Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Felipe dos Santos Ramos

Problemas do segundo grau na Babilônia

Rio de Janeiro
2018

Felipe dos Santos Ramos

Problemas do segundo grau na Babilônia

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Pitombeira de Carvalho

Coorientadora: Prof.ª Dra. Patrícia Nunes da Silva

Rio de Janeiro

2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

R175 Ramos, Felipe dos Santos
Problemas do segundo grau na Babilônia / Ramos, Felipe dos Santos. - 2018.
59f. : il.

Orientador: João Bosco Pitombeira de Carvalho.
Coorientadora: Patrícia Nunes da Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Matemática - História - Teses. 2. Matemática (Segundo grau) - Problemas, exercícios, etc; - Teses. I. Carvalho, João Bosco Pitombeira de. II.Silva, Patrícia Nunes da. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 51(091)

Rosalina Barros ***CRB-7 / 4204*** **-** Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Felipe dos Santos Ramos

Problemas do segundo grau na Babilônia

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 25 de junho de 2018.

Orientador:

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira de Carvalho
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Coorientadora:

Prof.ª Dra. Patrícia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Banca Examinadora:

____

Prof.ª Dra. Maria Lúcia Torres Villela
Universidade Federal Fluminense

____

Prof. Dr. Fernando Antonio de Araujo Carneiro
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

____

Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro

2018

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família e aos meus amigos, que sempre foram peças essenciais nas engrenagens da minha vida.

AGRADECIMENTOS

A Natália da Silva Lacerda, amada esposa, cujo apoio e amor sempre foram e serão porto seguro para mim. Graças a você, eu sou um "betterman";

Aos meus pais, Claudio Cesar Moreira Ramos, Sandra Regina dos Santos Ramos, minha irmã, Amanda dos Santos Ramos, minhas avós, Liete e Maria Zilca, meus sogros Maria Cristina da Silva Lacerda e Stélio José da Silva Lacerda e aos demais familiares não citados nominalmente. A pessoa que possui uma família presente em sua vida, sempre será um indivíduo melhor, principalmente quando os personagens são os referidos acima;

Aos queridos orientadores, João Bosco Pitombeira de Carvalho e Patrícia Nunes da Silva, por toda ajuda, por cada encontro, cada mensagem, cada correção, cada texto enviado etc. Eu não poderia ter conseguido orientadores melhores para o meu trabalho;

Ao CAPES, pelo investimento feito nesta pesquisa, através da bolsa de mestrado, que espero ter feito jus a todo este investimento;

Aos meus queridos amigos da turma de 2015 do PROFMAT, no polo da UERJ. Cada momento em que nos reunimos para estudar, que trocamos mensagens nas redes sociais, que nos encontramos fora da universidade para conversar e dar risada, cada um desses momentos foi maravilhoso. Nunca vi uma turma tão unida como essa. Vocês são muito fofos!

Aos queridos amigos da Escola Municipal Jornalista Assis Chateaubriand por todo apoio nos momentos que precisei. Não tenho colegas de trabalho, tenho amigos que fiz no trabalho;

As queridas Fernanda Godinho di Marco e Gisele Pereira da Silva, pela grande ajuda, seja por uma tradução ou uma correção ortográfica. Mas a principal ajuda foi cada risada e cada conversa, pessoalmente ou nas redes sociais, junto com estas pessoas que tenho o privilégio de chamar de amigas;

Aos amigos Anderson Oliveira, Franklin Medeiros, Gabriel Tavares (que é mais que apenas primo, é amigo de todas as horas), Giovanni di Carlo, Glauber Holanda, Gustavo Costa, Péricles Marques, Rafael Gomes e Thiago Rodrigues. Irmãos que não são de sangue, mas são de escolha. Estes também tenho o privilégio de chamar de amigos;

E a cada pessoa não citada, mas que, de alguma forma, participou desta caminhada e contribuiu para o meu crescimento como ser humano. Meus agradecimentos a todos.

A Matemática, senhora que ensina o homem a ser simples e modesto, é a base de todas as ciências e de todas as artes.

Malba Tahan

RESUMO

RAMOS, F.S. *Problemas do segundo grau na Babilônia*. 2018. 59f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

Neste trabalho, foi feita uma pesquisa bibliográfica para mostrar como os babilônios resolviam problemas do segundo grau, estabelecendo uma comparação entre a forma que os antigos historiadores, como Otto Neugebauer, acreditavam que eram resolvidos estes problemas (a partir de um método que não é mais aceito nos dias de hoje) e a forma que os historiadores atuais, como Jens Hoyrup e Victor Katz, acreditam que os babilônios resolviam estes problemas. Para isso, a parte inicial desta pesquisa explica como funcionava o sistema de numeração babilônio, bem como faz um passeio histórico pela matemática da Babilônia, para chegar até a parte de resolução de problemas do segundo grau. Foram utilizados problemas iguais para mostrar a forma de resolução que antes era aceita pelos historiadores e a forma como hoje é aceita. Em seguida, são mostradas outras formas de resolução de problemas do segundo grau por outros povos, que podem ou não ter sido influenciados pelo método de resolução babilônio.

Palavras-chave: Problemas do segundo grau. Babilônia. Neugebauer. Hoyrup. Katz.

ABSTRACT

RAMOS, F.S. *Quadratic problems at Babylon*. 2018. 59f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

At the present study, a bibliographic research has been performed in order to show how the Babylonians solved quadratic problems, establishing a comparison among the way ancient historians, like Otto Neugebauer, believed those problems were solved (from a method which, nowadays, is not accepted anymore) and the way current historians, such as Jens Hoyrup and Victor Katz, believe the Babylonians used to solve those problems. For such analysis, the initial part of this research explains how the Babylonian number system used to work, by “taking a walk” through the Babylonian´s mathematics history, in order to get to the quadratic problem solving part, in which the same problems were used in order to show the way of solving that had been accepted by the historians before, and the way it is accepted nowadays. Subsequently, other ways of solving quadratic problems, from different peoples, which may have been influenced by the Babylonian solving method or not, are illustrated.

Keywords: Quadratic problems. Babylonian. Neugebauer. Hoyrup. Katz.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A busca pelo conhecimento sempre foi um verdadeiro combustível para os seres humanos. A curiosidade humana já mostrou, diversas vezes, não ter limites. A necessidade de saber o porquê e como as coisas acontecem fez com que as diversas áreas das ciências evoluíssem a estágios cada vez mais impressionantes. Com a Matemática não foi diferente. Não à toa, em sua etimologia, a palavra "matemática" tem o seguinte significado:

> "A palavra matemática deriva da palavra grega "matemathike". "máthema" = compreensão, explicação, ciência, conhecimento, aprendizagem; "thike" = arte."[1]

Assim, podemos dizer que a matemática é a arte ou técnica de explicar o que precisa ser explicado, explicar o que precisa de resposta. Este significado fica ainda mais evidente, quando estudamos as civilizações antigas. Conforme os povos foram se desenvolvendo, o que começou com uma simples necessidade de quantificar itens, desenvolveu-se até grandes teoremas e ensinamentos deixados por estudiosos em matemática, cuja curiosidade e necessidade por respostas fez com que se aprofundassem de tal maneira que seus nomes ficassem marcados na história da matemática.

Tal qual estes grandes nomes do passado, pesquisadores atuais também são tomados por esta curiosidade de buscar o porquê de seus objetos de estudo. Uma destas buscas veio a ser esta pesquisa, que surgiu em um dia como outro qualquer, em sala de aula, ao estar introduzindo equações do segundo grau para alunos do nono ano do Ensino Fundamental, ao ser interceptado por aquela famosa pergunta que todo professor de Matemática ouve: Para que isto serve?

Naturalmente, esta é uma pergunta que os alunos, na maioria das vezes, fazem para irritar o professor. Porém, em muitos casos, esta pergunta é realmente séria, por curiosidade do aluno. Quando nos deparamos com esta pergunta, sempre buscamos mostrar as aplicações em diversas áreas, para que o aluno veja que nada é ensinado por acaso, e que, dependendo da carreira que ele pretende seguir no futuro, aquilo que está sendo ensinado, poderá ser de extrema importância.

---

[1] http://www.dicionarioetimologico.com.br/matematica/, acessado em 12 de março de 2017.

Contudo, excepcionalmente, diferente da pergunta que os professores sempre ouvem, estes alunos fizeram outras duas perguntas que despertaram a curiosidade para que esta pesquisa nascesse: Como e por que surgiram as equações do segundo grau (fórmula de Bhaskara)? Perguntas que, naquele momento, foram surpreendentes, tendo em vista que nem sempre os alunos possuem este tipo de curiosidade. Assim, para a aula seguinte, ao fazer uma busca, graças a algumas fontes, foi possível escrever um breve resumo para saciar as curiosidades que foram apresentadas. É válido ressaltar que, algumas destas fontes, foram enviadas pelo professor João Bosco Pitombeira de Carvalho, no período de escolha de temas para a dissertação que conclui o mestrado, que acabaram servindo como material para enriquecimento da aula. Estas fontes, aliadas à pesquisa para enriquecimento da aula de equações do segundo grau na turma de nono ano do Ensino Fundamental, foram as razões da escolha do tema desta pesquisa.

Nesta pesquisa para enriquecimento das aulas, foi possível acompanhar como os povos antigos já dispunham de conhecimentos impressionantes na resolução de problemas do segundo grau, e que, a evolução destes conhecimentos, são um reflexo da evolução da Matemática em si. Então, visando apresentar uma contribuição para os estudos relacionados à História da Matemática, este trabalho pretende fazer um passeio histórico pela Babilônia, apresentando como os historiadores antigos, através de seus estudos na época, acreditavam que os babilônios resolviam problemas de segundo grau, seus métodos e como autores atuais interpretam os métodos de resolução destes povos, bem como mostrar as possíveis influências da resolução de problemas de segundo grau pelos babilônios em outras culturas.

Esta escolha de dar uma ênfase especial para a Babilônia se deve por duas razões: Uma porque, em um passado não muito distante, estudiosos acreditavam que os babilônios possuíam um método algorítmico de natureza algébrica para resolução de problemas do segundo grau. Esta ideia foi aceita, devido aos estudos do alemão Otto Neugebauer (1957), e reforçada pelos estudos do holandês Van der Waerden (1961). Porém, estas ideias não são mais aceitas. Hoje em dia, é aceito que os babilônios possuíam um método geométrico para resolução dos problemas de segundo grau. Esta mudança se deve a novas traduções de tabletes babilônios. No entendimento dos historiadores atuais, os babilônios possuíam conhecimentos geométricos que eram aplicados em seus métodos de resolução de problemas do segundo grau.

Por esta razão, os babilônios terão maior ênfase nesta pesquisa: para mostrar a diferença de como os antigos historiadores acreditavam que os babilônios resolviam os problemas de segundo grau e como é aceito nos dias de hoje. E, aproveitando o assunto sobre a Babilônia, esta pesquisa pretende, resumidamente, fazer um passeio histórico pelo desenvolvimento da matemática na Babilônia, cujo primeiro império surgiu em torno de 1900 a.E.C. e durou até, aproximadamente, 1600 a.E.C. Para tal, foi feita a opção pela pesquisa bibliográfica, pois um estudo como este requer leitura de diferentes livros e textos para chegar a uma conclusão aceitável, bem como para obter um estudo mais completo, buscando as opiniões e as pesquisas de diferentes autores.

Esta pesquisa tem alguns objetivos, mas o principal deles, sem dúvida, é contribuir com mais uma fonte de pesquisa na área da História da Matemática.

Como o foco principal desta pesquisa está na Babilônia, este trabalho pretende, nos capítulos iniciais, começar fazendo uma breve introdução a respeito da evolução da Matemática na Babilônia, explicar, resumidamente, como era seu sistema de numeração, entre outros assuntos considerados relevantes para o tema.

Após este levantamento bibliográfico a respeito da matemática na Babilônia, pretende-se entrar na principal contribuição desta pesquisa que é mostrar um contraste de como era aceita no passado e como hoje é aceita pelos historiadores e pesquisadores a forma dos Babilônios resolverem problemas do segundo grau, bem como estabelecer um comparativo entre outros povos, com relação à resolução destes problemas. Que comece esta viagem pela História da Matemática.

1. A IDEIA DE MATEMÁTICA E UM PARALELO DE SUA EVOLUÇÃO COM A MATEMÁTICA BABILÔNIA

> Há uma razão que explica a elevada reputação das Matemáticas, é que elas levam às ciências naturais exatas uma certa proporção de segurança que, sem elas, essas ciências não poderiam obter.
>
> *Albert Einstein*

Esta frase de Albert Einstein nos remete à ideia de que a Matemática é muito mais do que alguém que não seja estudioso na área é capaz de definir. Em tempos não muito distantes, a resposta para a pergunta “o que é a Matemática?” seria, em geral, o estudo dos números e sua relação com as formas geométricas. Esta definição, no entanto, seria extremamente pobre diante do mundo de possibilidades que a Matemática oferece e, principalmente, porque isto limita demais a Matemática, tornando-a, praticamente, uma ciência estática. A Matemática não apenas se expande cada vez mais, como também expande outras áreas que precisam dela para suas aplicações. Axiomas, postulados, teoremas, todos que fazem com que a matemática seja uma ferramenta a que outras áreas recorrem, bem como, seja uma ciência, em geral, dedutiva.

Mas, para ser uma ciência dedutiva, se faz necessária a existência de conhecimentos anteriores, para que um novo conhecimento possa surgir. Por exemplo, para se trabalhar a ideia de soma, foi necessário deduzir uma ideia de quantidade e acúmulo de quantidade de itens. Mais além, para surgirem os números foi necessário, também, deduzir uma ideia de quantidade, bem como, surgir a necessidade de quantificar e registrar estas quantidades de itens.

E não apenas a capacidade de deduzir, mas as necessidades do cotidiano, também contribuíram para a evolução da Matemática. A necessidade também é uma ferramenta capaz de acelerar processos de criação. Vide o que foi dito no parágrafo anterior: a necessidade de quantificar animais, medições de terrenos, atividades ligadas ao comércio, entre outras coisas, tudo isto contribuiu, durante todos esses anos, para que hoje possamos ter uma Matemática com fundamento e aprofundada, que é capaz de ser bela, inovadora, diretamente ligada às descobertas de outras ciências e um instrumento de evolução econômica e social.

Estas necessidades cotidianas, aliadas à capacidade de deduzir foram responsáveis por essa evolução da matemática graças a um motor comum: a curiosidade. Ela sempre esteve presente desde os primórdios. A História mostra que os seres humanos sempre tiveram necessidade de expandir e pôr em prática seus conhecimentos, e isto sempre os levou a descobertas incríveis. É possível observar que os povos antigos já eram capazes de resolver problemas cujos métodos de resolução encontrados hoje nos livros e aulas de matemática apenas seriam formalizados tempos depois. O fato de ainda não serem formalizados, não significa que eles não faziam matemática, afinal, mais do que formalização, a matemática é uma ideia, uma ciência dedutiva, entre outros adjetivos que dão sentido à matemática, como ressaltado anteriormente neste capítulo. Importante ressaltar que esta afirmação de que os métodos de resolução dos povos antigos já eram semelhantes aos encontrados nos livros nos dias de hoje, em nenhum momento, foi depreciativa com relação aos povos antigos; muito pelo contrário, enaltece os conhecimentos destes povos, mostrando que os conhecimentos formalizados nos livros tempos depois, já eram parte da matemática babilônia muitos anos antes. Por exemplo, os Babilônios eram capazes de resolver problemas do segundo grau muito antes dos estudos aprofundados que formalizaram as resoluções algébricas e geométricas. Estas formas de resolução de problemas do segundo grau pelos Babilônios, bem como outras civilizações com métodos semelhantes serão comentadas nos capítulos adiante nesta pesquisa.

2. A RELAÇÃO ENTRE A MATEMÁTICA E A ESCRITA

A Matemática esteve presente em diversas civilizações na antiguidade. Segundo o autor Victor J. Katz (2010), nas civilizações antigas, nem todos tinham acesso à Matemática. Em geral, era de conhecimento de sacerdotes e de escribas. A razão disto estava no fato de que a Matemática era utilizada como instrumento de poder (e continua sendo), o que justifica o pouco acesso a ela, bem como a escassez de fontes e registros relacionados à Matemática Antiga, pois poucas pessoas tinham acesso e, quando tinham, esse acesso geralmente não era escrito.

Dito isto, é importante salientar que a História da Matemática, em especial na antiguidade, é uma área mutável, na qual cada nova descoberta, cada novo registro, pode mudar completamente a forma de enxergar a Matemática de determinado período e região. Por conta disso, nunca podemos afirmar com total certeza que determinado método era utilizado na antiguidade, pois sempre é possível que surjam novas evidências que mudem a forma de enxergar aquele método. Esta pesquisa irá trabalhar com as evidências encontradas até a presente data.

Dentre os locais onde a Matemática se desenvolveu e nos quais seus registros são escassos, uma das cidades mais importantes da antiguidade, situada às margens do Rio Eufrates e, aproximadamente, a 90 Km de Bagdá, no Iraque, a Babilônia, teve importante contribuição para a Matemática e, também, para a escrita. É importante citar a escrita e a Matemática, pois ambas estão conectadas, como podemos ver neste trecho do livro "Tópicos de História da Matemática" de Roque e Carvalho (2012):

"*O surgimento da escrita e da Matemática, nesta região, estão intimamente relacionados. As primeiras formas de escrita foram motivadas pela necessidade de se registrarem quantidades. Em verdade, não foi somente o inventário de animais em rebanhos a maior inspiração para a criação dos números, e sim o registro de quantidades de insumos relacionados à sobrevivência, sobretudo os necessários para a organização da sociedade." (pág. 2)*

Figura 1 – Tablete Pimpton 322

Fonte:https://sites.google.com/site/fisiklain/home/1/matematica-babilonica

Muitos historiadores afirmam, e é a explicação aceita nos dias de hoje, que a escrita na região da Babilônia é o primeiro tipo de escrita de que se tem conhecimento e foi criada para fins de contagem. Eram registros em tabletes de argila e alguns deles foram encontrados em escavações na região. Acredita-se que os primeiros tabletes registravam contagem de bens ou de produtos da agricultura, alguns com figuras que não se sabe ao certo o que representavam.

Dentre estas explicações, a mais aceita nos dias de hoje é a tese desenvolvida nos anos 90 por Denise Schmandt-Besserat, mencionada por Roque e Carvalho (2012), que, além de afirmar o que foi citado acima, ainda explica uma origem para estes tabletes de argila. Nos objetos encontrados, ela notou um certo padrão, que as escavações traziam objetos em diferentes formas geométricas, que ela chamou de tokens. Estes objetos eram utilizados para efeito de contagem ou de registro de determinado item, tendo suma importância para a economia da época. Conforme a sociedade foi evoluindo, eles foram desenvolvendo métodos para armazenar estes tokens, guardando-os dentro de objetos de argila, fechados, em cujas superfícies registravam-se as quantidades de tokens que havia dentro dos respectivos objetos.

Com o tempo, foram percebendo que, com as marcas no objeto de argila, era desnecessário aquele processo envolvendo os tokens e, aos poucos, estes invólucros de argila, foram sendo substituídos por tabletes. Este foi o primeiro passo, não apenas para o desenvolvimento de uma escrita cuneiforme, mas também para o desenvolvimento de um sistema de numeração.

Figura 2 - Invólucros de argila

Fonte: http://www.clicprovas.com/historia-da-matematica-na-babilonia/

Vale destacar, ainda, o quanto esta substituição dos invólucros de argila pelos tabletes pode ser considerada um divisor de águas para a matemática dos babilônios, pois, além de mostrar um avanço na capacidade de trabalhar com símbolos por parte dos babilônios, ainda mostra um grande avanço para o desenvolvimento do pensamento abstrato.

3. O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DA BABILÔNIA

Estudos e pesquisas a respeito dos Babilônios mostram que eles utilizavam um sistema de numeração sexagesimal, ou seja, de base 60. Todos os tabletes de argila encontrados pelos historiadores comprovam esta ideia. Por isso, essa é a ideia aceita a respeito do sistema de numeração utilizado pelos Babilônios. Alguns poucos autores afirmam que eles utilizavam além da base 60, a base 10, ou seja, que eles também utilizavam um sistema de numeração semelhante ao nosso. Aragão (2009, p.11) afirma esta ideia, como podemos ver no trecho: “A Aritmética dos Babilônios tinha duas bases: o 10 (dez) e o 60 (sessenta). A base 10 teve origem na observação dos dedos das mãos e a base 60 relaciona-se com as observações astronômicas”.

Contudo, em geral, os autores nem sequer citam a base 10 como utilizada pelos Babilônios. Isso se deve ao fato de a base 10, para efeito de contagem e utilização de símbolos, de certa forma estar inserida dentro da base 60, quando, ao contar de 1 a 60, os símbolos utilizados para representar determinado número mudavam a cada 10 números. O que é comum a todos os pesquisadores é a grande ênfase no sistema de numeração sexagesimal, na matemática e na astronomia. Sendo assim, esta pesquisa seguirá a grande maioria dos autores, que toma como base a predominância do sistema sexagesimal na matemática Babilônia.

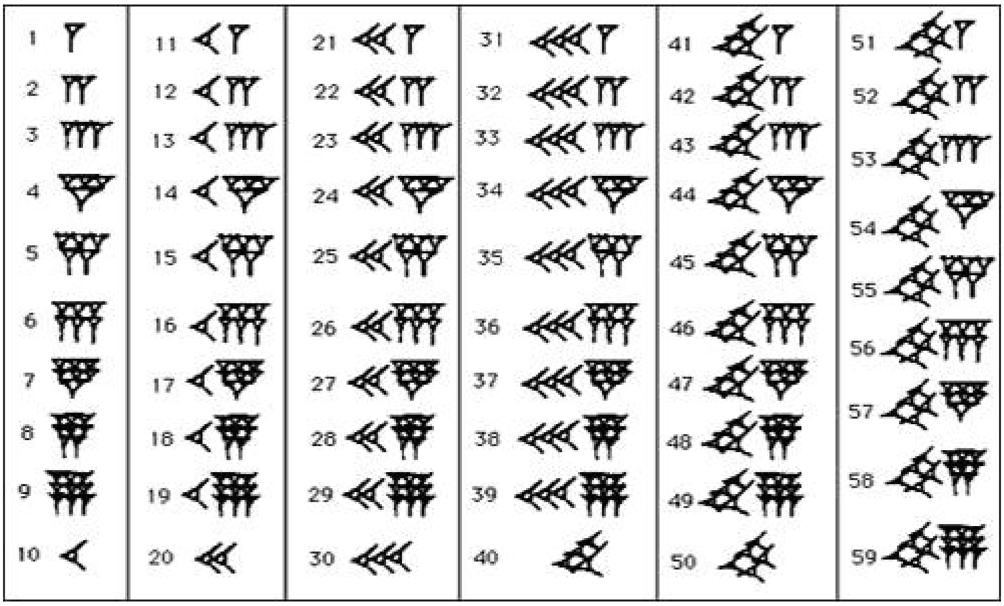
Ao contrário de Gregos, egípcios e romanos, que utilizavam um sistema de numeração baseado apenas em adição de valores, o sistema de numeração sexagesimal babilônio é um sistema posicional que utiliza símbolos, bem como a ideia de adições entre estes símbolos, para representar os números de 1 a 59. A partir de 60, os símbolos se repetem, em posições diferentes. Diferente do nosso sistema de numeração, que usa símbolos diferentes para os números de 1 a 9, e, a partir do 10, passa a utilizar uma notação posicional destes símbolos.

Um exemplo interessante e presente em nosso cotidiano, para mostrar como funciona o sistema de numeração sexagesimal estaria nas nossas medidas de tempo. A relação entre horas, minutos e segundos é um sistema sexagesimal. Tomemos, por exemplo, 2 horas, 15 minutos e 25 segundos, ao transformarmos esse horário em segundos, nós podemos utilizar uma notação sexagesimal:

$2 \times 60^2 + 15 \times 60 + 25 = 8125$ segundos.

Segue, na figura 3, a simbologia utilizada para representar os sessenta primeiros números no sistema de numeração babilônio:

Figura 3 – Sistema de numeração babilônio



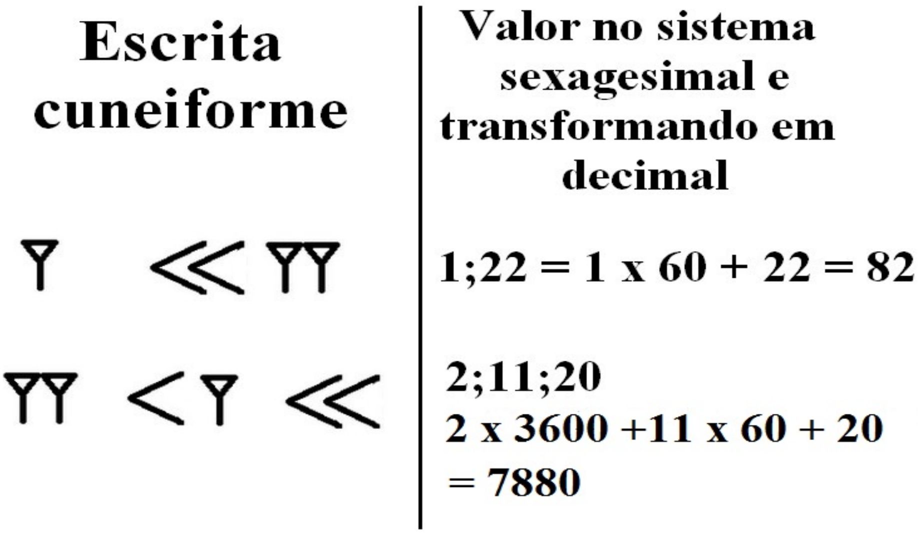
Fonte: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-babilonico.htm

O símbolo, semelhante a uma taça, que representa o número 1, também representa o número 60. Este fato tem total semelhança com nosso sistema de numeração, pois um mesmo algarismo, possui valores diferentes dependendo de sua posição, se está posicionado na casa das unidades, dezenas, centenas etc.

Observe que, para o sistema de numeração dos Babilônios dar certo, é necessário o contexto do problema ser bem claro quanto ao número utilizado, ou utilizar alguns artifícios para diferenciar determinados números. Por exemplo, com duas taças, você poderia representar o número 2 ou o número 61, com três taças, você poderia representar o número 3 ou o número 62, e, assim, sucessivamente. Este problema seria facilmente resolvido, juntando bem as duas taças para representar o número 2, e deixando as taças separadas para representar o número 61. Porém, a diferenciação entre o número 1 e o número 60, apesar de, em alguns períodos, ter acontecido alterando o tamanho do símbolo, em geral, dependia do contexto do problema ou da situação envolvendo números.

Na figura 4, temos uma noção de como os números no sistema sexagesimal eram representados na escrita cuneiforme dos babilônios, bem como sua transformação para o sistema decimal:

Figura 4 – Entendendo o sistema sexagesimal na escrita cuneiforme



Fonte: O autor, 2018.

Para efeito de praticidade, utilizaremos a notação mostrada no quadro acima, a fim de representar os números do sistema de numeração sexagesimal babilônio. Por exemplo, ao invés de duas taças para representar o número 61, utilizaremos 1;1, que significa 1x60+1=61. Note que 1;1 seria diferente de 1,1. O número 1;1 seria a representação de 61 no sistema sexagesimal, enquanto 1,1 seria um número em que a vírgula estaria separando parte inteira da parte fracionária. Esta pesquisa seguirá esta notação acima, que é similar, mas não é a mesma notação utilizada por diversos autores que escreveram a respeito do assunto, porém é utilizada por Roque e Carvalho (2012) que, no primeiro capítulo de seu livro, explicam que muitos autores utilizam a notação contrária: Ponto e vírgula para separar parte inteira de parte fracionária e vírgula para denotar a separação de algarismos dentro da parte inteira ou da parte fracionária. Porém, eles optam por utilizar a notação que já é comum no Brasil (vírgula para número decimal), e esta pesquisa seguirá a mesma convenção. Para deixar um pouco mais claro, segue o exemplo utilizado por Roque (2012, p. 51):

12;11,6;31, cujo valor no sistema decimal é $\mathbf{12 \times 60 + 11 + \frac{6}{60} + \frac{31}{60^2}}$**, onde a parte inteira é constituída por 12;11 e a parte fracionária é constituída por 6;31.**

Uma outra situação deve ser relatada, ao falarmos do sistema de numeração Babilônio: Como eles lidavam com números grandes? Roque e Carvalho (2012, p. 13) citam o exemplo do número 3601. Este número seria escrito da mesma forma que o número 61, com duas taças separadas. Utilizando a notação adotada acima, estes números seriam facilmente identificados, pois 61 = 1;1 e 3601 = 1;0;1. Em alguns casos, era deixado um espaço vazio entre os símbolos, para representar uma coluna zerada. Mas, nestes casos, o contexto do problema nos daria a entender qual número estaria sendo utilizado. Apenas no período do Império Selêucida[2], desenvolveu-se uma forma de acabar com este problema das colunas vazias entre os símbolos. Este separador, uma espécie de "zero", era representado por dois traços inclinados. Por exemplo, o número 3601 seria representado por uma taça, separador e uma taça.

Outro caso em que o contexto nos daria a entender o número seria com, ainda pegando um exemplo do mesmo livro, os números 7200 ou 120, que seriam escritos exatamente da mesma forma que o número 2. Porém, neste caso específico, a ideia do espaço vazio falha, pois a coluna zerada, estaria no final (7200 = 2;0;0, 120 = 2;0), e o separador citado acima não era utilizado como último algarismo, então apenas o contexto do problema acabaria com essa dúvida. Segundo Katz (2010, p. 10), para fazer estas distinções com relação ao final do número, após os símbolos dos números, eram escritas palavras que deixavam claro o número utilizado. Por exemplo, "4 53 sessenta" era o equivalente a 4;53 e "4 53 três mil e seiscentos" era o equivalente a 4;53;00. As palavras utilizadas não eram exatamente estes números escritos por extenso, como colocado no exemplo anterior, mas sim palavras ou símbolos que representassem o número em questão. Parece estranho escrever "4 53 sessenta" quando eles poderiam escrever apenas "4 53", porém vale ressaltar que o recurso da palavra após o número apenas era utilizado quando o contexto do problema pudesse dar margem a uma dupla interpretação.

Não se sabe ao certo a razão dos Babilônios adotarem a base 60 em seu sistema de numeração. Segundo Katz (2010), um dos motivos pode ser o fato de 60 ser divisível por diversos inteiros menores, o que facilitaria fracionar inteiros maiores. Segundo Aaboe (1964), é possível que tenha ligação com o fato de que o mana, unidade de peso de prata, se subdividia em 60 shekels. Apesar de poder se tornar um pouco confuso para quem está acostumado a trabalhar no sistema decimal, deve-se admitir que, em casos específicos, este

[2] 323 a.C-64 a.C.

sistema torna-se mais prático, como por exemplo, ao encontrar a terça parte de um número. Mas, para um contexto geral, provavelmente a maioria que lida diariamente com o sistema decimal acha o sistema sexagesimal pouco ou nada prático, embora deva-se reconhecer suas influências nas medidas de ângulos e de tempo. Um exemplo de uma desvantagem do sistema sexagesimal pode ser visualizado nas multiplicações, cujas tabelas de multiplicação devem ter 59 x 59 dimensões, o que torna muito complicada a memorização, por exemplo. Mas fato é que, sendo complicado ou não, este foi o sistema adotado pelos babilônios no decorrer de sua história.

4. CÁLCULO ARITMÉTICO E PROBLEMAS DO SEGUNDO GRAU

Com o desenvolvimento de um sistema de numeração nas respectivas civilizações, era natural o surgimento de técnicas e regras que auxiliassem no processo de contagem. A partir daí as civilizações começam a trabalhar com as operações fundamentais e a desenvolver novas técnicas aritméticas, que permitam uma maior praticidade em situações cotidianas que exijam conhecimentos matemáticos. Por exemplo, o uso de frações. As civilizações antigas desenvolveram regras para trabalhar com as frações, como consequência da divisão. Segundo Katz (2010), isto é o que poderíamos considerar como alguns dos primeiros algoritmos. É padrão definir algoritmo como uma lista ordenada de instruções com o propósito de obter uma solução para um dado tipo de problema. Ainda segundo Katz, a Matemática das civilizações antigas, em geral, é algorítmica, ou seja, utilizava-se de uma lista ordenada de instruções para fazer determinado cálculo. Diferente, por exemplo, da Matemática Grega, que também dava ênfase na teoria por trás daquele determinado assunto.

Como dito anteriormente, é sabido que os Babilônios utilizavam tabletes de argila nos quais ficavam registradas as anotações que hoje servem como prova da matemática da Babilônia. Segundo Neugebauer (1957), estes tabletes babilônios podem ser classificados em tabletes de problemas e tabletes de tabelas. De acordo com Roque e Carvalho (2012), os Babilônios utilizavam tabletes que eram semelhantes à nossa tabuada, por exemplo. Não apenas a tabuada, mas há tabletes com diversos outros procedimentos, como divisões, indícios de cálculo de raiz quadrada, entre outros. Outras tabelas que valem a citação eram aquelas que, segundo Neugebauer (1957), eram formadas por recíprocos, que seriam números x e x´ que multiplicados dariam 1. Por exemplo, 2 e 0,30, pois, quando os multiplicamos, encontramos 0,60 que é o equivalente a 1 no sistema sexagesimal babilônio.

Vale destacar que, segundo Katz (2010), nem todas as operações eram registradas em tabelas, tal qual as tabuadas. O autor afirma que foram analisados mais de duzentos tabletes babilônios e, em nenhum deles, existe registro de uma tabela de soma, por exemplo. É suposto que os babilônios resolviam direto as adições quando necessário e registravam apenas os resultados, sem necessidade de uma tabela para auxiliar. Contudo, existiam muitos tabletes que Katz classifica como “placas de rascunho”, onde eram registrados diversos cálculos de resolução de alguns problemas. Nos cálculos de soma e subtração, por serem de um sistema posicional, percebe-se nestes tabletes com soluções de operações que as técnicas de empréstimo e transporte de algarismos era muito semelhante aos métodos atuais, respeitando, claro, o fato de ser um sistema sexagesimal. Por exemplo, para somar 36;31 (correspondente a 2191) com 28;33 (correspondente a 1713), soma-se, primeiramente 31 com 33, obtendo 1;04 (equivalente a 64). O algarismo 1 é transportado para a outra coluna. Feito isso, soma-se 36, 28 e 1, obtendo 1;05 (equivalente a 65). Encontra-se, então, o resultado de 1;05;04 (equivalente a 3904), como é possível ver no esquema abaixo:

$$36;31 = 36 \times 60 + 31 = 2191$$
$$28;33 = 28 \times 60 + 33 = 1713$$
$$\underline{2191 + 1713 = 3904}$$
$$36;31 + 28;33 = 64;64 = 65;04 = 1;05;04$$
$$\underline{1;05;04 = 1 \times 3600 + 5 \times 60 + 4 = 3904}$$

Outros tabletes encontrados mostram que, além de cálculos aritméticos básicos, alguns possuíam situações mais complexas de se resolver, algumas destas situações seriam aquilo que conhecemos hoje como equações do segundo grau, que é o assunto principal desta pesquisa.

É válido ressaltar neste momento que seria extremamente precipitado afirmar que os babilônios sabiam resolver equações. Até pouco tempo atrás, alguns autores, não apenas acreditavam nisso, como afirmavam que os babilônios utilizavam um método algorítmico de caráter algébrico para a resolução de equações, com destaque para Otto Neugebauer e Van der Waerden (este último, na verdade, baseia sua pesquisa no trabalho de Neugebauer, funcionando como um complemento ou divulgação das ideias do autor). Estas afirmações, claro, vieram acompanhadas de estudos destes autores, e, no caso de Neugebauer, traduções dos tabletes babilônios. Para eles, os Babilônios resolviam problemas do segundo grau utilizando um método algorítmico, semelhante ao que hoje conhecemos no Brasil, como a fórmula de Bhaskara. Segundo Neugebauer (1957), os babilônios, apesar de possuírem conhecimentos geométricos, estes eram apenas uma parte secundária nos problemas em questão, sendo utilizadas apenas as terminologias de cunho geométrico. Por exemplo, eram problemas citando áreas de figuras, lados de retângulos, porém o método de resolução descrito era algorítmico de natureza algébrica. O que não é mais aceito pelos historiadores atuais.

É importante observar que, o fato desta visão não ser mais aceita nos dias de hoje, não diminui o tamanho da importância das pesquisas de Neugebauer, que abriu as portas para que as pesquisas nessa área fossem aprofundadas, bem como foi pioneiro nas traduções de textos babilônios. Veremos, agora, como foi a percepção de Neugebauer e demais pesquisadores antigos para a resolução de problemas do segundo grau pelos Babilônios.

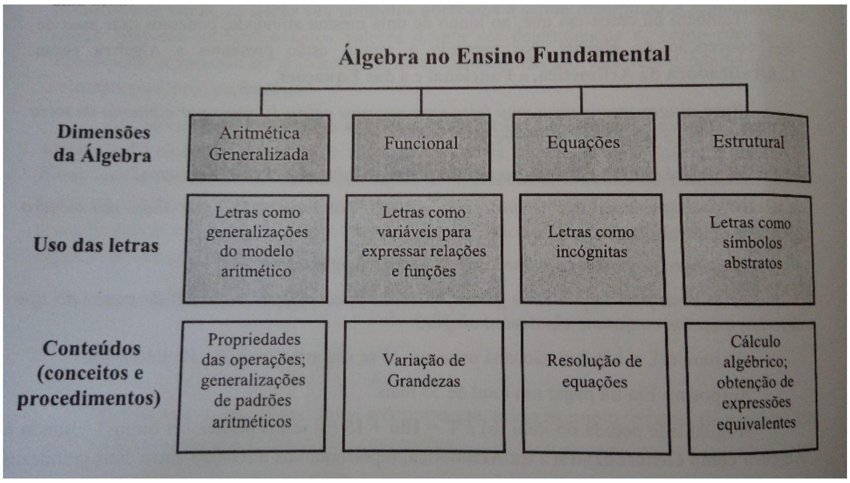
5. PROBLEMAS DO SEGUNDO GRAU NA BABILÔNIA, SEGUNDO PESQUISAS ANTIGAS

Primeiramente, é importante ressaltar que os historiadores antigos atribuíam cunho algébrico para a forma de resolução de problemas do segundo grau pelos babilônios. Chamar isto de método algorítmico foi opção desta pesquisa. Esta escolha se deve ao fato de que, antes de entrar no mérito de chamar esta resolução de algébrica, seria necessária uma definição do que é entendido como álgebra. O dicionário Michaelis dá as seguintes definições para álgebra:

> 1 MAT Ramo da matemática elementar que generaliza a aritmética por meio da introdução do sistema de numeração.
> 2 MAT Ciência matemática que tem por objetivo simplificar e generalizar as questões aritméticas, buscando a resolução de problemas por meio de fórmulas em que os símbolos (letras e sinais) representam números desconhecidos ou uma faixa de possíveis números.
> 3 MAT Estudo dos conjuntos numéricos e não numéricos em que as operações são definidas de modo abstrato.

O primeiro conceito é quase unanimidade entre os dicionários e sites confiáveis. Por outro lado, Tinoco (2011) define, em seu livro, as dimensões da álgebra, ou seja, uma álgebra dividida em quatro ramos: a Generalizadora da Aritmética, uma Álgebra Funcional (que trata das relações entre grandezas), a Álgebra das Equações e a Álgebra Estrutural (que trabalha a abstração com o auxílio das letras). Estas dimensões são pensando mais em uma álgebra de Ensino Fundamental e Ensino Médio. A imagem abaixo, retirada do livro de Tinoco (2011), esclarece essa divisão da álgebra em ramos que a autora classificou.

Figura 5 – Dimensões da álgebra segundo Tinoco



Fonte: TINOCO, 2011, p.12.

Pensando de maneira mais ampla, na álgebra trabalhada no Ensino Superior, teríamos o que diversos autores e sites classificam como Álgebra Antiga (que, basicamente, seria essa álgebra de Ensino Fundamental classificada por Tinoco) e Álgebra Moderna (que é o estudo de estruturas matemáticas mais abstratas, por exemplo grupos, corpos e anéis. O site Só Matemática afirma que essa divisão é tanto cronológica quanto conceitual, tendo em vista que os estudos envolvendo grupos, corpos e anéis são mais recentes em relação aos estudos de álgebra de Ensino Fundamental.

Em resumo, pensando em uma álgebra mais voltada para o Ensino Fundamental, não estaria errado classificar a forma de resolução de problemas de segundo grau pelos babilônios como algébrica; porém, como o conceito de álgebra é bastante amplo, essa pesquisa optou por dizer que, segundo pesquisas antigas, os babilônios empregavam um método algorítmico de natureza algébrica na resolução de problemas do segundo grau (com influências vindas da Álgebra Antiga). Isso porque, além de tabletes que possuíam tabuadas e demais operações que os babilônios já trabalhavam, também existiam tabletes que continham uma espécie de passo a passo para resolução de situações matemáticas, como se fosse uma descrição de procedimentos para resolver determinados tipos de problemas. Após muitos estudos de pesquisadores, como Neugebauer e Van der Waerden, sobre estes tabletes, concluiu-se que, diversos destes problemas eram o que hoje resolvemos com o uso de equações do segundo grau. Segundo Aaboe (1964), apesar de não haver nenhuma fórmula geral ou teorema que generalize a forma de resolução de problemas do segundo grau pelos babilônios, as instruções encontradas nos tabletes são tão específicas que, para o autor, não resta dúvida que se trata de um método algorítmico, com muitas influências vindas da álgebra.

Os problemas a seguir são traduzidos de tabletes babilônios que se encontram no British Museum (tablete BM 13901) e foram retirados do livro de Roque e Carvalho (2012). Utilizaremos estes exemplos para mostrar como Neugebauer, Aaboe, Van der Waerden e demais pesquisadores da época interpretavam a resolução de problemas do segundo grau pelos babilônios. Vale lembrar que utilizaremos a notação com ponto e vírgula para simbolizar a separação entre casas dentro da parte inteira ou da parte fracionária, bem como a vírgula para separar parte inteira da parte fracionária. Por exemplo, 1;2 para representar o número 62 em nosso sistema decimal, ou ainda 0,30 para representar o equivalente a $\frac{1}{2}$ (lembremos que estamos no sistema sexagesimal, logo um inteiro se fraciona em 60 partes).

1- “Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive 0,45. Qual é o lado?”

Este é o problema #1 do tablete citado. Note que, se chamarmos o lado do quadrado de x, esse problema seria facilmente resolvido pela equação do segundo grau $x^2 + x = 0{,}45$, ou seja, uma equação do tipo $Ax^2 + Bx = C$. Por essa visualização ser imediata para qualquer matemático, e outros problemas retirados de tabletes darem margem para esta mesma interpretação, isso fez com que os historiadores concluíssem que a matemática babilônia era basicamente de natureza algébrica (contudo, como dito antes, esta pesquisa opta por chamar de método algorítmico). O passo a passo deduzido pelos pesquisadores para resolver este problema, também retirado do livro de Roque e Carvalho (2012), deixa bem evidente esta natureza algorítmica:

a) Tomar 1;

b) fracionar 1 tomando a metade (=0,30);

c) multiplicar 0,30 por 0,30 (=0,15);

d) somar 0,15 a 0,45 (=1);

e) 1 é a raiz quadrada de 1;

f) subtrair os 0,30 de 1;

g) 0,30 é o lado do quadrado.

Observe que, tomando o problema #1 e sua equação, Roque e Carvalho (2012) acrescentaram em seu livro um roteiro que mostra, de maneira ainda mais clara e geral, como os historiadores antigos concluíram a natureza algébrica da resolução de problemas do segundo grau pelos babilônios, tendo como ponto de partida que eram equações no formato $Ax^2 + Bx = C$. Segue abaixo o roteiro:

1. Multiplicar A por C;
2. Encontrar a metade de B (ou seja, $\frac{B}{2}$);
3. Multiplicar $\frac{B}{2}$ por $\frac{B}{2}$ (ou seja, $(\frac{B}{2})^2$);
4. Fazer$\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC$;
5. Encontrar a raiz quadrada do item 4: ($\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC}$);
6. Desta raiz encontrada acima, subtrair $\frac{B}{2}$;
7. Tomar o recíproco de A (pegar $\frac{1}{A}$);
8. Para encontrar o lado do quadrado, fazer: $\left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \frac{B}{2}\right) \times \frac{1}{A}$.

Algumas observações a respeito desta interpretação de resolução de problemas do segundo grau pelos babilônios:

i) Lembrando, mais uma vez, que estamos lidando com um sistema de numeração sexagesimal, por isso a metade de 1 no procedimento foi 0,30, pois um inteiro se fraciona em 60 partes.

ii) No passo a passo acima, certamente é possível estabelecer um comparativo com a fórmula de Bhaskara. Observe que fazer o passo a passo mostrado acima, seria o equivalente a, tomando x como o valor do lado, fazer:

$$X = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}$$

iii) Ao estabelecer o comparativo acima, é possível que se tenha dúvidas a respeito daquilo que, comparando com a fórmula de Bhaskara, seria semelhante ao Δ: $B^2 + 4AC$. Sabemos que na fórmula de Bhaskara, para achar o valor de Δ, deve-se fazer $B^2 - 4AC$. Essa troca de sinais em comparação com a fórmula desenvolvida muitos anos mais tarde se deve ao fato de que os babilônios lidavam com problemas do segundo grau em que, se estabelecermos uma fórmula geral para as equações tiradas destes problemas, elas seriam no formato $Ax^2 + Bx = C$, como citado anteriormente. Deixando no formato padrão de uma equação do segundo grau, teríamos $Ax^2 + Bx – C = 0$. É sabido que os babilônios não trabalhavam com números negativos, então, na equação $Ax^2 + Bx = C$, o termo C, seria um número positivo. Aplicando isso na fórmula de Bhaskara, observe o desenvolvimento abaixo, que levou autores antigos a concluírem o passo a passo que eles acreditavam que os babilônios utilizavam.

$$Ax^2 + Bx - C = 0$$

$$\Delta = B^2 - 4A(-C)$$

$$\Delta = B^2 + 4AC$$

iv) No primeiro anexo, ao final desta pesquisa, existe uma rápida explicação sobre raízes quadradas na matemática dos povos babilônios.

Para melhor entendimento, é possível resolver o exemplo anterior com os valores sendo convertidos para frações:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

$$AC = 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{B}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} = \sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \left(\frac{B}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}30$$

Observemos, com base na utilização de frações na resolução acima, algumas situações interessantes para entender operações úteis dentro do sistema sexagesimal:

- $1 \div 2 = 0{,}30$
- $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0{,}30 \times 0{,}30 = 0{,}15 = \frac{1}{4}$

Vejamos a seguir, outro problema, o #3, do tablete BM 13901, também retirado do livro de Roque e Carvalho, aqui sendo tratado como exemplo número 2:

2- "Subtraí o terço da área e depois somei o terço do lado do quadrado à área restante: 0,20."

A equação de segundo grau equivalente ao enunciado do problema seria:

$$x^2 - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{3} = 0{,}20$$
$$\frac{2x^2}{3} + \frac{x}{3} = 0{,}20$$
$$0{,}40x^2 + 0{,}20x = 0{,}20$$

Lembrando, mais uma vez que estamos trabalhando com a base sexagesimal, por isso dois terços de 1 seria o equivalente a 0,40.

Seguindo o passo a passo colocado na resolução do problema anterior, que mostra como os antigos historiadores acreditavam que os babilônios resolviam os problemas de segundo grau, a resolução ficará:

$$0{,}40x^2 + 0{,}20x = 0{,}20$$
$$AC = 0{,}40 \times 0{,}20 = 0{,}13;20$$
$$\frac{B}{2} = 0{,}20 \div 2 = 0{,}10$$
$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = 0{,}10 \times 0{,}10 = 0{,}01;40$$
$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC = 0{,}01;40 + 0{,}13;20 = 0{,}15$$
$$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} = \sqrt{0{,}15} = 0{,}30$$

$$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \left(\frac{B}{2}\right) = 0{,}30 - 0{,}10 = 0{,}20$$

$\frac{1}{a} = 1{,}30$ (recíproco de a)

$$\left[\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \left(\frac{B}{2}\right)\right] \times \left(\frac{1}{A}\right) = 0{,}20 \times 1{,}30 = 0{,}30$$

O cálculo acima, pode parecer um pouco confuso, principalmente pela falta de prática com o sistema sexagesimal. Contudo, se torna mais fácil o entendimento se utilizarmos estes números na forma de frações:

$0{,}40x^2 + 0{,}20x = 0{,}20$ é o equivalente a $\frac{2x^2}{3} + \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$.

$$AC = \frac{2}{9}$$

$$\frac{B}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC = \frac{1}{36} + \frac{2}{9} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \left(\frac{B}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{A} = \frac{3}{2}$$

$$\left[\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \left(\frac{B}{2}\right)\right] \times \left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}30$$

Observação: A tradução da resolução do primeiro exemplo, diferente deste segundo, não continha a questão do recíproco, muito provavelmente por não haver necessidade, tendo em vista que o recíproco de 1 seria o próprio 1. Observe, ainda, que o uso de frações possibilita uma melhor visualização do porquê do recíproco de 0,40 ser 1,30. Note que a ideia de números recíprocos seriam dois números cuja multiplicação entre si daria 1. Note, ainda que:

$$0{,}40 = \frac{2}{3}$$

$1{,}30 = \frac{3}{2}$ (um inteiro mais ½)

Logo, $0{,}40 \times 1{,}30 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$.

Vejamos outro problema, retirado do livro de Katz (2010), vindo do tablete BM 13901, sendo, também, resolvido por esta forma que os antigos estudiosos acreditavam ser a forma correta. Segue o enunciado, sendo tratado como exemplo de número 3:

3- "A soma da área de um quadrado e 4/3 do lado é 11/12. Encontre o lado,"

Para maior praticidade, utilizaremos apenas a segunda forma empregada nos exemplos anteriores, com frações e, ao final, converteremos o resultado para o sistema sexagesimal. Utilizando o passo a passo visto anteriormente, temos:

$$x^2 + \frac{4x}{3} = \frac{11}{12}$$

$$AC = \frac{11}{12}$$

$$\frac{B}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC = \frac{4}{9} + \frac{11}{12} = \frac{49}{36}$$

$$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} = \sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{7}{6}$$

$$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \left(\frac{B}{2}\right) = \frac{7}{6} - \frac{2}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\left[\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \left(\frac{B}{2}\right)\right] \times \left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} = 0{,}30$$

Encontrando, já passando para o sistema sexagesimal, 0,30 como lado do quadrado.

Assim, estudiosos antigos, como Neugebauer e Van der Waerden (reforçando, mais uma vez, o destaque para Neugebauer, que foi um dos primeiros a traduzir textos matemáticos da Babilônia, tendo Van der Waerden reafirmado os estudos de Neugebauer), ao fazerem as traduções dos tabletes babilônios, concluíram que a resolução de problemas do segundo grau pelos babilônios tinha caráter algorítmico, devendo-se, muito provavelmente, ao uso, no raciocínio após estudo dos tabletes, dos conhecimentos algébricos adquiridos no decorrer de suas respectivas formações matemáticas.

Contudo, como já dito anteriormente nesta pesquisa, os autores de outrora e os de hoje divergem acerca desta descrição de procedimentos para resolução dos problemas pelos babilônios. Estudos atuais acreditam que os babilônios dispunham de um método mais voltado para a geometria do que para a álgebra, o que também foi dito anteriormente nesta pesquisa, e que será visto nas próximas páginas desta pesquisa.

6. PROBLEMAS DO SEGUNDO GRAU NA BABILÔNIA, DE ACORDO COM TRADUÇÕES ATUAIS

Não se pode negar a importância que os trabalhos e as traduções de Neugebauer e Van der Waerden possuem para os estudos na história da matemática. Sem dúvidas, abriram as portas para estudos mais aprofundados de outros historiadores, o que acabou funcionando como um estímulo para o questionamento dos métodos que eles acreditavam estarem corretos. Por exemplo, como seria possível que a resolução de problemas do segundo grau pelos babilônios fosse de natureza algébrica se eles não trabalhavam com símbolos para incógnitas ou coeficientes? Sem símbolos para incógnitas ou coeficientes, seria impossível trabalhar uma generalização que estabelecesse um método algébrico.

Um outro ponto que os historiadores atuais questionaram (este retirado do livro do Katz, (2010)), está no fato das resoluções dos babilônios para estas equações quadráticas que, geralmente, eram no formato $Ax^2 + Bx = C$. Se buscarmos a resolução destas equações utilizando a fórmula atual para resolução de equações quadráticas, teremos uma solução negativa e outra positiva, no entanto, os babilônios ignoravam as soluções negativas.

Sob a ótica destes questionamentos, historiadores mais atuais começaram a acreditar em propostas um pouco tendenciosas para o lado algébrico no trabalho de Neugebauer e outros historiadores da época em que os problemas de segundo grau na Babilônia passaram a ser estudados (o que, novamente, vale ressaltar que não invalida ou desmerece os estudos destes autores nesta área, pois foram os primeiros a vasculhar este tema na matemática da Babilônia, bem como, foram pioneiros em ter a coragem de afirmar um método utilizado por eles, a partir de estudos e traduções de tabletes). Historiadores atuais, como Hoyrup e Katz, desenvolveram novas traduções (ou no caso do segundo, fez trabalhos em cima de traduções atuais de outros historiadores), nas quais eles nos levam a entender que a natureza da resolução de problemas do segundo grau pelos povos babilônios era, basicamente, geométrica. Havia sim um processo na forma de algoritmo, porém a natureza por trás dele era geométrica. É válido ressaltar que este trabalho envolvendo as novas traduções não foi apenas fruto de interpretação de acordo com historiadores da matemática, mas também de outras áreas. Graças a estes estudiosos e o uso maciço de computadores, é que essa interpretação foi possível (um outro pronto que enaltece o trabalho de Neugebauer que, na época, não tinha como fazer uso da tecnologia nesse trabalho de interpretação). Foram levados em consideração, o significado e uso das palavras em vários contextos, para tentar entender como os babilônios pensavam e usavam as palavras. Vamos resolver a seguir os mesmos problemas trabalhados no capítulo anterior, sob a ótica dos historiadores atuais:

1- *"Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive 0,45. Qual é o lado?"*

Observação: Apenas para mostrar que estamos trabalhando com os mesmos problemas utilizados em capítulos anteriores que foram mantidos os enunciados, pois ao falar de novas traduções das resoluções de problemas de segundo grau nos tabletes babilônios, isto inclui uma nova forma de enxergar o enunciado. Roque e Carvalho traduziram para a língua portuguesa o que viria ser a transcrição de Hoyrup a respeito da natureza geométrica destes tabletes babilônios. Esta nova tradução, retirada do livro de Roque e Carvalho junto com uma observação feita pelos autores a respeito deste enunciado, ficaria da seguinte forma:

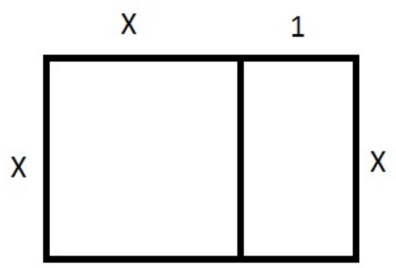
> *"A superfície e a minha confrontação acumulei: obtive 0,45" (estaria suposto que o objetivo era encontrar a confrontação – o lado).* (ROQUE e CARVALHO, 2012, p.24)

Segundo Hoyrup, (2017), a confrontação se refere a um objeto com área e, numericamente, esse valor corresponde ao lado do quadrado, o que nos permite interpretá-la como um retângulo de lados 1 e x.

Escrevendo tal qual uma equação de segundo grau, este enunciado se transformaria na equação $x^2 + x = 0{,}45$.

Segundo as novas traduções, que são aquelas aceitas pelos historiadores como as que os babilônios utilizavam na resolução de problemas do segundo grau, os babilônios trabalhavam com a ideia de área de retângulos para resolver estes problemas. Esta soma entre x^2 e x, nada mais era do que a soma das áreas de um quadrado de lado x e de um retângulo de lados 1 e x.

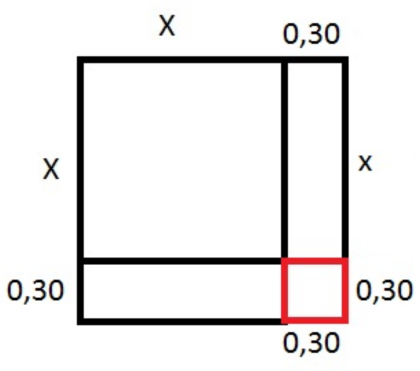
Figura 6 – Resolução 1.1.



Fonte: O autor, 2018.

Para resolver tal problema, segundo as novas traduções, é necessário tornar a figura mais próxima de um quadrado maior, sendo assim, o retângulo de lados 1 e x é cortado ao meio e, uma de suas metades sofre uma rotação e é transportada para a parte inferior do quadrado de lado x, como podemos ver na figura a seguir.

Figura 7 – Resolução 1.2



Fonte: O autor, 2018.

Observe que, após a reorganização das duas metades do retângulo de lados 1 e x, para fechar um quadrado maior, de lados x + 0,30, estas duas metades delimitaram um quadrado de lado 0,30. Trabalhando agora com a ideia da área do quadrado de lado x + 0,30, temos que para achar esta área, utilizaremos a soma das áreas de todos os retângulos de dentro da figura:

$$(x + 0{,}30)^2 = x^2 + 0{,}30x + 0{,}30x + 0{,}15$$

$$(x + 0{,}30)^2 = x^2 + x + 0{,}15$$

Como o enunciado do problema nos dá que $x^2 + x = 0{,}45$, temos:

$$(x + 0{,}30)^2 = 0{,}45 + 0{,}15$$

$$(x + 0{,}30)^2 = 1$$

Assim, o quadrado maior tem área igual a 1. Então, como já é sabido que os babilônios dispunham de meios de resolução de raiz quadrada, inclusive registrados em tabletes, temos que o lado do quadrado maior é igual a 1.

$$x + 0{,}30 = 1$$

Logo, x = 0,30

<u>Observação:</u> É válido ressaltar que, no enunciado, o lado foi chamado de confrontação. Isso porque, para fazer uma confrontação de figuras geométricas, os babilônios utilizaram áreas de figuras planas. Então, utilizando conhecimentos geométricos, transformavam esse segmento de reta L em um retângulo de lados 1 e L. Com isso, essa confrontação de áreas aconteceria. Esta operação de transformar um segmento em um retângulo, foi traduzida pelos autores como “projeção”.

Na resolução do problema foi utilizado o sistema sexagesimal para ficarmos ainda mais familiarizados com o método babilônio de resolução de problemas de segundo grau aceito pelos historiadores atuais.

2- *“Subtraí o terço da área e depois somei o terço do lado do quadrado à área restante: 0,20”*

Do enunciado acima, tiramos a seguinte equação:

$$x^2 - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2x^2}{3} + \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$$

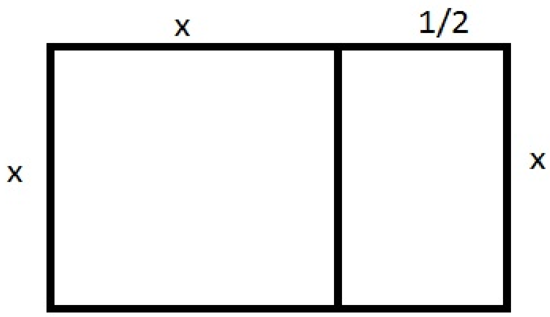
Como observamos no exemplo anterior, o método babilônio atualmente aceito consiste em “completar um quadrado” para encontrar, a partir de sua área, o valor desconhecido. Para tal, se faziam necessárias algumas manipulações para encontrar a resolução, como faremos abaixo na resolução:

$$2x^2 + x = 1$$

$$x^2 + \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

Com isso, podemos formar o quadrado de lado igual a x, e um retângulo de lados iguais a x e ½, para encaminhar a resolução desse problema pelo método atualmente aceito:

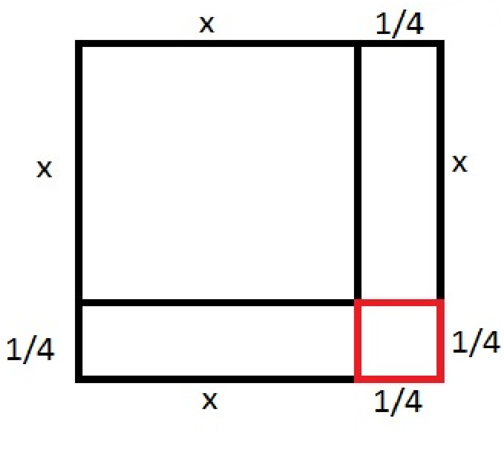
Figura 8 – Resolução 2.1



Fonte: O autor, 2018.

Cortando o retângulo em duas metades e rearranjando estas metades na figura, temos:

Figura 9 – Resolução 2.2



Fonte: O autor, 2018.

Daí tiramos que para calcular a área do quadrado maior, faríamos:

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 = x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}$$

Mas é sabido que:

$$x^2+\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$$

Então:

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{16}$$

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\left(x+\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$x=\frac{1}{2}=0{,}30$$

Logo, o lado do quadrado é igual a 0,30 (já no sistema sexagesimal).

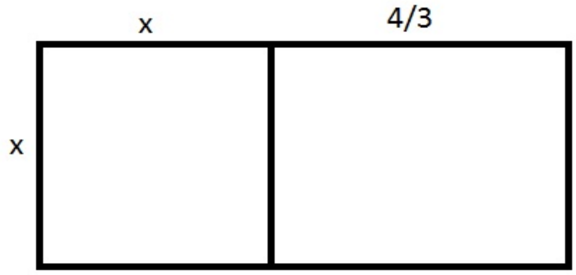
3- "A soma da área de um quadrado e $\frac{4}{3}$ do lado é $\frac{11}{12}$. Encontre o lado,"

Deste enunciado, tiramos a seguinte equação:

$$x^2+\frac{4x}{3}=\frac{11}{12}$$

Representando geometricamente esta equação, com um quadrado de lado x e um retângulo de lados x e $\frac{4}{3}$, teremos a seguinte figura para auxiliar a destrinchar o método babilônio de resolução:

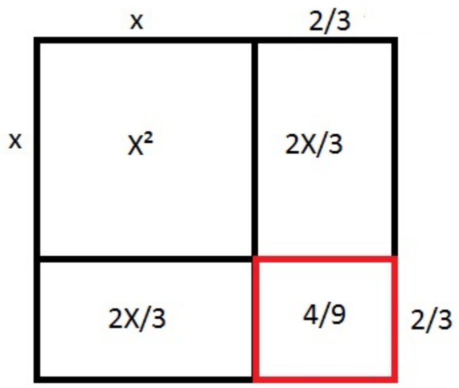
Figura 10 – Resolução 3.1



Fonte: O autor, 2018.

Cortando o retângulo ao meio e rearranjando estas duas metades do retângulo, podemos formar o seguinte quadrado:

Figura 11 – Resolução 3.2



Fonte: O autor, 2018.

Daí, calculando a área do quadrado maior que foi formado, temos:

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 = x^2+\frac{4x}{3}+\frac{4}{9}$$

Da equação que tiramos do enunciado, temos que:

$$x^2+\frac{4x}{3}=\frac{11}{12}$$

Então:

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{11}{12}+\frac{4}{9}$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{49}{36}$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{6}$$

$$x=\frac{7}{6}-\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{3}{6}=0{,}30$$

Logo, já utilizando a notação sexagesimal, temos que o lado do quadrado é igual a 0,30.

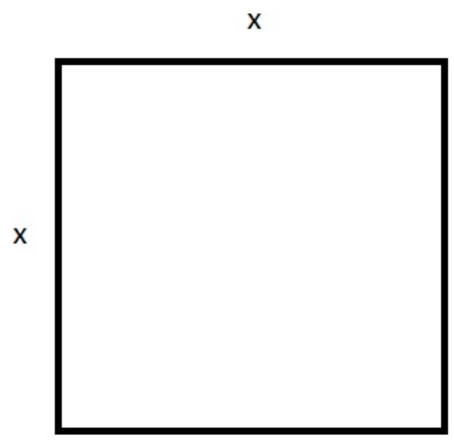
É importante ressaltar que os autores, em sua grande maioria, para mostrar o método de resolução dos babilônios para os problemas de segundo grau, utilizam exemplos nos quais as “equações” (é prudente colocar entre aspas, pois os babilônios não usavam equações propriamente como são escritas nos dias atuais) são todas no formato $ax^2 + bx = c$. No livro do autor alemão Erhard Scholz (1990), é mostrado um caso de resolução dos babilônios para o formato $ax^2 - bx = c$. Para melhor visualização, assim como nos outros casos, será utilizado um exemplo com notação dos dias de hoje e figuras geométricas, mas sempre lembrando que em seus tabletes, os babilônios estariam descrevendo o que acontece na figura geométrica, ao invés de fazer a figura propriamente dita, segundo as novas pesquisas.

4- *Subtraí da área do quadrado o quádruplo de seu lado e obtive 5.*

Esta equação, de acordo com a notação atual, seria $x^2 - 4x = 5$.

Dado um quadrado de lado x:

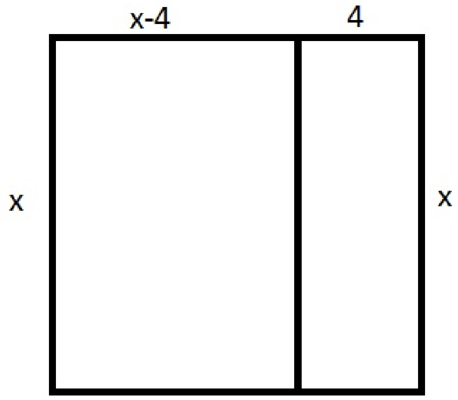
Figura 12 – Resolução 4.1



Fonte: O autor, 2018.

Dividindo este quadrado em dois retângulos (um de lados 4 e x, e o outro de lados x-4 e x), temos:

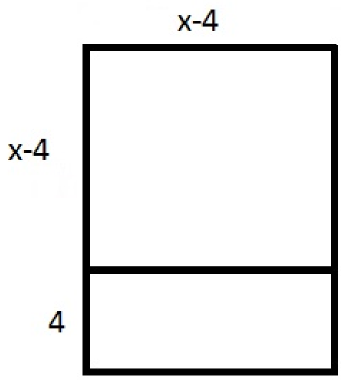
Figura 13 – Resolução 4.2



Fonte: O autor, 2018.

A ideia principal é trabalhar apenas com o retângulo de lados x e x-4 (pois sua área daria $x^2 - 4x$ que é a equação que o problema trabalha. Para isso, tomemos este retângulo e façamos, ainda a seguinte subdivisão nele:

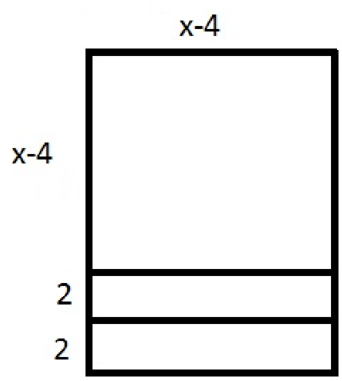
Figura 14 – Resolução 4.3



Fonte: O autor, 2018.

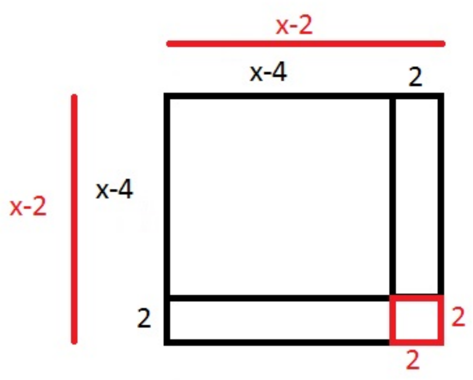
Pelo enunciado, sabe-se que a área deste retângulo é igual a 5. Da figura acima, dividir o retângulo de lados 4 e x-4 em dois retângulos de lados 2 e x-4, obtendo, assim, a seguinte figura:

Figura 15 – Resolução 4.4



Fonte: O autor, 2018.

Figura 16 – Resolução 4.5



Fonte: O autor, 2018.

Daí, tem-se que a área do novo quadrado é a soma da área do quadrado menor (que é igual a 4) com a área do restante (igual a 5):

$$(x-2)^2 = 5+4$$

$$(x-2)^2 = 9$$

$$x-2 = 3$$

Logo, o lado do quadrado procurado no enunciado é igual a 5.

Como dito anteriormente, os livros dificilmente exemplificam um caso diferente do formato $ax^2 + bx = c$, passando a impressão de que os babilônios apenas resolviam problemas de segundo grau de um caso específico. No entanto, eles resolviam outros casos, como mostra Scholz (1990).

Vale ressaltar que os babilônios tratavam o elemento c (na notação de equação do segundo grau dos dias de hoje $ax^2 + bx + c = 0$) como uma solução de uma operação descrita no enunciado do determinado problema (pela notação atual, ficando $ax^2 + bx = c$ ou $ax^2 - bx = c$), e, por ser uma solução, o elemento c sempre era um valor positivo, tendo em vista que os babilônios ignoravam as soluções negativas.

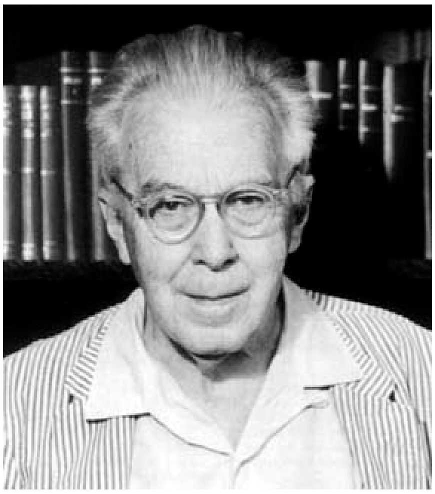
Assim, pelas novas traduções de estudiosos como Hoyrup, temos que a resolução de problemas do segundo grau na Babilônia era de natureza muito mais geométrica do que algébrica, ficando mais do que evidente que, segundo as novas traduções, os babilônios utilizavam o conceito de áreas de quadrados e retângulos em geral, fazendo aquilo que hoje é conhecido informalmente como “completar quadrados”, método este utilizado com frequência em sala de aula pelos professores de Ensino Fundamental e Médio, na resolução de problemas de segundo grau.

7. AS MUDANÇAS COM AS NOVAS TRADUÇÕES

Aos olhos desta pesquisa, à primeira vista, é quase natural que boa parte dos matemáticos que dispusessem de conhecimentos linguísticos capazes de traduzir tabletes babilônios, teriam uma tendência igualmente natural em interpretar de acordo com o que o próprio conhecimento adquirido ao longo da vida acadêmica fosse capaz de mostrar. Bem como, à primeira vista, ao se deparar com uma descrição de procedimentos, torna-se quase inevitável a comparação com uma espécie de algoritmo algébrico. Estas tendências aliadas, muito provavelmente, a interpretação pessoal da linguagem, sem dúvida, são as responsáveis pela interpretação de um método algorítmico de caráter algébrico na resolução dos problemas de segundo grau na Babilônia.

Vale ressaltar mais uma vez que, apesar dos historiadores atuais divergirem da utilização deste método, o mérito do pioneirismo nessa área, por parte destes estudiosos antigos, ninguém tira. Ao abrir as portas para estes estudos dos problemas do segundo grau na Babilônia, eles possibilitaram novas interpretações dos tabletes babilônios, o que trouxe aprofundamento do estudo da matemática babilônia, bem como aprofundamento da análise da escrita babilônia (afinal, para tal, era necessário interpretar para fazer uma tradução). Que fique registrado nesta pesquisa este justo reconhecimento a Neugebauer e outros especialistas em história da matemática.

Figura 17 – Otto Neugebauer



Fonte:http://www.apprendre-math.info/history/photos/Neugebauer_3.jpeg

Entretanto, como dito no início desta pesquisa, a história da matemática é uma área mutável. Cada novo estudo iniciado funciona como a abertura de um “leque” de possibilidades, principalmente se fizer uso de registros históricos de povos antigos. Novos tabletes descobertos ou, simplesmente, maneiras diferentes de interpretar um tablete já conhecido, podem mudar a forma de enxergar determinada interpretação, determinado método de resolução ou procedimento.

Foi assim com a resolução de problemas do segundo grau por parte dos babilônios. Ao se aprofundarem mais neste estudo, os novos historiadores trouxeram a interpretação de que aquele procedimento não era um algoritmo semelhante à resolução com a fórmula de Bhaskara, mas sim uma descrição do que estava acontecendo em uma figura geométrica. Enquanto Neugebauer e demais historiadores antigos acreditavam que os babilônios apenas utilizavam conceitos geométricos para ilustrar a situação-problema, Hoyrup e outros historiadores atuais acreditam que os babilônios utilizavam estes conceitos geométricos não apenas ilustrando a situação-problema, mas também na aplicação de procedimentos geométricos para a resolução da mesma.

Esta mudança de interpretação torna-se ainda mais evidente, quando comparamos afirmações de pesquisadores antigos e atuais: “O fato de que nos é pedido que adicionemos áreas e comprimentos mostra claramente que nenhuma situação geométrica real está sendo considerada. Em verdade, o termo “quadrado” não possui nenhum significado geométrico a mais do que o usado em nossa álgebra” (AABOE,1964).

> à primeira vista, pode parecer que a enunciação do problema não é de caráter geométrico, uma vez que somos levados a adicionar um múltiplo de um lado a uma área. Mas a linguagem geométrica da solução parece indicar que este múltiplo deve ser considerado como um retângulo com comprimento x e largura 4/3, um retângulo que é acrescentado ao quadrado de lado x. De acordo com esta interpretação, o procedimento equivale a cortar metade do retângulo a partir de um lado do quadrado e a movê-lo para a parte inferior. Ao acrescentar um lado do quadrado de lado b/2, “completa-se o quadrado”. Torna-se, então, evidente que o comprimento desconhecido x é igual à diferença entre o lado do novo quadrado e b/2. (KATZ,2010, p. 50)

Note que Katz refere-se ao terceiro exemplo utilizado nesta pesquisa.

É interessante ressaltar que os historiadores atuais não refutam que no método de resolução existe um algoritmo, inclusive destacando a semelhança dele com a fórmula de Bhaskara. Contudo, justificam este algoritmo como um argumento geométrico. Segundo Katz (2010), este algoritmo não tinha o mesmo significado para os escribas babilônios que tem para os matemáticos atuais. Fato é que os historiadores atuais admitem sim a existência de um algoritmo, porém um algoritmo que descreve uma resolução de caráter geométrico, e não voltada para a Álgebra Antiga. Esta é a principal mudança vinda das novas traduções.

8. SEMELHANÇAS COM O MÉTODO BABILÔNIO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO SEGUNDO GRAU POR AL-KHWARIZMI E BHASKARA

Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi foi um matemático islâmico que viveu entre os séculos VIII e IX, cujo nome possui o fato curioso de ter originado as palavras algarismo e algoritmo. Al-Khwarizmi é, sem dúvida, um dos principais nomes da matemática do mundo árabe. Matemática esta que possui muitas contribuições, principalmente no campo da álgebra. Os árabes tiveram muitas influências da matemática grega e babilônia. Da parte dos babilônios, os algoritmos de resolução de problemas do segundo grau já existentes, assim como outras regras. Da parte dos gregos, principalmente, por conta da ideia de prova, de que um problema não estaria totalmente resolvido se não pudesse ser feita uma demonstração válida daquela solução, uma generalização (esta linha de pensamento retrata como os autores atuais resumem a ideia de matemática segundo os gregos). Para fazer estas demonstrações, a matemática árabe buscou explicar as regras algébricas a partir da geometria.

É interessante ressaltar que a própria palavra "álgebra" tem origem de um texto de al-Khwarizmi.O texto "Al-Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabrwa-l-muqabala" (que se lê "o tratado sobre o cálculo de al-Jabr e al-Muqabala" segundo Roque e Carvalho(2012)) traz a origem da palavra "álgebra", como se pode ver em Katz (2010):

> termo 'al-Jabr' pode ser traduzido como 'restauro' e refere-se à operação de 'transpor' uma quantidade subtraída num membro de uma equação, para outro membro, onde se torna numa quantidade aditiva. A palavra al-Muqabala pode ser traduzida como 'comparação', e refere-se à redução de um termo positivo subtraindo valores iguais em ambos os membros de uma equação. Assim, a conversão de $3x + 2 = 4 - 2x$ a $5x + 2 = 4$, é um exemplo de al-Jabr, e a conversão da última para $5x = 2$ é um exemplo de al-Muqabala. A nossa palavra 'álgebra' é uma forma corrompida da árabe al-Jabr. Veio a ser usada quando este e outros tratados semelhantes foram traduzidos para latim. Nenhuma tradução foi feita da palavra al-Jabr que, assim, foi adotada como o nome desta ciência. (KATZ, 2010, p. 304)

Ainda segundo Katz (2010), al-Khwarizmi pretendia, com este tratado, escrever um manual de procedimentos algébricos, com ênfase mais na parte prática do que na parte teórica. Contudo, as influências gregas lhe fizeram buscar demonstrações e provas para suas resoluções. Demonstrações estas de natureza geométrica, cujo argumento era muito semelhante ao dos babilônios, segundo Katz.

É válido destacar que al-Khwarizmi, assim como os babilônios, não utiliza símbolos para incógnitas ou coeficientes, sua linguagem é composta essencialmente por palavras. Porém, ele padroniza algumas palavras relacionadas a objetos que aparecem nos problemas de segundo grau. Observe, a tabela a seguir que, segundo Roque e Carvalho (2012, p. 199), mostra as principais palavras utilizadas para definir termos de uma equação do segundo grau:

Tabela 1 –Palavras utilizadas por Al-Khwarizmi

Palavra	Significado	Sentido nos problemas	Notação moderna
Adad		Quantidade conhecida (número dado)	c
Jidhr	“raiz”	Quantidade desconhecida	x
Mal	“tesouro”	Quadrado da quantidade desconhecida	x^2

Fonte: ROQUE, CARVALHO, 2012, p. 199

Além disso, um termo árabe, cujo significado seria a palavra “coisa”, também era utilizado, para reforçar a ideia de incógnita ou valor desconhecido, pois esta palavra estaria ligada a “indefinição”.

Segundo Roque e Carvalho (2012), al-Khwarizmi resolve problemas, cujas “equações” (entre aspas, pois na época ainda não havia esse tipo de generalização) eram divididas em seis casos diferentes:

I. $ax^2 = bx$
II. $ax^2 = c$
III. $bx = c$
IV. $ax^2 + bx = c$
V. $ax^2 + c = bx$
VI. $bx + c = ax^2$

Pegando o quarto caso como exemplo, em Roque (2012), a autora utiliza o exemplo a seguir:

“um Mal e dez Jidhr igualam 39 dinares” (ROQUE, 2012, p. 252)

Utilizando uma notação mais atual, seria o equivalente a fazer:

$$x^2 + 10x = 39$$

Ainda em Roque (2012), a autora coloca a resolução como um algoritmo descrito da seguinte forma:

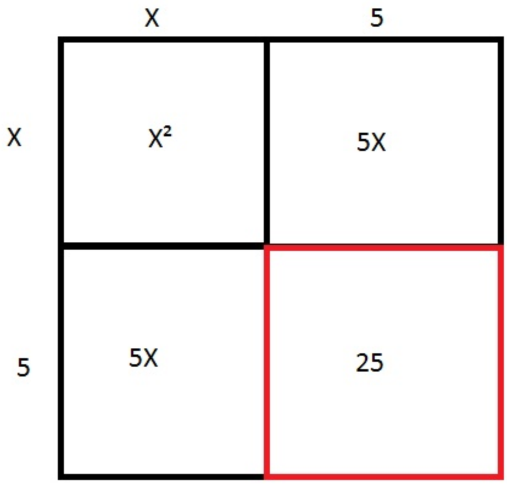
- *Tome a metade da quantidade de Jidhr (que neste exemplo é 5)*
- *Multiplique esta quantidade por si mesma (obtendo 25)*
- *Some no resultado os Adad (fazemos 39+25=64)*
- *Extraia a raiz quadrada do resultado (que dá 8)*
- *Subtraia desse resultado a metade dos Jidhr, encontrando a solução (8-5=3)*

Observe que este procedimento é muito semelhante àquele descrito por Neugebauer, como o método antigo de resolução de problemas de segundo grau pelos babilônios, pois é o equivalente a fazer $-\frac{B}{2}+\sqrt{\frac{B^2}{4}+C}$. Apesar de parecer basicamente algorítmico, a álgebra de Al-Khwarizmi buscava explicações na geometria. Não à toa, Al-Khwarizmi acrescenta em seu tratado algo semelhante a esta parte retirada de Roque (2012, p. 253):

“*A figura para explicar isto é um quadrado cujos lados são desconhecidos.”*

Ou seja, seria o equivalente a fazer um quadrado cuja área seja o quadrado da raiz procurada, junto com dois retângulos iguais, cujos lados são a raiz e metade de Jidhr (ou seja, 5). Esta figura possui área igual a 39, que, completando o quadrado, teremos uma figura de área igual a 64, como podemos ver na figura abaixo:

Figura 18 – Resolução por Al-Khwarizmi



$$(X+5)^2=X^2+10X+25$$
$$(X+5)^2=39+25$$
$$X+5=8$$
$$X=3$$

Fonte: O autor, 2018.

Segundo Roque (2012), Al-Khwarizmi trouxe um algoritmo de resolução para problemas do segundo grau, justificado por procedimentos geométricos, completando quadrados, tal qual os babilônios.

É importante salientar que, tal qual os babilônios faziam, os valores do que hoje conhecemos como coeficientes eram sempre positivos, bem como as soluções, assim como não eram utilizados símbolos para as operações. O fato de as soluções serem positivas já dá claros indícios do desconhecimento dos números negativos por parte de Al-Khwarizmi, tal qual os babilônios.

Embora seja evidente a semelhança da forma de resolução de Al-Khwarizmi com a forma de resolução dos babilônios, não é possível afirmar que a resolução de Al-Khwarizmi tenha sido influenciada pela forma de resolução dos babilônios, devido à falta de evidências que mostrem influências diretas de uma cultura para outra.

Saindo do período entre os séculos VIII e IX e entrando no século XII, é possível encontrar outro matemático cujo método de resolução de problemas do segundo grau é muito semelhante ao dos babilônios: o indiano Bhaskara.

Neste período, ainda não se escreviam equações, com incógnitas e coeficientes como nos dias de hoje. Segundo Roque (2012), até havia símbolos e formas de representar incógnitas, porém não havia símbolos que representassem coeficientes de uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$. Então, nesta época, as equações eram descritas com palavras.

O método é o mesmo utilizado por al-Khwarizmi para justificar sua resolução, e, por consequência, também é muito semelhante ao método babilônio, como podemos ver neste trecho de Roque (2012, p. 242):

> *"De forma geral, o método de resolução consiste em: completar o quadrado no primeiro membro para tornar o termo contendo a quantidade desconhecida e seu quadrado um quadrado perfeito; diminuir o grau da equação extraindo a raiz quadrada dos dois membros; resolver a equação do primeiro grau que daí resulta."*

Em outras palavras, se tivéssemos a equação $x^2 - 4x = 5$, seria o equivalente a fazer:

$$x^2 - 4x + 4 = 5 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 9$$

$$x - 2 = 3 \text{ ou } x - 2 = -3$$

Nos dias de hoje, com todos os conhecimentos relativos aos números reais, teríamos duas soluções, uma positiva e outra negativa (neste caso, seriam $x = 5$ ou $x = -1$). Porém, tal qual os babilônios, Bhaskara aceitava apenas as raízes positivas. Contudo, segundo Katz (2010), quando havia duas soluções positivas, Bhaskara considerava as duas soluções.

Assim como acontece com al-Khwarizmi, não é possível afirmar que o método babilônio tenha influenciado diretamente a resolução de problemas de segundo grau por Bhaskara (nenhum livro consultado para esta pesquisa deixou isto claro), porém as semelhanças são visíveis, o que mostra o quão a frente de seu tempo eram os babilônios.

CONCLUSÃO

Diante de todas as fontes consultadas, todo material encontrado e pesquisado, primeiramente, acredito que foi possível elaborar um trabalho que pode contribuir como fonte de pesquisa para estudos relacionados à matemática dos babilônios, tendo em vista a grande quantidade de leituras confiáveis e autores consagrados na área da história da matemática.Com a utilização de símbolos e notações atuais, acredita-se que esta pesquisa conseguiu mostrar um pouco dos conhecimentos matemáticos dos babilônios, seu sistema de numeração e suas formas de resolver operações.

Foi possível, também, perceber o quanto a história da matemática é uma área em que, como dito anteriormente, há mudanças importantes, sejam por novas descobertas ou reinterpretação de fatos já existentes, pois cada uma destas, pode mudar a forma de se enxergar determinado conceito ou forma de pensar de um povo. O ponto central desta pesquisa tratou sobre isso e acredita-se que pôde ser colocada, de maneira clara, a importância tanto dos antigos historiadores (que abriram as portas para que os estudos sobre problemas do segundo grau na Babilônia pudessem ser iniciados e aprofundados, e mesmo tendo seus métodos hoje em dia não mais aceitos, possuem o mérito do pioneirismo) quanto dos novos historiadores (que aprofundaram os estudos em cima dos tabletes babilônios e abriram as mentes das pessoas para novos conceitos, trazendo novas possibilidades de pesquisa).Ao comparar os estudos dos antigos historiadores, como Neugebauer, e dos novos estudiosos, como Hoyrup, fica claro que são pesquisas que se completam. Sem os primeiros estudos, a possibilidade de não haver novos estudos com novas ideias a respeito da resolução de problemas do segundo grau pelos babilônios é muito grande. E quem sabe, daqui para a frente, se não surgirão novas ideias que refutarão as pesquisas atuais? Por ser mutável, a história da matemática permite que novos questionamentos venham a surgir e apenas se tem a ganhar com isso.

Por fim, ao retornar à forma de como esta pesquisa surgiu, acredito que a história da matemática pode (e deve) ser utilizada como ferramenta para enriquecimento de uma aula de matemática, pois torna a aula mais completa e traz novos atrativos e possibilidades para os alunos, fazendo com que a aula não fique “engessada” apenas no manuseio de fórmulas e linguagem matemática, despertando uma curiosidade maior no aluno, bem como o interesse em acompanhar aquele assunto (que é sempre um desafio para o professor de matemática). A matemática e as futuras gerações de alunos agradecem.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. *Episódios da história antiga da matemática*. Tradução de João Bosco Pitombeira deCarvalho.3. ED. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ARAGÃO, M. J. *História da Matemática*. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2009.

CARVALHO, J. B.P. *Três excursões pela História da Matemática*. Rio de Janeiro: Intermat, 2008.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

HOYRUP, J. *Algebra in cuneiforme: Introduction to an old Babylonian geometrical technique*. Berlin: Edition Open Access, 2017.

KATZ, V. *História da Matemática*. 2. ed. Lisboa: Fundação Kalouste Gulbenkian, 2010.

NEUGEBAUER, O. *The Exact Sciences in Antiquity*. 2.ed. New York: Dover Publications, 1969.

ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo lendas e mitos*. 3ª. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

ROQUE, T. e CARVALHO, J. B. P. *Tópicos de História da Matemática*. 1ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SCHOLZ, E. *Geschichte der Algebra: Eine Einführung*. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1990.

Van der WAERDEN, B.L. *Science Awakening*. 2. ed. New York: Oxford University Press, 1961.

TINOCO, L. *Álgebra: pensar, calcular, comunicar.*2. ED. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2011.

MUNDO EDUCAÇÃO. Rede Omnia, Goiânia -GO. Disponível em: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-babilonico.htm>. Acesso em 15 out. 2017.

FISIKLAIN. Google Sites. *Matemática babilônica*. Disponível em: <https://sites.google.com/site/fisiklain/home/1/matematica-babilonica> Acesso em 08 ago. 2017.

CASSELMAN, B. *YBC 7289.* Yale Babylonian Collection. Disponível em: <https://www.math.ubc.ca/~cass/euclid/ybc/ybc.html>Acesso em 14 jul. 2017

MICHAELIS ONLINE. UOL. Editora Melhoramentos, 2018. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/%C3%A1lgebra/> Acesso em 12 jan. 2018.

SÓ MATEMÁTICA. Virtuous. Porto Alegre-RS. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/algebra.php> Acesso em 21 mai. 2017.

DICIONÁRIO ETIMOLÓGICO: etimologia e origem das palavras. 7Graus. Leça do Balio. Disponível em: <http://www.dicionarioetimologico.com.br/matematica/>Acesso em 12 mar. 2017.

ANEXO: Raízes quadradas na Babilônia

Segundo Katz (2010), dentre os inúmeros tabletes que os babilônios possuíam com tabuadas e outras soluções de operações cotidianas, alguns possuíam diversas raízes quadradas, números elevados ao quadrado e outras potências. Sendo assim, surgindo a necessidade de um cálculo envolvendo raízes quadradas, estes tabletes certamente possuíam as soluções na forma de números racionais. Existem, também, tabletes em que os babilônios trabalham com raízes não exatas, por exemplo, com o valor de 1;24,51,10 para representar uma aproximação para a raiz quadrada de 2. Não há nenhum tablete que registre como foi feito este cálculo, mas é possível ver, no tablete YBC 7289, que eles tinham certeza desta aproximação.

Figura 19 – Tablete YBC 7289

Fonte: https://www.math.ubc.ca/~cass/euclid/ybc/ybc.html

Neste tablete, é possível visualizar um quadrado com lado igual a 30 e os números 1;24,51,10 e 42;25,35. O produto de 30 por 1;24,51,10 dá exatamente 42;25,35. Assim, Katz (2010) afirma, e qualquer um poderia supor, que 42;25,35 é o comprimento da diagonal e 1;24,51,10 é o valor da raiz quadrada de 2.

Katz e outros estudiosos acreditam que os babilônios dispunham de um método que permitia encontrar aproximações de raízes irracionais. Este método consistiria em um algoritmo desenvolvido a partir de um quadrado de área igual k, em que seu lado seria a raiz quadrada de k. E, tal qual as raízes exatas, os valores de raízes não exatas também eram registrados em tabletes pelos babilônios, como dito anteriormente, para eventuais usos e consultas quando necessário para resolução de determinados problemas que fizessem uso de raízes.