



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Regiões Circulares e o número Pi

THIAGO VERÍSSIMO PEREIRA

Goiânia
2013

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Thiago Veríssimo Pereira				
E-mail:	verissimo.mat@gmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim		<input type="checkbox"/> Não		
Vínculo empregatício do autor					
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível Superior			Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	DF	CNPJ:	
Título:	Regiões circulares e o número pi				
Palavras-chave:	História da Matemática, Geometria, pi				
Título em outra língua:	Circular regions and the number pi				
Palavras-chave em outra língua:	Geometry, History, pi				
Área de concentração:	Matemática do ensino básico				
Data defesa:	(22/03/2013)				
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional				
Orientador (a):	Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz				
E-mail:	yunier.bello@gmail.com				
Co-orientador(a):*					
E-mail:					

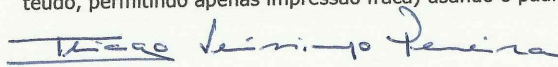
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.



Data: 22 / 03 / 2013

Assinatura do (a) autor (a)

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

THIAGO VERÍSSIMO PEREIRA

Regiões Circulares e o número Pi

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em matemática

Área de concentração: Matemática do ensino básico.

Orientador: Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz

Goiânia
2013

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFMG**

P436r Pereira, Thiago Veríssimo.
Regiões circulares e o número pi [manuscrito] / Thiago
Veríssimo Pereira. – 2013.
40 f. : il., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Bibliografia.

1. Matemática, História da. 2. Geometria. 3. Pi. I. Título.

CDU: 51:930.1


Thiago Veríssimo Pereira

Regiões Circulares e o Número Pi

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 22 de março de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Rui Seimetz
Universidade de Brasília-UnB



Profa. Dra. Ivonildes Ribeiro Martins
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Thiago Veríssimo Pereira

Licenciado em Matemática pela UnB. Professor da Secretaria de Educação do Distrito Federal e da rede particular desde 2009.

A Deus e a minha família, em especial minha esposa, que me deram apoio e força para chegar até aqui, e a meus professores que me inspiraram.

Agradecimentos

A Deus, minha família, em especial a minha esposa, aos professores, tutores e coordenadores do IME-UFG pelo empenho e dedicação mostrados ao longo do curso, em especial ao Prof. Dr. José Yunier Bello Cruz e aos colegas de turma pelo apoio e compreensão nos momentos difíceis. E ainda a meus antigos professores que me inspiraram.

Resumo

Pereira, Thiago Veríssimo . **Regiões Circulares e o número Pi** . Goiânia , 2013. 40p. Trabalho de conclusão de curso. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Ao longo da história em várias situações foi necessário determinar a área de um círculo e nesses momentos matemáticos foram levados a testar sua criatividade e suas habilidades. Várias foram as formas de determinar a área de uma região circular desenvolvidas até hoje. Muita teoria foi criada, direta ou indiretamente, ligada a esse problema como o problema da quadratura do círculo e o número π .

Palavras-chave

<História da Matemática, Geometria, π .>

Abstract

Pereira, Thiago Veríssimo . **Circular regions and the number π** . Goiânia , 2013. 40p. Completion of course work. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Throughout history in various situations was necessary to determine the area of a circle and those moments mathematicians were led to test their creativity and skills. There were several ways to determine the area of a circular region developed until today. Some theory was created, directly or indirectly, related to this issue as the problem of squaring the circle and the number π .

Keywords

<Geometry, History, π .>

Sumário

1	Introdução	10
2	O cálculo da área do círculo no decorrer da história	12
2.1	Egito	12
2.2	Babilônios e Chineses	14
2.3	Quadratura do Círculo	16
2.4	A impossibilidade da Quadratura do Círculo	19
3	Histórias e Curiosidades do número π	23
3.1	A origem do símbolo π	23
3.2	Aproximações do número π	23
3.3	Maneiras que π foi calculado	24
3.4	Uma breve cronologia do número π	25
3.5	Calculando π	26
4	Aplicações no ensino básico	31
4.1	Área de uma região circular pelo método egípcio	32
4.2	Método de Arquimedes para determinar o valor de π	32
4.3	Pode-se quadrar as Lunas de Hipócrates!	34
5	Considerações finais	36
	Referências Bibliográficas	38
A	Valores aproximados de π durante a história	39

Introdução

Esse trabalho tem por objetivo apresentar, a professores do ensino básico, o desenvolvimento histórico de conceitos que envolvem a área de uma região circular, que muitas vezes aparece relacionada ao quadrado e ao problema da quadratura do círculo, problemática que pode ser utilizada como uma proposta didática. O texto apresentará algumas resoluções aproximadas, outras exatas, de problemas que envolvem o cálculo de áreas de regiões circulares no decorrer da história, problemas e soluções que podem ser colocados como motivação para alunos do ensino básico.

Registros mostram que os povos antigos sabiam como calcular as áreas de figuras poligonais simples. São abundantes nos textos históricos exemplos de usos das fórmulas $A_R = b \cdot h$ e $A_T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$, ou ideias equivalentes, para o cálculo das áreas de retângulos e triângulos, respectivamente, onde b representa medida da base e h medida da altura da figura.

Os babilônios apresentaram muitas fórmulas para cálculo de áreas nas quais apresentavam o que são hoje chamados coeficientes. Por exemplo, o número $\frac{7}{8} = 0,875$ era utilizado como o coeficiente para a altura de um triângulo equilátero, isso significa que a altura de um triângulo equilátero era calculada como $\frac{7}{8}$ da base, aqui, naturalmente, o resultado é apenas aproximação como ilustra a Figura 1.1. O múltiplo correto seria $\frac{\sqrt{3}}{2}$, cuja aproximação, com três casas decimais, é 0,866.

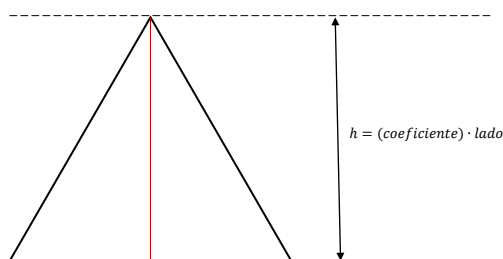


Figura 1.1

Muitas vezes os antigos escribas encontravam aproximações razoáveis para comprimentos e áreas. Serão discutidos alguns métodos desenvolvidos por certas civilizações

para cálculo da áreas de regiões circulares.

O Capítulo 2 apresenta alguns problemas históricos, dentre eles o método egípcio e o babilônico para o cálculo da áreas de regiões circulares e a Quadratura do Círculo.

O Capítulo 3 apresenta uma breve história do número π , a origem do símbolo utilizado para representá-lo, algumas aproximações, em especial o método de Arquimedes.

O Capítulo 4 trata de como apresentar esse tipo de conhecimento para alunos do ensino básico, comparar com o método utilizado hoje em dia. Sugere-se uma forma de apresentar ou consolidar esses conceitos para alunos do ensino básico.

Nos apêndices há tabelas com aproximações utilizadas para o número π no decorrer da história.

O cálculo da área do círculo no decorrer da história

2.1 Egito

Toda matemática conhecida do Antigo Egito está baseada em papiros que sobreviveram ao tempo e chegaram até nós. O papiro Rhind é o nome de um desses papiros e será citado a seguir.

Os problemas 48 e 50 do papiro Rhind; ver Figura 2.1, são muito interessantes do ponto de vista matemático e eles podem dar uma pista de como os egípcios chegaram a um método que podemos traduzir como uma fórmula para o cálculo da área do círculo.

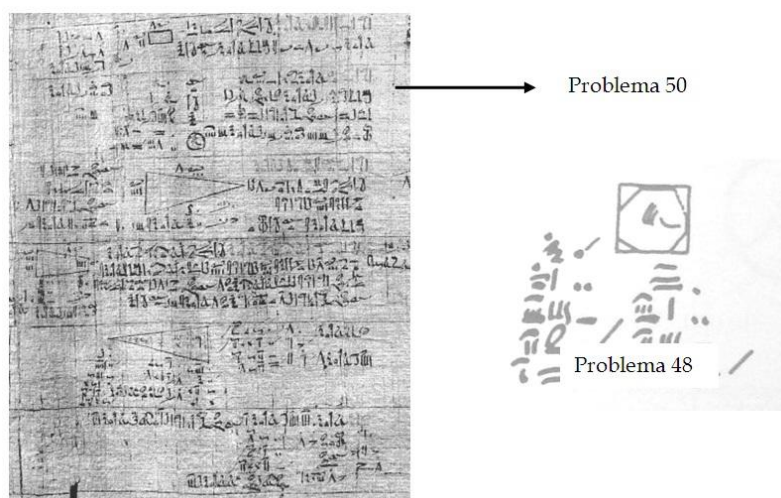


Figura 2.1: papiro Rhind

No problema 48 do Papiro Rhind propõe-se comparar a área do círculo com a área do quadrado circunscrito. E no problema 50 do mesmo papiro, calcula-se a área de uma região circular cuja solução apresentada pelo escriba é equivalente ao seguinte: "Subtrair do diâmetro sua nona parte e elevar o restante ao quadrado."

Não sabemos como os egípcios chegaram a esse método, uma possível explicação, ver mais em [2], é a que segue.

Justificativa

Tomando um círculo inscrito, de área A_c , em um quadrado como na Figura 2.2, temos que

$$A_c \cong A_{\text{octogono}}. \quad (2-1)$$

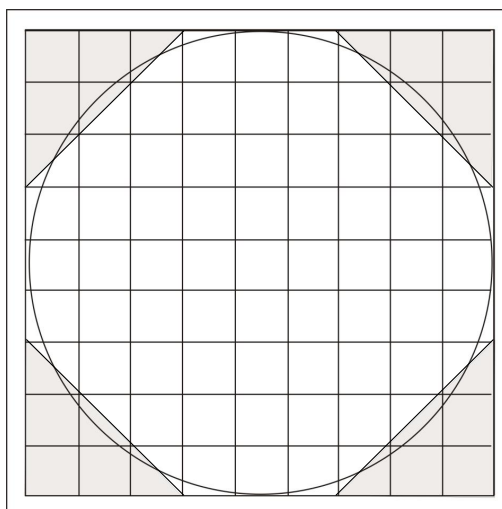


Figura 2.2

A partir de um quadrado idêntico ao da figura anterior, podemos retirar uma linha e uma coluna, como ilustra a Figura 2.3 a seguir.

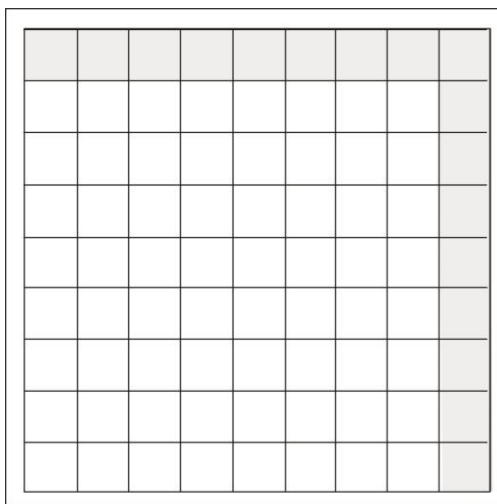


Figura 2.3

Dessa forma obtém-se um quadrado menor, cuja área A_q , é tal que

$$A_q \cong A_{\text{octogono}}, \quad (2-2)$$

logo, por (2-1) e (2-2),

$$A_c \cong A_q. \quad (2-3)$$

Tem-se que o lado do quadrado menor da Figura 2.3 é $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo construído na Figura 2.2, assim,

$$A_q = \left(\frac{8}{9}D\right)^2, \quad (2-4)$$

onde D é o diâmetro do círculo. Por (2-3) e (2-4) tem-se

$$A_c \cong \left(\frac{8}{9}D\right)^2. \quad (2-5)$$

Sendo r o raio da circunferência da Figura 2.2. A partir de (2-5) tem-se

$$A_c \cong \left(\frac{16}{9}D\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 (r)^2.$$

Fazendo as contas tem-se

$$\left(\frac{16}{9}\right)^2 \cong 3,1604.$$

como aproximação, de quatro casas decimais, para π .

2.2 Babilônios e Chineses

Os resultados dessa seção são comuns a essas duas civilizações. Os babilônios, e também os Chineses, estavam familiarizados com os conceitos de diâmetro, comprimento e área de um círculo e calculavam a área do círculo pela fórmula

$$A = \left(\frac{C}{2}\right) \left(\frac{D}{2}\right), \quad (2-6)$$

em que C representa o comprimento da circunferência que limita o círculo em questão e D seu diâmetro. Note que essa fórmula é equivalente a atual. Babilônios e Chineses usavam

também a fórmula

$$A = \left(\frac{C^2}{12} \right),$$

facilmente deduzida de (2-6) substituindo D por $\frac{C}{3}$ e que comparada com a fórmula atual, conduz à aproximação de $\pi = 3$, encontrada na tábua babilônica YBC7302.¹

Como esses povos encontraram o resultado (2-6)

$$A = \left(\frac{C}{2} \right) \left(\frac{D}{2} \right),$$

não sabe-se exatamente. Katz, em [2], apresenta duas possíveis justificativas:

A primeira justificativa é que eles tenham considerado o corte de um círculo em setores e sua reorganização em um retângulo aproximado, como sugere a Figura (2-4) a seguir.

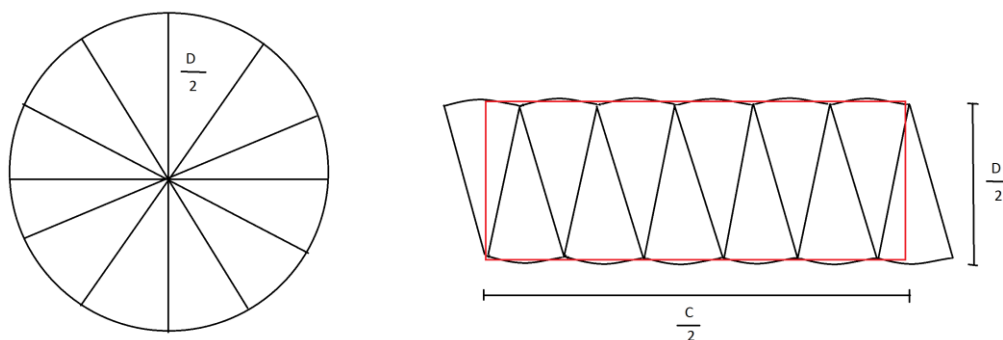


Figura 2.4

Como já conheciam o cálculo da área de um retângulo, A_R , fizeram $A_R = b \cdot h$ com $b = \left(\frac{C}{2} \right)$ e $h = \left(\frac{D}{2} \right)$, daí segue o resultado

$$A = \left(\frac{C}{2} \right) \left(\frac{D}{2} \right).$$

Essa justificativa pode gerar atividades para serem aplicadas em sala de aula.

"Essa explicação é conhecida dos professores de ensino fundamental e médio que a fazem com a utilização de material concreto. Eles tomam um círculo de

¹ Os babilônicos faziam seus registros em tábuas de argila, que os historiadores colocaram nomes como esse.

cartolina; dividem em 6 ou 8 partes iguais; cortam ao longo de um diâmetro dividindo o círculo em dois semicírculos; cortam cada semicírculo nos raios que aparecem da divisão deixando-os presos por uma porção bem pequena desses raios; abrem os dois semicírculos e tentam encaixá-los de modo a formarem um "retângulo"; veja em [1].

A **segunda justificativa** é através da construção de um círculo com círculos concêntricos cuja diferença entre as medidas dos raios fosse muito pequena. Se cortarmos esse conjunto de círculos do centro para a circunferência de diâmetro d e abrirmos, a figura formada é um triângulo isósceles cuja base é o comprimento da circunferência e a altura é o raio do círculo, como segue a Figura (2-5).

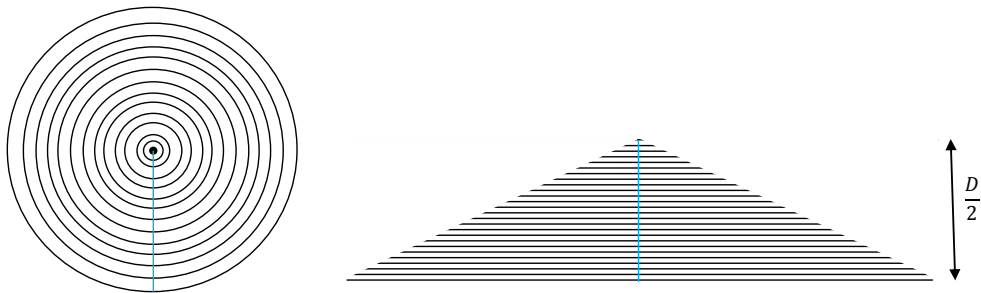


Figura 2.5

Como já conheciam o cálculo da área de um triângulo, A_T , fizeram $A_T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$ com $b = C$ e $h = \left(\frac{D}{2}\right)$, daí

$$A = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot C \cdot \left(\frac{D}{2}\right),$$

de onde novamente decorre

$$A = \left(\frac{C}{2}\right) \left(\frac{D}{2}\right).$$

2.3 Quadratura do Círculo

Há três problemas clássicos da matemática grega que foram extremamente influentes no desenvolvimento da matemática. São eles: a quadratura do Círculo, a duplicação do cubo e a trisseção de um ângulo, todos intimamente ligados. Esse texto

trata da quadratura do círculo, que consiste em encontrar um quadrado com a mesma área de um círculo dado.

O fascínio pela problema da quadratura esteve presente, direta ou indiretamente, em vários momentos da história e envolveu tanto matemáticos profissionais como amadores. Um dos mais antigos sobreviventes escritos matemáticos sobre o assunto é novamente o papiro de Rhind. O nome desse papiro é uma homenagem ao egiptólogo escocês Rhind Henry, que o comprou em Luxor em 1858. É um livro de cerca de 6 metros de comprimento e $\frac{1}{3}$ de um metro de largura. Escrito por volta de 1650 a.C. pelos Ahmes escriba que o copiou de um documento 200 anos mais velho. Isso fornece a data para o papiro original de cerca de 1850 a.C., mas alguns especialistas acreditam que o papiro de Rhind é baseado em um trabalho de 3400 a.C., aproximadamente.

O problema da quadratura do círculo na forma que pensamos hoje teve origem na matemática grega. No problema era dado um círculo, para a construção, com régua e compasso, de um quadrado de área igual ao círculo dado. É um fato notável os gregos não terem feito justificativas falsas da quadratura do círculo utilizando apenas régua e compasso. Infelizmente, mais tarde, matemáticos não seguiram o bom exemplo mostrado pelos gregos antigos e muitos alegaram incorretamente ter descoberto uma prova com régua e compasso da quadratura, inclusive matemáticos amadores produziram milhares de provas falsas atrás de fama.

A curva quadratriz, apresentada na Figura (2-6) a seguir resolve o problema da quadratura do círculo, ver mais em [10], mas, tal como determinado por Hípias, a curva é construída através de meios mecânicos, emitido por um movimento uniforme de uma linha de um tempo igual ao raio de rotação de um círculo, claramente essa curva não é feita com régua e compasso.

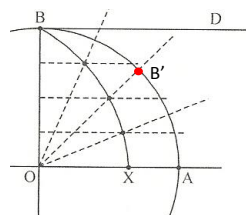


Figura 2.6: Geração da quadratriz.

Outra maneira de visualizar essa curva é quando $\overline{OB'}$ tiver girado $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}$, etc. do ângulo $A\hat{O}B$, \overline{BD} terá se deslocado, respectivamente, $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}$, etc. de \overline{OB} e a quadratriz é o lugar geométrico dos pontos comuns a $\overline{OB'}$ e \overline{OC} . Dessa maneira a quadratriz não toca o eixo horizontal, pois ali $\overline{OB'}$ e \overline{OA} coincidem.

Entretanto é possível provar que $OX = \frac{2R}{\pi}$, onde R é o raio da circunferência. Ao determinar OX seria possível, com régua e compasso, quadrar o círculo. Vamos ver isso com o auxílio da Figura 2.7.

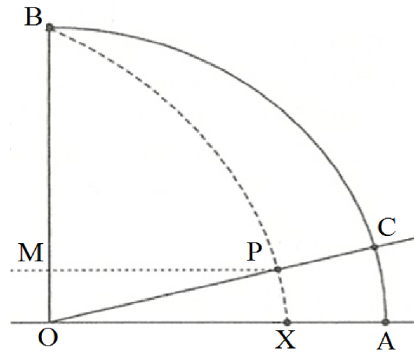


Figura 2.7: Determinação do ponto X.

Tomemos $OM = y$, $MP = x$, $OB = OA = r$ e $\text{med}(\widehat{A\hat{O}C}) = \theta$, com $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Como foi colocado nos parágrafos anteriores existe proporcionalidade entre os dois movimentos. Podemos escrever

$$\frac{y}{\theta} = k, \quad (2-7)$$

com k uma constante de proporcionalidade.

Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos $y = R$, substituindo em (2-7) obtemos:

$$k = \frac{2 \cdot R}{\pi}. \quad (2-8)$$

Por (2-7) e (2-8), conclui-se

$$y = \frac{2 \cdot R \cdot \theta}{\pi}. \quad (2-9)$$

Lembrando que em coordenadas polares $y = \rho \cdot \text{sen}(\theta)$, manipulando obtém-se

$$\rho = \frac{y}{\text{sen}(\theta)}. \quad (2-10)$$

Substituindo (2-9) em (2-10), obtém-se

$$\rho = \frac{2 \cdot R \cdot \theta}{\pi \cdot \text{sen}(\theta)}. \quad (2-11)$$

Quando $\theta \rightarrow 0$ em (2-11) obtém-se

$$\rho = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2 \cdot R \cdot \theta}{\pi \cdot \text{sen}(\theta)}.$$

Como

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2 \cdot R}{\pi} \cdot \frac{\theta}{\text{sen}(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2 \cdot R}{\pi} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\text{sen}(\theta)},$$

então temos

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2 \cdot R}{\pi} \cdot \frac{\theta}{\text{sen}(\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2 \cdot R}{\pi} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\text{sen}(\theta)} \\ &= \frac{2 \cdot R}{\pi} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\text{sen}(\theta)}.\end{aligned}\tag{2-12}$$

Como é conhecido do Cálculo:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\text{sen}(\theta)} = 1.\tag{2-13}$$

Portanto, de (2-12) e (2-13), concluímos que :

$$\rho = \frac{2 \cdot R}{\pi}$$

Observe que quando $\theta = 0$ tem-se $\rho = OX$, assim

$$OX = \frac{2 \cdot R}{\pi}.\tag{2-14}$$

A partir de (2-14) e dos métodos de construção apresentados na próxima seção é fácil construir π , e então resolver a quadratura do círculo.

Essa é uma solução da quadratura do círculo porém não nos moldes propostos no problema original de utilizar apenas régua e compasso, pois a quadratriz não é construtível com esses instrumentos.

A próxima seção trata da impossibilidade da quadratura do círculo com régua e compasso, que está relacionada com o fato de π ser transcendental ².

2.4 A impossibilidade da Quadratura do Círculo

Nessa parte o texto tenta, de uma maneira acessível, justificar a insolubilidade do problema da Quadratura do Círculo.

Antes de tratar da quadratura do círculo serão apresentadas três construções a serem utilizadas posteriormente.

Os resultados das duas primeiras construções decorrem do teorema de Tales. A primeira construção pode ser utilizada para determinar um segmento de medida $m \cdot n$ dados um segmento unitário, ou seja, com medida igual a uma unidade de comprimento,

²Um número é algébrico quando é solução de um polinômio com coeficientes racionais. Um número é chamado transcendente se não for algébrico.

um segmento de medida m e outro de medida n . A Figura 2.8 ilustra essa construção em que $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$.

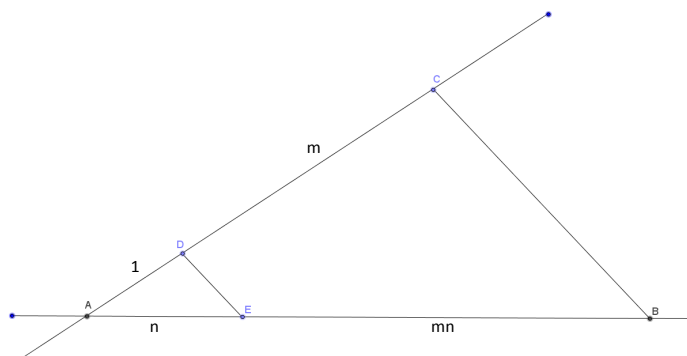


Figura 2.8: Obter um segmento de medida $m \cdot n$.

A segunda construção pode ser utilizada para determinar um segmento de medida $\frac{m}{n}$ dados um segmento unitário, um segmento de medida m e outro de medida n . A Figura 2.9 a seguir ilustra essa construção em que $\overline{DE} \parallel \overline{CB}$.

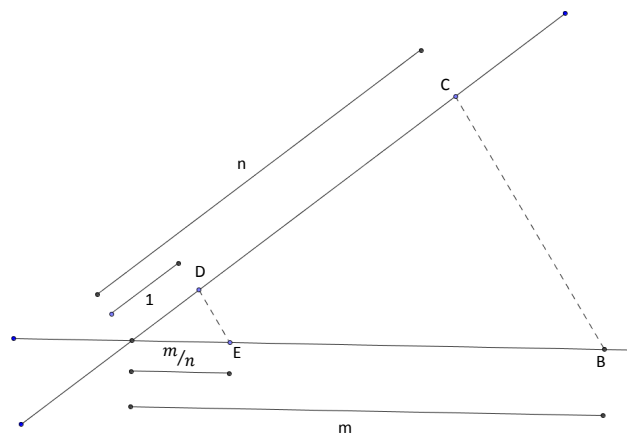


Figura 2.9: Obter um segmento de medida $\frac{m}{n}$.

A terceira construção pode ser utilizada para determinar um segmento de medida \sqrt{m} , dados um segmento unitário e um segmento de medida m .

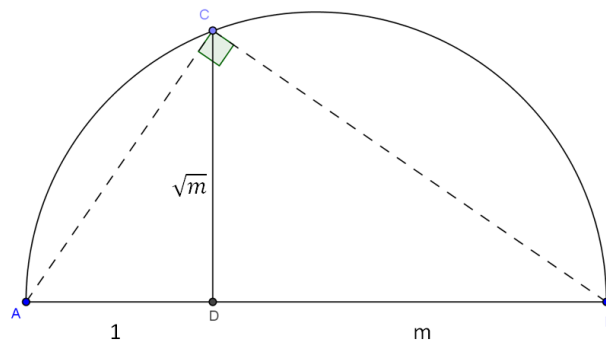


Figura 2.10: Obter um segmento de medida \sqrt{m} .

Essa última construção decorre de uma relação métrica no triângulo retângulo, que está relacionada com a média geométrica. Agora começaremos o assunto principal da seção.

Segundo G. Garbi, ver em [10], *Pierre Laurent Wantzel* (1814-1848), foi o primeiro a provar que a Quadratura do Círculo era impossível utilizando apenas régua e compasso. A estratégia de Wantzel foi tratar o problema algebricamente, onde a questão se tornou mais clara.

Primeiramente *qual significado algébrico de uma construção geométrica com régua e compasso?* Uma construção geométrica é um conjunto finito de etapas em que circunferências e retas são traçadas e pontos são determinados através de interseções desses elementos. Tais interseções podem ser de três tipos: reta com reta, reta com circunferência e circunferência com circunferência.

A interseção de duas retas, $r : ax + by + c = 0$ e $s : dx + ey + f = 0$ é a solução de um sistema de equações do primeiro grau em x e y , como (2-15), que segue:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases} \quad (2-15)$$

cuja solução, se existir, mostra x e y como o quociente entre duas expressões contendo, ambas, produtos, somas e subtrações de termos em que aparecem os parâmetros a, b, c, d, e e f , característicos das retas r e s .

A interseção entre uma reta $r : ax + by + c = 0$ e uma circunferência β de centro (x_c, y_c) e raio r , corresponde a solução de um sistema formado por uma equação do primeiro grau, que corresponde a reta e uma do segundo grau, que corresponde a circunferência, como (2-16) abaixo. A solução, se existir, apresenta x e y exclusivamente

por meio de operações de soma, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas aplicadas a termos formados pelos parâmetros que caracterizam as curvas.

$$\begin{cases} ax + by + c & = 0 \\ (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 & = r^2. \end{cases} \quad (2-16)$$

A interseção entre duas circunferências, digamos β , de centro (x_β, y_β) e raio r , e γ , de centro (x_γ, y_γ) e raio R , se expressa algebricamente por um sistema análogo, (2-17).

$$\begin{cases} (x - x_\beta)^2 + (y - y_\beta)^2 & = r^2 \\ (x - x_\gamma)^2 + (y - y_\gamma)^2 & = R^2. \end{cases} \quad (2-17)$$

Isto é o mesmo que dizer que, se um elemento de uma figura é construtível com régua e compasso, os números que o definem derivam dos dados do problema através de uma quantidade finita de operações de soma, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas. A recíproca também é verdadeira: se os números que definem um elemento de uma figura derivam dos dados do problema através de uma quantidade finita daquelas operações, o elemento é construtível com régua e compasso porque com tais instrumentos é possível somar, subtrair, multiplicar, dividir e extrair raízes quadradas, tal qual as construções colocadas no início da seção. Uma consequência disso é que todos os números que encontram-se como soluções desses problemas são algébricos, isto é, construtível, por isso a prova da transcendência de π mostra a impossibilidade da quadratura do círculo, para mais informações; ver em [10].

Para provar que π é transcendente foi necessário provar primeiro que e é transcendente. Esta prova foi concluída em primeiro lugar por Charles Hermite, em 1873. Após esta prova Hermite foi desafiado a provar que π também era transcendente, o que não ocorreu. O método usado por Hermite para demonstrar a transcendência de e foi estendida por Lindemann, em 1882, para demonstrar a transcendência do número π . O matemático brasileiro Djairo Guedes de Figueiredo, em seu livro *Números Irracionais e Transcendentes*; veja em [11], apresenta uma demonstração da transcendência de π baseada na realizada por R. Moritz, a qual, por sua vez, foi inspirada na prova de Hurwitz, para a transcendência de e .

Histórias e Curiosidades do número π

3.1 A origem do símbolo π

Em 1647, o matemático inglês William Oughtred escreveu $\frac{\delta}{\pi}$ para designar a razão entre o diâmetro de uma circunferência e seu perímetro. Neste caso, δ , "delta" em grego, é a primeira letra de "diâmetro", e π é a letra inicial de "perímetro" e "periferia". Isaac Barrow, outro matemático inglês, usou os mesmos símbolos em 1664. O matemático escocês David Gregory escreveu $\frac{\pi}{\rho}$ para designar a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu raio, ρ é a letra grega "rô", que é a inicial de "raio".

Em 1706, o matemático galês William Jones usou π para denotar a razão entre o perímetro de uma circunferência e seu diâmetro, num trabalho que apresentava o resultado do cálculo de John Machin para o valor de π com 100 casas decimais.

No início da década de 1730, Euler usou os símbolos p e c , e a história poderia ter sido diferente, mas em 1736 ele mudou de ideia e passou a usar o símbolo π em seu sentido moderno. O símbolo começou a ser usado de maneira mais geral depois de 1748, quando Euler publicou *Introdução à análise do infinito*; ver mais em [7].

3.2 Aproximações do número π

Uma conhecida aproximação para π é $\frac{22}{7}$, que é conveniente para os cálculos escolares por ser bonita e simples mas está correta apenas até a segunda casa decimal. A seguir uma aproximação para $\frac{22}{7}$ com 12 casas decimais. $3,142857142857$. Uma aproximação com doze casas decimais segue:

$$\frac{355}{113} \cong 3,141592920353,$$

correta até a sexta casa decimal. A representação decimal de $\frac{22}{7}$ fica repetindo a mesma sequência de algarismos, 142857, indefinidamente. Para um aluno do ensino básico pode parecer que o decimal de $\frac{355}{113}$ não se repete, pois seu período tem 112 casas decimais! Se fizermos o cálculo inteiro, vamos obter

$$\frac{355}{113} = 3,1415929203539823008849557522123893805309734513274336283185840707964601769911504424778761061946902654867256637168\dots,$$

e depois disso os algarismos se repetem, começando imediatamente após a vírgula decimal.

3.3 Maneiras que π foi calculado

Uma das características extremamente fascinantes de π é sua tendência a surgir em uma enorme variedade de fórmulas. Em geral, esse número surge em séries infinitas, produtos infinitos e frações contínuas. Seguem alguns exemplos.

A fórmula a seguir foi uma das primeiras expressões de π , descoberta por François Viète em 1593.

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots$$

Esta foi descoberta por John Wallis, em 1655:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \dots$$

Por volta de 1675, James Gregory e Gottfried Leibniz descobriram concomitantemente que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Essa fórmula converge muito lentamente, não sendo portanto muito útil para calcular π ; isto é, uma boa aproximação requer muitíssimos termos. Mas séries bastante próximas foram usadas para descobrir muitas centenas de algarismos de π nos séculos XVIII e XIX. No século XVII, lorde Brouncker descobriu uma "fração contínua":

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}$$

E Euler descobriu várias igualdades como:

$$\pi^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} \dots$$

Entre outras tantas, pode-se citar que em 1997, David Bailey, Peter Borwein e Simon Plouf encontraram uma fórmula sem precedentes. Uma fórmula que permite calcular um algarismo específico de π sem calcularmos os algarismos anteriores. O único detalhe é que não são algarismos decimais, são hexadecimais, a partir dos quais também podemos calcular um algarismo na base 8, 4 ou binário; veja mais em [6].

3.4 Uma breve cronologia do número π

Existem vários textos que utilizam 3 como valor aproximado para π , até mesmo alguns trechos da bíblia cristã. Não é um valor muito preciso, nem mesmo naquela época, os egípcios utilizavam valores mais precisos cronologicamente antes que esse valor da bíblia. Um motivo para o uso desse valor seria praticidade. Os primeiros valores de π , o primeiro cálculo teórico, parece ter sido realizado por Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.). Ele obteve a aproximação

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

É válido ressaltar a sofisticação no uso de desigualdades nessa aproximação. Arquimedes sabia que π não é igual a $\frac{22}{7}$, e não fez nenhuma pretensão de ter descoberto o valor exato. Se tomarmos sua melhor estimativa por meio da média de seus dois limites obtemos 3,1418, um erro menor que 0,001.

Arquimedes observou que quanto maior o número de lados de um polígono regular inscrito P ou circunscrito P' , a uma circunferência β , mais próximo o perímetro de cada um desses polígonos está do comprimento da circunferência. Denotando o perímetro de um polígono A por $per(A)$ e o diâmetro da circunferência β por D , pode-se escrever a ideia de Arquimedes pela relação:

$$\frac{per(P)}{D} < \pi < \frac{per(P')}{D}.$$

Fazendo o número de lados de P e P' muito grande se obtém uma aproximação cada vez melhor de π . Os registros encontrados mostram que Arquimedes parou com polígonos de 96 lados. É importante perceber que Arquimedes não teve as vantagens de uma notação algébrica atual e por isso, seu feito foi de estupenda imaginação e notável façanha de cálculo. Não deve ser dito que ele parou com polígonos de 96 lados, mas o quão longe ele chegou nas aproximações com polígonos de 96 lados; ver mais em [9]. Algumas outras pessoas continuaram esses cálculos e encontraram aproximações, algumas estão na Tabela 1, a seguir.

Ptolomeu	(150 d.C.)	3 casas decimais
Zu Chongzhi	(430-501 d.C.)	6 casas decimais
al-Khwarizmi	(800 d.C.)	3 casas decimais
al-Kashi	(1430 d.C.)	14 casas decimais
Viète	(1540-1603)	9 casas decimais
Roomen	(1561-1615)	17 casas decimais
Van Ceulen	(1600)	35 casas decimais

Figura 3.1: Tabela 1

Uma adaptação do método de arquimedes será colocada na próxima seção.

Muitas pessoas buscaram aproximações para π . O apêndice traz uma tabela com algumas dessas aproximações no decorrer da história.

Em 1761 Lambert prova que π é irracional. Alguns anos depois foi demonstrado por Lindemann que π é transcendental, uma consequência dessa característica do número π foi colocada no capítulo anterior.

3.5 Calculando π

Vamos nessa seção calcular o valor do número π utilizando uma adaptação da ideia de Arquimedes. Antes disso vamos ver algumas fórmulas que serão utilizadas no decorrer da seção.

Para as Figuras 3.2, 3.3 e 3.4 considere as circunferências com raio r e centro O .

Na Figura 3.2 considere \overline{AB} o lado de um polígono regular de n lados, cada um com medida l_n , dessa forma a_n representa o apótema desse polígono.

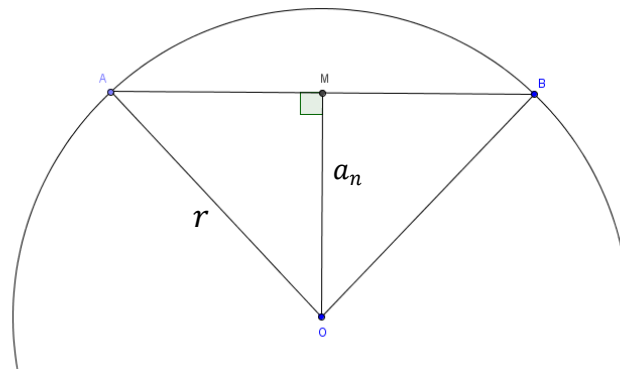


Figura 3.2

Aplicando pitágoras no triângulo $\triangle OMA$, tem-se $r^2 = (a_n)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2$, isolando a_n obtém-se:

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot r^2 - (l_n)^2}. \quad (3-1)$$

Na figura 3.3,

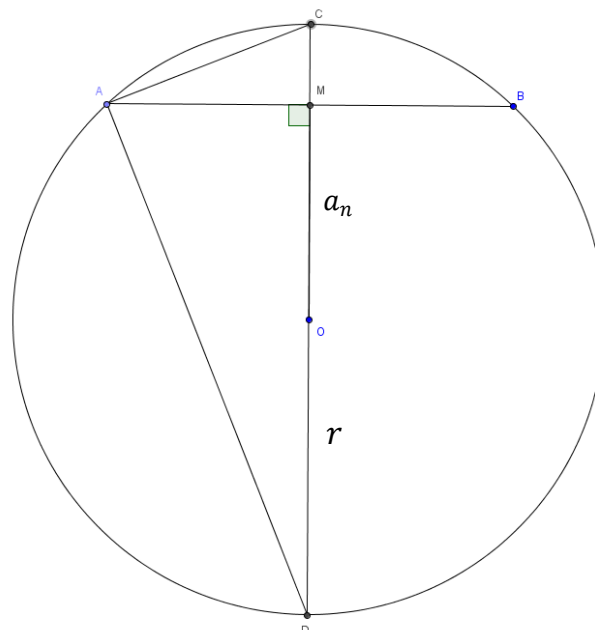


Figura 3.3

note que AC é lado de um polígono regular de $2n$ lados e $AC^2 = CD \cdot CM$, que fazendo as devidas substituições temos

$$(l_{2n})^2 = 2r \cdot (r - OM), \quad (3-2)$$

mas como $OM = a_n$, de (3.1) e (3.2) decorre:

$$(l_{2n}) = \sqrt{2 \cdot r^2 - r \cdot \sqrt{(4 \cdot r^2 - (l_n)^2)}}. \quad (3-3)$$

Na Figura 3.4,

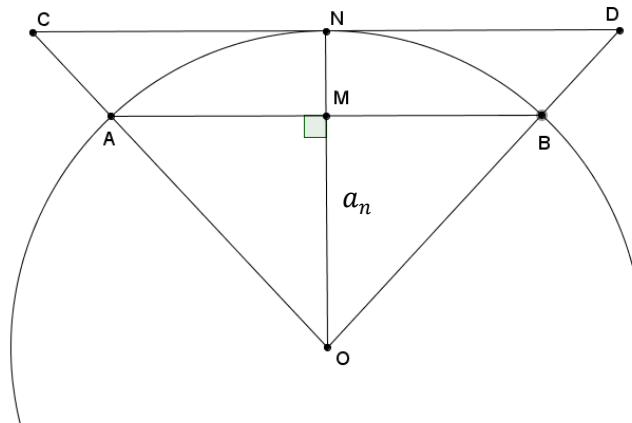


Figura 3.4

\overline{AB} representa o lado de um polígono regular inscrito, de n lados, cada um com medida l_n e \overline{CD} representa o lado de um polígono regular circunscrito, de n lados, cada um com medida L_n .

Por semelhança de triângulos $\frac{CD}{AB} = \frac{ON}{OM}$, mas como $AB = l_n$, $CD = L_n$, $OM = a_n$ e $ON = r$ tem-se:

$$\frac{L_n}{l_n} = \frac{r}{a_n}, \quad (3-4)$$

portanto

$$L_n = \frac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}. \quad (3-5)$$

Começando os cálculos para determinar o valor de π . Da fórmula $C = 2\pi r$, resulta:

$$\pi = \frac{C}{2r}. \quad (3-6)$$

Logo para obter o valor de π basta determinar o comprimento C de uma circunferência e seu raio r . Arquimedes fixou o raio e calculou aproximações de C .

Supondo $r = \frac{1}{2}$ em (4-1), obtém-se $\pi = C$, isto é, o valor de π igual ao comprimento de uma circunferência de raio $\frac{1}{2}$.

Logo, os perímetros dos polígonos regulares inscritos nesta circunferência são valores aproximados de π , por falta, e os perímetros dos polígonos regulares circunscritos a mesma circunferência são valores aproximados de π , por excesso. Para calcular tais perímetros, retomemos as Fórmulas (3-3) e (3-5) :

$$l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_{2n}^2}},$$

para os polígonos inscritos, e

$$L_n = \frac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l_{2n}^2}},$$

para os polígonos circunscritos.

Como nesses cálculos está se utilizando $r = \frac{1}{2}$ de (3-3) e (3-5) obtém-se, respectivamente:

$$l_{2n} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - l_{2n}^2} \right)}, \quad (3-7)$$

para os inscritos, e

$$L_n = \frac{l_n}{\sqrt{1 - l_n^2}}, \quad (3-8)$$

para os circunscritos.

Seja o perímetro dos polígonos regulares de $2n$ lados inscritos representado por p_{2n} , e o perímetro dos polígonos regulares de n lados circunscritos representado por P_{2n} . Observe que $p_{2n} = 2n \cdot l_{2n}$, $P_n = n \cdot L_n$ e $l_n = \frac{1}{n} \cdot p_n$, obtém-se, de (3-7) e (3-8), respectivamente, (3-9) e (3-10), que seguem.

$$p_{2n} = \sqrt{2n \left(n - \sqrt{n^2 - p_n^2} \right)}, \quad (3-9)$$

para o perímetro dos inscritos, e

$$P_n = \frac{np_n}{\sqrt{n^2 - p_n^2}}, \quad (3-10)$$

para o perímetro dos circunscritos.

Partindo, por exemplo, do hexágono regular, $p_6 = 6r = 3$ e aplicando recursivamente as Fórmulas (4-6) e (4-7) obtém-se os valores de $p_{12}, p_{24}, p_{48}, p_{96}, \dots$ e $P_6, P_{12}, P_{24}, P_{48}, P_{96}, \dots$

A Tabela 2, a seguir, apresenta os resultados obtidos, utilizando cinco casas decimais, onde n representa o número de lados do polígono.

Número de lados	p_n	P_n
6	3,00000	3,46411
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188
...

Tabela 2

Arquimedes fez as contas até polígonos de 96 lados, e depois tomou a média aritmética dos valores encontrados, isso resulta, com cinco casas decimais em:

$$\frac{3,14103 + 3,14272}{2} = 3,141875.$$

Continuando os cálculos, a aproximação torna-se mais refinada.

Aplicações no ensino básico

Alguns dos métodos e resoluções colocados até agora no texto, além de vários outros problemas históricos, podem se transformar em atividades para sala de aula. Como um problema de um Sulbasutra Indiano¹, que pede para construir um quadrado com área igual a soma das áreas de dois outros quadrados dados. A solução dada era: dados os quadrados ABCD e EFGH marcar um ponto Q sobre EF tal que $EQ = AB$. Então HQ é o lado do quadrado procurado. Ver Figura 4-1.

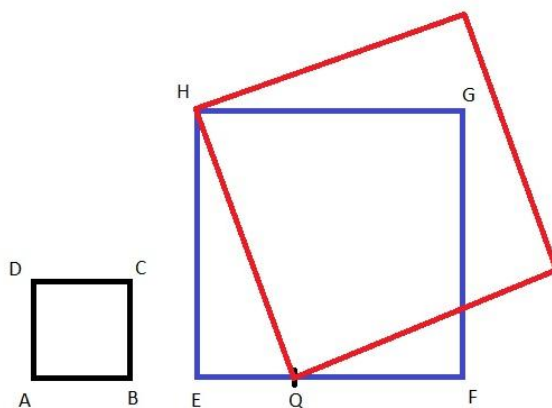


Figura 4.1

Nos tópicos que seguem serão apresentadas sugestões de atividades para aluno do ensino básico relacionadas com assuntos tratados em capítulos anteriores desse trabalho.

¹Os Shulbasutras fazem parte de apêndices de textos religiosos e tratavam da construção de altares. Eles são as únicas fontes de conhecimento de matemática indiana da antiguidade.

4.1 Área de uma região circular pelo método egípcio

Alguns problemas do papiro Rhind tratam da área do círculo.

Na solução de problemas que envolvia o cálculo da área de uma região circular o escriba resolvia da seguinte maneira: "Subtraia do diâmetro sua nona parte e eleve o restante ao quadrado. Esta é sua área."

Não sabemos como os egípcios chegaram a esse método será que podemos escrever uma fórmula que retrate as inscrições do papiro? Comparando com a fórmula atual será que elas são parecidas? Usando a Figura 4-2 a seguir tente responder essas questões.

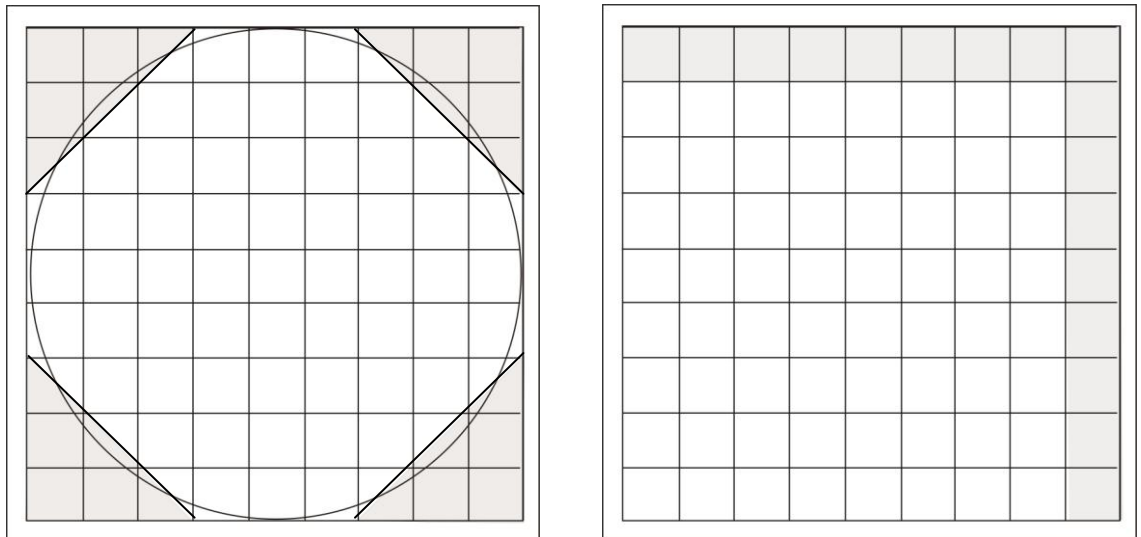


Figura 4.2: Figuras de apoio para resolução do problema proposto

É possível apresentar essa atividade com material concreto para que o aluno observe que $A_q \cong A_{octogono}$, e a partir daí concluir, com orientação do professor, os resultados apresentados no início do Capítulo 2.

4.2 Método de Arquimedes para determinar o valor de π

Apresentar ou deduzir as fórmulas apresentadas no Capítulo 3.5 *Calculando π* colocar para os alunos as idéias de Arquimedes, que foram apresentadas no capítulo anterior e serão resumidas nesse tópico.

Da fórmula $C = 2\pi r$, resulta:

$$\pi = \frac{C}{2r}, \quad (4-1)$$

logo para obter o valor de π basta determinar o comprimento C de uma circunferência e seu raio r . Arquimedes fixou o raio e calculou aproximações de C .

Supondo $r = \frac{1}{2}$ de (4-1) obtem-se $\pi = C$, isto é, o valor de π igual ao comprimento de uma circunferência de raio $\frac{1}{2}$.

Logo, os perímetros dos polígonos regulares inscritos nesta circunferência são valores aproximados de π , por falta, e os perímetros dos polígonos regulares circunscritos a mesma circunferência são valores aproximados de π , por excesso.

Para calcular tais perímetros, tomemos as fórmulas

$$p_{2n} = \sqrt{2n \left(n - \sqrt{n^2 - p_n^2} \right)} \quad (4-2)$$

para o perímetro dos polígonos inscritos, e

$$P_n = \frac{np_n}{\sqrt{n^2 - p_n^2}} \quad (4-3)$$

para o perímetro dos polígonos circunscritos.

Partindo, por exemplo, do hexágono regular, $p_6 = 6 \cdot r = 3$ peça para os alunos aplicar recursivamente as Fórmulas (4-2) e (4-3) para obter os valores de $p_{12}, p_{24}, p_{48}, p_{96}, \dots$ e $P_6, P_{12}, P_{24}, P_{48}, P_{96}, \dots$, preenchendo uma tabela como a que segue.

Número de lados	p_n	P_n
6	3,00000	3,46411
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188
...

Tabela 4.1

Sugere-se utilizar alguma ferramenta computacional, como planilhas eletrônicas, para que o número n possa ser bem grande. É bom citar que Arquimedes fez as contas até polígonos de 96 lados, e obteve o valor:

$$\frac{3,14103 + 3,14272}{2} = 3,141875.$$

4.3 Pode-se quadrar as Lunas de Hipócrates!

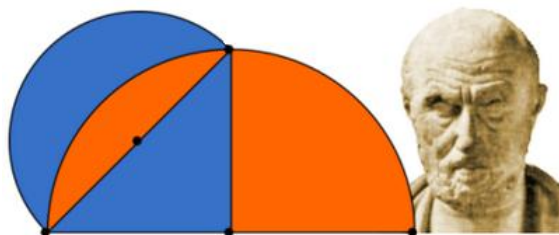


Figura 4.3

Hipócrates de Chios (470-410 a.C.), escreveu um livro intitulado *Elementos* para ligar todo o conhecimento matemático de seu tempo. Incluído nos livros de Euclides, intitulado com o mesmo nome. Aqui, a tendência de abstração e sistematização da geometria encontrou forte impulso. Baseado em um sistema de axiomas ou verdades a priori, que tinha caráter intuitivo, usado pela primeira vez o esquema conhecido Premissa-Teorema-prova. Introduziu a designação de formas geométricas das letras e do método da prova por absurdo. Foi o primeiro a calcular áreas de regiões limitadas por curvas e relação ao problema da quadratura do círculo.

As chamadas Lúnas de Hipócrates despertaram muitas curiosidades pois pode-se quadrá-las.

Considere a Figura 4.5 a seguir e os pontos A, B, C, D, E, F e G os semicírculos ADCFB, AEC e CGB. Note que o AEC está dividida em duas regiões M e N, assim como CGB está dividida nas regiões P e Q e o triângulo ABC é retângulo em C.

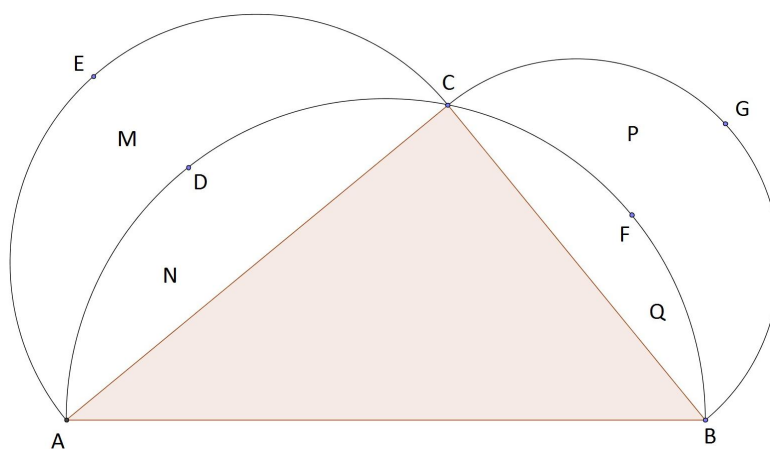


Figura 4.4: Lúnas de Hipócrates

Tomando $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, pelo teorema de Pitágoras temos

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

multiplicando ambos os membros por $\frac{\pi}{8}$ obtém-se

$$a^2 \frac{\pi}{8} + b^2 \frac{\pi}{8} = c^2 \frac{\pi}{8},$$

por meio de uma pequena manipulação algébrica temos

$$\frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi \left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2},$$

ou seja, a área de um semicírculo de diâmetro c é igual a soma das áreas dos semicírculos de diâmetros a e b .

Note que cada um desses semicírculos está dividido em duas regiões, o de diâmetro a nas regiões P e Q e o de diâmetro b nas regiões M e N. Assim pode-se escrever

$$A_{ADCFB} = A_M + A_N + A_P + A_Q. \quad (4-4)$$

Observe que o semicírculo de diâmetro c está dividido em três partes pode-se escrever sua área da seguinte forma:

$$A_{ADCFB} = A_{ABC} + A_N + A_Q. \quad (4-5)$$

De (4-1) e (4-2) obtém-se

$$A_{ABC} + A_N + A_Q = A_M + A_N + A_P + A_Q$$

resolvendo a equação obtem-se:

$$A_{ABC} = A_M + A_P,$$

ou seja, a área das duas lunas somadas é igual a área do triângulo ABC, logo as lunas são quadráveis.

Considerações finais

Nesse trabalho foram apresentados alguns exemplos de problemas de relevância histórica, como por exemplo calcular áreas de regiões circulares e determinar o valor da constante que hoje chamamos π . Os egípcios calculavam a área de uma região circular da seguinte maneira:

Subtrair do diâmetro sua nona parte e elevar o restante ao quadrado.

que pode ser traduzida pela fórmula:

$$A_c \cong \left(\frac{8}{9}D\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 (r)^2,$$

a qual traz uma aproximação razoável do valor de π quando comparada com a fórmula atual.

Além desse método há também a fórmula babilônica $A = \left(\frac{C}{2}\right) \left(\frac{D}{2}\right)$, exata, ou a variação $A = \left(\frac{C^2}{12}\right)$, usando a aproximação $\pi = 3$.

Um outro problema relacionado com o cálculo da área do círculo é a quadratura do círculo. Esse problema consiste em encontrar um quadrado de mesma área de um círculo dado utilizando apenas régua e compasso. Uma solução apresentada utiliza a quadratriz, uma curva que resolve o problema mas não é uma curva construtível com régua e compasso. E foi apresentado também o problema da quadratura das Lúnas, um problema solúvel com régua e compasso. Todos esses problemas foram apresentados e discutidos mostrando uma opção de estratégia para ser aplicada em sala de aula do ensino básico.

A seguir há igualdades em que o número π aparece como, por exemplo, as aproximações, com doze casas decimais:

$$\frac{22}{7} \cong 3,142857142857$$

e

$$\frac{355}{113} \cong 3,141592920353,$$

a igualdade

$$\pi^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} \dots,$$

que foi uma das muitas descobertas de Euler. E, a fração continua

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}},$$

entre outras.

Outra ideia para aproximar π foi dada por Arquimedes por meio do perímetro de polígonos inscritos e circunscritos a uma mesma circunferência.

Todas esses métodos e aproximações podem gerar atividades interessantes para o ensino básico, motivação principal desse trabalho. Conhecer o desenvolvimento histórico da matemática propicia ao professor maneiras mais ricas de abordar e de escolher uma estratégia pedagógica conveniente para abordagem em sala de aula.

Referências Bibliográficas

- [1] *GASPAR, M.T.J. Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores* . Universidade Estadual Paulista, Campus de Rio Claro, 2003
- [2] *KATZ, V.J A History of Mathematics: an introduction* . Addison-Wesley educational publishers, New York , 1998.
- [3] *BOYER , Carl Benjamin. História da Matemática*. Edgard Blucher, São Paulo, 1996.
- [4] *The Inter-IREM Commission. History of Mathematics Histories of Problems*. Ellipses, Paris, 1997.
- [5] *FILHO, Edgar de Alencar. Lições de Geometria Plana*. Livraria Nobel, São Paulo, 1966
- [6] *STEWART, Ian. Almanaque das curiosidades matemáticas*. Record, Rio de Janeiro, 2009
- [7] *STEWART, Ian. Incríveis passatempos matemáticos*. Record, Rio de Janeiro, 2010
- [8] *J J O'Connor and E F Robertson. A chronology of pi*. Disponível em http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pi_chronology.html Último acesso em janeiro de 2013.
- [9] *J J O'Connor and E F Robertson. A history of Pi*. Disponível em http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Pi_chronology.html. Último acesso em janeiro de 2013.
- [10] *Garbi, Gilberto G. A Rainha das Ciências*. Livraria da Física, São Paulo , 2006.
- [11] *Djairo Guedes de Figueiredo Números Irracionais e Transcendentes*. ED-SBM. 2002.

Valores aproximados de π durante a história

	Matemático	Data	Número de casas decimais corretas da aproximação
1	Rhind papiro	2000 a.C.	1
2	Arquimedes	250 a.C.	3
3	Vitrúvio	20 a.C.	1
4	Chang Hong	130	1
5	Ptolomeu	150	3
6	Wang Fan	250	1
7	Liu Hui	263	5
8,	Zu Chongzhi	480	7
9	Aryabhata	499	4
10	Brahmagupta	640	1
11	Al-Khwarizmi	800	4
12	Fibonacci	1220	3
13	Madhava	1400	11
14	Al-Kashi	1430	14
15	Otho	1573	6
16	Viète	1593	9
17	Romanus	1593	15
18	Van Ceulen	1596	20
19	Van Ceulen	1596	35
20	Newton	1665	16
21	Forte	1699	71
22	Kowa Seki	1700	10
23	Kamata	1730	25
24	Machin	1706	100
25	De Lagny	1719	112
26	Takebe	1723	41
27	Matsunaga	1739	50
28	von Vega	1794	136
29	Rutherford	1824	152
30	Strassnitzky, Dase	1844	200
31	Clausen	1847	248
32	Lehmann	1853	261
33	Rutherford	1853	440
34	Shanks	1874	527
35	Ferguson	1946	620

Figura A.1: Cálculos não computacionais

Matemático	Data	Locais	Tipo de computador
Ferguson	Janeiro 1947	710	Calculadora de mesa
Ferguson, Wrench	Setembro 1947	808	Calculadora de mesa
Smith, Wrench	1949	1120	Calculadora de mesa
Reitwiesner et al.	1949	2037	ENIAC
Nicholson, Jeanel	1954	3092	NORAC
Felton	1957	7480	PEGASUS
Genuys	Janeiro 1958	10000	IBM 704
Felton	Mai 1958	10021	PEGASUS
Guilloud	1959	16167	IBM 704
Shanks, Wrench	1961	100265	IBM 7090
Guilloud, Filliatre	1966	250000	IBM 7030
Guilloud, Dichampt	1967	500000	CDC 6600
Guilloud, Bouyer	1973	1001250	CDC 7600
Miyoshi, Kanada	1981	2000036	FACOM M-200
Guilloud	1982	2000050	
Tamura	1982	2097144	MELCOM 900II
Tamura, Kanada	1982	4194288	HITACHI M-280H
Tamura, Kanada	1982	8388576	HITACHI M-280H
Kanada, Yoshino, Tamura	1982	16777206	HITACHI M-280H
Ushiro, Kanada	Outubro 1983	10013395	HITACHI S-810/20
Gosper	Outubro 1985	17526200	Symbolics 3670
Colherão	Janeiro 1986	29360111	CRAY-2
Kanada, Tamura	Setembro 1986	33554414	HITACHI S-810/20
Kanada, Tamura	Outubro 1986	67108839	HITACHI S-810/20
Kanada, Tamura, Kubo	Janeiro 1987	134217700	NEC SX-2
Kanada, Tamura	Janeiro 1988	201326551	HITACHI S-820/80
Chudnovskys	Mai 1989	480000000	
Chudnovskys	Junho 1989	525229270	
Kanada, Tamura	Jul 1989	536870898	
Chudnovskys	Agosto 1989	1011196691	
Kanada, Tamura	Nov 1989	1073741799	
Chudnovskys	Agosto 1991	2260000000	
Chudnovskys	Mai 1994	4044000000	
Kanada, Tamura	Junho 1995	3221225466	
Kanada	Agosto 1995	4294967286	
Kanada	Outubro 1995	6442450938	
Kanada, Takahashi	Agosto 1997	51539600000	HITACHI SR2201
Kanada, Takahashi	Setembro 1999	206158430000	HITACHI SR8000

Figura A.2: Cálculos computacionais. Ver mais em [8]