Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Nelson Garcez Lourenço

Inequações: Uma abordagem funcional gráfica para o Ensino Fundamental II

Rio de Janeiro
2018

Nelson Garcez Lourenço

Inequações: Uma abordagem funcional gráfica para o Ensino Fundamental II

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luiz Silva

Rio de Janeiro

2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

L892 Lourenço, Nelson Garcez
Inequações: uma abordagem funcional gráfica para o ensino fundamental II / Nelson Garcez Lourenço. - 2018.
121f. : il.

Orientador: Sérgio Luiz Silva
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Matemática (Ensino fundamental) - Estudo e ensino - Teses. 2. Álgebra - Teses. I. Silva, Sérgio Luiz. I. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. II. Título.

CDU 51:37

Patricia Bello Meijinhos - CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Nelson Garcez Lourenço

Inequações: Uma abordagem funcional gráfica para o Ensino Fundamental II

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 29 de Agosto de 2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Sérgio Luiz Silva (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof.ª Dra. Claudia Ferreira Reis Concordido
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Jaime Velasco Câmara da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Ronaldo da Silva Busse
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Rio de Janeiro

2018

DEDICATÓRIA

Dedico este estudo à memoria de minhas avós, Maria Rita De Cácia e Maria Amélia, que muito se orgulhariam em vivenciar este momento. Ao meu pai que nunca mediu esforços para me ajudar a alcançar meus objetivos, minha mãe por sempre cuidar e acreditar em mim, a minha madrinha pelo amor incondicional, minha esposa pelo companheirismo, compreensão e carinho e aos meus filhos.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais pela educação e dedicação para que eu conseguisse alcançar meus objetivos.

Aos meus irmãos Raphael Garcez Lourenço, Yanka Garcez Lourenço e Renata Waleska por sempre acreditarem no meu potencial.

À minha esposa e filhos pela compreensão, pelo carinho e suporte. Aproveito para me desculpar pelos momentos de ausência para que pudesse concluir este trabalho.

Ao meu Orientador Sérgio Luiz Silva, sempre muito atencioso e por ser um professor espetacular.

À CAPES pela bolsa cedida ao longo do curso, bolsa essa que possibilitou a realização do Mestrado.

Aos grandes amigos que fiz ao longo do Mestrado, sem a ajuda e o companheirismo deles, com certeza o caminho seria mais penoso. Bruno Guimarães, Marcelo Tobias e Thiago Borges.

Ao Roberto Nascimento grande companheiro de turma, sempre disposto a ajudar.

A todos os professores que ministraram as aulas durante o Mestrado.

Aos professores que colaboraram respondendo o questionário presente neste trabalho.

À minha diretora Mônica Pereira pelo apoio, carinho e compreensão.

Enfim, a todos que de alguma maneira fizeram parte de mais essa conquista em minha vida.

A suprema arte do professor é despertar a alegria na expressão criativa do
conhecimento, dar liberdade para que cada estudante desenvolva
sua forma de pensar e entender o mundo, assim criamos pensadores,
cientistas e artistas que expressarão em seus trabalhos
aquilo que aprenderam com seus mestres.
Albert Einstein

RESUMO

LOURENÇO, N. L.*Inequações: Uma abordagem funcional gráfica para o Ensino Fundamental II*. 2018. 121 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística
, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

Trata-se de uma abordagem funcional gráfica para o Ensino Fundamental II para o ensino de inequações visando melhorar o processo de ensino-aprendizagem das inequações do 1° grau com uma variável. Esta sequência propõe um ensino mais criterioso das inequações, além de incentivar a utilização de mais de uma representação semiótica, do tratamento e a conversão de registros de representações, com o objetivo de colaborar na apreensão do objeto em estudo. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval foi utilizada como referencial teórico para elaboração de uma sequência didática que explore o tratamento e a conversão do conceito matemático. Constatou-se que alguns professores incentivam os alunos a resolverem as inequações da mesma forma que são resolvidas as equações dando destaque apenas à mudança de sinal da desigualdade quando a multiplica por (-1). Este tipo de abordagem traz prejuízos no processo de ensino-aprendizagem dos alunos e inclusive alguns professores também comentem equívocos ao relacionarem equações e inequações. Sendo assim, são necessários mais investimentos na capacitação de professores, um ensino mais criterioso das inequações, a diversificação de tipos de representações semióticas na apresentação do conteúdo abordado e materiais didáticos que possibilitem uma análise além do tratamento estritamente algébrico para o ensino das inequações.

Palavras-chave: Inequações. Desigualdade. Análise Gráfica. Geogebra.

ABSTRACT

LOURENÇO, N. L.*Inequations: A Functional Graphical Approach to Elementary Education.* 2018. 121 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística
, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

This is a graphical functional approach to Elementary Education for teaching inequalities to improve the teaching-learning process of inequalities of 1° degree with a variable. This sequence proposes a more rigorous teaching of inequalities, besides encouraging the use of more than one semiotic representation, of the treatment and the conversion of records of representations, with the objective of collaborating in the apprehension of the object under study. Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Registers was used as a theoretical reference for the elaboration of a didactic sequence that explored the treatment and the conversion of the mathematical concept. It was found that some teachers encourage students to solve inequalities in the same way that inequalities are solved, highlighting only the change in the sign of inequality when multiplied by (-1). This type of approach brings losses in the teaching-learning process of the students and even some teachers also comment misconceptions when relating equations and inequalities. Thus, more investments are needed in the training of teachers, more careful teaching of inequalities, the diversification of types of semiotic representations in the presentation of the content addressed and didactic materials that allow an analysis in addition to the strictly algebraic treatment for the inequalities teaching.

Keywords: Inequations. Inequality. Graphic Analysis. Geogebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A produção do conhecimento, assim como o processo de ensinar são dinâmicos e passam por transformações e adequações pertinentes aos novos cenários, novas demandas, assim como aos novos desafios que chegam às escolas. A presente dissertação surge como uma proposta reflexiva e propositiva acerca do ensino-aprendizagem das inequações nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Para isso, levou-se em consideração a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (DUVAL, 2009) como justificativa para uma abordagem funcional gráfica, uma vez que os livros didáticos analisados e os cadernos pedagógicos utilizados pela Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro utilizam-se apenas da abordagem algébrica na resolução das inequações. Os planejamentos acadêmicos das escolas, inclusive da Rede Municipal do Rio de Janeiro, destinam um prazo muito curto para o tratamento deste conteúdo, espremendo-o entre equações e sistemas de equações do primeiro grau, tais fatos atrelados a uma abordagem estritamente algébrica trazem prejuízos ao processo de ensino-aprendizagem das inequações, acarretando em uma relação equivocada nos conceitos de equações e inequações.

Tem-se a preocupação, também, de mostrar para os professores a importância de um maior cuidado e um ensino mais criterioso deste conteúdo. A tese de doutorado em educação matemática de Vera Helena Giusti de Souza em 2007, pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (SOUZA, 2007), mostra em sua pesquisa que alunos do curso de licenciatura em matemática apresentam dificuldades na resolução das inequações e que, inclusive, permanecem cometendo equívocos ao utilizarem os mesmos procedimentos usados na resolução de equações para resolverem inequações, desconsiderando as particularidades das propriedades de cada conceito. É preciso conscientizar os professores da importância de um processo de ensino-aprendizado criterioso, principalmente nas séries iniciais, visando uma apreensão mais eficiente do conceito das desigualdades.

Inspirado na pesquisa da autora supracitada foi elaborado um questionário visando verificar o tipo de abordagem utilizada pelos professores para o processo de ensino-aprendizagem do objeto em estudo e com duas perguntas que mostrariam se os mesmos também cometeriam equívocos ao relacionarem os métodos de resolução de equações e inequações.

Neste trabalho, propõe-se um novo modelo de planejamentos acadêmicos, permitindo que o ensino de inequações não mais esteja compreendido entre os conceitos de equações e sistemas de equações do 1° grau, além de uma proposta que visa uma apreensão mais ampla de tal conteúdo, possibilitando que o aluno seja capaz de realizar conversões, tais como, da linguagem materna para algébrica, da linguagem algébrica para gráfica, entre outras. E desta forma, minorar os equívocos nas conexões entre equações e inequações.

Baseado na leitura do livro "Como elaborar projetos de pesquisa", pode-se destacar a seguinte passagem sobre classificações dos tipos de pesquisa de acordo com Gil,

> A classificação dos tipos de pesquisa só é possível mediante o estabelecimento de um critério. Se classificarmos as pesquisas levando em conta o nível de profundidade do estudo, teremos três grandes grupos: pesquisa exploratória, pesquisa descritiva e pesquisa explicativa. Se classificarmos as pesquisas levando em conta os procedimentos utilizados para coleta de dados teremos dois grandes grupos. No primeiro, as que se valem de fontes de papel: pesquisa bibliográfica e documental e, no segundo, fontes de dados fornecidos por pessoas: experimental, estudo de caso controle, levantamento e o estudo de caso e estudo de campo (GIL, 2002, p. 43).

Desta forma, pode-se definir a pequisa como bibliográfica, documental e de levantamento, pois realizou-se um amplo estudo dos documentos legais como a Base Nacional Comum Curricular, as Orientações Curriculares do Município do Rio de Janeiro, além de algumas teses de Mestrado e Doutorado e algumas publicações que serão citadas no primeiro capítulo, além de um questionário com objeto de perceber como os professores abordam o conceito de inequações.

A partir da revisão da literatura existente e de uma análise qualitativa dos documentos legais propõe-se uma sequência didática que visa melhorar o processo de ensino-aprendizagem do objeto em estudo.

No primeiro capítulo destaca-se a importância do ensino das desigualdades, já que esta permeia vários ramos da matemática, além das outras áreas de estudo, tais como, as sociais e econômicas. As desigualdades auxiliam a reconhecer e expressar regularidades, interpretar gráficos e tabelas, entre outras aplicações.

Apresenta-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, já que esta obra tem servido como base de diversas pequisas realizadas no Brasil devido à grande contribuição nos estudos sobre aprendizagem em Matemática. Desta forma, esta teoria é utilizada como referencial teórico, além de sustentar a proposta da sequência didática desta pesquisa.

Após esta apresentação realiza-se uma breve análise da abordagem dos livros didáticos e de alguns professores sobre as inequações. Observou-se que, tanto os livros didáticos quanto o planejamento da maioria dos professores analisados, tratam tal conteúdo de forma superficial, sem explorar as conversões e, desta forma, contribuindo para o estabelecimento de conexões equivocadas de equações e inequações.

Ao final deste capítulo, apresentou-se a análise dos parâmetros legais, tais como, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), as Orientações Curriculares da Prefeitura do Rio de Janeiro e a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), além de uma revisão bibliográfica evidenciando a preocupação em melhorar o processo de ensino-aprendizagem das desigualdades.

No segundo capítulo, destacam-se algumas importantes desigualdades posto que não foi possível identificar o período no qual surge seu estudo. O Problema de Dido, a Desigualdade Triangular, Desigualdade de Bernoulli e a Desigualdade das Médias são as desigualdades apresentadas nesta pesquisa. Apontou-se o momento histórico, a demonstração algébrica e a análise gráfica de cada uma dessas desigualdades. Logo após, definem-se desigualdades e inequações, além de apresentar suas propriedades.

Como a proposta da sequência didática envolve a utilização do *software* Geogebra, faz-se uma apresentação desta calculadora gráfica e um breve relato sobre a importância do uso da tecnologia no ensino da Matemática.

No terceiro capítulo apresenta-se a sequência didática para o ensino de inequações nas séries iniciais do Ensino Fundamental II. A proposta está dividida em 8 atividades. Na primeira atividade, sugere-se uma discussão a partir de diversos prismas sobre o conceito das desigualdades. Desta forma, propicia-se uma perspectiva interdisciplinar permitindo que outras áreas do conhecimento, como história, literatura, sociologia, contribuam com uma discussão mais ampla do conceito de desigualdades. Para estimular esse momento reflexivo propõe-se a utilização de textos, charges e vídeos que abordem temas como desigualdades sociais, raciais, desigualdades de gêneros entre outras. Após a discussão, os alunos são levados a representar numa balança de dois pratos algumas situações que podem ser encontradas no texto proposto.

Na segunda atividade define-se o conceito de desigualdade e suas propriedades. A comparação de números reais, por exemplo, auxilia no melhor entendimento da utilização dos símbolos de $<, >, \geq$ e $\leq$. É importante traçar um paralelo com as igualdades para que os alunos percebam as particularidades de cada um dos conceitos. Na terceira atividade inicia-se o desenvolvimento das capacidades de tratamento e conversão, permitindo que o aluno seja capaz de interpretar e reescrever, além de realizar conversões, tais como, da linguagem materna para algébrica, da algébrica para linguagem gráfica, entre outras. Como as conversões não ocorrem naturalmente por parte dos alunos, é importante que o professor assuma o papel de mediador para estimular o desenvolvimento desta capacidade. Para mediar este estímulo são propostos dois problemas, onde o primeiro visa estimular o tratamento e o segundo, a conversão da linguagem materna para algébrica.

A quarta atividade pretende capacitar os alunos na conversão da linguagem materna para linguagem algébrica e inteirá-los de que quando uma desigualdade apresenta uma parte literal, esta é denominada inequação. Então, a partir daí, define-se o conceito de inequação. Para isso, sugere-se um terceiro problema no qual, além do tratamento, o aluno deve fazer a conversão para representar algebricamente a inequação que representa a situação descrita no problema. Na atividade de número cinco deseja-se que o aluno seja capaz de resolver algebricamente uma inequação, portanto são apresentadas as possíveis soluções, no conjunto dos números naturais, do problema anterior a partir de uma tabela para que sejam testados valores que tornam a inequação verdadeira. Em seguida, apresentam-se as propriedades das desigualdades para que o aluno esteja apto a resolver as inequações a partir de um tratamento algébrico.

Na sexta atividade inicia-se o processo de capacitação de uma análise gráfica das inequações. Num primeiro momento, aconselha-se um problema onde o aluno deve analisar um gráfico e seja convidado a realizar a conversão da linguagem gráfica para linguagem materna. Já na atividade de número sete, pretende-se introduzir a utilização do *software* Geogebra na análise gráfica de uma situação envolvendo as inequações. E para finalizar a sequência didática, a atividade oito sugere uma dinâmica com o Geogebra para capacitar o aluno a resolver graficamente uma inequação de primeiro grau. E desta forma, minorar os equívocos ao relacionarem equações e inequações.

1 APRESENTAÇÃO

1.1 A importância do ensino de inequações

As desigualdades desempenham um papel muito importante em vários ramos da Matemática, como na Álgebra, Trigonometria, Programação Linear, Cálculo, Geometria, entre outros. Sendo usadas para comparar medidas de diversas naturezas que possuem algum tipo de relação. A desigualdade é a noção básica do importante conceito em matemática chamado de inequação e também é utilizada em várias outras áreas, como as sociais e econômicas, sendo usada para estratificar um grupo em relação a renda, idade, etc. O ensino das desigualdades auxilia a reconhecer e expressar regularidades, no desenvolvimento do pensamento algébrico, construção e interpretação de tabelas e gráficos, além de auxiliar o desenvolvimento da capacidade de analisar situações-problema.

Tsamir e Bazzini (2001) enfocam a importância das inequações no ensino da Matemática:

> A resolução de desigualdades desempenha um importante papel na matemática. Fazem parte de vários temas matemáticos, incluindo álgebra, trigonometria, planejamento linear e a investigação de funções. Elas também fornecem uma perspectiva complementar para equações (TSAMIR; BAZZINI, 2001, p. 58).

Desta forma, pesquisas que busquem refletir e desenvolver ferramentas ou novas abordagens acerca deste assunto são necessárias no campo educacional e primam pela qualificação do processo de ensino-aprendizagem.

No Brasil, as inequações são apresentadas, normalmente no 7° e 8° anos e passam a fazer parte do planejamento das séries seguintes, de forma crescente. Nas séries iniciais do Ensino Fundamental tal conteúdo aparece logo após a aprendizagem das equações. Essa prática é questionada pelas pesquisadoras Tsamir e Bazzini (2001), pois elas acreditam que pode gerar crescentes erros de concepções e estereótipos. Além de afirmarem que o ensino gira em torno de algoritmos práticos de manipulações algébricas. Dessa forma, os alunos utilizam os mesmos procedimentos utilizados na resolução de equações para resolver as inequações, fazendo com que ocorram erros conceituais. Além disso, em suas pesquisas, concluíram que as dificuldades encontradas pelos alunos são praticamente as mesmas, principalmente em relação à confusão que os alunos fazem com as estruturas das equações e das inequações. Notaram que os alunos, por exemplo, não admitem $x = 3$ como resultado de uma inequação, mesmo admitindo que $x = 0$ é solução da inequação $5x^4 \leq 0$.

Todavia, esta percepção das autoras supracitadas merece um pouco de atenção, pois não é necessário, obrigatoriamente, desconectar esses dois conteúdos – equação e inequação – e sim, encontrar maneiras de auxiliar os alunos para que percebam as características de cada um deles, evitando, assim, erros primários que são cometidos ao conectarem igualdades e desigualdades. Kieran (2004) afirma que essa separação de fato não é necessária e destaca a importância dos professores atentarem para o esclarecimento junto aos alunos a respeito das armadilhas da conexão igualdade/desigualdade.

Uma das propostas do presente trabalho é oferecer uma alternativa que extrapole o ensino das inequações além da linguagem algébrica, auxiliando na aprendizagem e evitando que sejam realizadas conexões equivocadas. Abordagens gráficas e a partir da linguagem materna podem contribuir, a longo prazo, para um melhor entendimento da resolução de equações e inequações com uma variável real.

A elaboração de uma sequência didática envolvendo o tratamento e a conversão de registros pode fornecer aos alunos condições de inter-relacionarem os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos envolvidos na resolução de inequações com uma incógnita real. O tratamento e a conversão podem proporcionar aos alunos uma apreensão significativa de que é preciso trabalhar sempre com inequações equivalentes.

FISCHBEIN (1993 apud DIAS, 2014, p. 47) afirma que devemos levar em consideração três componentes básicos em relação ao comportamento matemático de um estudante: formal, algorítmico e o intuitivo.

- Formal: refere-se a axiomas, definições, teoremas e provas;
- Algorítmico: trata das técnicas de resoluções e estratégias do tipo padrão;
- Intuitivo: refere-se ao grau de subjetividade, de aceitação direta de uma noção, de um teorema ou de uma solução.

De acordo com Fischbein, é possível que esses três componentes venham a convergir, porém, no processo de ensino-aprendizagem, é mais comum que ocorram conflitos entre essas interações. Este tipo de conflito pode ser exemplificado da seguinte forma: aplica-se de forma inadequada um esquema de solução de um certo problema, mesmo que ocorra um entendimento intuitivo correto. Um conflito muito comum é a interpretação intuitiva baseada numa experiência anterior que anula o aspecto formal de uma resolução algorítmica, não permitindo ou distorcendo a reação matemática que seria a correta.

Dados os objetivos propostos para esta pesquisa, entende-se que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval serve de base teórica para compreensão e a elaboração de estratégias que minimizem estes conflitos nos estudos das inequações e, consequentemente, garantam possibilidades mais profícuas para o processo de construção do conhecimento referente ao objeto de pesquisa deste trabalho.

1.2 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Raymond Duval é filósofo e psicólogo, trabalhou na IREM (Instituto de Pesquisa sobre o Ensino da Matemática) de Strasbourg, na França, de 1970 a 1995, onde atualmente é membro do comitê científico nacional. Na Université du Littoral Côte d'Opale (Universidade do Litoral da Costa do Opala) em Dunquerque, França, é professor emérito e foi diretor do Laboratório de Mudanças do Sistema Educacional. Lecionou também no Instituto Universitário para Formação de Mestres (IUM), onde desenvolveu estudos no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática e coordenou um seminário de pesquisa sobre a conversão das representações. Suas pesquisas atuavam nas seguintes áreas: compreensão de textos, diversidade das formas e das práticas do raciocínio, dificuldades da compreensão das demonstrações, interpretação de gráficos, problemas relacionados a visualizações na geometria, entre outras.

Em 1988 foi responsável pela criação da Revista Anual de Didática e de Ciências do Conhecimento. Ainda nos dias de hoje Raymond Duval nos brinda com artigos sobre representações, problemas no ensino da matemática, entre outros assuntos educacionais.

Duval, na sua obra *Sémiosis et Penseé Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels*, traduzido para português como Sémiosis e Pensamento Humano: Registros Semióticos e Aprendizagens Intelectuais (1995), elaborou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica que embasa as reflexões e permeia o desenvolvimento da sequência didática da presente pesquisa. A referida obra tem sido muito utilizada como referencial teórico para diversas pesquisas realizadas no Brasil, tamanha sua contribuição e importância nos estudos sobre aprendizagem em Matemática[1].

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica tem como conceitos basilares a “Sémiosis”e “Noésis”. Entende-se pela primeira a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e o segundo conceito refere-se à apreensão conceitual de um objeto. Duval afirma que não há noésis sem sémiosis, já que a sémiosis permite o exercício da noésis, até mesmo porque as representações semióticas são necessárias para algumas funções cognitivas fundamentais.

Duval (1995 apud SOUZA, 2007, p. 58) afirma que as funções cognitivas fundamentais são: a comunicação, a transcrição das representações mentais e o tratamento das ideias mentais representadas. A seguir temos uma tabela que estabelece a relação entre os tipos e as funções das representações, como podemos ver na tabela 1.

[1] A tradução desta obra - Sémiosis et Penseé Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels - para língua portuguesa contém apenas a primeira parte da obra original.

Tabela 1 - Relação entre os tipos e as funções das representações

	INTERNA	**EXTERNA**
CONSCIENTE	MENTAL - Função de objetivação	SEMIÓTICA - Função de objetivação - Função de expressão - Função de tratamento intencional
NÃO CONSCIENTE	COMPUTACIONAL - Função de tratamento automático ou quasi-instantâneo	

Fonte: O autor, 2017.

De acordo com Duval, todas as funções e os diferentes tipos de representação têm sua importância no trato com a Matemática. As *representações internas* são aquelas que pertencem ao indivíduo e que não são comunicadas por meio de uma representação externa. Já as representações externas, são representações visíveis e observáveis, fundamentalmente semióticas.

No que se refere à representação mental (interna consciente) tem a função de objetivação, ou seja, o indivíduo descobre alguma coisa que não suspeitava que fosse verdade e a representa mentalmente. Já a representação computacional (interna não consciente) tem a função de tratamento automático, ou seja, o indivíduo não tem consciência do que é representado, como por exemplo, uma criança saber reconhecer numerais sem ter consciência do que são números.

A representação semiótica (consciente externa) tem três funções importantes:

- Objetivação: reconhecer coisas sem apreender seus significados;
- Expressão: possibilitar a comunicação de um fato qualquer;
- Tratamento Intencional: capacitar o trabalho com algo que foi representado semioticamente.

Os sistemas semióticos que possibilitam as três funções cognitivas são:

- Formação: representação num sistema semiótico particular;
- Tratamento: trata-se de uma outra representação dentro do mesmo registro;
- Conversão: quando se tem uma outra representação dentro de um outro registro.

Estas três atividades cognitivas são denominadas por Duval como registros de representação semiótica. Podemos exemplificar essas atividades cognitivas das seguintes maneiras:

- Formação: língua materna, figuras geométricas;
- Tratamento: é uma transformação intrínseca, como por exemplo, o cálculo, parafrasear, reformular, reduzir, etc.;
- Conversão: é uma transformação extrínseca, como por exemplo, construir um gráfico a partir de uma equação, construir uma equação a partir da linguagem materna, etc.

A Teoria dos Registros de Representações Semióticas defende que o indivíduo apreende um conceito científico matemático somente se for capaz de fazer a distinção entre a representação semiótica de um objeto matemático e ele próprio. Desta forma, é necessário que se faça a atribuição de significados às representações de um conceito científico no processo de ensino-aprendizagem do indivíduo. Além disso, o indivíduo precisa saber discriminar e coordenar pelo menos dois sistemas semióticos de representação, de tal modo que esteja apto a realizar dois tipos de transformação de uma representação: o tratamento e a conversão. Na formação de representações semióticas, é primordial que sejam respeitadas as regras do sistema utilizado, possibilitando o uso das formas de tratamento próprias do sistema, tendo em vista que, normalmente, o sistema já existe. Não respeitar essas regras traz prejuízo no entendimento e pode-se causar confusão com o objeto representado e o registro utilizado.

Por exemplo, na equação (1), o indivíduo resolveu tal situação de acordo com a equação (2).

$$y = 5x^2 - 3, \text{com } x = 4 \tag{1}$$

$$y = 5(4)^2 = 5 \cdot 16 = 80 - 3 = 77 \tag{2}$$

Podemos perceber que, neste exemplo, não foi respeitada a regra do sinal da igualdade (=).

Em relação ao tratamento, podemos dividi-lo em **registros monofuncionais**, que são aqueles que foram desenvolvidos para um tipo de tratamento que é, quase sempre, algoritmizável. E **registros multifuncionais** que são utilizados em todos os campos de cultura, e sendo assim, não podem ser algoritmizáveis. Como por exemplo, a língua natural, figuras geométricas, entre outras.

Já na conversão, o indivíduo precisa discriminar a representação do que está sendo representado. Para mostrar que uma aprendizagem baseada na aquisição de atividades de conversão não é igual a uma atividade de tratamento, Souza (2007, p. 65) sugere o seguinte exemplo, basta considerar a passagem da escrita algébrica simbólica para o gráfico cartesiano correspondente: a regra que associa um ponto do plano cartesiano a uma dupla de números permite a construção pontual do gráfico de relações dadas por uma tabela de valores ou por uma expressão do tipo (3), mas a passagem inversa exige muito mais do que simplesmente reconhecer os pontos que estão sobre um gráfico. É necessária uma interpretação global, que envolve o reconhecimento de variáveis visuais pertinentes, como por exemplo os coeficientes angular e linear no caso de retas e sua correspondência na escrita algébrica. Isto quer dizer que as regras podem ser diferentes, dependendo do sentido da conversão.

$$y = x. \tag{3}$$

Para Duval (2009) é papel do professor lecionar utilizando os diferentes tipos de representações, visto que uma sala de aula é, por si só, plural, assim os professores trabalham com turmas heterogêneas, onde cada aluno possui sua individualidade no que tange ao processo de ensino-aprendizagem. Desta maneira, oferecer aos alunos vários registros e as transformações necessárias possibilita que estes escolham a melhor maneira para aplicar o conceito oferecido.

Acrescento que, além da necessidade do professor envolver novas formas de representação a fim de propiciar aos estudantes variadas maneiras de aprender, é imprescindível que o sistema esteja adequado a esta concepção educacional de apreensão do conhecimento, o que significa rever alguns elementos educacionais como organização curricular, formação e capacitação de professores, estrutura física e material didático. O fato é que, quando a realidade do ensino da matemática na qual estou inserido, mais especificamente o que se refere ao assunto desigualdade - objeto de estudo deste trabalho -, observo o quão inapropriado estão as abordagens e os materiais didáticos disponíveis para utilização ao longo do ano letivo, culminando em um processo de aprendizado equivocado por parte dos alunos.

1.3 Abordagem dos Livros Didáticos e Professores

Com o objetivo de compreender como os professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio conduzem o conteúdo inequações, estabeleceu-se como procedimento metodológico as seguintes ações:

a) aplicação de um questionário junto a professores das redes municipal, federal e privada do município do Rio de Janeiro[2] e;

b) análise de alguns livros didáticos oriundos do PNLD[3] utilizados em algumas escolas do município do Rio de Janeiro.

Importante salientar que tanto os professores participantes da pesquisa[4] através do questionário quanto os livros didáticos escolhidos para análise refletem resultados a partir do critério de amostragem, o que impossibilita uma análise generalizada do objeto de pesquisa em questão. Os livros analisados foram:

- Projeto Teláris 7° ano (DANTE, 2013a, p. 158-161).
- Projeto Teláris 8° ano (DANTE, 2013b, p. 36-37).
- Matemática na Medida Certa (CENTURION et al., 2010, p. 1-256).
- Fazendo a Diferença (BONJORNO et al., 2009, p. 97-100).
- Vontade de saber (SOUZA; PATARO, 2015, p. 152-154).
- Projeto Araribá (DIVERSOS, 2010, p. 157-164).

Dos livros didáticos analisados, a coleção *Matemática na Medida Certa* sequer aborda o tema. A coleção *Projeto Teláris* 7° *ano*, *Projeto Teláris* 8° *ano* e *Vontade de Saber* tratam o assunto a partir de exemplos, sem citar as propriedades de equivalência das inequações, como podemos ver nas figuras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

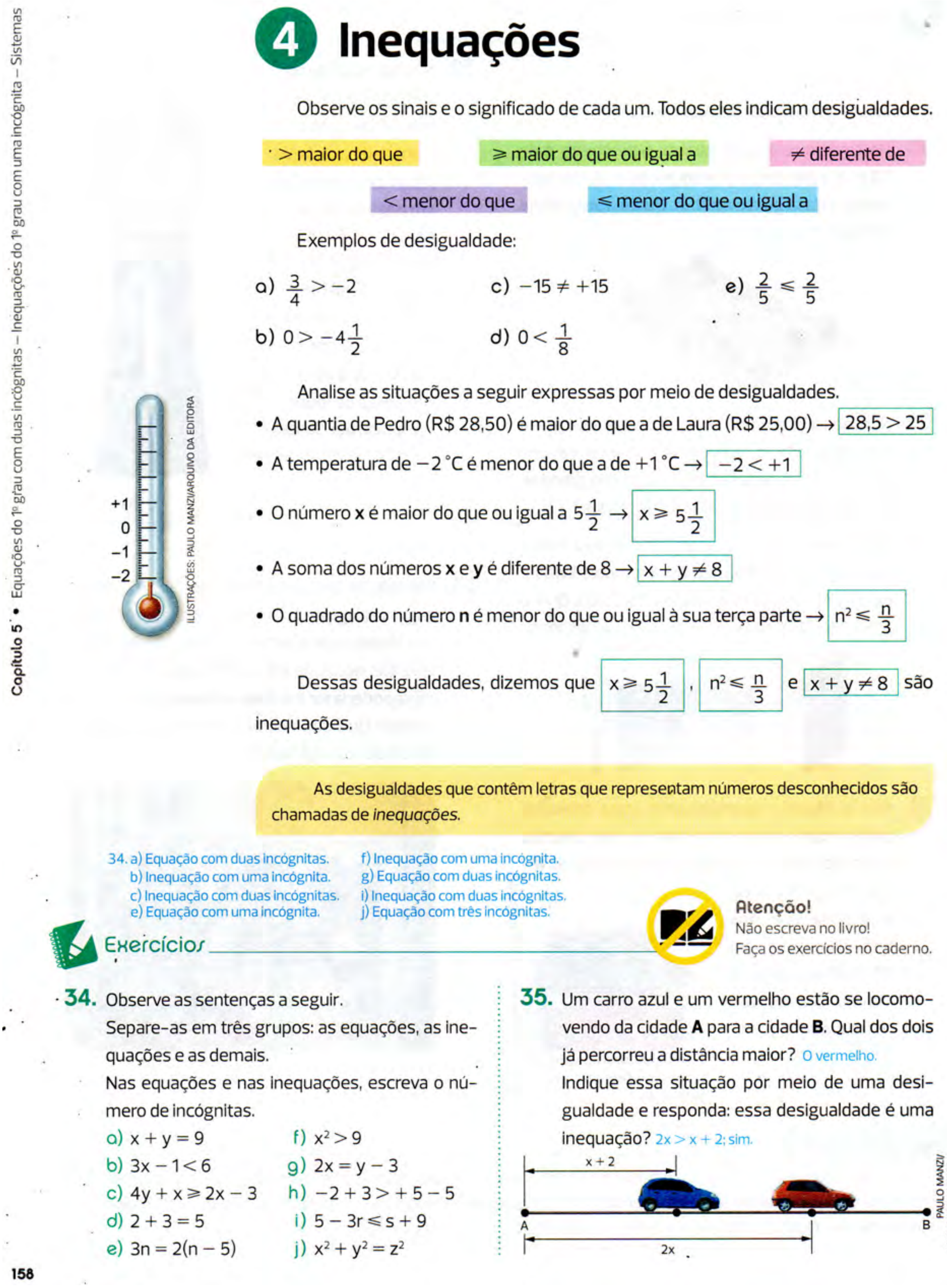
---

[2] o modelo do questionário encontra-se no apêndice A

[3] O PNDL é o Programa Nacional do Livro e do Material Didático que é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais e municipais sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público.

[4] Essa pesquisa encontra-se no apêndice A.

Figura 1 - Projeto Teláris - 7° ano.



Capítulo 5 • Equações do 1º grau com duas incógnitas – Inequações do 1º grau com uma incógnita – Sistemas

4 Inequações

Observe os sinais e o significado de cada um. Todos eles indicam desigualdades.

$>$ maior do que | $\geqslant$ maior do que ou igual a | $\neq$ diferente de

$<$ menor do que | $\leqslant$ menor do que ou igual a

Exemplos de desigualdade:

a) $\frac{3}{4} > -2$

b) $0 > -4\frac{1}{2}$

c) $-15 \neq +15$

d) $0 < \frac{1}{8}$

e) $\frac{2}{5} \leqslant \frac{2}{5}$

Analise as situações a seguir expressas por meio de desigualdades.

- A quantia de Pedro (R$ 28,50) é maior do que a de Laura (R$ 25,00) → $\boxed{28{,}5 > 25}$
- A temperatura de -2 °C é menor do que a de $+1$ °C → $\boxed{-2 < +1}$
- O número **x** é maior do que ou igual a $5\frac{1}{2}$ → $\boxed{x \geqslant 5\frac{1}{2}}$
- A soma dos números **x** e **y** é diferente de 8 → $\boxed{x + y \neq 8}$
- O quadrado do número **n** é menor do que ou igual à sua terça parte → $\boxed{n^2 \leqslant \frac{n}{3}}$

+1
0
−1
−2

ILUSTRAÇÕES: PAULO MANZI/ARQUIVO DA EDITORA

Dessas desigualdades, dizemos que $\boxed{x \geqslant 5\frac{1}{2}}$, $\boxed{n^2 \leqslant \frac{n}{3}}$ e $\boxed{x + y \neq 8}$ são inequações.

As desigualdades que contêm letras que representam números desconhecidos são chamadas de *inequações*.

34. a) Equação com duas incógnitas.
b) Inequação com uma incógnita.
c) Inequação com duas incógnitas.
e) Equação com uma incógnita.
f) Inequação com uma incógnita.
g) Equação com duas incógnitas.
i) Inequação com duas incógnitas.
j) Equação com três incógnitas.

Atenção!
Não escreva no livro!
Faça os exercícios no caderno.

Exercícios

34. Observe as sentenças a seguir.
Separe-as em três grupos: as equações, as inequações e as demais.
Nas equações e nas inequações, escreva o número de incógnitas.

a) $x + y = 9$
b) $3x - 1 < 6$
c) $4y + x \geqslant 2x - 3$
d) $2 + 3 = 5$
e) $3n = 2(n - 5)$
f) $x^2 > 9$
g) $2x = y - 3$
h) $-2 + 3 > +5 - 5$
i) $5 - 3r \leqslant s + 9$
j) $x^2 + y^2 = z^2$

35. Um carro azul e um vermelho estão se locomovendo da cidade **A** para a cidade **B**. Qual dos dois já percorreu a distância maior? O vermelho.
Indique essa situação por meio de uma desigualdade e responda: essa desigualdade é uma inequação? $2x > x + 2$; sim.

158

Fonte: Projeto Teláris, 2013.

Figura 2 - Projeto Teláris - 7° ano.

Inequações do 1º grau com uma incógnita

Chamamos de inequação do 1º grau com uma incógnita a toda inequação que pode ser escrita, com $a \neq 0$, em uma das seguintes formas: $ax > b$ ou $ax < b$ ou $ax \geqslant b$ ou $ax \leqslant b$.

*Lembre os alunos de que trabalhamos até aqui com os números racionais. Assim, **a** e **b** são números racionais.*

Exemplos:

1º) *São* inequações do 1º grau com uma incógnita:

a) $5x \geqslant 10$

b) $x < 9$

c) $\frac{x}{2} \leqslant 16$

d) $x > \frac{1}{2}$

2º) *Não* são inequações do 1º grau com uma incógnita:

a) $2x^2 > 10$ (o expoente de **x** é 2)

b) $x + y < 8$ (há duas incógnitas)

c) $\frac{x^3}{4} \leqslant 10$ (o expoente de **x** é 3)

d) $x^2 + y \geqslant 15$ (há duas incógnitas; além disso, o expoente de **x** é 2)

Exercício

Atenção! Não escreva no livro! Faça os exercícios no caderno.

36. Copie apenas as sentenças que são inequações do 1º grau com uma incógnita.

× a) $4x < 100$ c) $x^3 \leqslant 27$ e) $x + y < 12$ × g) $-3x < -15$

× b) $-2x \geqslant 10$ × d) $\frac{x}{3} > 12$ f) $x^2 > 5$ × h) $x \geqslant 20$

Soluções de uma inequação

Vamos analisar a inequação $2x > 6$.

Substituindo a incógnita **x** por 10, obtemos uma sentença verdadeira, pois $2 \cdot 10 = 20$ e $20 > 6$.

O mesmo acontece com o número 8, pois $2 \cdot 8 = 16$ e $16 > 6$.

Colocando 2 no lugar de **x**, obtemos uma sentença falsa, pois $2 \cdot 2 = 4$, e $4 > 6$ é uma sentença falsa.

Dizemos, então, que:

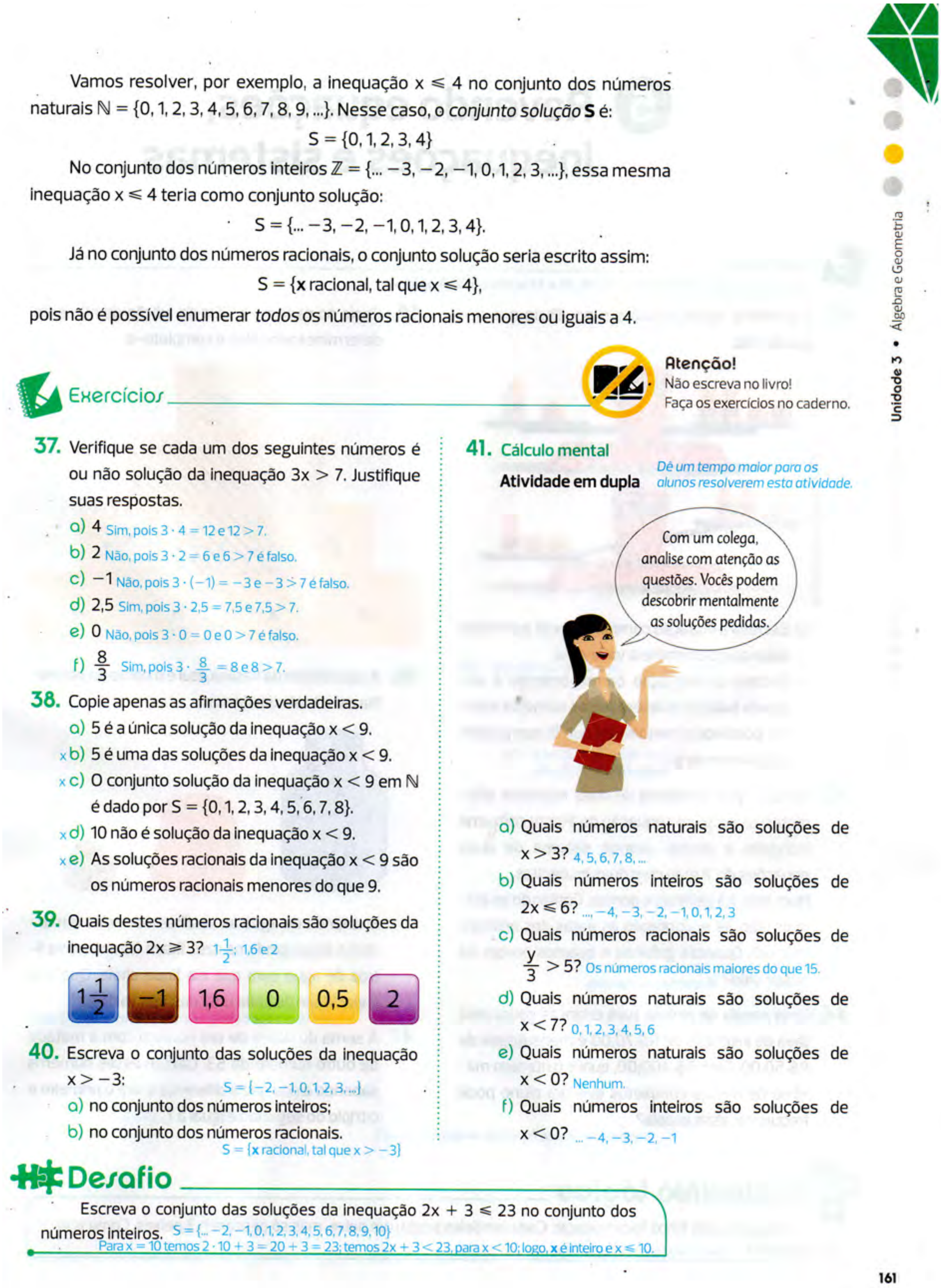
- 10 e 8 *são soluções* da inequação $2x > 6$.
- 2 *não é* uma solução da inequação $2x > 6$.

Faça o que se pede:

- Há outras soluções dessa inequação. Procure mais duas delas. Por exemplo: 7 (pois $2 \cdot 7 > 6$), 9 (pois $2 \cdot 9 > 6$), etc.
- Procure mais um número que não seja solução dessa inequação. Por exemplo: 0 (pois $2 \cdot 0 > 6$ é falso), 1 (pois $2 \cdot 1 > 6$ é falso), etc.

Fonte: Projeto Teláris, 2013.

Figura 3 - Projeto Teláris - 7° ano.



Vamos resolver, por exemplo, a inequação $x \leqslant 4$ no conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...\}$. Nesse caso, o *conjunto solução* **S** é:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

No conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, essa mesma inequação $x \leqslant 4$ teria como conjunto solução:

$$S = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Já no conjunto dos números racionais, o conjunto solução seria escrito assim:

$$S = \{\mathbf{x} \text{ racional, tal que } x \leqslant 4\},$$

pois não é possível enumerar *todos* os números racionais menores ou iguais a 4.

Atenção! Não escreva no livro! Faça os exercícios no caderno.

Exercícios

37. Verifique se cada um dos seguintes números é ou não solução da inequação $3x > 7$. Justifique suas respostas.

a) 4 Sim, pois $3 \cdot 4 = 12$ e $12 > 7$.

b) 2 Não, pois $3 \cdot 2 = 6$ e $6 > 7$ é falso.

c) -1 Não, pois $3 \cdot (-1) = -3$ e $-3 > 7$ é falso.

d) 2,5 Sim, pois $3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$ e $7{,}5 > 7$.

e) 0 Não, pois $3 \cdot 0 = 0$ e $0 > 7$ é falso.

f) $\frac{8}{3}$ Sim, pois $3 \cdot \frac{8}{3} = 8$ e $8 > 7$.

38. Copie apenas as afirmações verdadeiras.

a) 5 é a única solução da inequação $x < 9$.

x b) 5 é uma das soluções da inequação $x < 9$.

x c) O conjunto solução da inequação $x < 9$ em $\mathbb{N}$ é dado por $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

x d) 10 não é solução da inequação $x < 9$.

x e) As soluções racionais da inequação $x < 9$ são os números racionais menores do que 9.

39. Quais destes números racionais são soluções da inequação $2x \geqslant 3$? $1\frac{1}{2}$; 1,6 e 2

$1\frac{1}{2}$ | -1 | 1,6 | 0 | 0,5 | 2

40. Escreva o conjunto das soluções da inequação $x > -3$:

a) no conjunto dos números inteiros; $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

b) no conjunto dos números racionais. $S = \{\mathbf{x} \text{ racional, tal que } x > -3\}$

41. Cálculo mental

Atividade em dupla *Dê um tempo maior para os alunos resolverem esta atividade.*

Com um colega, analise com atenção as questões. Vocês podem descobrir mentalmente as soluções pedidas.

a) Quais números naturais são soluções de $x > 3$? 4, 5, 6, 7, 8, ...

b) Quais números inteiros são soluções de $2x \leqslant 6$? ..., $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

c) Quais números racionais são soluções de $\frac{y}{3} > 5$? Os números racionais maiores do que 15.

d) Quais números naturais são soluções de $x < 7$? 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

e) Quais números naturais são soluções de $x < 0$? Nenhum.

f) Quais números inteiros são soluções de $x < 0$? ... $-4, -3, -2, -1$

Desafio

Escreva o conjunto das soluções da inequação $2x + 3 \leqslant 23$ no conjunto dos números inteiros. $S = \{... -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

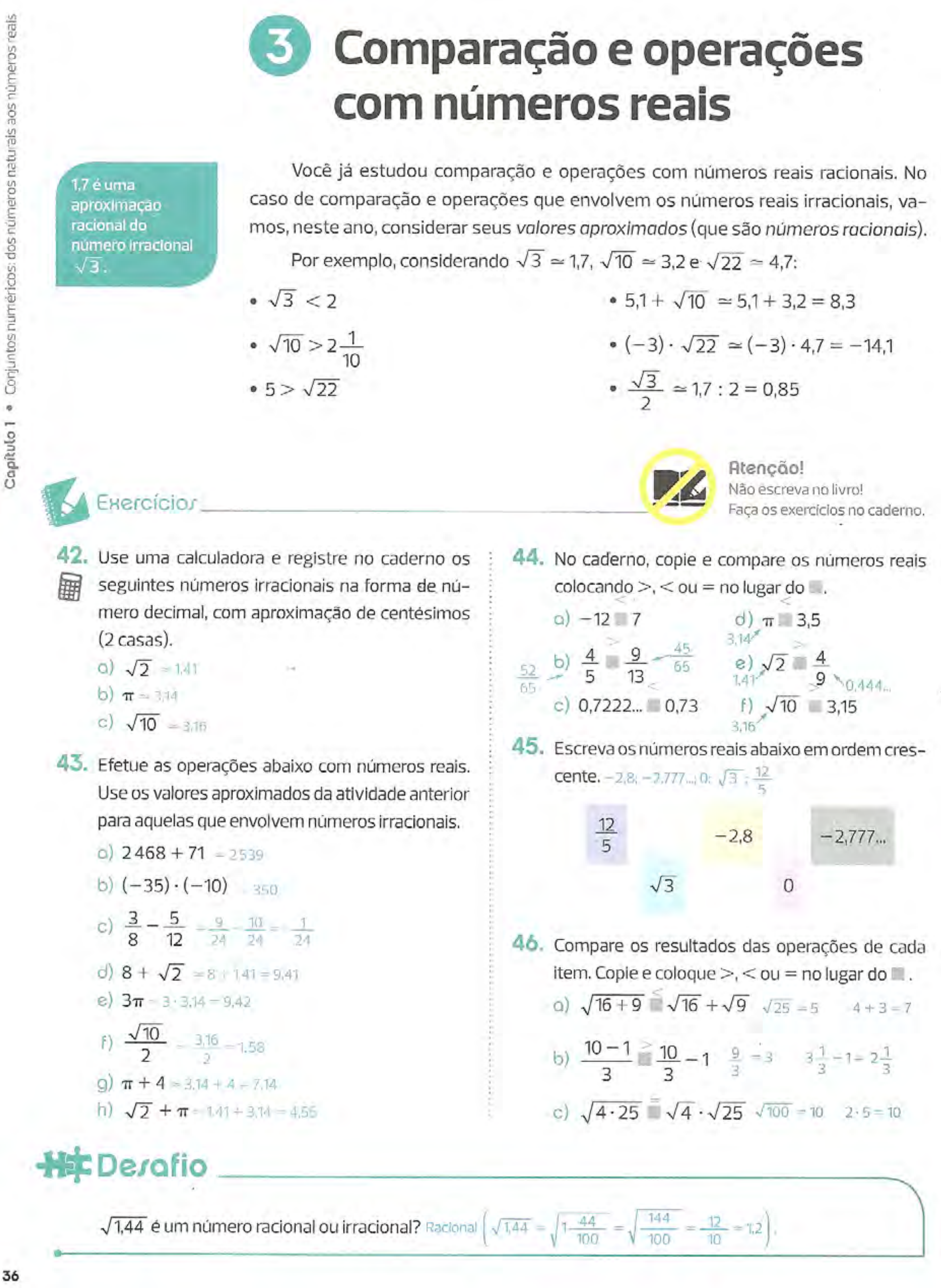
Para $x = 10$ temos $2 \cdot 10 + 3 = 20 + 3 = 23$; temos $2x + 3 < 23$, para $x < 10$; logo, $\mathbf{x}$ é inteiro e $x \leqslant 10$.

Unidade 3 • Álgebra e Geometria

161

Fonte: Projeto Teláris, 2013.

Figura 4 - Projeto Teláris - 8° ano.



Capítulo 1 • Conjuntos numéricos: dos números naturais aos números reais

3 Comparação e operações com números reais

1,7 é uma aproximação racional do número irracional $\sqrt{3}$.

Você já estudou comparação e operações com números reais racionais. No caso de comparação e operações que envolvem os números reais irracionais, vamos, neste ano, considerar seus *valores aproximados* (que são *números racionais*).

Por exemplo, considerando $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$, $\sqrt{10} \simeq 3{,}2$ e $\sqrt{22} \simeq 4{,}7$:

- $\sqrt{3} < 2$
- $\sqrt{10} > 2\frac{1}{10}$
- $5 > \sqrt{22}$
- $5{,}1 + \sqrt{10} \simeq 5{,}1 + 3{,}2 = 8{,}3$
- $(-3) \cdot \sqrt{22} \simeq (-3) \cdot 4{,}7 = -14{,}1$
- $\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 1{,}7 : 2 = 0{,}85$

Exercícios

Atenção! Não escreva no livro! Faça os exercícios no caderno.

42. Use uma calculadora e registre no caderno os seguintes números irracionais na forma de número decimal, com aproximação de centésimos (2 casas).

a) $\sqrt{2}$ $\simeq 1{,}41$

b) π $\simeq 3{,}14$

c) $\sqrt{10}$ $\simeq 3{,}16$

43. Efetue as operações abaixo com números reais. Use os valores aproximados da atividade anterior para aquelas que envolvem números irracionais.

a) $2\,468 + 71$ $= 2\,539$

b) $(-35) \cdot (-10)$ $= 350$

c) $\frac{3}{8} - \frac{5}{12}$ $= \frac{9}{24} - \frac{10}{24} = -\frac{1}{24}$

d) $8 + \sqrt{2}$ $\simeq 8 + 1{,}41 = 9{,}41$

e) 3π $\simeq 3 \cdot 3{,}14 = 9{,}42$

f) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ $\simeq \frac{3{,}16}{2} = 1{,}58$

g) $\pi + 4$ $\simeq 3{,}14 + 4 = 7{,}14$

h) $\sqrt{2} + \pi$ $\simeq 1{,}41 + 3{,}14 = 4{,}55$

44. No caderno, copie e compare os números reais colocando $>$, $<$ ou $=$ no lugar do ▪.

a) -12 ▪ 7 ($<$)

b) $\frac{4}{5}$ ▪ $\frac{9}{13}$ ($>$; $\frac{52}{65}$, $\frac{45}{65}$)

c) $0{,}7222...$ ▪ $0{,}73$ ($<$)

d) π ▪ $3{,}5$ ($<$; $3{,}14$)

e) $\sqrt{2}$ ▪ $\frac{4}{9}$ ($>$; $1{,}41$, $0{,}444...$)

f) $\sqrt{10}$ ▪ $3{,}15$ ($>$; $3{,}16$)

45. Escreva os números reais abaixo em ordem crescente. $-2{,}8$; $-2{,}777...$; 0; $\sqrt{3}$; $\frac{12}{5}$

$\frac{12}{5}$ $-2{,}8$ $-2{,}777...$ $\sqrt{3}$ 0

46. Compare os resultados das operações de cada item. Copie e coloque $>$, $<$ ou $=$ no lugar do ▪.

a) $\sqrt{16+9}$ ▪ $\sqrt{16} + \sqrt{9}$ ($<$; $\sqrt{25} = 5$; $4 + 3 = 7$)

b) $\frac{10-1}{3}$ ▪ $\frac{10}{3} - 1$ ($>$; $\frac{9}{3} = 3$; $3\frac{1}{3} - 1 = 2\frac{1}{3}$)

c) $\sqrt{4 \cdot 25}$ ▪ $\sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$ ($=$; $\sqrt{100} = 10$; $2 \cdot 5 = 10$)

Desafio

$\sqrt{1{,}44}$ é um número racional ou irracional? Racional $\left(\sqrt{1{,}44} = \sqrt{1\frac{44}{100}} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{12}{10} = 1{,}2\right)$.

36

Fonte: Projeto Teláris, 2013.

Figura 5 - Projeto Teláris - 8° ano.

4 Desigualdades em $\mathbb{R}$

Observe os diagramas abaixo:

$-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$ | $-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$x < 3$ | $x \leq 3$

x é menor do que 3 | **x** é menor do que ou igual a 3

Eles mostram a diferença entre $x < 3$ e $x \leq 3$.

Se $x < 3$, então **x** pode ser -1; 2; 2,9 ou 2,99, mas não pode ser 3. A bolinha vazia indica isso.

Se $x \leq 3$, então **x** pode assumir todos esses valores e também o valor 3. A bolinha cheia indica isso.

Se **A** é o conjunto dos elementos para os quais $x < 3$ é verdadeira, então, podemos escrever:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$$

Lemos da seguinte forma: "**A** é o conjunto dos números reais **x**, tal que $x < 3$".

Do mesmo modo, para o diagrama acima, à direita, podemos escrever:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$$

Exercícios

Veja a resolução do exercício 47 no ***Manual do Professor.***

47. Desenhe a reta numerada e marque:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$ c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$

48. Os conjuntos $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ e $Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ estão marcados no diagrama abaixo.

$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

P

Q

Copie apenas as afirmações verdadeiras.

a) $0 \in P$ d) $-1 \in P$

b) $2 \in Q$ e) $-1 \in Q$

c) $2 \in P$ f) $-2 \in Q$

49. Na atividade anterior, quais números reais pertencem, ao mesmo tempo, a **P** e a **Q**? Faça o diagrama.

50. Projeto em equipe: números racionais em notícias

Reúna-se com seus colegas e, juntos, recortem de jornais, revistas ou folhetos de propaganda três notícias: uma que envolva número inteiro, outra que envolva fração e outra que envolva número racional na forma de número decimal. Montem um painel e, para cada notícia, formulem e respondam a uma questão. Compartilhem seu trabalho com os demais colegas.

Raciocínio lógico

Qual é o gatinho mais gordo?

Sabe-se que Fofo é mais gordo do que Lulu. Bilu é mais gordo do que Fofo. Lulu é mais magro do que Bilu. Fifi é mais gordo do que Bilu.

Afinal, qual é o mais gordo de todos?

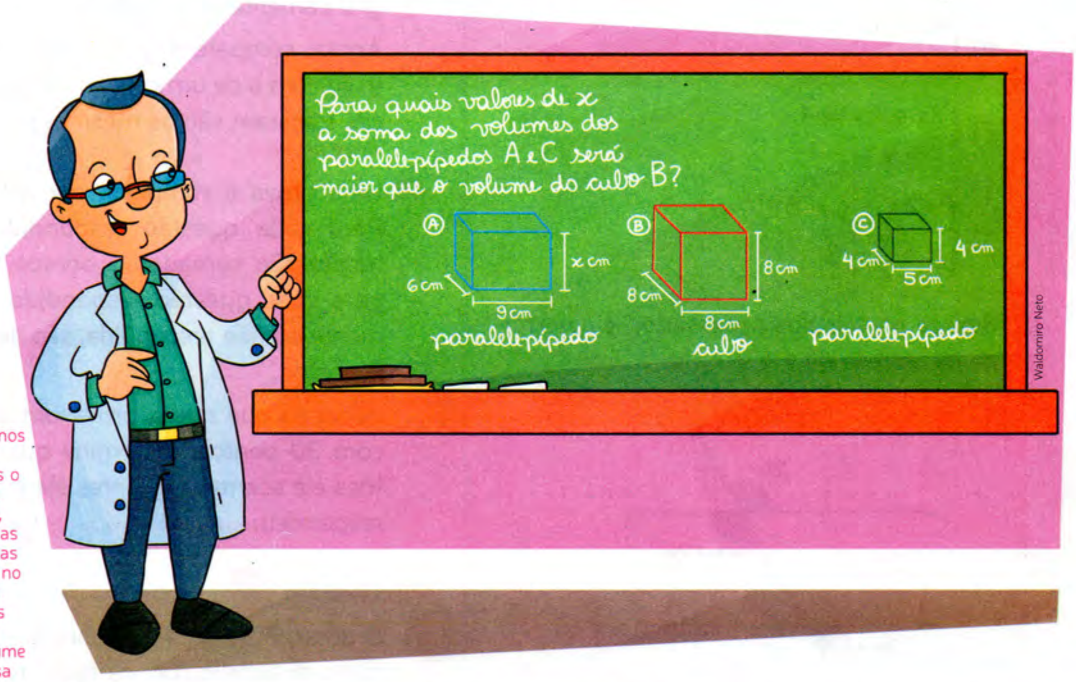
Unidade 1 • Números reais e expressões algébricas

Fonte: Projeto Teláris, 2013.

Figura 6 - Vontade de Saber - 8° ano.

Inequações do 1º grau com uma incógnita

Observe o problema proposto por um professor.



Lembre os alunos de que para determinarmos o volume de um paralelepípedo, multiplicamos as medidas de suas dimensões. Já no cubo, como as três dimensões têm a mesma medida, o volume é dado por essa medida elevada ao cubo.

Para resolvermos essa questão, inicialmente calculamos, em centímetros cúbicos, o volume de cada forma geométrica espacial.

- Volume de **A**: $9 \cdot 6 \cdot x = 54x$
- Volume de **B**: $8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$
- Volume de **C**: $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$

Como a soma dos volumes de **A** e **C** deve ser maior que o volume de **B**, escrevemos uma sentença matemática chamada **inequação**.

$$\underbrace{54x + 80}_{1^{\underline{o}}\text{ membro}} > \underbrace{512}_{2^{\underline{o}}\text{ membro}}$$

(lê-se: 54x mais 80 **maior que** 512)

Nessa inequação, o 1º membro indica a soma dos volumes de **A** e **C** e o 2º membro, o volume de **B**.

Inequações são sentenças matemáticas que possuem uma ou mais incógnitas e são expressas por uma das seguintes desigualdades: > (maior que), < (menor que), ≥ (maior ou igual a) e ≤ (menor ou igual a).

Exemplos:

- $3x > 9$
  lê-se: 3x **maior que** 9
- $5x - 2 < 8$
  lê-se: 5x menos 2 **menor que** 8
- $2x \geq x + 3$
  lê-se: 2x **maior ou igual a** x mais 3
- $-x \leq 12$
  lê-se: menos x **menor ou igual a** 12

152

Fonte: Vontade de Saber, 2013.

Figura 7 - Vontade de Saber - 8° ano.

capítulo 7

Podemos determinar a medida **x** no paralelepípedo azul resolvendo a inequação 4x + 80 > 512. Para isso, isolamos a incógnita **x** em um dos membros da desigualdade.

$$54x + 80 > 512$$

$$54x + 80 - 80 > 512 - 80 \longrightarrow$$ Subtraímos 80 dos dois membros da desigualdade.

$$54x > 432$$

$$\frac{54x}{54} > \frac{432}{54} \longrightarrow$$ Dividimos por 54 os dois membros da desigualdade.

$$x > 8$$

A solução dessa inequação pode ser representada pela parte em destaque na reta eal a seguir.

Explique aos alunos que na representação geométrica de uma inequação maior que (>) ou menor que (<), utilizaremos "bolinha aberta" (○). Nas inequações maior ou igual a (≥), ou menor ou igual a (≤), utilizaremos "bolinha fechada" (●).

Portanto, a medida **x** no paralelepípedo azul deve ser maior que 8 cm.

A fim de validar a solução obtida, atribuímos a **x** valores menor, igual e maior que 8 a inequação inicial.

x = 7	x = 8	x = 9
54x + 80 > 512	54x + 80 > 512	54x + 80 > 512
54 · 7 + 80 > 512	54 · 8 + 80 > 512	54 · 9 + 80 > 512
458 > 512	512 > 512	566 > 512
desigualdade falsa	desigualdade falsa	desigualdade verdadeira

Peça aos alunos que atribuam outros valores a **x**, inclusive números não inteiros na inequação, para que verifiquem se a desigualdade obtida é verdadeira ou falsa.

Note que para o valor menor ou igual a 8, a desigualdade obtida é falsa. Já para o alor maior que 8, a desigualdade obtida é verdadeira.

> Em uma inequação, quando adicionamos ou subtraímos o mesmo número dos dois membros, a desigualdade não se altera. Isso também ocorre quando multiplicamos ou dividimos os dois membros por um mesmo número positivo.

Na lousa, utilize desigualdades numéricas para exemplificar a validade dessa propriedade.

Veja o que ocorre quando multiplicamos ou dividimos uma desigualdade por um número negativo.

$$5 > -7$$
$$(-1) \cdot 5 < (-7) \cdot (-1)$$
$$-5 < 7$$

Note que, ao multiplicarmos os dois membros por um mesmo número negativo, temos de inverter a desigualdade para que ela fique verdadeira. Caso contrário, obteríamos uma desigualdade falsa (−5 > 7).

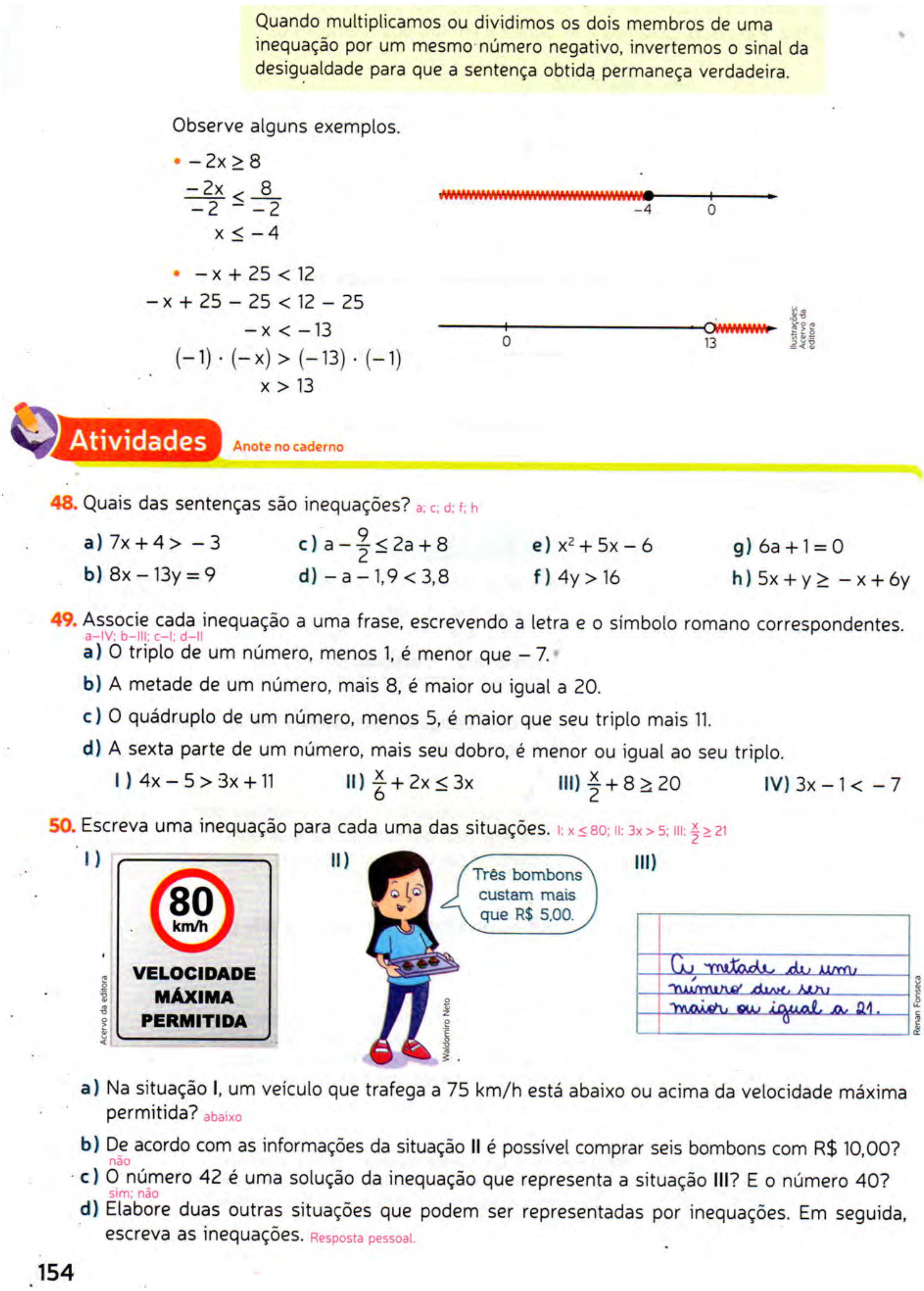
$$4 < 8$$
$$\frac{4}{-2} > \frac{8}{-2}$$
$$-2 > -4$$

O mesmo ocorre quando dividimos os dois membros por um mesmo número negativo. Nesse caso, também invertemos a desigualdade para que ela fique verdadeira.

153

Fonte: Vontade de Saber, 2013.

Figura 8 - Vontade de Saber - 8° ano.



Quando multiplicamos ou dividimos os dois membros de uma inequação por um mesmo número negativo, invertemos o sinal da desigualdade para que a sentença obtida permaneça verdadeira.

Observe alguns exemplos.

- $-2x \geq 8$

  $\frac{-2x}{-2} \leq \frac{8}{-2}$

  $x \leq -4$

- $-x + 25 < 12$

  $-x + 25 - 25 < 12 - 25$

  $-x < -13$

  $(-1) \cdot (-x) > (-13) \cdot (-1)$

  $x > 13$

Atividades Anote no caderno

48. Quais das sentenças são inequações? a; c; d; f; h

a) $7x + 4 > -3$ **b)** $8x - 13y = 9$ **c)** $a - \frac{9}{2} \leq 2a + 8$ **d)** $-a - 1{,}9 < 3{,}8$ **e)** $x^2 + 5x - 6$ **f)** $4y > 16$ **g)** $6a + 1 = 0$ **h)** $5x + y \geq -x + 6y$

49. Associe cada inequação a uma frase, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes. a–IV; b–III; c–I; d–II

a) O triplo de um número, menos 1, é menor que – 7.

b) A metade de um número, mais 8, é maior ou igual a 20.

c) O quádruplo de um número, menos 5, é maior que seu triplo mais 11.

d) A sexta parte de um número, mais seu dobro, é menor ou igual ao seu triplo.

I) $4x - 5 > 3x + 11$ **II)** $\frac{x}{6} + 2x \leq 3x$ **III)** $\frac{x}{2} + 8 \geq 20$ **IV)** $3x - 1 < -7$

50. Escreva uma inequação para cada uma das situações. I: $x \leq 80$; II: $3x > 5$; III: $\frac{x}{2} \geq 21$

a) Na situação **I**, um veículo que trafega a 75 km/h está abaixo ou acima da velocidade máxima permitida? abaixo

b) De acordo com as informações da situação **II** é possível comprar seis bombons com R$ 10,00? não

c) O número 42 é uma solução da inequação que representa a situação **III**? E o número 40? sim; não

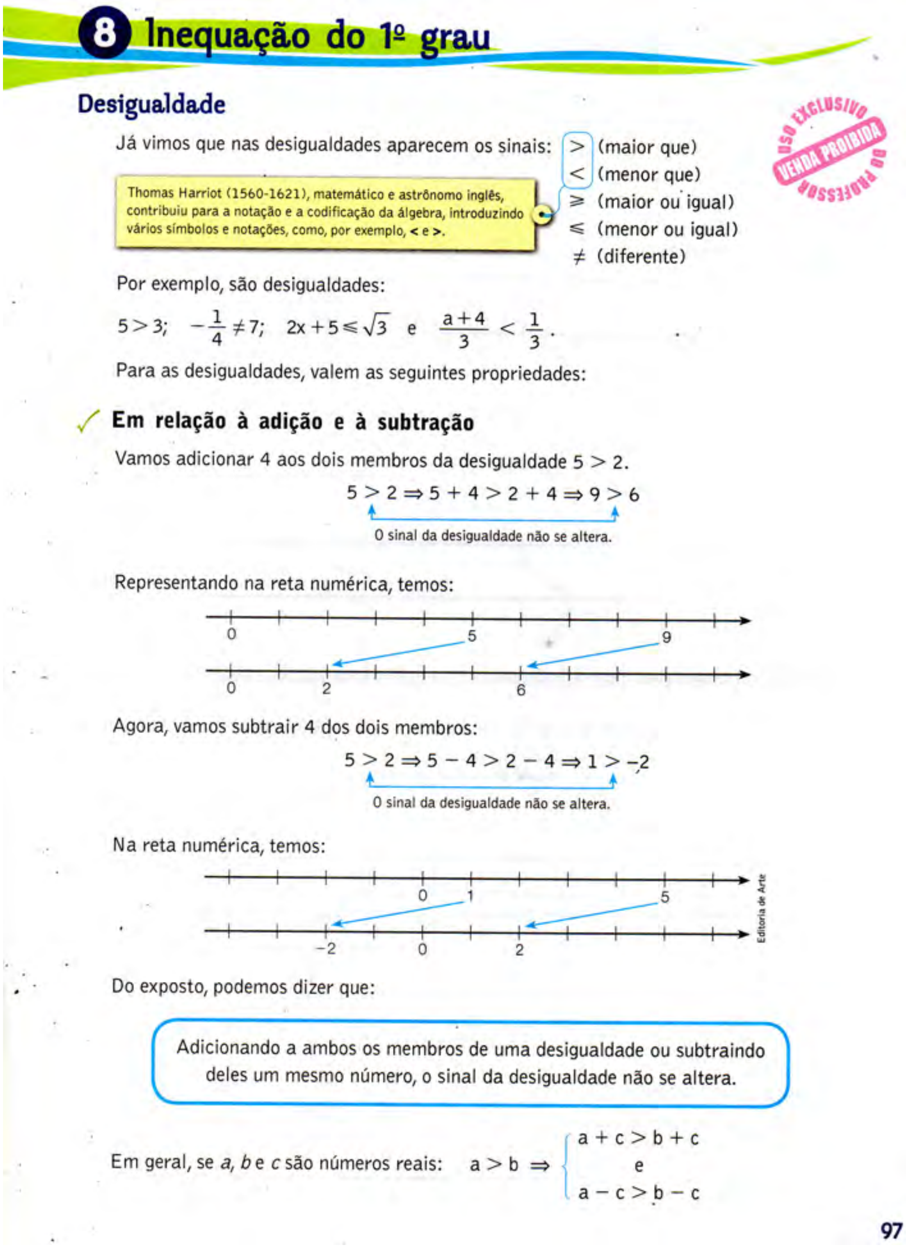
d) Elabore duas outras situações que podem ser representadas por inequações. Em seguida, escreva as inequações. Resposta pessoal.

154

Fonte: Vontade de Saber, 2013.

Já as coleções *Projeto Araribá* e *Fazendo a Diferença* apresentam as propriedades de equivalência, porém em nenhum momento trazem uma abordagem gráfica, como podemos ver nas figuras 9, 10, 11 e 12.

Figura 9 - Fazendo a diferença - 8° ano.



8 Inequação do 1º grau

Desigualdade

Já vimos que nas desigualdades aparecem os sinais: $>$ (maior que) $<$ (menor que) $\geq$ (maior ou igual) $\leq$ (menor ou igual) $\neq$ (diferente)

Thomas Harriot (1560-1621), matemático e astrônomo inglês, contribuiu para a notação e a codificação da álgebra, introduzindo vários símbolos e notações, como, por exemplo, < e >.

USO EXCLUSIVO DO PROFESSOR VENDA PROIBIDA

Por exemplo, são desigualdades:

$5 > 3$; $-\frac{1}{4} \neq 7$; $2x + 5 \leq \sqrt{3}$ e $\frac{a+4}{3} < \frac{1}{3}$.

Para as desigualdades, valem as seguintes propriedades:

Em relação à adição e à subtração

Vamos adicionar 4 aos dois membros da desigualdade $5 > 2$.

$$5 > 2 \Rightarrow 5 + 4 > 2 + 4 \Rightarrow 9 > 6$$

O sinal da desigualdade não se altera.

Representando na reta numérica, temos:

Agora, vamos subtrair 4 dos dois membros:

$$5 > 2 \Rightarrow 5 - 4 > 2 - 4 \Rightarrow 1 > -2$$

O sinal da desigualdade não se altera.

Na reta numérica, temos:

Do exposto, podemos dizer que:

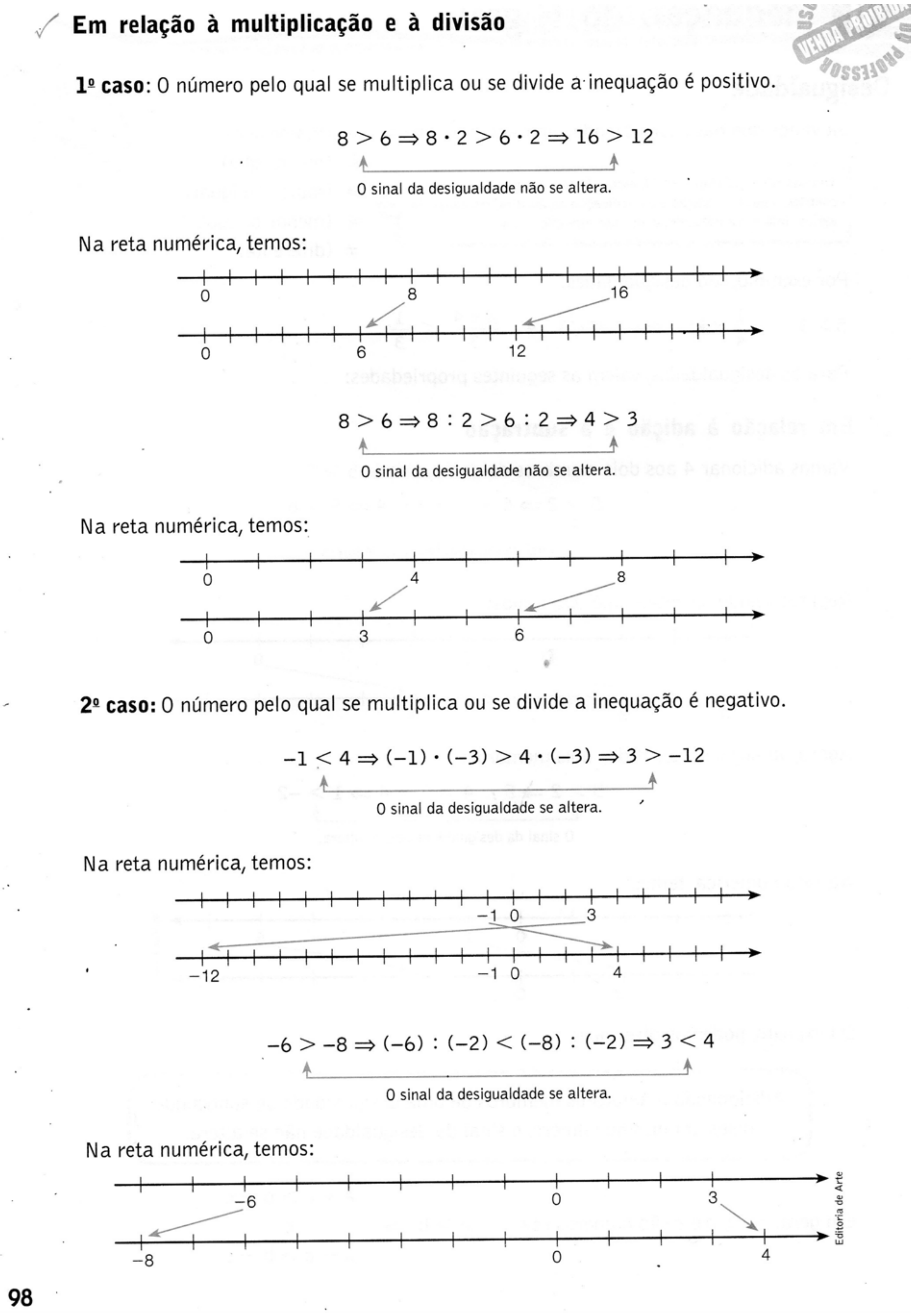
Adicionando a ambos os membros de uma desigualdade ou subtraindo deles um mesmo número, o sinal da desigualdade não se altera.

Em geral, se *a*, *b* e *c* são números reais: $a > b \Rightarrow \begin{cases} a + c > b + c \\ \text{e} \\ a - c > b - c \end{cases}$

97

Fonte: Fazendo a diferença, 2009.

Figura 10 - Fazendo a diferença - 8° ano.



Em relação à multiplicação e à divisão

1º caso: O número pelo qual se multiplica ou se divide a inequação é positivo.

$$8 > 6 \Rightarrow 8 \cdot 2 > 6 \cdot 2 \Rightarrow 16 > 12$$

O sinal da desigualdade não se altera.

Na reta numérica, temos:

$$8 > 6 \Rightarrow 8 : 2 > 6 : 2 \Rightarrow 4 > 3$$

O sinal da desigualdade não se altera.

Na reta numérica, temos:

2º caso: O número pelo qual se multiplica ou se divide a inequação é negativo.

$$-1 < 4 \Rightarrow (-1) \cdot (-3) > 4 \cdot (-3) \Rightarrow 3 > -12$$

O sinal da desigualdade se altera.

Na reta numérica, temos:

$$-6 > -8 \Rightarrow (-6) : (-2) < (-8) : (-2) \Rightarrow 3 < 4$$

O sinal da desigualdade se altera.

Na reta numérica, temos:

Editoria de Arte

98

Fonte: Fazendo a diferença, 2009.

Figura 11 - Fazendo a diferença - 8° ano.

Observando os dois casos, podemos dizer que:

> Multiplicando ou dividindo os dois membros de uma desigualdade por um mesmo número, diferente de zero, obtemos uma desigualdade:
> - de mesmo sinal, se o número é positivo.
> - de sinal contrário, se o número é negativo.

Em geral, se *a*, *b* e *c* são números reais e $c \neq 0$:

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} a \cdot c > bc, \text{ se } c > 0 \\ a : c > b : c, \text{ se } c > 0 \\ a \cdot c < b \cdot c, \text{ se } c < 0 \\ a : c < b : c, \text{ se } c < 0 \end{cases}$$

Inequação

Você já viu que uma equação é uma sentença aberta expressa por uma igualdade.

Quando temos sentenças abertas expressas por desigualdades, elas são chamadas **inequações**, as quais também agilizam o processo de resolução de problemas. Veja o exemplo:

O dobro de um número natural mais 1 é menor que 8. Qual é ou quais são os números?

Chamando de *x* o número procurado, a sentença matemática que representa esse problema é:

- ✓ número procurado → x
- ✓ dobro do número → $2x$
- ✓ dobro do número mais 1 → $2x + 1$
- ✓ sentença matemática → $2x + 1 < 8$

A sentença matemática $2x + 1 < 8$ é denominada **inequação do 1º grau**.

> **Inequação** é uma sentença matemática aberta expressa por uma desigualdade.

Uma inequação possui dois membros: $\underbrace{2x + 1}_{1^{\text{o}} \text{ membro}} < \underbrace{8}_{2^{\text{o}} \text{ membro}}$.

Para resolver a inequação, podemos organizar os dados numa tabela e atribuir valores arbitrários para *x* a fim de encontrar *y*.

Fazendo substituições por tentativas, verificamos que os números naturais que transformam a inequação numa sentença numérica verdadeira são: 0, 1, 2 e 3. Veja a tabela ao lado:

x	$2x + 1$	$2x + 1 < 8$
0	$2 \cdot 0 + 1 = 1$	$1 < 8$ verdadeira
1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	$3 < 8$ verdadeira
2	$2 \cdot 2 + 1 = 5$	$5 < 8$ verdadeira
3	$2 \cdot 3 + 1 = 7$	$7 < 8$ verdadeira
4	$2 \cdot 4 + 1 = 9$	$9 < 8$ falsa
5	$2 \cdot 5 + 1 = 11$	$11 < 8$ falsa
⋮	⋮	⋮

Editoria de Arte

O conjunto formado por todas essas soluções é o conjunto solução ou conjunto verdade da inequação. Logo:

$V = \{0, 1, 2, 3\}$ ou $S = \{0, 1, 2, 3\}$

99

Fonte: Fazendo a diferença, 2009.

Figura 12 - Fazendo a diferença - 8° ano.

Observações:

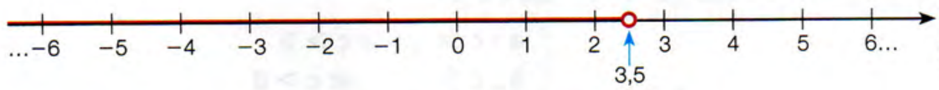
✓ Se considerássemos U = $\mathbb{Z}$, o conjunto solução da inequação $2x + 1 < 8$ seria:

$$S = \{...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \text{ ou } S = \{x \in \mathbb{Z}\ x \leq 3\}$$

✓ Se considerássemos U = $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação $2x + 1 < 8$ seria:

$$S = \{x \in \mathbb{Z}\ x < 3{,}5\}$$

Graficamente, temos:



Editoria de Arte

$$2x + 1 < 8 \text{ equivale a } x < 3{,}5$$

Note que, se $x = 3{,}5$, teríamos:

$$2x + 1 < 8 \Rightarrow 2 \cdot 3{,}5 + 1 < 8 \Rightarrow 7 + 1 < 8 \Rightarrow 8 < 8 \text{ (sentença falsa)}$$

Para que a sentença se torne verdadeira, devemos ter: $x \in \mathbb{R}$, com $x < 3{,}5$.

✓ Quando não for especificado o conjunto universo, vamos supor que ele seja formado por todos os números reais.

✓ Aplicando as propriedades das desigualdades nas inequações, podemos transformar uma dada inequação em outras equivalentes, até que o conjunto solução seja de fácil determinação.

Inequações equivalentes têm o mesmo conjunto solução.

NA PRÁTICA

1. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $-5x + 6 > 3(1 - x) + 9$.

Resolução

Para descobrir os valores da incógnita *x*, vamos aplicar as propriedades da desigualdade para isolar a incógnita no 1º membro:

$$-5x + 6 > 3(1 - x) + 9$$

$$-5x + 6 > 3 - 3x + 9 \quad \text{(Eliminamos os parênteses.)}$$

$$-5x + 6 > -3x + 12 \quad \text{(Adicionamos os termos semelhantes em cada um dos membros, se possível.)}$$

$$-5x \underbrace{+ 6 - 6}_{0} > -3x + \underbrace{12 - 6}_{6} \quad \text{(Subtraímos 6 dos dois membros.)}$$

$$-5x > -3x + 6$$

$$-5x + 3x > \underbrace{-3x + 3x}_{0} + 6 \quad \text{(Adicionamos 3x aos dois membros.)}$$

$$-5x + 3x > 6 \quad \text{(Reduzimos os termos semelhantes ao 1º membro.)}$$

$$-2x > 6$$

100

Fonte: Fazendo a diferença, 2009.

A análise do material empírico deixou evidente que, principalmente nas séries do Ensino Fundamental, o processo de ensino-aprendizagem das inequações é pautado num tratamento meramente algébrico, utilizando algoritmos de resolução. Destaca-se novamente que, este tratamento estritamente algébrico e com a ausência das propriedades das desigualdades corroboram para que os algoritmos de resolução de inequações se confundam com os algoritmos utilizados na resolução de equações, evidenciando, desta forma, a ineficácia deste método.

Para verificar como alguns professores abordam o tema, foi aplicado um questionário com 10 perguntas, são elas:

1. Qual sua formação?
2. Qual o ano de conclusão da sua graduação?
3. Em qual(is) segmento(s) você leciona?
4. Você acredita que o planejamento acadêmico da instituição em que trabalha disponibiliza tempo suficiente para um processo de ensino-aprendizagem eficaz no ensino das inequações?
5. Que tipo de exercícios você costuma propor aos alunos referente ao tema inequações?
6. Além da resolução a partir de uma abordagem algébrica, você utiliza outro tipo de abordagem na resolução de problemas que envolvem inequações?
7. Você utiliza a ajuda de algum *software* no desenvolvimento do tema inequações? Qual?
8. Ao lecionar os métodos de resolução de uma inequação, você solicita que seus alunos utilizem os mesmos procedimentos abordados na resolução de equações?
9. Você acredita que a inequação $\frac{3}{x} < \frac{6}{4}$ pode ser resolvida utilizando o mesmo procedimento usado na resolução de equações? Justifique.
10. Caso sinta-se confortável, resolva passo-a-passo a inequação $x^2 - 4 > 0$.

O questionário foi respondido por 10 professores dos quais:

- 1 trabalha no Colégio Pedro II;
- 2 trabalham apenas na rede municipal do Rio de Janeiro;
- 1 trabalha na rede municipal e estadual do Rio de Janeiro;
- 2 trabalham na rede particular e na rede estadual do Rio de Janeiro;

- 4 trabalham na rede particular.

Destes, apenas 2 afirmaram que os planejamentos acadêmicos reservam tempo suficiente para um processo de ensino-aprendizagem eficaz das inequações. Apenas 3 professores responderam que utilizam também um tratamento gráfico e todos afirmaram utilizar o tratamento algébrico para resolver as inequações. Em relação a utilização de um *software* para auxiliar no ensino, apenas 1 professor respondeu que sim. Ao serem questionados se solicitam que os alunos, para resolver as inequações, utilizam os mesmos procedimentos para resolver as equações, somente 4 professores negaram a afirmativa, porém destacaram que traçam paralelos para que os alunos percebam as diferenças no método de resolução dos referidos conceitos, conforme pode-se verificar na seguinte resposta de um dos professores[5]: "Não, porém faço comparações constantemente."Dos professores que afirmaram que solicitam que os alunos utilizem os mesmos procedimentos usados na resolução de equações para resolver as inequações, destaca-se a seguinte resposta[6]: "Resolvemos as inequações da mesma maneira que se resolve uma equação. Devemos tomar cuidado quando multiplicamos todos os termos de uma inequação por -1, pois neste caso, devemos inverter o sinal da desigualdade."

Quando solicitados para resolver uma inequação quociente e uma quadrática a maior parte dos professores erraram, pois utilizaram os mesmos procedimentos usados na resolução de equações, ignorando as particularidades das desigualdades[7]. Apenas 4 professores responderam corretamente[8]. Vale ressaltar que dos 4 professores que acertaram, 1 é Mestre em Matemática e 2 são mestrandos, o que mostra a importância da formação continuada.

Desta forma, percebe-se que a ausência de um ensino mais criterioso traz um grande prejuízo para os alunos na apreensão das inequações, colaborando também para uma relação equivocada entre os conceitos de equação e inequação, observo na resposta do professor A [9] que não houve cuidado em ressaltar as particularidades provenientes da desigualdade.

Esses equívocos, em alguns casos, se estendem ao longo dos anos, atingindo também a formação dos profissionais da educação que assumirão papel de mediadores do conhecimento. Conforme pode ser constatado no parágrafo anterior, a formação continuada desses profissionais assume um papel de grande importância para minorar as defasagens adquiridas ao longo dos anos.

---

[5] Essa resposta encontra-se no apêndice C.

[6] Resposta dada por um dos professores ao item (8) do questionário, ver apêndice J.

[7] Ver apêndices D, E, F, G, I e J.

[8] Ver apêndices B, C, G e I

[9] ver apêndice A

Acredito ainda que esta forma com a qual alguns professores (trabalham muito) lecionam o conteúdo de inequações se deve a banalização e a um planejamento que "espreme" tal conteúdo entre equações e sistemas de equações do 1° grau. Fazer uma analogia com o assunto estudado anteriormente traz a falsa impressão de que os alunos entendem melhor o assunto trabalhado. O resultado oriundo dos questionários, assim como a minha própria experiência docente, somados aos estudos existentes sobre o assunto, tornam evidente que, de fato, os alunos apresentam muitas dificuldades na hora de interpretar, resolver e principalmente diferenciar algoritmos usados na resolução de equações e inequações.

Apesar de muito esforço para melhorar o processo de ensino-aprendizagem deste tema, observado através dos questionários e bibliografias consultadas, não percebo uma transformação significativa, talvez porque muito desses trabalhos e discussões aconteçam em torno do ensino de inequações no Ensino Médio e Ensino Superior. Quando o aluno chega ao Ensino Médio a construção da metodologia de interpretação e resolução de inequações já está consolidada, sendo assim, desconstruir um conceito que foi formalizado com defasagens torna-se pesaroso e pouco eficaz.

Neste trabalho proponho a implementação de uma abordagem gráfica de inequações nas séries do Ensino Fundamental, nas turmas de 8° e 9° anos. Acredito que a sequência desenvolvida possa colaborar para uma nova concepção didática para os estudos da temática, esperando-se assim que os alunos não mais associem erroneamente equações/inequações.

Trabalhar com os gráficos, aliados ao tratamento algébrico, é uma alternativa viável nas séries do 8° e 9° anos, no caso das inequações com uma incógnita real. Acredito que a longo prazo, os alunos sejam capazes de relacionar os aspectos intuitivos, formais e algorítmicos presentes neste assunto, criando unidades mentais manipuláveis, que sejam trazidas à tona tanto na resolução de equações como na de inequações, minimizando assim as relações errôneas entre esses dois conceitos.

1.4 Parâmetros legais

Realizei uma pesquisa detalhada dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, além das Orientações Curriculares da Secretaria Municipal do Rio de Janeiro e da Base Comum Curricular (BNCC) para verificar qual era o posicionamento destes documentos em relação ao ensino-aprendizagem das inequações.

Com o objetivo de entender melhor as dificuldades encontradas neste processo fiz uma revisão bibliográfica relacionada ao assunto supracitado para desta forma tentar uma encontrar uma maneira de minimizar tal dificuldade.

A seguir, descrevo o posicionamento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e das Orientações Curriculares da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro sobre o tema inequações.

1.4.1 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

- Ensino Fundamental:

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) sugerem que a matemática promova o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de situações-problema, fazendo com que o aluno seja capaz de produzir e interpretar diferentes formas de escritas, como expressões, igualdades e desigualdades. Além de ser capaz de compreender os procedimentos envolvidos nas equações, inequações e nos sistemas lineares, observando as regularidades e estabelecendo leis matemáticas que descrevam as relações de dependência entre as variáveis envolvidas no problema. Relata também a importância de identificar incógnitas e variáveis, além de fazer analogias da forma algébrica e gráfica, promovendo a compreensão de conceitos como o de função, por exemplo.

Os PCN ressaltam a importância da Álgebra já que esta permite ao aluno adquirir a capacidade de abstrair e generalizar. E, com isso, seja capaz de utilizar tal ferramenta na resolução de problemas. Porém, destaca que o professor não deve restringir o ensino da Álgebra utilizando apenas algoritmos que tornam a resolução a partir de expressões matemáticas algo mecânico e extremamente formal, e sim buscar formas de ensino que permitam ao aluno a capacidade de várias representações do objeto em estudo.

Nas séries finais do Ensino Fundamental (terceiro e quarto ciclos) é possível um aprofundamento nas atividades que envolvem o ensino da Álgebra, atividades como situações-problema que envolvam relação entre duas grandezas, representação de problemas através de equações e inequações e até mesmo explorar a noção de função que será aprofundada no Ensino Médio.

- Ensino Médio:

No Ensino Médio, os PCN (BRASIL, 1997) ressaltam a importância de que "o ensino da matemática seja desenvolvido de forma contextualizada, baseando-se em habilidades e competências necessárias para desenvolver soluções-problema, capacitando o aluno para investigar, argumentar e generalizar". Ressalta ainda que o professor não deve se limitar a trabalhar junto aos alunos apenas questões que se atenham a aplicações de algoritmos matemáticos. Sugere que sejam elaboradas estratégias a partir da resolução de problemas, permitindo que o aluno seja protagonista da resolução do problema, e assim, consiga desenvolver as habilidades estipuladas como objetivo, evitando que os alunos apenas memorizem ou reproduzam de forma mecânica uma resolução.

O documento é organizado em três eixos estruturadores para as séries do Ensino Médio. Os três eixos são:

1. Álgebra: números e funções;
2. Geometria e medidas;
3. Análise de dados.

Observa-se que equações e inequações não aparecem de forma explícita em nenhum dos eixos, porém estão inseridos em conceitos presentes nestes eixos estruturadores. No eixo estruturador Álgebra: números e funções, o documento sugere que o ensino de funções envolva situações do cotidiano e que associe a linguagem algébrica com a linguagem gráfica. Desta forma, o estudo de diferentes tipos de funções capacita os alunos a resolverem problemas que envolvem equações e inequações.

No eixo estruturador Geometria e medidas, a importância do estudo de equações e inequações é comentada em um trecho do documento.

> A unidade Geometria analítica tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos.O aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equação, sistemas ou inequações (BRASIL, 1997, p. 124).

1.4.2 Orientações Curriculares da Prefeitura do Rio de Janeiro

As orientações curriculares da prefeitura do Rio de Janeiro têm por objetivo direcionar o trabalho dos professores em sala de aula. Nele são sugeridas atividades diferenciadas para cada conteúdo utilizando materiais didáticos diversos.

As Orientações Curriculares (SME-RJ, 2016) inclui as habilidades referentes aos descritores da Prova Brasil.

A ideia das desigualdades aparece pela primeira vez nas orientações curriculares do 7° ano, onde está descrita conforme a tabela 2:

Tabela 2 - Orientações Curriculares do 7° ano sobre o tema inequações.

Objetivos	Conteúdos	Habilidades	Sugestões
Desenvolver o pensamento algébrico como generalização matemática	Pensamento Algébrico	Reconhecer e diferenciar igualdades e desigualdades como expressões e resolvê-las	Utilizar da representação de balanças de dois pratos, em situações que envolvam igualdades e desigualdades, para determinar valores desconhecidos

Fonte: Orientações curriculares do Rio de Janeiro (SME-RJ, 2016)

Logo após este conteúdo, a sugestão dos orientadores curriculares é de iniciar o ensino de equações de 1° grau com uma incógnita e sistema de equações do 1° grau, onde o objetivo em destaque é desenvolver processos para o uso de equações, como meio de representar situações-problema e para realizar procedimentos algébricos simples. E onde são destacadas as seguintes habilidades:

- identificar e aplicar o princípio aditivo das igualdades;
- compreender situações-problema que podem ser representadas e resolvidas por sentenças matemáticas (equações);
- resolver equações;
- estabelecer a diferença entre incógnita e variável;
- resolução de sistemas de 1° grau;

No 8° ano, o assunto inequações ganha novamente destaque nas orientações curriculares como pode ser observada na tabela 3.

Tabela 3 - Orientações Curriculares 8° ano

Objetivos	Conteúdos	Habilidades	Sugestões
Desenvolver processos para o uso de equações como meio de representar situações-problema e para realizar procedimentos algébricos simples	Equações do 1° grau com uma incógnita	- escrever uma equação de primeiro grau que represente uma situação matemática; - reconhecer e calcular uma raiz de uma equação do 1° grau; - aplicar procedimentos de fatoração, simplificação e divisão na resolução de uma equação; - identificar quando a raiz de uma equação é uma solução de uma situação-problema; - identificar equações impossíveis e indeterminadas;	- atividades para transformar situações-problema em igualdades algébricas; - atividades de aplicação de valores numéricos para uma equação para determinar qual é um raiz da equação; - cruzadinha numérica com as raízes diversas de equações de 1° grau;
Desenvolver processos para o uso de inequações como meio de representar situações-problema e para realizar procedimentos algébricos simples.	Inequações de 1° grau	- reconhecer e diferenciar igualdades e desigualdades com expressões algébricas e resolvê-las; - estabelecer uma diferença entre incógnita e varável; - resolver inequação de 1° grau;	- atividades com balança de pratos para indicar como desigualdades e possibilidades; - brincadeira de descobrir o número, a partir de pistas, explorando possibilidades e indicação de desigualdades; - Exemplo: "o número está entre 20 e 30, é par, é múltiplo de 6"

Fonte: Orientações curriculares do Rio de Janeiro (SME-RJ, 2016).

Tanto no 7° ano quanto no 7° ano o conteúdo de inequações é comprimido pelas equações e sistemas de equações, acredito que este tipo de abordagem favorece numa relação equivocada na resolução de inequações e na resolução de equações, conforme já exposto anteriormente.

Como as orientações curriculares recomendam que, além de ser explorada a resolução algébrica de sistemas de equações do 1° grau, sejam exploradas também as resoluções desses sistemas a partir da linguagem gráfica, entendo que o processo de ensino-aprendizagem das inequações seria mais efetivo se posterior ao ensino da resolução de sistemas de equações do 1° grau, pois seria possível explorar também, a linguagem gráfica e fazer associações para que fique mais evidente a diferença entre equações e inequações.

1.4.3 Base Nacional Curricular Comum (BNCC)

Na Base Nacional Curricular Comum o texto sobre a área da matemática discutida nesta pesquisa destaca que, no Ensino Fundamental, é preciso garantir que os alunos sejam capazes de relacionar observações empíricas do mundo real e as representações, como tabelas, figuras e esquemas, tornando-os capazes de associar essas representações a uma atividade matemática. A BNCC (BRASIL, 2015) ressalta ainda que o aluno seja capaz de articular os diversos campos, tais como a Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade. Em articulação com as competências gerais da BNCC, a área da Matemática e, por consequência, o componente curricular de Matemática devem garantir aos alunos o desenvolvimento de competências específicas. O documento relata as seguintes competências:

1. Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e atuar no mundo, reconhecendo também que a Matemática, independentemente de suas aplicações práticas, favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da capacidade de produzir argumentos convincentes.

2. Estabelecer relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento e comunicá-las por meio de representações adequadas.

3. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

4. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar

suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens: gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna.

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

6. Agir individual ou cooperativamente com autonomia, responsabilidade e flexibilidade, no desenvolvimento e/ou discussão de projetos, que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

7. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

8. Sentir-se seguro da própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

9. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

Dentre as competências específicas citadas acima, gostaria de destacar os itens (2), (4) e (5), pois estes estão diretamente associados à proposta desta pesquisa.

O item (2) confirma a importância de estabelecer relações entre os conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática, além de comunicá-los por meio de representações adequadas. Mostra a importância de o aluno dominar os vários tipos de registros para que seja capaz de utilizar a representação mais adequada para uma certa situação.

No item (4), a BNCC complementa o item (2) ao relatar que o aluno deve ser capaz de expressar e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens, tais como, gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna.

Já no item (5), a BNCC incentiva a utilização da tecnologia digital para modelar e resolver problemas. Este item ganha importância nesta pesquisa, pois a proposta da sequência didática para o ensino das inequações utiliza-se, enquanto ferramenta didática, do *software* Geogebra.

Segundo a BNCC, a Álgebra tem por finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo este essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas através do uso de letras e outros símbolos. Diz ainda que:

> ...estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações(BRASIL, 2015, p. 226).

Relata que é necessário que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. Reforça que as técnicas de resolução de equações e inequações devam ser desenvolvidas, inclusive, no plano cartesiano. Infelizmente, a representação gráfica de inequações é pouco explorada. Afirmo que não é de meu conhecimento professores que, no Ensino Fundamental, explorem a resolução gráfica de uma inequação. Aliás, estou incluído neste grupo de professores. Este ano será a primeira vez que buscarei explorar a representação gráfica de inequações com turmas do Ensino Fundamental. Esta mudança se deve à pesquisa realizada em torno deste tema.

1.5 Revisão Bibliográfica

No intuito de aprofundar os conhecimentos sobre o tema escolhido para a pesquisa, realizei uma pesquisa bibliográfica na qual os trabalhos de Tsamir e Bazzini (2001); Kieran (2003); Fontalva (2006); João de Melo (2007); Souza (2008) e Dias (2014) evidenciam uma grande preocupação com o processo de ensino e aprendizagem desse assunto. A cada ano cresce o número de pesquisadores interessados nesta temática.

A preocupação com os erros cometidos na resolução de inequações atravessa décadas, tanto que, em 1991 no Psychology Mathematics Education (PME), de 1997 a 1999 no Séminaries Franco-Italien de Didactique de L'Algèbre (SFIDA), em 1989, 2000 e 2004, documentos do NCTM, National Council of Teachers of Mathematics, mostram essa preocupação e deixam claro que os alunos devem entender o significado das desigualdades, aprender a representá-las a partir de uma situação e saber resolvê-las fluentemente. Porém, mesmo assim, esta não é a realidade que encontramos nas salas de aula.

No Brasil, as inequações são apresentadas, normalmente no 7° e 8° anos, logo após a aprendizagem das equações. Essa prática é questionada pelas pesquisadoras Tsamir e Bazzini (2001), pois elas acreditam que esta pode gerar crescentes erros de concepções e estereótipos. Além de afirmarem que o ensino gira em torno de algoritmos práticos de manipulações algébricas. Dessa forma, os alunos utilizam os mesmos procedimentos utilizados na resolução de equações para resolver as inequações, fazendo com que ocorram erros conceituais. Todavia, acredito não ser necessário desconectar esses dois conteúdos – equação e inequação – e sim encontrar maneiras de auxiliar os alunos para que percebam as características de cada um desses conceitos, evitando assim erros primários que são cometidos ao conectarem igualdades e desigualdades.

Fontalva (2006) em seu trabalho relata que os alunos priorizam as técnicas algébricas, deixando de lado a aplicação de conceitos ou até mesmo outras linguagens, como a materna e a gráfica, na resolução de inequações.

Melo (2007) realizou uma pesquisa com professores do Ensino Fundamental e analisou alguns livros didáticos para saber como o tema inequações era desenvolvido pelos mesmos. O autor relata que existia uma predominância na linguagem algébrica no processo de ensino e aprendizagem tanto por parte dos professores quanto dos livros didáticos. As conversões da linguagem materna para linguagem algébrica apareciam apenas como exemplos e, desta forma, os alunos ficavam limitados a imitar os procedimentos observados. Destaca ainda que os professores do Ensino Fundamental de sua cidade (Indaiatuba, SP) não utilizam as conversões de Registros de Representação Semiótica no processo de ensino-aprendizagem de inequações.

Souza (2007) realizou uma pesquisa qualitativa em três etapas: análises preliminares; concepção, elaboração, análise didática, aplicação e observação de uma sequência de atividades e a análise de protocolos. Para a análise de protocolos, a autora faz referência a FISCHBEIN (1993). Este afirma que em Matemática se faz necessário dominar e inter-relacionar aspectos formais, algorítmicos e intuitivos de um determinado assunto para que ocorra a aprendizagem. Porém, a autora ressalta que, em sua análise, os sujeitos de sua pesquisa não apresentaram os aspectos formais lógicos e não realizaram as conexões matemáticas entre a resolução funcional gráfica e a algébrica.

A referida pesquisadora elaborou questionários para alunos do primeiro ano do ensino superior dos cursos de Engenharia Elétrica e Licenciatura em Matemática, onde era solicitada a resolução das seguintes inequações $x^2 \geq 25$ e $\frac{5}{x} < \frac{5}{2}$. Na primeira inequação, 52% dos pesquisados "extraíram a raiz quadrada" dos dois membros da desigualdade, além de substituírem o sinal da desigualdade pelo sinal da igualdade, e destrocaram os sinais ao fim dos cálculos. Na segunda inequação, 90% dos sujeitos "multiplicaram em cruz" para solucionar a inequação.

Souza (2008) defende também a utilização das conversões de Registros de Representações Semióticas e argumenta:

> A utilização de vários sistemas de representação teria estimulado a interação e a inter-relação entre os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos próprios da resolução de inequações com uma incógnita real e vice-versa, porque é preciso entender formalmente os registros para tratá-los

> e convertê-los e, ao mesmo tempo, é necessário discriminar e utilizar vários sistemas de representação para que os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos do objeto em estudo possam ser inter-relacionados e não se corra o risco de confundir uma representação com o objeto representado (SOUZA, 2007, p. 259).

Dias (2014) realizou uma pesquisa com 5 professores com tempo de magistério de 9 a 25 anos (apenas um professor possuía 1 ano de docência). O objetivo da pesquisa era investigar o conhecimento desses professores em relação a inequações e como este assunto era apresentado aos seus alunos. Após tantas leituras, o resultado não mais me espantou. Ocorreram os mesmos erros conceituais encontrados em outras pesquisas, inclusive nas pesquisas citadas anteriormente, como por exemplo, escrever a solução da inequação $x^2 \geq 4$ da seguinte forma: $x \geq \pm 2$. Vale ressaltar que nenhum dos 5 professores pesquisados responderam adequadamente esta inequação. Apenas um professor afirmou utilizar a resolução gráfica para o ensino de inequações, os outros 4 professores afirmaram que utilizam apenas o registro simbólico algébrico para o ensino deste assunto e destacaram que não dão importância às mudanças de registro de representação semiótica.

De acordo com Dias(2014) os professores não perceberam o quanto seria importante empregar as diferentes representações que são usadas em Matemática: o uso de tabelas, a representação gráfica, a representação algébrica entre outras, demonstraram que pode haver problemas ou lacunas em suas formações iniciais e estas lacunas serão traduzidas em prejuízo a aprendizagem dos alunos. A autora também cita a importância dos Tipos de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e conclui: "...se os professores apresentarem o objeto matemático de uma única maneira, sem privilegiar as mudanças de registros de Representação Semiótica, poderão dificultar sua apreensão de modo significativo"(DIAS, 2014, p. 126).

2 HISTÓRIA DAS DESIGUALDADES

Mesmo após muita leitura não consegui localizar no tempo quando surgiam os estudos sobre as desigualdades. Acredita-se que este estudo começou no século IV a.C., surgindo, primeiramente, com a necessidade de comparar e ordenar, isso após o surgimento dos números (CARVALHO, 2012).

Euclides, Arquimedes, Heron, Bernoulli e Newton são alguns dos grandes nomes da matemática que foram responsáveis pelo estudo de problemas que envolviam desigualdades.

Com a falta de informações e certezas sobre o aparecimento do estudo das desigualdades, trago a história de algumas das principais desigualdades que contribuíram para o desenvolvimento da matemática.

2.1 Problema de Dido

Segundo a lenda, no século IX a.C., Muto, rei de Tiro, ao morrer deixou seu reino aos dois filhos, Pigmalião e Elissa (nome tírio de Dido). A Princesa Dido teve que fugir da cidade de Tiro (atual Líbano) após seu irmão assassinar seu marido, em função de uma disputa de poder. Chegando no mar Mediterrâneo, na Tunísia, solicitou à população local uma área para construir uma vila para que ela e seus seguidores pudessem reconstruir suas vidas. A população respondeu-lhe da seguinte forma: Você pode ter tanta terra quanta puder conter numa pele de boi; conforme podemos observar na figura 13

Figura 13 - Tela ilustrada do século VII.

Fonte: http://www.revistac2.com/la-postal-de-dido.

Para obter a maior quantidade de terra possível, Dido cortou uma pele de boi em finas tiras e as uniu com a intenção de delimitar uma região ao longo da costa, região esta que ficou conhecida posteriormente como a cidade de Cartago. O desafio de Dido era achar como deveria dispor suas tiras unidas de tal forma que a área por elas delimitada fosse a maior possível. A solução encontrada por Dido foi dispor a corda em semicírculo, perpendicularmente à orla marinha.

A história de Dido termina ao suicidar-se, pois após ganhar prestígio com a prosperidade da cidade de Cartago, chamou a atenção do rei Iarbas que quis casar-se com Dido e ameaçou declarar guerra a Cartago caso ela recusasse. Sem ter como recusar, Dido solicitou-lhe três meses para passar o luto do marido assassinado e ao final desse prazo subiu um monte, ergueu uma enorme pira e ficou entre as chamas. A obra "A Eneida" escrita por Publius Virgilius Maro, no século I a. C. nos apresenta a motivação para o suicídio de Dido de outra forma. Em seu livro, Virgilius (Virgílio) conta que Eneias se apaixonou por Dido, tornaram-se amantes e por ciúmes o rei Iarbas conseguiu afastar Eneias de Dido. Após Dido ficar sabendo do sumiço de Eneias, suicidou-se por entre as chamas da pira por ela erguida.

Outra diferença está na forma como Dido se depara com o problema isoperimétrico. Este é apresentado com o questionamento abaixo.

"-Dado um fio com um determinado comprimento, qual é a maior porção de terra que se consegue delimitar com esse fio? E de que forma se obtém a quantidade máxima?" O problema Isoperimétrico clássico surge motivado pela lenda acima descrita e podemos formulá-lo da seguinte forma:

"De entre as curvas simples fechadas do plano, com um dado comprimento, qual é a que delimita a maior área possível?"

Sabia-se que a resposta para esse questionamento era a circunferência, porém as justificativas ficavam apenas no âmbito de intuições geométricas. Apenas em 1880, o matemático Weierstrass (1815-1897), apresenta uma demonstração rigorosa da propriedade isoperimétrica da circunferência.

O problema Isoperimétrico é ainda motivo de estudo de muitos matemáticos. As mais variadas generalizações das desigualdades isoperimétricas são estudadas em diferentes áreas de investigação matemática.

Muitos pesquisadores entendem que este problema de área máxima conservando o perímetro (Problema de Dido) tenha sido o primeiro a ser discutido em literatura científica pelas propriedades isoperimétricas do círculo, ressaltando que de todas as curvas planas é o que delimita a maior área conservando-se o perímetro.

2.2 Desigualdade triangular

Pouco se sabe sobre a vida pessoal de Euclides, até mesmo as datas de seu nascimento e falecimento são incertos, pode-se dizer que nasceu por volta de 360 a.C. e faleceu por volta de 295 a.C, sua imagem pode ser observada na figura 14.

Teria sido educado em Atenas, provavelmente foi discípulo de Platão, e posteriormente foi convidado por Ptolomeu I para fazer parte da equipe de professores da Academia em Alexandria.

Figura 14 - Euclides de Alexandria.

Fonte: http://www.filosofia.com.br

Foi com Euclides que a geometria do Egito tornou-se importante, fazendo de Alexandria o centro mundial do compasso e do esquadro, por volta do século III a.C

Seu livro "Elementos"(300 a. C), com 13 volumes, sendo cinco sobre geometria plana, três sobre números, um sobre a teoria das proporções, um sobre incomensuráveis e os três últimos sobre Geometria no espaço, reunia toda a Aritmética, a Álgebra e a Geometria conhecidas até então no mundo grego. Sua contribuição não consistiu na solução de novos problemas de Geometria, mas na ordenação de todos os métodos conhecidos, formando um sistema que permitia reunir todos os fatos conhecidos para descobrir e provar novas ideias, partindo de suposições simples, chamadas axiomas, combinando-as em afirmações chamadas teoremas, que se provam por meio da lógica.

Ao contrário do que algumas pessoas pensam, os Elementos, não cobrem apenas a Geometria: uma boa parte da obra trata da Aritmética e de aspectos da moderna Álgebra. Nele se encontram alguns dos mais criativos exemplos do pensamento matemático de todos os tempos: o método para calcular o máximo divisor comum entre dois ou mais números, o chamado Algoritmo de Euclides, o teorema da infinitude dos números primos, a forma de determinar todas as trincas pitagóricas primitivas, o método para somar números em progressão geométrica e, o mais espantoso, a regra para encontrar números perfeitos. [10]

Euclides foi autor de várias obras importantes, tais como:

- Data
- Sobre visões
- Óptica
- Fenômena
- Sufarcel Oci
- Porism
- Cónicas
- Livro Falácias
- Elementos da música

Euclides deixou trabalhos extensos sobre óptica, acústica, consonância e dissonância. As contribuições de Euclides são consideradas os primeiros tratados conhecidos sobre harmonia musical. Os ensinamentos de Euclides são, ainda hoje, primordiais para os estudos da mecânica, do som, da luz, da navegação, da ciência atômica, da Biologia, da medicina, enfim de vários ramos da ciência e da tecnologia.

Com origem na Geometria Euclidiana, o teorema da desigualdade triangular aparece na Proposição 20 do Livro I de Os Elementos, escrito em 300 a.C. O Teorema da Desigualdade Triangular afirma que:

Dado um triângulo ABC, o comprimento de um dos lados é sempre inferior à soma dos comprimentos dos outros dois lados, ou seja:

- (i) $AB < AC + BC$
- (ii) $AC < AB + BC$
- (iii) $BC < AB + AC$

A partir das desigualdades acima podemos concluir que:

[10] Um número se diz perfeito se é igual à soma de seus divisores positivos próprios.

$$|BC - AC| < AB < AC + BC.$$

Traçando uma analogia com a geometria plana, podemos determinar a desigualdade triangular nos números reais. Sejam a e b números reais, temos:

$$-|a| \leq a \leq |a| \text{ e } -|b| \leq b \leq |b|.$$

Somando as desigualdades membro a membro, temos:

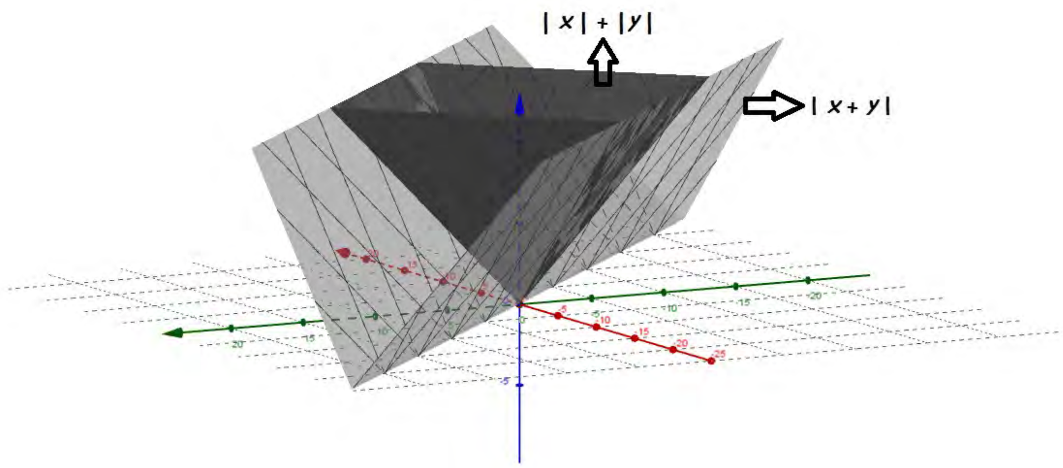
$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$
$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Este resultado nos permite escrever as seguintes desigualdades:

- $|a - b| \leq |a| + |b|$.
- $|a - b| \geq |a| - |b|$.
- $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

Com o auxílio do Geogebra é possível demonstrarmos graficamente esta desigualdade triangular, como pode-se observar nos gráficos apresentados nas figuras 15 e 16.

Figura 15 - Representação Gráfica da Desigualdade Triangular.I.

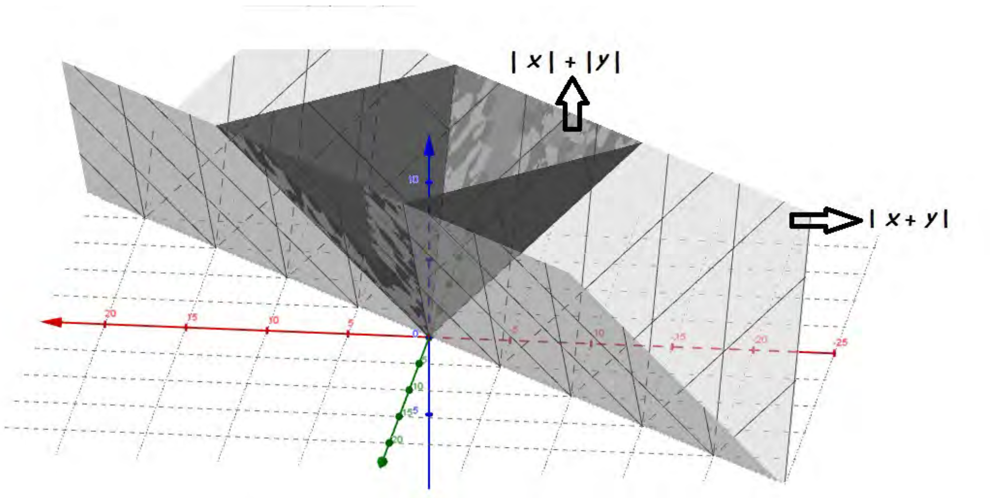


Fonte: o autor, 2017.

2.3 Desigualdade de Bernoulli

A família Bernoulli foi a que mais produziu matemáticos na história da Matemática. Cerca de uma dúzia de membros desta família destacaram-se na Matemática e

Figura 16 - Representação Gráfica da Desigualdade Triangular.II.



Fonte: o autor, 2017.

na Física. Inclusive, quatro membros chegaram a ser eleitos como sócios estrangeiros da Academia das Ciências da França. Jacob Bernoulli (1654-1705), mostrado na figura 17, nascido em Basileia, foi obrigado por seus pais a estudar filosofia e teologia, tornando-se graduado em Teologia (em 1676) e Mestre em Filosofia (em 1671). Após terminar a graduação em Teologia, foi para Genebra e começou a aprofundar seus estudos em matemática. Passou dois anos estudando com os seguidores de René Descartes. Viajou para diversos países da Europa e começou a corresponder-se com os principais matemáticos da época.

Os estudos sobre a Geometria de Descartes e os trabalhos de Wallis e Barrow acabaram despertando-lhe um grande interesse pelos infinitesimais. Seus artigos sobre máximos e mínimos de funções foram publicados na revista “Acta Eruditorum” (jornal científico publicado pela primeira vez em 1682) A partir das suas pesquisas sobre séries infinitas resultou a importante “Desigualdade de Bernoulli”

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x^n.$$

onde $x \geq -1$ é um número real e n um número natural.

A demonstração da Desigualdade de Bernoulli pode ser feita a partir do princípio da indução finita sobre n.

- Para $n = 1$, tem-se $(1+x)^1 \geq 1 + x$.

De fato, essa desigualdade é verdadeira.

- Suponhamos que a desigualdade é verdadeira para algum $n \geq 1$, ou seja, que $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$.

Figura 17 - Jacob Bernoulli.

Fonte: https://www.thefamouspeople.com/profiles/jacob-bernoulli-543.php.

- Verifica-se agora se a desigualdade será verdadeira para $n+1$. Para isso, multiplicam-se ambos os membros da desigualdade por $(1+x) \geq 0$.

$$(1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx) \cdot (1+x)$$

$$(1+x)^n \cdot (1+x) \geq 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n+1) \cdot x.$$

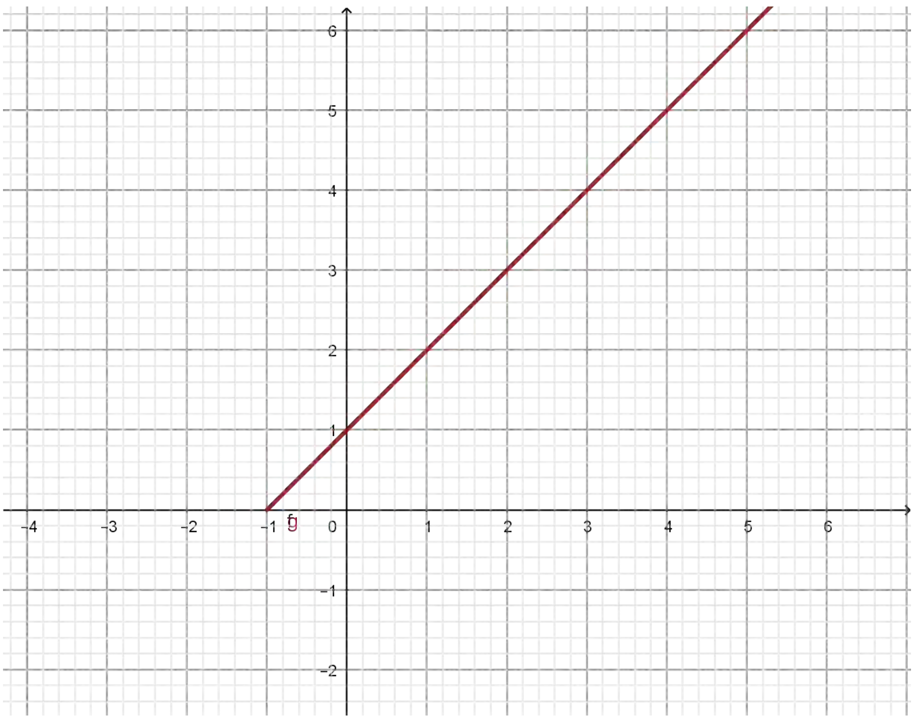
Em 1687, seu irmão treze anos mais novo, Johann Bernoulli, pediu para que Jacob lhe ensinasse matemática e começaram a estudar o cálculo apresentado por Leibniz em um artigo de 1684 sobre o cálculo diferencial. Os irmãos Bernoulli foram os primeiros a tentar compreender as publicações de Leibniz. A partir daí, começaram a elaborar com Leibniz uma série de artigos que foram publicados na Acta Eruditorum, dando origem ao Cálculo Leibniziano.

As principais contribuições de Jacob Bernoulli na área da matemática foram: a primeira integração de uma equação diferencial, os tratados sobre Álgebra e Geometria, o trabalho sobre as séries infinitas (Desigualdade de Bernoulli) e sobre as séries exponenciais, publicações sobre logaritmos e integração, a Equação de Bernoulli, a aplicação de cálculo na construção de pontes suspensas, entre outras. Não se pode deixar de comentar sua obra sobre a teoria das probabilidades e da enumeração que foi publicada postumamente pelo seu sobrinho Nicolau I.

Jacob faleceu em 16 de agosto de 1705 e sua cadeira, em Basileia, foi ocupada pelo seu irmão Johann Bernoulli.

Utilizando o Geogebra, está representada abaixo a Desigualdade de Bernoulli graficamente. Para $n = 1$ as representações gráficas coincidem, como pode-se observar na figura 18.

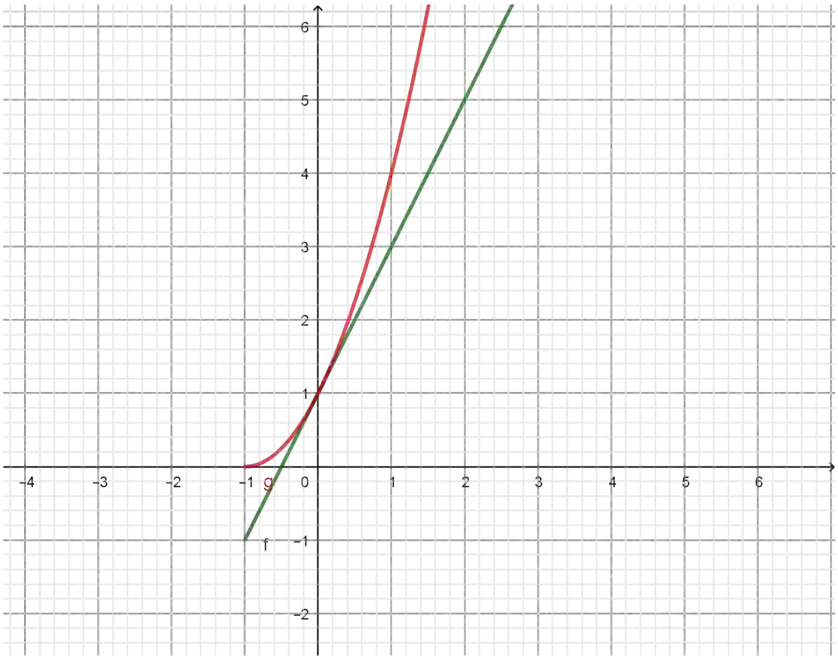
Figura 18 - Representação gráfica da Desigualdade de Bernoulli para $n = 1$.



Fonte: o autor, 2017

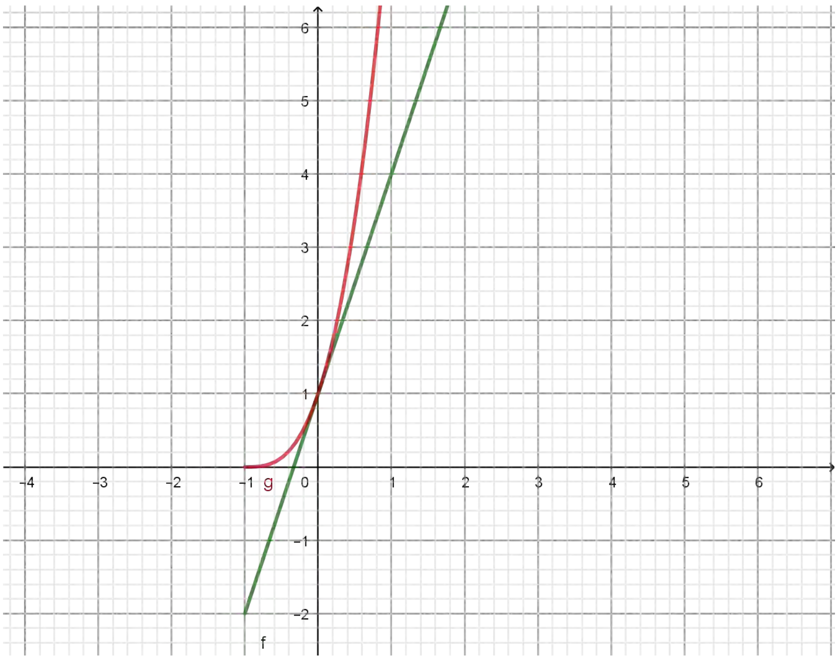
Já nas figuras 19 e 20 a reta representa a expressão $1 + nx$ e a curva, $(1 + x)^n$.

Figura 19 - Representação gráfica da Desigualdade de Bernoulli para $n = 2$.



Fonte: o autor 2017.

Figura 20 - Representação gráfica da Desigualdade de Bernoulli para $n = 3$.

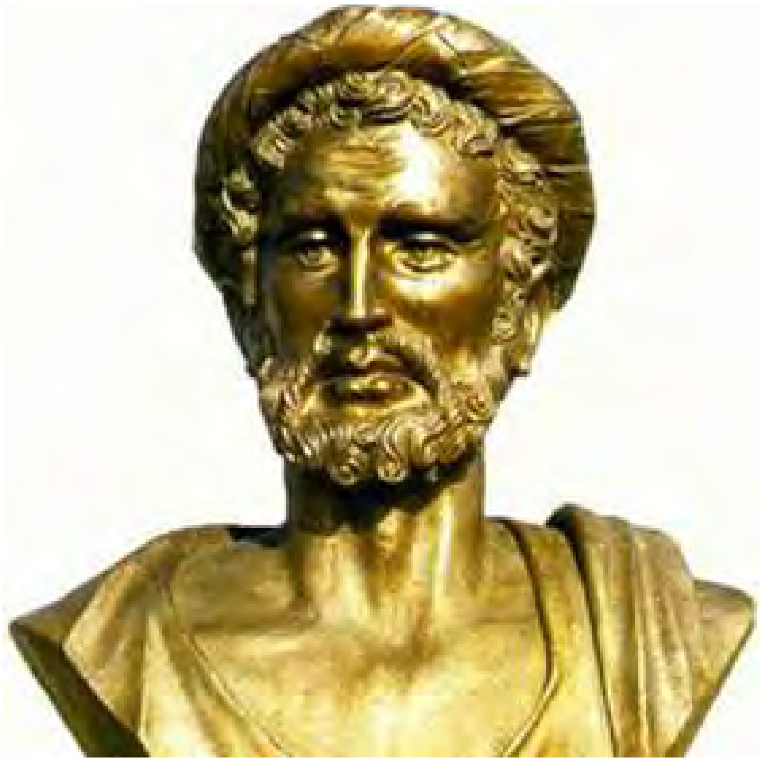


Fonte: o autor 2017.

2.4 Desigualdade das médias

Arquitas de Tarento (428–347 a.C) foi um Filósofo, Cientista, Estratego [11], Estadista e Astrônomo Grego, considerado o mais ilustre dos matemáticos pitagóricos. Acredita-se que Arquitas de Tarento tenha fundado a Mecânica Matemática, além de ser o primeiro a restringir a Matemática às disciplinas técnicas como Geometria, Aritmética, Astronomia e Acústica. Podemos observar seu busto na figura 21.

Figura 21 - Arquitas de Tarento.



Fonte: http://frasesdofilosofo.blogspot.com.br/2012/12/frases-do-filosofo-arquitas-de-tarento.html

Arquitas definiu que existiam três tipos de médias: um número é a média aritmética de dois outros quando o excesso do primeiro para o segundo é igual ao excesso do segundo para o terceiro; a média geométrica quando a proporção do segundo para o terceiro é igual a proporção do primeiro para o segundo; e a média harmônica quando a quantidade que o primeiro excede o segundo em relação ao primeiro é igual à quantidade que o segundo excede o terceiro em relação a este. Representando três números por A, BeC, podemos representar as médias segundo Arquitas das seguintes maneiras:

[11] Estratego: título militar na Grécia Antiga para designar um cargo conhecido atualmente como general.

- *Média aritmética*: Se $A - B = B - C$, então B é a média aritmética de A e C.
- *Média geométrica*: Se $\frac{B}{C} = \frac{A}{B}$, então B é a média geométrica de A e C.
- *Média harmônica*: Se $\frac{A-B}{A} = \frac{B-C}{C}$, então B é a média harmônica de A e C.

Tais conceitos referem-se às médias pitagóricas e correspondem também às definições atuais de médias entre dois valores.

As principais médias estudadas nos ensinos fundamental e médio são as Médias Aritmética, Geométrica e a Harmônica.

2.4.1 Média Aritmética

Seja x uma variável quantitativa e $x_1, x_2, \ldots, x_n$, com $n \in \mathbb{N}^*$, os valores assumidos por x. Define-se a média aritmética de x, indicada por M_A, como a divisão da soma de todos esses valores pelo número de valores, isto é:

$$M_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

Uma das aplicações da média aritmética aparece, por exemplo, no cálculo da renda média de um vendedor que recebe três salários diferentes em três meses consecutivos.

2.4.2 Média Geométrica

Dados n, com $n \geq 2$ e $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$, define-se a média geométrica desses valores, indicada por M_G, por:

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}.$$

Uma das aplicações da média geométrica aparece, por exemplo, no cálculo do aumento percentual médio que um produto sofre em reajustes consecutivos.

2.4.3 Média Harmônica

Dado um conjunto de valores não nulos, $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, define-se por média harmônica desses valores, indicada por M_H, a seguinte relação entre eles:

$$M_H = \left(\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n} \right)^{-1}.$$

Uma das aplicações da média harmônica aparece, por exemplo, no cálculo da velocidade média de um móvel que percorre as mesmas distâncias em velocidades diferentes.

A desigualdade das médias é muito utilizada em problemas de otimização (problemas de máximos e mínimos). Estes envolvem Geometria Plana e Espacial, Trigonometria, entre outras áreas da matemática.

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$, números reais estritamente positivos, definindo M_A como a média aritmética, M_G como a média geométrica e M_H como a média harmônica, podemos afirmar que:

$$M_A \geq M_G \geq M_H.$$

A igualdade das médias ocorre se, e somente se, todos os valores são iguais.

A seguir serão apresentadas uma demonstração algébrica e uma apresentação gráfica dessa desigualdade levando em consideração às médias de apenas dois valores reais e positivos, já que tais demonstrações podem ser utilizadas em turmas do Ensino Fundamental e Médio.

Dados a e b, com $a, b > 0$, temos:

$$\tfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \tfrac{2ab}{a+b}.$$

- Demonstração algébrica:

i) $M_A \geq M_G$:

Podemos afirmar que $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, então:

$$a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geq 0$$

$$a + b \geq 2\sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\tfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Portanto, $M_A \geq M_G$.

Vale ressaltar que as médias serão iguais se, e somente se, $a = b$.

ii) $M_G \geq M_H$:

A partir da desigualdade $M_A \geq M_G$ podemos concluir que:

$\tfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ eleva-se ao quadrado os dois lados da desigualdade

$\left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$ multiplica-se os dois lados da desigualdade por 4

$(a+b)^2 \geq 4ab$ dividi-se os dois lados da desigualdade por $(a+b)^2$

$$1 \geq \frac{4ab}{(a+b)^2} \text{ multiplica-se os dois lados da desigualdade por } ab$$

$$ab \geq \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \text{ extrai-se a raiz quadrada dos dois lados da desigualdade)}$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}.$$

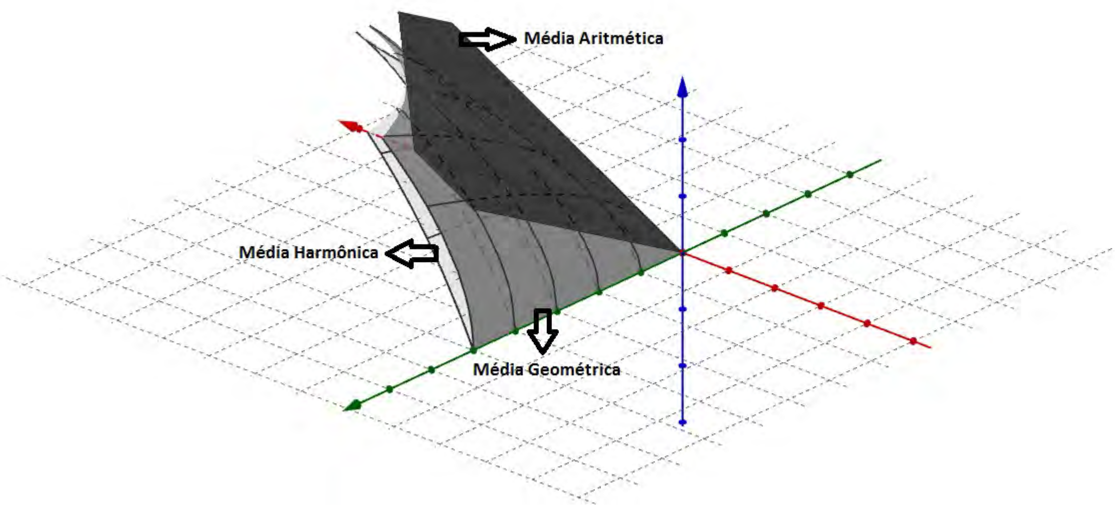
Daí, concluímos que $M_G \geq M_H$. De (i) e (ii), temos:

$$M_A \geq M_G \geq M_H.$$

- Demonstração gráfica:

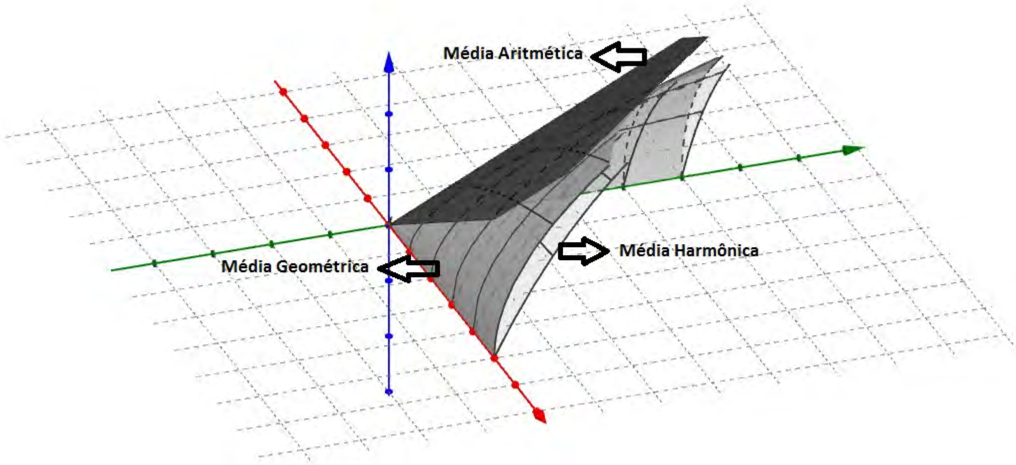
Com o auxílio do Geogebra é possível demonstrarmos graficamente esta desigualdade. Nas figuras 22, 23 e 24, estão representadas a média aritmética, a média geométrica e a média harmônica entre dois números estritamente positivos.

Figura 22 - Representação gráfica das médias.I.



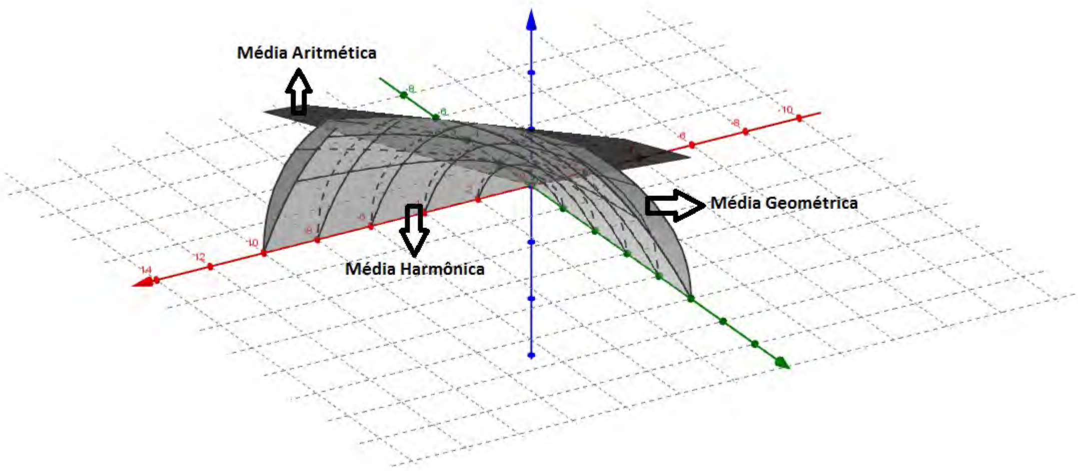
Fonte: o autor, 2017

Figura 23 - Representação gráfica das médias.II.



Fonte: o autor, 2017

Figura 24 - Representação gráfica das médias.III.



Fonte: o autor, 2017

3 DESIGUALDADES

3.1 Definição

De acordo com o dicionário Dicio *on line* [12] pode-se definir, de uma forma mais ampla, desigualdade das seguintes maneiras:

- Caráter ou condição do que não é igual: desigualdade de condições;
- Caráter do que não é liso; que não está unido: desigualdade de um terreno;
- Caráter do que é variável; inconstante: desigualdade de comportamento;
- Ausência de equilíbrio; falta de proporção. Característica do que é diferente: desigualdades ideológicas;
- Particularidade do que é injusto: os avós tratam os netos com desigualdade.

Já na Matemática entende-se por desigualdade a expressão que estabelece uma relação de ordem entre dois elementos. Para representar essa relação são utilizados os seguintes símbolos:

- $<$: "menor que"
- $>$: "maior que"
- $\leq$: "menor que ou igual a"
- $\geq$: "maior que ou igual a"

Por exemplo:

- $5 < 6$;
- $8,2 > 8,1$;
- $x \leq 3$;
- $2x + 5 \geq 15$;

Neste trabalho abordaremos as desigualdades que envolvem os símbolos de $<, >, \leq$ e $\geq$.

[12] Essa definição encontra-se no endereço eletrônico https://www.dicio.com.br/desigualdade

3.1.1 Desigualdade Estrita

As desigualdades estritas são representadas pelos símbolos “$<$”ou “$>$”. Sejam a e b números reais, temos:

i. $a < b$ se, e somente se, $b - a$ é positivo;
ii. $a > b$ se, e somente se, $a - b$ é positivo.

3.1.2 Desigualdade Não Estrita

As desigualdades não estritas são representadas pelos símbolos ”$\leq$”ou ”$\geq$”. Sejam a e b números reais, temos:

i. $a \leq b$ se, e somente se, $b - a$ é positivo ou $a = b$;
ii. $a \geq b$ se, e somente se, $a - b$ é positivo ou $a = b$.

3.1.3 Propriedades da Desigualdade

As desigualdades satisfazem as seguintes propriedades:
Sejam a e b números reais, temos:

1. $a > 0$ se, e somente se, a é positivo;

   Exemplo: $5 > 0$ se, e somente se, 5 é positivo.

2. $a < 0$ se, e somente se, a é negativo;

   Exemplo: $-3 < 0$se, e somente se, -3 é negativo.

3. $a > 0$ se, e somente se, $-a$ é negativo;

   Exemplo: $4 > 0$se, e somente se, -4 é negativo.

4. $a < 0$ se, e somente se, $-a$ é positivo;

   Exemplo: $-5 > 0$, então $-(-5) = 5$ e 5 é positivo.

5. Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$, com $c \in \mathbb{R}$ (*Transitividade*);

   Exemplo: $4 < 5$ e $5 < 6$, então $4 < 6$.

6. Se $a < b$ e $c \in \mathbb{R}$, então $a + c < b + c$;

   Exemplo: $3 < 4$, então $3 + 2 < 4 + 2$, de fato $5 < 6$.

7. Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$;

   Exemplo: $2 < 3$ e $4 < 5$, então $2 + 4 < 3 + 5$, de fato $6 < 8$.

8. Se $a < b$ e $c \in \mathbb{R}_+^*$, então $a \cdot c < b \cdot c$;

   Exemplo: $3 < 4$, então $3 \cdot 5 < 4 \cdot 5$, de fato $15 < 20$.

9. Se $a < b$ e $c \in \mathbb{R}_-^*$, então $a \cdot c > b \cdot c$;

   Exemplo: $3 < 4$, então $3 \cdot (-5) > 4 \cdot (-5)$, de fato $-15 > -20$.

10. Se $0 < a < b$ e $0 < c < d$, então $a \cdot c < b \cdot d$, com $c, d \in \mathbb{R}$;

    Exemplo: $0 < 2 < 3$ e $0 < 4 < 5$, então $2 \cdot 4 < 3 \cdot 5$, de fato $8 < 15$.

11. Se $a < b$, com ambos positivos ou negativos, então $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;

    Exemplos:

    - $3 < 4$, então $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$.
    - $-3 < -2$, então $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$.

12. Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$, com $c \in \mathbb{R}$ (*Transitividade*);

    Exemplo: $4 > 3$ e $3 > 2$, então $4 > 2$.

13. Se $a > b$ e $c \in \mathbb{R}$, então $a + c > b + c$;

    Exemplo: $3 > 2$, então $3 + 2 > 2 + 2$, de fato $5 > 4$.

14. Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$;

    Exemplo: $2 > 1$ e $4 > 3$, então $2 + 4 > 1 + 3$, de fato $6 > 4$.

15. Se $a > b$ e $c \in \mathbb{R}_+^*$, então $a \cdot c > b \cdot c$;

    Exemplo: $3 > 2$, então $3 \cdot 5 > 2 \cdot 5$, de fato $15 > 10$.

16. Se $a > b$ e $c \in \mathbb{R}_-^*$, então $a \cdot c < b \cdot c$;

    Exemplo: $3 > 2$, então $3 \cdot (-5) < 2 \cdot (-5)$, de fato $-15 < -10$.

17. Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$, então $a \cdot c > b \cdot d$, com $c, d \in \mathbb{R}$;

    Exemplo: $2 > 1 > 0$ e $4 > 3 > 0$, então $2 \cdot 4 > 1 \cdot 3$, de fato $8 > 3$.

18. Se $a > b$, com ambos positivos ou negativos, então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

    Exemplos:

    - $3 > 2$, então $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.
    - $-4 > -5$, então $-\frac{1}{4} < -\frac{1}{5}$.

3.2 Definição de Inequações

Entende-se por inequação a sentença aberta representada por uma desigualdade que possui pelo menos uma variável. A desigualdade $x - 5 > 7$ é um exemplo de inequação onde o x assume o papel da variável. O primeiro membro e o segundo membro da inequação são separados por um sinal de desigualdade.

$$\underbrace{4x+2}_{1^\circ \text{ Membro}} > \underbrace{7x-1}_{2^\circ \text{ Membro}} \tag{4}$$

- Conjunto Universo: Entende-se por Conjunto Universo o conjunto formado por todos os valores que a variável pode assumir. O Conjunto Universo é representado por **U**. Nas turmas de 7° e 8° anos quando o Conjunto Universo não é citado, deve-se considerar o Conjunto Universo como sendo o Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$).

- Conjunto Verdade: Entende-se por Conjunto Verdade o conjunto formado por valores de **U** que tornam verdadeira a inequação. Desta forma pode-se afirmar que o Conjunto Verdade é um subconjunto do Conjunto Universo. O Conjunto Verdade é representado por **V**. Este também é conhecido como Conjunto Solução e representa-se por **S**.

3.2.1 Resolução Algébrica de uma inequação do 1° grau com uma variável

Para encontrar a solução de uma inequação do 1° com uma variável, utilizamos as propriedades das desigualdades para resolvê-las.

Exemplos:

1. Admita $x \in \mathbb{N}$, resolva a inequação $x + 3 < 8$.

   $x + 3 < 8$ (adicionamos (-3) aos dois membros)

   $x + 3 + (-3) < 8 + (-3)$

   $x < 5$.

   Logo, o conjunto-solução desta inequação é dado por $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

2. Admita $x \in \mathbb{Z}$, resolva a inequação $3(x - 2) \geq -15$.

   $3(x - 2) \geq -15$ (aplicamos a propriedade distributiva no primeiro membro)

   $3x - 6 \geq -15$ (adicionamos 6 aos dois membros)

   $3x - 6 + 6 \geq -15 + 6$

$3x \geq -9$ (dividimos os dois membros por 3)

$x \geq -3$.

Logo, o conjunto-solução desta inequação é dado por $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

3. Admita $x \in \mathbb{R}$, resolva a inequação $2x + 13 \geq 5x - 8$.

   $2x + 13 \geq 5x - 8$ (adicionamos (-13) aos dois membros)

   $2x + 13 + (-13) \geq 5x - 8 + (-13)$

   $2x \geq 5x - 21$ (adicionamos $(-5x)$ aos dois membros)

   $2x + (-5x) \geq 5x + (-5x) - 21$

   $-3x \geq -21$ (multiplicamos ambos os membros por (-1))

   $3x \leq 21$ (dividimos ambos os membros por 3)

   $\frac{3x}{3} \leq \frac{21}{3}$

   $x \leq 7$.

   Logo, o conjunto-solução desta inequação é dado por $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 7\}$.

3.3 Abordagem Funcional Gráfica: O uso do software de matemática dinâmica, o Geogebra

3.3.1 Uso da tecnologia no Ensino da Matemática

O avanço da tecnologia e o aumento da utilização da informática nas atividades sociais fazem com que seja necessária a inserção da tecnologia também nas aulas. A tenologia deixou de ocupar o espaço de mero motivador e passa a assumir o papel de um recurso pedagógico importante quando relacionado ao conceito abordado, que servirá para auxiliar o processo de ensino-aprendizagem. O uso da tecnologia auxilia na superação de algumas dificuldades, já que este permite outras formas de tratamento de um mesmo assunto.

Costa (2004) em sua tese de doutorado destaca:

> ... a atividade profissional do professor se torna ainda mais dinâmica e complexa com as novas tecnologias, pois elas podem contribuir para transformar a cultura escolar vigente e a forma como o professor em geral e o professor de Matemática em especial vivem a sua profissão (COSTA, 2004, p. 6)

Desta forma, o professor de matemática não pode estar indiferente a estas inovações, e deve buscar meios para utilizar esta tecnologia a seu favor e, principalmente, a favor dos alunos.

Ao oferecer um ambiente de aprendizagem dinâmico, os alunos sentem-se encorajados a investigar empiricamente situações que envolvam geometria, por exemplo.

Vale ressaltar que um software de matemática dinâmica não irá substituir o professor, servirá de ferramenta para o desenvolvimento. A interação professor-aluno permanece sendo fundamental para o aprendizado.

3.3.2 Geogebra

Para a abordagem funcional gráfica das inequações utilizarei o *software* Geogebra. Sendo assim, farei uma breve apresentação: o programa do *software* Geogebra foi idealizado e desenvolvido por Markus Hohenwarter [13] para ser utilizado em ambiente de sala de aula, principalmente em educação matemática nas escolas. Seu criador, Markus Hohenwarter, iniciou o projeto em 2001 na University of Salzburg e tem continuado o desenvolvimento na Florida Atlantic University.

No *site* do próprio *software*, https://www.geogebra.org, o Geogebra está definido da seguinte forma:

"O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em um pacote fácil de usar. GeoGebra é uma comunidade em expansão com milhões de usuários localizados em praticamente todos os países. O GeoGebra tornou-se a fornecedora líder de software de matemática dinâmica, apoiando educação e inovações de ciência, tecnologia, engenharia e matemática (STEM) no processo de ensino-aprendizagem em todo o mundo."[14] (tradução que eu realizei)

De 2002 a 2016, o Geogebra ganhou 16 premiações. Em 2013, por exemplo, ganhou o *MERLOT Classics Award 2013: Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching (Las Vegas, Nevada, USA).*

O *download* é gratuito e sua utilização ajuda a tornar as aulas mais atrativas, dinâmicas e completas.

Cataneo (2011) realizou a aplicação de uma sequência didática utilizando o Geogebra com alunos do 7° ano e conclui sua pesquisa afirmando que ficou evidente a contri-

---

[13] Markus Hohenwarter, austríaco, Professor de Didática da Matemática em Johannes-Kepler-University of Linz, membro da Associação de Didática Matemática.

[14] A definição original do *site* está da seguinte maneira: "GeoGebra is dynamic mathematics software for all levels of education that brings together geometry, algebra, spreadsheets, graphing, statistics and calculus in one easy-to-use package. GeoGebra is a rapidly expanding community of millions of users located in just about every country. GeoGebra has become the leading provider of dynamic mathematics software, supporting science, technology, engineering and mathematics (STEM) education and innovations in teaching and learning worldwide."

buição do *software* no processo de ensino-aprendizagem. E comenta

> ...através da utilização do mesmo [15], em cada assunto estudado os alunos conseguiram realizar suas próprias interpretações e reflexões se baseando na construção e visualização de cada resposta encontrada por eles próprios. Além de oferecer possibilidade de análise de cada informação visivelmente reforçando a explicação do professor, melhorando e contribuindo para compreensão do aluno perante o objeto estudado(CATANEO, 2011, p. 77)

É notório que um ambiente de aprendizagem dinâmico estimula e favorece o processo de ensino-aprendizagem do aluno. Porém, vale ressaltar que a interação professor/aluno permanece extremamente importante, pois este deve corrigir e intervir quando necessário.

Para que o uso do Geogebra seja eficaz, o professor deve ter o cuidado e a preocupação com o planejamento de suas aulas, haja vista que um mau encaminhamento didático pode trazer prejuízo para o aprendizado.

[15] refere-se ao Geogebra

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A proposta de sequência didática elaborada a partir desta pesquisa e que será apresentada a seguir está dividida em 8 atividades. Inicialmente tem-se como objetivo a reflexão sobre o conceito mais amplo de desigualdade e a ferramenta didático-pedagógica a ser utilizada. Para isso serão utilizados recursos áudio visuais como textos, imagens e vídeos. Importante salientar que esta etapa pode, inclusive, ser desenvolvida dentro de uma perspectiva interdisciplinar, na qual a compreensão ampla acerca da desigualdade pode contar com as contribuições de outras áreas do conhecimento como a História, Geografia, Literatura, Português e Biologia, por exemplo.

Após o momento reflexivo, os alunos serão encorajados a retirar do material disponibilizado elementos que configurem as desigualdades e serão estimulados a representá-las em uma balança de dois pratos. Após esta etapa, o professor constrói junto à turma as compreensões simbólicas de desigualdade, além da compreensão de inequações. Desta forma é possível demonstrar a maneira como a Matemática pode representar aspectos relacionados à vida social, dando um sentido real para o conhecimento matemático.

Serão apresentados problemas motivadores baseados nos materiais apresentados anteriormente, na expectativa de que os alunos percebam como realizar as conversões corretamente, como por exemplo, da linguagem materna para algébrica, da algébrica para linguagem gráfica, além de aplicar o conceito proposto de forma exitosa na resolução de problemas. Esta sequência pretende ressaltar a importância das propriedades das desigualdades, além de um tratamento gráfico, buscando melhorar a apreensão do objeto em estudo e minorar as relações equivocadas entre equações/inequações.

4.1 Atividade 1: Desigualdade no Brasil

Para uma compreensão mais ampla do conceito de desigualdade, acredito que seja importante trazer à tona uma discussão sobre as desigualdades existentes em nossa sociedade, tais como, a desigualdade social, racial, desigualdade de gênero, entre outras. Pode-se utilizar textos, fotos e vídeos para ilustrar algumas dessas desigualdades.

Neste momento inicial da sequência, sugere-se uma proposta interdisciplinar que possa abordar o conceito de desigualdade a partir de múltiplos prismas, enriquecendo o processo reflexivo e de construção do conhecimento. Após esse momento de reflexão, deve-se solicitar aos alunos que representem algumas das desigualdades citadas numa balança de dois pratos. O objetivo é que os alunos percebam que a balança ficará desequilibrada, além de observar suas percepções em relação às desigualdades em nossa sociedade.

Como sugestão, segue um texto de Araújo et al (2006) que pode nortear as atividades propostas.[16]

> No século XVIII, o trabalho de mulheres e crianças era utilizado nas fábricas da Europa, assim como o dos homens, mas o valor da remuneração delas era inferior. Embora sempre tenham trabalhado, principalmente as mais pobres, foi apenas no século XX que as mulheres entraram maciçamente no mercado de trabalho, especialmente no período entre as duas guerras mundiais, para suprir a escassez de mão de obra, e após a década de 1970, com o crescimento da indústria e dos serviços e o surgimento de novas tecnologias. Contribuíram também para essa inserção os movimentos feministas e a chamada liberação feminina, propiciada, entre outros fatores, pelo uso da pílula anticoncepcional, que permitiu o planejamento familiar. Dados do Banco Mundial mostraram que, em 2014, as mulheres já eram 39,6% da mão de obra no mundo e que essa proporção era maior nas famílias com rendas mais baixas, em razão da necessidade de melhorar suas condições de vida. As mulheres representam mais da metade da população do Brasil. De acordo com o Censo de 2010, 37,3% das famílias têm mulheres como responsáveis, embora elas ainda recebam, na média, salários inferiores aos dos homens.(ARAUJO et al., 2016, p. 125)

A partir deste texto, pode-se elaborar as seguintes situações para que o aluno as represente numa balança de dois pratos.

1. Em 2014, o percentual em relação à quantidade de mão de obra representada pelas mulheres e o percentual em relação à quantidade de mão de obra representada pelos homens.

   A solução esperada se encontra na figura 25.

2. De acordo com o Censo de 2010, a quantidade de homens responsáveis pela família e a quantidade de mulheres responsáveis pela família.

   A solução esperada se encontra na figura 26.

3. Média salarial das mulheres e média salarial dos homens.

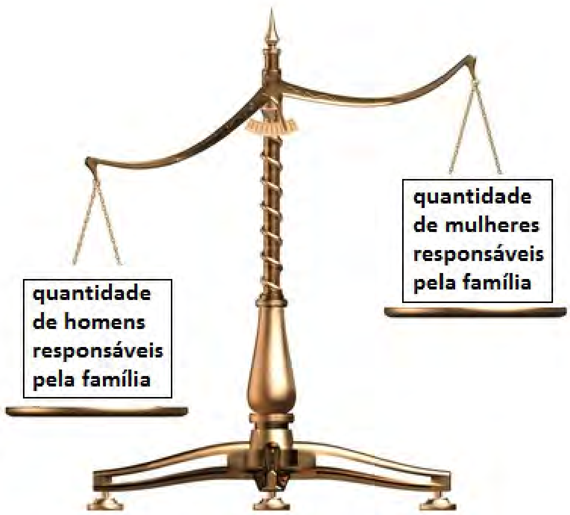
   A solução esperada se encontra na figura 27.

[16] Em anexo, seguem outros textos, charges, que também poderão ser utilizados (ver anexos A, B, C, D, E e F).

Figura 25 - Solução esperada na questão 1.

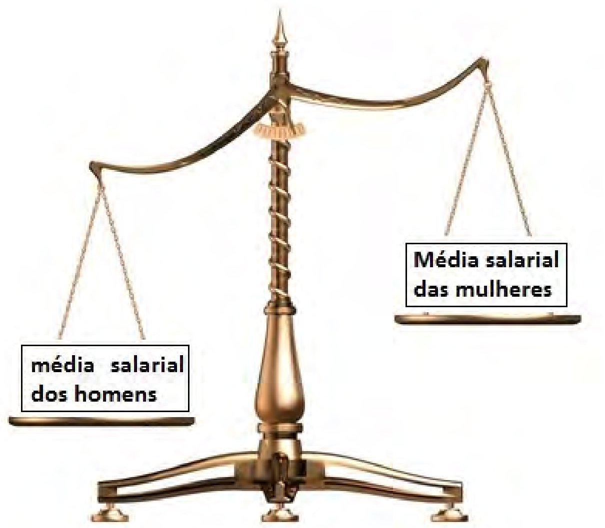
Fonte: o autor, 2017

Figura 26 - Solução esperada na questão 2.



Fonte: o autor, 2017

Figura 27 - Solução esperada na questão 3.



Fonte: o autor, 2017

4.2 Atividade 2: Definição de Desigualdade

Após essas discussões, define-se desigualdade matemática, apresentando os símbolos utilizados e suas propriedades. Neste momento, é importante utilizar exemplos com comparações entre os números reais visando a compreensão da utilização dos símbolos de $<, >, \geq$ e $\leq$. A discussão sobre as propriedades das desigualdades é fundamental para um aprendizado eficaz, pois esta compreensão permitirá que os alunos percebam que, apesar da proximidade dos conceitos de equação e inequação, eles possuem suas particularidades. Deve-se assim, ter o cuidado para não relacioná-los de forma equivocada.

4.3 Atividade 3: Tratamento e conversão

Esta atividade traz como objetivo desenvolver a capacidade do aluno na resolução de problemas utilizando o tratamento e a conversão. Sendo capaz de interpretar e reescrever problemas utilizando a linguagem materna e que, posteriormente, ele comece a adquirir a habilidade de realizar a conversão da linguagem materna para a linguagem algébrica. É imprescindível que o professor realize a discussão sobre as conversões, tendo em vista que estas não ocorrem naturalmente por parte dos alunos.

O *Problema 1* pretende trabalhar o tratamento, capacitando o aluno a ler o problema e escrever a partir de sua língua materna o que será pedido.

Já o *Problema 2* visa capacitar o aluno a realizar a conversão da linguagem materna para a linguagem algébrica.

Problema 1: Em uma empresa Juliana e Pedro exercem a mesma função. Entretanto, Pedro recebe mais que o dobro do salário de Juliana. Com base no enunciado, responda as seguintes perguntas:

1. Se Juliana ganhasse R$1000,00, o que poderíamos dizer em relação ao salário de Pedro?
2. Se Juliana ganhasse R$3000,00, o que poderíamos dizer em relação ao salário de Pedro?
3. Caso o salário de Pedro fosse de R$2000,00, o que podemos dizer sobre o salário de Juliana?
4. Caso o salário de Pedro fosse de R$5000,00, o que podemos dizer sobre o salário de Juliana?

Espera-se que os alunos deem as seguintes respostas:

1. O salário de Pedro será maior que R$2000,00.
2. O salário de Pedro será maior que R$6000,00.
3. O salário de Juliana será menor que R$1000,00.
4. O salário de Juliana será menor que R$2500,00.

Problema 2: Admita X como o salário de Juliana, e Y o salário de Pedro. Portanto qual das opções abaixo melhor representa a relação entre os salários de Juliana e Pedro?

1. $Y < 2X$
2. $Y \leq 2X$
3. $Y > 2X$
4. $Y \geq 2X$

A resposta esperada é a opção (3).

4.4 Atividade 4: Definir Inequações

Tem-se como objetivo nesta atividade capacitar o aluno a realizar a conversão da linguagem materna para algébrica. Neste momento deve-se destacar quando uma desigualdade é uma inequação e a partir daí define-se o conceito de inequação do 1° grau com uma variável.

Problema 3: Em um concurso para uma escola pública foi ofertada, em 2017, certa quantidade de vagas reservadas para o sistema de cotas. No ano seguinte, foram acrescentadas 3 vagas. Todavia este concurso permaneceu com uma quantidade total de vagas para cotista inferior a 15. Admita x como a quantidade de vagas em 2017 e represente algebricamente a situação descrita acima.

A resposta esperada é $x + 3 < 15$.

4.5 Atividade 5: Resolvendo algebricamente inequações

Retomar o problema 3, trabalhado na atividade anterior, com o objetivo de apresentar a resolução de inequações do 1º grau.

Num primeiro momento, sugere-se que seja montada uma tabela com diferentes valores para a variável x. E a partir daí verificar quais seriam os possíveis valores de x, para os quais a inequação seja verdadeira. Importante ressaltar que o conjunto universo desta situação é o conjunto dos números naturais. Observe o exemplo na tabela 4:

Tabela 4 - Testando valores como possíveis soluções.

x	$x+3$	$x+3<15$	**Solução**
1	$1+3=4$	$4<15$	verdadeiro
2	$2+3=5$	$5<15$	verdadeiro
3	$3+3=6$	$6<15$	verdadeiro
4	$4+3=7$	$7<15$	verdadeiro
5	$5+3=8$	$8<15$	verdadeiro
6	$6+3=9$	$9<15$	verdadeiro
7	$7+3=10$	$10<15$	verdadeiro
8	$8+3=11$	$11<15$	verdadeiro
9	$9+3=12$	$12<15$	verdadeiro
10	$10+3=13$	$13<15$	verdadeiro
11	$11+3=14$	$14<15$	verdadeiro
12	$12+3=15$	$15=15$	falso
13	$13+3=16$	$16>15$	falso
14	$14+3=17$	$17<15$	falso
...	...	...	...

Fonte: o autor, 2017

A partir daí, o aluno consegue perceber que o conjunto verdade (V) da inequação $x + 3 < 15$ é dado por $V = \{x \in \mathbb{N}^*; x < 12\}$.

A partir deste momento, definir as propriedades de inequações para possibilitar resolução das inequações a partir de um tratamento algébrico.

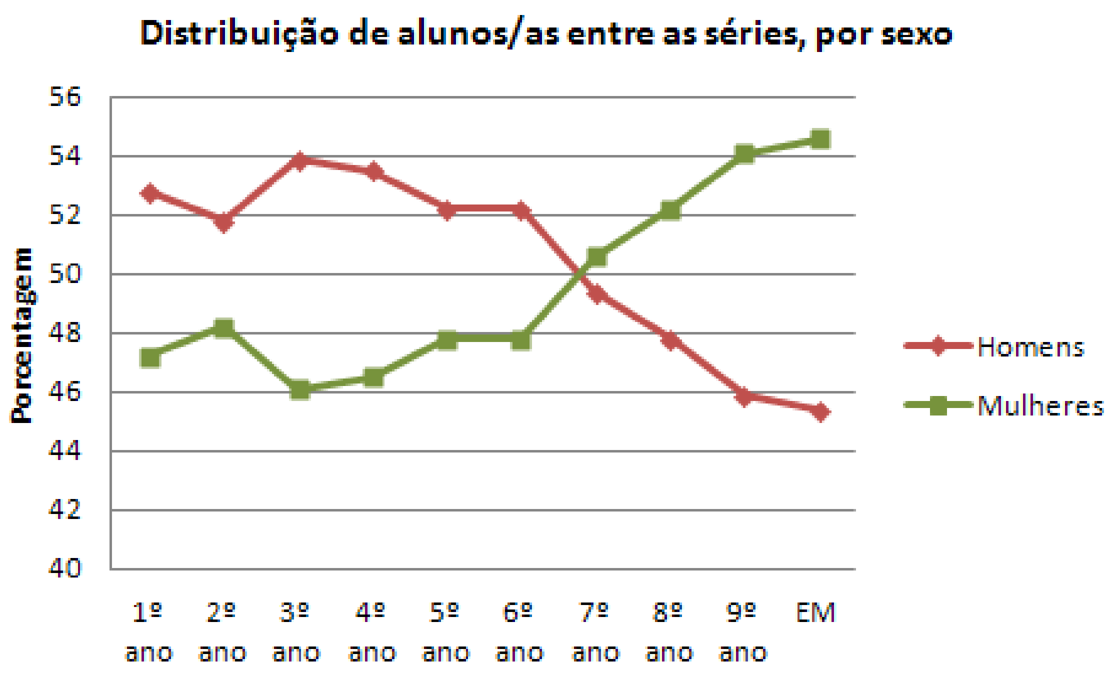
4.6 Atividade 6: Análise gráfica

Nesta atividade espera-se que o aluno seja capaz de interpretar um gráfico e de realizar a conversão da linguagem gráfica para linguagem materna. Esta atividade propicia ao aluno a possibilidade de perceber que na região abaixo da linha estão representados os valores que são menores que os valores dados e na região acima da linha estão representados os valores maiores. Desta forma, inicia-se a preparação junto ao aluno para que ocorra o entendimento da análise gráfica possibilitando a introdução do ensino da conversão da linguagem algébrica para linguagem gráfica e vice versa.

Problema 4: Discutir desigualdades sociais nas escolas brasileiras é o primeiro passo para solucionar problemas que atingem milhões de crianças e jovens, com o intuito de promover uma Educação mais democrática e de melhor qualidade.

O gráfico abaixo representa a distribuição de alunos e alunas entre as séries do 1° ano do Ensino Fundamental ao Ensino Médio, conforme pode-se observar na figura 28.

Figura 28 - Gráfico desigualdade de gênero na escolaridade.



Fonte: https://ensaiosdegenero.wordpress.com/2012/09/30/desigualdades-de-genero-e-corraca-na-educacao-basica-no-brasil

A partir da análise do gráfico, responda o que se pede:

1. Qual a porcentagem aproximada de homens no 2º ano do ensino fundamental?
2. Qual a porcentagem aproximada de mulheres no 2º ano do ensino fundamental?
3. Qual a porcentagem aproximada de homens no 9º ano do ensino fundamental?
4. Qual a porcentagem aproximada de mulheres no 9º ano do ensino fundamental?
5. Em que ano as porcentagens de homens e mulheres se igualaram?
6. Em quais anos a porcentagem de homens é maior que a porcentagem de mulheres?
7. Em quais anos a porcentagem de homens é menor que a porcentagem de mulheres?

As repostas esperadas são:

1. 52%.
2. 48%.
3. 46%.
4. 54%.
5. 7º ano.
6. Do 1º ao 6º ano.
7. Do 8º ao ensino médio.

4.7 Atividade 7: Análise gráfica das inequações com auxílio do Geogebra

O objetivo dessa atividade é introduzir o uso do Geogebra na resolução das inequações. Para isso, sugere-se uma atividade dividida em três passos para que cada um deles seja discutido com os alunos e, desta forma, capacite-os para realizar a conversão da linguagem algébrica para gráfica. A possibilidade de os alunos manipularem o *software* Geogebra, com o professor sendo o mediador da atividade, permitirá uma melhor compreensão da análise gráfica das inequações, além de auxiliar no entendimento das diferenças entre equações e inequações.

Nesta atividade propõe-se que seja retomado o seguinte problema trabalhado na atividade anterior. *"Admita X como o salário de Juliana, e Y o salário de Pedro. Portanto qual das opções abaixo melhor representa a relação entre os salários de Juliana e Pedro?"*. Na atividade anterior solicitou-se a representação algébrica desta situação.

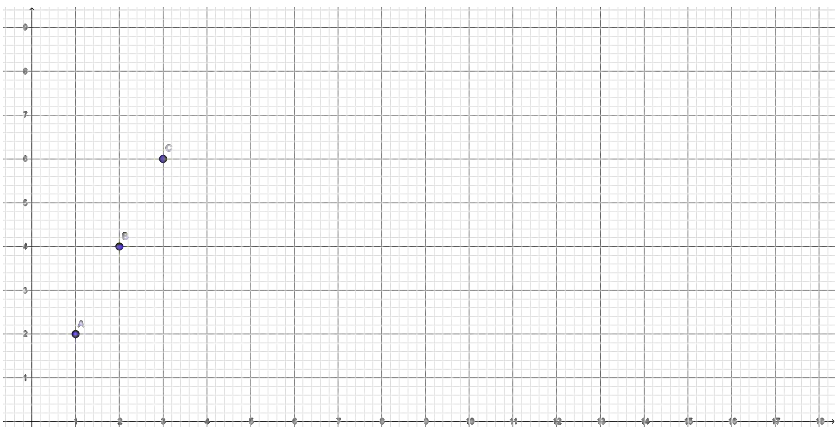
Pretende-se agora, com auxílio do *software* Geogebra, que o aluno explore algumas situações envolvendo uma análise gráfica, tais como: exemplos de valores onde os salários se igualam e sua representação gráfica, exemplos de valores onde o salário de Pedro é maior que o dobro do salário de Juliana, exemplos onde o salário de Pedro é menor que o dobro do salário de Juliana, além da compreensão da representação gráfica dessas possibilidades. É importante ressaltar que deve-se supor que o salário pode assumir qualquer valor real não negativo, e então seguir os passos abaixo:

1°*passo:*

Escolhe-se aleatoriamente 3 pontos [17] onde o par ordenado destes representem a igualdade *"o salário de Pedro igual ao dobro do salário de Juliana"*

Na figura 29 está representada uma possibilidade de escolha dos pontos.

Figura 29 - Três possíveis escolhas para os pontos.



Fonte: o autor, 2017

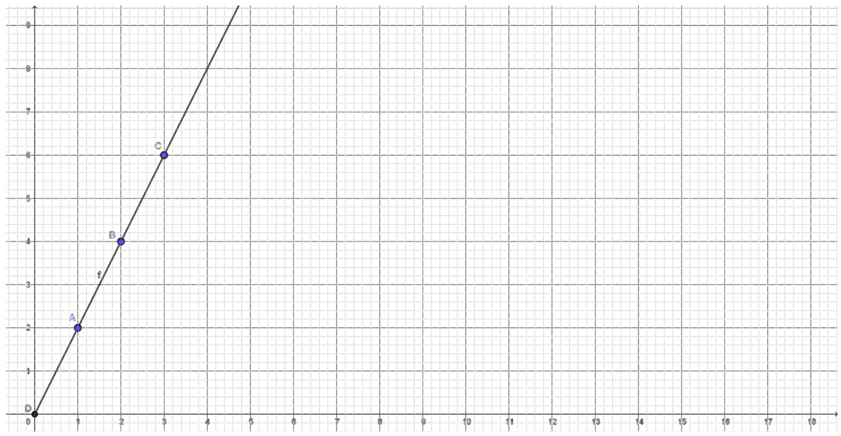
Nesse momento é importante que os alunos sejam levados a reflexão dos motivos pelos quais os pontos escolhidos devem estar no primeiro quadrante do plano cartesiano.

2°*passo:*

Traçar uma semirreta com origem no ponto (0, 0) passando pelos pontos escolhidos anteriormente, conforme pode-se observar na figura 30.

[17] A escolha de 3 pontos é uma sugestão, é importante que sejam escolhidos pelo menos dois pontos

Figura 30 - Semirreta passando pelos pontos escolhidos.



Fonte: o autor, 2017

A partir daí, vale ressaltar que mesmo escolhendo apenas dois pontos para traçar a semirreta, esta passa por quaisquer que sejam os pontos escolhidos pelos alunos. Destacando assim, que todos os pontos que pertencem à semirreta traçada, o valor da coordenada de y é o dobro da coordenada de x. Admitindo que os salários de Pedro e Juliana podem assumir qualquer valor real positivo, todos os pontos que pertencem à essa semirreta satisfazem a afirmação *"o salário de Pedro igual ao dobro do salário de Juliana"*.

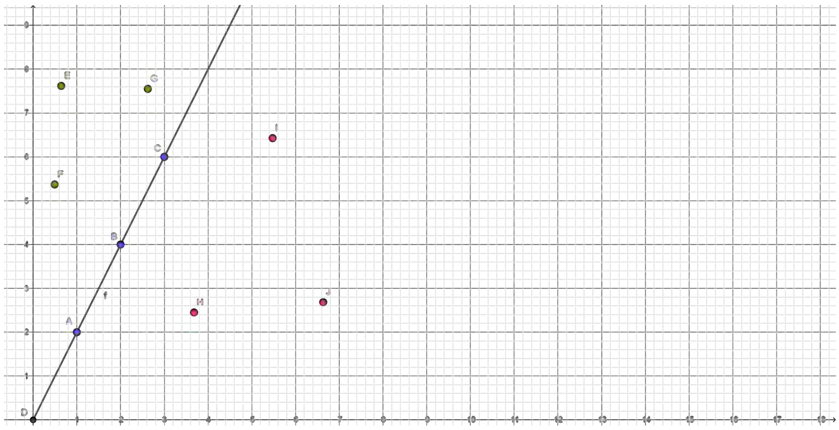
3°*passo:*

Construir dois ou mais pontos que representem o salário de Pedro maior que o dobro do salário de Juliana. E logo após, construir pontos que representem o salário de Pedro menor que o dobro do salário de Juliana.

Na figura 31 está representada uma possibilidade para a escolha dos pontos.

No exemplo representado pela figura 31, os pontos E, F e G são alguns dos possíveis pontos onde suas coordenadas representam o salário de Pedro maior que o dobro do salário de Juliana. Já os pontos H, I e J, representam a situação onde o salário de Pedro é menor que o dobro do salário de Juliana.

Figura 31 - Pontos escolhidos.



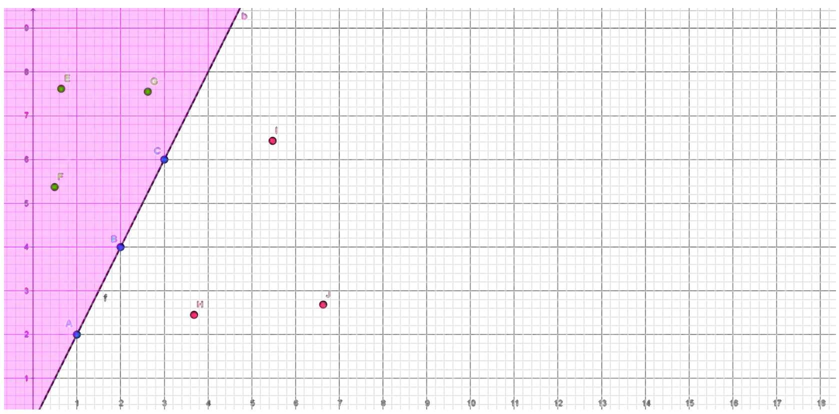
Fonte: o autor, 2017

4°*passo:*

Após a discussão sobre esses pontos, deve-se digitar no campo de entrada do Geogebra as seguintes inequações:

1. $y > 2x$, conforme a figura 32.

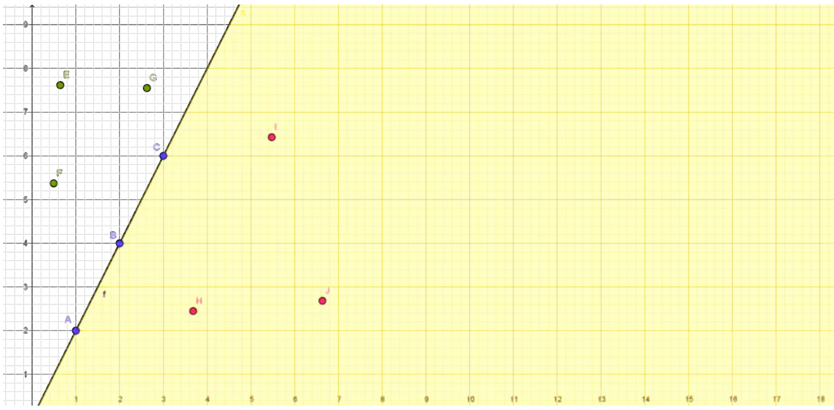
Figura 32 - $y > 2x$.



Fonte: o autor, 2017

2. $y < 2x$, como pode-se observar na figura 33.

Figura 33 - $y < 2x$.



Fonte: o autor, 2017

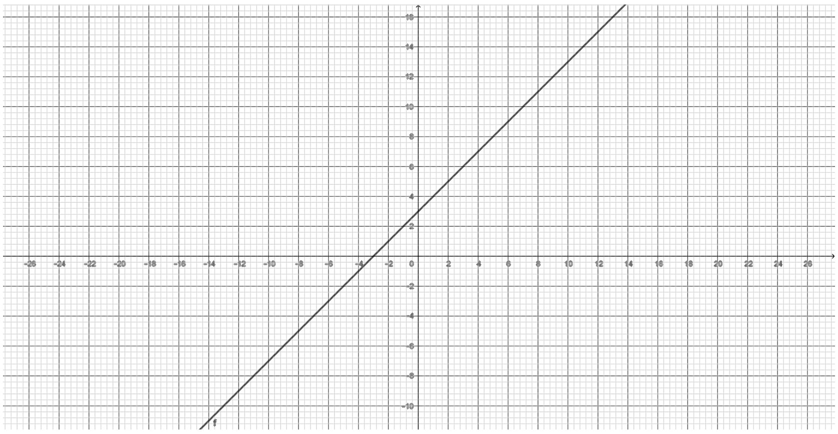
Neste momento, é importante ressaltar que todos os pontos das regiões em destaque, atendem suas respectivas desigualdades. É fundamental reforçar que, como as variáveis tratam do valor dos salários, leva-se em consideração apenas o primeiro quadrante. Caso o conjunto universo fosse o conjunto dos números reais, as regiões em destaque nos demais quadrantes também atenderiam as suas respectivas inequações.

4.8 Atividade 8: Resolvendo inequações com auxílio do Geogebra

O objetivo dessa atividade é que o aluno seja capaz de resolver inequações a partir de uma análise gráfica. Desta forma, acredita-se que serão capazes de realizar a conversão da linguagem algébrica para linguagem gráfica. E assim, compreender o conceito de inequação, além de capacitá-los a diferenciar equações e inequações. Para isso, será proposto que seja retomada a atividade 4 onde resolveu-se algebricamente a inequação $x + 3 < 15$, admitindo $x \in \mathbb{N}^*$. Agora, esta mesma inequação será resolvida a partir de uma dinâmica com o auxílio do Geogebra, porém nesta atividade iremos considerar $x \in \mathbb{R}$. Para o desenvolvimento desta atividade deve-se seguir os seguintes passos:

<u>1°*passo:*</u> Digitar no "campo de entrada"um dos membros da desigualdade. Neste caso, pode-se colocar "$y = x + 3$", como pode ser observado na figura 34.

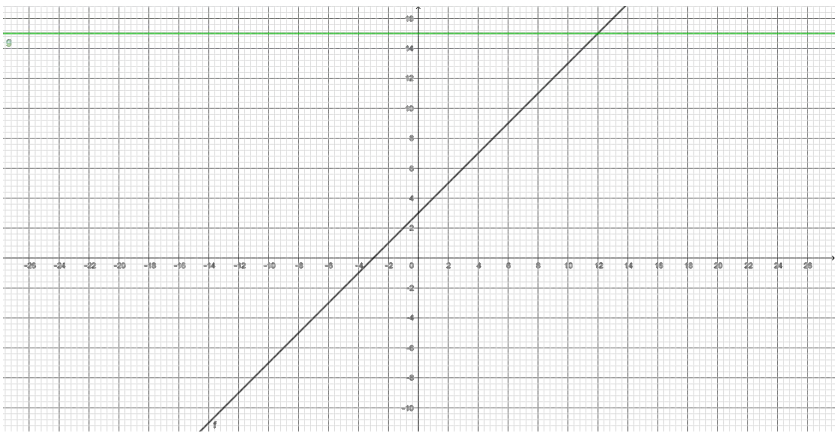
Figura 34 - $y = x + 3$.



Fonte: o autor, 2017

2°*passo:* Digitar no "campo de entrada"o outro membro da desigualdade. Neste caso, coloca-se "$y = 15$", conforme a figura 35.

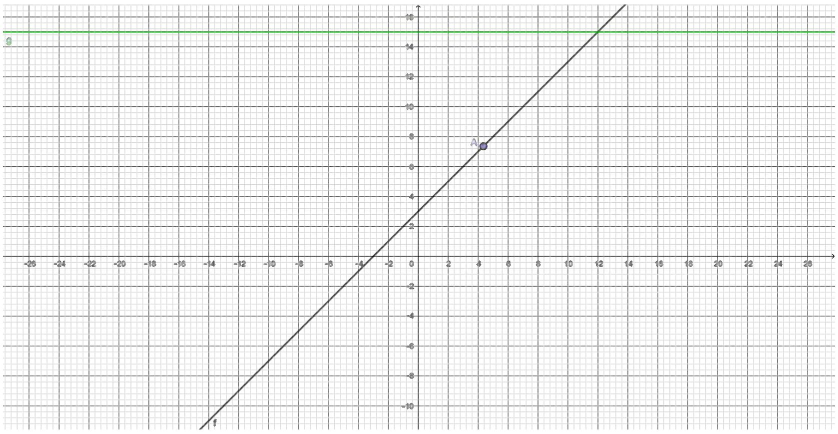
Figura 35 - $y = x + 3$ e $y = 15$.



Fonte: o autor, 2017

3°*passo:* Criar um ponto móvel sobre a reta que é representada por $y = x+3$, como na figura 36.

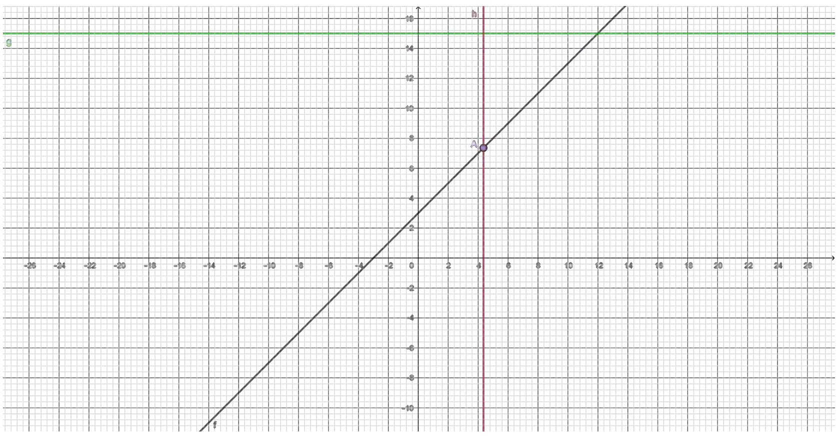
Figura 36 - Ponto móvel A.



Fonte: o autor, 2017

<u>4°*passo:*</u> Traçar uma reta perpendicular passando pelo eixo das abscissas e o ponto móvel criado, como pode-se observar na figura 37.

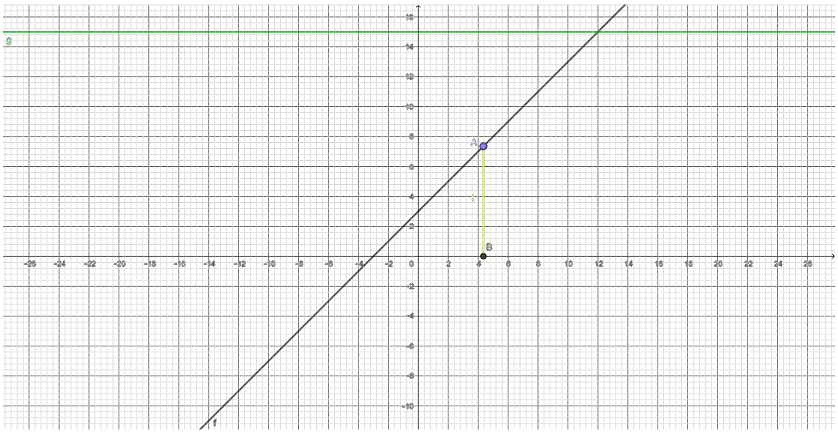
Figura 37 - Reta perpendicular passando por A.



Fonte: o autor, 2017

<u>5°*passo:*</u> Traçar um segmento de reta sobre a reta perpendicular traçada anteriormente, com suas origens no ponto móvel e no ponto de intersecção com o eixo das abscissas. Ao final, ocultar a reta perpendicular e, desta forma, teremos a figura 38.

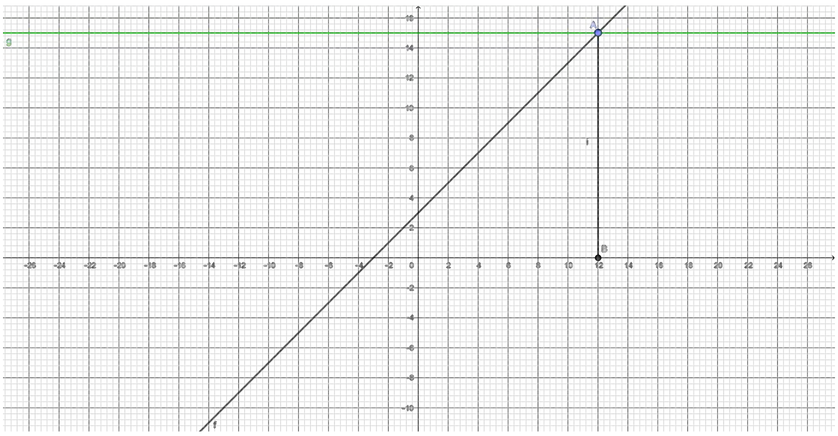
Figura 38 - Segmento de reta com origens em A e em B.



Fonte: o autor, 2017

<u>6°*passo:*</u> Levar o ponto móvel para intersecção das retas "$y = x + 3$"e "$g = 15$"traçadas anteriormente e criar um ambiente de discussão para que os alunos percebam que a coordenada x indica a solução da equação $x + 3 = 15$, conforme destacada na figura 39.

Figura 39 - Solução da equação $x + 3 = 15$.

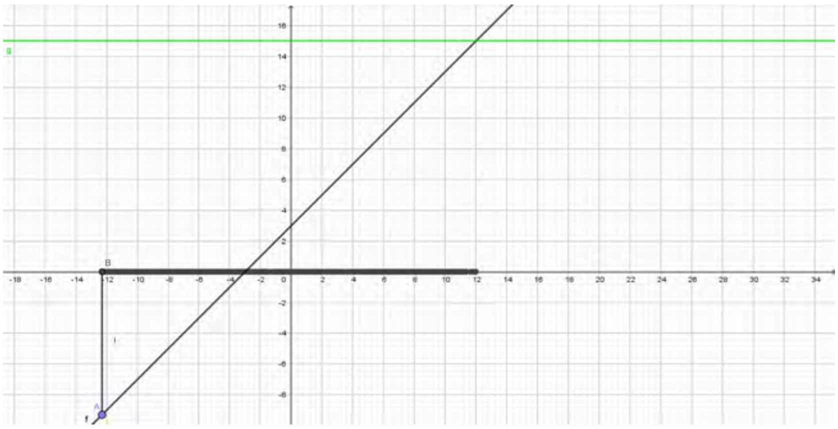


Fonte: o autor, 2017

<u>7°*passo:*</u> Habilitar o rastro do ponto de intersecção com o eixo das abscissas.

<u>8°*passo:*</u> Faz-se o ponto móvel deslocar-se sobre a reta de acordo com a inequação inicial proposta. Ao deslocar este ponto móvel, o ponto de intersecção com o eixo das abscissas também irá deslocar-se sobre este eixo e, seu rastro, irá destacar possíveis soluções da inequação, como pode-se observar na figura 40.

Figura 40 - Solução da inequação $x + 3 < 15$.



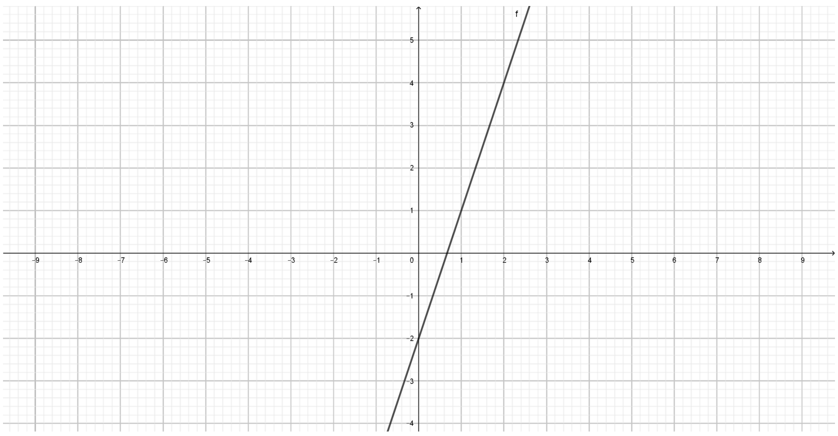
Fonte: o autor, 2017

Desta forma, pode-se afirmar que a solução real da inequação $x + 3 < 15$ é dada por $\{x \in \mathbb{R}; x < 12\}$.

A seguir, pode-se propor uma atividade que envolva a desigualdade entre duas expressões algébricas. Como, por exemplo, a resolução da inequação $3x - 2 \geq -x + 2$. Para isso, deve-se adotar os seguintes passos:

1°*passo:* Digitar no "campo de entrada"um dos membros da desigualdade. Pode-se colocar "$y = 3x - 2$", como pode ser observado na figura 41.

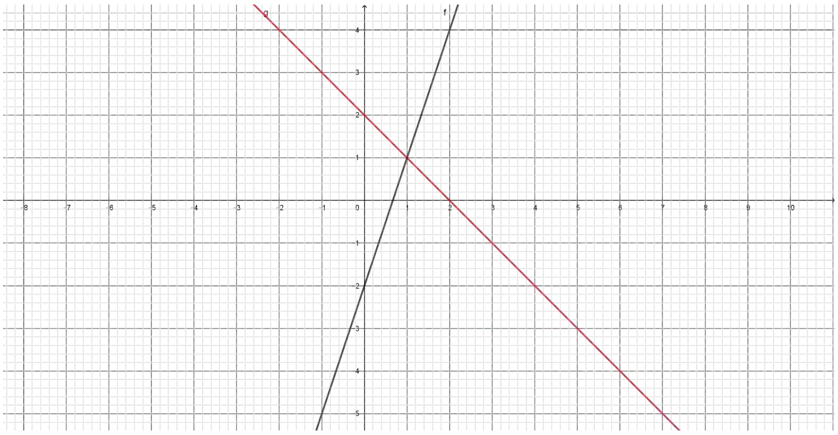
Figura 41 - $y = 3x - 2$.



Fonte: o autor, 2017

2°*passo:* Digitar no "campo de entrada"o outro membro da desigualdade. Neste caso, coloca-se "$y = -x + 2$", conforme a figura 42.

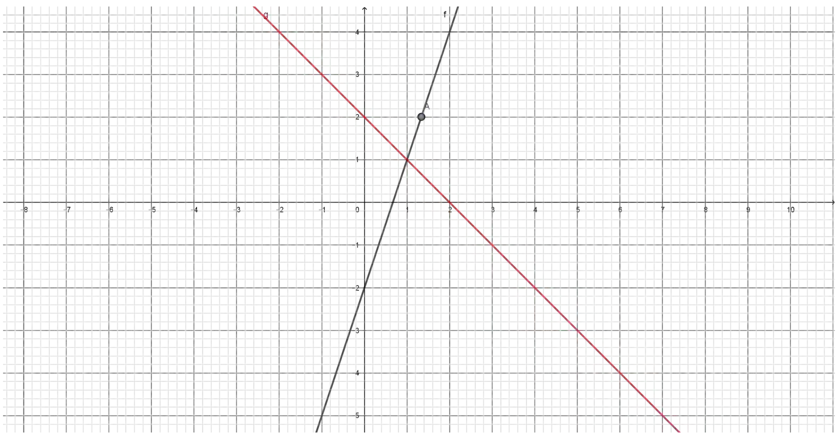
Figura 42 - $y = 3x - 2$ e $y = -x + 2$.



Fonte: o autor, 2017

3°*passo:* Criar um ponto móvel sobre a reta que é representada por $y = 3x - 2$, como na figura 43.

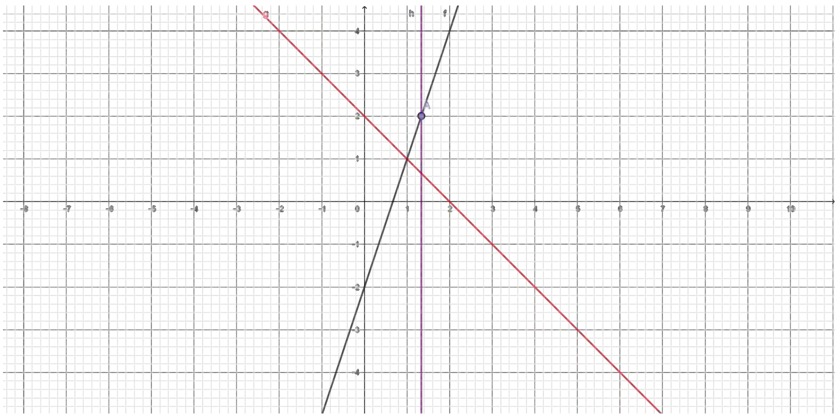
Figura 43 - Ponto móvel A.



Fonte: o autor, 2017

4°*passo:* Traçar uma reta perpendicular passando pelo eixo das abscissas e o ponto móvel criado, como pode-se observar na figura 44.

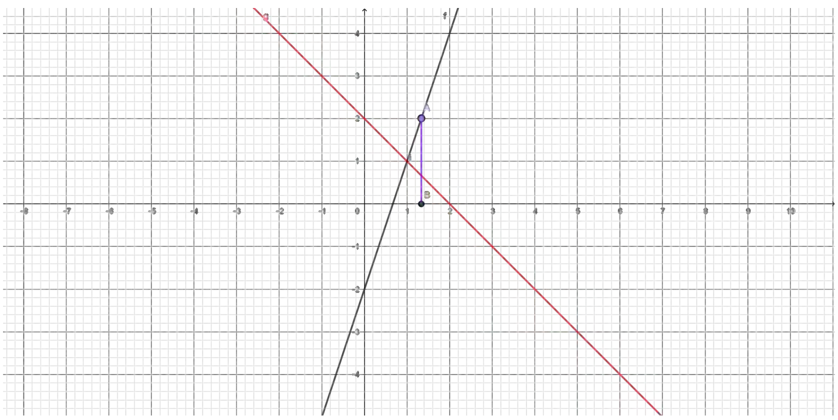
Figura 44 - Reta perpendicular passando por A.



Fonte: o autor, 2017

5°*passo:* Traçar um segmento de reta sobre a reta perpendicular traçada anteriormente, com suas origens no ponto móvel e no ponto de intersecção com o eixo das abscissas. Ao final, ocultar a reta perpendicular e, desta forma, teremos a figura 45.

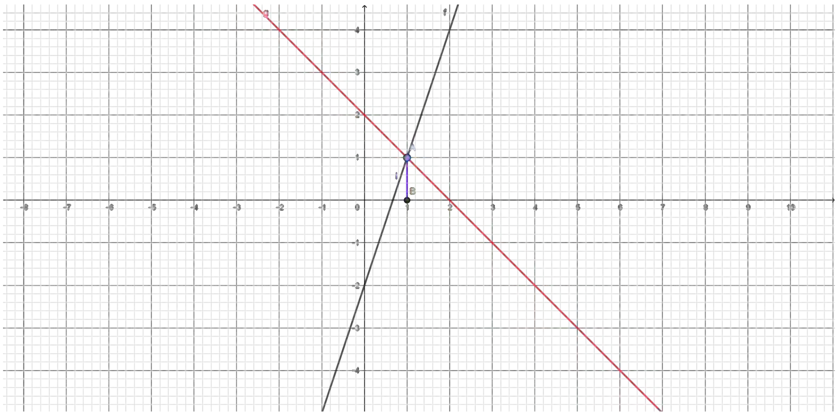
Figura 45 - Segmento de reta com origens em A e em B.



Fonte: o autor, 2017

6°*passo:* Levar o ponto móvel criado para intersecção das retas "$y = 3x - 2$"e "$y = -x + 2$"traçadas anteriormente e criar um ambiente de discussão para que os alunos percebam que a coordenada x indica a solução da equação $3x - 2 = -x + 2$, conforme destacada na figura 46.

Figura 46 - Solução da equação $3x - 2 = -x + 2$.

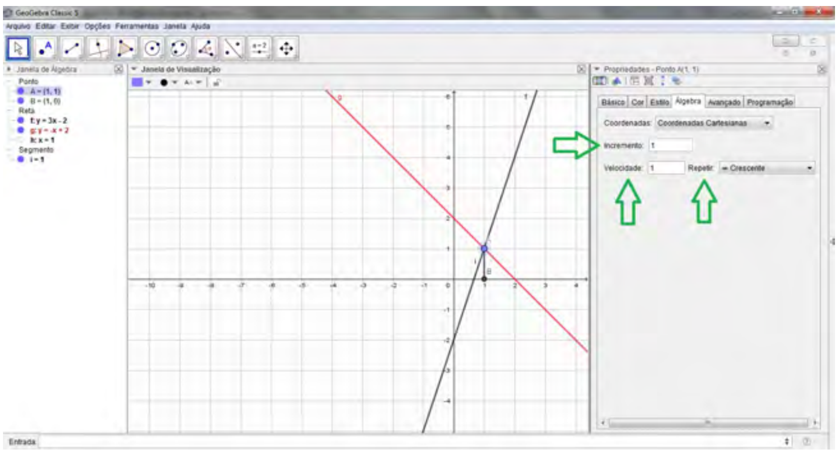


Fonte: o autor, 2017

7°*passo:* Habilitar o rastro do ponto de intersecção com o eixo das abscissas.

8°*passo:* Clicar com o botão direito do *mouse* sobre o ponto A, selecionar a opção "propriedades"e, na opção "incremento"alterar para 0.03, na opção "velocidade"alterar para 0.2 e na opção "repetir", selecionar "crescente (uma vez)". O objetivo desta alteração é permitir que o rastro do ponto B permaneça contínuo destacando as possíveis soluções da inequação dada. É possível observar a janela "propriedades"na figura 47.

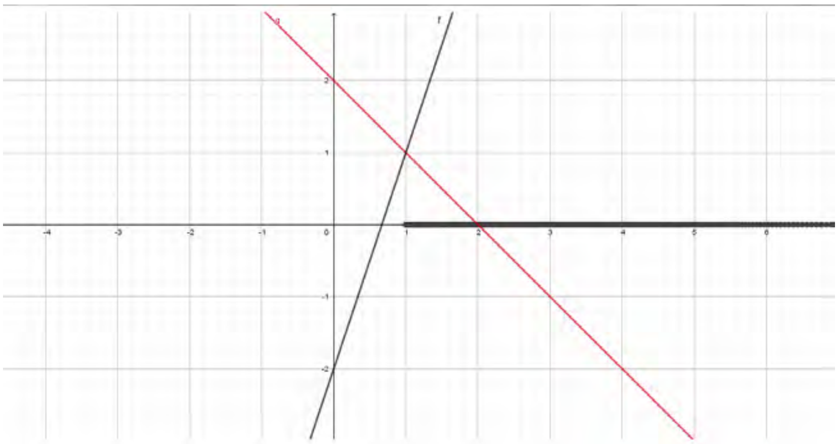
Figura 47 - Alterar as propriedades.



Fonte: o autor, 2017

9°*passo:* Sobre o ponto A clica-se com o botão direito do *mouse* e escolhe-se a opção "animar". Assim, o ponto móvel A irá deslocar-se sobre a reta de acordo com a inequação inicial proposta. Ao deslocar este ponto móvel, o ponto de intersecção com o eixo das abscissas também irá deslocar-se sobre este eixo e, seu rastro, irá destacar possíveis soluções da inequação, como pode-se observar na figura 48.

Figura 48 - Solução da inequação $3x - 2 \geq -x + 2$.



Fonte: o autor, 2017

Desta forma, pode-se afirmar que a solução real da inequação $3x - 2 \geq -x + 2$ é dada por $\{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste presente trabalho destacou-se a importância do ensino das desigualdades, com foco nas séries iniciais do Ensino Fundamental II. Para uma apreensão mais eficaz deste conteúdo sugere-se um processo de ensino-aprendizagem mais criterioso, além da abordagem funcional gráfica. O material didático analisado mostrou que, tanto os livros didáticos, quanto os cadernos pedagógicos utilizados pela Prefeitura do Rio de Janeiro, apresentam o assunto através da abordagem algébrica. Como justificativa para uma abordagem também a partir de uma linguagem gráfica utilizou-se a da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Duval afirma que para uma boa apreensão de um objeto matemático deve-se buscar diferentes formas de registros deste objeto. O aluno tem que ser capaz de realizar o tratamento (operações internas a um mesmo registro) e conversões (mudança de registros). A capacidade de mobilização entre os registros de representação é fundamental para um processo de ensino-aprendizagem eficaz da Matemática. No caso das inequações, a abordagem gráfica permitirá que os alunos percebam a diferença das equações e inequações. E pretende-se desta forma, que eles não cometam equívocos ao relacionarem estes conceitos. Logo após, analisaram-se os documentos legais e a forma como tratam do objeto em estudo.

Deste modo, ficou claro que há necessidade de rever a forma como se trabalha a construção e a abordagem das inequações, principalmente no Ensino Fundamental II. Mostra-se também a importância do uso da tecnologia no ensino da matemática e, para tal, sugere-se neste trabalho a utilização do Geogebra. Entende-se que esta ferramenta é de grande auxílio para uma análise gráfica das inequações. Pautado nestas análises, este trabalho sugere que uma abordagem funcional gráfica para o ensino das inequações e o estímulo das conversões pode possibilitar uma consolidação da apreensão do objeto em estudo.

Espera-se que com a sequência didática proposta os alunos sejam capazes de diferenciar equações e inequações, suas propriedades e métodos de resolução, sintam-se estimulados para uma discussão interdisciplinar das desigualdades e a utilização das calculadoras gráficas para auxiliá-los na resolução de problemas. Além de proporcionar um momento de reflexão e autocrítica dos próprios professores, já que, estes utilizam, na maioria das vezes, uma abordagem estritamente algébrica.

Deseja-se que seja possível superar a grande dificuldade que os alunos apresentam nas conversões, da língua materna para algébrica, da linguagem algébrica para linguagem gráfica, entre outras. Acredita-se que assim os alunos sejam capazes de apreender de forma mais eficiente e assim sendo, permitir que estes aprendam a resolver um problema de várias maneiras, salvo que em alguns momentos poderão até escolher a melhor linguagem para usar na resolução dos mesmos.

Não considero que minha pesquisa está terminada. Apenas completo uma primeira etapa, onde fez-se um estudo teórico e deixo como sugestão uma sequência didática a ser aplicada.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, S. M. et al. *Sociologia: Volume Único: Ensino Médio*. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2016. 1-250 p.

BONJORNO, J. R. et al. *Fazendo a diferença*. 3. ed. [S.l.: s.n.], 2009. 97-100 p.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. MEC, 1997. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf⟩. Acesso em: 20 out. 2017.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular - BNCC*. Secretaria de Educação Fundamental. MEC, 2015. Disponível em: ⟨http://basenacionalcomum.mec.gov.br/⟩. Acesso em: 20 out. 2017.

CARVALHO, L. M. A. d. C. *Problemas com desigualdades para o Ensino Secundário*. 2012. 66 p. Dissertação (Mestrado em Matemática para professores) — Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012.

CATANEO, V. I. *O uso do software geogebra como ferramenta que pode facilitar o processo ensino aprendizagem da matemática no ensino fundamental séries finais*. 2011. Dissertação (Pós-Graduação em Educação Matemática) — Centro Universitário Barriga Verde - UNIBAVE, São Paulo, 2011. Disponível em: ⟨http://www.uniedu.sed.sc.gov.br/wp-content/uploads/2013/10/Vanessa-Isabel-Cataneo.pdf⟩. Acesso em: 10 out. 2017.

CENTURION et al. *Matemática na medida certa*. 3. ed. [S.l.: s.n.], 2010. 1-256 p.

COSTA, G. L. M. Doutorado em Educação Matemática, *O Professor de Matemática e as Tecnologias de Informação e Comunicação: Abrindo Caminho Para uma Nova Cultura Profissional*. São Paulo: [s.n.], 2004. 204 p.

DANTE, L. R. *Projeto Teláris*. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2013. 158-161 p.

DANTE, L. R. *Projeto Teláris*. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2013. 36-37 p.

DIAS, R. A. X. G. *Análise do conhecimento de professores sobre o ensino de inequações*. 2014. 136 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino da Matemática) — Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2014.

DIVERSOS. *Projeto Araribá*. 3. ed. [S.l.: s.n.], 2010. 157–164 p.

DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine*. [S.l.]: Bern: Lang, 1995.

DUVAL, R. *Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. [S.l.]: Livraria da Física, 2009. 1-110 p.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic and intuitive components in a mathematical activity. In: *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. [S.l.: s.n.], 1993. p. 231–240.

FONTALVA, G. M. *Um estudo sobre inequações: entre alunos do Ensino Médio*. 2006. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2006.

GIL, A. C. *Como elaborar um projeto de pequisa*. 4. ed. [S.l.: s.n.], 2002. 43 p.

KIERAN, C. The equation/inequality connection in constructing meaning for inequality situations. In: *Proceedings of the 28"th—"Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. [S.l.: s.n.], 2004. p. 143–147.

MELO, J. J. d. *Docência de inequações no ensino fundamental da Cidade de Indaiatuba*. 2007. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

SME-RJ. *Orientações Curriculares do Município do Rio de Janeiro*. Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: ⟨http://www.rioeduca.net/blogViews.php?id=5265⟩. Acesso em: 15 de out. 2017.

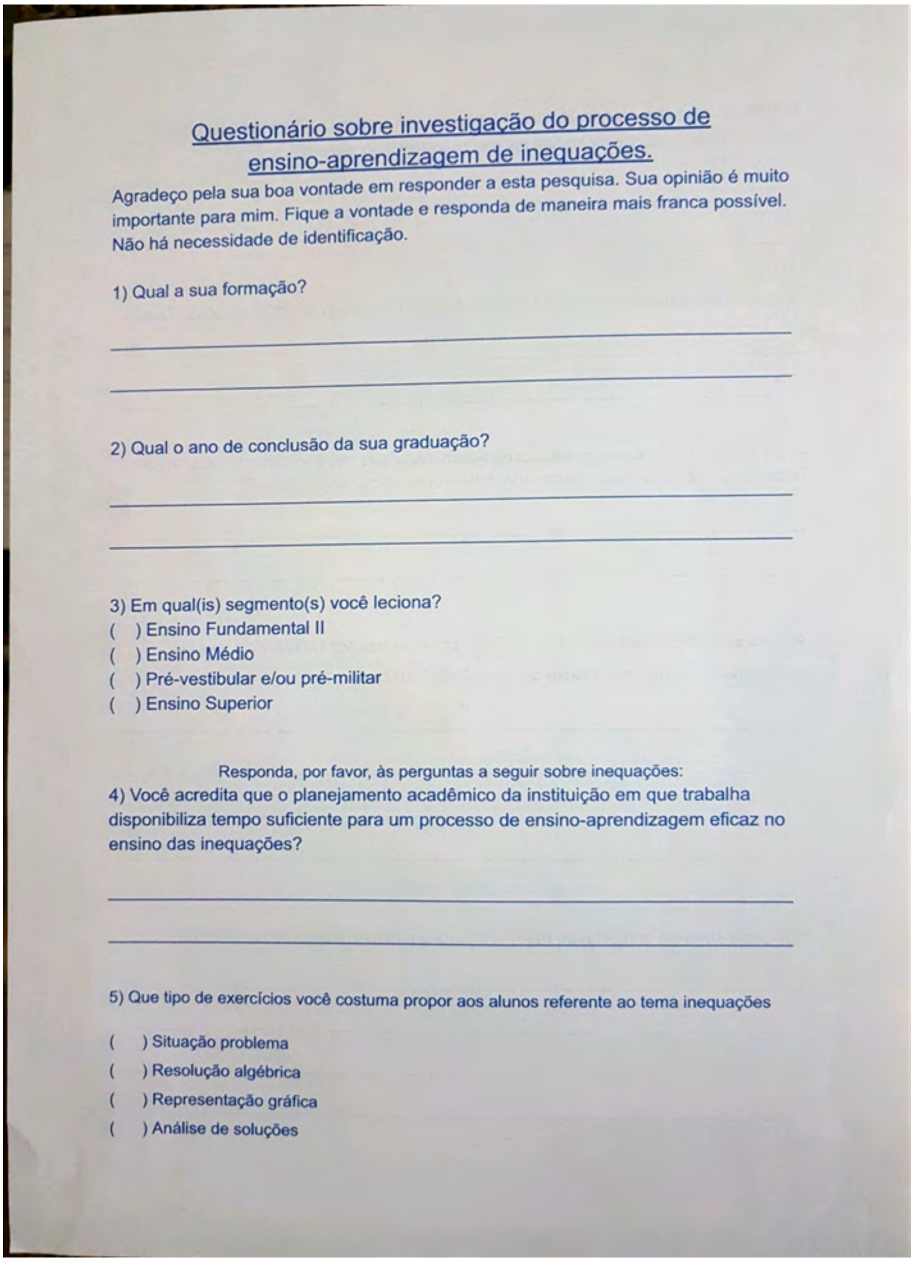
SOUZA, J.; PATARO, P. M. *Vontade de saber*. 3. ed. [S.l.: s.n.], 2015. 152-154 p.

SOUZA, V. H. G. d. Doutorado em Educação Matemática, *O uso de vários registros na resolução de inequações: uma abordagem funcional gráfica*. São Paulo: [s.n.], 2007. 292 p. Disponível em: ⟨https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11294?mode=full⟩. Acesso em: 15 jul. 2017.

TSAMIR, P.; BAZZINI, L. Can x = 3 be the solution of an iequality? a study of italian and israeli students. In: *Proceedings of the 25"th—"Conference of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics*. [S.l.: s.n.], 2001.

APÊNDICE A – Questionário aplicado aos professores.

Figura 49 - Questionário.



Questionário sobre investigação do processo de ensino-aprendizagem de inequações.

Agradeço pela sua boa vontade em responder a esta pesquisa. Sua opinião é muito importante para mim. Fique a vontade e responda de maneira mais franca possível. Não há necessidade de identificação.

1) Qual a sua formação?

____

____

2) Qual o ano de conclusão da sua graduação?

____

____

3) Em qual(is) segmento(s) você leciona?
( ) Ensino Fundamental II
( ) Ensino Médio
( ) Pré-vestibular e/ou pré-militar
( ) Ensino Superior

Responda, por favor, às perguntas a seguir sobre inequações:

4) Você acredita que o planejamento acadêmico da instituição em que trabalha disponibiliza tempo suficiente para um processo de ensino-aprendizagem eficaz no ensino das inequações?

____

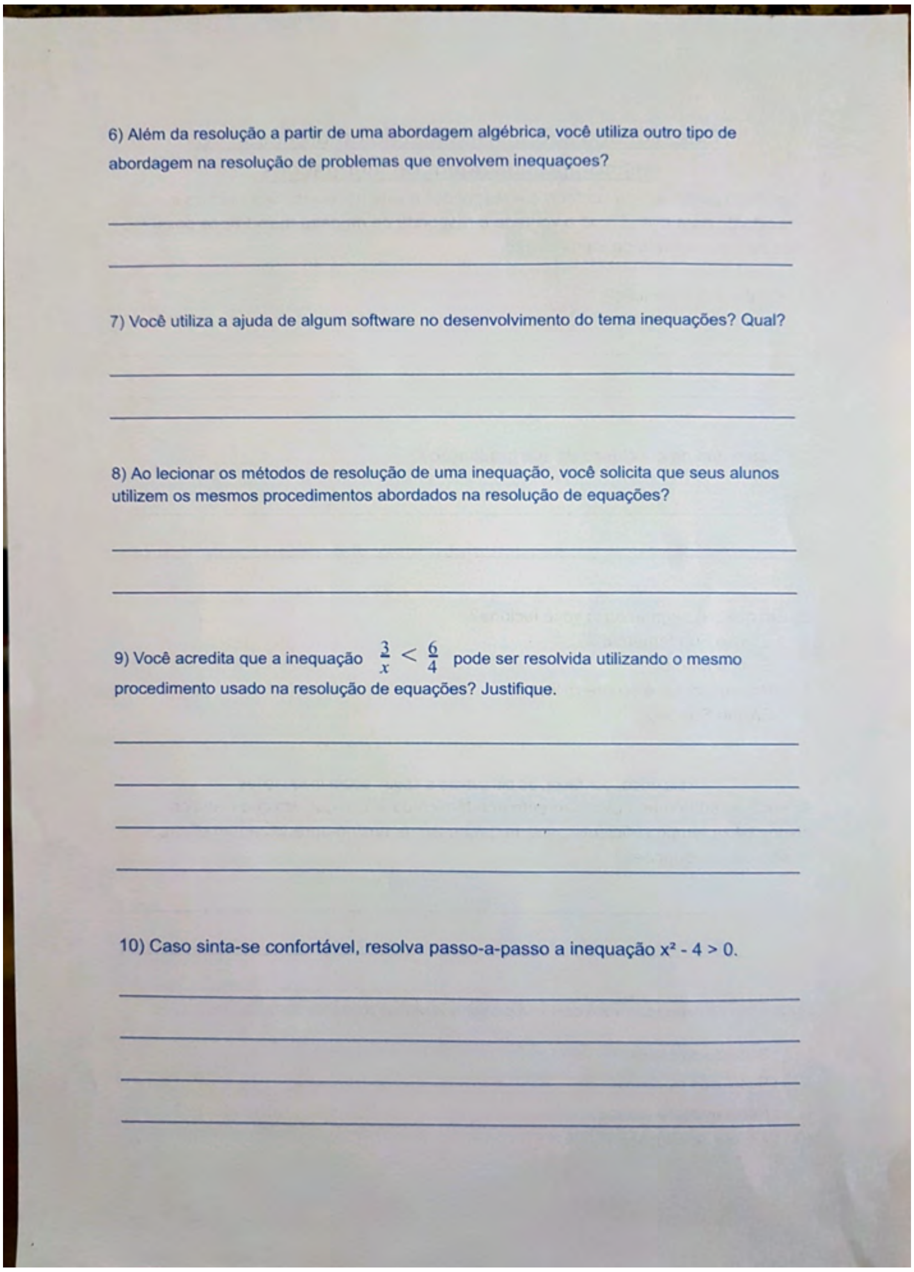
____

5) Que tipo de exercícios você costuma propor aos alunos referente ao tema inequações

( ) Situação problema
( ) Resolução algébrica
( ) Representação gráfica
( ) Análise de soluções

Fonte: o autor, 2017.

Figura 50 - Questionário.



6) Além da resolução a partir de uma abordagem algébrica, você utiliza outro tipo de abordagem na resolução de problemas que envolvem inequaçoes?

7) Você utiliza a ajuda de algum software no desenvolvimento do tema inequações? Qual?

8) Ao lecionar os métodos de resolução de uma inequação, você solicita que seus alunos utilizem os mesmos procedimentos abordados na resolução de equações?

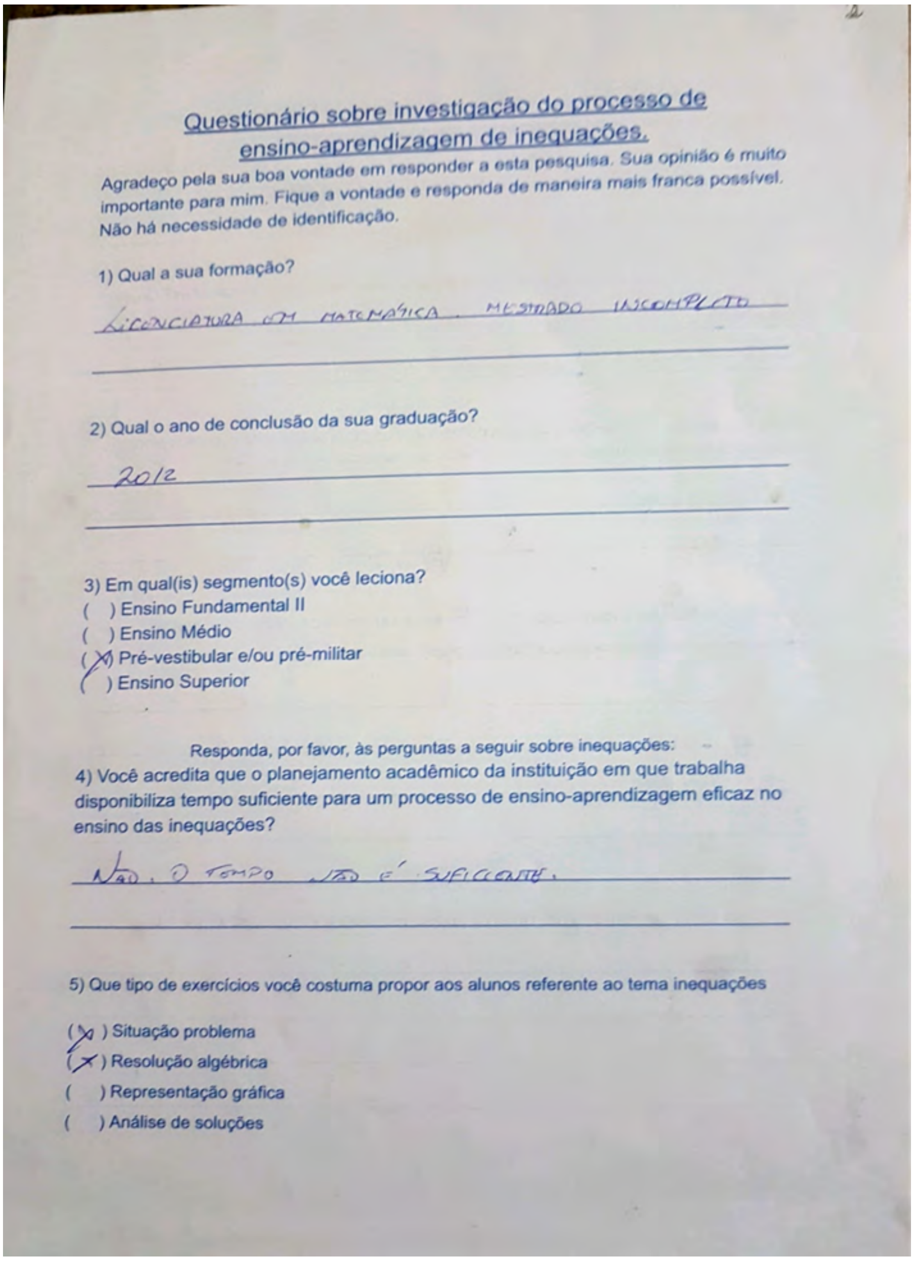
9) Você acredita que a inequação $\frac{3}{x} < \frac{6}{4}$ pode ser resolvida utilizando o mesmo procedimento usado na resolução de equações? Justifique.

10) Caso sinta-se confortável, resolva passo-a-passo a inequação $x^2 - 4 > 0$.

Fonte: o autor, 2017.

APÊNDICE B – Questionário respondido pelo professor A.

Figura 51 - Respostas do professor A.



Questionário sobre investigação do processo de ensino-aprendizagem de inequações.

Agradeço pela sua boa vontade em responder a esta pesquisa. Sua opinião é muito importante para mim. Fique a vontade e responda de maneira mais franca possível. Não há necessidade de identificação.

1) Qual a sua formação?

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA. MESTRADO INCOMPLETO

2) Qual o ano de conclusão da sua graduação?

2012

3) Em qual(is) segmento(s) você leciona?

( ) Ensino Fundamental II
( ) Ensino Médio
(X) Pré-vestibular e/ou pré-militar
( ) Ensino Superior

Responda, por favor, às perguntas a seguir sobre inequações:

4) Você acredita que o planejamento acadêmico da instituição em que trabalha disponibiliza tempo suficiente para um processo de ensino-aprendizagem eficaz no ensino das inequações?

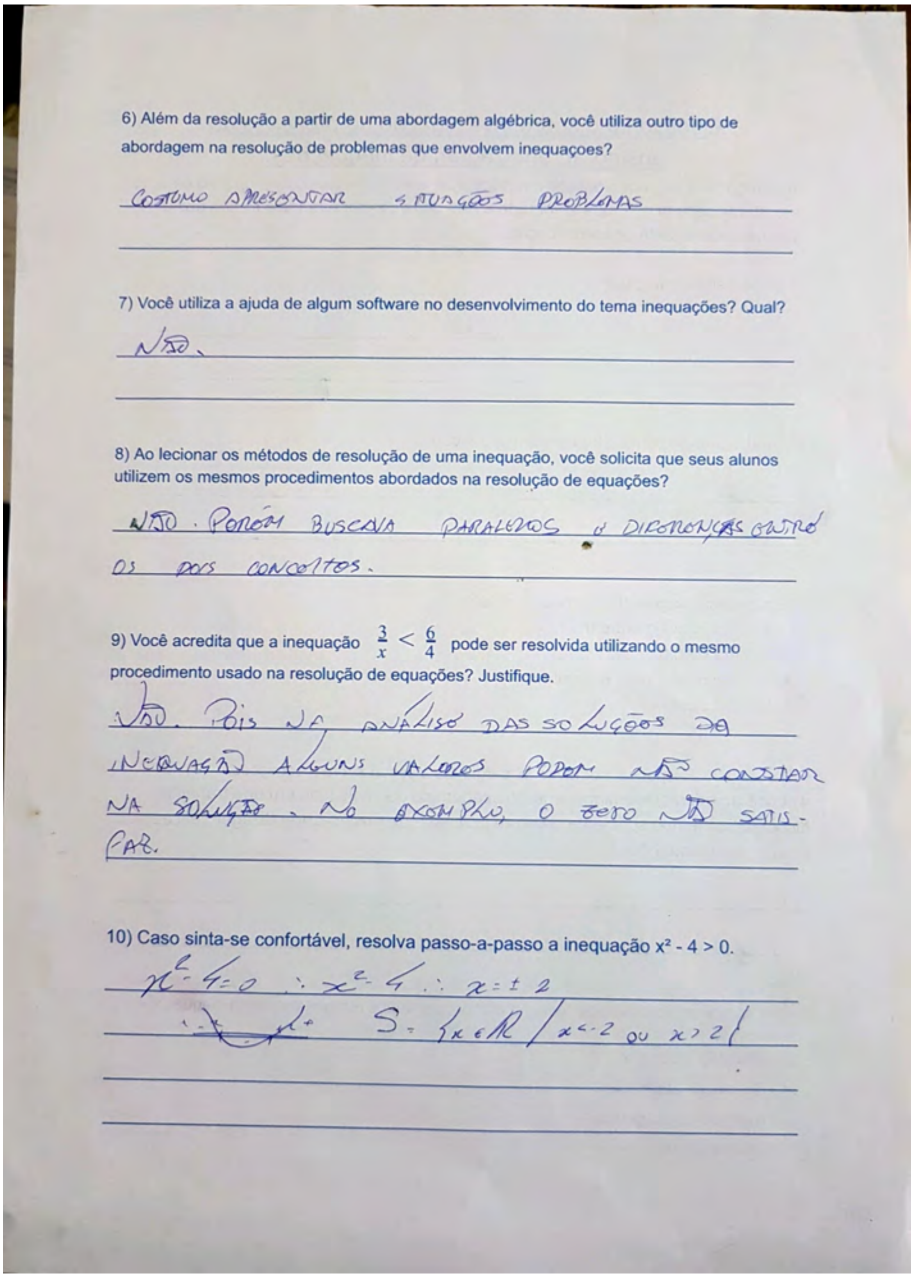
NÃO. O TEMPO NÃO É SUFICIENTE.

5) Que tipo de exercícios você costuma propor aos alunos referente ao tema inequações

(X) Situação problema
(X) Resolução algébrica
( ) Representação gráfica
( ) Análise de soluções

Fonte: o autor, 2017.

Figura 52 - Respostas do professor A.



6) Além da resolução a partir de uma abordagem algébrica, você utiliza outro tipo de abordagem na resolução de problemas que envolvem inequaçoes?

COSTUMO APRESENTAR SITUAÇÕES PROBLEMAS

7) Você utiliza a ajuda de algum software no desenvolvimento do tema inequações? Qual?

NÃO.

8) Ao lecionar os métodos de resolução de uma inequação, você solicita que seus alunos utilizem os mesmos procedimentos abordados na resolução de equações?

NÃO. PORÉM BUSCAVA PARALELOS E DIFERENÇAS ENTRE OS DOIS CONCEITOS.

9) Você acredita que a inequação $\frac{3}{x} < \frac{6}{4}$ pode ser resolvida utilizando o mesmo procedimento usado na resolução de equações? Justifique.

NÃO. POIS NA ANÁLISE DAS SOLUÇÕES DA INEQUAÇÃO ALGUNS VALORES PODEM NÃO CONSTAR NA SOLUÇÃO. NO EXEMPLO, O ZERO NÃO SATIS-FAZ.

10) Caso sinta-se confortável, resolva passo-a-passo a inequação $x^2 - 4 > 0$.

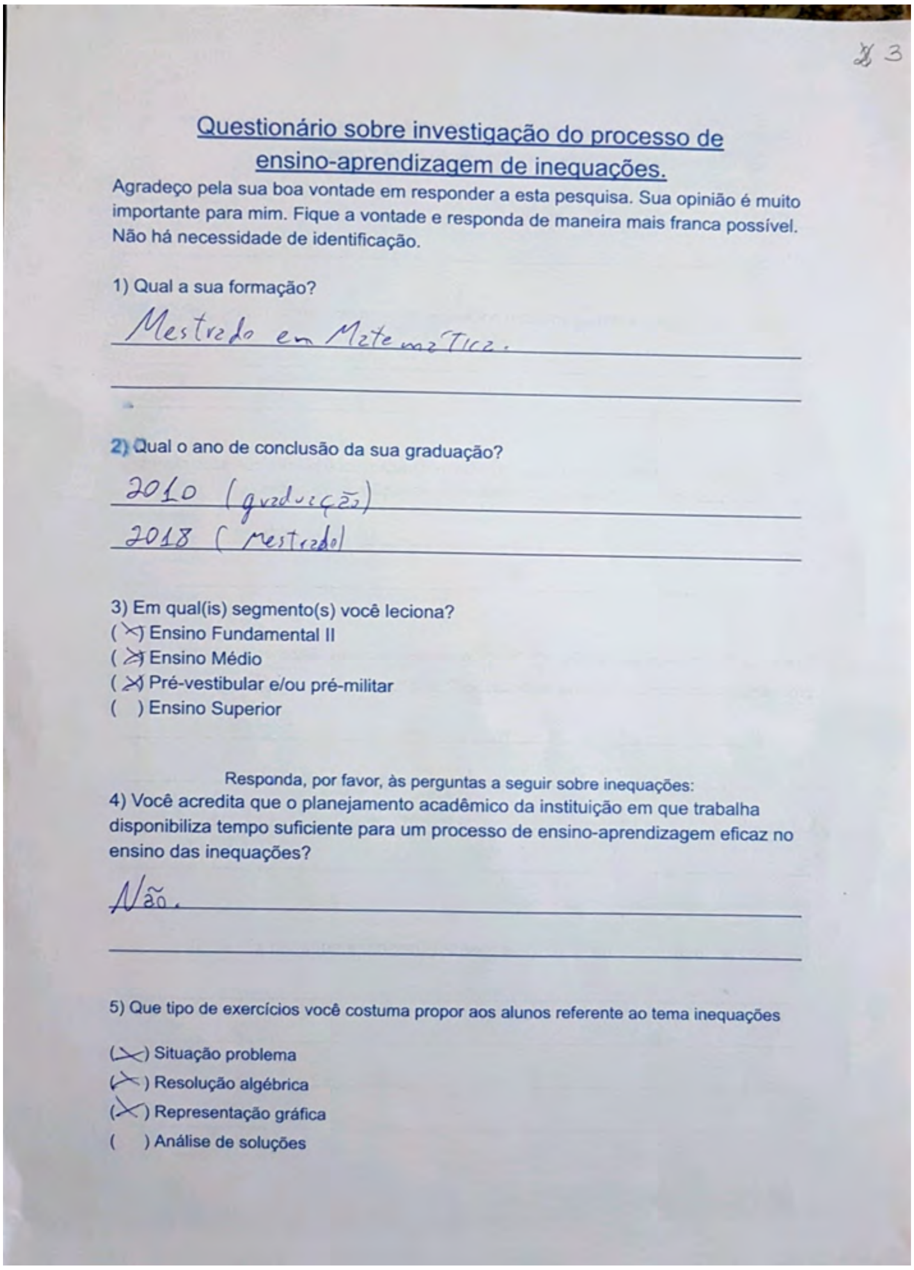
$x^2-4=0 \therefore x^2=4 \therefore x=\pm 2$

$S=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x<-2$ ou $x>2\}$

Fonte: o autor, 2017.

APÊNDICE C – Questionário respondido pelo professor B.

Figura 53 - Respostas do professor B.



X 3

Questionário sobre investigação do processo de ensino-aprendizagem de inequações.

Agradeço pela sua boa vontade em responder a esta pesquisa. Sua opinião é muito importante para mim. Fique a vontade e responda de maneira mais franca possível. Não há necessidade de identificação.

1) Qual a sua formação?

Mestrado em Matemática.

2) Qual o ano de conclusão da sua graduação?

2010 (graduação)

2018 (Mestrado)

3) Em qual(is) segmento(s) você leciona?

(X) Ensino Fundamental II

(X) Ensino Médio

(X) Pré-vestibular e/ou pré-militar

( ) Ensino Superior

Responda, por favor, às perguntas a seguir sobre inequações:

4) Você acredita que o planejamento acadêmico da instituição em que trabalha disponibiliza tempo suficiente para um processo de ensino-aprendizagem eficaz no ensino das inequações?

Não.

5) Que tipo de exercícios você costuma propor aos alunos referente ao tema inequações

(X) Situação problema

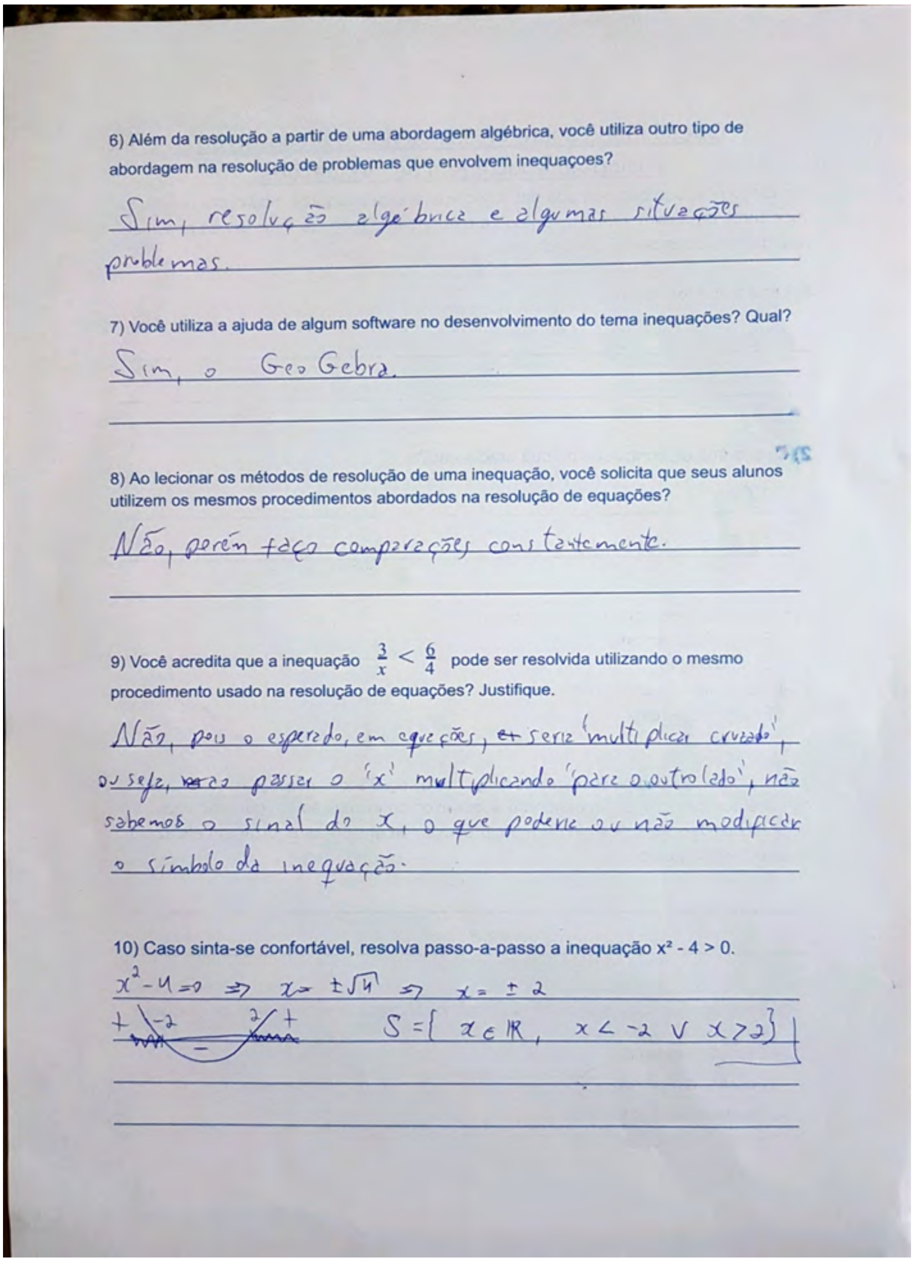
(X) Resolução algébrica

(X) Representação gráfica

( ) Análise de soluções

Fonte: o autor, 2017.

Figura 54 - Respostas do professor B.



6) Além da resolução a partir de uma abordagem algébrica, você utiliza outro tipo de abordagem na resolução de problemas que envolvem inequaçoes?

Sim, resolução algébrica e algumas situações problemas.

7) Você utiliza a ajuda de algum software no desenvolvimento do tema inequações? Qual?

Sim, o GeoGebra.

8) Ao lecionar os métodos de resolução de uma inequação, você solicita que seus alunos utilizem os mesmos procedimentos abordados na resolução de equações?

Não, porém faço comparações constantemente.

9) Você acredita que a inequação $\frac{3}{x} < \frac{6}{4}$ pode ser resolvida utilizando o mesmo procedimento usado na resolução de equações? Justifique.

Não, pois o esperado, em equações, ~~et~~ seria 'multiplicar cruzado', ou seja, ~~para~~ passar o 'x' multiplicando 'para o outro lado', não sabemos o sinal do x, o que poderia ou não modificar o símbolo da inequação.

10) Caso sinta-se confortável, resolva passo-a-passo a inequação x² - 4 > 0.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$

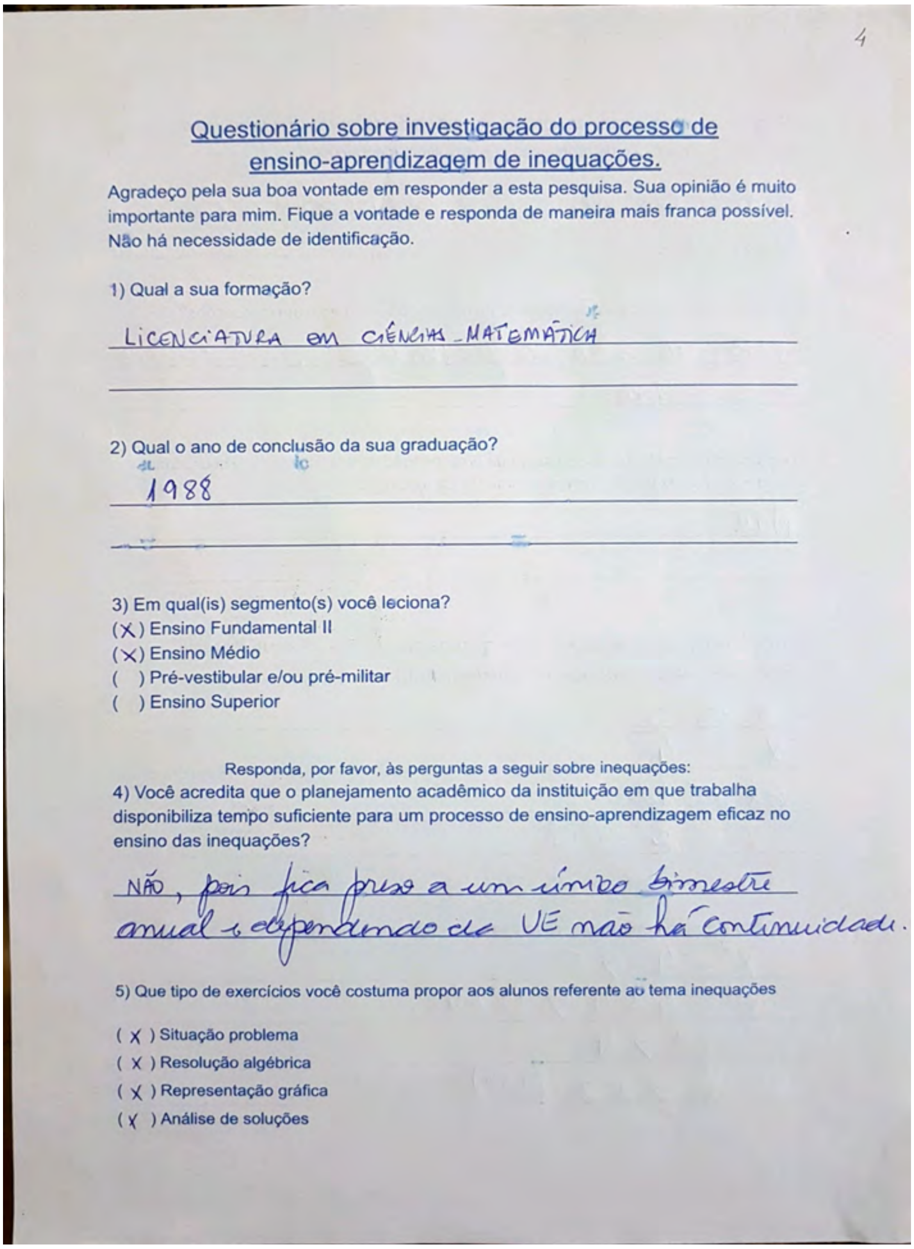
$+ \quad -2 \quad - \quad 2 \quad +$

$S = \{ x \in \mathbb{R},\ x < -2 \vee x > 2 \}$

Fonte: o autor, 2017.

APÊNDICE D – Questionário respondido pelo professor C.

Figura 55 - Respostas do professor C.



4

Questionário sobre investigação do processo de ensino-aprendizagem de inequações.

Agradeço pela sua boa vontade em responder a esta pesquisa. Sua opinião é muito importante para mim. Fique a vontade e responda de maneira mais franca possível. Não há necessidade de identificação.

1) Qual a sua formação?

LICENCIATURA EM CIÊNCIAS MATEMÁTICA

2) Qual o ano de conclusão da sua graduação?

1988

3) Em qual(is) segmento(s) você leciona?

(X) Ensino Fundamental II
(X) Ensino Médio
( ) Pré-vestibular e/ou pré-militar
( ) Ensino Superior

Responda, por favor, às perguntas a seguir sobre inequações:

4) Você acredita que o planejamento acadêmico da instituição em que trabalha disponibiliza tempo suficiente para um processo de ensino-aprendizagem eficaz no ensino das inequações?

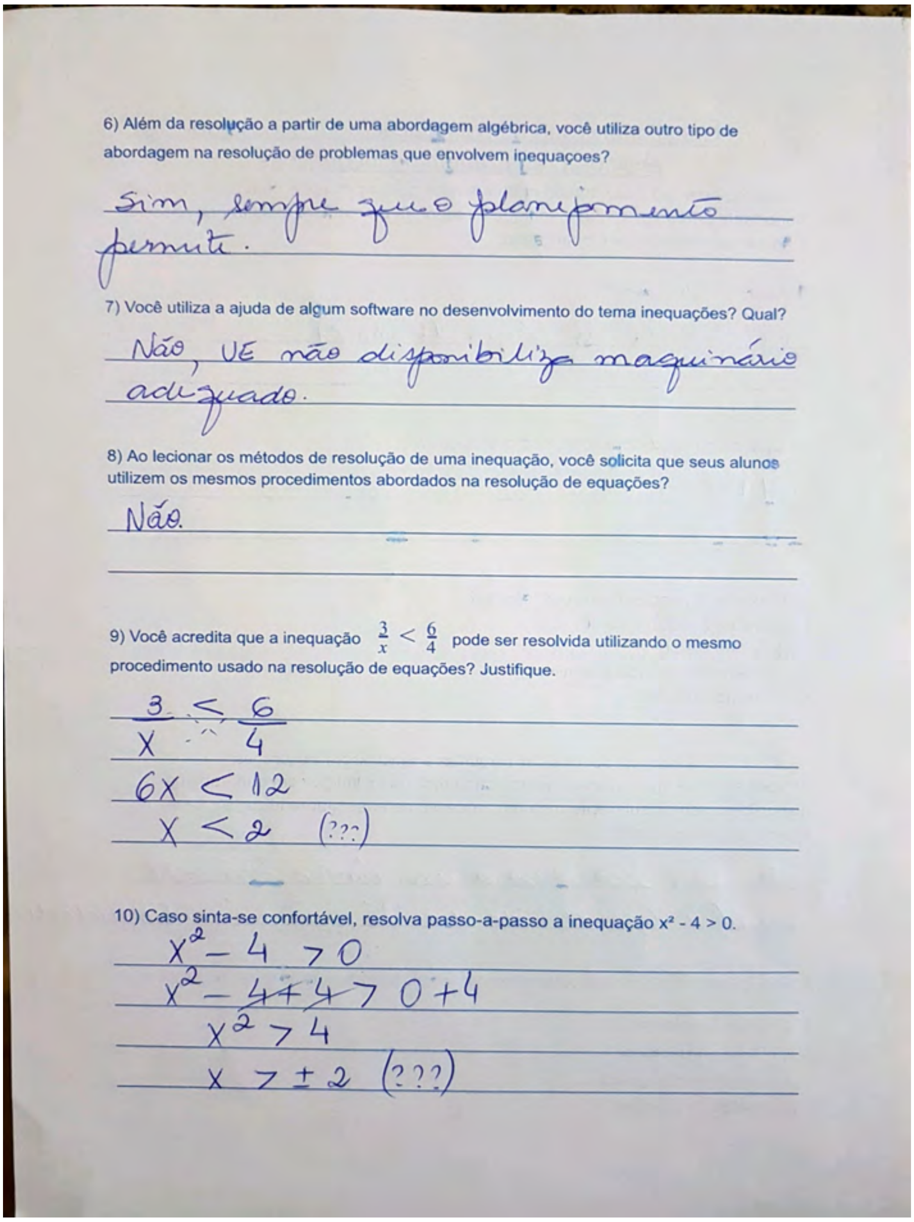
NÃO, pois fica preso a um único bimestre anual e dependendo da UE não há continuidade.

5) Que tipo de exercícios você costuma propor aos alunos referente ao tema inequações

(X) Situação problema
(X) Resolução algébrica
(X) Representação gráfica
(X) Análise de soluções

Fonte: o autor, 2017.

Figura 56 - Respostas do professor C.



6) Além da resolução a partir de uma abordagem algébrica, você utiliza outro tipo de abordagem na resolução de problemas que envolvem inequaçoes?

Sim, sempre que o planejamento permite.

7) Você utiliza a ajuda de algum software no desenvolvimento do tema inequações? Qual?

Não, UE não disponibiliza maquinário adequado.

8) Ao lecionar os métodos de resolução de uma inequação, você solicita que seus alunos utilizem os mesmos procedimentos abordados na resolução de equações?

Não.

9) Você acredita que a inequação $\frac{3}{x} < \frac{6}{4}$ pode ser resolvida utilizando o mesmo procedimento usado na resolução de equações? Justifique.

$\frac{3}{X} < \frac{6}{4}$

$6X < 12$

$X < 2$ (???)

10) Caso sinta-se confortável, resolva passo-a-passo a inequação $x^2 - 4 > 0$.

$X^2 - 4 > 0$

$X^2 - \cancel{4 + 4} > 0 + 4$

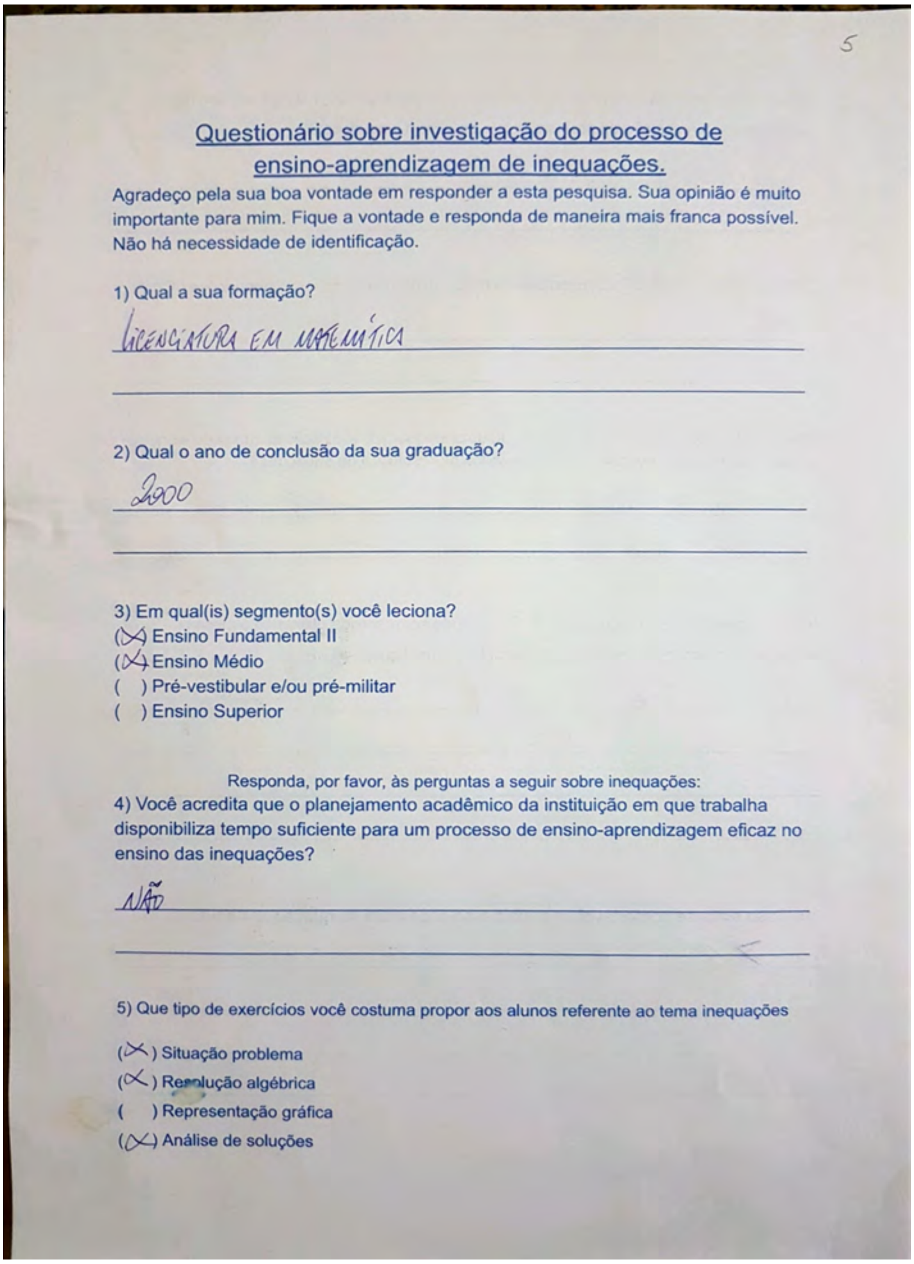
$X^2 > 4$

$X > \pm 2$ (???)

Fonte: o autor, 2017.

APÊNDICE E – Questionário respondido pelo professor D.

Figura 57 - Respostas do professor D.



5

Questionário sobre investigação do processo de ensino-aprendizagem de inequações.

Agradeço pela sua boa vontade em responder a esta pesquisa. Sua opinião é muito importante para mim. Fique a vontade e responda de maneira mais franca possível. Não há necessidade de identificação.

1) Qual a sua formação?

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

2) Qual o ano de conclusão da sua graduação?

2000

3) Em qual(is) segmento(s) você leciona?

(X) Ensino Fundamental II
(X) Ensino Médio
( ) Pré-vestibular e/ou pré-militar
( ) Ensino Superior

Responda, por favor, às perguntas a seguir sobre inequações:

4) Você acredita que o planejamento acadêmico da instituição em que trabalha disponibiliza tempo suficiente para um processo de ensino-aprendizagem eficaz no ensino das inequações?

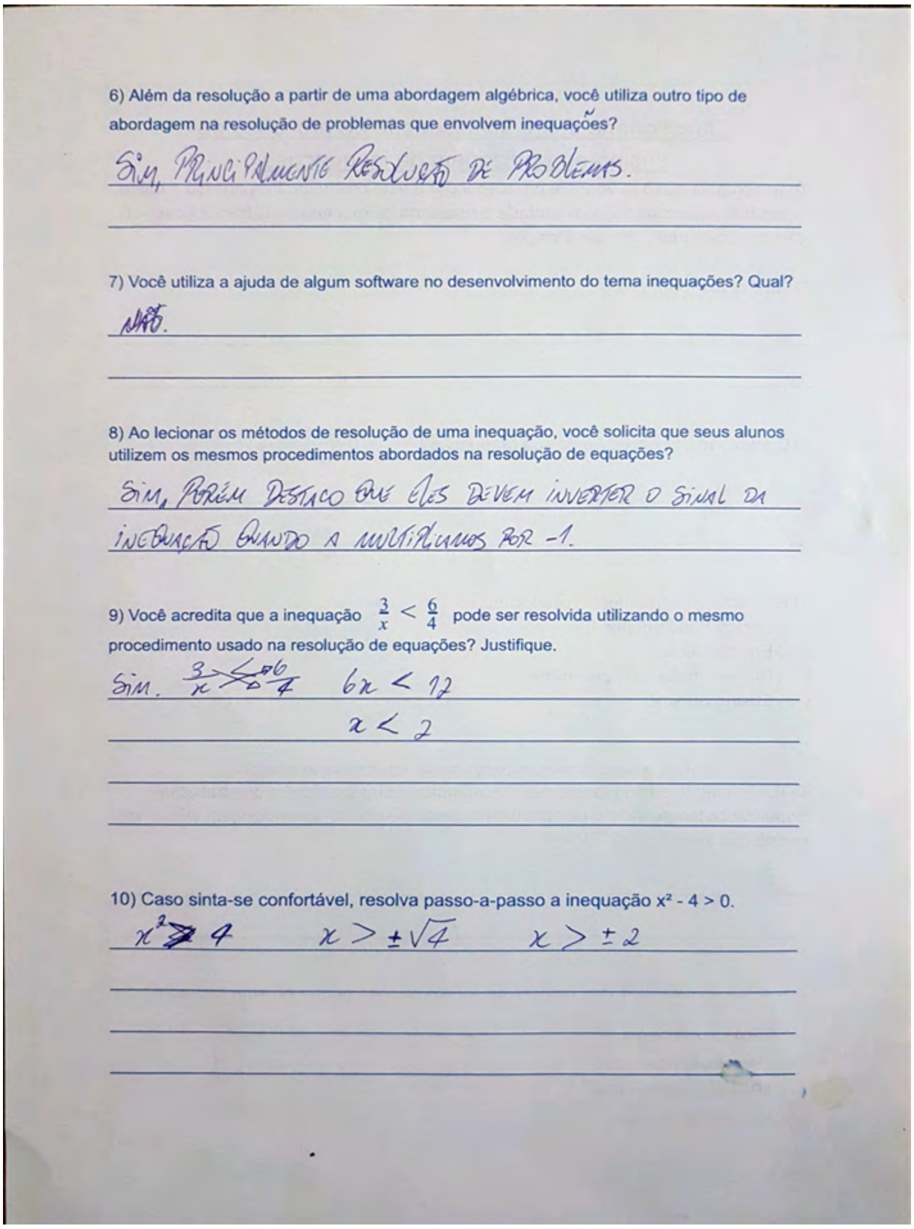
NÃO

5) Que tipo de exercícios você costuma propor aos alunos referente ao tema inequações

(X) Situação problema
(X) Resolução algébrica
( ) Representação gráfica
(X) Análise de soluções

Fonte: o autor, 2017.

Figura 58 - Respostas do professor D.



6) Além da resolução a partir de uma abordagem algébrica, você utiliza outro tipo de abordagem na resolução de problemas que envolvem inequações?

Sim, principalmente resolução de problemas.

7) Você utiliza a ajuda de algum software no desenvolvimento do tema inequações? Qual?

Não.

8) Ao lecionar os métodos de resolução de uma inequação, você solicita que seus alunos utilizem os mesmos procedimentos abordados na resolução de equações?

Sim, porém destaco que eles devem inverter o sinal da inequação quando a multiplicamos por -1.

9) Você acredita que a inequação $\frac{3}{x} < \frac{6}{4}$ pode ser resolvida utilizando o mesmo procedimento usado na resolução de equações? Justifique.

Sim. $\frac{3}{x} < \frac{6}{4}$ $\quad 6x < 12$

$x < 2$

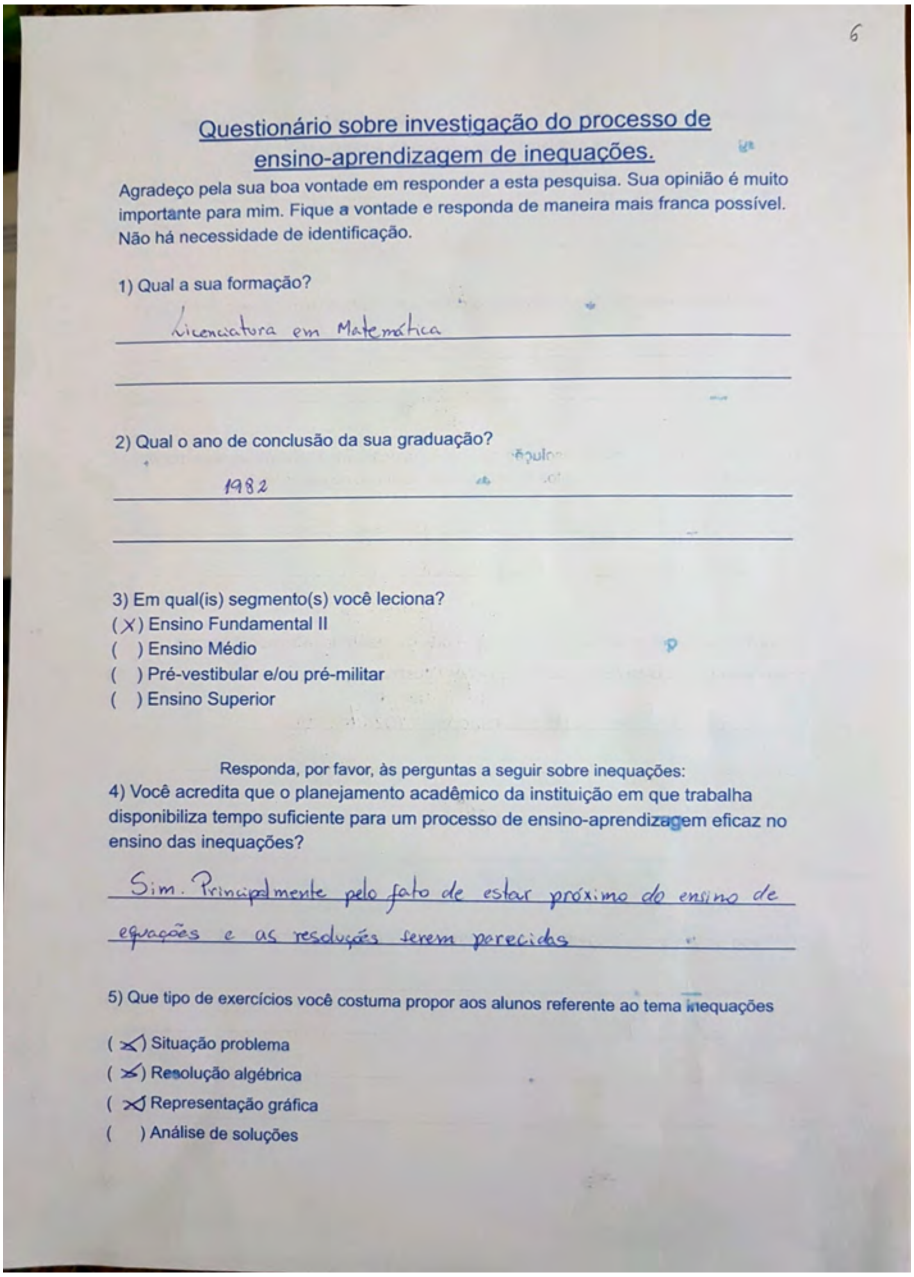
10) Caso sinta-se confortável, resolva passo-a-passo a inequação $x^2 - 4 > 0$.

$x^2 > 4 \qquad x > \pm\sqrt{4} \qquad x > \pm 2$

Fonte: o autor, 2017.

APÊNDICE F – Questionário respondido pelo professor E.

Figura 59 - Respostas do professor E.



6

Questionário sobre investigação do processo de ensino-aprendizagem de inequações.

Agradeço pela sua boa vontade em responder a esta pesquisa. Sua opinião é muito importante para mim. Fique a vontade e responda de maneira mais franca possível. Não há necessidade de identificação.

1) Qual a sua formação?

Licenciatura em Matemática

2) Qual o ano de conclusão da sua graduação?

1982

3) Em qual(is) segmento(s) você leciona?
(X) Ensino Fundamental II
( ) Ensino Médio
( ) Pré-vestibular e/ou pré-militar
( ) Ensino Superior

Responda, por favor, às perguntas a seguir sobre inequações:

4) Você acredita que o planejamento acadêmico da instituição em que trabalha disponibiliza tempo suficiente para um processo de ensino-aprendizagem eficaz no ensino das inequações?

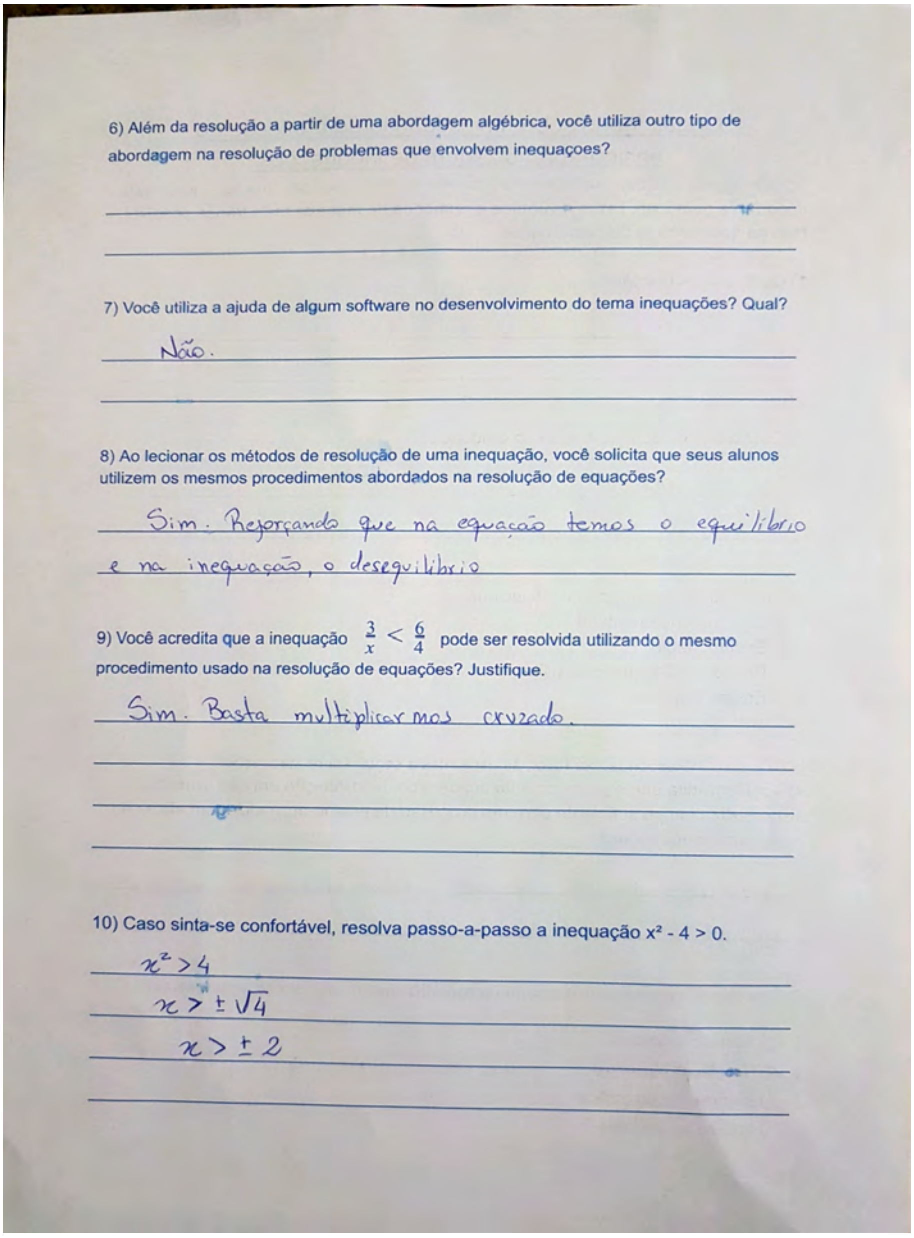
Sim. Principalmente pelo fato de estar próximo do ensino de equações e as resoluções serem parecidas

5) Que tipo de exercícios você costuma propor aos alunos referente ao tema inequações

(X) Situação problema
(X) Resolução algébrica
(X) Representação gráfica
( ) Análise de soluções

Fonte: o autor, 2017.

Figura 60 - Respostas do professor E.



6) Além da resolução a partir de uma abordagem algébrica, você utiliza outro tipo de abordagem na resolução de problemas que envolvem inequaçoes?

7) Você utiliza a ajuda de algum software no desenvolvimento do tema inequações? Qual?

Não.

8) Ao lecionar os métodos de resolução de uma inequação, você solicita que seus alunos utilizem os mesmos procedimentos abordados na resolução de equações?

Sim. Reforçando que na equação temos o equilibrio e na inequação, o desequilibrio

9) Você acredita que a inequação $\frac{3}{x} < \frac{6}{4}$ pode ser resolvida utilizando o mesmo procedimento usado na resolução de equações? Justifique.

Sim. Basta multiplicarmos cruzado.

10) Caso sinta-se confortável, resolva passo-a-passo a inequação $x^2 - 4 > 0$.

$x^2 > 4$

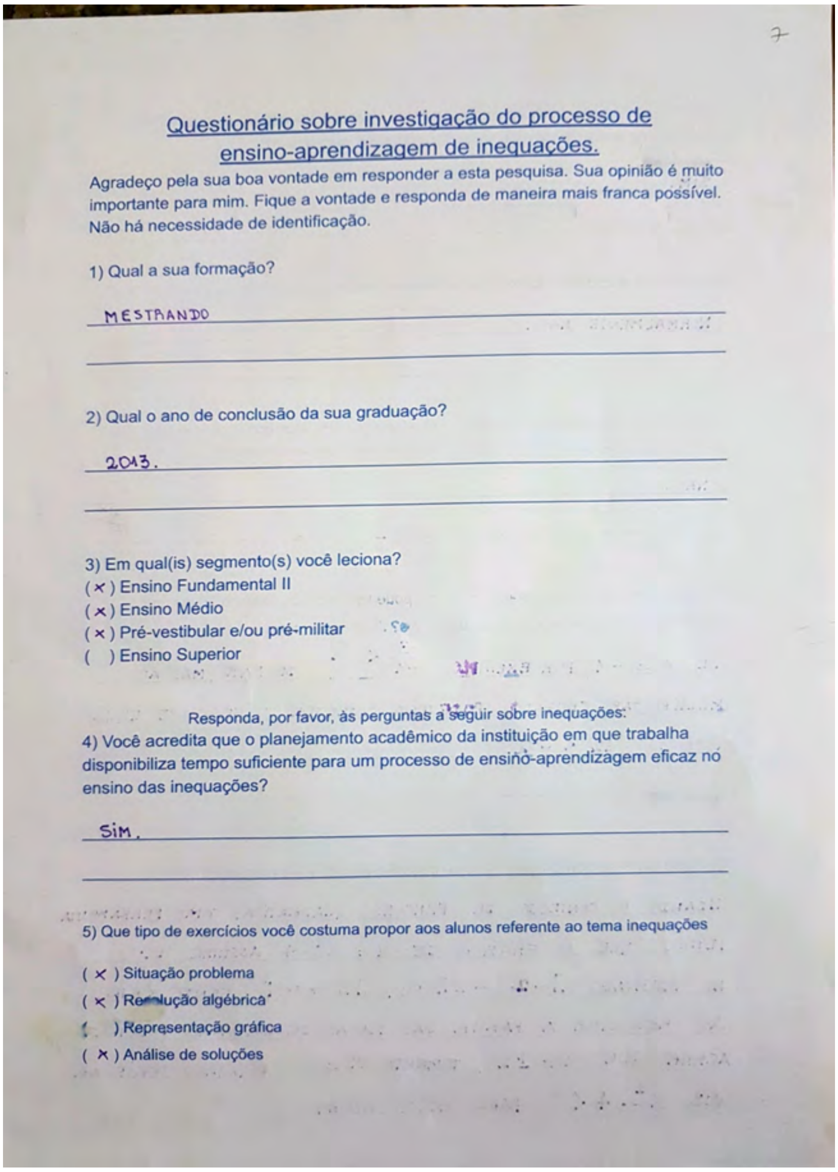
$x > \pm\sqrt{4}$

$x > \pm 2$

Fonte: o autor, 2017.

APÊNDICE G – Questionário respondido pelo professor F.

Figura 61 - Respostas do professor F.



7

Questionário sobre investigação do processo de ensino-aprendizagem de inequações.

Agradeço pela sua boa vontade em responder a esta pesquisa. Sua opinião é muito importante para mim. Fique a vontade e responda de maneira mais franca possível. Não há necessidade de identificação.

1) Qual a sua formação?

MESTRANDO

2) Qual o ano de conclusão da sua graduação?

2013.

3) Em qual(is) segmento(s) você leciona?

(x) Ensino Fundamental II
(x) Ensino Médio
(x) Pré-vestibular e/ou pré-militar
(   ) Ensino Superior

Responda, por favor, às perguntas a seguir sobre inequações:

4) Você acredita que o planejamento acadêmico da instituição em que trabalha disponibiliza tempo suficiente para um processo de ensino-aprendizagem eficaz no ensino das inequações?

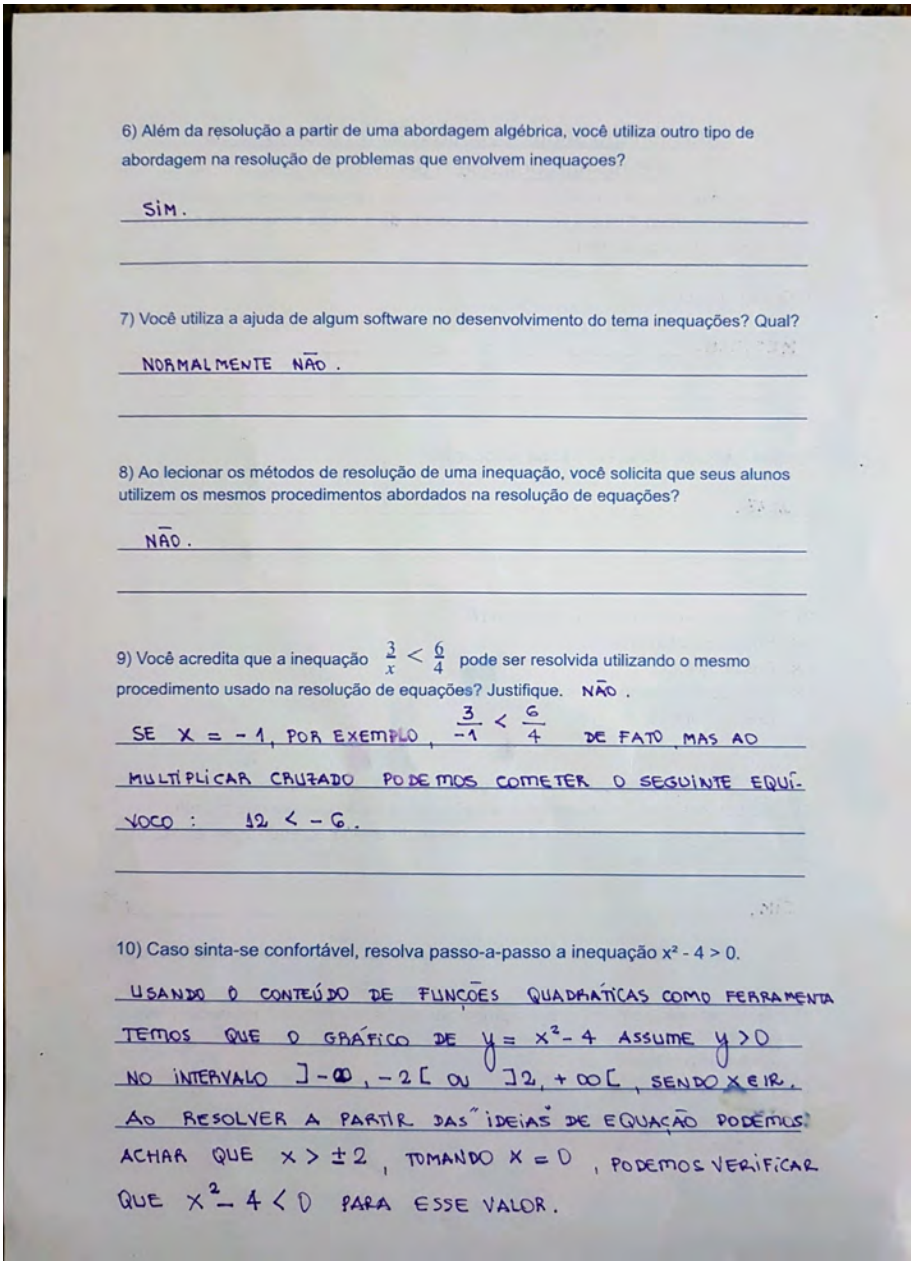
SIM.

5) Que tipo de exercícios você costuma propor aos alunos referente ao tema inequações

(x) Situação problema
(x) Resolução algébrica
(   ) Representação gráfica
(x) Análise de soluções

Fonte: o autor, 2017.

Figura 62 - Respostas do professor F.



6) Além da resolução a partir de uma abordagem algébrica, você utiliza outro tipo de abordagem na resolução de problemas que envolvem inequaçoes?

SIM.

7) Você utiliza a ajuda de algum software no desenvolvimento do tema inequações? Qual?

NORMALMENTE NÃO.

8) Ao lecionar os métodos de resolução de uma inequação, você solicita que seus alunos utilizem os mesmos procedimentos abordados na resolução de equações?

NÃO.

9) Você acredita que a inequação $\frac{3}{x} < \frac{6}{4}$ pode ser resolvida utilizando o mesmo procedimento usado na resolução de equações? Justifique. NÃO.

SE $X = -1$, POR EXEMPLO, $\frac{3}{-1} < \frac{6}{4}$ DE FATO, MAS AO MULTIPLICAR CRUZADO PODEMOS COMETER O SEGUINTE EQUÍVOCO: $12 < -6$.

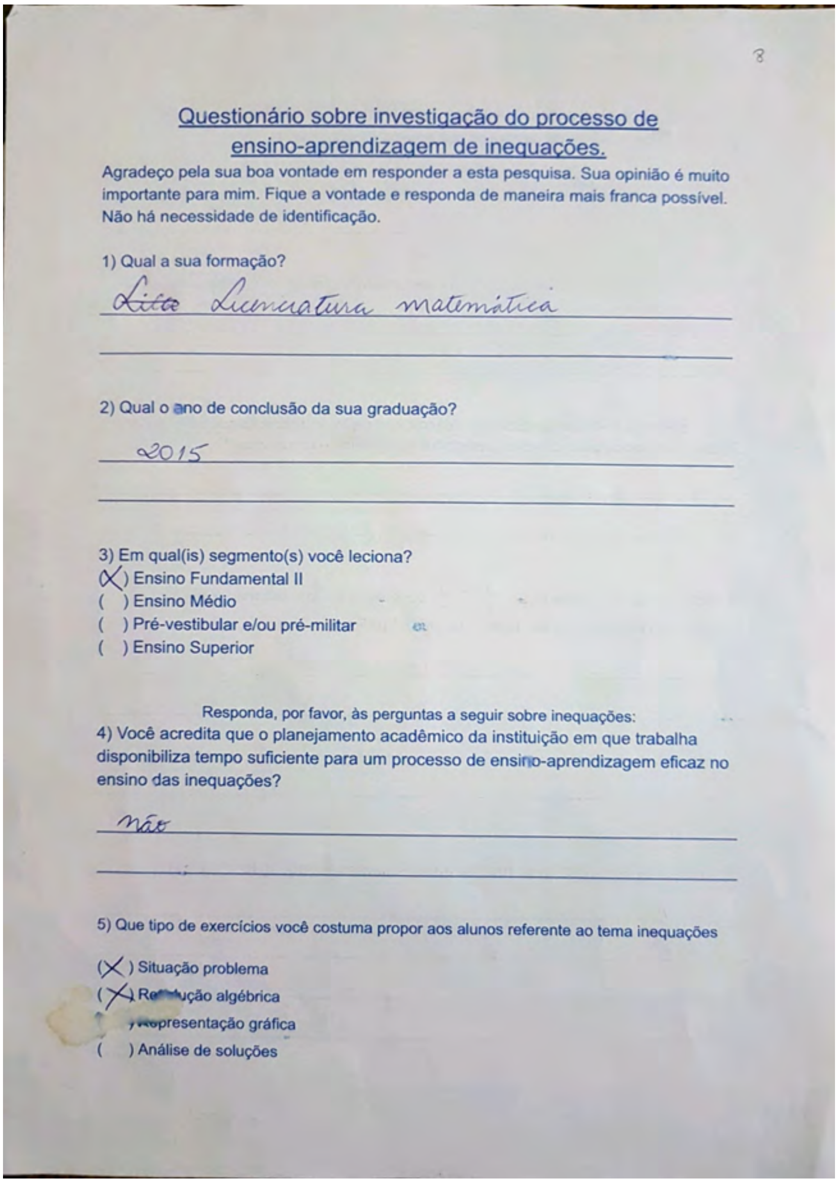
10) Caso sinta-se confortável, resolva passo-a-passo a inequação $x^2 - 4 > 0$.

USANDO O CONTEÚDO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS COMO FERRAMENTA TEMOS QUE O GRÁFICO DE $y = x^2 - 4$ ASSUME $y > 0$ NO INTERVALO $]-\infty, -2[$ OU $]2, +\infty[$, SENDO $X \in \mathbb{R}$. AO RESOLVER A PARTIR DAS IDEIAS DE EQUAÇÃO PODEMOS ACHAR QUE $X > \pm 2$, TOMANDO $X = 0$, PODEMOS VERIFICAR QUE $X^2 - 4 < 0$ PARA ESSE VALOR.

Fonte: o autor, 2017.

APÊNDICE H – Questionário respondido pelo professor G.

Figura 63 - Respostas do professor G.



8

Questionário sobre investigação do processo de ensino-aprendizagem de inequações.

Agradeço pela sua boa vontade em responder a esta pesquisa. Sua opinião é muito importante para mim. Fique a vontade e responda de maneira mais franca possível. Não há necessidade de identificação.

1) Qual a sua formação?

~~Lic~~ Licenciatura matemática

2) Qual o ano de conclusão da sua graduação?

2015

3) Em qual(is) segmento(s) você leciona?

(X) Ensino Fundamental II
( ) Ensino Médio
( ) Pré-vestibular e/ou pré-militar
( ) Ensino Superior

Responda, por favor, às perguntas a seguir sobre inequações:

4) Você acredita que o planejamento acadêmico da instituição em que trabalha disponibiliza tempo suficiente para um processo de ensino-aprendizagem eficaz no ensino das inequações?

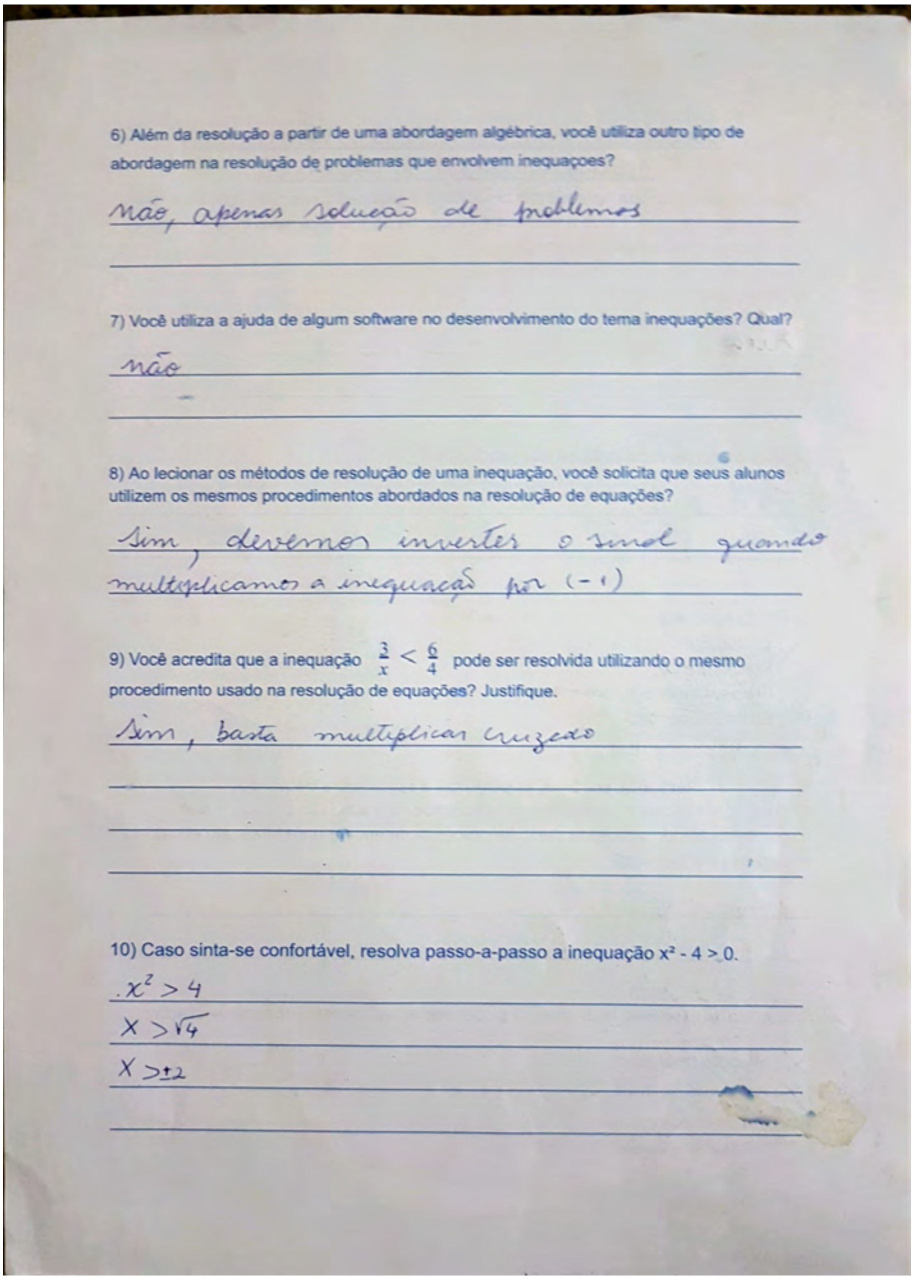
não

5) Que tipo de exercícios você costuma propor aos alunos referente ao tema inequações

(X) Situação problema
(X) Re[illegible]ução algébrica
[illegible] representação gráfica
( ) Análise de soluções

Fonte: o autor, 2017.

Figura 64 - Respostas do professor G.



6) Além da resolução a partir de uma abordagem algébrica, você utiliza outro tipo de abordagem na resolução de problemas que envolvem inequaçoes?

não, apenas solução de problemas

7) Você utiliza a ajuda de algum software no desenvolvimento do tema inequações? Qual?

não

8) Ao lecionar os métodos de resolução de uma inequação, você solicita que seus alunos utilizem os mesmos procedimentos abordados na resolução de equações?

Sim, devemos inverter o sinal quando multiplicamos a inequação por (-1)

9) Você acredita que a inequação $\frac{3}{x} < \frac{6}{4}$ pode ser resolvida utilizando o mesmo procedimento usado na resolução de equações? Justifique.

Sim, basta multiplicar cruzado

10) Caso sinta-se confortável, resolva passo-a-passo a inequação $x^2 - 4 \geq 0$.

$x^2 > 4$

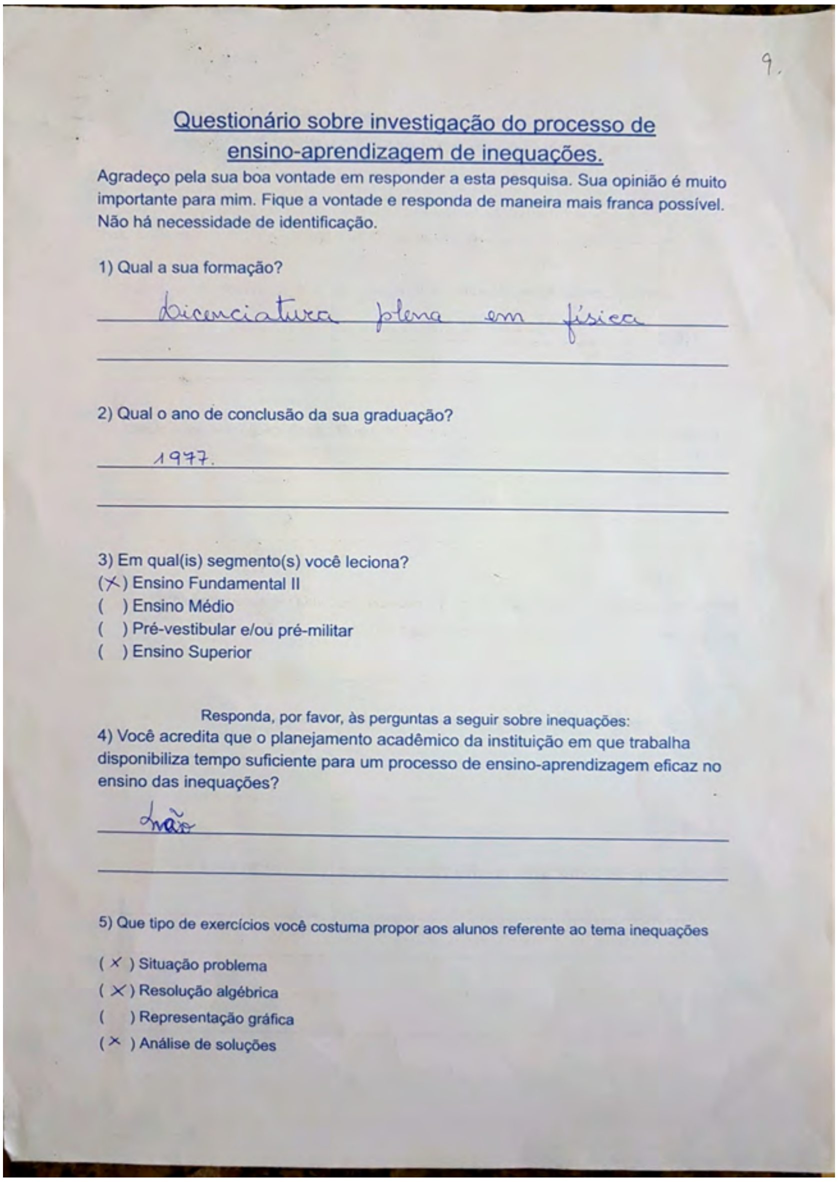
$x > \sqrt{4}$

$x > \pm 2$

Fonte: o autor, 2017.

APÊNDICE I – Questionário respondido pelo professor H.

Figura 65 - Respostas do professor H.



9.

Questionário sobre investigação do processo de ensino-aprendizagem de inequações.

Agradeço pela sua boa vontade em responder a esta pesquisa. Sua opinião é muito importante para mim. Fique a vontade e responda de maneira mais franca possível. Não há necessidade de identificação.

1) Qual a sua formação?

Licenciatura plena em física

2) Qual o ano de conclusão da sua graduação?

1977.

3) Em qual(is) segmento(s) você leciona?

(X) Ensino Fundamental II
( ) Ensino Médio
( ) Pré-vestibular e/ou pré-militar
( ) Ensino Superior

Responda, por favor, às perguntas a seguir sobre inequações:

4) Você acredita que o planejamento acadêmico da instituição em que trabalha disponibiliza tempo suficiente para um processo de ensino-aprendizagem eficaz no ensino das inequações?

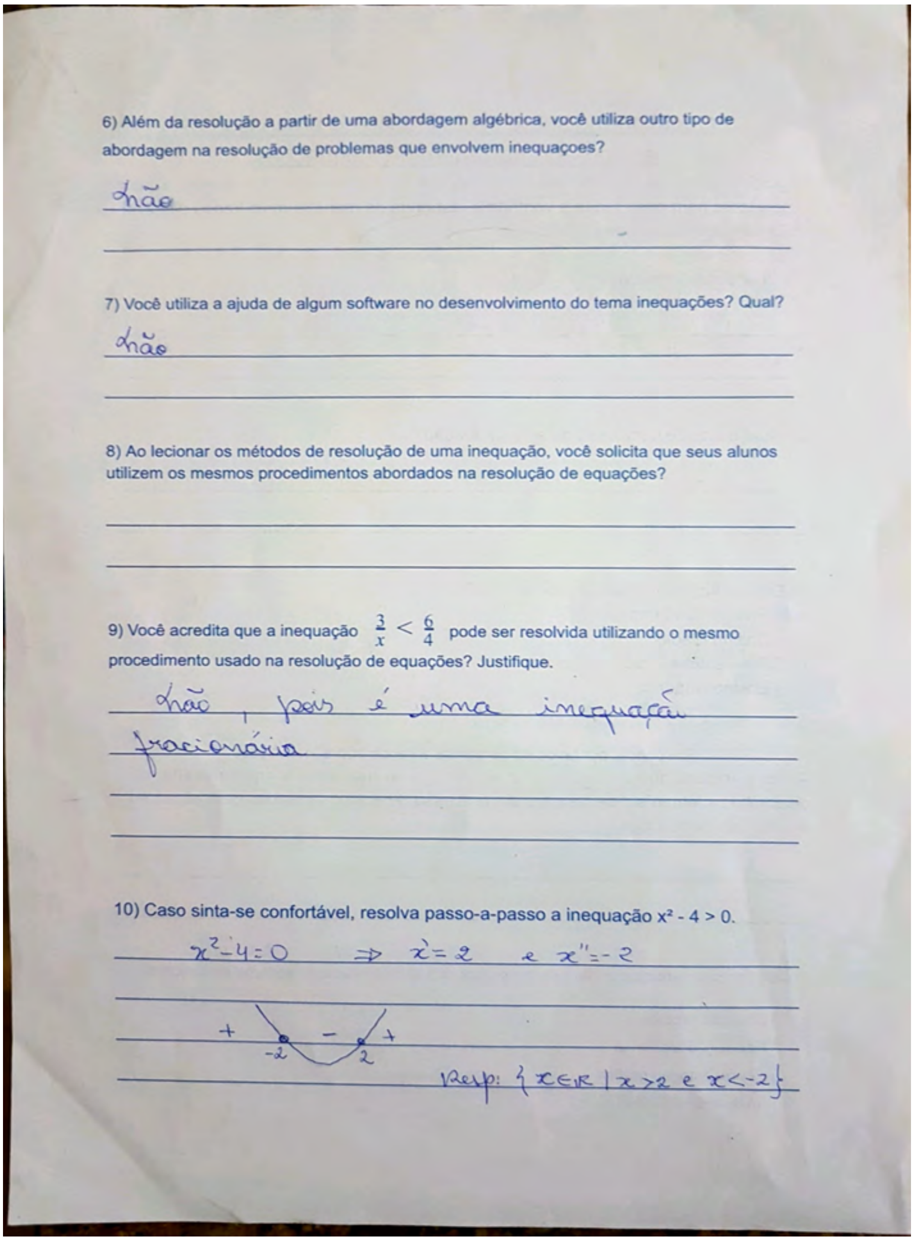
Não

5) Que tipo de exercícios você costuma propor aos alunos referente ao tema inequações

(X) Situação problema
(X) Resolução algébrica
( ) Representação gráfica
(X) Análise de soluções

Fonte: o autor, 2017.

Figura 66 - Respostas do professor H.



6) Além da resolução a partir de uma abordagem algébrica, você utiliza outro tipo de abordagem na resolução de problemas que envolvem inequaçoes?

Não

7) Você utiliza a ajuda de algum software no desenvolvimento do tema inequações? Qual?

Não

8) Ao lecionar os métodos de resolução de uma inequação, você solicita que seus alunos utilizem os mesmos procedimentos abordados na resolução de equações?

9) Você acredita que a inequação $\frac{3}{x} < \frac{6}{4}$ pode ser resolvida utilizando o mesmo procedimento usado na resolução de equações? Justifique.

Não, pois é uma inequação fracionária

10) Caso sinta-se confortável, resolva passo-a-passo a inequação $x^2 - 4 > 0$.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x' = 2$ e $x'' = -2$

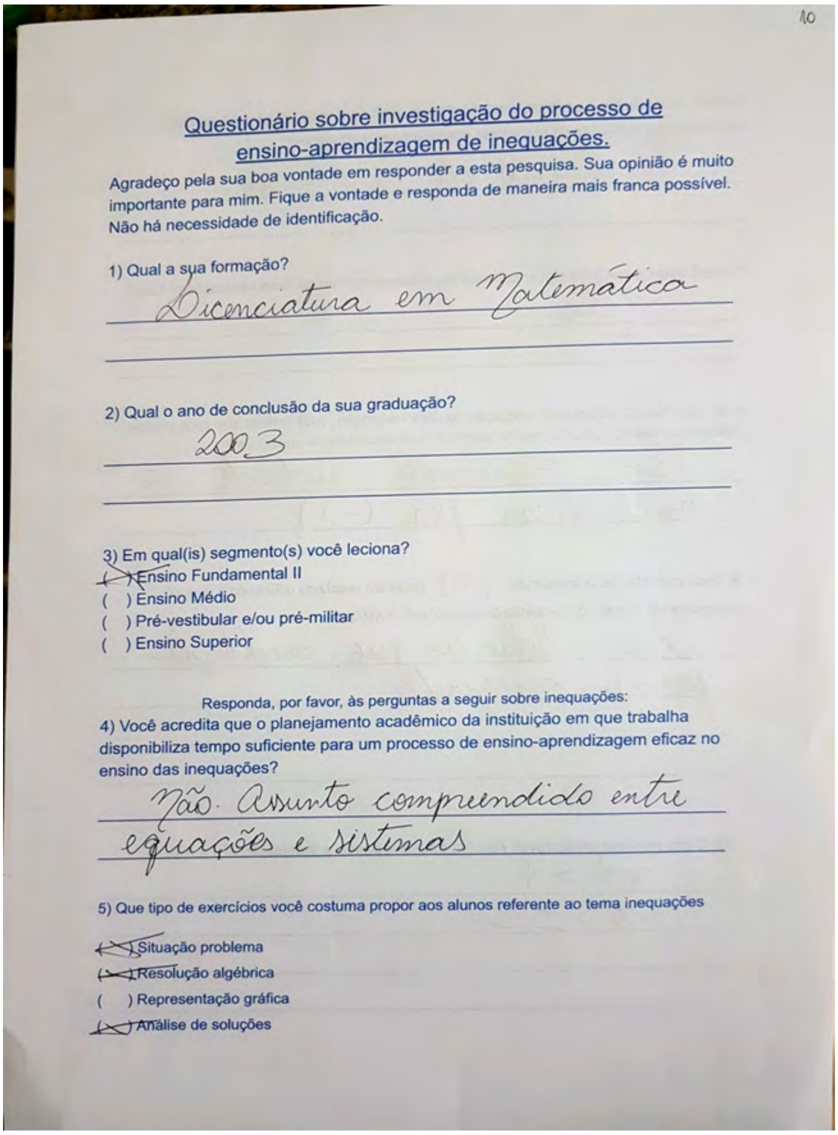
$+ \quad -2 \quad - \quad 2 \quad +$

Resp: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2$ e $x < -2\}$

Fonte: o autor, 2017.

APÊNDICE J – Questionário respondido pelo professor I.

Figura 67 - Respostas do professor I.



10

Questionário sobre investigação do processo de ensino-aprendizagem de inequações.

Agradeço pela sua boa vontade em responder a esta pesquisa. Sua opinião é muito importante para mim. Fique a vontade e responda de maneira mais franca possível. Não há necessidade de identificação.

1) Qual a sua formação?

Licenciatura em Matemática

2) Qual o ano de conclusão da sua graduação?

2003

3) Em qual(is) segmento(s) você leciona?

(X) Ensino Fundamental II
( ) Ensino Médio
( ) Pré-vestibular e/ou pré-militar
( ) Ensino Superior

Responda, por favor, às perguntas a seguir sobre inequações:

4) Você acredita que o planejamento acadêmico da instituição em que trabalha disponibiliza tempo suficiente para um processo de ensino-aprendizagem eficaz no ensino das inequações?

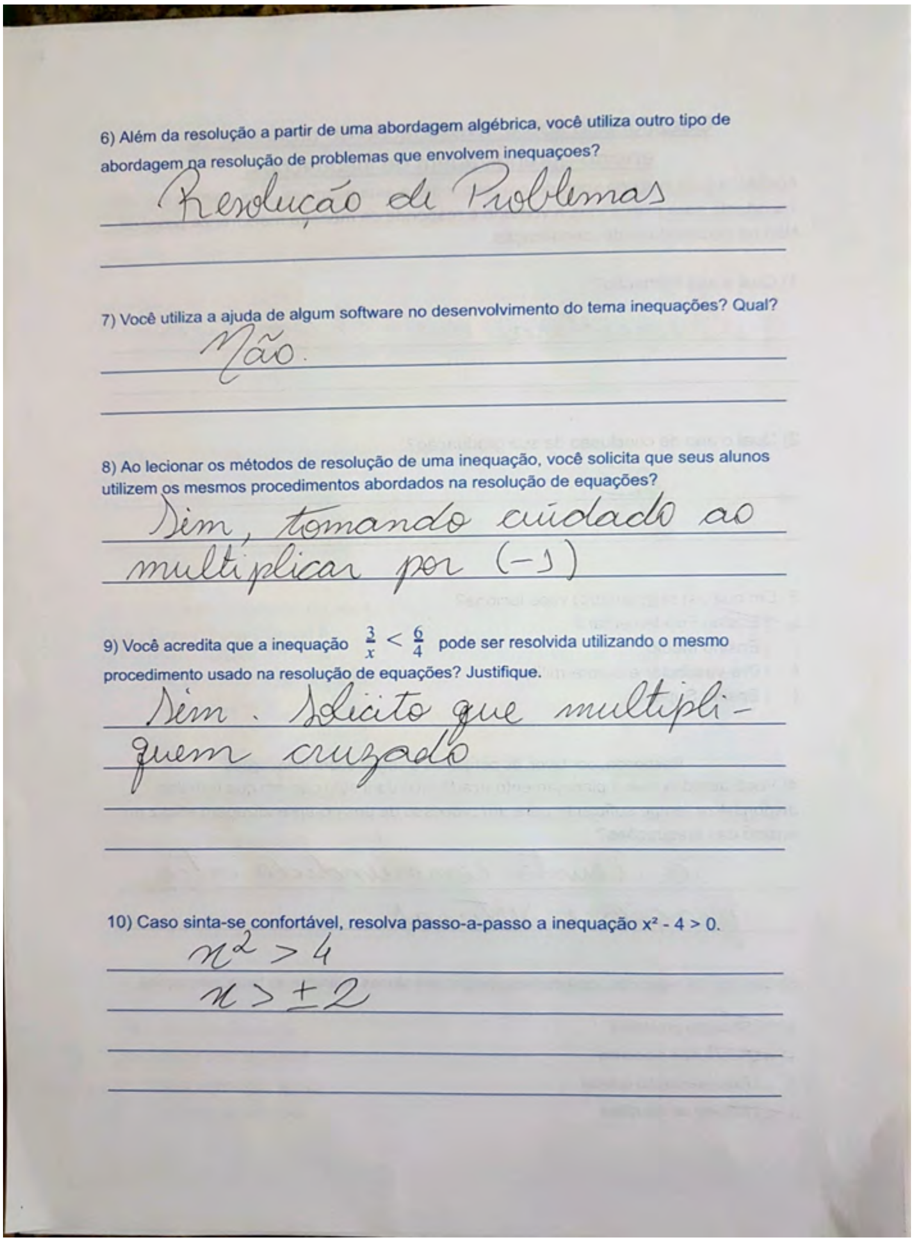
Não. Assunto compreendido entre equações e sistemas

5) Que tipo de exercícios você costuma propor aos alunos referente ao tema inequações

(X) Situação problema
(X) Resolução algébrica
( ) Representação gráfica
(X) Análise de soluções

Fonte: o autor, 2017.

Figura 68 - Respostas do professor I.



6) Além da resolução a partir de uma abordagem algébrica, você utiliza outro tipo de abordagem na resolução de problemas que envolvem inequaçoes?

Resolução de Problemas

7) Você utiliza a ajuda de algum software no desenvolvimento do tema inequações? Qual?

Não.

8) Ao lecionar os métodos de resolução de uma inequação, você solicita que seus alunos utilizem os mesmos procedimentos abordados na resolução de equações?

Sim, tomando cuidado ao multiplicar por (−1)

9) Você acredita que a inequação $\frac{3}{x} < \frac{6}{4}$ pode ser resolvida utilizando o mesmo procedimento usado na resolução de equações? Justifique.

Sim. Solicito que multipliquem cruzado

10) Caso sinta-se confortável, resolva passo-a-passo a inequação $x^2 - 4 > 0$.

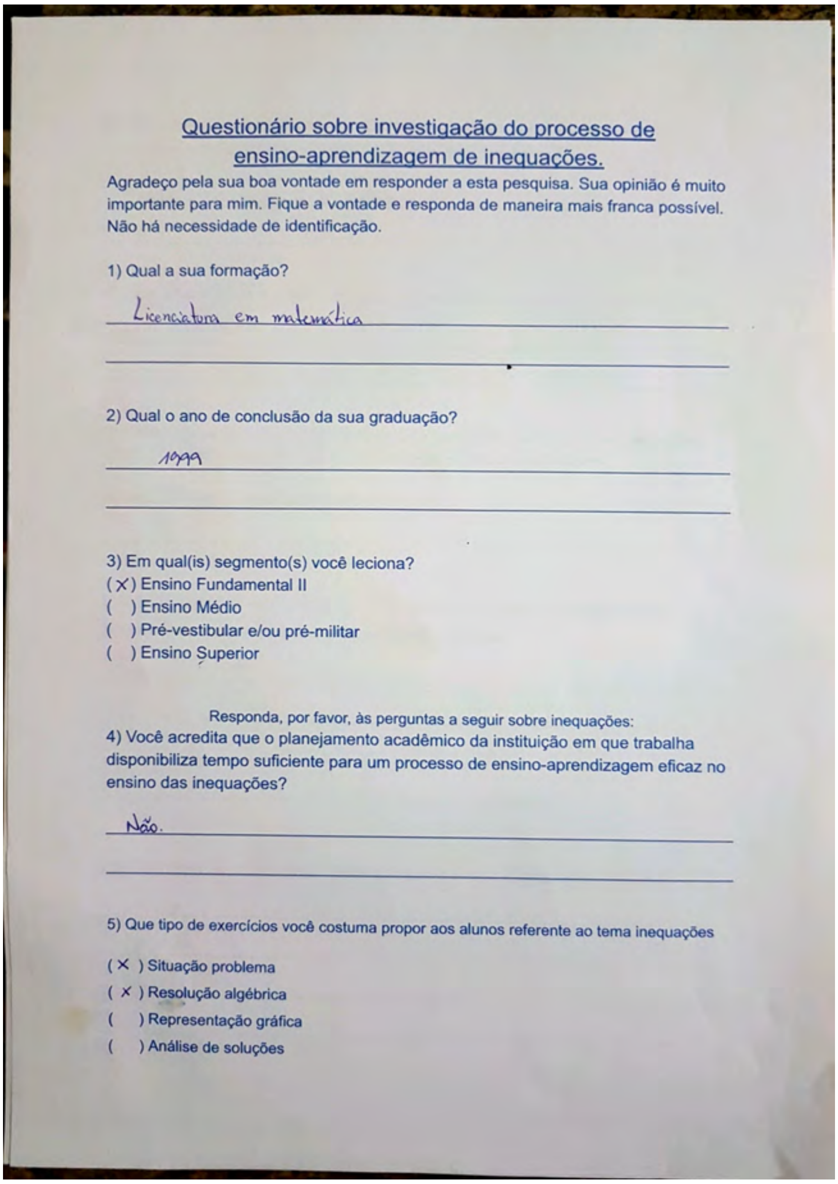
$x^2 > 4$

$x > \pm 2$

Fonte: o autor, 2017.

APÊNDICE K – Questionário respondido pelo professor J.

Figura 69 - Respostas do professor J.



Questionário sobre investigação do processo de ensino-aprendizagem de inequações.

Agradeço pela sua boa vontade em responder a esta pesquisa. Sua opinião é muito importante para mim. Fique a vontade e responda de maneira mais franca possível. Não há necessidade de identificação.

1) Qual a sua formação?

Licenciatura em matemática

2) Qual o ano de conclusão da sua graduação?

1999

3) Em qual(is) segmento(s) você leciona?

(X) Ensino Fundamental II
(   ) Ensino Médio
(   ) Pré-vestibular e/ou pré-militar
(   ) Ensino Superior

Responda, por favor, às perguntas a seguir sobre inequações:

4) Você acredita que o planejamento acadêmico da instituição em que trabalha disponibiliza tempo suficiente para um processo de ensino-aprendizagem eficaz no ensino das inequações?

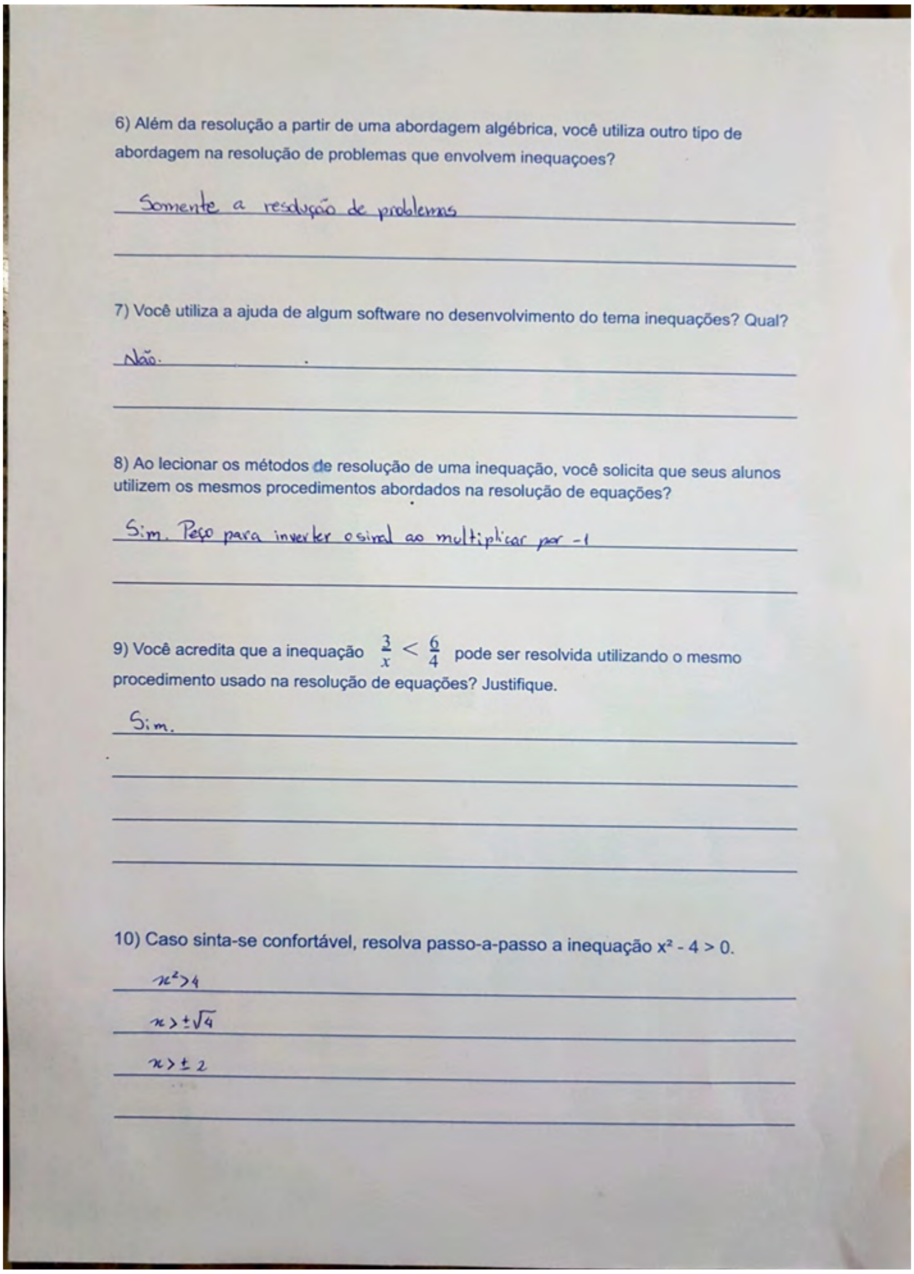
Não.

5) Que tipo de exercícios você costuma propor aos alunos referente ao tema inequações

(X) Situação problema
(X) Resolução algébrica
(   ) Representação gráfica
(   ) Análise de soluções

Fonte: o autor, 2017.

Figura 70 - Respostas do professor J.



6) Além da resolução a partir de uma abordagem algébrica, você utiliza outro tipo de abordagem na resolução de problemas que envolvem inequaçoes?

Somente a resolução de problemas

7) Você utiliza a ajuda de algum software no desenvolvimento do tema inequações? Qual?

Não.

8) Ao lecionar os métodos de resolução de uma inequação, você solicita que seus alunos utilizem os mesmos procedimentos abordados na resolução de equações?

Sim. Peço para inverter o sinal ao multiplicar por -1

9) Você acredita que a inequação $\frac{3}{x} < \frac{6}{4}$ pode ser resolvida utilizando o mesmo procedimento usado na resolução de equações? Justifique.

Sim.

10) Caso sinta-se confortável, resolva passo-a-passo a inequação $x^2 - 4 > 0$.

$x^2 > 4$

$x > \pm\sqrt{4}$

$x > \pm 2$

Fonte: o autor, 2017.

ANEXO A – Texto sobre a desigualdade de gêneros.

Figura 71 - Imagem referente ao texto.

Fonte: Livro: Sociologia ensino médio, 2016

Além de desvantagem na remuneração, as mulheres geralmente enfrentam o problema da dupla (ou tripla) jornada, pois trabalham fora, trabalham em casa (cuidando dos filhos e dos afazeres domésticos) e, muitas vezes, frequentam cursos com vistas a melhorar sua carreira e remuneração. A desigualdade na distribuição das tarefas domésticas ainda é enorme: dados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (Pnad), de 2011, mostram que, entre as mulheres acima de 18 anos empregadas no mercado de trabalho, 89,4% também se ocupavam dos afazeres domésticos, enquanto apenas 47% dos homens empregados se ocupavam com tarefas do lar. Entre os homens desempregados, 45,5% se responsabilizam por algumas atividades domésticas.

Algumas profissões são consideradas, pelo senso comum, "tipicamente" femininas: trabalhadoras domésticas, enfermeiras, costureiras, profissionais responsáveis pelo atendimento ao público, cuidadoras de crianças e de idosos, por exemplo. No entanto, é preciso destacar que homens e mulheres podem desempenhar com competência essas funções. Trata-se de um equívoco afirmar que habilidades como coordenação motora fina, paciência, concentração, boa observação, dedicação, atenção e exercício simultâneo de várias tarefas seriam características típicas do gênero feminino. Isso é um mito, pois tais habilidades podem ser desenvolvidas por qualquer um e foram adquiridas nas relações sociais históricas entre homens e mulheres, a partir de suas experiências de vida e de trabalho, como mostram estudos da Antropologia.

As mulheres têm ocupado também cargos mais baixos em profissões valorizadas, como nas áreas da saúde e do direito, entre outras, e seu número ainda é reduzido nas posições de comando ou diretoria em grandes empresas, embora a participação em cargos de chefia tenha crescido. A desigualdade não acontece somente em termos de cargos e funções, ms também em relação à remuneração.

De modo geral, é maior o desemprego entre as mulheres do que entre os homens. Segundo a Pnad 2014, elas compunham 56,7% da população brasileira desocupada, ou seja, sem trabalho. A pesquisa ainda indica que a desocupação entre as mulheres era de 8,8%, enquanto entre homens era de 5,3%, taxa que era, tanto para homens como para mulheres, mais alta entre a população negra. Esses dados refletem uma tendência geral no mercado de trabalho. No ano de 2014, por exemplo, os indicadores mostravam que as taxas de desemprego das mulheres eram mais elevadas em todas as regiões do Brasil.

ANEXO B – Charge sobre a dificuldade encontrada pelos cadeirantes.

Figura 72 - Charge.

GILMAR. Disponível em: www.deficientefisico.com. Acesso em: 6 dez. 2012.

Fonte: enem, 2015.

ANEXO C – Texto sobre a discriminação de gêneros.

Figura 73 - Texto reflexivo sobre a discriminação de gêneros.

Cartum de Mike Flanagan.

No século XVIII, o trabalho de mulheres e crianças era utilizado nas fábricas da Europa, assim como o dos homens, mas o valor da remuneração delas era inferior. Embora sempre tenham trabalhado, principalmente as mais pobres, foi apenas no século XX que as mulheres entraram maciçamente no mercado de trabalho, especialmente no período entre as duas guerras mundiais, para suprir a escassez de mão de obra, e após a década de 1970, com o crescimento da indústria e dos serviços e o surgimento de novas tecnologias.

Contribuíram também para essa inserção os movimentos feministas e a chamada liberação feminina, propiciada, entre outros fatores, pelo uso da pílula anticoncepcional, que permitiu o planejamento familiar. Dados do Banco Mundial mostraram que, em 2014, as mulheres já eram 39,6% da mão de obra no mundo e que essa proporção era maior nas famílias com rendas mais baixas, em razão da necessidade de melhorar suas condições de vida.

As mulheres representam mais da metade da população do Brasil. De acordo com o Censo 2010, 37,3% das famílias têm mulheres como responsáveis, embora elas ainda recebam, na média, salários inferiores aos dos homens.

Weylla Santana Silveira/Acervo do fotógrafo

Marido e esposa dividem afazeres domésticos, em Itaporã, Mato Grosso do Sul. Cenas como essa ainda são pouco comuns nos lares brasileiros, de acordo com dados da Pnad 2011. Foto de 2012.

Agricultores quilombolas colhem feijão-branco na zona rural de Cabo Frio (RJ). Foto de 2015.

Fonte: Livro: Sociologia ensino médio, 2016.

ANEXO D – Texto sobre a desigualdade e discriminação social.

Figura 74 - Texto reflexivo sobre a desigualdade e discriminação social.

Desigualdade social e dominação

A desigualdade social está presente em todo o mundo. No Brasil, por exemplo, enquanto alguns cidadãos têm acesso a moradias seguras e a condições dignas de sobrevivência, outros se veem forçados a morar em regiões sujeitas a enchentes, correndo o risco de terem suas casas inundadas e seus pertences destruídos. Na foto de 2015, vista aérea da comunidade do Morro do Papagaio e edifícios de classe média, em Belo Horizonte (MG).

Por ser considerada injusta e desumanizadora, a desigualdade tem sido criticada e combatida em diversas instâncias da sociedade. Ela se apresenta nas situações do cotidiano, como nas relações de classe, em que os trabalhadores estão subordinados ao capital; ou nas relações de gênero, como a histórica opressão sofrida pelas mulheres, em tempos e sociedades diversas. Há desigualdade também nas relações entre as diferentes etnias, como na exploração dos europeus do século XIX sobre os latino-americanos, asiáticos e africanos; ou, ainda, na dominação dos Estados Unidos sobre os países da América Latina no século XX.

As múltiplas expressões das desigualdades sociais revelam o fenômeno da **dominação social**. Em sua origem sociológica, esse fenômeno foi tratado por Max Weber como a probabilidade de encontrar submissão a uma determinada ordem por diversos motivos: conveniência, mera inclinação pessoal ou costume. Mas, nas relações sociais, em geral, a dominação apoia-se em bases jurídicas que lhe dão "legitimidade". Nesse aspecto, o fato de o Estado organizar o poder político institucionalizado contribui para um complexo ordenamento de deveres e direitos na sociedade.

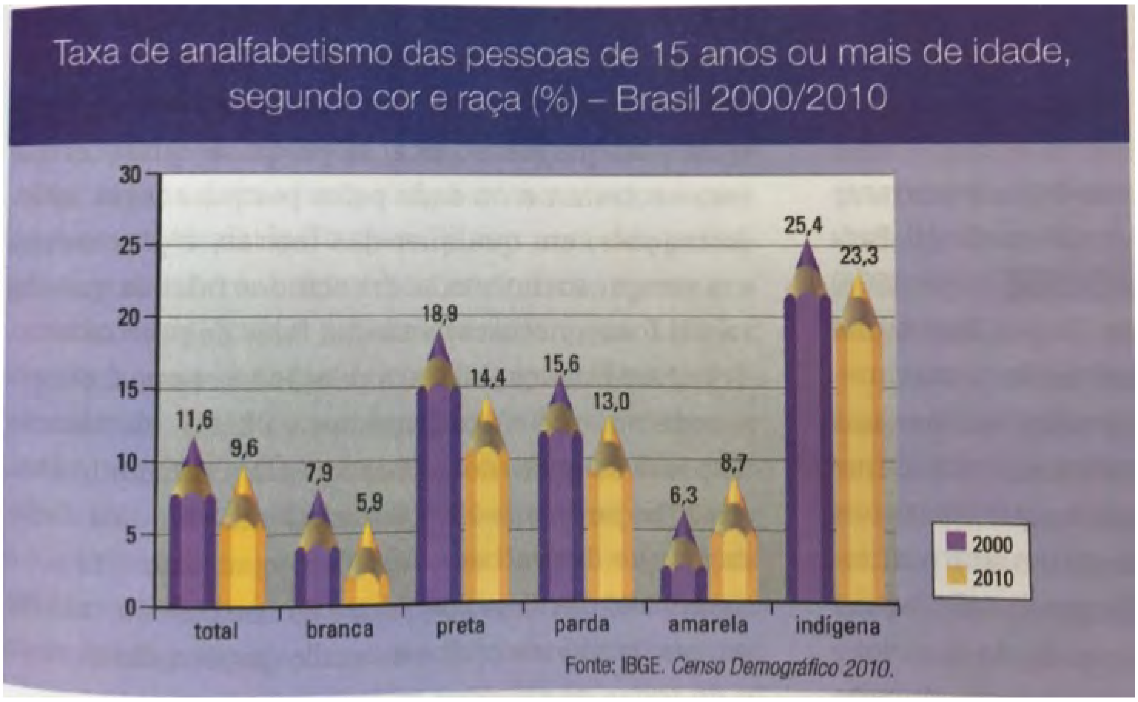
Charge do cartunista Laerte, publicada no jornal *Folha de S.Paulo*, em 2010, sobre relações de gênero.

58 Capítulo 2

Fonte: Livro: Sociologia ensino médio, 2016.

ANEXO E – Gráfico sobre a desigualdade racial.

Figura 75 - Taxa, em % de analfabetismo das pessoas entre 15 ou mais anos de idade segundo cor e raça.



Fonte: Livro: Sociologia ensino médio, 2016.

ANEXO F – Desigualdade étnicos-raciais.

Figura 76 - Desigualdade étnicos-raciais no mercado de trabalho.

Desigualdades étnico-raciais no mercado de trabalho

Você já percebeu que em algumas profissões predominam mulheres e que certas atividades costumam ficar a cargo dos homens? Muitos trabalhadores e trabalhadoras às vezes encontram dificuldades em exercer suas ocupações, seja pela falta de qualificação, seja por sofrerem discriminação. Observe como em determinados nichos do mercado de trabalho os afrodescendentes são os profissionais menos valorizados e mais mal remunerados. Faltam também oportunidades, acessibilidade e condições de trabalho para os indivíduos com algum tipo de deficiência. O que produz essa participação desigual dos segmentos sociais no mercado de trabalho?

A desigualdade social não se dá somente entre empregados e desempregados, trabalhador formal e informal, qualificado e não qualificado, com altos ou baixos salários, trabalhadores experientes ou jovens buscando o primeiro emprego, trabalhadores efetivos ou temporários, trabalhadores diretos ou terceirizados, patrões e empregados. Outras formas de desigualdade, historicamente construídas, envolvem a diversidade de gênero e etnias.

Fonte: Livro: Sociologia ensino médio, 2016.