Davir; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de: *Matemática – Ciências e aplicações*, editora Saraiva, São Paulo, 2010.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, Davir; PÉRIGO, Roberto: *Matemática – Volume único*, Atual editora, São Paulo, 2011.

KAHNEMAN, Daniel: *Rápido e devagar, duas formas de pensar*, editora Objetiva, Rio de Janeiro, 2012.

MACHADO, Antônio dos Santos: *Matemática, Temas e metas – Conjuntos numéricos e funções*, Atual editora, São Paulo, 1988.

MUNDO VESTIBULAR. Como usar a nota do Enem para entrar na faculdade. Disponível em <http://www.mundovestibular.com.br/articles/17903/1/Como-usar-a-nota-do-Enem-para-entrar-na-faculdade/Paacutegina1.html>. Acessado em: 12 de março de 2017

NUNES, Vicente Willians do Nascimento. *Tecnologias digitais na educação: subversão ou submissão*. Revista Appai, Rio de Janeiro, n. 80, 2013.

PAULINA, Iracy. Prova Brasil de Matemática – 5º ano: tratamento da informação. 1 de Abril de 2011. Disponível em <https://novaescola.org.br/conteudo/314/prova-brasil-de-matematica-5-ano-tratamento-da-informacao>. Acessado em: 12 de março de 2017

PIRES, Jandresson Dias: *Uma proposta de aplicativo para o ensino do conceito de funções usando Smartphones e Tablets*, 2016. 80 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - USEB – Bahia, 2016.

PORTAL BRASIL, Enem abre vagas para pessoas provadas de liberdade. 21 de setembro de 2016. Disponível em <http://www.brasil.gov.br/educacao/2016/09/enem-abre-vagas-para-pessoas-privadas-de-liberdade>. Acessado em: 25 de março de 2017

PORTAL BRASIL, Segunda aplicação do Enem ocorre neste fim de semana. 03 de dezembro de 2016. Disponível em <http://www.brasil.gov.br/educacao/2016/12/segunda-aplicacao-do-enem-ocorre-neste-fim-de-semana>. Acessado em: 25 de março de 2017.
RAMIRO, Leandro. *Situações Didáticas no Ensino de Geometria com o aplicativo GeoGebra*. 2014, 137 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências exatas – Unesp, São Paulo, 2001.

SANTOS, Geisa Abreu Lira Corrêa dos: *Os impactos do ENEM nos currículos escolares e na prática docente na visão de professores de Matemática de escolas do Rio de Janeiro*, 2015. 101 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – UERJ – Rio de Janeiro, 2015.

UOL, Saiba quais são as mudanças no Enem 2017 anunciadas pelo MEC. 09 de março de 2017. Disponível em <https://educacao.uol.com.br/noticias/2017/03/09/saiba-quais-sao-as-principais-mudancas-no-enem-2017.htm>. Acessado em: 17 de outubro de 2017

www.geogebra.org (acessado em 07 de janeiro de 2017)

http://www.fuvest.br/vest1980/provas/provas.stm (acessado em 11 de março de 2017)

http://www.fuvest.br/vest2016/provas/provas.stm (acessado em 11 de março de 2017)

http://www.puc-rio.br/vestibular/repositorio/ (acessado em 11 de março de 2017)

http://www.puc-rio.br/vestibular/201712/manual/ (acessado em 11 de março de 2017)

http://www.vestibular.uerj.br/portal_vestibular_uerj/index_portal.php (acessado em 11 de março de 2017)

http://portal.inep.gov.br/web/guest/enem (acessado em 25 de março de 2017)

https://www.significados.com.br/ipad/ (Acessado em 10 de abril de 2017)

http://calendariobolsafamilia2017.com/cadastro-unico/ (Acessado em 17 de outubro de 2017)

https://pt.wikipedia.org/wiki/Megabyte (Acessado em 21 de outubro de 2017)

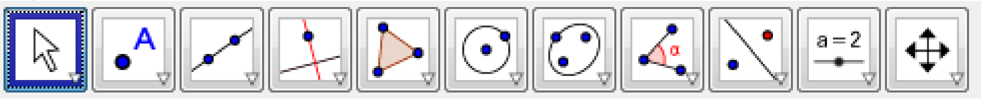
https://www.fronteiras.com/conferencistas/pierre-levy (acessado em 07 de dezembro de 2017)

APÊNDICE – Mini tutorial do GeoGebra

Durante este trabalho foram explicados alguns comandos para realizar as atividades propostas. Este apêndice tem o propósito de detalhar todos os comandos do GeoGebra (tanto para smartphone quanto para computador) e fazer um breve relato da utilidade de cada um.

O GeoGebra possui uma barra de ferramentas, pelas quais são realizadas as construções, medições, etc. Essa barra pode ser vista na figura 63:

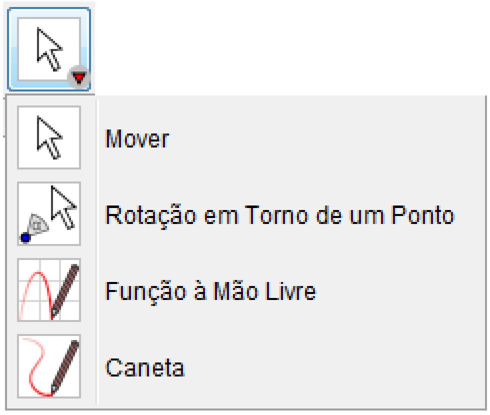
Figura 63 – Barra de ferramentas.



Fonte: O autor, 2017.

Ao clicar nas pequenas setas brancas, no canto inferior direito de cada ferramenta mostrada anteriormente, um novo menu é aberto, como novas ferramentas, seguindo o modelo semelhante da ferramenta que estava a mostra. Observe na figura 64.

Figura 64 - Primeiro conjunto de ferramentas.

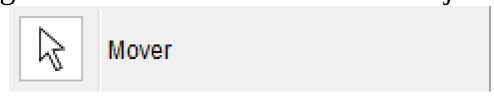


Fonte: O autor, 2017.

Em seguida, o nome de cada figura representa o texto que o GeoGebra fornece quando o usuário seleciona a ferramenta em questão.

Destaque de cada uma das ferramentas, nas figuras 65, 66, 67 e 68:

Figura 65 – “Arraste ou selecione objetos”.



Fonte: O autor, 2017.

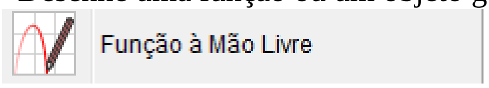
Ferramenta utilizada para selecionar e mover a tela, objetos, construções, rótulos, entre outros.

Figura 66 – “Selecione primeiro o centro da rotação e, depois, arraste o objeto”.

Fonte: O autor, 2017.

Utilizada para fazer um objeto rotacionar em torno de um ponto selecionado.

Figura 67 – “Desenhe uma função ou um objeto geométrico”.



Fonte: O autor, 2017.

Constrói o gráfico de uma função que o usuário tenha desenhado. Também serve para desenhar figuras geométricas. Em ambos os casos, a ferramenta corrige os desenhos para que não fiquem “tremidos”.

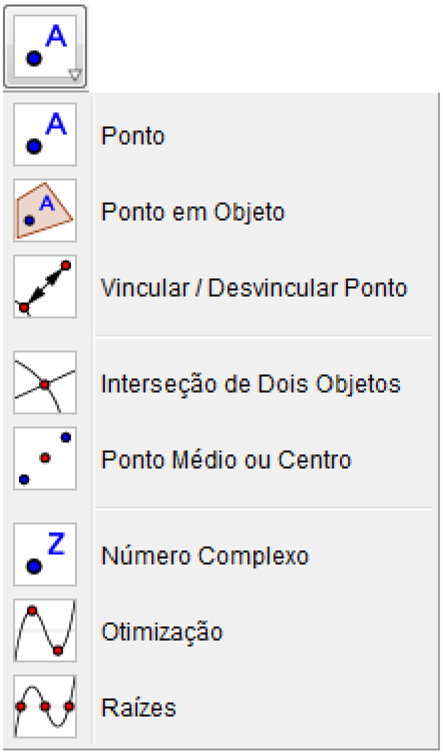
Figura 68 –“Escreva ou desenhe, troque a cor usando a Barra de Estilo”.

Fonte: O autor, 2017.

Permite traçar qualquer desenho.

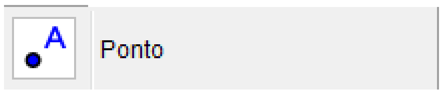
Segundo conjunto de ferramentas na figura 69 e, cada ferramenta destacada, nas figuras 70, 71, 72, 73, 74, 75,76, 77.

Figura 69 – Segundo conjunto de ferramentas.



Fonte: O autor, 2017.

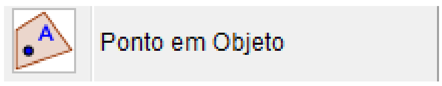
Figura 70 – “Selecione uma posição ou reta, função ou curva”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria um ponto no local desejado.

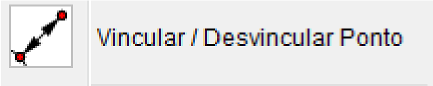
Figura 71 – “Selecione um objeto ou a sua fronteira”.



Fonte: O autor, 2017.

A diferença desta ferramenta para a anterior (Ponto), é que esta cria um ponto dentro ou na fronteira de um objeto, e caso este objeto seja movido, o ponto também será movido. Se for do interesse do usuário mover o ponto, o mesmo só poderá ser movido dentro do objeto.

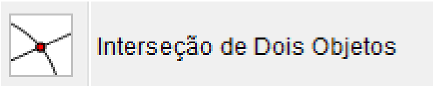
Figura 72 – “Clique em um Ponto (e um Objeto para vincular)”.



Fonte: O autor, 2017.

Vincula (ou desvincula) um ponto de um objeto, realizando a função que a ferramenta anterior (Ponto em Objeto) proporciona ao criar o ponto inicialmente em um objeto.

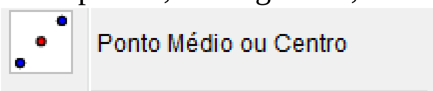
Figura 73 –“Selecione a interseção ou dois objetos em sequência”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria um ponto na interseção de dois objetos. Ferramenta útil para garantir que o ponto estará na interseção, pois o usuário pode clicar milímetros ao lado da interseção se criar ponto pela ferramenta Ponto.

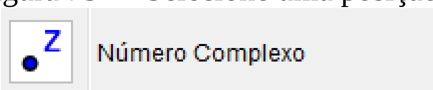
Figura 74 – “Selecione dois pontos, um segmento, um círculo ou uma cônica”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria um ponto médio entre dois pontos, ou de um segmento, círculo ou cônica.

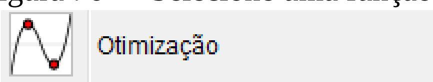
Figura 75 – “Selecione uma posição”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria um afixo de um número complexo.

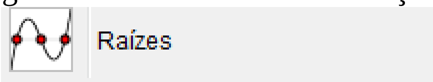
Figura 76 – “Selecione uma função”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria os pontos que são os pontos críticos de uma função.

Figura 77 – “Selecionar uma função”.



Fonte: O autor, 2017.

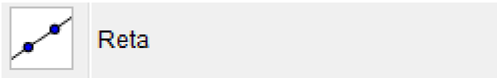
Cria os pontos que são as raízes da função selecionada.

Terceiro conjunto de ferramentas na figura 78 e, cada ferramenta destacada, nas figuras 79, 80, 81, 82, 83, 84 e 85.

Figura 78 – Terceiro conjunto de ferramentas

Fonte: O autor, 2017.

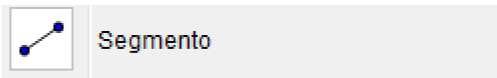
Figura 79 –“Selecione dois pontos ou duas posições”.



Fonte:O autor, 2017.

Cria uma reta a partir de dois pontos.

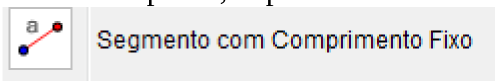
Figura 80 – “Selecione dois pontos ou posições”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria um segmento de reta a partir de dois pontos.

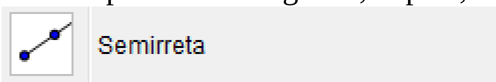
Figura 81 – “Selecione um ponto, depois entre com um comprimento”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria um segmento de reta com um ponto inicial e com um comprimento especificado pelo usuário.

Figura 82 – “Selecione primeiro a origem e, depois, um outro ponto”.



Fonte: O autor, 2017.

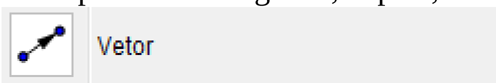
Cria uma semirreta a partir de um ponto inicial e com direção baseada no segundo ponto.

Figura 83 – “Selecione todos os vértices e, então, o vértice inicial novamente”.

Fonte: O autor, 2017.

Cria um caminho poligonal, criado vértice a vértice, selecionados pelo usuário. Para finalizar, deve-se clicar no vértice inicial.

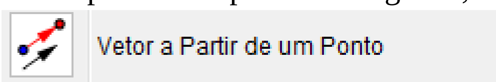
Figura 84 – “Selecione primeiro a origem e, depois, a outra extremidade”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria-se um vetor, sendo o primeiro ponto a extremidade inicial e, o segundo ponto, a extremidade final do vetor.

Figura 85 – “Selecione primeiro o ponto de origem e, depois, um vetor”.

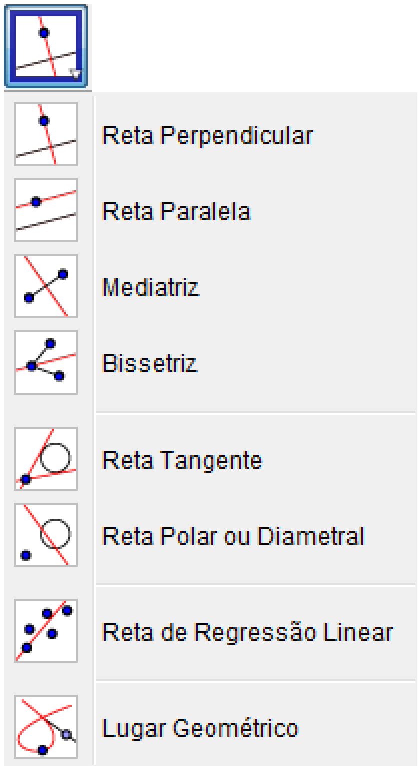


Fonte: O autor, 2017.

Copia um vetor com extremidade inicial em um ponto selecionado e com módulo, direção e sentido igual ao do vetor selecionado após ser determinado o ponto inicial.

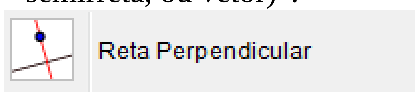
Quarto conjunto de ferramentas na figura 86 e, cada ferramenta destacada, nas figuras 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93 e 94.

Figura 86 – Quarto conjunto de ferramentas,



Fonte: O autor, 2017.

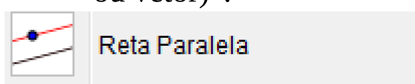
Figura 87 – “Selecione primeiro o ponto e, depois, uma reta (ou segmento, ou semirreta, ou vetor)”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria uma reta perpendicular à outra reta, ou semirreta, ou segmento ou vetor, selecionando-se primeiro um ponto que esta reta perpendicular irá conter.

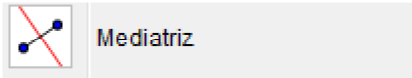
Figura 88 – “Selecione primeiro o ponto e, depois, a reta (ou segmento, ou semirreta, ou vetor)”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria uma reta paralela à outra reta, ou semirreta, ou segmento ou vetor, selecionando-se primeiro um ponto que esta reta paralela irá conter.

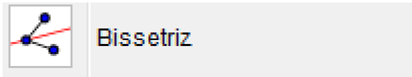
Figura 89 – “Selecione dois pontos ou segmento”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria a mediatriz de um segmento de reta.

Figura 90 – “Selecione três pontos ou duas retas”.



Fonte: O autor, 2017.

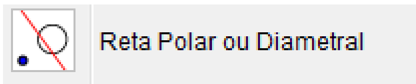
Cria a bissetriz de um ângulo. Podem-se selecionar os pontos que formam o ângulo ou selecionar retas (semirretas ou segmentos) que formam o ângulo.

Figura 91 – “Selecione primeiro um ponto e, depois, um círculo, uma cônica ou uma função”.

Fonte: O autor, 2017.

A partir de um ponto selecionado e uma cônica, cria retas tangentes à cônica e que contenham este ponto selecionado inicialmente.

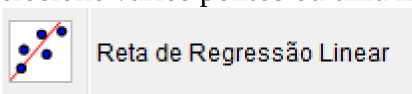
Figura 92 – “Selecione primeiro um ponto ou uma reta e, depois, um círculo ou uma cônica”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria uma reta diametral a partir de um ponto inicial e uma cônica.

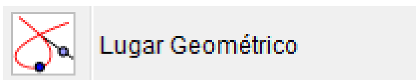
Figura 93 – “Selecione vários pontos ou uma lista de pontos”.



Fonte: O autor, 2017.

É possível encontrar a reta que melhor se ajusta a conjunto de pontos selecionados.

Figura 94 – “Selecione o ponto do lugar geométrico e, depois, o ponto sobre o objeto ou controle deslizante”.



Fonte: O autor, 2017.

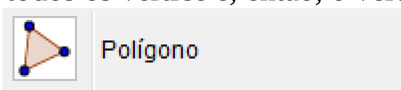
Constrói o lugar geométrico determinado pelo movimento de um objeto (ponto, reta, etc) ao longo de uma trajetória.

Quinto conjunto de ferramentas na figura 95 e, cada ferramenta destacada, nas figuras 96, 97, 98 e 99.

Figura 95 – Quinto conjunto de ferramentas.

Fonte: O autor, 2017.

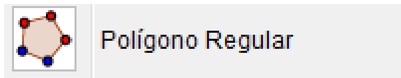
Figura 96 – “Selecione todos os vértice e, então, o vértice inicial novamente”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria um polígono a partir dos pontos selecionados, os quais serão os próprios vértices do polígono. Para finalizar a criação, selecione o vértice inicial.

Figura 97 – “Selecione primeiro dois pontos e, depois, entre com o número de vértices”.



Fonte: O autor, 2017.

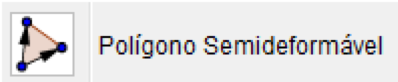
Cria um polígono regular com a quantidade de vértices que o usuário desejar.

Figura 98 – “Selecione todos os vértice e, então o primeiro vértice novamente ou selecione um polígono”.

Fonte: O autor, 2017.

Ferramenta semelhante a ferramenta “Polígono”, entretanto quando o polígono rígido é criado, este não pode ser modificado. Ou seja, não se pode selecionar um ponto e arrastar, fazendo com o que os lados do polígono se modifiquem, como na ferramenta “Polígono” é possível.

Figura 99 – “Selecione todos os vértices e, então, o vértice inicial novamente”.

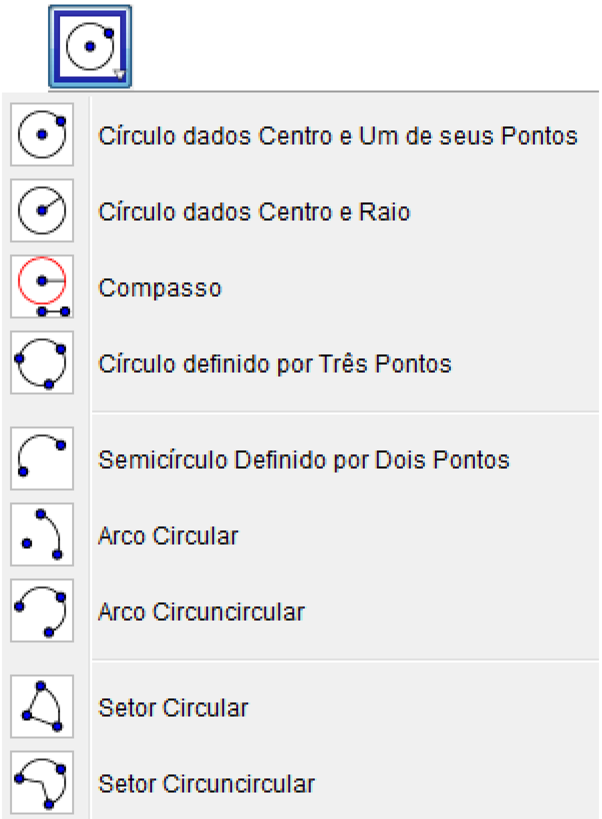


Fonte: O autor, 2017.

Semelhante às ferramentas “Polígono” e “Polígono Rígido”, entretanto não é possível selecionar e arrastar o vértice inicial de criação do polígono, o qual é permitido na ferramenta “Polígono”. Para os outros vértices é permitido realizar esta função.

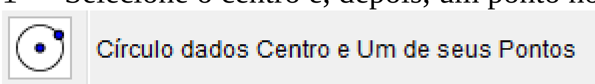
Sexto conjunto de ferramentas na figura 100 e, cada ferramenta destacada, nas figuras 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108 e 109.

Figura 100 – Sexto conjunto de ferramentas.



Fonte: O autor, 2017.

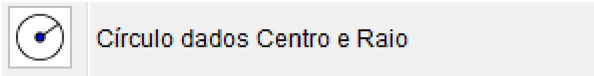
Figura 101 – “Selecione o centro e, depois, um ponto no círculo”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria um círculo, sendo o ponto inicial o centro e, a partir daí, o próximo ponto sendo um dos pontos do círculo.

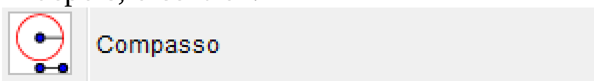
Figura 102 – “Selecione o centro e, depois, digite a medida do raio”.



Fonte: autor.

Cria um círculo, sendo o ponto inicial o centro e, em seguida, o usuário digita o comprimento do raio do círculo desejado.

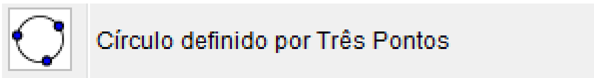
Figura 103 –“Selecione um segmento ou dois pontos para definir o raio e, depois, o centro”.



Fonte: O autor, 2017.

Selecionando dois pontos, cria-se um círculo, de raio com o comprimento da distância entre estes pontos selecionados e, o segundo ponto, o centro deste círculo.

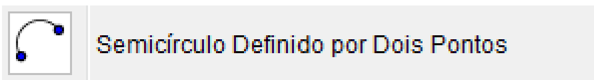
Figura 104 – “Selecione três pontos do círculo”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria um círculo com que contenha os três pontos selecionados.

Figura 105 – “Selecione dois pontos”.



Fonte: O autor, 2017.

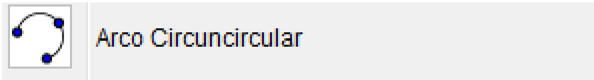
Cria um semicírculo a partir de dois pontos.

Figura 106 – “Selecione o centro e, depois, dois pontos”.

Fonte: O autor, 2017.

Cria um arco circular a partir de um ponto, sendo este o centro do círculo que contém o arco, e os outros dois pontos as extremidades do arco.

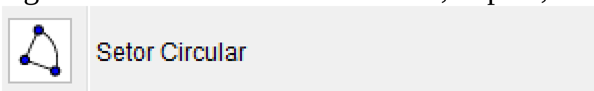
Figura 107 – “Selecione três pontos”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria um arco circular, que contenha os três pontos selecionados.

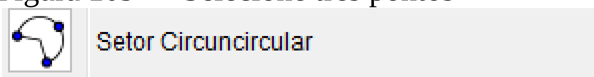
Figura 108 – “Selecione o centro e, depois, dois pontos”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria um setor circular a partir de um ponto, sendo este o centro do círculo que contém o setor, e os outros dois pontos as extremidades do arco.

Figura 109 – “Selecione três pontos”

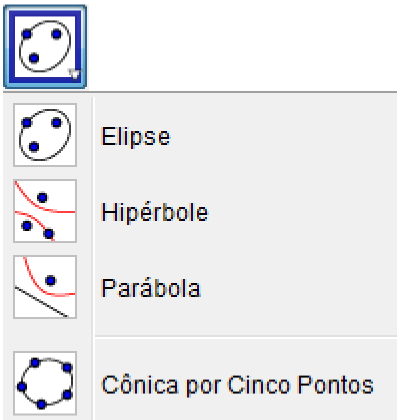


Fonte: O autor, 2017.

Cria um setor circular, que contenha os três pontos selecionados.

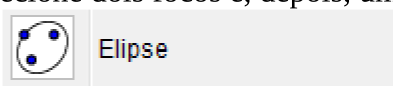
Sétimo conjunto de ferramentas na figura 110 e, cada ferramenta destacada, nas figuras 111, 112, 113 e 114.

Figura 110 – Sétimo conjunto de ferramentas.



Fonte: O autor, 2017.

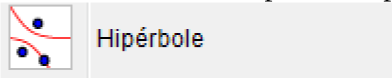
Figura 111 – “Selecione dois focos e, depois, um ponto da elipse”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria uma elipse a partir de dois focos e um ponto pertencente à elipse.

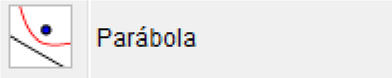
Figura 112 – “Selecione dois focos e, depois, um ponto da hipérbole”.



Fonte:O autor, 2017.

Cria uma hipérbole a partir de dois focos e um ponto pertencente à hipérbole.

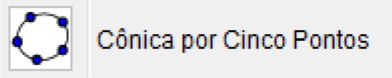
Figura 113 – “Selecione primeiro o foco e, depois, a diretriz”.



Fonte:O autor, 2017.

Cria uma parábola a partir do foco e uma reta diretriz.

Figura 114 – “Selecione cinco pontos da cônica”.



Fonte: O autor, 2017.

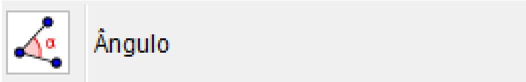
Cria uma cônica que melhor se ajusta a cinco pontos selecionados.

Oitavo conjunto de ferramentas na figura 115 e, cada ferramenta destacada, nas figuras 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122 e 123.

Figura 115 – Oitavo conjunto de ferramentas.

Fonte: O autor, 2017.

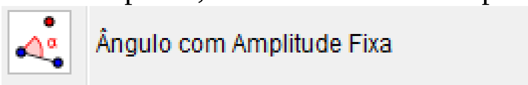
Figura 116 – “Selecione três pontos ou duas retas”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria um ângulo a partir de três pontos ou duas retas selecionadas.

Figura 117 – “Selecione um ponto, um vértice e uma amplitude para o ângulo”.



Fonte: O autor, 2017.

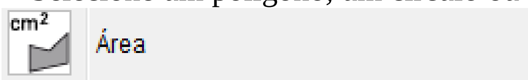
Cria um ângulo a partir de um ponto, um vértice e, então, a medida do ângulo desejado é digitada pelo usuário.

Figura 118 – “Selecione dois pontos, um segmento, um polígono ou um círculo”.

Fonte: O autor, 2017.

Determina a distância, comprimento ou o perímetro de um segmento, polígono ou círculo selecionado.

Figura 119 – “Selecione um polígono, um círculo ou uma elipse”.



Fonte: O autor, 2017.

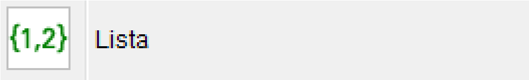
Determina a área de um polígono, círculo ou elipse.

Figura 120 – “Selecione uma reta (ou semirreta ou segmento)”.

Fonte: O autor, 2017.

Fornece o coeficiente angular da reta, semirreta ou segmento de reta selecionado. Mostra um triângulo retângulo cuja razão entre a medida do cateto vertical e a medida do cateto horizontal é o valor absoluto da inclinação do objeto selecionado.

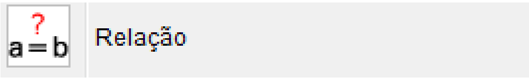
Figura 121 – “Selecione células e, então, clique no botão da ferramenta”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria uma lista de objetos (pontos, segmentos de reta, polígonos, etc). Selecionando os objetos simultaneamente.

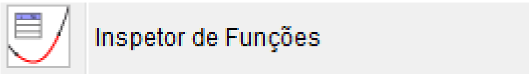
Figura 122 – “Selecione dois objetos”.



Fonte: O autor, 2017.

Selecione dois objetos e, o aplicativo, determinará a relação que eles possuem entre si.

Figura 123 – “Selecione uma função”.

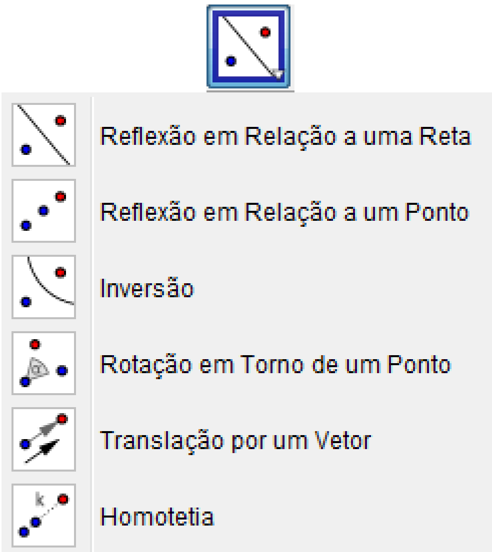


Fonte: O autor, 2017.

Possibilita uma análise mais específica da função em determinado intervalo, tais como pontos de máximo e mínimo, integral, reta tangente, etc.

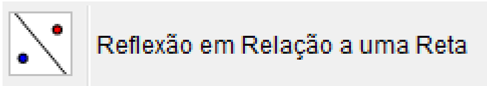
Nono conjunto de ferramentas na figura 124 e, cada ferramenta destacada, nas figuras 125, 126, 127, 128, 129 e 130.

Figura 124 – Nono conjunto de ferramentas.



Fonte: O autor, 2017.

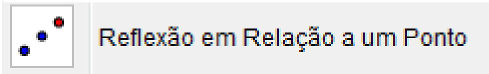
Figura 125 – “Selecione primeiro o objeto e, depois, a reta de reflexão”.



Fonte: O autor, 2017.

Selecione o objeto que se deseja refletir, em relação a uma reta.

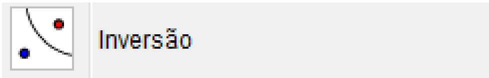
Figura 126 – “Selecione primeiro o objeto e, depois, o centro de reflexão”.



Fonte: O autor, 2017.

Selecione o objeto que se deseja refletir, em relação a um ponto.

Figura 127 – “Selecione primeiro o objeto e, depois, o círculo”.



Fonte: O autor, 2017.

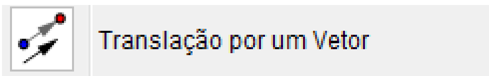
Inverte um objeto em relação a um círculo selecionado.

Figura 128 – “Selecione primeiro o objeto, depois o centro e, então, o ângulo de rotação”.

Fonte: O autor, 2017.

Constrói o reflexo de um objeto ao redor de um ponto em relação a um determinado ângulo. Seleciona-se primeiro o objeto que se pretende rodar, em seguida, um ponto que representará o centro de rotação e, então, a digita-se a amplitude do ângulo da rotação desejada.

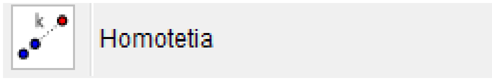
Figura 129 – “Selecione primeiro o objeto a ser trasladado e, depois, um vetor”.



Fonte: O autor, 2017.

Realiza o traslado de um objeto para o mesmo lado que o sentido do vetor a ser selecionado. Seleciona-se primeiro o objeto e, em seguida, o vetor que define a translação.

Figura 130 – “Selecione primeiro o objeto, depois o centro e, então, a razão de homotetia”.

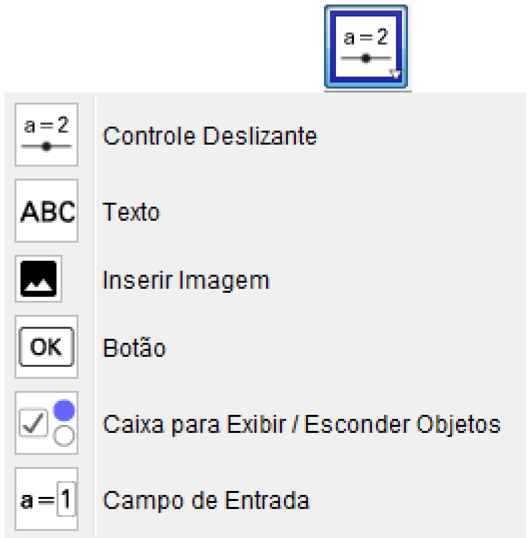


Fonte: O autor, 2017.

Realiza a homotetia de um objeto, ao selecionar primeiro o objeto, depois o centro e, em seguida, o usuário digita a razão da homotetia desejada.

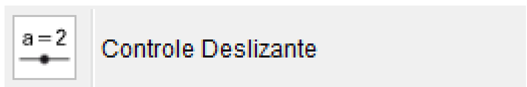
Décimo conjunto de ferramentas na figura 131 e, cada ferramenta destacada, nas figuras 132, 133, 134, 135, 136 e 137.

Figura 131 – Décimo conjunto de ferramentas.



Fonte: autor.

Figura 132 – “Selecione uma posição”.

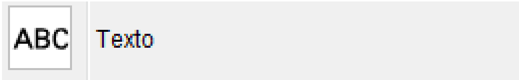


Fonte: O autor, 2017.

Cria um controle deslizante, já muito citado neste trabalho, nas atividades realizadas. A criação pode ser realizada digitando uma variável no campo de digitação, selecionando uma letra aleatória para representar o controle deslizante. Assim o aplicativo criará o controle automaticamente.

Através desta ferramenta, o controle deslizante é criado primeiro, para somente então, alguma variável ser associada a ele, o qual também pode ser realizado no campo de digitação.

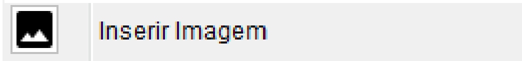
Figura 133 – “Selecione uma posição ou um ponto existente”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria uma caixa de texto para o usuário digitar o que desejar.

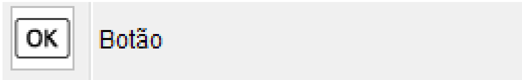
Figura 134 – Sem texto.



Fonte: O autor, 2017.

Ao clicar nesta ferramenta, o aplicativo abre uma janela para selecionar uma imagem que o usuário desejar inserir no campo de construções.

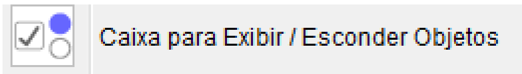
Figura 135 – “Selecione uma posição”.



Fonte: O autor , 2017.

Cria um botão que o usuário pode associar uma ou mais determinadas ações (trocar coordenadas de um ponto, trocar a posição de uma reta, etc.). Seleciona-se a ferramenta e o local onde o botão será posicionado, em seguida, seleciona-se a legenda e a função que o botão exercerá.

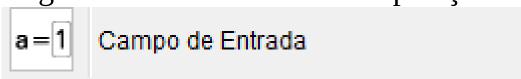
Figura 136 – “Selecione uma posição”.



Fonte: O autor, 2017.

Cria uma caixa em que se é possível esconder ou exibir um objeto. Exerce a mesma função que os pequenos círculos azuis ou brancos, na janela de álgebra. Estes círculos também já foram citados durante algumas atividades deste trabalho. Esta ferramenta é normalmente mais utilizada quando o usuário não deseja que a janela de álgebra permaneça aberta, fazendo assim com que se tenha mais espaço para construções.

Figura 137 – “Selecione uma posição”.



Fonte: O autor, 2017.

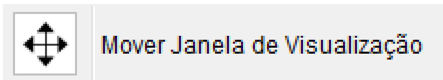
Cria uma caixa de texto para que o usuário possa interagir. Seleciona-se a ferramenta, a posição em que será posicionada, em seguida digita-se a legenda e o objeto que será associado à ferramenta.

Décimo primeiro conjunto de ferramentas na figura 138 e, cada ferramenta destacada, nas figuras 139, 140, 141, 142, 143 , 144 e 145.

Figura 138 – Décimo primeiro conjunto de ferramentas:

Fonte: O autor, 2017.

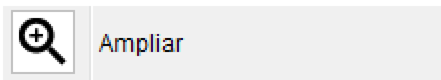
Figura 139 – “Arraste a janela de visualização ou um eixo (Shift + Arrastar)”.



Fonte: O autor, 2017.

Ferramenta para mover a janela de visualização. Pode ser substituída por “Shift + Arrastar”.

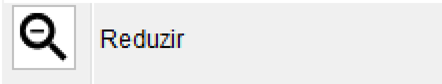
Figura 141 – “Clique / toque para ampliar (ou use a Roda do Mouse)”.



Fonte: O autor, 2017.

Ferramenta para ampliar a visualização. Pode ser substituída pelo uso da roda do mouse.

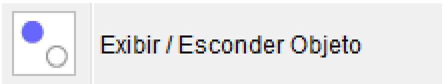
Figura 142 – "Clique / toque para reduzir (ou use a Roda do Mouse)".



Fonte:O autor, 2017.

Ferramenta para reduzir a visualização. Pode ser substituída pelo uso da roda do mouse.

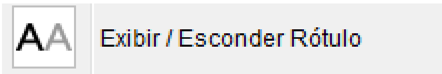
Figura 142 – "Selecione os objetos e, em seguida, ative uma outra ferramenta".



Fonte: O autor O autor, 2017.

Ferramenta que permite exibir ou esconder um objeto. Exerce a mesma função que os pequenos círculos azuis ou brancos, na janela de álgebra. Ferramenta pode ser utilizada quando se tem muitas construções na janela de álgebra e se deseja esconder ou exibir um objeto selecionando-o diretamente na janela de visualização.

Figura 143 – "Selecione o objeto para exibir / esconder o seu rótulo".



Fonte: O autor, 2017.

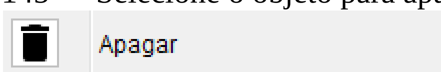
Esconde ou exibe o rótulo de um objeto.

Figura 144 – "Clique no objeto modelo e, em seguida, naquele(s) cujo estilo pretende alterar".

Fonte: O autor, 2017.

Copia um estilo visual (cores, espessuras, etc.) de um objeto para outro. Primeiro deve-se selecionar o objeto cujo estilo visual se deseja copiar e, em seguida, o objeto que sofrerá as mudanças.

Figura 145 – "Selecione o objeto para apagá-lo".



Fonte: O autor, 2017.

Apaga um objeto selecionado.