Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Roberto Alfredo Nascimento

Análise Combinatória no Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas

Rio de Janeiro
2018

Roberto Alfredo Nascimento

Análise Combinatória no Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ).

Orientador: Prof. Dr. Augusto César de Castro Barbosa

Coorientadora: Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido

Rio de Janeiro

2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

N244 Nascimento, Roberto Alfredo.
Análise Combinatória no Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas / Roberto Alfredo Nascimento. – 2018.
101 f. : il.
Orientador: Augusto César de Castro Barbosa.
Coorientadora: Claudia Ferreira Reis Concordido
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.
1. Análise Combinatória – Teses. 2. Matemática – Estudo e ensino - Teses. I. Barbosa, Augusto César de Castro. II. Concordido, Claudia Ferreira Reis. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. I. Título.
CDU 519.1

Assinatura   Data

Roberto Alfredo Nascimento

Análise Combinatória no Ensino Fundamental
através da Resolução de Problemas

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovado em 05 de fevereiro de 2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Augusto César de Castro Barbosa (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido (Coorientadora)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.ª Dra. Aline de Lima Guedes Machado
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.ª Dra. Maria Aguieiras Alvarez de Freitas
Instituto de Matemática - UFRJ

Rio de Janeiro
2018

DEDICATÓRIA

Aos meus pais e irmãos.

Ao meu companheiro Frederico Toro.

Aos meus colegas do mestrado.

Aos professores.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e por cada dia me dar forças para continuar firme em minha caminhada.

À minha mãe e ao meu pai, que sempre se esforçaram para que eu tivesse melhores condições de vida do que a deles.

Ao meu irmão e minhas irmãs pelo carinho, incentivo e apoio psicológico.

Ao meu marido Frederico Toro por sempre me apoiar nas maiores dificuldades e por ter mudado minha vida completamente. Afinal um simples gesto de carinho dele me faz divinamente feliz.

Ao Renato Rocha (em memória) pelo constante incentivo à minha carreira docente. Graças a ele sei o significado da palavra companheirismo.

Aos demais familiares e amigos pela constante torcida e energia positiva.

A todos os meus amigos da turma PROFMAT 2015 pelos inesquecíveis momentos compartilhados.

Aos meus orientadores pela ótima orientação e pela busca constante do aperfeiçoamento do trabalho.

Aos meus alunos pelo convívio e pela aprendizagem diária.

À UERJ, pela oportunidade oferecida, em especial aos meus professores pela partilha do saber e pela contribuição na nossa formação como mestres.

EPÍGRAFE

“... para mim é impossível existir sem sonho. A vida na sua totalidade me ensinou como grande lição que é impossível assumí-la sem risco.”

PAULO FREIRE

RESUMO

NASCIMENTO, R.A. *Análise Combinatória no Ensino Fundamental através da Resolução de problemas.* 2018. 20f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

O presente trabalho visa abordar de um modo mais significativo para os alunos conceitos de Análise Combinatória através da metodologia de Resolução de Problemas. Apresentamos a análise de um conjunto de atividades contextualizadas desenvolvidas em turmas de 8º e 9º anos do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de ensino da cidade do Rio de Janeiro, juntamente com o encaminhamento das aulas durante o ensino desse conteúdo no ano de 2017.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Análise Combinatória. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

NASCIMENTO, R.A. *Combinatorial Analysis in Elementary School through Resolution Problems*. 2018. 20f. Thesis (Professional Master in Mathematics in Professional Network - PROFMAT) - Institute of Mathematics and Statistics, State University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

The present work aims to adress a mode with more means to the students concepts of Combinatorial Analysis through the methodology of Resolution Problems. It is presented the analysis of a set of contextualized activities developed in classes of 8th and 9th grade in a municipal elementary school from Rio de Janeiro, together with the classes’ progression during the teaching of this specific content in 2017.

Keywords: Resolution Problems. Combinatorial Analysis. Elementary School.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
GTERP	Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
NSF	National Science Foundation
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
OBMEP	Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PAPMEM	Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SUSD	State University of San Diego
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UNESP	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática é, sem dúvida, uma disciplina desafiadora para a maioria dos alunos. Tal fato pode tanto gerar um maior interesse pela disciplina quanto se tornar uma verdadeira barreira que pode provocar a desistência do estudante em aprender os conteúdos abordados. Talvez um dos maiores responsáveis por essa situação de desistência atualmente seja a excessiva gama de assuntos exigidos em cada ano escolar. Tal situação faz com que os conteúdos matemáticos sejam abordados muito rapidamente e por vezes de uma forma bastante superficial, resultando numa falta de interesse ainda maior dos alunos, pois os mesmos não são levados a compreender o significado verdadeiro dos assuntos que estão sendo discutidos.

Em vista disso, é necessário que nós, professores dessa disciplina, busquemos um caminho didático-pedagógico a fim de que essa barreira que impossibilita a real apropriação dos conceitos matemáticos seja derrubada.

A Análise Combinatória é geralmente um dos temas que apresenta uma grande dificuldade por parte dos alunos e, até mesmo de alguns professores, pois o uso excessivo de fórmulas desnecessárias e descontextualizadas acaba trazendo um grande sentimento de insegurança durante as resoluções dos problemas abordados.

A justificativa para trazer a Análise Combinatória para o Ensino Fundamental é consequência da existência de questões relacionadas a esse tema em importantes processos seletivos de alunos para diversas escolas de excelência e, infelizmente, não faz parte do currículo das escolas municipais de ensino da cidade do Rio de Janeiro.

O cerne deste trabalho é introduzir os conceitos de Análise Combinatória de uma forma mais significativa tanto para os discentes quanto para os docentes, abrindo mão de qualquer tipo de ensino baseado na simples memorização de fórmulas e, ao mesmo tempo, tratando os problemas como poderosas ferramentas de aprendizagem e objeto de desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos. Este trabalho propõe atividades que permitem construir os conceitos da Análise Combinatória através da metodologia de resolução de problemas. Tais atividades foram realizadas e avaliadas por meio da comparação dos resultados de um pré-teste e de um pós-teste. Para isso, essa dissertação é composta por cinco capítulos.

No primeiro capítulo apresentamos todo o aporte teórico para a produção de uma aula com base na metodologia de Resolução de Problemas. No intuito de justificar nossas escolhas, citamos alguns autores importantes que defendem essa prática. Pontuamos também algumas observações bastante relevantes para essa prática, tais como: a diferença entre um problema e um exercício, quais tipos de problemas nos interessam, como elaborar uma aula com resolução de problemas, etc.

O segundo capítulo aborda o conceito, ensino e aprendizagem da Análise Combinatória e nele é apresentado um breve histórico desse tema.

O terceiro capítulo trata da abordagem de um problema, com foco na Análise Combinatória, baseada nas ideias do matemático húngaro George Polya (1887 – 1985), que é um dos autores mais importantes (se não o maior deles) do tema Resolução de Problemas. Citamos também o grande mestre brasileiro, Professor Augusto César de Oliveira Morgado (1944 – 2006), que se tornou um autor importante, especialmente quando falamos de Análise Combinatória. Expomos suas três normas da boa técnica: postura, divisão e não adiamento das dificuldades. Este capítulo aborda esses tópicos com exemplos resolvidos e comentados para uma melhor compreensão das ideias dos matemáticos citados anteriormente.

O quarto capítulo refere-se à nossa proposta didática, executada em forma de uma oficina, que foi realizada numa escola municipal, localizada no bairro de Inhaúma, na zona norte da cidade do Rio de Janeiro. Apresentamos as aulas ministradas durante a oficina acrescidas dos objetivos, problemas apresentados, conceitos abordados, resoluções dos discentes e alguns comentários referentes aos momentos das aulas e posteriores a elas. Ao produzir as aulas, de uma forma minuciosa, e analisar o que ocorreu nas mesmas, descrevendo os acertos e erros das atividades, bem como o retorno obtido em cada uma delas, colocamos em prática todo o conteúdo que foi visto nos capítulos anteriores.

Finalizamos apresentando as considerações finais, onde encontram-se comentários gerais da dissertação e análises dos pontos positivos e negativos da pesquisa. Por fim, estimulamos os demais formadores a utilizarem essa metodologia para a abordagem, não apenas do assunto aqui tratado, mas de qualquer conteúdo matemático.

1. UMA ABORDAGEM POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

1.1 Problema X Exercício

Como não existe uma definição única para o significado da palavra “problema”, visto que cada indivíduo é capaz de defini-la com suas próprias palavras, veremos a seguir algumas definições interessantes.

Segundo Newel e Simon (1972 apud FERREIRA; BRUNETTI; RECH), ”um problema é uma situação na qual um indivíduo deseja fazer algo, porém desconhece o caminho das ações necessárias para concretizar a sua ação”. Por sua vez, Porto da Silveira (1999 apud BRANDÃO et al) afirma que “problema é o alimento de que se nutre a Matemática. Para um verdadeiro matemático, um grande problema é aquele que se torna fonte de novas ideias e é capaz de fertilizar outros campos da Matemática”. Já Costa e Moreira (1996, p.177) ressaltam que:

> Um problema é um estado subjetivo da mente, pessoal para cada indivíduo, um desafio, uma ação não resolvida, cuja resposta não é imediata, que resulta em reflexão e uso de estratégias conceituais e procedimentais, provocando uma mudança nas estruturas mentais.

A maioria desses autores parece concordar com Costa e Moreira (1997, p. 7), que afirmam que “a diferença entre um problema e um exercício é que o último requer mecanismos que conduzem de forma imediata a sua solução”. Ou seja, para ser considerado um problema é necessário que sua solução não seja obtida de uma forma instantânea. Um verdadeiro problema deve ser apresentado como uma conjuntura nova para a qual não há ainda uma resposta.

Dante (1998) também faz essa distinção, onde exercício serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo e problema é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não temos previamente nenhum algoritmo que forneça a solução. Para esse mesmo autor, a resolução de um problema demanda certa dose de iniciativa e criatividade, munida do conhecimento de algumas estratégias. Tanto os exercícios quanto os problemas possuem seu espaço, cabendo ao professor a missão de manter um equilíbrio entre eles.

Vale ressaltar que uma certa situação pode ser considerada como um problema para alguns indivíduos e ao mesmo tempo como um exercício trivial para outros, pois a diferença consiste no grau de habilidade e na gama de procedimentos de cada solucionador. De qualquer modo, o que importa é que “tanto os exercícios quanto os problemas requerem dos estudantes a ativação de diversos tipos de conhecimentos, de procedimentos, de atitudes e motivações” (COSTA; MOREIRA, 1997, p. 7).

A tabela 1 contém um exemplo a respeito da diferença entre um problema e um exercício.

Tabela 1: Problema X Exercício

PROBLEMA	EXERCÍCIO
1) O designer português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem estar associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras. De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto? A) 14 B) 18 C) 20 D) 21 E) 23 (Questão 158, Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), 2012)	1) Quantos anagramas possui a palavra CINEMA?
2) Jogamos uma moeda três vezes. Quantas sequências diferentes de cara e coroa podemos obter?” (Livro “Círculos matemáticos – A Experiência Russa”, IMPA, 2010)	2) Calcule: a) $A_{6,2}$ b) $C_{8,3}$
3) Uma sacola contém duas bolas vermelhas, três azuis, dez brancas, quatro verdes e três pretas. Bruna quer tirar as bolas da sacola sem olhar, pegando uma de cada vez sem colocá-la de volta na sacola. Pelo menos quantas bolas Bruna deve retirar, para ter certeza de que entre as bolas retiradas haja duas de mesma cor? A) 2 B) 5 C) 6 D) 10 E) 12 (Questão 6, Canguru de Matemática Brasil, Nível C, 2013)	

Fonte: O Autor, 2017.

Da tabela 1 percebemos que um exercício almeja simplesmente fixar uma certa técnica e esta é a razão pela qual ele deve ser utilizado como uma ferramenta didática. Por outro lado, um problema, quando apresentado de uma forma adequada, gera no aluno o desenvolvimento do seu raciocínio lógico, bem como do seu senso crítico e de sua forma de encarar outros problemas.

Carraher (1986, apud LUPPINACCI; BOTIN, 2004, p. 3) afirma que:

> Problemas em que o aluno faz uso imediato das fórmulas que estudou recentemente não se caracterizam como verdadeiros problemas. Problemas exigem reflexão, caso contrário, defrontamo-nos com exercícios que exigem apenas o uso da memória para sua resolução. Quando tratadas mecanicamente, as situações-problema resumem-se em meros exercícios, enquanto os verdadeiros problemas exigem, além da compreensão dos conceitos matemáticos, que o aluno faça relações entre seus conhecimentos já contruídos e a possível solução do problema.

A fim de tornar o aluno um verdadeiro protagonista no processo de ensino-aprendizagem, o professor atuará como um mediador discreto nesse processo onde os próprios alunos construirão os conceitos, progressivamente, através de suas descobertas juntamente com algumas orientações do professor. Os problemas atuarão como poderosas ferramentas e, ao mesmo tempo, os meios para a construção das habilidades do discente.

O principal objetivo deste trabalho é utilizar problemas que atuem como facilitadores no que se refere à real assimiliação dos conceitos da Análise Combinatória por meio do ponto de vista de resolução de problemas no oitavo e nono anos do Ensino Fundamental.

1.2 A Resolução de Problemas como uma Metodologia

Segundo Lupinacci e Botin (2004),

> A Resolução de Problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo de ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos.

A resolução de problemas permite aos alunos usarem seus conhecimentos e ampliarem a capacidade de gerenciar as informações que estão à sua volta. Consequentemente, os discentes obtêm a oportunidade de desenvolver seu raciocínio lógico, aumentar seu conhecimento, conhecer as aplicações da Matemática e enfrentar novas situações. A mesma situação acontece com o professor, uma vez que trabalhar com a resolução de problemas permite atingir os objetivos de aprendizagem definidos, além de deixar a aula bem mais atrativa e instigadora. Contudo, ensinar Matemática através da resolução de problemas é um modo de ensino que ainda enfrenta muitas dificuldades que necessitam ser sobrepujadas.

Para a maioria dos autores, a Resolução de Problemas é considerada sob dois principais pontos de vista: conteúdo educativo e forma de conceber as atividades educativas.

Pozo (1998 apud PICHILIANI; HIRATA, 2006) afirma que "o ensino baseado na resolução de problemas supõe fomentar nos alunos o domínio dos procedimentos para dar respostas a situações distintas e mutáveis". Por sua vez, Gagné (1965 apud COSTA; MOREIRA, 1996) declara que a resolução de problemas é "um processo pelo qual o aprendiz descobre uma combinação de regras anteriores aprendidas que ele pode aplicar para atingir uma solução para uma situação problemática nova" e Novak (1977 apud COSTA; MOREIRA, 1996, p. 177) ressalta que "este processo deve favorecer a aprendizagem significativa na medida em que propicia uma reorganização da informação e do conhecimento armazenado na estrutura cognitiva do sujeito".

Tendo como base as ideias dos últimos três autores citados anteriormente, é possível notar a importância da metodologia de resolução de problemas, que tem sido enfatizada, em todo o mundo, como um recurso que proporciona um aprendizado de melhor qualidade em relação ao ensino tradicional. A construção de conceitos pelos alunos, através dessa metodologia, se torna mais significativa e duradoura ao ser proporcionada por meio de situações contextualizadas e pela exploração de novos conceitos, o que gera um grande estímulo na curiosidade do aluno.

Embora o processo de formalização em uma ação educativa baseada nessa metodologia tenha geralmente um ritmo mais lento, de acordo com D'ambrosio (2003), percebe-se um maior envolvimento do estudante, tanto na fase do levantamento de hipóteses e conjecturas quanto no momento em que o aluno investiga e testa cada uma delas, buscando a solução do problema proposto.

Polya (1995, p. 5) relata que

> É possível que se chegue a perceber que um problema de Matemática pode ser tão divertido quanto um jogo de palavras cruzadas, ou que o intenso trabalho mental pode ser um exercício tão agradável quanto uma animada partida de tênis. Tendo experimentado prazer no estudo da Matemática, o aluno não esquecerá facilmente e haverá, então, uma boa probabilidade de que ela se torne alguma coisa a mais, um hobby, um instrumento profissional, a própria profissão ou uma grande ambição.

Segundo esse mesmo autor,

> O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda sua vida, sua marca na mente e no caráter. (POLYA, p. 5)

Em outras palavras, Polya entende que a resolução de problemas é um grande elo entre o aluno e os conteúdos matemáticos. Uma sensação de satisfação preenche o ser de alguém que se propõe a resolver uma charada, descobrir o final de um filme, etc. O ideal é que tal satisfação possa servir como motivação para o aluno em seu papel de solucionador de problemas.

Já Dante (1995) afirma que “um dos principais objetivos do ensino da Matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que apresentar-lhe situações-problema que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las”. Logo, é necessário que numa verdadeira aula de matemática sejam escolhidos desafios que gerem envolvimento da parte dos educandos. Haverá, sem dúvida, um enorme sucesso caso o professor consiga motivar os alunos através desses bons desafios.

Damos ênfase agora a dois autores que se preocuparam com o pleno desenvolvimento das habilidades dos alunos:

> No mundo de intensas transformações científicas e tecnológicas, o cidadão necessita de uma formação geral, sólida, capaz de ajudá-lo a pensar cientificamente, de colocar à luz da ciência os problemas humanos. Dessa forma, nossa sociedade determina que ele desenvolva habilidades que possibilitem uma maneira de processar e resolver problemas com mais rapidez e eficácia. Para isso, vários setores da sociedade são responsáveis pela formação desse cidadão, e a escola é um deles.
> (PINHEIRO, 2008, p. 11)

> Ensinar apenas conceitos e algoritmos que atualmente são relevantes parece não ser o caminho, pois eles poderão tornar-se obsoletos daqui a quinze ou vinte anos, quando a criança de hoje estará no auge de sua vida produtiva. Assim, um caminho bastante razoável é preparar o aluno para lidar com situações novas, quaisquer que sejam elas. E, para isso, é fundamental desenvolver nele iniciativa, espírito explorador, criatividade e independência através da resolução de problemas. (DANTE, 1995, p. 12)

Ambos mencionam a importância de não preparar nossos alunos para o agora, e sim, para o futuro. Nossa vida é permeada de situações-problema que, ao se modificarem constantemente, acabam nos desafiando diariamente. Eis o motivo pelo qual um indivíduo que se prepara para resolver apenas um determinado tipo de problema estará completamente perdido, caso essa situação rotineira sofra alguma forma de alteração. O indíviduo capaz de compreender seu problema e, após isso, elaborar um plano para resolvê-lo, perceberá que mesmo que a situação se altere, a solução ainda poderá ser viável.

Pozo (1980 apud DUTRA; VIANA, 2011) ressalta que:

> ensinar os alunos a resolver problemas é dotá-los da capacidade de aprender no sentido de habituá-los a encontrar por si mesmos respostas às perguntas que os inquietam ou que precisam responder ao invés de esperar uma resposta já elaborada por outros e transmitida pelo livro-texto ou pelo professor.

Logo, um dos principais intentos da resolução de problemas consiste na atitude do professor em despertar no aluno a vontade de buscar por si próprio os possíveis caminhos para a resolução da questão proposta.

Dessa maneira, os alunos serão conduzidos a gerar os processos de pensamento e a formar os novos conceitos matemáticos que, por sua vez, não são apreendidos simplesmente através da utilização de regras e do treinamento de algoritmos. Na verdade, um conceito não é construído casualmente. Ele é obtido através de uma operação mental a serviço da atividade prática, da resolução de problemas. O progresso da formação desses conceitos se converte num ato multíplice do pensamento que não pode ser ensinado por meio da repetição, visto que subentende o desenvolvimento de muitas funções cognitivas: diferenciação, atenção, raciocínio lógico, comparação, memória e abstração.

Em relação ao uso de fórmulas é importante ressaltar que elas

> [...] devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. Espera-se que assim o aluno possa se orientar frente às informações de natureza estatística ou probabilística (BRASIL, 1998).

Por conseguinte, os Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (PCNEM) incentivam a tratar a Análise Combinatória, tendo como foco a resolução de problemas e as fórmulas como consequência do raciocínio combinatório. Algumas pesquisas como, por exemplo, as de Souza (2010) e Sturm (1999), trabalham abordagens alternativas à frequentemente realizada, tendo como cerne a resolução de situações-problema. Em sua pesquisa, Esteves (2001) desenvolveu uma investigação com dois grupos, um experimental e outro de referência, os quais estudaram a introdução de Análise Combinatória com abordagens distintas. Para o primeiro grupo foi usada uma proposta, produzida por ela, em que as fórmulas, definições e nomenclaturas foram apenas apresentadas no último encontro da sequência.

Esse método consiste em começar a aula apresentando e analisando algumas situações-problema, buscando a formalização do conceito abordado através desses problemas, o que demanda uma mudança no padrão geralmente utilizado.

Inúmeras pesquisas já foram feitas sobre a Metodologia de Resolução de Problemas no ensino da Matemática, entretanto, na rotina dos professores da área ainda aparecem vários questionamentos acerca do assunto. Segundo os PCN de Matemática, a resolução de problemas torna possível aos alunos reunir conhecimentos e expandir a capacidade para gerenciar informações que estão à sua volta. Dessa maneira, os estudantes terão oportunidade de desenvolver seus conhecimentos sobre conceitos e procedimentos matemáticos, bem como ampliar a visão que possuem dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança (BRASIL, 1998).

A atividade de resolver problemas é inerente à vida das pessoas, demandando soluções que muitas das vezes requerem estratégias de enfrentamento. O aprendizado de estratagemas ajuda o estudante a confrontar novas situações pertencentes a outras áreas do conhecimento. Posto isso, é de grande relevância que os professores compreendam como trabalhar essa metodologia, a fim de desenvolver no aluno a capacidade de resolver situações instigadoras e desafiadoras, interagir entre os pares, desenvolver a comunicação, a criatividade e o senso crítico. Dante (1998) afirma que a resolução de problemas é um dos tópicos mais herméticos e trabalhosos de serem trabalhados em sala de aula e, por conseguinte, deve-se possibilitar ao aluno desenvolver estratégias, buscar vários caminhos para solucioná-lo à sua maneira, de acordo com sua realidade e raciocínio.

Segundo Dante (1998), os objetivos da resolução de problemas são:

- fazer o aluno pensar produtivamente;
- dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática;
- desenvolver o raciocínio do aluno;
- tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras;
- ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- dar uma boa base matemática às pessoas.

A partir da leitura e interpretação dos problemas, é possível gerar um certo comprometimento do estudante na busca por estratégias de resolução, na perseverança em obter uma solução, na ampliação e na redefinição de conceitos e ideias que ele já conhece.

Para Onuchic e Zuffi (1999 apud RODRIGUES; MAGALHÃES, 2011), o problema não deve ser tratado como um caso isolado, e sim como um passo para alcançar a natureza intrínseca da Matemática, assim como suas utilizações e aplicações. É definido como problema tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver.

A seguir apresentaremos um breve histórico referente à Metodologia de Resolução de Problemas.

1.3 **Histórico da Metodologia de Resolução de Problemas**

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989 apud ONUCHIC, 2012, p.4), a formulação de problemas reporta-se pelo menos aos gregos, chineses e antigos egípcios, conforme apontam o *Papiro de Rhind (ou Ahmes)*, um documento matemático egípcio composto por uma coleção de problemas, transcrito pelo escriba Ahmes de um manuscrito ainda mais arcaico no ano de 1650 a.C., e um documento chinês datado de cerca de 1000 a.C. Segundo os autores, tais problemas eram elaborados por alguém que os expunha a outros que, por sua vez, passavam a conhecê-lo e, posteriormente, obtinham sua solução. Os séculos passaram e problemas com tratamento análogo são encontrados até mesmo em livros de Matemática dos séculos XIX e XX. No entanto, o que pode ser notado nesses exemplos é uma visão muito estreita da aprendizagem da resolução de problemas. Há alguns poucos anos atrás, o ato de ensinar resolução de problemas significava apresentar problemas e, talvez, incluir uma técnica de resolução peculiar. Uma atenção mais moderna ao desenvolvimento de habilidades nos alunos em resolução de problemas, nos livros-texto, apresenta-se colorida, com desenhos, chamando a atenção para situações do cotidiano, mas sempre com alguém resolvendo o problema e deixando-se uma lista com problemas análogos para serem resolvidos.

O modo de se ensinar Matemática, no início do século XX, era frequentemente baseado na "decobera", ou seja, na memorização e repetição de exercícios. O professor apresentava um conteúdo e cabia ao aluno memorizar e repetir a técnica ensinada por meio de exercícios rotineiros e, muita das vezes, maçantes. Onuchic (1999) afirma que "nessa época, o currículo de matemática ainda não estava bem definido, embora houvesse um caminho de trabalho: aritmética, álgebra e geometria". Com o passar dos anos, uma nova orientação educacional surgiu para substituir esse ensino da Matemática através da repetição pela transmissão da Matemática por compreensão, que é baseado no treino de técnicas e habilidades para a resolução de problemas formais ou para aprender um novo conteúdo. "Essas duas formas de ensino não lograram sucesso quanto à aprendizagem dos alunos. Na verdade, alguns alunos aprendiam, mas a maioria não" (ONUCHIC, 1999).

Os debates entre professores de Matemática, desde então, vêm se acentuando cada vez mais e apontando para uma necessidade de compreensão no ensino da Matemática. As orientações curriculares ressaltam a possibilidade dos estudantes realizarem discussões, análises, apropriação de conceitos e produção de ideias. Por meio disso, docentes têm procurado trazer para a educação matemática escolar um ensino distinto daquele tradicionalista, que tinha por base as técnicas puramente sintéticas permeadas por rigorosas demonstrações. É importante salientar que esse novo processo almejado é usualmente lento e difícil, pois os professores que atuam em sala, em sua maioria, também receberam uma educação matemática tradicional, baseada em teoremas, regras e exercícios sem muita aplicação e pouca ligação com seu cotidiano. Cabe ao professor se dedicar a esse processo de mudança, partindo da necessidade que ele perceba em seus alunos de entender os porquês dos conteúdos propostos.

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989 apud ONUCHIC, 2012, p.5), educadores matemáticos procuraram adequar-se aos conceitos e aos tempos de mudança, acolhendo as ideias dos críticos, todavia o embate decorrente dos hábitos em disputa acarretou uma verdadeira crise na educação matemática na década de 1930. Esses autores prosseguem afirmando que

> é singularmente irônico que, parcialmente, em decorrência dessa afronta ao lugar da Matemática no currículo escolar, muitos dos nossos antecessores, mesmo defendendo as vantagens da Matemática para a evolução do ser humano, sentiam-se desconfortáveis com a ideia de conceder um papel de protagonismo aos Problemas no currículo.

Onuchic (2012) acredita que tais eventos possam ter ajudado a preparar o terreno para que os educadores matemáticos começassem a dar mais destaque no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, contudo, o conflito das ideias básicas sobre a inteligência humana, da educação e do currículo escolar permeia, até os dias atuais, os debates referentes à resolução de problemas.

Movidos por uma espécie de inquietude por conta da forma que a aprendizagem da Matemática ocorria, começaram os debates a respeito da resolução de problemas para se aprender Matemática. Na década 1960, foi iniciado um movimento de renovação educacional denominado Matemática Moderna. Esse movimento, desligado de todas as reformas anteriores, procurou aproximar a Matemática que era estudada na escola com aquela estudada pelos pesquisadores, o que gerou muitas discussões e amplas mudanças no currículo matemático. A Matemática Moderna expunha uma matemática com demasiadas abstrações, utilização descomedida de símbolos e hermeticidade na abordagem dos conceitos matemáticos. A formalização demasiada também se distanciava das questões de relevância social e cultural. Para Onuchic (2012), essa orientação fracassou por causa dessa situação e, também, pelo afastamento das questões práticas. O movimento da Matemática Moderna retrocedeu por se comprovar a inadequação de alguns de seus princípios básicos e por todas as distorções ocorridas: “[...] Buscavam elas ensinar Matemática de modo a preparar os alunos para um mundo de trabalho que exige conhecimento matemático?” (BRASIL, 1998)

Os educadores matemáticos obtiveram muitos recursos com o propósito de contribuir com o seu trabalho didático e começaram a atribuir a apropriada importância à resolução de problemas no final da década de 1970. No entanto, o resultado esperado não se concretizou devido aos desacordos entre as concepções existentes sobre a resolução de problemas. No ano de 1980 foi editada nos Estados Unidos uma publicação do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), intitulada “Uma Agenda para a Ação”, repleta de recomendações para o ensino da Matemática, sendo a resolução de problemas indicada como o foco central do ensino da Matemática (ONUCHIC, 1999).

Para Onuchic (1999),

> [...] esse fato ocorreu devido às grandes diferenças entre as concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado da “resolução de problemas como foco da matemática escolar”. [...] os estudos da década de 80 deram muita atenção ao processo de resolução de problemas, não se limitando simplesmente à busca da solução do problema. Mesmo assim, o processo continuou atrelado à busca da solução do problema.

Não houve uma consonância em relação ao entendimento da primeira recomendação do documento “Uma Agenda para a Ação”, onde se afirmava que a resolução de problemas deveria ser o foco da Matemática escolar na década de 1980. Nessa mesma perspectiva, o ensino de Matemática através da resolução de problemas era uma concepção expresssiva dentre os vários tipos de concepções já existentes, em virtude do estudante tanto aprender Matemática resolvendo problemas, quanto aprender Matemática para resolvê-los. Essa orientação para o ensino de Matemática afirma que o ensino-aprendizagem de um conteúdo matemático deve ocorrer a partir de uma situação-problema, podendo esse ser originado de uma situação contextualizada ou ser um problema puramente matemático. Ademais, emprega o que foi considerado satisfatório nas orientações curriculares anteriores (ONUCHIC, 1999).

O ensino da Matemática por meio da resolução de problemas é a abordagem mais relevante e fundamentada com as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, pois conceitos e habilidades matemáticas são aprendidos no contexto da resolução de problemas.

Por exemplo, é possível encontrar nos PCNEM uma recomendação para o ensino de Análise Combinatória que não tem as fórmulas como eixo principal, mas que, através da resolução de problemas, desenvolve o raciocínio combinatório. A contagem tanto possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, quanto permite o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática, conhecida como raciocínio combinatório.

Na década de 1990, muitos acreditavam que a resolução de problemas demandava uma mente versátil, isto é, um intelecto polivalente. Entretanto, torna-se difícil atingir esse objetivo sem um conhecimento considerável de métodos e técnicas de descoberta. Sendo assim, o ideal seria realizar uma análise a fim de constatar se esse treinamento em estratégias de resolução de problemas poderia ter uma recompensa significativa, apesar de todos os perigos inerentes à aprendizagem.

> Em muitos livros que oferecem algumas estruturações para a construção de modelos matemáticos, a estruturação é comumente usada apenas para rotular estágios, aos invés de propiciar a entrada na experiência. Não surpreende que os alunos vão embora com uma abordagem da matemática algorítmica e mecânica (MASON, 1988, p.211 apud MEDEIROS).

Durante a década de 1980, muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos tendo em vista o trabalho em sala de aula, na forma de listas de estratégias, coleções de problemas, sugestões de atividades e orientações a fim de analisar o desempenho em resolução de problemas. Esse material foi de primordial ajuda para os professores tornarem a resolução de problemas o ponto central de seu trabalho. Nessa importante década, os obstáculos encontrados tanto pelos professores para "ensinar" quanto pelos alunos para "aprender" passaram a ser considerados como objetos de estudo e de reconceptualização por educadores e pesquisadores na Educação Matemática. Todavia, havia distintas linhas de pesquisa por eles defendidas.

Conforme Onuchic e Allevato (2004), no final da década de 1980, o NCTM, buscando uma melhoria para a Educação Matemática, publicou os seguintes documentos: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, em 1989; *Professional Standards for Teaching Mathematics*, em 1991; *Assessment Standards for School Mathematics*, em 1995. Esses *Standards* não tinham a presunção de mostrar, passo a passo, a forma desses documentos serem trabalhados. Pelo contrário, tinham por intuito apresentar objetivos e princípios, defendendo que práticas curriculares, de avaliação e de ensino conseguissem ser examinadas. Eles aspiravam encorajar professores, pais, políticos educacionais, administradores, comunidades locais e conselhos escolares a aperfeiçoar os programas de matemática em todos os níveis educacionais.

O *National Science Foundation* (NSF), no ano de 1990, custeou uma coleção de projetos de materiais instrucionais, em grandes quantidades, para todos os níveis de ensino (elementar, médio e secundário). Despontou-se uma nova geração de currículos em conformidade com os *Standards*. Tais currículos descrevem a Matemática como uma disciplina unificada por tópicos coerentemente integrados. Para dar conta dessas novas ideias foi preciso que um nova abordagem fosse dada às salas de aula e que se tivesse uma visão mais ampla dos algoritmos. A utilização de contextos na resolução de problemas como uma forma de desenvolver os conteúdos matemáticos e encontrar as conexões com outras áreas é outra característica identificada nesses currículos. Do ano de 1995 em diante foi iniciada uma verdadeira "guerra matemática", nos Estados Unidos. Uma série de críticas à reforma proposta pelos *Standards* surgiram, entretanto a luta continuou (ONUCHIC, 2012, p.11).

Depois de uma década de aplicação das ideias defendidas nos *Standards*, o NCTM analisou as críticas e sugestões recebidas e lançou, em Abril de 2000, a publicação *Principles and Standards for School Mathematics*, mais conhecida como os *Standards* 2000, que por sua vez sugeriram profundas mudanças em praticamente todos os aspectos do ensino e da aprendizagem da matemática. Os *Standards* 2000 aprimoram e elaboram as mensagens dos documentos originais dos Standards mantendo íntegra sua visão básica.

No Brasil, tendo como base as ideias dos *Standards* do NCTM, foram concebidos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): PCN – Matemática – 1º e 2º ciclos – 1º a 4 º séries – 1997; PCN – Matemática – 3º e 4º ciclos – 5º a 8º séries – 1998; PCN – Matemática – Ensino Médio – 1999.

Em seu artigo, Onuchic e Allevato (2004, p.218) também afirmam que os objetivos gerais da área de Matemática, nos PCN, procuram levar em conta muitas linhas para trabalhar o ensino da Matemática. Tais objetivos têm por finalidade fazer com que os alunos possam:

- pensar matematicamente;

- levantar ideias matemáticas, estabelecer relações entre elas e saber se comunicar ao falar e escrever sobre elas;
- desenvolver formas de raciocínio;
- estabelecer conexões entre temas matemáticos e de fora da Matemática;
- desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles.

De que maneira pode-se enfrentar as mudanças sugeridas pelos PCN? Qual seria a quantidade de professores realmente preparados para verdadeiramente utilizar suas recomendações e levar aos seus alunos um conteúdo que consiga estar de acordo com a realidade dos mesmos? De modo específico, em relação à Matemática, os PCN apontam a resolução de problemas como ponto de partida das atividades matemáticas e discutem caminhos para se fazer matemática na sala de aula. Nesse contexto, existem distintos caminhos propostos para se chegar a processos de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática. (ONUCHIC, 2012, p.12)

A Resolução de Problemas foi trabalhada, no grupo GTERP, com a “Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas”, onde a aprendizagem e o ensino devem acontecer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como coconstrutores desse conhecimento. Ademais, essa metodologia integra uma concepção mais atual de avaliação. A avaliação é construída durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino com o objetivo de acompanhar a evolução dos estudantes, aumentando sua aprendizagem e reorientando as práticas em salas de aula sempre que for necessário.

A maioria dos trabalhos, quer sejam dissertações de mestrado ou teses de doutorado, utilizam essa metodologia ao trabalhar diferentes tópicos matemáticos, num trabalho de sala de aula que, visando ao processo de ensino-aprendizagem-avaliação, se apresenta ao professor de uma maneira instrutiva, isto é, professor e alunos juntos desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem ocorre de uma forma coparticipativa e colaborativa em sala de aula.

No GTERP faz-se uso de um roteiro de atividades destinado à orientação de professores para a condução de suas aulas, e esse roteiro é mostrado a seguir:

> 1. PREPARAÇÃO DO PROBLEMA. Escolher um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Tal problema será chamado de problema gerador.

> 2. LEITURA INDIVIDUAL. Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
>
> 3. LEITURA EM CONJUNTO. Formar grupos e solicitar uma nova leitura do problema, agora nos grupos. Se houver dificuldade na leitura do texto, o professor pode auxiliar os alunos, lendo e levando-os a interpretar o problema. Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.
>
> 4. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA. De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da “matemática nova” que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos na construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.
>
> 5. OBSERVAR E INCENTIVAR. Nessa etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupos, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor, como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda aos alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução (tais como notação, passagem da linguagem vernácula para linguagem matemática, conceitos relacionados e técnicas operatórias) a fim de possibilitar a continuação do trabalho.
>
> 6. REGISTRO DAS RESOLUÇÕES NA LOUSA. Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.
>
> 7. PLENÁRIA. Para essa etapa são convidados todos os alunos para discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Esse momento é bastante rico para a aprendizagem.
>
> 8. BUSCA PELO CONSENSO. Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor incentiva toda a classe a chegar a um consenso sobre o resultado correto.
>
> 9. FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO. Nesse momento, denominado “formalização”, o professor registra na lousa uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto (ONUCHIC, 2012, p. 12-14).

Tendo em vista tal roteiro de atividades proposto acima, serão apresentadas a seguir cinco fontes de dados onde podemos obter um material vasto para a elaboração de uma aula de Análise Combinatória baseada na metodologia da Resolução de Problemas.

1.4 Elaborando uma aula com resolução de problemas

A primeira fonte de dados é a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), visto que questões de Análise Combinatória estão sempre presentes e, por esse motivo, podem ser encontradas facilmente em seu material. As questões são contextualizadas e apresentam um grau de dificuldade considerável. Dessa forma, tais questões são indicadas para alunos que se encontram em uma fase não inicial, uma vez que as mesmas requerem um domínio mais amplo em relação aos conteúdos.

A segunda fonte de dados é o CANGURU DE MATEMÁTICA, que é uma competição internacional tida como uma espécie de jogo, em que estudantes com idades entre 7 e 18 anos, podem participar, em seis categorias etárias, resolvendo 24 ou 30 testes de múltipla escolha relativamente fáceis em 90 minutos (ou mais, dependendo do país participante). Como o concurso é individual e não uma forma de comparação internacional, os resultados dos alunos de diferentes países não são comparados, até porque isso seria contrário ao espírito do Canguru. Desse modo, os problemas e as regras são internacionais, no entanto, o concurso em cada país é organizado independentemente e cada país possui seus próprios vencedores.

Vale ressaltar que essa competição é bem acolhedora, pois não recebe somente os melhores estudantes de Matemática. Pelo contrário, o concurso tem por meta atrair tantos estudantes quanto for possível, com o intuito de fazê-los compreender que a Matemática pode ser útil, atrativa e até mesmo prazerosa. Em outras palavras, o concurso busca cumprir sua principal missão que é a popularização da Matemática pelo mundo, principalmente, entre os estudantes que não se tornarão matemáticos profissionais.

A terceira fonte de dados é o ENEM que é uma prova anual em que são apresentadas, atualmente, 45 questões de Matemática. Nota-se que problemas envolvendo Análise Combinatória são habituais. Assim como o CANGURU DE MATEMÁTICA, as questões do ENEM são contextualizadas, o que as torna mais atrativas. Dessa forma, o conhecimento passa a ter significado real para o estudante, visto que o cotidiano é trazido para dentro da sala de aula, fazendo com que o dia a dia dos alunos se aproxime cada vez mais do conhecimento científico.

Segundo Torres (2007 apud SAMPAIO, 2012), o modelo proposto pelo ENEM considera fundamentalmente para sua avaliação “o desenvolvimento e constituição das estruturas mentais do sujeito que, em contínua interação com a realidade, constrói seus conhecimentos.” Vale ainda mencionar que esse modelo de avaliação busca medir e quantificar “as competências e habilidades básicas que teoricamente são desenvolvidas, transformadas e aperfeiçoadas também por mediação da escola”.

Um aspecto importante do ENEM é que não há um caminho único para a resolução de uma questão. Em outras palavras, é possível obter a solução desejada de várias formas distintas. Esse aspecto é primordial na metodologia de Resolução de Problemas, pois cada aluno será capaz de enfrentar o problema proposto de vários modos e um eventual debate entre os alunos, após a questão resolvida, se tornará muito mais rico e eficiente.

> Para enfrentá-las é preciso ainda saber como agir diante delas, selecionando ações ou procedimentos que consideramos os melhores naquele momento. Isto implica ativar nossos esquemas mentais, mobilizando conhecimentos prévios e transformando-os ou atualizando-os em função daquilo que é novo a cada situação (BRASIL, 2007 apud SAMPAIO, 2012).

A quarta fonte de dados é o livro intitulado “Círculos Matemáticos, a Experiência Russa”, dos autores Dmitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg, que foi escrito na, até então, União Soviética, traduzido para o inglês nos anos 1990 e para a língua portuguesa, mais recentemente, pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Cada capítulo desse livro apresenta um assunto matemático seguido de ótimos problemas. Notamos, no prefácio da edição em inglês, a enorme expectativa do tradutor em relação à grande contribuição desse material na popularização da Matemática.

> Então, que espécie de livro é esse? É um livro produzido por circunstâncias culturais notáveis, que fomentaram a criação de grupos formados por alunos, professores e matemáticos na antiga União Soviética, chamados de círculos matemáticos. É baseado na ideia de que o estudo da matemática pode gerar o mesmo entusiasmo que praticar um esporte com um time, sem ser, necessariamente, competitivo. Então ele parece mais com um livro de recreações matemáticas – exceto que é mais sério. (SAUL, 1996, p. V)

O livro contém aspectos consideráveis que serviram como ponto inicial no momento em que os problemas foram selecionados. Encontramos nele problemas que desenvolvem o raciocínio lógico, ou seja, tais problemas estão longe de serem classificados como típicos problemas de simples memorização. Os problemas foram inicialmente separados por conteúdos e esses conteúdos, por sua vez, foram separados por conceitos. Vale destacar que os autores tiveram o cuidado de apresentar os problemas numa sequência onde o grau de dificuldade dos mesmos vai crescendo paulatinamente e, nesse crescimento, existe sempre uma conexão dos problemas mais triviais àqueles considerados mais difíceis.

A quinta e última fonte de dados é o livro intitulado "Prelúdio à Análise Combinatória", dos autores Arago Bachx, Luiz Poppe e Raymundo Tavares. A proposta desse livro é bem atual e condiz perfeitamente com o objetivo da dissertação aqui presente, pois ele foge do ensino tradicional da Análise Combinatória que é calcado no trabalho mecânico dos estudantes que gera uma busca viciante nos mesmos em utilizar fórmulas e definições sem ao menos compreendê-las adequadamente. O livro apresenta os fundamentos da Análise Combinatória de uma maneira extremamente clara e objetiva, pautada no princípio multiplicativo. Dessa forma, os alunos aprendem de um modo bastante espontâneo, visto que gradativamente eles conseguem descobrir como identificar e formar os grupos de objetos abordados nos problemas propostos.

Ao refletir sobre esses materiais, notamos que há uma imensidão de problemas para trabalhar com os estudantes, todavia para desenvolvermos uma aula baseada na metodologia de resolução de problemas teremos que, necessariamente nos preocuparmos com alguns itens. Apresentaremos a seguir a tabela 2 contendo uma lista, baseada nas ideias de Sá (2005, p.75 apud PINHEIRO, 2008, p. 54), composta por onze itens.

Tabela 2: Onze itens para desenvolver uma aula baseada na metodologia de resolução de problemas

1	Não tente fazer uma aula dentro dessa concepção de maneira improvisada.
2	Deterrmine qual é o problema mais simples e interessante para a turma que uma operação ou conceito matemático auxiliam a solução.
3	Descubra um processo de resolver o problema sem uso da operação, normalmente o processo procurado envolve o uso de algum material manipulativo ou uso de algum conceito já conhecido.
4	Proponha o problema em sala e dê um pouco de tempo para a turma pensar uma solução.
5	Solicite à turma que apresente uma solução ao problema ou apresente a solução que você tem.
6	Faça um registro escrito e detalhado da solução para toda a turma.
7	Analise com a turma os invariantes que surgiram na resolução do problema.
8	Solicite da turma uma conclusão operacional para resolver o problema apresentado.
9	Sistematize o conceito do conteúdo que você tinha como objetivo a trabalhar.
10	Mostre como fica a solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado.
11	Proponha novos problemas envolvendo o assunto sistematizado.

Fonte: O Autor, 2017.

É importante salientar que o papel do professor é essencial em todo o processo de ensino-aprendizagem. Para que o êxito do trabalho em sala de aula ocorra é preciso que o professor tenha uma grande sensibilidade no momento em que escolhe os problemas para trabalhar com os alunos. Para Luppinacci e Botin (2004, p. 3), “o sucesso em Resolução de Problemas depende fortemente das atitudes do professor, pois ele é responsável pela escolha do problema bem como do seu enunciado e do nível de dificuldade que o problema apresenta”.

Portanto, a dificuldade de cada um desses problemas deve ser analisada criteriosamente, pois os mesmos devem estar diretamente relacionados com o nível dos alunos. É fundamental que o aluno se sinta desafiado ao ser confrontado com um dado problema. O nível desse desafio não pode ser tão básico ao ponto que o aluno não precise refletir direito para obter a solução, nem tão hermético que o aluno não saiba nem por onde iniciar o problema e, dessa forma, fique desmotivado. Vale ressaltar também que o ideal é que os problemas propostos obedeçam inicialmente uma certa ordem de dificuldade para que o aluno obtenha mais confiança, durante todo o percurso, e consiga efetivamente estar apto a dar um passo de cada vez para alcançar o tão desejado conhecimento do assunto abordado. Começar com questões mais simples ajuda a motivar o aluno a realizar as atividades. Por outro lado, a variação do grau de dificuldade das questões busca promover sua continuidade. Se o aluno percebe que o grau de complexidade está apenas aumentando, é possível que ele se sinta desmotivado a tentar resolver a questão que está por vir, caso não tenha alcançado êxito na resolução da questão anterior. No entanto, se o grau de dificuldade é desconhecido, é possível que ele, pelo menos, tente resolver a questão proposta.

No quarto capítulo versaremos sobre George Polya, que é considerado por muitos como uma das maiores autoridades ao se tratar da metodologia da resolução de problemas. Esse grande matemático húngaro foi responsável pela elaboração de algumas etapas que facilitam a abordagem de um problema dado. Trataremos também a respeito do matemático brasileiro Augusto César Morgado, que sinalizou e elucidou algumas técnicas para a resolução de problemas envolvendo Análise Combinatória.

2. ANÁLISE COMBINATÓRIA

2.1 Conceito

Baseado nas ideias de Arago et al (1975), acreditamos que um bom caminho para se abordar a Análise Combinatória, que é um dos pilares da matemática discreta e parte relevante da Probabilidade, seja o estudo das coleções finitas de objetos que satisfazem normas determinadas e tem interesse, de modo especial, pela “contagem” de objetos nessas coleções.

Segundo Roa e Navarro-Pelayo (2001, p.1),

> os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, a teoria dos números, a teoria dos autômatos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias.

Entretanto, a realidade do ensino e da aprendizagem desse assunto, nas classes da Educação Básica, traz consigo obstáculos consideráveis.

A raça humana, há muito tempo, vem modificando a natureza com o intuito de sobrevivência. Em vista disso, criaram-se ferramentas ajustando-as às suas reais necessidades. Em decorrência dessas necessidades e experimentos surgiram as ciências, dentre elas, a Matemática. A Matemática é uma “ferramenta” desenvolvida pelo homem que facilita diversas tarefas do seu cotidiano. É possível notar sua serventia em perguntas como:

- Qual o total de combinações possíveis para placas de identificação de veículos no Brasil?
- Qual a quantidade máxima de números de telefone celular de uma cidade que podem ser formados com prefixo 2310, usando além do prefixo, quatro outros algarismos?
- No lançamento sucessivo de cinco moedas comuns, quais são as possibilidades?
- Quantos são os resultados possíveis ao lançarmos quatro dados não viciados? Desses resultados, quantos apresentam faces iguais?

- Quais as chances de se acertar as seis dezenas da Mega Sena, apostando com um único cartão com seis dezenas?

A necessidade do estudo de problemas de contagem surgiu por causa desses tipos de questionamentos, que podem ser respondidos utilizando-se conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade. Nos livros didáticos, é possível notar uma priorização do estudo de fórmulas (tais como permutações, arranjos e combinações). Mostraremos a aplicabilidade desses conceitos levando-se em conta o uso do princípio fundamental de contagem.

O principal objetivo da Matemática não deveria somente estar em se encontrar a solução dos problemas propostos, mas sim, “desafiar o estudante a construir novos conhecimentos e fazê-lo entender onde ele pode ser aplicado” (ONUCHIC, 1999).

Wieleitner (1932 apud VASQUEZ; NOGUTI, 2004) afirma que o mais antigo problema referente à teoria dos números e à Análise Combinatória é o da formação dos quadrados mágicos. São chamados de quadrados mágicos (de ordem n) um arranjo de números 1, 2, 3, 4, ..., n em um quadrado n x n de modo que a soma de cada coluna, linha e diagonal desse quadrado seja a mesma.

O Lo Shu, representado na figura 1, é o primeiro quadrado mágico conhecido, datado do século I d.C., segundo Needham (1959 apud VASQUEZ; NOGUTI, 2004). Todavia, ele pode ser tão antigo a ponto de ter sido escrito por volta de 2000 a.C. (BERGE, 1971 apud VASQUEZ; NOGUTI, 2004). Tal diagrama tem ligação com as nove salas do mítico palácio de Ming Thang, onde diversos ritos costumavam ser realizados, sendo que a simples troca desses símbolos por números inteiros determina o famoso quadrado mágico denominado Saturn. Esse quadrado propiciava uma enorme fascinação para grande parte das pessoas pois, nessa época, mesmo a mais simples aritmética era algo estupendo.

Figura 1: Lo-Shu

Fonte: http://montalvoeascinciasdonossotempo.blogspot.com.br/2011/05/fascinios-da-matematica-quadrados.html

Considera-se que a ideia dos quadrados mágicos foi difundida pelos chineses para os árabes, que fizeram grandes contribuições e construíram quadrados maiores que o antigo Lo Shu. Ainda existe uma poesia infantil que aparentemente sobreviveu em diversas culturas e que serve para introduzir o campo de problemas combinatórios:

> Quando eu estava indo para St. Ives,
> Eu encontrei um homem com sete mulheres,
> Cada mulher tem sete sacos,
> Cada saco tem sete gatos,
> Cada gato tem sete caixas,
> Caixas, gatos, sacos e mulheres,
> Quantos estavam indo para St. Ives?
> (BIGGS, 1979 apud VASQUEZ; NOGUTI; 2004)

Tal poesia é geralmente interpretada como uma brincadeira. No entanto, é possível imaginar que por trás dela existiriam intentos bem mais importantes, em virtude de existir um problema semelhante no Líber Abaci, escrito por Leonardo de Pisa (1730 apud VASQUEZ; NOGUTI, 2004) que dificilmente negaria uma ligação entre esse problema e a poesia infantil:

> Sete mulheres velhas estão indo para Roma;
> cada uma delas têm sete mulas;
> cada mula carrega sete sacos;
> cada saco contém sete pães;
> cada pão tem sete facas;
> e cada faca tem sete bainhas.
> Qual é o número total de coisas?

Essas duas citações apresentam características artificiais do problema abrangendo a adição e a repetição do número sete, reforçando sua memorização. Alguns quadrados mágicos maiores que o Lo Shu foram descobertos por um grupo de estudantes árabes, conhecido como os Ikhwan-al-Safa, que exibiram os quadrados de ordem 4, 5 e 6 e afirmaram existir os de ordem 7, 8 e 9.

Por um bom tempo a Análise Combinatória foi apenas uma ferramenta para efetuar alguns cálculos, sendo que em civilizações antigas suas aplicações eram dadas por regras básicas de contagem, construção de quadrados mágicos, mistura de ingredientes, entre outros. Segundo Berge (1971 apud VASQUEZ; NOGUTI, 2004), a combinatória era apontada como uma simples “contagem”, isto é, sua função era determinar o número de caminhos existentes com algumas operações pré-definidas.

Berge relata também que uma definição de combinatória depende de muitos conceitos precisos de “configurações”, e ainda segundo ele, uma configuração surge sempre que um determinado número de objetos é distribuído de acordo com leis pré-fixadas. É possível pensar como um exemplo de configuração o simples fato de “colocar diversos pacotes misturados dentro de uma gaveta”.

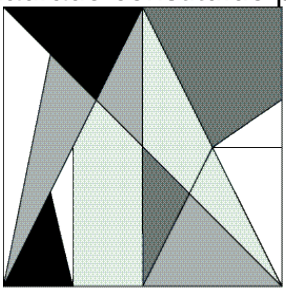
Em 1666, Leibniz (1646-1716) retratou a combinatória como sendo “o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos”, enquanto Nicholson (1818 apud VASQUEZ; NOGUTI, 2004) definiu-a como “o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si”. A notoriedade surgiu logo após a publicação de “Análise Combinatória”, por Percy Alexander MacMahon, em 1915. Um dos destacados combinatorialistas foi Gian-Carlo Rota, que colaborou com a formalizalização do assunto a partir da década de 1960.

Para Biggs (1979 apud VASQUEZ, NOGUTI, 2004) existem dois princípios de contagem que são a base da maioria da aritmética e que podem também ser considerados como a pedra fundamental da combinatória: o princípio da adição e o princípio da multiplicação. O princípio da adição afirma que um problema envolvendo a contagem de um conjunto de objetos pode ser dividido em duas ou mais partes. O resultado desejado é obtido através da soma de cada uma dessas partes contadas separadamente. Tal raciocínio é inerente à experiência humana do dia a dia. Já o princípio da multiplicação baseia-se na ideia de que se uma decisão pode ser tomada de m maneiras e, a partir dessa, outra decisão pode ser tomada de n maneiras, então o número de maneiras possíveis será obtida através da multiplicação entre m e n, isto é, $m.n$.

Por muito tempo a Análise Combinatória foi considerada completamente desconectada do cálculo aritmético. De acordo com Pastor (1939 apud VASQUEZ; NOGUTI, 2004), “o conceito moderno do número é, porém, uma das provas do papel preponderante que a noção de ordem desempenha nas diversas teorias matemáticas”.

Dados de que a Análise Combinatória tenha se originado ainda na antiguidade também aparecem em relatos do matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.), que apresentou um problema geométrico (figura 2) bastante famoso, chamado Stomachion (palavra derivada do grego stomachos que em português significa estômago), que consistia em determinar de quantas formas distintas quatorze peças planas poderiam ser reunidas, de diferentes formatos e tamanhos, a fim de formar um quadrado.

Figura 2: Quadrado constituído por 14 peças



Fonte: *http://www.terra.com.br*

Outros matemáticos, como o matemático italiano Nicollo Fontana (1500-1557), mais conhecido como Tartaglia, e os franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665) também contribuíram para o estudo desse assunto.

Para VASQUEZ e NOGUTI (2004), a Análise Combinatória teve sua origem no estudo dos jogos de azar, como o lançamento de dados e os jogos de cartas. Entretanto, ao longo do tempo, esse conceito matemático sofreu intenso desenvolvimento. A partir do século XVII, a Análise Combinatória passou a ser reconhecida como um ramo da Ciência, uma teoria que começou a se desenvolver, se organizar e se sistematizar em diversos trabalhos, assim como, suas aplicações na estatística, no cálculo de probabilidades e em vários outros campos das ciências, tanto que, dentro de poucos anos, três notáveis livros surgiram: *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665 em Paris) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatoria* (Leipzig, 1666) de Leibniz, *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher e também em trabalhos de Frénicle de Bessy, *Abrége des combinaisons* (Paris, 1693), e de J. Bernoulli, *Ars Conjectandi* (Basiléia, 1713), e De Moivre, *Doctrineof chances* (Londres, 1718).

Atualmente, a Análise Combinatória pode ser definida como um ramo da Matemática que permite resolver problemas em que é necessário “escolher”, “arrumar” e, principalmemente, “contar” os objetos de um conjunto. Tal conteúdo, quando explorado em forma de problemas, traz certa dificuldade em relação à formulação e à interpretação de seus enunciados, pelo fato de exigir flexibilidade de pensamento. Isto é, para resolvê-los é preciso parar, concentrar, discutir e pensar (VASQUEZ; NOGUTI, 2004).

2.2 Ensino e Aprendizagem da Análise Combinatória

Ensinar Análise Combinatória na Educação Básica tem sido uma árdua tarefa para muitos professores de Matemática. Buscar recursos que consigam contribuir no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo, presente na matriz curricular de várias escolas de Ensino Médio e até mesmo em algumas do Ensino Fundamental, é uma necessidade que se verifica no Brasil e, provavelmente, em muitos países espalhados pelo mundo.

Os PCN ressaltam, entre outros conteúdos, o imprescindível papel do raciocínio combinatório na formação dos alunos da Educação Básica

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e racionínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades [...] (BRASIL, 1998, p.257).

Baseado tanto em conversas informais com outros professores de Matemática quanto em experiências pessoais, é possível observar que o ensino da Análise Combinatória através de fórmulas ou padronizações de resoluções é bastante comum. É possível perceber e verificar também que a aprendizagem, muitas das vezes, não é alcançada a partir desses métodos. Desse modo, é fundamental que haja uma ruptura desses modelos tradicionais a fim de que ocorra uma implementação de novas propostas. Permitir que o aluno construa suas próprias resoluções por meio da análise e do debate de problemas é uma alternativa para o ensino de Análise Combinatória.

Os PCN orientam:

> Não somente em Matemática, mas particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos confrontados com situações-problema novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e

> finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação (BRASIL, 1998, p.266).

As pesquisas de Batanero (1997), Esteves (2001) e Roa e Navarro-Pelayo (2001) tornam evidente que iniciar o trabalho com Análise Combinatória no Ensino Fundamental, utilizando a construção de diferentes agrupamentos, sem necessariamente sistematizar e/ou formalizar o estudo, pode facilitar a abordagem desse assunto no Ensino Médio. Os alunos que costumam geralmente apresentar maiores dificuldades com relação a esse tema são os que nunca tiveram contato com o conteúdo desde as séries iniciais.

Ao trabalhar com esse tema é de suma importância analisar as etapas seguidas pelos alunos para solucionar as situações-problema, assim como, valorizar todos os modos de pensamento (BATANERO, 1997). Criar situações de discussões, onde o aluno tem a oportunidade de expor suas ideias, propor sugestões, questionar e refletir, proporciona ao mesmo uma auto-confiança para resolver as situações propostas. Além do mais, faz com o que o aluno não dê tanta importãncia ao fato de errar e sim ao que acarretou o erro.

De acordo com Batanero (1997), os alunos costumam apresentar falhas do tipo aritmético, ou seja, eles se confundem sobre o tipo de elementos que se combinam. Entretanto, eles são capazes de identificar a configuração combinatória pedida em uma situação-problema, compreender a ordem, a repetição e o enunciado do problema, assim como também são aptos a realizar a enumeração sistemática, generalização e identificação da combinatória adequada. É importante destacar a ordem e repetição, aplicando múltiplas situações-problema que contenham estes dois aspectos. A utilização de modelos, promovendo atividades práticas com os alunos contribui para um melhor entendimento do assunto abordado. O uso de analogias também é um fator contribuinte (RIGOLINO e HARIKI, 1996 apud ESTEVES, 2001).

Piaget e Inhelder (1951 apud ESTEVES, 2001) indicam que para crianças de 4 a 7 anos é recomendável trabalhar o início da seriação a nível preparatório. Essas crianças estão na etapa sensorio-motora. Entre 7 e 11 anos recomenda-se que se inicie uma quantificação sistemática com a realização de experimentos práticos. E a partir de 11-12 anos orienta-se a combinação metódica e completa. Os estudantes descobrem um sistema de maneira que nenhuma associação seja esquecida.

A dinâmica de sala de aula é outro aspecto considerável, pois o estímulo ao trabalho em conjunto promove muitos benefícios aos alunos. Eles aprendem a questionar, trocam ideias uns com os outros e aprendem a trabalhar coletivamente. A experiência coletiva contribui para a individual e favorece a cooperação entre os indivíduos. Todavia, se faz necessário tornar os alunos aptos a esse tipo de trabalho, pois alguns estudantes deixam as tarefas por conta do grupo e não permanecem ativos nas atividades, fazendo com que não assimilem o conteúdo. Por outro lado, o estudo individual também tem sua serventia para que o aluno tenha a capacidade de trabalhar por si só.

Esteves (2001) também destaca que tanto a relação entre professor e aluno quanto os tipos de atividades propostas e o ambiente de trabalho, são alguns dentre os vários aspectos que podem influenciar no aprendizado, em virtude das atividades precisarem ter significado e fazer sentido para os alunos. O ideal é que esses estudantes sintam-se confiantes perante o professor para que o aprendizado aconteça de um modo mais sólido. O professor tem por função auxiliar o aluno a desenvolver o seu repertório de esquemas e representações.

A fim de que o estudante não apenas memorize e após um certo tempo ele venha a esquecer do conteúdo abordado, é vital que o aprendizado ocorra de modo gradativo por meio da compreensão do aluno. Para que ele chegue ao conhecimento por si só, vendo sentido no que está aprendendo, aconselha-se aplicar soluções-problema para que o aluno resolva sem ter um conhecimento prévio do conteúdo. Ele deve refletir a respeito do problema e elaborar uma estratégia para resolvê-lo.

De acordo com Roa e Navarro-Pelayo (2001), a Análise Combinatória é um grande campo de investigação e tem numerosas aplicações em diversas áreas, como também implicações em outros ramos da Matemática. Para os autores, esse conteúdo é um componente essencial do pensamento formal e um pré-requisito importante para o raciocínio lógico geral. E por essas razões, a Análise Combinatória foi incluída nos currículos de Matemática.

A Análise Combinatória não é apenas uma técnica de cálculo de probabilidade. Há um elo entre as duas e, sendo assim, o raciocínio combinatório tem grande relevância na probabilidade. Os autores ressaltam que o conteúdo combinatório é geralmente ensinado dentro da probabilidade. Por exemplo, quando se descreve o espaço amostral de um experimento é usado o raciocínio combinatório e se o aluno não tem uma boa capacidade para lidar com essa última, certamente terá dificuldade em compreender a probabilidade. Diversos modelos de distribuição de probabilidade são explanados através de operações combinatórias como, por exemplo, a distribuição binomial. Em decorrência disso, vários erros de probabilidade podem ter relação com a falta de raciocínio combinatório.

Roa e Navarro-Pelayo (2001), em sua revisão da literatura, debatem sobre diversas investigações a respeito dos mais relevantes estratagemas usados pelas crianças para resolver determinados problemas. As que mais sobressaem são:

- a busca de uma formulação de todas as combinações;
- os procedimentos de tentativa;
- a utilização de um elemento constante a partir do qual se fazem as demais configurações, podendo ser completo ou incompleto.

Hadar e Hadass (1981 apud Roa e Navarro-Pelayo, 2001) tornam evidentes que os típicos obstáculos dos alunos ao resolver problemas combinatórios são:

1. dificuldade em identificar o conjunto correto a ser enumerado;
2. adotar uma notação adequada (situação que é majorada quando eles estão diante de distintos textos usando diferentes notações);
3. fixar uma ou mais variáveis;
4. generalizar a solução.

Roa e Navarro-Pelayo (2001) afirmam que os obstáculos referentes aos problemas combinatórios tornam-se cada vez maiores conforme o crescimento do tamanho da solução. O índice de acertos nos problemas mais simples é maior, pois os mesmos geralmente necessitam somente de uma operação combinatória. Uma das principais dificuldades consiste em interpretar qual tipo de elementos combinam, bem como qual esquema combinatório deve ser utilizado, a fim de perceber se a ordem realmente importa e se existe repetição.

De acordo com os autores, os alunos conseguem identificar os tipos de elementos de modo correto, no entanto, a repetição é que geralmente provoca uma certa interferência. Grande parte dos alunos estão aptos em interpretar a ordem acertadamente e o erro está normalmente ligado à combinação. A maioria dos alunos também acerta na repetição e o erro ocorre quando a mesma é desprezada. Os procedimentos mais empregados são o de enumeração e o uso de fórmulas, sendo que, muitas das vezes, usa-se um para autenticar o outro. O emprego da árvores de possibilidades, também chamado de diagrama de árvores, é bem raro. Geralmente, são utilizadas técnicas de resolução de problemas como traduzir o problema a outro análogo, fixar variáveis, regras de soma, produto e quociente e decompor o problema em subproblemas.

Ainda segundo Roa e Navarro-Pelayo (2001), seria necessário uma proposta de ensino que não fosse baseada em definições formais, mas que desse a devida importância aos distintos problemas da combinatória, às estratégias e às formas de raciocínio. O ideal é que tal proposta introduza ideias da regra de soma, produto e quociente, bem como empregue uma metodologia alicerçada em jogos manipulativos e diagrama de árvores.

3. ABORDAGEM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS RELACIONADOS À ANÁLISE COMBINATÓRIA

3.1 Polya e suas etapas para a resolução de um problema

No começo de sua carreira, Polya escreveu dois livros, na companhia de Gábor Szegő, que abordavam a resolução de problemas: Problemas e Teoremas de Análise. Mais tarde, iniciou suas pesquisas a respeito dos métodos de resolução de problemas. Em seu livro intitulado “*How to Solve It*”, Polya oferece uma ideia geral da heurística de problemas matemáticos e não-matemáticos.

George Polya foi um matemático fenomenal do século XX que se dedicou fervorosamente à arte da resolução de problemas de Matemática. Dentre suas maiores contribuições está o seu esforço em caracterizar o modo como grande parte das pessoas resolve problemas de Matemática, e de relatar a maneira pela qual a arte de Resolução de Problemas pode ser ensinada. Polya descreveu o modo como se deve instigar quem resolve problemas de todos os tipos, mesmo os que não são de Matemática. No livro “*How to Solve It*” são fornecidos alguns conselhos para professores de Matemática, além de uma mini enciclopédia de estratégias heurísticas. Os interesses de Polya cruzaram a Matemática com outras áreas do saber, tais como a psicologia cognitiva, as ciências da natureza, entre outras. No ano de 1976, o Prêmio George Polya foi criado pela Associação de Matemática dos Estados Unidos.

Grande parte dos matemáticos, quer sejam investigadores ou professores que se limitem a seu trabalho docente, conhece a obra de George Polya. É, sem dúvida, um dos homens lendários da história moderna da Matemática.

Apresentamos a seguir os dez mandamentos do professor, segundo Polya, que foi publicado na Revista do Professor de Matemática da SBM, número 10 (1987):

> 1. Demonstre interesse pela sua matéria. Se o professor fica entediado com sua matéria, fatalmente sua classe também se tornará entediada.
> 2. Domine sua matéria. O professor não conseguirá explicar um determinado assunto de maneira clara aos seus estudantes sem ter previamente compreendido tal tema de modo pleno.
> 3. Trate de ler o semblante dos seus estudantes, procure enxergar suas esperanças e suas dificuldades; coloque-se no lugar deles. O professor precisa ser capaz de estabelecer uma comunicação harmoniosa com seus alunos.

> 4. A melhor forma para obter um novo conhecimento é desvendá-lo por si próprio. O processo de aquisição de novas informações e habilidades possui diversos aspectos, tais como: aprendizagem, descoberta, invenção e compreensão. O professor deve conhecer as vias do conhecimento, estar habituado com o processo que conduz da experiência ao saber, graças à experiência de seus próprios estudos e a observação de seus estudantes.
> 5. Não dê aos estudantes apenas “saber”, e sim “saber fazer”, atitudes intelectuais, o hábito de um trabalho metódico. O conhecimento reside, parte em informação e parte em saber fazer. Em Matemática, o saber fazer se traduz em uma atitude para resolver problemas, construir demonstrações, examinar com espírito crítico soluções e provas. Por isso, em Matemática, a maneira como se ensina é tão importante quanto o que se ensina.
> 6. Ensinando a conjecturar. Antes de tudo deve-se imaginar, depois provar. Desse modo é como se procede à descoberta, na maioria dos casos. O professor de Matemática tem ótimas oportunidades para mostrar o papel da conjectura no campo do descobrimento e, dessa forma, fazer com que os estudantes adquiram uma atitude mais ativa no aprendizado. O professor deve estimular seus alunos a dar palpites e a aprender a demonstrar.
> 7. Ensinar a demonstrar. A Matemática é uma ótima escola de raciocínio demonstrativo. Isto feito, a verdade vai mais além: a Matemática pode estender-se ao raciocínio demonstrativo, que se infiltra em todas as ciências desde que se atinja um nível matemático e lógico suficientemente abstrato e definido.
> 8. No problema que estiver abordando, buscar o que pode servir posteriomente para resolver outros problemas, ou seja, procurar descobrir o modelo geral que está por trás da presente situação concreta. Ao apresentar a solução de um problema, destaque seus traços instrutivos. Uma particularidade de um problema é instrutiva se merece ser imitada. Um aspecto bem assinalado em um problema e em sua solução pode transformar-se em um modelo de resolução, tal que, imitando-o, o estudante se torna capaz de resolver outros problemas.
> 9. Não revelar a solução de imediato: deixar que os estudantes façam suposições, deixar que eles a descubram por si mesmos sempre que for possível. O professor, ao iniciar a discussão sobre um dado problema, deve permitir que os estudantes tentem adivinhar sua solução. Um aluno que possui uma palpite no qual ele acredita que seja a solução do problema abordado, já está verdadeiramente comprometido e naturalmente acompanhará o desenrolar da solução para ver se o seu palpite está correto ou não. Isso faz com que ele se mantenha atento durante a aula.
> 10. Sugira; não os faça engolir a força. O professor deve ter uma atitude humanizada em relação aos seus alunos para que os mesmos não fiquem desestimulados. Se um aluno apresenta um longo cálculo composto por várias linhas e infelizmente se equivoca em alguma linha, o professor deve acompanhar junto com seu aluno tal cálculo, linha por linha, e primeiramente pontuar tudo o que o estudante resolveu de maneira correta. Após isso, o docente mostra em qual linha o aluno se enganou e deve aguardar o estudante para ver se ele descobre o erro por si só.

Esses dez mandamentos do professor de Matemática são as bases para que seja obtido um melhor resultado ao ensinar. Seguir essas “regras” é uma forma de elevar a capacidade de entendimento de nossos estudantes. Associadas à metodologia de Resolução de Problemas, se tornam uma ferramenta a mais para que os alunos produzam seus próprios resultados e conceitos, desenvolvendo a capacidade intelectual e dando sentido ao que estão fazendo, levando-os a utilizar o mesmo modo de calcular para outras situações semelhantes.

De acordo com Polya (1995), podemos dividir a resolução de um problema que estamos nos deparando em quatro etapas. É importante salientar que tais etapas servem essencialmente como uma forma de guia na resolução do problema em questão.

3.1.1 Compreender o problema

Esse é o pontapé inicial para a resolução de um problema, pois nesse passo nós fazemos uma análise do problema a fim de interpretarmos o que o enunciado está pedindo, verificarmos quais são as restrições impostas, assim como entendermos o que entra ou não entra em nosso conjunto. Devemos tomar vários pontos de vista em relação ao problema proposto, visto que para responder satisfatoriamente a uma pergunta é necessário que anteriormente a mesma seja compreendida da maneira mais profunda e completa possível.

Em POLYA (1995) aprendemos que podemos estimular o aluno a interpretar o problema através de indagações (muitas das vezes gerais), no entanto, tais questionamentos podem ser de grande ajuda nessa etapa inicial. “Qual é a incógnita?” vem a ser a pergunta mais realizada. Outras importantes indagações são:

- Conseguimos reescrever o enunciado com nossas próprias palavras?
- Quais são os dados?
- As informações fornecidas no enunciado são suficientes?
- Alguma informação se difere ou se destaca das demais?
- O que queremos encontrar?
- O que não queremos encontrar?
- Quais são as restrições?
- Podemos satisfazer e separar as diversas partes destas restrições?

Estaremos aptos para a próxima etapa apenas quando estivermos familiarizados com o problema em questão.

3.1.2 Estabelecer um plano

Nessa segunda etapa é necessária a elaboração de uma maneira para enfrentarmos o problema abordado. Algumas práticas são importantes para estabelecer um plano apropriado e para isso podemos fazer listas, desenhos, gráficos, planificações e diagramas. Através dessas ferramentas torna-se mais fácil encontrarmos certos padrões e, com isso, buscarmos um caminho mais interessante a ser percorrido que nos conduza, o mais breve possível, à tão desejada solução do problema.

É importante também resolvermos problemas semelhantes e de preferência mais simples que o problema abordado. Caso seja necessário também podemos dividir o problema em vários subproblemas desde que utilizemos todos os dados disponíveis.

3.1.3 Executar o plano

A terceira etapa é tida como a mais mecânica de todas as etapas da resolução de problemas. No entanto, devemos tomar bastante cuidado ao executar o plano estabelecido, pois a verificação minuciosa de cada passo tomado deve ser feita sempre que possível.

A palavra-chave para obter êxito nessa etapa é a paciência, pois muitas das vezes nossa vontade de chegar em um possível resultado rapidamente nos atrapalha bastante.

Além disso, a verificação de cada passo dado nos fornece a confiança necessária para seguir adiante, visto que nos sentimos cada vez mais convictos de estarmos no caminho certo até o ponto presente. Caso não tenhamos tal convicção em algum dos passos tomados, devemos voltar e repensar nossa estratégia a fim de otimizar nosso tempo.

3.1.4 Verificar a resolução

No quarto e último passo devemos examinar a solução obtida. É importante nos indagarmos se é possível verificar o resultado e o argumento utilizados na resolução do problema em questão.

O que normalmente acontece quando temos um resultado em nossas mãos é que logo passamos para outra atividade e, dessa forma, acabamos não aproveitando ao máximo o conhecimento e a experência que esse problema, agora resolvido, nos proporcionou.

A seguir são listadas algumas indagações importantes que podemos nos fazer após realizarmos o retrospecto da resolução do problema proposto:

- O que realmente utilizamos para resolver o problema?
- Poderíamos chegar ao resultado por um caminho diferente?
- Conseguiríamos resolvê-lo de uma maneira mais rápida e prática?

3.1.5 Exemplo 1

A seguir veremos um exemplo que tem por objetivo melhorar a compreensão da técnica anteriormente descrita referente à resolução de problemas segundo Polya. Esse primeiro exemplo é um problema matemático, relacionado à Análise Combinatória, que foi apresentado na prova azul (questão 147) do ENEM de 2015.

Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participaram do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas 6, 7, 8, 9 ou 10. A campeã será a escola que obtiver maior pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela 3 mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado B no quesito Bateria.

Tabela 3: Notas do desfile de Carnaval

Quesitos	1. Fantasia e Alegoria		2. Evolução e Conjunto		3. Enredo e Harmonia		4. Bateria		Total
Jurado	A	B	A	B	A	B	A	B	
Escola I	6	7	8	8	9	9	8		55
Escola II	9	8	10	9	10	10	10		66
Escola III	8	8	7	8	6	7	6		50
Escola IV	9	10	10	10	9	10	10		68
Escola V	8	7	9	8	6	8	8		54

Fonte: https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2015/segundo-dia/numa-cidade-cinco-escolas-de-samba-i-ii-iii-iv-e-v-participaram-do-desfile-de-carnaval/

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B no quesito Bateria tornariam campeã a Escola II? (ENEM, 2015)

A) 21
B) 90
C) 750
D) 1250
E) 31250

3.1.5.1 Compreender o problema

Depois da leitura minuciosa do problema podemos estimular os alunos, através de algumas indagações, no intuito dos mesmos chegarem a algumas conclusões que serão decisivas para a solução do problema proposto.

- Quais são os elementos do conjunto que estamos contando?
    - As possíveis configurações de notas atribuídas pelo jurado B no quesito Bateria para que a Escola II seja consagrada a campeã do Carnaval.
- Existem restrições? Quais são elas? Compreenderam bem o significado delas?
    - Cada jurado deve atribuir apenas uma dentre as notas 6, 7, 8, 9 ou 10. A Escola campeã será aquela que obtiver a maior pontuação na soma de todas as notas emitidas.

Isso quer dizer que as Escolas I, III e V não poderão se tornar campeãs, pois mesmo que obtenham nota máxima do jurado B do quesito Bateria, as mesmas não alcançarão a pontuação da Escola II. Daí, somente as Escolas II e IV poderão ser campeãs.

- Um eventual desempate entre as Escolas II e IV se dará através da maior pontuação na soma das notas atribuídas pelos jurados A e B do quesito Enredo e Harmonia.

  Analisando a regra de desempate acima percebemos que a Escola II leva vantagem em relação à Escola IV, pois a Escola II obteve nota máxima dos dois jurados do quesito Enredo e Harmonia, o que não ocorreu com a Escola IV que recebeu notas 9 e 10.

3.1.5.2 Estabelecer um plano

Para facilitar a organização da estratégia podemos utilizar uma tabela, envolvendo apenas as escolas que ainda possuem chance de ser campeãs, para ter uma ideia melhor das possibilidades de notas que serão atribuídas pelo último jurado que tornarão a Escola II campeã do Carnaval.

É importante ressaltar que na hora em que nos propomos a montar uma tabela, devemos ser bastante objetivos a fim de não pecarmos por falta ou por excesso.

Tabela 4: Enumeração das possibilidades

NOTA DA ESCOLA II	NOTA DA ESCOLA IV
10	8
10	7
10	6
9	7
9	6
8	6

Fonte: O Autor, 2017.

Baseado na tabela 4, conclui-se, então, que o total de possibilidades que tornarão a Escola II campeã (em relação apenas à Escola IV) é igual a 6.

No entanto, não podemos nos esquecer das demais Escolas (I, III e V). As mesmas, por não terem mais chance de se consagrarem campeãs, poderão receber qualquer uma das notas possíveis (6, 7, 8, 9 ou 10) e isso não afetará em nada a disputa do título entre as Escolas II e IV. Ou seja, as Escolas I, III e V possuem 5 possibilidades de notas.

Baseado nas informações acima, sabemos que o Princípio Fundamental da Contagem nos permitirá resolver tal problema.

3.1.5.3 Executar o plano

Para cada uma das 6 possibilidades da tabela montada no passo anterior, as demais Escolas (I, III e V) terão exatamente 5 possibilidades de notas. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, concluímos que as possíveis configurações de notas atribuídas pelo jurado B no quesito Bateria para que a Escola II seja consagrada a campeã do Carnaval é igual a $6 . 5 . 5 . 5 = 750$ que correponde à alternativa C do problema proposto.

3.1.5.4 Verificar o plano

Nesse passo final podemos nos fazer algumas importantes indagações:

- Utilizamos algo considerado especial na resolução desse problema?
    - Sim, montamos uma tabela.
- Podemos utilizar isso em novas questões? Quando?
    - Podemos utilizar esse artifício quando tivermos uma quantidade não muito grande de possibilidades de ocorrer um evento desejado.
- Problemas similares são possíveis?
    - Qualquer tipo de problema de natureza competitiva pode ser montado com certa semelhança.

Salientamos aqui que as indagações acima não têm a pretensão de serem únicas, visto que cada pessoa que aborda um problema é inteiramente singular e, por esse motivo, possui total liberdade para verificar seu plano estabelecido. O intuito dessas indagações vem a ser uma espécie de busca que tem por objetivo uma maior compreensão do método de resolução de problemas descrito por Polya (1995).

3.2 Morgado e suas principais técnicas

Dando prosseguimento às nossas estratégias, há no nosso país um programa chamado Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM), que é organizado pelo IMPA. O professor Augusto César de Oliveira Morgado ministrou duas aulas sobre Análise Combinatória em uma das edições de 2005. Ele tratou de vários assuntos muito enriquecedores e importantes para qualquer professor que venha a abordar tal conteúdo posteriomente.

Um livro chamado “Temas e Problemas” foi escrito a partir dessas duas aulas, juntamente com as demais aulas ministradas no PAPMEM. Morgado enumera três preceitos, nesse livro, que ele define como Normas da Boa técnica. Tais preceitos serão enunciados e exemplificados abaixo:

> 1) **POSTURA**: O ideal é sempre nos colocarmos no papel da pessoa que deve executar a ação requisitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar (...)
>
> 2) **DIVISÃO**: Devemos, na medida do possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, pois alguns problemas se tornam demasiadamente complicados quando tentamos resolvê-los de uma só vez por meio de um único cálculo (...)
>
> 3) **NÃO ADIAR DIFICULDADES**: pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar (MORGADO, 2016).

As aulas de Morgado são maravilhosas e baseadas quase que exclusivamente na resolução de problemas. Suas normas são bem eficientes e facilitam a resolução de alguns problemas, tornando até mesmo os mais complexos deles em problemas bastante maleáveis. Desse modo, veremos no exemplo 2 a utilização de algumas de suas técnicas.

Em relação ao emprego de fórmulas na resolução de problemas, Morgado afirma que o que torna benéfica a utilização das mesmas está ligado diretamente à frequência com a qual as utilizamos. É possível, então, considerar que as fórmulas não são nem de todo bom, nem de todo mau e, consequentemente, devemos usá-las quando já estivermos familiarizados com os conceitos abordados, a fim de que os objetivos desejados sejam alcançados de um modo mais prático.

Nessa altura, alguém poderia indagar qual seria a melhor escolha para ser seguida quando comparadas as etapas de Polya e as técnicas de Morgado. Na verdade, suas ideias não concorrem entre si, ou seja, todas as técnicas de Morgado podem se encaixar harmonicamente nas etapas de Polya. Ao usarmos a postura de quem está realizando as ações do problema, estamos interpretando o problema. No momento que não adiamos as dificuldades e dividimos o problema em problemas mais simples, estamos estabelecendo um plano para a resolução da questão proposta.

Ao resolver problemas, no nosso caso, de Análise Combinatória, o ideal é termos o maior número de ferramentas possíveis. Após algumas aulas é possível desenvolver habilidades importantes nos alunos, de modo que se torne natural a resolução de problemas, sem que o aluno pense em que etapa está ou que técnica utilizou.

3.2.1 Exemplo 2

Questão número 11 da Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas de 2013 referente à Análise Combinatória.

Ana quer fazer duas aulas de natação por semana, uma de manhã e a outra à tarde. A escola de natação tem aulas de segunda a sábado às 9h, 10h e 11h e de segunda a sexta às 17h e 18h. De quantas maneiras distintas Ana pode escolher o seu horário semanal, de modo que ela não tenha suas aulas no mesmo dia nem em dias consecutivos? (OBMEP, 2013)

POSTURA: é preciso pensar no problema do ponto de vista de quem vai escolher o horário semanal. Algumas possíveis perguntas surgirão naturalmente, tais como: “Quais os elementos do conjunto que estamos contando?”, “Quais são as restrições?”, “Há algum dado no problema que seja distinto dos demais?”, etc.

DIVISÃO: temos que tentar dividir o problema em dois ou mais problemas menores.

NÃO ADIAR DIFICULDADES: a maior dificuldade é o fato de existirem aulas no sábado apenas no turno da manhã. Essa situação torna o sábado distinto dos outros dias. Logo, essa restrição deve ser resolvida primeiro.

Percebe-se que cada um dos preceitos de Morgado foram úteis nesse caso. Para resolver o problema precisamos dividi-lo em dois casos disjuntos: Ana tem aula no sábado ou não.

Ana escolhe ter aula no sábado:

Tabela 5: Com aula no sábado

1º - Qual o horário da aula de sábado?	9h, 10h ou 11h	3
2º - Qual o outro dia da semana que haverá aula?	Segunda, terça, quarta ou quinta	4
3º - Qual o horário da aula nesse segundo dia?	17h ou 18 h	2
TOTAL DE POSSIBILIDADES:		3 X 4 X 2 = 24

Fonte: O Autor, 2017.

Ana escolhe não ter aula no sábado:

Tabela 6: Sem aula no sábado

1º - Quais são os dias possíveis?	Segunda e quarta, segunda e quinta, segunda e sexta, terça e quinta, terça e sexta ou quarta e sexta	6
2º - Qual o dia da semana em que a aula será no turno da manhã?	Primeiro ou segundo dia	2
3º - Qual o horário da aula no turno da manhã?	9h, 10h ou 11h	3
4º - Qual o horário da aula no turno da tarde?	17h ou 18h	2
TOTAL DE POSSIBILIDADES:		6 X 2 X 3 X 2 = 72

Fonte: O Autor, 2017.

Somando os dois conjuntos disjuntos de combinações, obtidos por meio das tabelas 5 e 6, temos 24 + 72 = 96.

Tendo como base todas as informações anteriores dessa dissertação foi elaborada a proposta didático-pedagógica que será apresentada no próximo capítulo.

4. PROPOSTA DIDÁTICO-PEDAGÓGICA

Tendo como base as próprias experiências do autor, o convívio com alguns colegas docentes, assim como as leituras e reflexões pessoais, foi produzida a proposta didática aqui presente com o desejo de descobrir quais seriam as reais contribuições que uma atividade de ensino, baseada na metodologia de resolução de problemas, poderia trazer para o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória na Educação Básica.

Conceber, executar e analisar uma proposta de ensino de Análise Combinatória em turmas do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental é o maior intuito desse trabalho que, por sua vez, foi fundamentado tanto na resolução de problemas quanto na investigação matemática em sala de aula. A fim de desenvolver tal proposta, realizou-se um estudo da literatura referente ao ensino e aprendizagem da Análise Combinatória, de um modo especial em direção a detectar os principais empecilhos e as maneiras de confrontá-los. Durante a aplicação da proposta de ensino, foram reunidos alguns dados a partir de notas de campo (diário do autor), gravações em áudio e registros produzidos pelos alunos.

Na fase de elaboração da proposta de ensino, houve uma análise prévia referente aos aspectos considerados mais importantes. Um desses aspectos foi a preparação do ambiente. É de suma importância que o aluno se sinta estimulado a participar das ações propostas e, para que isso ocorra, o professor deve deixar bem claro o valor do trabalho a ser realizado, como uma oportunidade ímpar de discutir, expor e desenvolver novas ideias e, dessa forma, mostrar ao aluno que resolver problemas pode ser uma atividade prazerosa, que é exatamente uma das ideias defendidas por Polya (1995). É fundamental, que no decorrer de toda a proposta de ensino, ocorram momentos em que as ideias dos alunos sejam ouvidas e valorizadas, pois, ao tornar o aluno um parceiro no desenvolvimento do trabalho, sua motivação em realizar com empenho as atividades propostas tende a crescer.

Outro fator a ser considerado foi a comunicação com a comunidade escolar. O tipo de trabalho aqui proposto não é usual na rede municipal da cidade do Rio de Janeiro e para que houvesse uma garantia da realização das atividades foi necessário contar com o apoio da escola. É uma obrigação do professor informar à direção e à coordenação pedagógica quais são os procedimentos, bem como a importância e os objetivos do trabalho.

A escolha das questões foi outro aspecto considerável, pelo fato de necessitarem representar situações interessantes e desafiadoras para o aluno e, além disso, contemplarem o conteúdo referente ao raciocínio combinatório. Em relação ao nível de dificuldade, o ideal é buscar inicialmente uma gradação crescente para depois variar, de modo alternado, questões com graus diferentes de complexidade.

Durante a realização das atividades, coube ao docente a função de:

- incentivar os alunos a criar estratégias, interpretar e realizar argumentações para os mesmos se tornarem mais aptos a explicar de forma clara suas ideias;
- estimulá-los a trabalhar em equipe;
- acompanhar o trabalho dos grupos indagando a respeito de suas conjecturas;
- analisar como o trabalho estava sendo realizado;
- observar as atitudes dos alunos como, por exemplo, sinais de cansaço ou desânimo, procurando atuar de modo a garantir a continuidade do trabalho;
- colaborar com o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos discentes, por meio de seus questionamentos;
- dar suporte aos alunos, dando-lhes autonomia e valorizando suas ideias, bem como, avaliar o progresso de cada um deles.

A preocupação com a elaboração, a aplicação e a avaliação de um teste diagnóstico também foi uma atitude importante na produção da proposta didática. Foi definido que o teste seria aplicado em dois momentos. No primeiro, como um pré-teste, aplicado antes da realização das atividades, com o intuito de verificar os conhecimentos precedentes, isto é, aferir como se processa o raciocínio combinatório desses alunos que ainda não entraram em contato com o conteúdo de Análise Combinatória. No segundo, como um pós-teste, ao final do desenvolvimento do trabalho, incluindo as apresentações e discussões das resoluções das questões propostas, com o propósito de analisar se houve e, em caso afirmativo, quais foram as colaborações decorridas após a realização das ações propostas.

A proposta produzida apontou diversas ações formadas por situações-problema. A primeira delas convidou o aluno a descobrir o número de peças que compõem um jogo de dominó tradicional. As demais atividades consistiram de listas compostas por problemas diversos para serem discutados e resolvidos pelos alunos. As questões sugeridas levam em conta situações que abrangem o princípio fundamental da contagem e o cálculo de permutações, arranjos e combinações.

O debate e a apresentação das ideias de cada uma das ações deviam ser realizadas em grupos de cinco ou seis alunos. A finalidade de dividi-los em grupos foi assegurar-lhes a chance de debater as questões entre si com o intuito de ampliar sua capacidade de cooperação e argumentação de ideias. Esses debates foram estimulados aspirando-se que fossem satisfatórios a fim de que os discentes alcançassem a ratificação de seus estratagemas dentro do próprio grupo e, desse modo, necessitassem menos da consulta do professor. As resoluções foram compartilhadas após o término de cada uma das atividades, ou seja, cada grupo expôs os registros de suas ideias para os demais alunos da turma e para o docente.

A função do docente nesse processo é de mediador e indagador, isto é, cabe a ele acompanhar de perto o trabalho dos grupos dando a devida atenção às suas ideias, bem como, debatendo-as com eles.

A proposta didática foi realizada em duas turmas de 8º ano e duas turmas de 9º ano do Ensino Fundamental da rede municipal de ensino da cidade do Rio de Janeiro, que possui uma média de trinta e cinco alunos por classe com faixa etária entre 13 a 15 anos.

A direção da escola, quando comunicada da intenção de realização da proposta didática, respondeu de modo positivo. Os alunos foram convidados a participar do projeto, através de uma conversa informal com o professor, onde foram informados os objetivos do trabalho e os procedimentos propostos. Foi comunicada também a intenção de se gravar as intervenções do professor nas discussões dos grupos para estudos posteriores. Todos os alunos aceitaram participar da proposta didática e concordaram com todos os procedimentos.

4.1 Primeiro dia

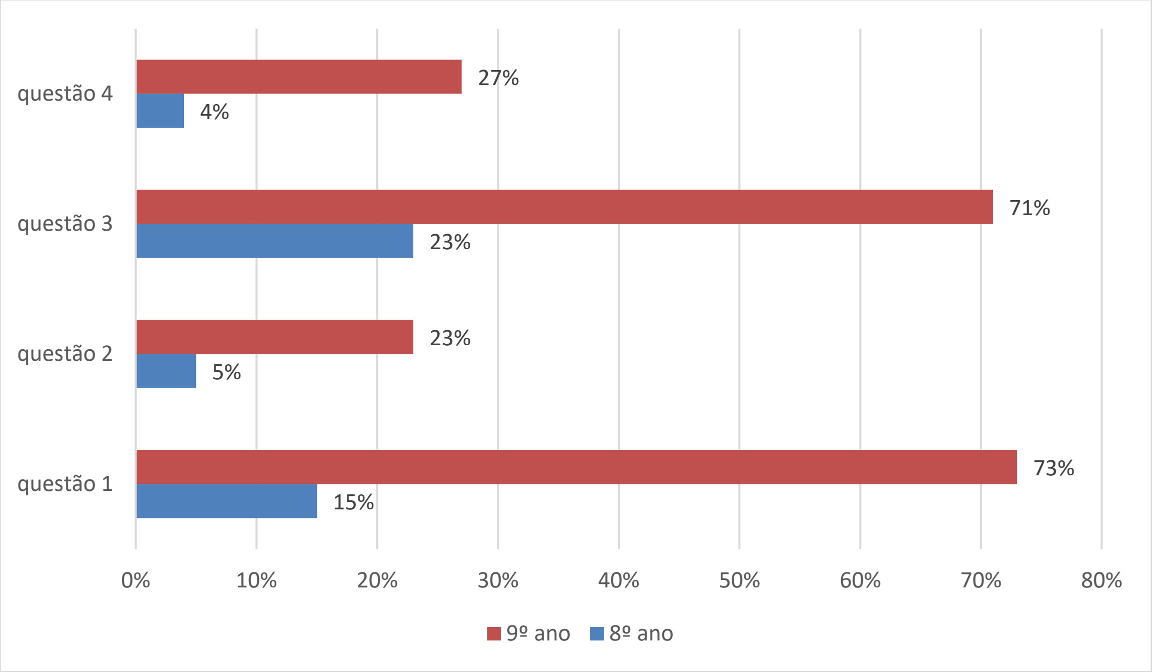
O pré-teste apresentado a seguir foi aplicado.

1º QUESTÃO: Daniela planeja ir à praia e deseja utilizar uma regata, um short e uma sandália. Sabe-se que ela possui 4 regatas, 2 shorts e 2 sandálias. De quantas formas diferentes Daniela poderá vestir-se?
2º QUESTÃO: De quantas formas diferentes 4 pessoas podem formar uma fila?
3º QUESTÃO: Quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 6 e 7?
4º QUESTÃO: Numa circunferência são marcados 5 pontos. Determine o número de triângulos que podemos formar com vértices nestes pontos.

A primeira questão poderia ser resolvida através do princípio fundamental da contagem. O resultado da segunda questão, que era um problema relacionado à permutação, poderia ser encontrado, entre outras estratégias, por enumeração dos agrupamentos. A terceira por sua vez, envolvendo a ideia de arranjo, demandava uma maior atenção nas informações exibidas no enunciado da questão. O vasto número de possibilidades pôs obstáculos à enumeração dos agrupamentos. Já a quarta e última questão estimulava o aluno a refletir sobre a ideia de combinação por meio de um problema que abordava o estudo de agrupamentos não-ordenados.

Os alunos pareceram se dedicar a realizar as questões do pré-teste, visto que debatiam os problemas com os demais colegas e interpelavam o professor quanto aos resultados, ao final do horário reservado para resolvê-lo.

Gráfico 1: Porcentagem de acertos dos alunos das turmas de 8º e 9º anos no pré-teste

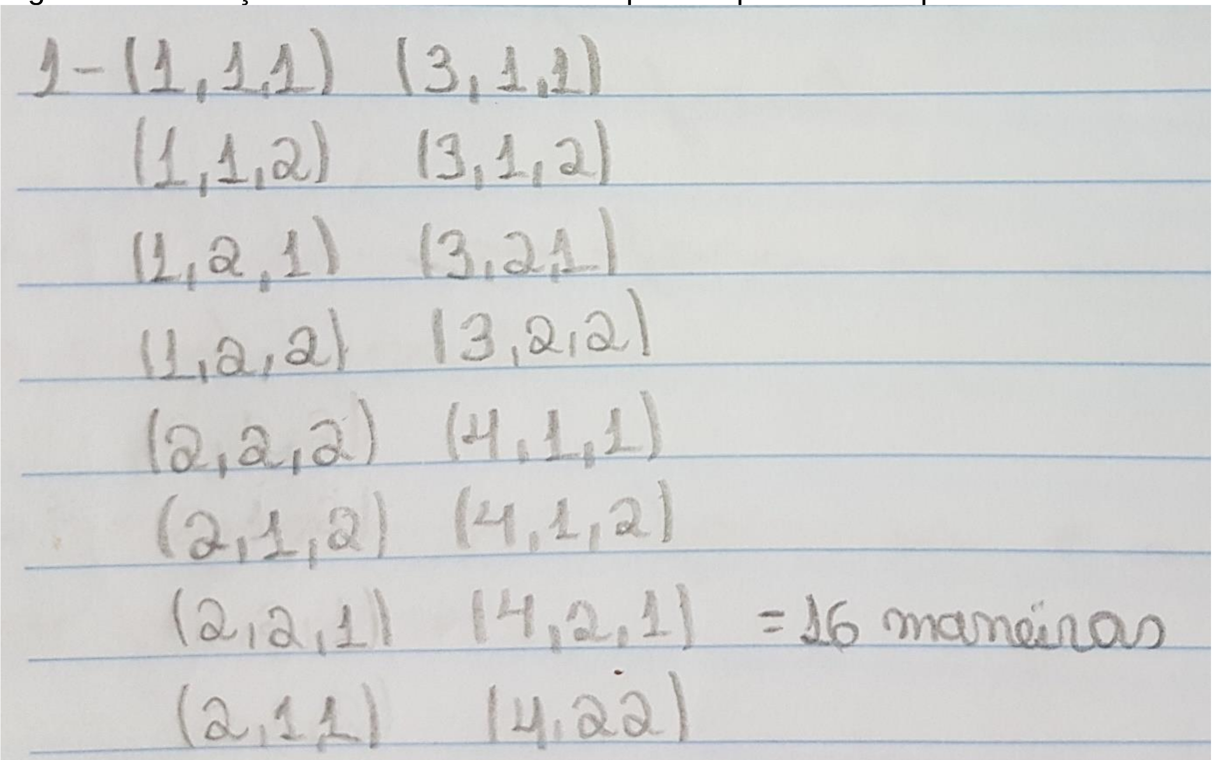


Fonte: O Autor, 2017.

Analisando os registros do teste das turmas de 8º ano e o gráfico 1 constatou-se que, dos 62 alunos que fizeram o pré-teste, 9 estudantes encontraram o resultado esperado para a primeira questão. Apenas 3 alunos deixaram a questão em branco. Em relação às resoluções corretas, 5 dos alunos utilizaram, exclusivamente, operações de adição e subtração, 3 alunos registraram esquemas de resolução e 1 aluno utilizou o princípio multiplicativo de modo intuitivo. Após o pré-teste, o professor perguntou a esse aluno se ele conhecia tal princípio e o mesmo afirmou que o desconhecia. Entre os que erraram a questão, 19 cometeram erros na escolha das operações. Uma aluna utilizou intuitivamente a árvore das possibilidades, mas infelizmente não chegou na resposta desejada. Os 33 alunos restantes erraram porque usaram dados diferentes dos que foram apresentados no problema, não terminaram a questão ou erraram na operação.

Por outro lado, ao analisar os registros do teste das turmas de 9º ano verificou-se que, dos 48 alunos que fizeram o pré-teste, 35 estudantes encontraram o resultado esperado para a primeira questão. Uma dessas resoluções corretas é apresentada na figura 3.

Figura 3: Resolução de um aluno do 9º ano para a questão 1 do pré-teste



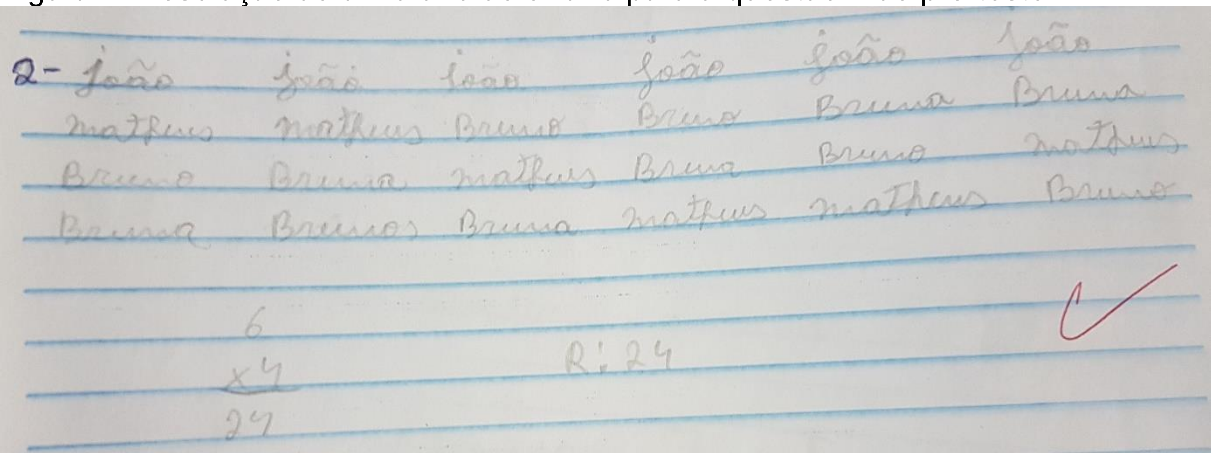
Fonte: O Autor, 2017.

Somente 1 aluno deixou a questão em branco. Baseado nos registros das resoluções corretas, 16 dos alunos utilizaram, exclusivamente, operações de adição e subtração, 4 alunos registraram esquemas de resolução e 9 alunos utilizaram o princípio multiplicativo de modo intuitivo. Após o término do pré-teste, o professor perguntou a esses alunos se eles conheciam o princípio da multiplicação e eles disseram que não o conheciam. Sete alunos utilizaram intuitivamente a árvore das possibilidades e apenas um deles não chegou na resposta desejada. Entre os que erraram a questão, 2 cometeram erros na escolha das operações. Os 10 alunos restantes erraram porque usaram dados diferentes dos que foram apresentados no problema, não terminaram a questão ou erraram na operação.

Três alunos das turmas de 8º ano acertaram a segunda questão, sendo que todos resolveram enumerando as possibilidades de forma sistemática. Nas resoluções dos alunos que não acertaram essa questão, foi observado que 13 alunos também tentaram resolver usando a enumeração sistemática, 24 estudantes a não sistemática, nenhum discente por esquemas ou operações e 21 alunos não interpretaram corretamente a situação-problema, pois entenderam que a questão abordada indagava a respeito da maneira pelo qual uma fila poderia ser formada. Um aluno acabou deixando essa questão em branco.

Onze alunos das turmas de 9º ano acertaram a segunda questão e todos resolveram enumerando as possibilidades de forma sistemática. Nas resoluções dos alunos que não acertaram essa questão foi observado que 16 alunos também tentaram resolver usando a enumeração sistemática, 21 estudantes a não sistemática. Na figura 4 é apresentada uma dessas resoluções corretas.

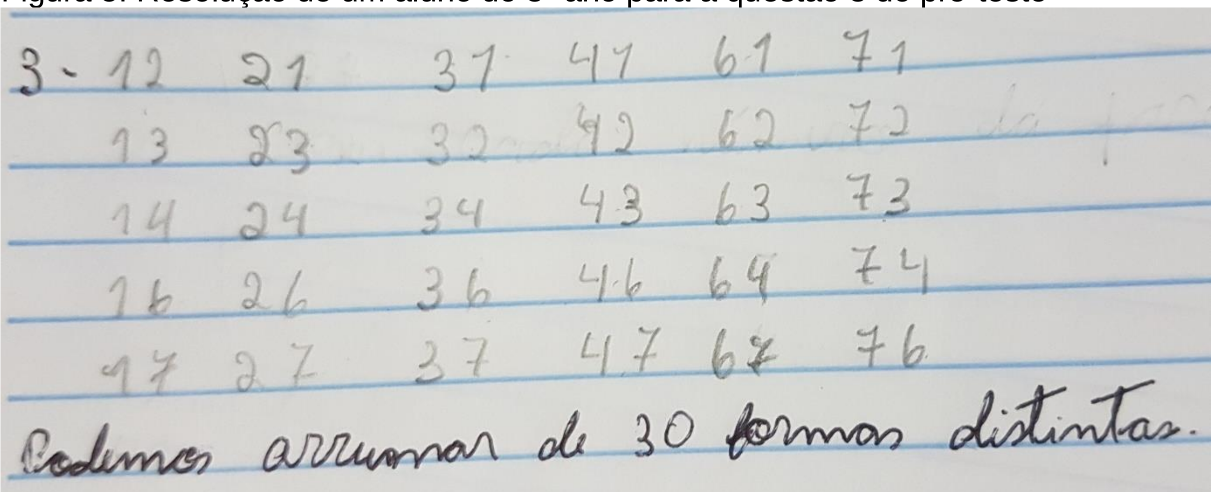
Figura 4: Resolução de um aluno do 9º ano para a questão 2 do pré-teste



Fonte: O Autor, 2017.

Apesar das respostas terem sido muito variadas, 14 alunos acertaram a terceira questão, que foi a situação-problema com o maior número de acertos do pré-teste das turmas de 8º ano. Uma dessas resoluções corretas é apresentada na figura 5.

Figura 5: Resolução de um aluno do 8º ano para a questão 3 do pré-teste



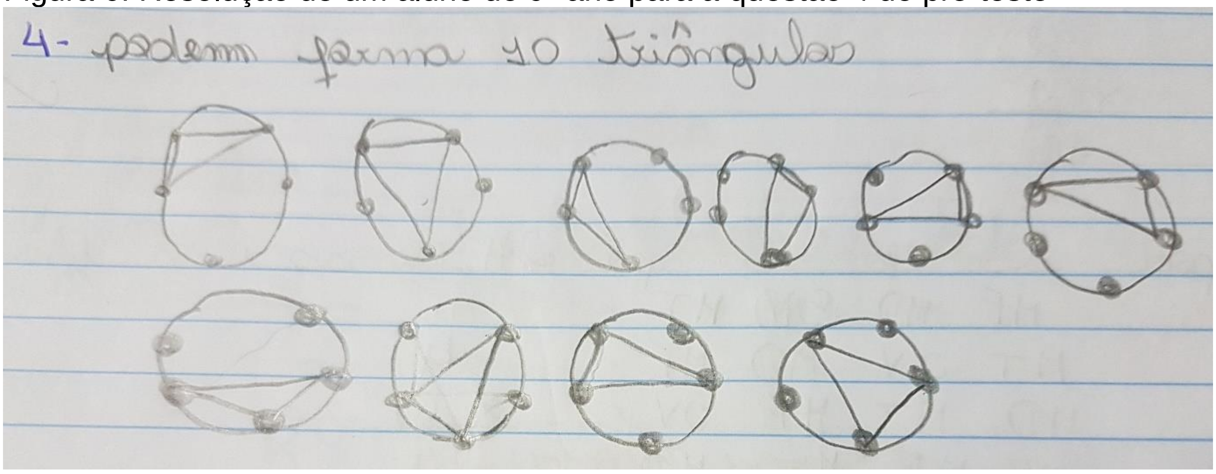
Fonte: O Autor, 2017.

Vinte e seis estudantes fizeram alguns registros, mas não responderam a questão corretamente e apenas 2 discentes a deixaram em branco. Um aluno tentou utilizar intuitivamente o princípio multiplicativo, mas não obteve sucesso, em virtude de ter esquecido que os algarismos deviam ser distintos.

Analisando os registros da terceira questão do pré-teste das turmas de 9º ano, percebeu-se que 34 alunos a acertaram. Cinco alunos tentaram responder essa questão utilizando o princípio multiplicativo de modo intuitivo e encontraram 6 . 6 = 36 algarismos diferentes. Infelizmente, os mesmos não se deram conta que os algarismos deviam ser distintos e acabaram errando a questão. Os demais alunos tentaram fazer alguns registros, mas não responderam a questão corretamente.

Somente um aluno das turmas de 8º ano e treze alunos do 9º ano conseguiram acertar a quarta questão. Eles desenharam cada um dos 10 triângulos que podem ser formados. Na figura 6 é apresentada uma dessas resoluções corretas.

Figura 6: Resolução de um aluno do 9º ano para a questão 4 do pré-teste



Fonte: O Autor, 2017.

Quase todos os discentes tentaram utilizar esse mesmo esquema, mas não conseguiram desenhar todos os triângulos possíveis. Nas turmas de 8º ano, apenas 1 aluno não registrou sua resposta e 9 estudantes não responderam a pergunta feita pelo problema. Já nas turmas de 9º ano, somente 1 aluno não registrou sua resposta e 3 estudantes não responderam adequadamente o problema proposto.

Ao analisar os pré-testes, ficou perceptível que vários estudantes não deram importância se formavam agrupamentos ordenados ou não, ainda que reconhecessem que, ao modificarmos a ordem dos algarismos em um numeral seu valor é alterado, dando origem a um novo numeral, ou ao formar um triângulo de vértices XYZ termos o mesmo triângulo se considerarmos os vértices em uma ordem distinta.

Vários alunos tentaram usar a enumeração de agrupamentos possíveis como estratégia de resolução mas, quando a quantidade de possibilidades do problema era vasta, acabavam não sendo capazes de buscar padrões a fim de generalizar a enumeração desejada.

Oitenta e oito alunos demonstraram que ainda não estão habilitados a identificar certas informações importantes que vão além das que se encontram explícitas no enunciado do problema.

Diversos alunos tentaram resolver as questões propostas por meio do registro de algumas operações. Ficou evidente que não houve um grande interesse por parte deles em justificar os cálculos realizados. Cinco alunos procuraram justificar seus cálculos em algumas questões, argumentando através de pequenos parágrafos. Apenas 35 alunos registraram algum tipo de esquema ou diagrama em suas resoluções.

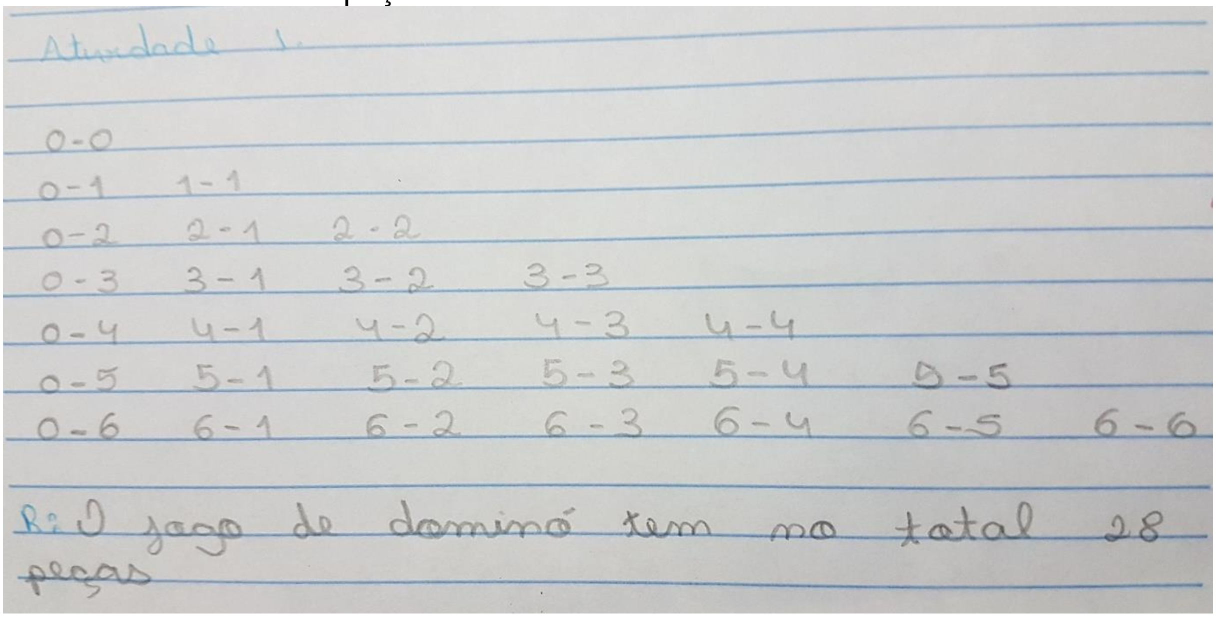
Após a fase investigativa preliminar, o desenvolvimento das atividades seguiu adiante. Com o aval da direção, dos alunos e dos pais, parte do trabalho foi registrada através de gravações. Como medida cautelar, foi solicitada a autorização por escrito dos responsáveis legais dos alunos, visto que os mesmos ainda não alcançaram a maioridade.

4.2 **Segundo dia**

As atividades em grupo foram iniciadas. A primeira atividade sugeria aos alunos que determinassem o número de peças de um jogo de dominó tradicional, ou seja, um jogo de dominó que possui peças formadas por números de 0 a 6.

Tal questão foi prontamente resolvida por quase todos os grupos das turmas de 8º ano. Na figura 7 é apresentada uma das resoluções corretas. Treze alunos que haviam participado do pré-teste não compareceram à escola nesse dia, porém outros onze alunos que faltaram a aula no dia do pré-teste puderam participar das novas atividades propostas. Logo, 58 alunos estavam presentes em sala de aula. Diversos alunos já conheciam o jogo e sabiam a quantidade de peças, entretanto os mesmos foram convidados a explicar o motivo pelo qual aquela quantidade de peças completava o conjunto de peças. Alguns grupos resolveram a questão através da enumeração de todas as peças do dominó. Outros começaram a enumerar as peças e acabaram descobrindo um padrão. Os mesmos interromperam a enumeração e resolveram a questão através desse padrão.

Figura 7: Resolução de um grupo do 8º ano para a atividade do número de peças de um dominó

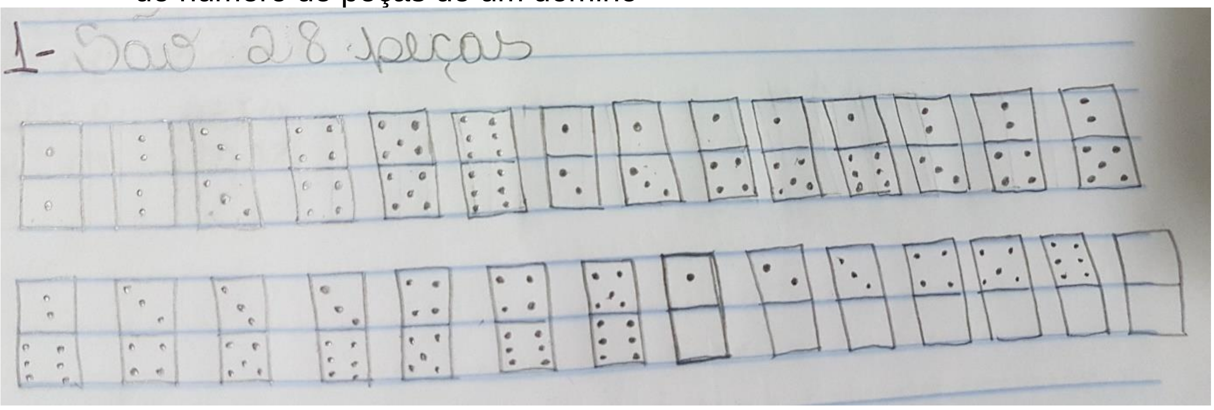


Fonte: O Autor, 2017.

Apenas um grupo do 8º ano se equivocou ao realizar a enumeração sistemática de todas as peças do dominó e errou a questão. O professor observou que os alunos do 8º ano, ao tentarem trabalhar em grupo, acabaram dividindo o trabalho de uma forma inadequada, pois cada um deles ficou encarregado de desenhar todas as peças que combinavam com um dos números que compõem o jogo de dominó. Ou seja, um dos alunos desenhou todas as peças que combinavam com o número zero, outro desenhou todas as peças que combinavam com o número 1, e assim por diante. A primeira resposta obtida, em alguns grupos, foi 49 e, ao serem indagados a respeito desse fato, exibiram esquemas em que cada um dos sete números, de zero a seis, estava associado a outros sete. Quando questionados sobre a diferença entre a peça 4 – 3 e a peça 3 – 4, quase que instantaneamente se deram conta que haviam cometido um erro em sua resolução. A partir desse fato, uma nova discussão sobre como determinar o total de peças foi iniciada. Ao serem requisitados a comparar a quantidade de peças que haviam encontrado e a quantidade que tinham intenção de encontrar, após terem observado que a ordem na peça não importa, todos os alunos afirmaram que seria uma quantidade menor. Esse fato já denota uma evolução do raciocínio combinatório dos estudantes, preparando-os para a compreensão de estratégias de cálculo do número de combinações.

Somente um grupo do 9º ano errou tal questão. Eles montaram uma tabela e foram registrando cada uma das peças na mesma e responderam que existiam 36 peças. O primeiro equívoco ocorreu porque o grupo excluiu as peças que continham o número zero. Além disso, o grupo também não se deu conta que a ordem das peças do dominó não importa e acabaram contando algumas peças duas vezes. Quatro alunos que participaram do pré-teste não compareceram à escola nesse dia, porém outros cinco alunos que haviam faltado a aula anterior puderam participar das novas atividades propostas. Logo, 49 alunos estavam presentes em sala de aula. É apresentado na figura 8 um dos registros contendo uma das resoluções corretas de um dos grupos das turmas de 9º ano.

Figura 8: Resolução de um grupo do 9º ano para a atividade do número de peças de um dominó



Fonte: O Autor, 2017.

Em cerca de vinte e cinco minutos todos os grupos já haviam terminado a resolução da atividade, em virtude das discussões internas em cada grupo terem sido esgotadas. Ao professor não houve pedido algum por parte dos alunos que validasse as estratégias de resolução ou resultados obtidos.

No momento em que os alunos apresentaram suas resoluções, percebeu-se que o tipo de resolução mais utilizado foi a de enumeração sistemática de todas as peças do dominó.

Uma outra resolução que surgiu foi a soma 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 com explicações do tipo: “o zero combina com outros sete elementos; o um, com seis porque já combinou com o zero e não precisa mais; o dois, combina com cinco e assim por diante.”

Um grupo listou todos os agrupamentos desprezando o fato de que a ordem não importa e depois excluiu os agrupamentos semelhantes. Ao serem incentivados a realizar uma comparação entre o número de agrupamentos que tinham anteriomente e o número de agrupamentos que respondia à pergunta, notaram que, não levando em consideração os agrupamentos em que os elementos são iguais, a quantidade final é exatamente a metade da quantidade inicial. Quando indagados em relação ao porquê desse fato acontecer, demoraram a responder. Somente após um certo tempo, um dos alunos afirmou que deveria ser porque cada peça estaria sendo contada duas vezes quando a ordem no agrupamento não importava. Esse raciocínio pareceu confuso para uma parcela de alunos que preferiram enumerar os agrupamentos ou usar outro tipo de padrão.

No decorrer das apresentações, a palavra “combinação” foi mencionada várias vezes sendo usada pelos alunos para descrever as ligações existentes entre elementos no intuito de formar os agrupamentos possíveis. Quando interrogados em relação ao porquê do uso desse vocábulo evidenciaram, através de suas respostas, que estavam realmente associando a essa palavra o sentido de ligação entre elementos.

Toda vez que um novo grupo se apresentava para exibir seus registros para o restante da turma era sempre ressaltado o fato do agrupamento formado ser do tipo em que a ordem não importa. Faziam isso dizendo frases como: “Se 4 - 3 é igual e 3 - 4 então não precisamos repetir essa combinação”.

Após o término das apresentações, os alunos foram questionados sobre o que consideravam mais importante para resolver problemas como o que havia acabado de ser proposto e alguns responderam que os aspectos a serem considerados são: se as “combinações” ficam diferentes ou não ao trocar a ordem de seus elementos, se é possível escrever todas as possibilidades e se existe algum padrão que facilite o cálculo.

A atividade dois foi proposta: “Quantos são os anagramas da palavra ZERO?” (Arago et al, 1975).

Em geral, os alunos das turmas de 8º ano apresentaram muita dificuldade para resolver essa questão, pois apenas um dos grupos conseguiu acertá-la. O professor percebeu que os grupos desejavam encontrar uma operação mais simples que a resolvesse de uma maneira mais rápida. Alguns tentavam utilizar o mesmo método que haviam utilizado para resolver a questão da atividade anterior, mas acabavam desistindo quando percebiam que o tipo de agrupamento formado nessa questão era diferente, pois a ordem dos elementos era importante na sua determinação.

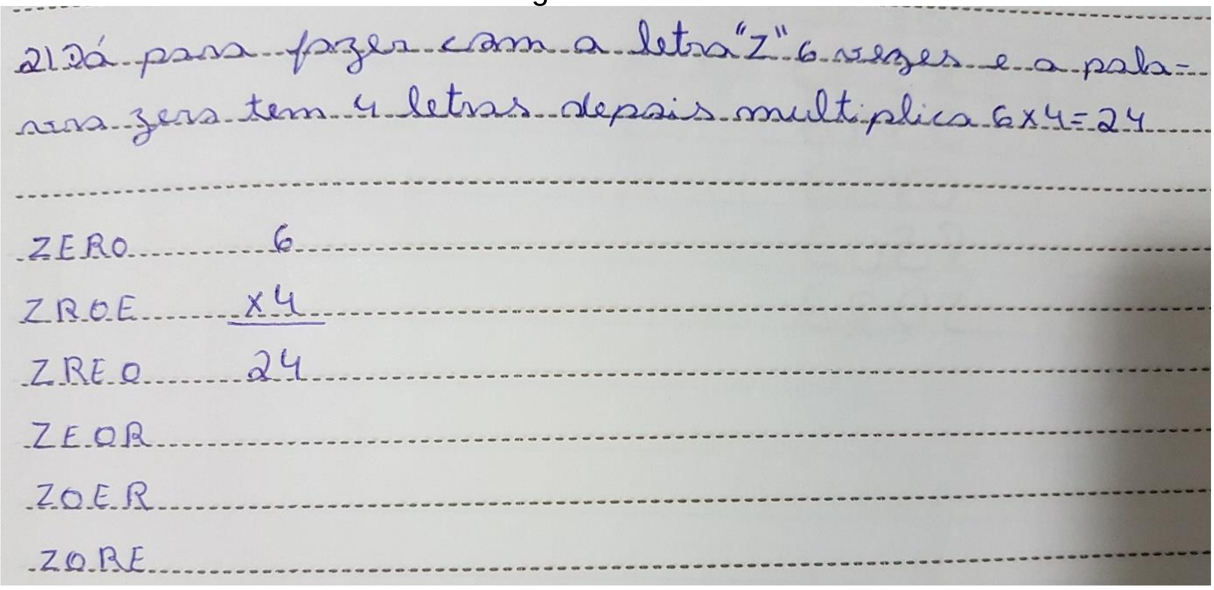
Após um certo tempo de discussão, os grupos começaram a elaborar estratégias para resolver o problema. Alguns grupos fixaram a primeira letra e foram, de maneira sistemática, enumerando as possibilidades de trocas com as outras letras.

Outro grupo fixou umas das letras e encontrou seis anagramas possíveis. Em seguida, o grupo percebeu que tal fato aconteceria com as demais letras e decidiram efetuar a multiplicação entre 6 e 4. No entanto, eles infelizmente erraram esse cálculo e responderam 25.

Um dos grupos começou a desenhar o diagrama, observou um padrão e utilizou o princípio multiplicativo para concluir a resolução da questão. Essa última proposta, quando apresentada, chamou a atenção de um número considerável de alunos por parecer mais simples.

Dos dez grupos formados pelas turmas do 9º ano, apenas um não encontrou a resposta correta, em virtude de não terem conseguido listar todas as possibilidades. Esse grupo encontrou 21 anagramas. Em relação aos grupos que acertaram a atividade, quatro deles enumeraram todas as possibilidades e os cinco grupos restantes fixaram uma das letras e perceberam que seis anagramas eram formados. Em seguida, concluíram que se havia quatro letras distintas na palavra ZERO, então o resultado poderia ser obtido através da multiplicação entre 6 e 4. Nesse momento foi possível perceber uma evolução no raciocínio combinatório de alguns alunos, pois vários grupos não enumeraram todas as possibilidades do problema abordado e utilizaram o princípio multiplicativo. É apresentado na figura 9 um dos registros contendo uma das resoluções corretas de um dos grupos das turmas de 9º ano.

Figura 9: Resolução de um grupo do 9º ano para a atividade
referente ao número de anagramas



Fonte: O Autor, 2017.

Independente das dificuldades enfrentadas, ficou notório para os discentes que a questão abordada envolvia agrupamentos que tinham um comportamento diferente daqueles da atividade anterior. Vale ressaltar que o interesse em observar e compreender as resoluções dos outros grupos gerou uma participação mais ativa de todos.

4.3 **Terceiro dia**

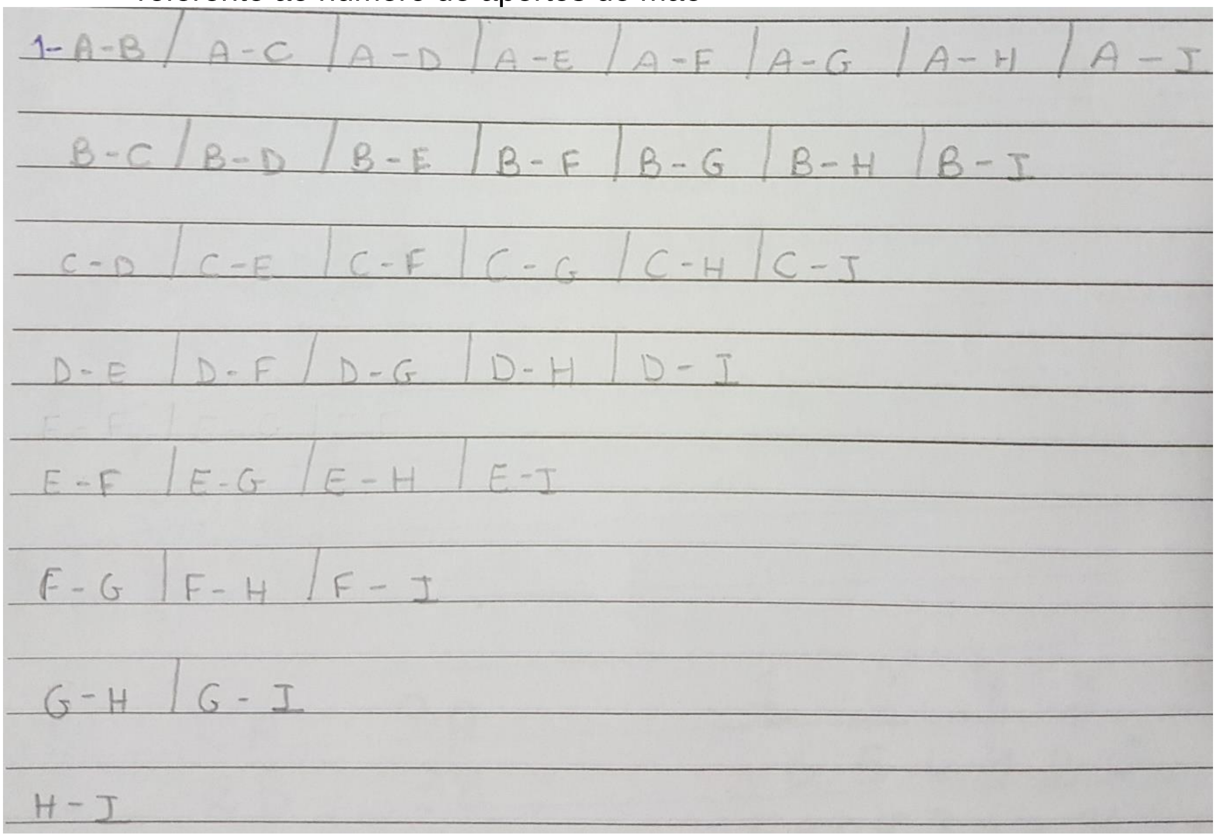
Nessa aula foram propostas outras três questões para 59 alunos do 8º ano e 51 alunos do 9º ano.

1. Nove alunos participaram de uma reunião e no final, cada um cumprimentou outro, apenas uma vez, através de um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram dados ao todo?
2. Em um grupo de seis alunos, dois deles não se toleram e não desejam sair lado a lado em uma fotografia. De quantos modos diferentes esse grupo de alunos poderá posar para a fotografia, respeitando essa incompatibilidade?
3. De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 6 cadeiras em fila?

A primeira questão foi resolvida rapidamente porque foi associada à atividade do dominó e alguns grupos resolveram a questão como haviam resolvido antes, guardadas as devidas proporções. Alguns grupos modificaram suas resoluções e utilizaram outros processos. Este fato é interessante porque mostra que os alunos já estão categorizando os problemas a partir de análises próprias e buscando outras formas de resolvê-los.

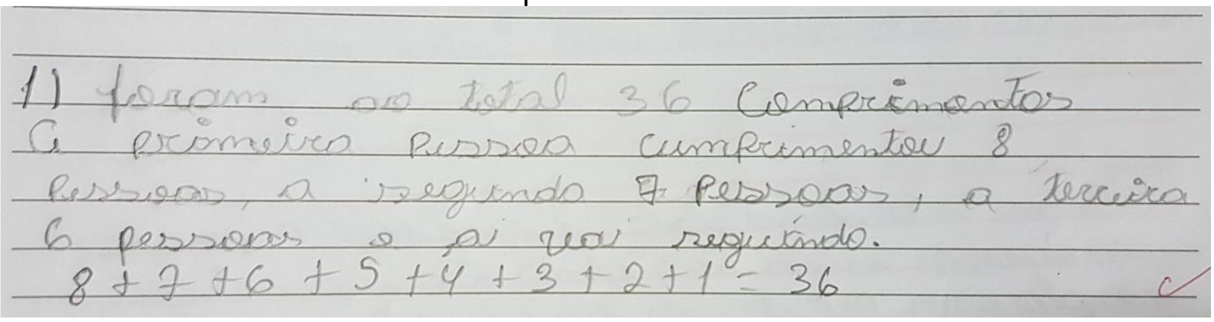
Sete dos dez grupos de alunos do 8º ano, assim como todos os nove grupos de alunos do 9º ano, acertaram essa questão utilizando a seguinte ideia: "A primeira pessoa cumprimenta 8 pessoas, a segunda pessoa cumprimenta 7 pessoas, a terceira pessoa cumprimenta 6 pessoas e assim por diante. Logo, o número de cumprimentos será 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36". Nas figuras 10 e 11 são apresentados alguns registros contendo resoluções corretas de grupos das turmas de 8º e 9º anos.

Figura 10: Resolução de um grupo do 9º ano para a atividade referente ao número de apertos de mão



Fonte: O Autor, 2017.

Figura 11: Resolução de um grupo do 8º ano para a atividade referente ao número de apertos de mão



1) foram ao total 36 Comprimentos
a primeira pessoa cumprimentou 8
pessoas, a segundo 7 pessoas, a terceira
6 pessoas e ai vai seguindo.
$8+7+6+5+4+3+2+1=36$

Fonte: O Autor, 2017.

Dois grupos de alunos do 8º ano encontraram o dobro da resposta correta, pois efetuaram a multiplicação entre 8 e 9. Eles usaram a seguinte ideia: “Cada pessoa cumprimentará 8 pessoas. Como são 9 pessoas na reunião, teremos 8 x 9 apertos de mão”. Após a apresentação dos grupos, tais alunos entenderam que o equívoco ocorreu porque os mesmos contaram apertos de mão entre duas pessoas de modo dobrado.

A segunda foi desafiadora para todos os alunos. Após um certo tempo, alguns grupos começaram a notar um padrão que igualava a quantidade de possibilidades quando uma das pessoas que não se toleram sentava nas extremidades e uma outra quantidade quando ela se sentava em uma das cadeiras entre a primeira e a última.

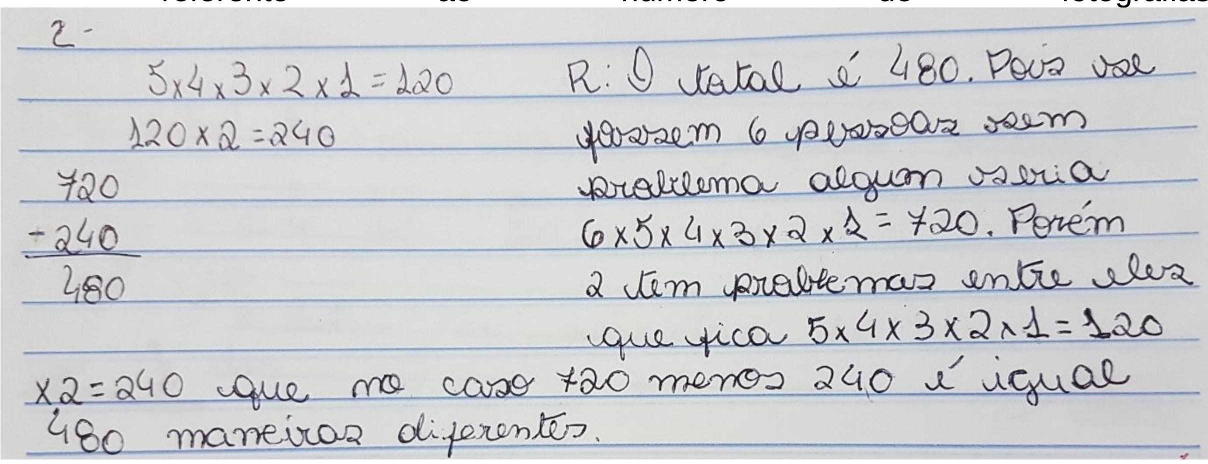
Dois dos dez grupos do 8º ano e seis dos nove grupos do 9º ano solucionaram a questão proposta. Primeiro eles calcularam a quantidade de formas distintas e sem restrições que as seis pessoas poderiam se dispor. Depois calcularam a quantidade de agrupamentos em que ficavam juntos aqueles que não se toleram. Por fim, eles chegaram à resposta correta através da diferença entre os resultados obtidos na primeira e na segunda parte da resolução.

Tal resolução foi apresentada posteriormente pelos grupos no quadro para que os demais alunos conseguissem entendê-la. Primeiro colocaram seis riscos horizontais, depois foram escrevendo a quantidade de possíveis ocupantes de cada cadeira com a ajuda de um diagrama de possibilidades que estava sendo construído simultaneamente, do outro lado do quadro. Após terminarem de escrever todas as quantidades, alguns alunos sugeriram que as quantidades fossem multiplicadas. O professor questionou o porquê daquela operação e um dos alunos explicou usando o diagrama das possibilidades. Encontraram o produto 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720.

Em seguida os alunos começaram a pontuar quais eram as possíveis posições diferentes que poderiam ser ocupadas pelos dois indivíduos selecionados, que não se toleram e agora estão sendo contados de modo que fiquem juntos, e encontraram cinco possibilidades para a ordem RF e cinco possibilidades para a ordem FR, sendo R e F a representação dos alunos que não se toleram. Logo, havia dez posições diferentes. Um dos alunos que não havia acertado tal questão questionou o resultado ressaltando que se diminuísse 10 de 720 encontraria um resultado diferente do encontrado através da outra resolução. Os alunos que estavam explicando a resolução no quadro obviamente concordaram e perguntaram qual das duas soluções ele considerava verdadeira. O aluno respondeu que confiava mais na resposta encontrada na primeira resolução porque conseguiu acompanhar melhor os passos seguidos na resolução. Outros alunos concordaram e um novo debate se iniciou entre eles. Os discentes continuaram a explicação dizendo "- São dez possibilidades para cada mistura das outras quatro pessoas, isto é, são dez possibilidades para cada 4 . 3 . 2 . 1 = 24 agrupamentos diferentes. Logo, são 10 . 24 = 240 fotos possíveis com os alunos F e R juntos."

Por fim, os alunos calcularam no quadro a diferença entre 720 e 240 e chegaram à resposta correta. É apresentado na figura 12 um dos registros contendo uma das resoluções corretas de um dos grupos das turmas de 9º ano.

Figura 12: Resolução de um grupo do 9º ano para a atividade referente ao número de fotografias



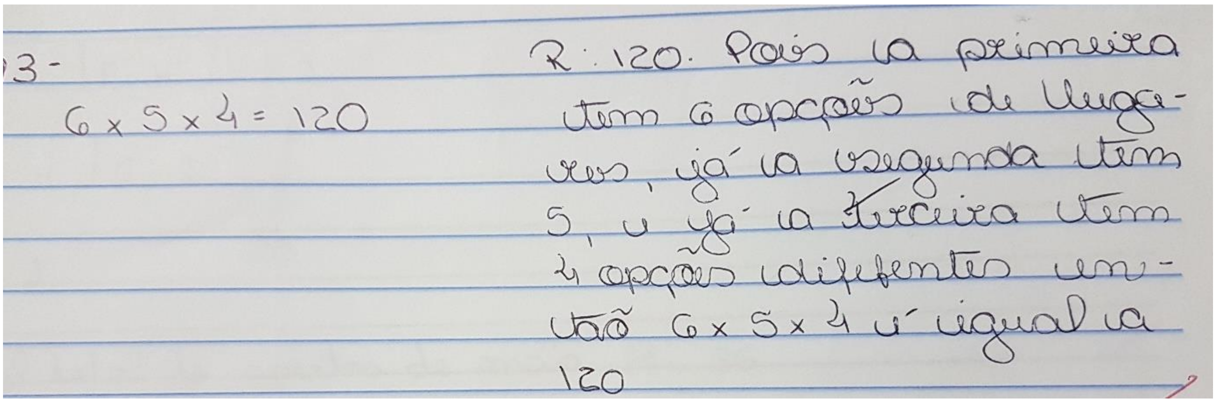
Fonte: O Autor, 2017.

Os alunos que não haviam acertado essa questão acharam a estratégia muito trabalhosa e difícil, sendo que alguns chegaram a mencionar que nunca teriam pensado algo tão complexo. O professor interveio e disse-lhes que cada problema poderia ser resolvido de várias formas e que cada um poderia criar sua própria estratégia.

O professor percebeu que vários alunos mostraram que sabem diferenciar os tipos de agrupamentos existentes porque eles responderam que tal problema está ligado a agrupamentos em que a mudança da ordem dos elementos gera um outro agrupamento distinto.

E a terceira questão gerou muito debate. Os alunos verificaram semelhanças entre essa questão e a questão resolvida na aula anterior que pedia o número de anagramas da palavra ZERO. Por este motivo queriam usar um método parecido, mas quando questionados sobre o fato de uma cadeira vazia ser igual a outra cadeira vazia notavam que havia um problema e retomavam os cálculos. Nesse momento já apresentavam sinais de cansaço e alguns grupos desistiram da questão. Todos os grupos das turmas de 9º ano e metade dos grupos das turmas de 8º anos conseguiram resolvê-la durante a aula.

Figura 13: Resolução de um grupo do 9º ano para a atividade referente às cadeiras em fila



Fonte: O Autor, 2017.

4.4 **Quarto dia**

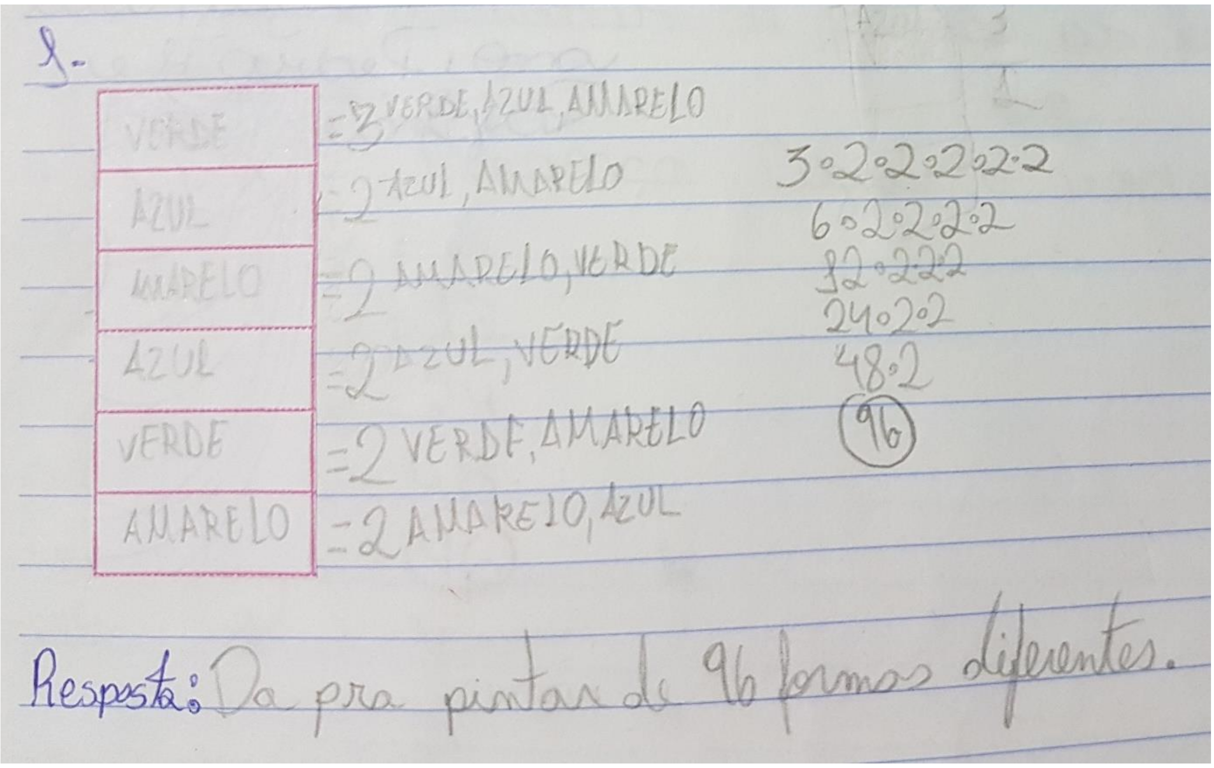
Nessa aula foram distribuídas outras quatro questões para 46 alunos do 8º ano e 54 alunos do 9º ano.

1. Uma bandeira de papel é formada por seis faixas horizontais de mesma largura. Para pintar as faixas de bandeira temos três cores: branco, azul e verde. De quantas formas podemos pintar essa bandeira, sem que duas faixas consecutivas tenham a mesma cor? 2. A lanchonete “C que sabe” possui 9 opções de vitaminas e 7 de sanduíches. De quantas maneiras distintas uma pessoa pode: a) beber uma vitamina ou comer um sanduíche? b) beber uma vitamina e comer um sanduíche? 3. Num grupo de alunos composto por 3 rapazes e 4 moças, de quantos modos pode-se escolher um representante e um vice representante para a turma? 4. Uma turma de amigos possui 4 meninos e 5 meninas. Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas contendo, no mínimo, uma menina?

A primeira e a terceira questões foram resolvidas com certa facilidade apesar de os alunos a essa altura da proposta pedagógica terem começado a demonstrar uma certa falta de interesse. Na primeira questão, os alunos gastaram um tempo maior para compreendê-la, no entanto, todos os grupos do 8º e 9º anos conseguiram resolvê-la utilizando a determinação da quantidade de possibilidades para pintar cada faixa horizontal da bandeira. Em seguida, todos os grupos utilizaram o princípio multiplicativo para encontrar a solução desejada.

Na figura 14 é apresentado um dos registros contendo uma das resoluções corretas de um dos grupos das turmas de 8º ano.

Figura 14: Resolução de um grupo do 8º ano para a atividade
referente ao número de bandeiras

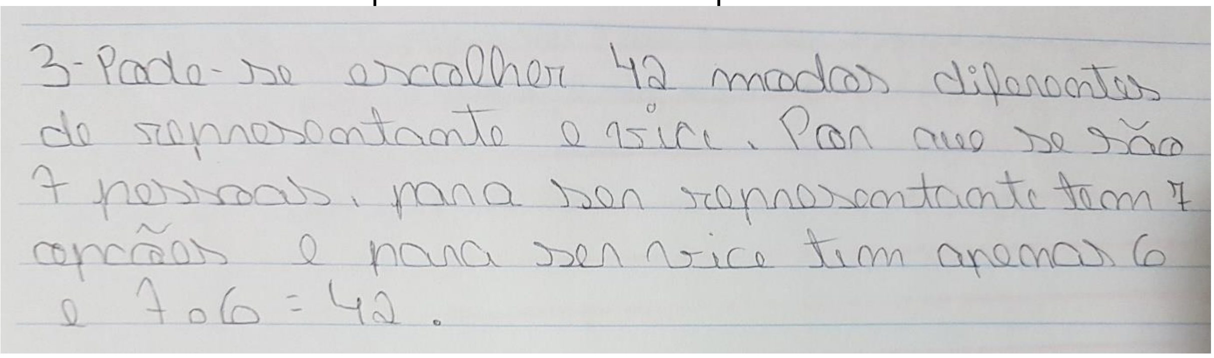


Fonte: O Autor, 2017.

Em relação à terceira questão, alguns grupos inicialmente acreditaram que a resposta seria 4 . 3 = 12, mas após serem indagados pelo professor, eles começaram a perceber que tal solução estava equivocada. O professor perguntou a esses alunos se havia alguma restrição sexual para a escolha do representante e do vice representante. Todos os alunos responderam que não existia nenhuma restrição para ambos os cargos. Em seguida, o professor os indagou em relação à quantidade de pessoas que poderiam ser escolhidas para um dos cargos disponíveis. Quase que subitamente eles entenderam que para um cargo haviam sete possíveis escolhas e para o outro cargo apenas seis escolhas, pois nenhum aluno poderia ser escolhido para ambos os cargos ao mesmo tempo. Após essa reflexão, todos os grupos já haviam entendido que bastava aplicar o princípio multiplicativo para encontrar a resposta correta, dessa forma, todos acertaram tal questão.

Na figura 15 é apresentado um dos registros contendo uma das resoluções corretas de um dos grupos das turmas de 9º ano.

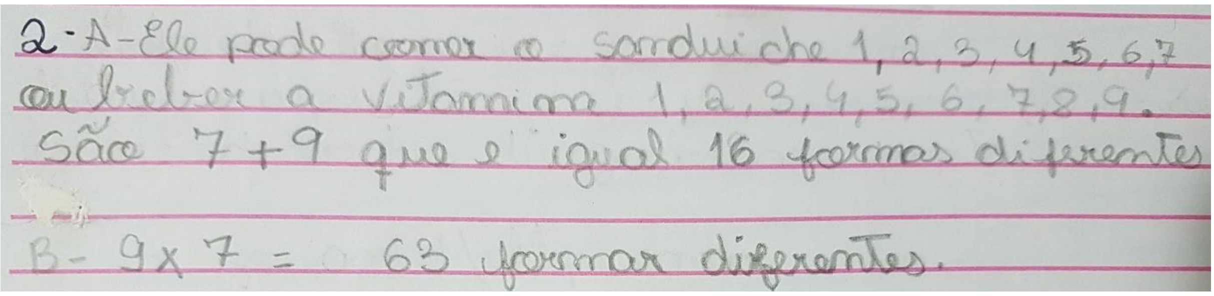
Figura 15: Resolução de um grupo do 9º ano para a atividade referente à escolha do representante e do vice representante da turma



Fonte: O Autor, 2017.

A segunda questão foi resolvida num ritmo mais lento por conta da dificuldade que os grupos encontraram em diferenciar o que era pedido nos itens (a) e (b). Mesmo assim os resultados obtidos foram os esperados. Ao serem indagados a respeito da diferença entre os itens (a) e (b), que geraram resultados distintos, os alunos explicaram que no item (a) a pessoa só queria fazer uma “coisa” (comer ou beber). Já no item (b), a pessoa queria fazer duas “coisas” (comer e beber). O professor ressaltou a importância de uma boa leitura na resolução de problemas para que certos detalhes como os que apareceram nessa questão fossem devidamente considerados. Na figura 16 é apresentado um dos registros contendo uma das resoluções corretas de um dos grupos das turmas de 8º ano.

Figura 16: Resolução de um grupo do 8º ano para a atividade referente à lanchonete



Fonte: O Autor, 2017.

A quarta questão foi o maior desafio tanto para os alunos do 8º ano quanto para os do 9º ano. Alguns grupos chegaram a iniciar uma enumeração sistemática, mas acabaram desistindo em virtude da grande quantidade de possibilidades existentes. O professor então perguntou a eles se alguma das questões propostas nos dias anteriores poderia ser útil para resolver essa questão. Após um certo tempo, os alunos lembraram-se da última questão do pré-teste que pedia para determinar a quantidade de triângulos que poderiam ser formados ao serem marcados cinco pontos numa circunferência (cada triângulo devia ser construído com seus vértices nesses cinco pontos). Os discentes começaram a perceber que essa questão do pré-teste poderia ajudá-los a resolver a questão que estava sendo abordada naquele momento. Eles entenderam que formar comissões de três pessoas equivalia a contruir triângulos com seus vértices numa circunferência. Logo, a maioria dos grupos esboçou uma circunferência e marcou nove pontos para representar os nove amigos da situação proposta. Em seguida, eles tentaram contar quantos triângulos poderiam ser formados com vértices nesses nove pontos afim de descobrir quantas comissões seriam formadas sem impor nenhum tipo de restrição de sexo. Nenhum grupo conseguiu encontrar tal resultado. O professor percebeu que os alunos estavam desestimulados e queriam desistir de resolver a questão, pois não tinham certeza se a mesma estava correta, além da atividade ter se tornado muito cansativa. Reclamaram que não conseguiriam resolver essa última questão

Baseado nesse episódio foi necessário que o professor repensasse a dinâmica da aula. Então, o docente sugeriu que resolvessem juntos a questão. O professor sugeriu a estratégia de calcularem todas as comissões de três pessoas e depois excluírem as comissões formadas com a presença apenas de meninos. Pediu que pensassem na questão trabalhada na aula anterior (em que seis alunos desejavam tirar uma fotografia e dois deles não se toleravam e não queriam sair um ao lado do outro na fotografia) e se recordassem da resolução dos grupos que contaram todas as possibilidades de agrupamentos ordenados e depois excluíram os agrupamentos em que esses dois alunos que não se gostavam permaneciam lado a lado na fotografia. Perguntou qual seria o total de agrupamentos ordenados sem restrições de sexo e a resposta veio quase que imediatamente ($9 . 8 . 7 = 504$). Em seguida, o professor os questionou a respeito da quantidade de vezes que cada agrupamento com os mesmos elementos estava sendo contado, porém nenhum aluno foi capaz de respondê-lo. Então o docente propôs que resolvessem, inicialmente, com números menores até estarem aptos a resolver tal problema. Os alunos aceitaram a sugestão e assim foi feito.

O professor propôs a análise de alguns agrupamentos comparando os ordenados com os não-ordenados. E, dessa comparação, extraíram a informação que, se dividissem o total de agrupamentos ordenados pelas misturas possíveis dentro de cada agrupamento seria obtido o número de agrupamentos não-ordenados. A fim de ajudar na visualização, ao enumerar alguns agrupamentos ordenados, aqueles que eram formados pelos mesmos elementos foram limitados por retângulos para exemplificar o processo. Após isso, o docente propôs que os alunos retomassem o último problema da atividade e tentassem resolvê-lo. Os discentes foram resolvendo individualmente ou em grupos. Alguns explicavam sua resolução para colegas de outros grupos e no final da aula todos haviam resolvido corretamente a questão utilizando a divisão apropriada.

Por fim, o professor propôs que os discentes avaliassem o que haviam apreendido até aquele momento. Alguns alunos manifestaram-se ressaltando sua insegurança ao resolver os problemas propostos. Afirmaram que, quase sempre, não tinham certeza se a resposta encontrada estava correta e que esse fato trazia muito desconforto. Alguns afirmaram que estavam com dificuldades para resolver problemas envolvendo agrupamentos não-ordenados. O professor os acalmou explicando que deveriam confiar mais em si mesmos e procurar resolver problemas da melhor maneira possível e que, como na vida, resolver problemas demanda buscar o conhecimento da situação, elaborar e aplicar estratégias de resolução e analisar o resultado encontrado. Dessa forma, a responsabilidade de conferir a resposta era deles.

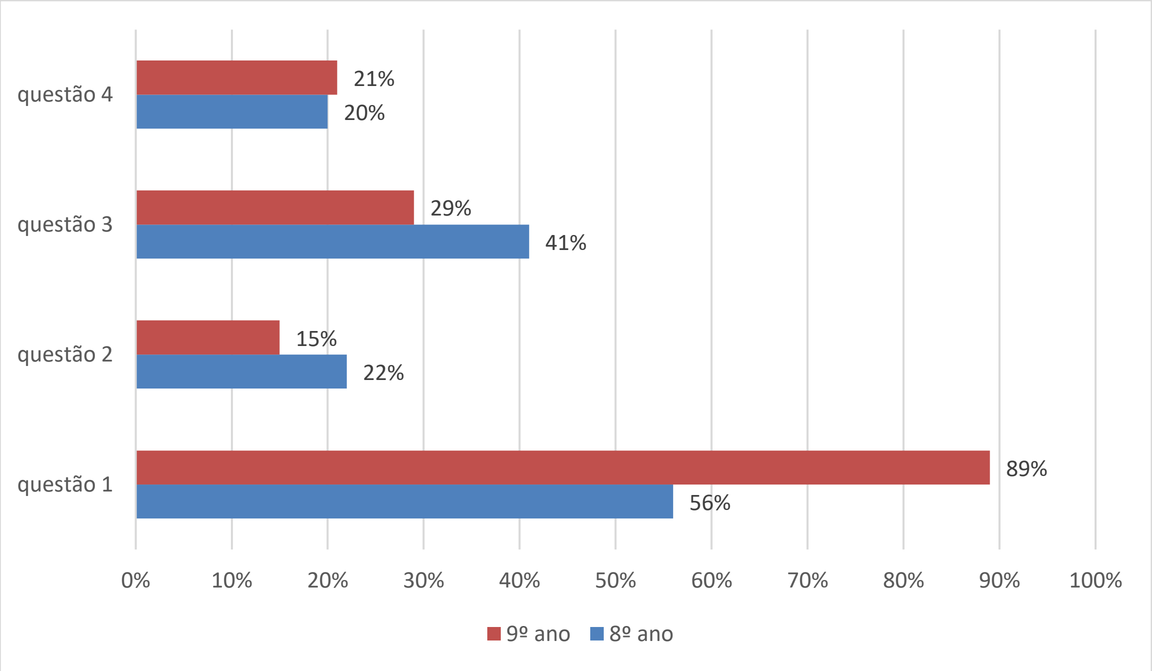
4.5 **Quinto dia**

O pós-teste diagnóstico apresentado abaixo foi aplicado em cada uma das turmas.

1º QUESTÃO: Frederico planeja ir à praia e deseja utilizar uma camiseta, uma bermuda e um chinelo. Sabe-se que ele possui 6 camisetas, 4 bermudas e 3 chinelos. De quantas formas diferentes Frederico poderá vestir-se?
2º QUESTÃO: De quantas formas diferentes 7 pessoas podem formar uma fila?
3º QUESTÃO: Quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 4, 5, 6, 8 e 9?
4º QUESTÃO: Numa circunferência são marcados 6 pontos. Determine o número de triângulos que podemos formar com vértices nestes pontos.

No dia da aplicação participaram 52 alunos do 8º ano e 53 alunos do 9º ano.

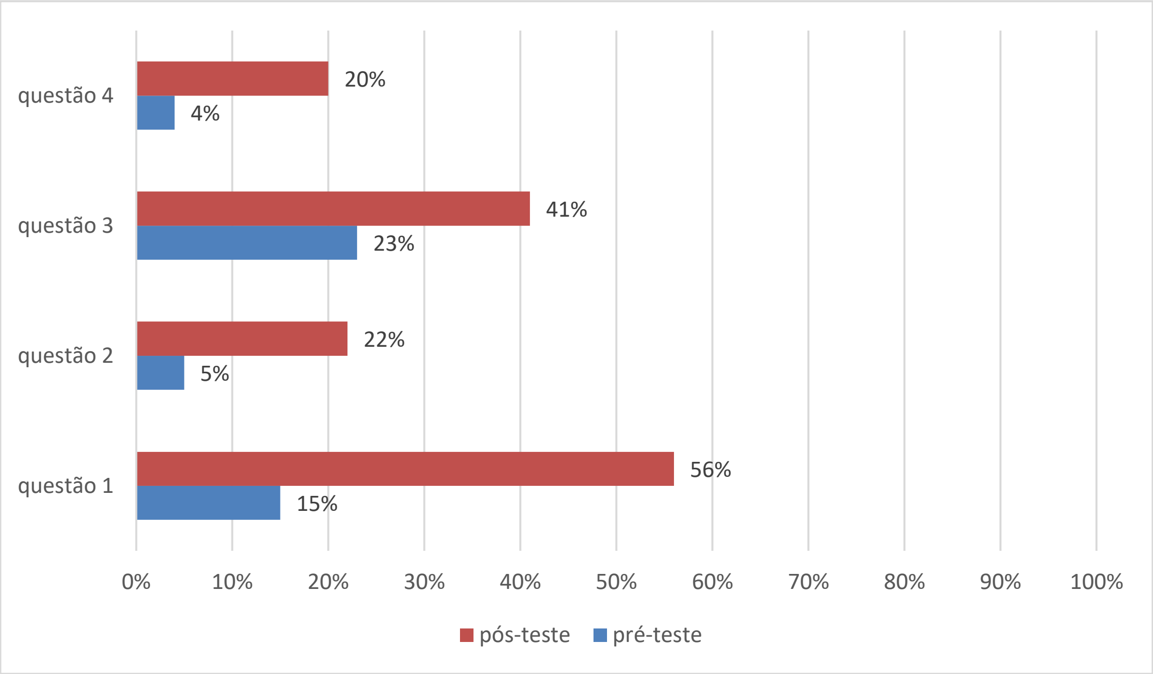
Gráfico 2: Porcentagem de acertos dos alunos das turmas de 8º e 9º anos no pós-teste



Fonte: O Autor, 2017.

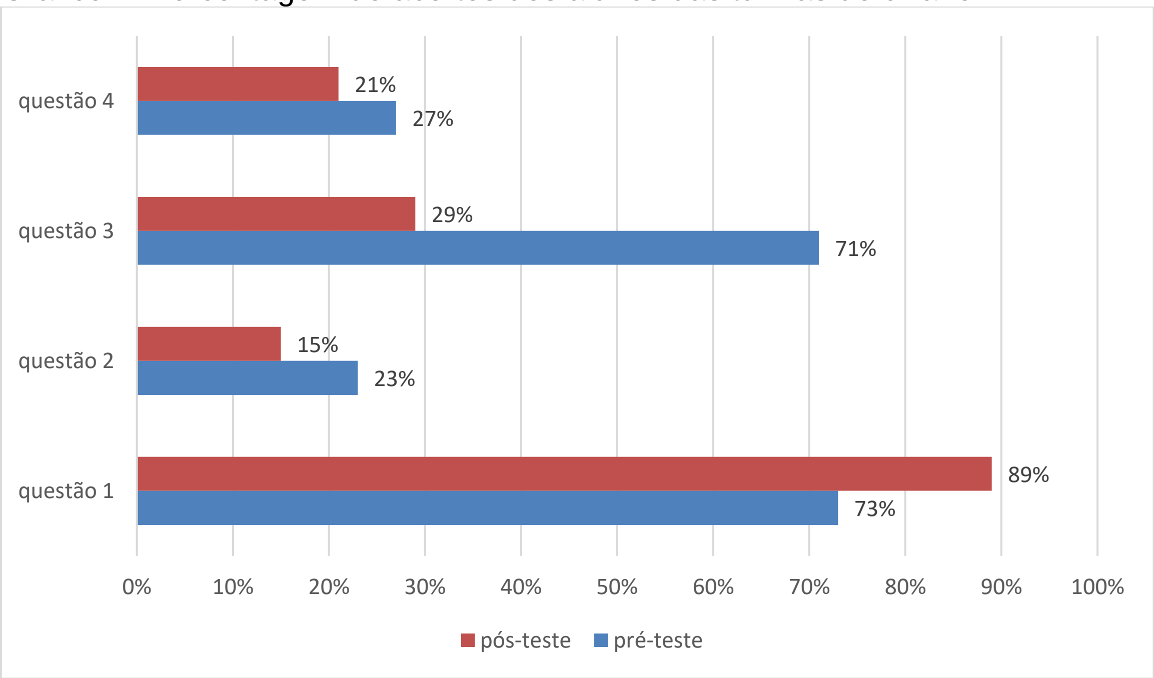
Ao analisar as resoluções apresentadas pelas turmas do 8º ano e o gráfico 2 é possível verificar que o percentual de acertos em todas as questões foi bem superior quando comparado ao pré-teste. Considerando as turmas de 9º ano, o aumento do percentual de acertos ocorreu apenas na primeira questão. O percentual de acertos das questões dois e quatro do pós-teste foi bastante similar ao percentual de acertos obtido no pré-teste. O maior desafio para as turmas de 9º ano foi a terceira questão do pós-teste, pois a maioria dos alunos falhou ao tentar utilizar o princípio multiplicativo. No pré-teste houve um grande percentual de acertos, visto que os alunos usaram a enumeração sistemática.

Gráfico 3: Porcentagem de acertos dos alunos das turmas de 8º ano



Fonte: O Autor, 2017.

Gráfico 4: Porcentagem de acertos dos alunos das turmas de 9º ano



Fonte: O Autor, 2017.

Nos gráficos 3 e 4, é possível observar um perceptível desenvolvimento do raciocínio combinatório por parte dos alunos. A enumeração de todos os agrupamentos foi uma estratégia presente em poucos pré-testes, no entanto, somente em algumas resoluções apareceu de forma sistemática. Muitas das vezes a enumeração sistemática pode levar ao erro, principalmente quando a quantidade de agrupamentos é maior, como no caso da última questão. Nenhum aluno tentou enumerar todas as possibilidades no pós-teste. A enumeração foi usada algumas vezes afim de determinar um padrão e a partir desse padrão a questão era resolvida.

Um exemplo significativo disso é que na segunda questão do pré-teste, a enumeração, sistemática ou não, havia sido bastante utilizada. Já no pós-teste, apenas um aluno recorreu a esse método e os demais discentes utilizaram diagramas e operações.

A enumeração é uma ferramenta ímpar que serve para identificar os agrupamentos. Todavia nesse caso, o abandono dessa enumeração para dar lugar aos diagramas denota um desenvolvimento do raciocínio combinatório suficiente para abstrair e determinar a quantidade de agrupamentos sem precisar enumerá-los um a um. Uma das maiores vantagens dessa evolução é a possibilidade de resolver problemas com uma quantidade grande de agrupamentos diferentes. Até porque enumerar todas as possibilidades pode ser uma tarefa muito complicada ou praticamente impossível. Tal fato pode ser observado durante a análise da segunda questão. No pré-teste, vários alunos tentaram resolvê-la através da enumeração das possibilidades, porém muitos deles não conseguiram encontrar todas ou algum padrão que os ajudassem a determinar essa quantidade. Em contrapartida, no pós-teste, nenhum aluno utilizou a enumeração, mas usaram o diagrama de possibilidades que pode ser interpretado como uma forma reduzida de enumerar agrupamentos. A maioria das questões foi resolvida através de operações justificadas por meio de diagramas de possibilidades ou argumentações sobre a quantidade de alternativas para cada etapa.

Em nenhum momento o professor solicitou aos alunos que registrassem suas ideias, no entanto, todos apresentaram resoluções com justificativas. As estratégias apresentadas pelos alunos variaram bastante e apesar de algumas ideias comuns, que geraram resoluções similares, a forma de registrá-las foi diversificada.

Analisando os registros do teste das turmas de 8º ano constatou-se que, dos 52 alunos que fizeram o pós-teste, 29 estudantes encontraram o resultado esperado para a primeira questão e apenas 2 alunos deixaram a questão em branco. Em relação às resoluções corretas, 20 alunos utilizaram o princípio multiplicativo. Entre os que erraram a questão, 7 estudantes se equivocaram e utilizaram o princípio aditivo incorretamente. Os 16 alunos restantes erraram porque usaram dados diferentes dos que foram apresentados no problema, não terminaram a questão ou erraram na operação.

Por outro lado, ao analisar os registros do teste das turmas de 9º ano verificou-se que, dos 53 alunos que fizeram o pós-teste, 47 estudantes encontraram o resultado esperado para a primeira questão, por meio do princípio multiplicativo, e apenas 3 alunos deixaram a questão em branco.

Onze alunos das turmas de 8º ano acertaram a segunda questão através do princípio multiplicativo. Nas resoluções dos alunos que não acertaram essa questão foi observado que 1 aluno tentou resolvê-la usando a enumeração sistemática, 7 alunos utilizaram o princípio multiplicativo de modo equivocado e escreveram “7 . 7 = 49 filas distintas” e 2 alunos usaram o princípio aditivo de modo errôneo, escrevendo “7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28”. Já 27 alunos não interpretaram corretamente a situação-problema. Quatro alunos acabaram deixando essa questão em branco.

Oito alunos das turmas de 9º ano acertaram a segunda questão e todos a resolveram por meio do princípio multiplicativo. Nas resoluções dos alunos que não acertaram essa questão foi observado que 7 alunos utilizaram o princípio multiplicativo de modo equivocado e escreveram “7 . 7 = 49 filas distintas” e 8 alunos usaram o princípio aditivo erroneamente, escrevendo “7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28”. Já 28 alunos não interpretaram corretamente a situação-problema. Dois alunos acabaram deixando essa questão em branco.

Vinte e um alunos acertaram a terceira questão, que foi uma das situações-problema com o maior número de acertos do pós-teste das turmas de 8º ano. Apenas um dos alunos que acertaram essa questão preferiu usar a enumeração sistemática. O restante dos estudantes utitilizou o princípio multiplicativo corretamente. Vinte e cinco estudantes chegaram a fazer alguns registros, mas não responderam a questão corretamente e somente 4 discentes a deixaram em branco.

Analisando os registros da terceira questão do pós-teste das turmas de 9º ano percebeu-se que 15 alunos a acertaram. Três alunos responderam a essa questão usando o princípio multiplicativo e escreveram “7 . 7 = 49” algarismos diferentes. Esses alunos erraram essa questão por considerarem que os agrupamentos eram não-ordenados quando, na verdade, a ordem realmente importava. Os outros 31 alunos tentaram fazer alguns registros, mas não responderam a questão corretamente. Quatro alunos deixaram essa questão em branco.

Dez alunos das turmas de 8º ano e onze alunos do 9º ano conseguiram acertar a quarta questão através do princípio multiplicativo. Quatorze discentes tentaram desenhar cada um dos 20 triângulos que podem ser formados, mas não conseguiram desenhar todos os triângulos possíveis. Seis alunos das turmas de 8º ano e sete alunos das turmas de 9º ano não registraram suas respostas.

Na quarta questão, somente 21 alunos (20% do total de estudantes que participaram do pós-teste, considerando tanto os alunos do 8º quanto do 9º ano), acertaram a resolução por considerarem o agrupamento como não-ordenado conforme o problema indicava. Utilizando tal dado como referência, acredita-se que a habilidade de identificar se o agrupamento em questão é ou não ordenado, não foi desenvolvida pela maioria dos alunos que compõem o grupo estudado.

O percentual de acertos seria maior se alguns alunos tivessem sido mais atentos quanto aos dados fornecidos pelo problema.

No pré-teste, os alunos das turmas de 9º ano tiveram um desempenho muito superior aos alunos das turmas de 8º ano. Em contrapartida, o percentual de acertos das turmas de 8º ano no pós-teste cresceu bastante quando comparado aos resultados do pré-teste. Já a quantidade de acertos dos alunos das turmas de 9º ano só aumentou na primeira questão. Consequentemente, é possível notar que o desempenho no pós-teste, tanto das turmas do 8º ano quanto das turmas do 9º ano, foi tecnicamente similar.

Ao analisar as diferenças entre os registros das resoluções do pré-teste e do pós-teste é possível perceber que houve contribuições significativas ao desenvolvimento do raciocínio combinatório e do trabalho em equipe, tanto nas turmas do 8º ano quanto nas turmas do 9º ano.

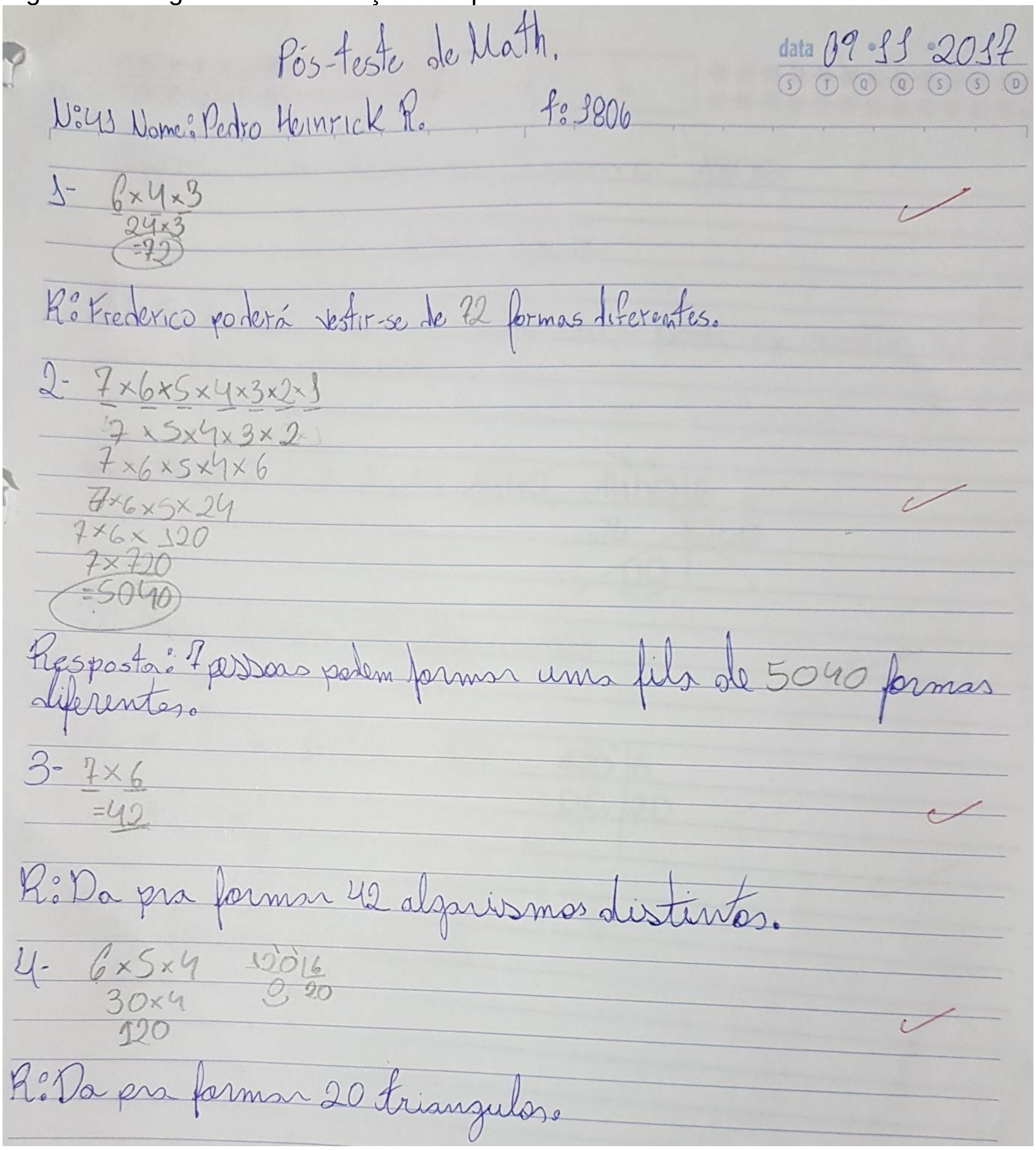
Seguem abaixo algumas dessas consideráveis contribuições.

- a aplicação dos princípios de contagem aditivo e multiplicativo de um modo correto e consciente;
- a capacidade de enumeração de agrupamentos e de observação de padrões e sua utilização na resolução de problemas;
- a aptidão para reconhecer as diferenças entre agrupamentos ordenados e não ordenados e sua utilização na elaboração de estratégias de resolução;

- a competência na criação de estratégias de resolução de problemas independentes do uso de fórmulas;
- a capacidade de trabalhar em equipe de forma cooperativa;
- a competência na observação dos dados significativos para a resolução de um problema;
- o aprendizado com os próprios erros e/ou os erros dos demais colegas;
- a produção de pequenos textos argumentativos.

Na figura 17 são apresentados os registros das resoluções de um aluno das turmas de 8º ano que acertou todas as questões propostas no pós-teste utilizando o princípio multiplicativo de maneira impecável.

Figura 17: Registro das resoluções do pós-teste de um aluno do 8º ano


Pós-teste de Math.

data 09 • 11 • 2017

Nº:43 Nome: Pedro Heinrick R. f: 1806

1- 6×4×3
24×3
=72

R: Frederico poderá vestir-se de 72 formas diferentes.

2- 7×6×5×4×3×2×1
7×5×4×3×2
7×6×5×4×6
7×6×5×24
7×6×120
7×720
=5040

Resposta: 7 pessoas podem formar uma fila de 5040 formas diferentes.

3- 7×6
=42

R: Da pra formar 42 algarismos distintos.

4- 6×5×4 120|6
30×4 0 20
120

R: Da pra formar 20 triangulos.

Fonte: O Autor, 2017.

Afim de avaliar a proposta didático-pedagógica realizada em sala de aula foi solicitado aos alunos que respondessem livremente às perguntas abaixo.

1.	O que você aprendeu com o trabalho?
2.	Você gostou de realizá-lo? Por quê?

Sessenta e dois alunos das turmas de 8º ano e cinquenta e três alunos das turmas do 9º ano responderam ao questionário. As respostas ao primeiro questionamento podem ser observadas na tabela 7.

Tabela 7: Frequência absoluta de respostas dadas pelos alunos à pergunta "o que você aprendeu com o trabalho?"

Os alunos afirmaram terem aprendido a:	Frequência no 8º ano
Utilizar o princípio multiplicativo	4
Trabalhar em grupo	3
Resolver de uma forma mais rápida	9
Resolver o mesmo problema de maneiras diferentes	10
Desenvolver o raciocínio	10
Enumerar as possibilidades	2
Calcular o total de possibilidades	2
Muitas coisas	33
Outros	22

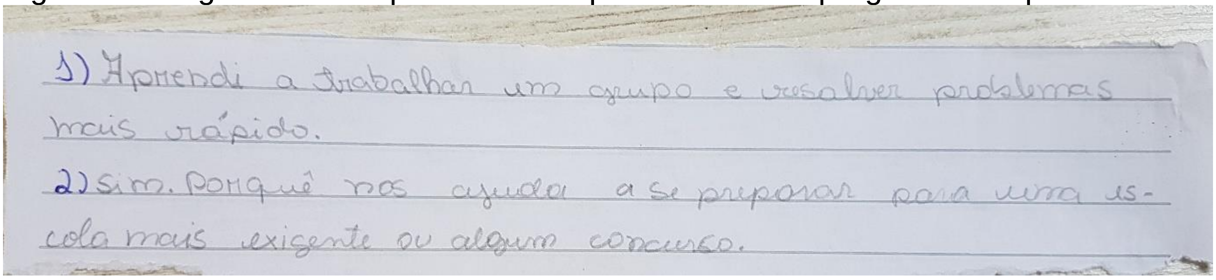
Fonte: O Autor, 2017.

Observando a tabela 7, verifica-se que uma parcela considerável de alunos afirmou ter desenvolvido o raciocínio, além de aprender a resolver as questões propostas de uma maneira mais rápida e de vários modos distintos. A incidência dessas respostas pode sinalizar o fato de considerarem que esses três tópicos são imprescindíveis para a resolução de problemas envolvendo cálculo combinatório.

Quando indagados a respeito das atividades realizadas, cerca de oitenta e três por cento dos alunos responderam que gostaram delas e enumeraram razões como: "*aprendi bastante*" (42), "*foi divertido*" (5), "*oportunidade de debater em grupo*" (6), " *a matéria ficou mais simples*" (11), "*fizemos algo diferente na aula*" (4), "*adoro matemática*" (6), "*a matéria é interessante*" (12), "*essa matéria cai em concursos*"(5), "*a gente precisa da Matemática pra tudo*" (3), "*ser paciente e pensar muito pra responder*" (1).

Nas figuras 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 e 26 são apresentados os registros das respostas dadas por alguns alunos das turmas de 8º e 9º anos às duas perguntas do questionário.

Figura 18: Registro das respostas dadas pelo aluno A às perguntas do questionário

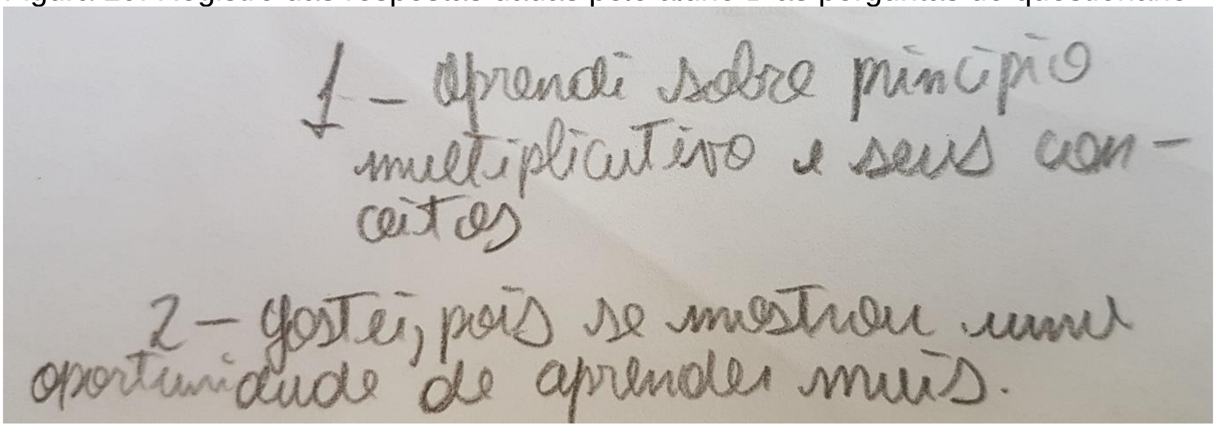


1) Aprendi a trabalhar em grupo e resolver problemas mais rápido.

2) Sim. Porquê nos ajuda a se preparar para uma escola mais exigente ou algum concurso.

Fonte: O Autor, 2017.

Figura 19: Registro das respostas dadas pelo aluno B às perguntas do questionário

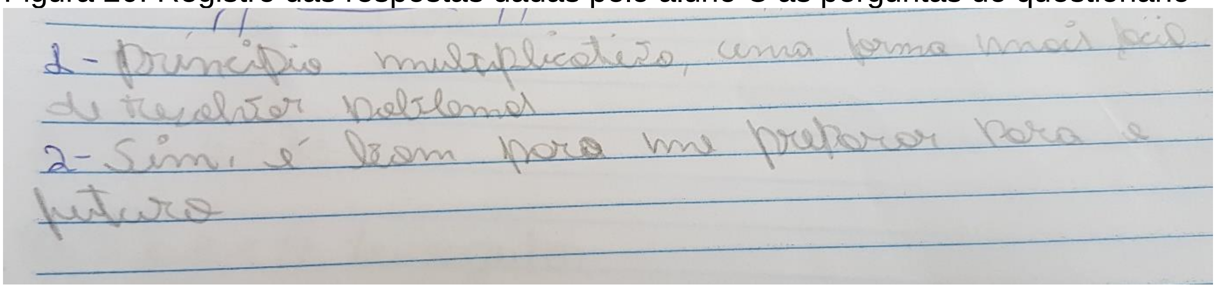


1 – Aprendi sobre princípio multiplicativo e seus conceitos

2 – Gostei, pois se mostrou uma oportunidade de aprender mais.

Fonte: O Autor, 2017.

Figura 20: Registro das respostas dadas pelo aluno C às perguntas do questionário

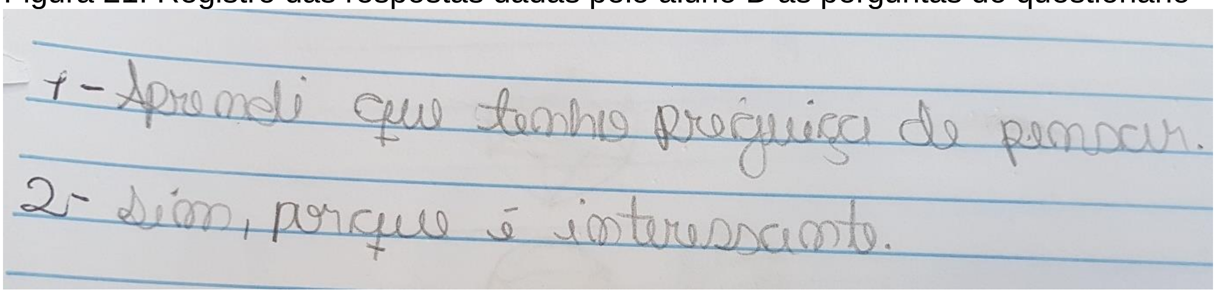


1- Princípio multiplicativo, uma forma mais fácil de resolver problemas

2- Sim, é bom para me preparar para o futuro

Fonte: O Autor, 2017.

Figura 21: Registro das respostas dadas pelo aluno D às perguntas do questionário

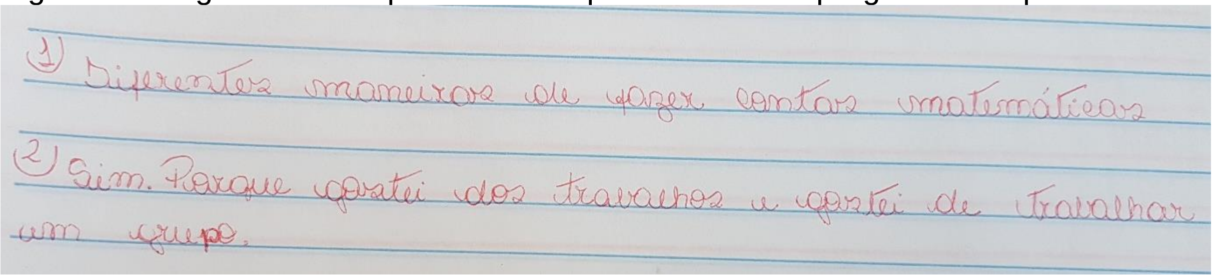


1- Aprendi que tenho preguiça de pensar.

2- Sim, porque é interessante.

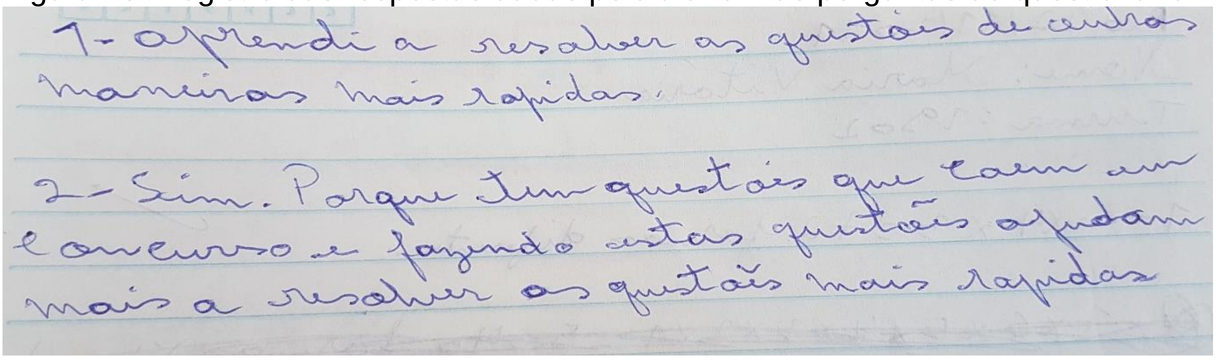
Fonte: O Autor, 2017.

Figura 22: Registro das respostas dadas pelo aluno E às perguntas do questionário


1) Diferentes maneiras de fazer contas matemáticas
2) Sim. Porque gostei dos travalhos e gostei de trabalhar em grupo.

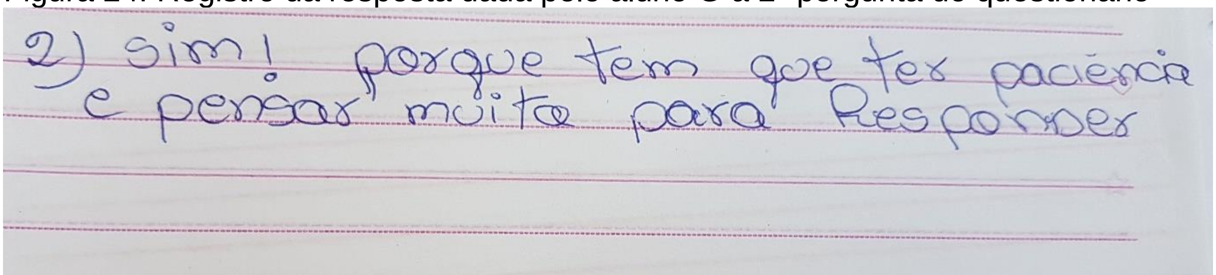
Fonte: O Autor, 2017.

Figura 23: Registro das respostas dadas pelo aluno F às perguntas do questionário


1- aprendi a resolver as questões de outras maneiras mais rapidas.
2- Sim. Porque tem questões que caem em concurso e fazendo estas questões ajudam mais a resolver as questões mais rapidas

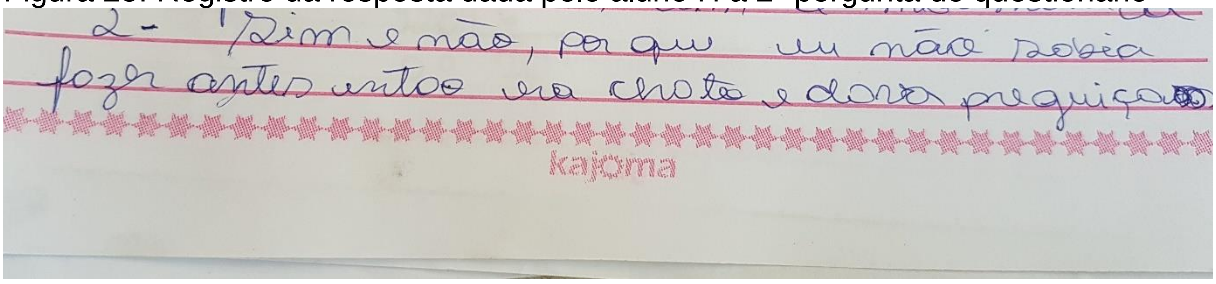
Fonte: O Autor, 2017.

Figura 24: Registro da resposta dada pelo aluno G à 2º pergunta do questionário


2) sim! porque tem que ter paciência e pensar muito para Responder

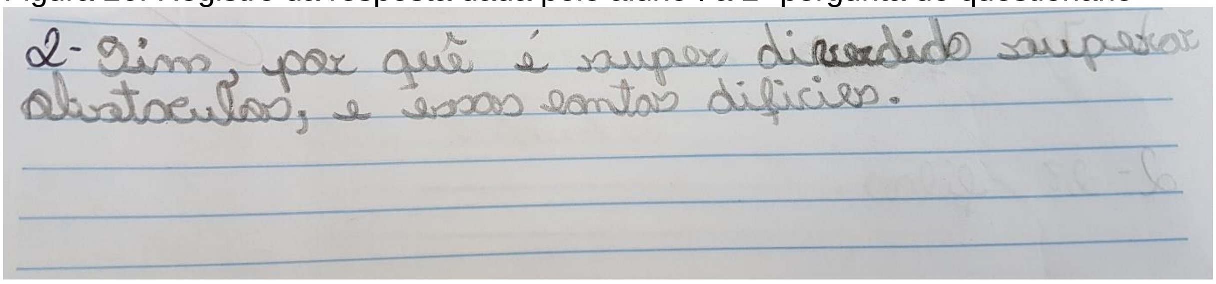
Fonte: O Autor, 2017.

Figura 25: Registro da resposta dada pelo aluno H à 2º pergunta do questionário


2- Sim e não, porque eu não sabia fazer antes entao era chato e dava preguiça.

Fonte: O Autor, 2017.

Figura 26: Registro da resposta dada pelo aluno I à 2º pergunta do questionário



Fonte: O Autor, 2017.

Oito alunos afirmaram que gostaram "*mais ou menos*" do trabalho e justificaram dizendo que tiveram dificuldade para aprender a interpretar os problemas ou identificar quando a ordem dentro do grupamento modifica o tipo de resolução.

Doze estudantes (cerca de 17% do total de alunos do 8º e 9º anos) afirmaram não ter gostado do trabalho e justificaram dizendo que tiveram dificuldades em interpretar os problemas e/ou preguiça de escrever todas as possibilidades.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho tem a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino e o problema como um ponto inicial a fim de que o docente desenvolva as ideias sobre um determinado conteúdo. O aluno se torna protagonista nesse processo e, desse modo, constroe os conceitos matemáticos durante a resolução do problema. Depois dessa etapa, tais conceitos são formalizados pelo professor.

Diversos autores que defendem essa metodologia são citados e algumas observações relevantes são pontuadas com a intenção de mostrar como uma aula pautada na metodologia de Resolução de Problemas pode ser elaborada.

Além disso, o conceito, ensino e aprendizagem da Análise Combinatória são abordados pelo fato desse tema geralmente apresentar uma grande dificuldade por parte dos alunos, visto que o uso demasiado de fórmulas desnecessárias e descontextualizadas pode resultar em um grande sentimento de insegurança durante as resoluções dos problemas abordados.

Com o intuito de ensinar a solucionar problemas, Polya e Morgado sugerem seus métodos, que são expostos, exemplificados e comentados nesse trabalho para uma melhor compreensão de suas ideias. Se tais métodos forem executados com primor, poderão tornar-se verdadeiros facilitadores na descoberta da solução do problema abordado.

A proposta didática, executada em forma de uma oficina, que foi realizada numa escola municipal da cidade do Rio de Janeiro é permeada de atividades que facilitam a construção dos conceitos da Análise Combinatória por meio da metodologia de Resolução de Problemas e essas atividades foram realizadas e avaliadas através da comparação dos resultados de um pré-teste e de um pós-teste.

As aulas ministradas durante a oficina são apresentadas, bem como seus objetivos, problemas apresentados, conceitos abordados, resoluções dos alunos e diversos comentários sobre os momentos das aulas e posteriores a elas. É importante mencionar que o emprego da Metodologia de Resolução de Problemas mostrou-se bastante eficaz durante a realização da proposta didática em sala de aula.

Analisando as diferenças entre os registros das resoluções do pré e do pós-teste pode-se concluir que houve contribuições significativas ao desenvolvimento do raciocínio combinatório e do trabalho em equipe, tanto nas turmas do 8º ano quanto nas turmas do 9º ano.

É possível perceber que o trabalho não foi tão eficiente quanto o esperado em relação ao desenvolvimento dos alunos da capacidade de resolver problemas envolvendo Análise Combinatória com agilidade. Talvez isso se deva ao fato de turmas do 8º e 9º anos estarem condicionadas a seguir estritamente certos padrões de resoluções apresentados pelo docente e não a criar suas próprias estratégias.

O trabalho foi bem aceito pela maioria dos alunos e a metodologia adotada foi amplamente aprovada. Entretanto, devemos considerar o fato de que cerca de 17% dos alunos afirmaram que o trabalho não foi interessante, tornando-se exaustivo e, consequentemente, desmotivante. Em vista disso, é preciso considerar essa observação e repensar a forma de apresentação dos registros numa nova oportunidade de estudo.

Após a realização de todas as etapas propostas pode-se concluir que a aplicação das atividades é viável e foi possível notar que o desempenho, tanto das turmas do 8º ano quanto das turmas do 9º ano, foi tecnicamente similar.

O cerne desse trabalho foi abordar os conceitos de Análise Combinatória de uma forma mais significativa tanto para os professores quanto para os alunos, abandonando o ensino tradicional que é baseado na simples memorização de fórmulas e também estimular os docentes da disciplina a refletir a respeito do modo de ensinar esse conteúdo. Aspiramos ter a oportunidade de continuar tal trabalho aplicando essa metodologia em outras escolas e examinando os resultados obtidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACHX, A.C.; POPPE, L.M.B.; TAVARES, R.N.O. **Prelúdio à Análise Combinatória**, Companhia Editora Nacional, 1975.

BATANERO, C. **Razonamiento combinatório em alumnos de secundaria**. Educación Matemática, 8(1), 26-39. 1997.

BERGE, C. **Principles of Combinatorics**. Tradução de John Sheehan. New York: Academic Press, 1971.

BRANDÃO, L.C.F.; GOMES, M.I.L.; BRITO, R.A.; SILVA, V.C.. **Resolução de problemas**: uma revisão na literatura. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, s/d. Disponível em: < *https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/66866/000871959.pdf?sequence=1*>. Acesso em: 30 de setembro de 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação, Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília: MEC, 1999, p.364.

BRASIL. Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Matemática). Brasília: A Secretaria, 1998.

______. Ensino Médio. Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: Ministério da Educação e Cultura, 2000.

COSTA, S.S.C.; MOREIRA, M.A. Resolução de Problemas I: diferença entre novatos e especialistas. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v1(2), pp. 176-192, 1996.

______. Resolução de Problemas II*:* propostas de metodologias didáticas. **Investigações em Ensino de Ciências**, V. 2, N. 1, p. 5-26, 1997.

D'AMBROSIO, B.S. **A evolução da resolução de problemas no currículo matemático** apud Seminário de resolução de problemas, 2008. Disponível em: <*http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos/completos/completo1.pdf*>. Acesso em: 26 de agosto de 2017.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à pratica. 10. ed. Campinas-SP: Papirus, 2003.

DANTE, L.R.. **Didática da Resolução de Problemas de matemática: 1º a 5º séries para estudantes do curso de magistério e professores do 1º grau**. 10. ed. São Paulo: Ática, 1998.

______. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 7º ed. São Paulo: Ática, 1995.

DUTRA, D.S.A.; VIANA, M.C.V. **Resolução de problemas matemáticos em ambientes virtuais de aprendizagem matemática na EAD.** Revista da Educação Matemática da UFOP, Vol. I, 2011. Disponível em: <http://www.cead.ufop.br/jornal/index.php/redumat/article/download/331/288>. Acesso em: 30 de setembro de 2017.

FERREIRA, D.C.; BRUNETTI, G.; RECH, M.D.T. **Resolução de problemas nas escolas indígenas**. Disponível em: < *http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/formacao_acao/2semestre2016/fa_dedi_indigena_roteiro.pdf*>. Acesso em: 30 de setembro de 2017.

FOMIN, D; GEKIN, S; ITENBERG, I; **Círculos Matemáticos: A Experiência Russa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. Excerto do prefácio da edição em inglês desse livro, por SAUL, Mark. 1996, p. V.

LUPPINACCI, V.L.M.; BOTIN, M.L.M. **Resolução de Problemas no Ensino de Matemática**. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004, p. 1-5.

MEDEIROS, C.F. **Modelos mentais e metáforas na resolução de problemas matemáticos verbais**. Disponível em: <file:///C:/Users/rober/Downloads/Dialnet-ModelosMentaisEMetaforasNaResolucaoDeProblemasMate-5274151.pdf>. Acesso em: 02 de outubro de 2017.

MORGADO, A.C.; LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E. **Temas e Problemas,** Editora SBM, 2016.

ONUCHIC, L. R. **Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas**. Boletim GEPEM. Rio de Janeiro, v. 55, p. 1 – 19, 2009.

______. **A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos e para onde iremos?** IV Jornada Nacional de Educação Matemática, 6 a 9 maio, Universidade de Passo Fundo, 2012. Disponível em: < http://anaisjem.upf.br/download/cmp-14-onuchic.pdf>. Acesso em: 14 de outubro de 2017.

ONUCHIC L.R.; ALLEVATO, N.S.G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M.A.V.; BORBA, M.(Org.). **Educação matemática: Pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004.

PINHEIRO, C.A.M. **O ensino de análise combinatória a partir de situações-problema**. 2008. 164 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Estado do Pará. Belém-PA, 2008.

PICHILIANI, M.C.; HIRATA, C.M. **Usando a modelagem colaborativa no aprendizado da UML,** 2006. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/wie/article/viewFile/906/892>. Acesso em: 30 de setembro de 2017.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

Revista do Professor de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática, nº10, primeiro semestre de 1987. Disponível em: <http://www.educacaopublica.rj.gov.br/biblioteca/matematica/0002.html>. Acesso em: 02 de outubro de 2017.

ROA, R.; NAVARRO-PELAYO, V.. **Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad**. In: Jornadas europeas de estadística, Ilhas Baleares, 10 e 11 de outubro de 2001.

RODRIGUES, A; MAGALHÃES, S.C. **A resolução de problemas nas aulas de Matemática: diagnosticando a prática pedagógica.** Artigo disponível em: <http://www.feol.com.br/sites/Revista%20eletronica/artigos/RESOLUCAO%20DE%20PROBLEMAS%20NAS%20AULAS%20DE%20MATEMATICA%20(Adriano%20Rodrigues%20e%20Shirlei%20Cristina%20Magalhaes).pdf>. Acesso em: 30 de setambro de 2017.

SAMPAIO, E.M.R. **O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) nas escolas de Campo Grande/MS: a influência na prática pedagógica segundo os professores de Matemática.** UCDB, Campo Grande, 2012. Dissertação disponível em: <http://site.ucdb.br/public/md-dissertacoes/10305-edilma-mota-rodrigues-sampaio.pdf>. Acesso em: 02 de outubro de 2017.

SOUZA, A.L.C.P.D. **Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas**. Dissertação de Mestrado, RIO CLARO> IGCE, UNESP, 2010.

STURM, W. **As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa**. Dissertação Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas – SP, 1999.

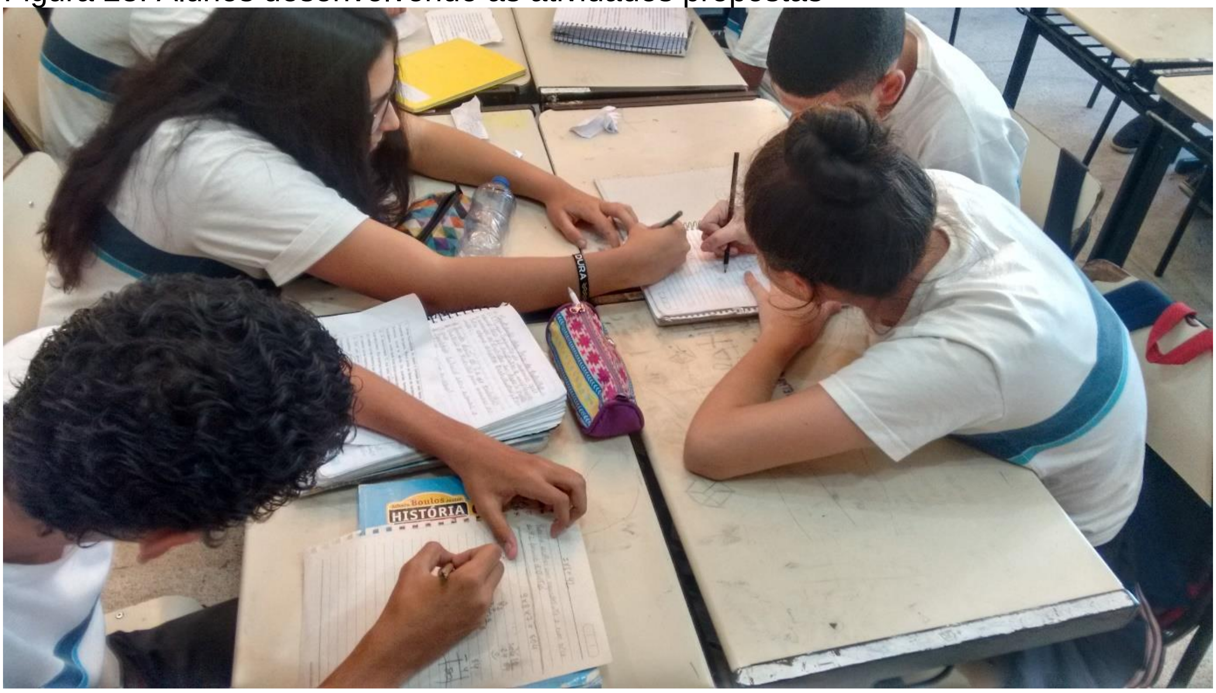
VASQUEZ, C.M.R.; NOGUTI, F.C.H. **Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica,** 2004**.** Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>. Acesso em: 14 de outubro de 2017.

APÊNDICE – FOTOS DA APLICAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICO-PEDAGÓGICA

Figura 27: Alunos desenvolvendo as atividades propostas

Fonte: O Autor, 2017.

Figura 28: Alunos desenvolvendo as atividades propostas

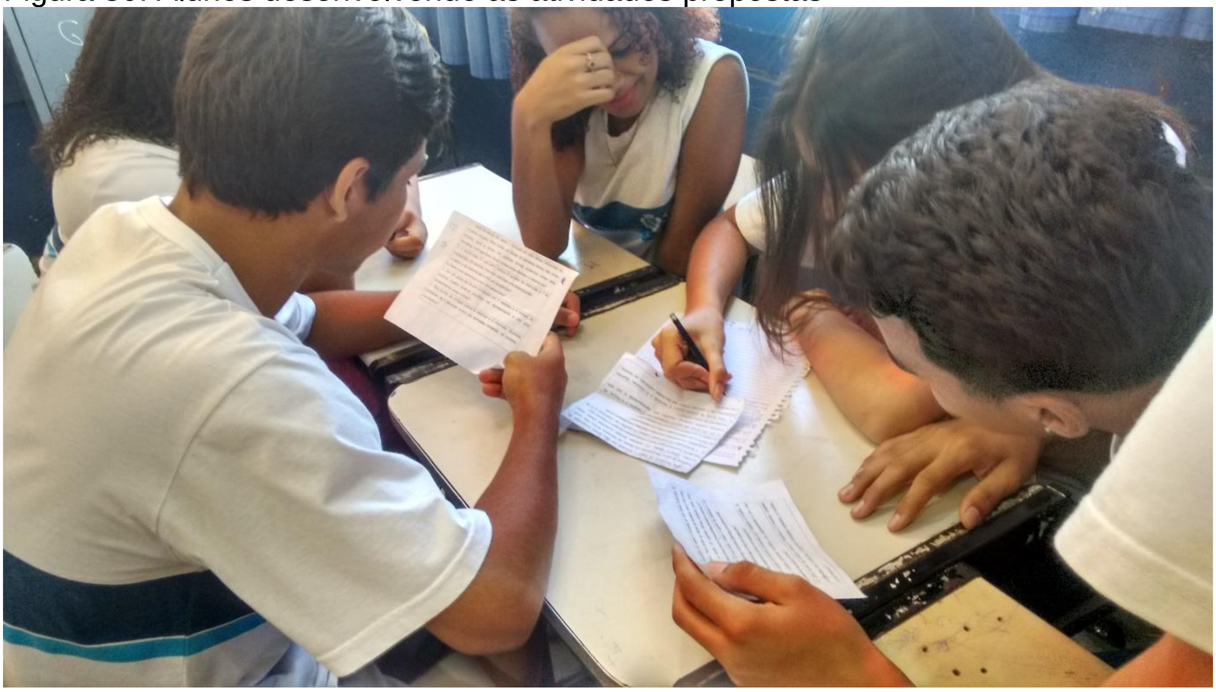


Fonte: O Autor, 2017.

Figura 29: Alunos desenvolvendo as atividades propostas

Fonte: O Autor, 2017.

Figura 30: Alunos desenvolvendo as atividades propostas



Fonte: O Autor, 2017.