Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciência e Tecnologia

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

O Número de Ouro na Educação Básica

Alessandro José da Silva

Orientador: Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann

São José dos Campos
Novembro, 2018

Título: *O Número de Ouro na Educação Básica*
Dissertação apresentada ao Instituto de Ciência e Tecnologia da UNIFESP, campus São José dos Campos/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

São José dos Campos
Novembro, 2018

Silva, Alessandro José

O Número de Ouro na Educação Básica, Alessandro José da Silva – São José dos Campos, 2018.

LXXII, 72f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

The Golden Number in Basic Education

1. Número de Ouro. 2. Sequência de Fibonacci. 3. Educação básica.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:
Prof. Dr. Eduardo Antonelli

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:
Prof. Dr. Angelo Calil Bianchi

ALESSANDRO JOSÉ DA SILVA

O NÚMERO DE OURO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Presidente da banca: Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann

Banca examinadora:

Prof. Dr. Robson Silva

Prof. Dr. Thiago Castilho de Mello

Prof. Dr. Michael Macedo Diniz

Data da Defesa: 23 de Novembro de 2018

A Geometria tem dois grandes tesouros. Um é o Tesouro de Pitágoras. O outro, a divisão de uma linha nas razões extrema e média. O primeiro podemos comparar a uma medida de ouro. O segundo podemos chamar de uma joia preciosa.

JOHANNES KEPLER (1571-1630)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por essa oportunidade que surgiu em minha vida.

À minha esposa, pela compreensão e dedicação.

Aos colegas do PROFMAT, pela ajuda e companheirismo.

Aos professores, pelo empenho.

Aos meus amigos de trabalho, por contribuírem para a elaboração do horário que permitiu a minha frequência no Mestrado.

Ao professor Dr. Pedro Levit Kaufmann, pelo seu tempo dedicado a esse trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro sem o qual muitos não conseguiriam frequentar as aulas e realizar o sonho de ser Mestre.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre o Número de Ouro, contemplando sua história, definição e algumas de suas propriedades. A investigação sobre a origem do Número de Ouro indica estreita ligação com grandes obras arquitetônicas, como a Pirâmide do Egito e o Partenon revelando, também, a conexão existente entre o Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci. Apresenta os métodos algébricos e geométricos de se obter o segmento, o retângulo e a espiral áurea utilizando a régua e compasso. Mostra que o Número de Ouro se manifesta na natureza, arquitetura e no corpo humano. Expõe atividades relacionadas ao Número de Ouro, voltadas ao ensino básico. Aponta que a temática estudada se revela como uma boa oportunidade de ser trabalhada em sala de aula, enaltecendo a beleza da matemática e fomentando a interdisciplinaridade despertando, assim, o interesse dos alunos.

Palavras-chave: Número de Ouro, Sequência de Fibonacci, Educação básica.

ABSTRACT

This work presents a study on the Golden Number, contemplating its history, definition and some of its properties. Research about the origin of the Golden Number indicates close connection with large architectural works such as the Pyramid of Egypt and the Parthenon, revealing the connection with the Golden Number and the Fibonacci Sequence. It presents the algebraic and geometric methods of obtaining the segment, the rectangle and the golden spiral using the ruler and compass. It displays that the Golden Number manifests itself in nature, architecture and in the human body. It exhibits activities related to the Golden Number, focused on basic education. It points out that the subject studied reveals itself as a good opportunity to be worked in the classroom, praising the beauty of mathematics and fostering interdisciplinarity, thus awakening students' interest.

Keywords: Golden Number, Fibonacci Sequence, Basic Education.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo apresentar a fundamentação teórica e histórica do Número de Ouro, com intuito de obter informações que serviram como base para realização da proposta didática; demonstrar como o Número de Ouro está presente nas situações cotidianas, nas mais diversas formas, em especial na natureza, na arquitetura, no corpo humano; ilustrar e tornar viável sua aplicação em sala de aula, em especial na Educação Básica, através de atividades simples e de fácil aplicação.

No primeiro capítulo, apresentamos um pouco da história do Número de Ouro: suas primeiras aparições, sua representação simbólica; a definição de Euclides de Alexandria; o seu valor numérico e algumas de suas propriedades.

No segundo capítulo, estão presentes ferramentas fundamentais para demonstrar alguns de nossos resultados matemáticos.

No terceiro capítulo, apresentamos a definição da Sequência de Fibonacci, fórmula de Binet e a forte ligação dos números de Fibonacci e a razão áurea.

No quarto capítulo, são tratados os aspectos algébrico e geométrico do número de ouro. Inicialmente, foi obtida a equação do segundo grau da proporção áurea que, manipulada, gerou a equação geral da proporção áurea. Foi construído, geometricamente, o segmento, retângulo e a espiral áurea, com régua e compasso e, por fim o método de Euclides para dividir um segmento em média e extrema razão.

No quinto capítulo, abordamos sobre a relação existente entre o Número de Ouro e o pentagrama.

No sexto capítulo, verificamos a presença do Número de Ouro, na antiga bandeira do Chile; na natureza: na árvore genealógica do Zangão; na espiral encontrada na distribuição das sementes do girassol e na distribuição das pétalas de uma pinha. Em todos esses casos encontramos números que pertencem à Sequência de Fibonacci. Também encontramos o Número de Ouro na arquitetura: Na obra arquitetônica - Chapel de Notre Dame du Haut, Paternon e na Catedral de Notre Dame. No corpo humano, veremos que o Número de Ouro aparece de várias maneiras.

No sétimo capítulo, estão presentes algumas sugestões de atividades para a sala de aula, voltadas para a Educação básica.

O nosso objetivo não era apresentar todas as informações conhecidas a respeito do Número de Ouro, mas sim agregar as informações que julgamos serem centrais, despontando alternativas de atividades aplicáveis no Ensino, as quais possibilitem um novo olhar para a matemática.

1

O NÚMERO DE OURO

As Ciências e as artes buscam compreender a natureza, identificar certos padrões e conduzi-los para nosso dia a dia. Na antiga Grécia, quando um retângulo tinha a largura e o comprimento numa determinada proporção, ele assemelhava ser mais agradável aos olhos, exibindo certa harmonia estética. A essa harmonia foi agregada uma espécie de valor magnífico, conhecido como "Razão áurea", o qual pode ser visto em vários elementos da natureza e também em estátuas e projetos arquitetônicos da Antiguidade - o Número de Ouro é encontrado nas pirâmides e no Papiro de Rhind. Não pode ser escrito como a razão de dois números inteiros, logo ele é irracional, talvez o primeiro número irracional da história, precedente, até mesmo, ao mais famoso de todos eles, o π (pi). O Número de Ouro é representado pela letra grega Φ (Phi), devido ao fato do escultor grego Fídias (Phidias) utilizá-lo em muitos de seus trabalhos, no século V A.C..

1.1 A HISTÓRIA DO NÚMERO DE OURO

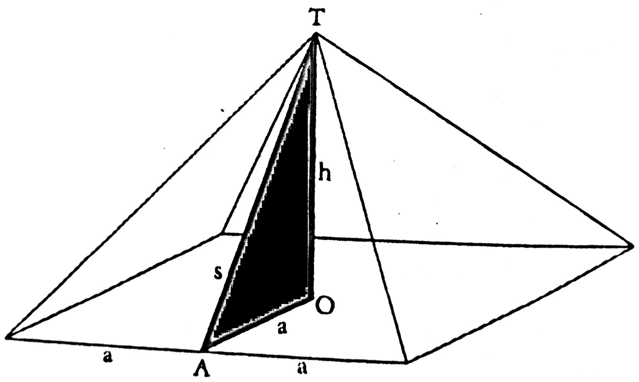


Figura 1: Pirâmide de base quadrada

No cotidiano, utilizamos a expressão *proporção* ou para a relação comparativa entre partes de coisas com respeito a tamanho (um quadro de 50 cm de comprimento por 30 cm de largura), ou quantidade (um quilo de farinha para cada dois ovos). Na matemática, o termo *proporção* é utilizado para descrever a igualdade entre duas razões (equivalências entre razões) do tipo: dez está para cinco, assim como oito está para quatro, expressas na mesma grandeza, ou seja, na mesma unidade: metro por metro, litro por litro, quilograma por quilograma. A razão áurea nos oferece uma interessante mistura das duas acepções.

Segundo Contador [2], existe uma lenda, descrita por Heródoto, em que as grandes pirâmides do Egito foram construídas de modo que a área de uma das faces inclinadas é igual ao quadrado de sua altura. Vamos raciocinar em cima dessa hipótese.

Seja a pirâmide (Figura 1), cuja base é um quadrado de lado $2a$, altura h, e altura da face s. A área S da face é dada por:

$$S = \frac{2.a.s}{2} \Longrightarrow S = a.s \ logo \ a.s = h^2.$$

Consideremos $\overline{OT} = h$ a altura da pirâmide e $\overline{AO}$ o apótema da base quadrada, temos que $A\hat{O}T = 90\,^{\circ}$, então, o triângulo AOT é retângulo em Ô.

Por Pitágoras, temos

$$h^2 = s^2 - a^2;$$

assim,

$$a.s = s^2 - a^2 \Longrightarrow s.(s-a) = a^2.$$

A grande pirâmide de Quéops tem base com lado igual a 233,16 m e altura igual a 148,3 m, daí temos:

$$s^2 = a^2 + h^2 \Longrightarrow s^2 = (\tfrac{233{,}16}{2})^2 + 148,3^2 \Longrightarrow s = 188,56 \text{ m}.$$

Assim:

$$\tfrac{s}{a} = \tfrac{188{,}64}{116{,}58} = 1,6174.$$

Considerando - se o desgaste da altura desde a sua construção podemos considerar essa relação é igual a $\mathbf{\Phi}$, cujo valor é mencionado nessa seção.

Depois dessas deduções, é interessante uma comparação com um fato histórico. A grande pirâmide de Quéops de Giza foi construída, por volta de 4750 A.C., com uma altura superior a 148 metros, seu ângulo de inclinação é 51° 52'. A primeira pirâmide construída, próximo a Medumi, possui exatamente o mesmo ângulo, e as outras duas grandes pirâmides de Giza, construídas por volta de 4600 A.C., possui ângulos de inclinação de 53°10' e 51°10'. Esses números podem ser meras coincidências mas, se não forem, podemos afirmar que os egípcios, por volta de 5000 A .C., já conheciam a relação áurea.

De acordo com Zahn [10], aproximadamente em 1650 A.C., no *Papiro de Rhind*, Figura 2, encontram-se uns dos primeiros registros sobre a razão áurea. Documento egípcio de

5,5m de comprimento por 0,32m de largura, datado aproximadamente, no ano de 1650 A.C.. Esse documento contém 85 problemas copiados de um trabalho mais antigo ainda, por um escriba chamado Ahmes. Consta nele uma citação de uma Razão Sagrada que, possivelmente, trata-se da Razão Áurea.

Figura 2: Papiro de Rhind

Segundo Livio [7], a primeira definição clara do que mais tarde se tornou conhecida como a Razão Áurea foi dada, por volta de 300 A.C., por Euclides de Alexandria [1] , fundador da geometria como sistema dedutivo formalizado. Definiu-se uma proporção proveniente de uma simples divisão de uma linha no que ele chamou de sua "razão extrema e média". Em suas palavras:

"Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor (Figura 3)".

Figura 3: Definição de Euclides

De acordo com a definição, temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Essa igualdade entre razões dá origem a um número irracional [2] , conhecido como o Número de Ouro, Razão Áurea, Secção Áurea, Proporção de Ouro, termos que serão utili-

[1] É conhecido como Euclides de Alexandria, porque foi chamado para lá ensinar matemática. Presume-se que tivesse estudado com os discípulos de Platão, se não na própria Academia. Sua obra *"Os Elementos"* dominou o ensino de geometria, por mais de dois milênios. Sabe-se pouco sobe a vida de Euclides, nenhum lugar de nascimento é associado ao seu nome.(Fonte[1])

[2] Número irracional é um número não racional. Para os Pitagóricos, toda a natureza poderia ser representada por números mas quando o triângulo retângulo, cujos catetos são iguais a 1, gerou uma hipotenusa igual a $\sqrt{2}$, essa estranha diagonal podia ser traçada mas não medida. Com o passar do tempo, a este resultado foi dado o nome de *número irracional*, justamente pelo fato de fugir do raciocínio. (Fonte[2])

zados neste trabalho, pois esses são os nomes, frequentemente, encontrados na literatura matemática.

No decorrer deste trabalho veremos calculado o valor da Razão Áurea , cujo valor é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Diz-se uma história que, no século V A.C., quando o matemático grego Hipasos de Metaponto [3] descobriu que a Razão Áurea é um número que não é inteiro (como os familiares 1, 2, 3...), e nem razão de dois números inteiros (como as frações $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$, conhecidos coletivamente como *números racionais*). Esse fato deixou chocados os outros seguidores do famoso matemático Pitágoras (os pitagóricos). Essa descoberta de que existiam números como a Razão Áurea, que continuam para sempre sem exibir qualquer repetição ou padrão, causou uma verdadeira crise filosófica. O fato de a Razão Áurea não poder ser expressa como uma fração (como um número racional) significa que a razão entre os dois comprimentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, na Figura 3, não pode ser expressa como uma fração. Em outras palavras, por mais que procuremos, jamais encontraremos uma medida cujo valor, multiplicado por um número natural, digamos por 31, coincida com a medida de $\overline{AC}$, e multiplicado por 19 coincida com a de $\overline{CB}$. Dois comprimentos com essa propriedade são chamados de *incomensuráveis*. A descoberta de que a Razão Áurea é um número irracional era, ao mesmo tempo, a descoberta da existência de pares de segmentos incomensuráveis.

De acordo com Livio [7]:

> Muitos pesquisadores [...], sugerem que os Pitagóricos foram os primeiros a descobrir a Razão Áurea e a incomensurabilidade. Esses historiadores da Matemática afirmavam que a preocupação pitagórica com o pentagrama e o pentágono, combinada com o conhecimento geométrico que havia no meio do século V A.C., tornou plausível que os pitagóricos, e, em particular Hipaso de Metaponto, tenham descoberto a Razão Áurea e, através dela, a incomensurabilidade.

Segundo Livio [7], o símbolo utilizado para representar a Razão Áurea é a letra grega tau (τ) que significa *"corte"* ou *"seção"*. Porém, no Século XX, Mark Barr [4], matemático americano concedeu a razão o nome de fi (Φ), letra do alfabeto grego em homenagem ao escultor grego Fídias que viveu entre 490 A.C. e 430 A.C.. De acordo com alguns historiadores da arte, Fídias utilizava, frequentemente, a Razão Áurea nas suas esculturas, como *Partenon de Atenas* e *Zeus*, no templo de Olímpia. Outras esculturas do Partenon são atribuídas a Fídias, embora seja provável que muitas delas tenham sido realizadas por

[3] Foi um membro da escola pitagórica. Nasceu por volta do ano 500 A.C. em Metaponto. Acredita-se que foi o primeiro quem provou a existência dos números irracionais. Foi expulso da escola pitagórica por quebrar a regra do silêncio dos pitagóricos, revelando a existência dos números irracionais.

[4] Nasceu em 15 de Dezembro de 1950 nos EUA, mas com cidadania inglesa. Barr viveu em Londres e Nova York em diferentes momentos da sua vida. Conhecido por propor uma notação padrão para o Número de Ouro. Embora lembrada principalmente por suas contribuições para a matemática abstrata, Barr colocou muitos dos seus esforços ao longo dos anos no projeto de máquinas, e especialmente máquinas de cálculo.

seus alunos e assistentes.

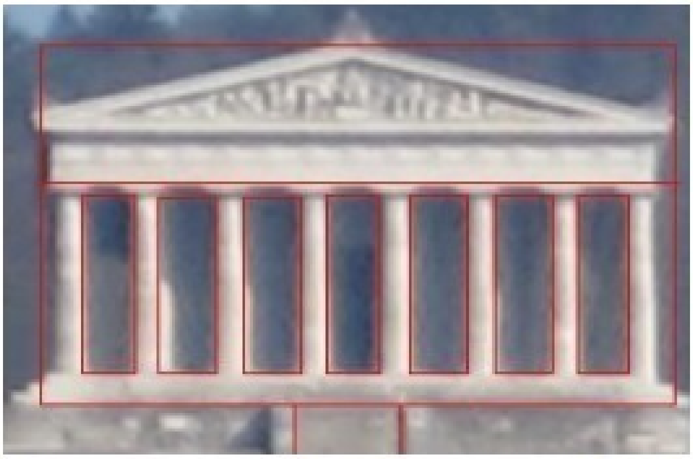


Figura 4: O Partenon, em Atenas, Grécia.

A fascinação pela Razão Áurea levaram as mais importantes mentes matemáticas, tais como, Pitágoras [5] e Euclides, na Grécia antiga, e o italiano Leonardo de Pisa, da idade média, a estudarem esta razão e suas propriedades. Mas a fascinação pela Razão Áurea não se restringe aos matemáticos. Biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos, têm estudado esse número. De fato, a Razão Áurea tem inspirado pensadores de todas as disciplinas.

1.2 DEFINIÇÃO

O Número de Ouro é um número irracional representado pela letra grega Φ (phi), também conhecido como secção áurea, proporção áurea, proporção de ouro. Dizemos que um ponto C divide um segmento $\overline{AB}$ na razão áurea (i.e, em média e extrema razão, conforme a Figura 5) se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

De acordo com essa definição, chamando $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = x$, temos que $\overline{AC} = a$ - x queremos obter o número que corresponde á proporção

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{a}{x}.$$

De acordo com as informações da Figura 5, temos

[5] Filósofo e matemático grego, nascido na ilha de Samos, por volta de 582 A.C, autor do "Teorema de Pitágoras". Viajou o Egito e Grécia e talvez a Índia. Em 520 A.C., voltou a Samos. Cerca de 530 A.C., fundou sua escola na cidade Crotone, no sul da Itália onde lecionou aritmética, geometria, música, astronomia, religião e moral. Pitágoras morreu, na Lucânia, Itália, provavelmente em 479 A.C. (Fonte[1])

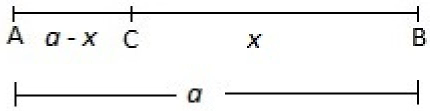


Figura 5: Razão áurea

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -a(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \text{ ou } x = a(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}).$$

Como x é a medida de um segmento, este deve ser positivo. Portanto, o único valor possível para x é

$$x = a(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}).$$

Assim, obtemos finalmente

$$\frac{a}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Com isso, escrevemos

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887\cdots$$

1.3 PROPRIEDADES DO NÚMERO DE OURO

Existe uma relação interessante entre Φ ,Φ^2 e $\frac{1}{\Phi}$.
Vimos na seção anterior que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Temos que:

$\Phi\ ^2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = 2,\ 6180339887.\dots = 1\ +\Phi.$

$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} =$ -$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0,\ 6180339887\dots$

Note que 0,618 $\cdots = 1,618\cdots - 1$, isto é, $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.
Então, concluímos as seguintes relações entre Φ, Φ^2, $\frac{1}{\Phi}$:

$$\Phi^2 = 1 + \Phi;$$

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1.$$

Antes de apresentarmos as propriedades de Φ, notemos que a equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$ de coeficientes numéricos $a = 1$, $b = -1$ e $c = -1$, possui como raízes $x' = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $x" = \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Utilizando a propriedade da soma e produto das raízes de uma equação do 2° grau, $x^2 + Sx - P = 0$, onde S é a soma das raízes com $S = \frac{-b}{a} = x' + x"$ e P é o produto das raízes com $P = \frac{c}{a} = x' \,.\, x"$, com $a \neq 0$, temos que

$$\Phi + \phi = 1;$$

$$\Phi \,.\, \phi = -1.$$

Então,

$$\Phi + \phi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{5}}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{5}}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1;$$

$$\Phi \,.\, \phi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \,.\, \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \tfrac{1-\sqrt{25}}{2} = \tfrac{1-5}{4} = \tfrac{-4}{4} = \text{- } 1.$$

Propriedade 1.3.1. *A soma de duas potências inteiras consecutivas de* Φ *resulta na potência de* Φ *seguinte, ou seja:*

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}, \forall n \in \mathbf{Z}.$$

Demonstração. Suponha $n = -r$, com $r > 0$, isso implica em $n < 0$, basta dividir $\Phi^2 = 1 + \Phi$ por Φ^{r+2}.

$$\tfrac{\Phi^2}{\Phi^{r+2}} = \tfrac{1}{\Phi^{r+2}} + \tfrac{\Phi}{\Phi^{r+2}} \Longrightarrow \tfrac{1}{\Phi^r} = \tfrac{1}{\Phi^{r+2}} + \tfrac{1}{\Phi^{r+1}} \Longrightarrow$$

$$\Phi^{-r} = \Phi^{-r-2} + \Phi^{-r-1} \Longrightarrow \Phi^n = \Phi^{n-2} + \Phi^{n-1}.$$

Para $n = 0$, temos que:

$$1 + \Phi = \Phi^2 \Longrightarrow \Phi^0 + \Phi^1 = \Phi^2.$$

E no caso $n > 0$, temos que:

$$\Phi^n + \Phi^{n+1} = \Phi^n(1 + \Phi) = \Phi^n \,.\, \Phi^2 = \Phi^{n+2},$$

como queríamos demonstrar. □

Analisando essa propriedade, podemos concluir que a sequência

$$(\ldots, \Phi^{-n} \ldots, \Phi^{-2}, \Phi^{-1}, 1, \Phi, \Phi^2, \ldots, \Phi^n, \ldots)$$

é formada por termos onde cada um deles é a soma dos dois anteriores, essa propriedade é, ao mesmo tempo, geométrica e aditiva.

Propriedade 1.3.2. *A soma de potências de* Φ *com expoentes inteiros negativos é igual a* Φ*, ou seja:*

$$\Phi^{-1} + \Phi^{-2} + \Phi^{-3} + \Phi^{-4} + \Phi^{-5} + \Phi^{-6} \cdots = \Phi.$$

Demonstração. A soma de potências de Φ com expoentes inteiros negativos é soma de uma progressão geométrica infinita convergente de razão $q = \Phi^{-1} = \frac{1}{\Phi}$, que está entre 0 e 1, o seu valor é:

$$\Phi^{-1} + \Phi^{-2} + \Phi^{-3} + \Phi^{-4} + \Phi^{-5} + \Phi^{-6} \cdots = \frac{\Phi^{-1}}{1-\frac{1}{\Phi}} = \frac{\Phi^{-1}}{\frac{\Phi-1}{\Phi}} = \frac{\Phi^{-1}}{\frac{\frac{1}{\Phi}}{\Phi}} = \frac{\Phi^{-1}}{\frac{1}{\Phi^2}} = \Phi^{-1}.\Phi^2 = \Phi.$$

como queríamos demonstrar. $\square$

2

FERRAMENTAS

Neste capítulo introduziremos algumas ferramentas fundamentais para demonstrar alguns de nossos resultados matemáticos.

2.1 PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA

Teorema 2.1. *Seja $a \in \mathbf{N}$ e suponhamos que a cada número natural $n \geq a$ esteja associada a uma propriedade $P(n)$. Suponhamos ainda que*

(i) $P(a)$ é verdadeiro, e que

(ii) Para todo $n \geq a$, se $P(n)$é verdadeiro, então $P(n+1)$ é verdadeiro.

Então, $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq a$.

Uma outra variante do Princípio da Indução ocorre quando convém, no desenvolvimento da indução, considerar a validez não somente do antecessor direto, mas de 2 ou mais antecessores.

Teorema 2.2. *Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao natural n. Suponhamos que:*

(i) $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ são verdadeiras.

(ii) Para todo $n \in \mathbf{N}$, a validez de $P(n), P(n+1), \ldots, P(n+k-1)$ implicam a validez de $P(n+k)$.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbf{N}$.

Uma outra variante do Princípio de Indução é muita vezes chamada de *Princípio da Indução Completa*. Nela, a hipótese de indução é a validez da propriedade para todos os naturais menores que ou iguais a um natural n.

Teorema 2.3. *Seja $a \in \mathbf{N}$ e suponhamos que a cada número natural $n \geq a$ esteja associada uma afirmação $P(n)$. Suponhamos ainda que* *(i) $p(a)$ é verdadeira, e que*

(ii) Para todo $n \in \mathbf{N}$ a validez de $P(k)$, para todo $a \leq k \leq n$, implica a validez de $P(n+1)$.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbf{N}$.

É importante ressaltar que todos os teoremas, acima definidos, são equivalentes ao axioma de Peano.

2.2 RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Inicialmente, trataremos das recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, isto é, recorrência da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0, \text{ com } q \neq 0.$$

Para isso, suponha que $x_n = r_0^n$. Como $r_0 \neq 0$, seja a solução da equação da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Então, temos:

$$r_0^{n+2} + pr_0^{n+1} + qr_0^n = 0.$$

Colocando r_0^n em evidência, obtemos:

$$r_0^n(r_0^2 + pr_0 + q) = 0.$$

Como $r_0^n \neq 0$, devemos ter:

$$r_0^2 + pr_0 + q = 0,$$

isto é, r_0 é solução da equação do 2° grau $r^2 + pr + q = 0$. De fato, o argumento acima mostra que a sequência $x_n = r_0^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ se, e somente se, r_0 é raiz da equação

$$r^2 + pr + q = 0.$$

A cada recorrência linear de segunda ordem homogenia, com coeficientes constantes da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, associaremos uma equação do segundo grau, $r^2 + pr + q = 0$, chamada *equação característica.* A nossa suposição preliminar de que $q \neq 0$ implica que 0 não é raiz da equação característica.

Teorema 2.4. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.*

Substituindo $an = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos, agrupando convenientemente os termos,

$$C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = \mathrm{C}_1 r_1^n 0 + C_2 r_2^n 0 = 0.$$

Portanto $an = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.

O teorema, a seguir, mostra que, se $r_1 \neq r_2$, todas as soluções da recorrência têm a forma apontada no Teorema 2.5.

Teorema 2.5. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.*

Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determinemos constantes C_1 e C_2 que sejam soluções dos sistemas de equações

$$\begin{cases} \mathrm{C}_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ \mathrm{C}_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2, \end{cases}$$

isto é,

$$C_1 = \tfrac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \text{ e } C_2 = \tfrac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)},$$

isso é possível pois $r_1 \neq r_2$ e $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Afirmamos que $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ para todo n natural, o provara o teorema. Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n. Temos

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qzn = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q).$$

Os primeiros parênteses é igual a zero porque y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$; os dois últimos parênteses são iguais a zero, porque r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$. Então $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$.

Além disso, como $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$ e $C_1 r_1^2 + C - 2r_2^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$. Mas, se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qzn = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo n.

3

A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Figura 6: Leonardo Fibonacci (1175-1250)

Leonardo Fibonacci foi um grande matemático europeu na época da idade média. Nasceu na Itália em 1175 na cidade de Pisa, motivo pelo qual ficou conhecido como Leonardo de Pisa. Fibonacci não era seu sobrenome propriamente dito, mas diminuitivo "Fillius Bonacci", que significava "filho de Bonaccio". Seu pai Guiliermo Bonacci, que era ligado aos negócios mercantis, foi convidado a trabalhar em Banjaia, na África, numa função alfandegária. Fibonacci fez várias viagens, onde observou muito da cultura matemática da época e de diferentes povos (Egito, Síria, Grécia, Sicília, Provença). Teve a oportunidade de estudar e comparar diferentes sistemas numéricos e métodos de operações aritméticas. Após concluir que os númerais indo- arábicos, que incluíam o princípio do valor lugar (o algarismo possui um valor de acordo com a ordem que ocupa no número), eram muito superiores a todos os outros métodos, ele dedicou os primeiros sete capítulos de seu livro *Liber Abacci* (1202) a explicações sobre a notação indo-arábica e suas aplicções práticas mostrando aos europeus as importantes descobertas dos árabes. Após regressar de suas viagens, escreveu as seguintes obras referentes aos seus estudos: *Practica Geometriae* (1220), sobre Geometria e Trigonometria, *Liber Quadratorum* (1225), que fala sobre a análise indeterminada.

No livro *Liber Abacci* , também estão presentes várias questões extremamente úteis para os mercadores da época, tais como conversões monetárias, juros, médias, entre outros. Além disso, existem outros problemas, tais como problemas sobre movimento, o problema do resto chinês, a regra da falsa posição e diversos problemas resolvidos pelo uso de equações quadráticas. No ínterim da obra, também podemos encontrar algumas teorias como, por exemplo, métodos para obter somas de séries e justificativas geométricas de fórmulas quadráticas.

Livio [7] destaca a importância de Fibonacci na difusão da razão áurea.

> "O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por um progresso significativo mas não espetacular. Por outro lado, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a Razão Áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações."

Num livro pequeno sobre geometria, *Practica Geometriae* (Prática de Geometria), que foi publicado em 1220, apresentam-se contribuições diretas de Fibonacci para a literatura da Razão Áurea. Ele apresentou novos métodos para o cálculo da diagonal e da área do pentágono, cálculos dos lados do pentágono e do decágono, a partir do diâmetro do círculo inscrito e do circunscrito, e computações de volumes do dodecaedro e do icosedro, todos intimamente ligados à Razão Áurea. Nas soluções desses problemas, Fibonacci demonstra um profundo conhecimento da geometria euclidiana. Contudo, sua contribuição mais importante para a Razão Áurea e a que mais lhe trouxe fama deriva de um problema aparentemente inocente do *Liber abaci*, o problema de reprodução de coelhos que originou a famosa Sequência de Fibonacci.

Fibonacci faleceu no ano de 1250, em sua cidade natal.

3.1 OS NÚMEROS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

No Livro *Liber Abacci* de Leonardo, no Capítulo XII, temos o seguinte problema, que motivou a criação da Sequência de Fibonacci.

O Problema da reprodução dos Coelhos. *"Um homem pôs um casal de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos casais de coelhos podem ser gerados, a partir desse casal, em um ano se, supostamente, todo mês cada casal dá à luz um novo casal, que é fértil a partir do segundo mês, e onde não há ocorrência de mortes de coelhos?"*

Solução. Tendo em vista as condições do problema, vejamos o processo de reprodução em cada mês:

- No primeiro mês, o casal inicial é filhote, temos, assim um casal de coelhos.
- No segundo mês, temos ainda o mesmo casal de coelhos, porém adultos, e já fértil.
- No terceiro mês, temos um casal de adultos e um casal de coelhos filhotes, gerados por eles. Portanto, temos dois casais de coelhos.

- No quarto mês, teremos o casal adulto iniciado, mais o casal de jovens do mês anterior, que se torna fértil, mais um novo casal de filhotes do primeiro casal. Temos, portanto, três casais de coelhos.
- No quinto mês, temos dois casais adultos, um casal de jovens do mês anterior, já férteis, mais dois casais de filhotes provenientes dos dois casais adultos. Portanto, temos cinco casais de coelhos.
- No sexto mês, teremos três casais adultos, mais dois casais de filhotes jovens, já férteis, e mais três casais de filhotes dos três casais adultos. Totalizando oito casais de filhotes.
- No sétimo mês teremos cinco casais adultos, mais 5 casais de filhotes e mais três casais jovens férteis, no total 13 casais de coelhos etc.

Note, que existe uma particularidade nessa listagem: a partir do terceiro mês, o número de casais de coelhos é igual à soma do número de casais dos dois meses anteriores. Assim, encontramos uma sequência, onde cada elemento representa o número de casais de coelhos e sua posição na lista representa o mês:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ,21 ,34 ,55 ,89 ,144 ,\dots)$$

Para melhor compreensão, observemos a Figura 7, criada para os seis primeiros meses, onde chamamos de P um par de coelhos e de P_1 os pares de coelhos gerados por P, P_2 gerados por P_1 e, assim, sucessivamente.

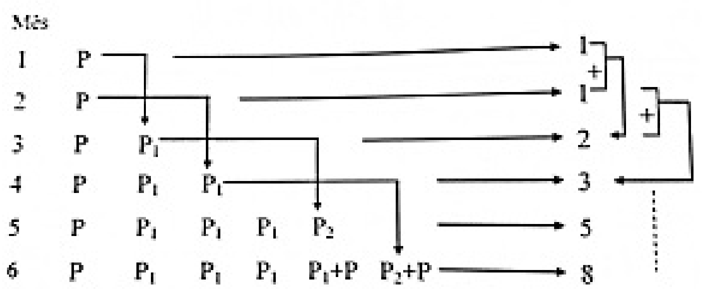


Figura 7: Reproducão do casais de coelhos

Isso motivou Fibonacci a definir a seguinte sequência, conhecida como *Sequência de Fiobonacci.*

3.2 DEFININDO A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Chamando f_n o número de Fibonacci encontrado na posição n da sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …, n, …) onde, a partir do segundo termo, cada termo da sequência é igual à soma dos dois termos anteriores, podemos dar uma definição recursiva para essa sequência.

Definição 3.1. *Chama-se Sequência de Fibonacci a Sequência definida recursivamente por*

$$f_1 = f_2 = 1$$

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \geq 1.$$

3.3 FÓRMULA DE BINET

Em 1718, De Moivre encontrou uma fórmula fechada para determinar um termo qualquer da *Sequência de Fibonacci*: f_n em função de n. No entanto, a fórmula ficou conhecida com o nome de Fórmula de Binet, que a redescobriu em 1843.

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Fórmula de Binet

A recorrência de segunda ordem $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ tem equação característica $r^2 = r + 1$, cujas raízes são:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

substituindo as raízes r_1 e r_2 em $f_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$. Uma vez que essa é solução da recorrência $f_{n+2} + pf_{n+1} + qf_n = 0$, demonstrada no Capítulo 2, teremos

$$f_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Para determinar c_1 e c_2, podemos usar $f_1 = f_2 = 1$, mas é conveniente usar $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$, e resolver o sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \text{ , } n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Assim, encontramos $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, portanto, temos

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

A seguir, demonstraremos a veracidade da fórmula de Binet *(f_n)*, utilizando indução finita sobre n.

Demonstração. Seja $P(n) : f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ - $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, com $f_1 = f_2 = 1$.

(i) A expressão está correta para $n = 1$ e $n = 2$, já que

$$\mathrm{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2} = 1.$$

e

$$\mathrm{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(1+2\sqrt{5}+5)}{4} - \frac{(1-2\sqrt{5}+5)}{4}$$

$$\mathrm{f}_2 = \frac{1}{4\sqrt{5}} + \frac{1}{2} + \frac{5}{4\sqrt{5}} - \frac{1}{4\sqrt{5}} + \frac{1}{2} - \frac{5}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Logo $P(1)$ e $P(2)$ são verdadeiras.

(ii) Suponhamos que a expressão esteja correta para n e $n + 1$. Então, mostraremos que ela é válida para $n + 2$, ou seja,

$$f_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right].$$

Temos que,

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \,.$$

$$f_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$f_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

$$f_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]$$

$$f_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right].$$

Portanto, pelo Principio de Indução completa, temos que f_n é verdadeiro $\forall n \geq 1$

□

3.4 OS NÚMEROS DE FIBONACCI E A RAZÃO ÁUREA

Vimos no primeiro capítulo, que a equação do 2° grau $x^2 = x + 1$ têm como raiz positiva $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Substituindo x por Φ, temos:

$\Phi^2 = \Phi + 1 \Longrightarrow \Phi = \frac{\Phi+1}{\Phi} \Longrightarrow$ logo $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$, substituindo Φ pelo seu próprio valor, obtemos o desenvolvimento Φ, através de uma série:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}}}$$
$$\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}}}.$$

De acordo com Livio [7], a entidade matemática acima é um caso especial de frações contínuas, uma outra forma, além da notação decimal de representar números reais, que recorre a uma sucessão de frações encaixadas uma nas outras, bastante utilizada em Teoria dos Números. Como a fração contínua é composta somente pelo numeral um , ela converge muito lentamente à Razão Áurea (Número de Ouro), ou seja, cada vez que calculamos uma parcial da fração continua composta somente de uns, os resultados obtidos se aproximam cada vez mais do Número de Ouro, assim, $1 + \frac{1}{1} = 2$; $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{5}{3} = 1,666\ldots.$

Chamamos de fração contínua, uma expressão da forma:

$$a_1 + \frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4+\frac{1}{a_5+\ldots}}}}$$

onde $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são denominados quocientes parciais.

Quando os números de $a_i's$ forem finitos dizemos que a fração contínua é finita e, caso contrário, dizemos que é infinita.

Seja n o número de parcelas que compõem a série de frações contínuas que representa Φ. Denotando a sequência de somas parciais desta série por $\Phi(n)$, podemos verificar que:

- $\Phi(1) = 1$
- $\Phi(2) = 1 + \frac{1}{1} = 2$;
- $\Phi(3) = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$;
- $\Phi(4) = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} = 1,666\ldots$;
- $\Phi(5) = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = 1,6$;
- $\Phi(6) = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}} = 1 + \frac{1}{\frac{8}{5}} = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8} = 1,625$;

.

.

.

- $\Phi(12)= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}}} = \frac{233}{144} = 1,6180555\ldots$

.

.

.

- $\Phi(n) = 1+\frac{1}{\Phi(n-1)}$.

Partindo da hipótese que $\lim_{n\to\infty}\Phi(n) = x$, então $\lim_{n\to\infty}\Phi(n+1) = x$
Daí:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\Phi(n)}) = x$$

;

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Phi(n)} = x$$

;

$$1+\tfrac{1}{x} = x;$$

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Como $\Phi(n) \geq 1$, então $\lim_{n\to\infty} \geq 1$ e, por esta razão, novamente não vamos considerar a raiz $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, logo:

$$\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Portanto $x = \Phi$, onde queríamos chegar.

De acordo com Huntley [6] a forma mais simples de todas as frações contínuas infinitas resulta em frações parciais, onde a razão entre os numeradores e denominadores tendem a gerar o número Φ. Observando as frações, a seguir,

$$1,\ \tfrac{2}{1}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{3}, \tfrac{8}{5}, \tfrac{13}{8}, \tfrac{21}{13}, \ldots, \tfrac{233}{144}, \ldots$$

notemos que tanto os numeradores como os denominadores constituem a série de Fibonacci. As Frações oscilam em torno de um valor para a qual a série tende como limite, sendo esse limite a razão áurea, ou seja, Φ. Portanto, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\Phi$$

.

Consequentemente, coloca-se a divisão áurea e a série de Fibonacci na mais profunda ligação possível, e surge como um significativo acréscimo a nossa coleção.

3.5 POTÊNCIAS DE Φ E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Nesta seção, vamos mostrar a ligação entre as potências de Φ e a Sequência de Fibonacci. Para isso, vamos calcular algumas potências de Φ como segue.
Temos que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, então:

- $\Phi^2 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{2}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \Phi$;
- $\Phi^3 = \Phi^2 \,.\, \Phi = (1+\Phi) \,.\, \Phi = \Phi + \Phi^2 = \Phi + 1 + \Phi = 1 + 2\Phi$;
- $\Phi^4 = \Phi^3 \,.\, \Phi = (1+2\Phi).\, \Phi = \Phi + 2\Phi^2 = \Phi + 2(1+\Phi) = \Phi + 2 + 2\Phi = 2 + 3\Phi$;
- $\Phi^5 = \Phi^4 \,.\, \Phi = (2+3\Phi) \,.\, \Phi = 2\Phi + 3\Phi^2 = 2\Phi + 3(1+\Phi) = 3 + 5\Phi$;
- $\Phi^6 = \Phi^5 \,.\, \Phi = (3+5\Phi) \,.\, \Phi = 3\Phi + 5\Phi^2 = 3\Phi + 5(1+\Phi) = 5 + 8\Phi$;
- $\Phi^7 = \Phi^6 \,.\, \Phi = (5+8\Phi) \,.\, \Phi = 5\Phi + 8\Phi^2 = 5\Phi + 8(1+\Phi) = 8 + 13\Phi$;
- $\Phi^8 = \Phi^7 \,.\, \Phi = (8+13\Phi) \,.\, \Phi = 8\Phi + 13\Phi^2 = 8\Phi + 13(1+\Phi) = 13 + 21\Phi$;

$$\vdots$$

- $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}, \forall n \in \mathbf{Z}$.

Verificando os resultados encontrados acima, elaboramos a Tabela 1:

n	1	2	3	4	5	6	7	...	n
Φ^n	$0+\Phi$	$1+\Phi$	$1+2\Phi$	$2+3\Phi$	$3+5\Phi$	$5+8\Phi$	$8+13\Phi$	...	$\Phi^{n-1}+\Phi^{n-2}$

Tabela 1: Potências de Φ

A demonstração de que $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$ é válido, consta na propriedade 1.3.1 da seção anterior.

Percebe-se que, chamando $f_0 = 0$, temos que os termos constantes e os coeficientes de Φ, na ordem em que apresentam-se, formam os termos da Sequência de Fibonacci. Isso nos levaria a conjecturar

$$\Phi^n = f_{n-1} + f_n \,.\, \Phi, \forall n \geq 1.$$

Vamos verificar na proposição, a seguir, que $\Phi^n = f_{n-1} + f_n.\Phi$, $\forall n \geq 1$. é válido.

Proposição 3.2. *Para qualquer número natural $n \geq 1$, vale a igualdade*

$$\Phi^n = f_{n-1} + f_n.\Phi,$$

onde $f_j = 1, 2, 3, \ldots$ são os números de Fibonacci e $f_0 = 0$.

Demonstração. Provemos a Proposição 3.2: $\Phi^n = f_{n-1} + f_n \,.\, \Phi$, $\forall n \geq 1$, usando a indução matemática sobre n:

(i) $n = 1 : \Phi^1 = f_0 + f_1 \Phi = 0 + 1\Phi = \Phi$.
Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponhamos que a igualdade seja verdadeira para $n = k$, ou seja, que vale para $\Phi^k = f_{k-1} + f_k.\Phi$. Vamos mostrar que vale para $n = k+1$, ou seja, mostraremos que $\Phi^{k+1} = f_k + f_{k+1} \,.\, \Phi$

Note que

$$\Phi^{k+1} = \Phi^k \,.\, \Phi = (f_{k-1}+\mathrm{f}_k \,.\, \Phi).\Phi = f_{k-1} \,.\, \Phi + f_k \,.\, \Phi^2 =$$
$$= f_{k-1} \,.\, \Phi + f_k(1+\Phi) = \mathrm{f}_{k-1} \,.\, \Phi + f_k + f_k \,.\, \Phi =$$
$$= (f_{k-1}+\mathrm{f}_k)\Phi + f_k = f_k + f_{k+1} \,.\, \Phi \,.$$

Portanto, vale $\Phi^{k+1} = f_k + \mathrm{f}_{k+1} \,.\, \Phi$.

□

Assim, por *(i)* e *(ii)*, mostramos que a proposição acima é verdadeira.

4

ASPECTO ALGÉBRICO E GEOMÉTRICO DO NÚMERO DE OURO

4.1 EQUAÇÃO ALGÉBRICA GERAL DA PROPORÇÃO ÁUREA

Inicialmente será obtida a equação $x^2 - x - 1 = 0$ do segundo grau, a partir da Proporção Áurea. Seja o segmento $\overline{AC}$ dividido em média e extrema razão:

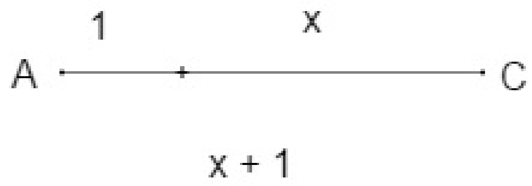


Figura 8: Segmento em média e extrema razão

Temos que:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{x+1} \Longrightarrow x^2 = x + 1, \text{ (I)}$$

onde (I) é a equação característica da recorrência da pág. 13.

A equacão $x^2 = x + 1$ é a equação algébrica do segundo grau da Proporção Áurea, onde uma das raízes é $\mathbf{\Phi}$. Multiplicando I por x, obtemos:

$$x^3 = x^2 + x \text{ (II)}$$

De I temos que $x = x^2 - 1$, substituindo em II, teremos:

$$x^3 = 2.x^2 - 1 \text{ (III)}$$

Substituindo I na incógnita x^2 em III, obtemos:

$$x^3 = 2.x + 1 \text{ (IV)}$$

Multiplicando II por x, obtemos:

$$x^4 = x^3 + x^2 \text{ (V)}$$

Substituindo III em x^3 em V, obtemos:

$$x^4 = 2.x^2 - 1 + x^2 \Longrightarrow x^4 = 3.x^2 - 1 \text{ (VI)}$$

Agora, substituindo I em x^3 em VI

$$x^4 = 3.(x+1) - 1 \Longrightarrow x^4 = 3.x + 2 \text{ (VII)}$$

Continuando as substituições, obtemos:

$$x^5 = 5.x^2 - 2 = 5.x + 3$$

$$x^6 = 8.x^2 - 3 = 8.x + 5$$

$$x^7 = 13.x^2 - 5 = 13x + 8$$

Esta equação pode ser generalizada para:

$$x^n = F_n x^2 - F_{n-2} = F_n x + F_{n-1}$$

Demonstração. Provemos que $x^n = F_n x + F_{n-1}$ é válido para $n \geq 1$, utilizando a indução matemática sobre n.

(i) para $n = 1$ temos que:

$x^1 = F_1 x + F_{(1-1)}$
$x^1 = F_1 x + F_0$
$x = 1x + 0$
$x = x$

Logo, vale a base de indução.

(ii) Suponhamos que a igualdade seja verdadeira para $n = k$, ou seja, que vale $x^k = F_k x + F_{k-1}$. Vamos mostrar que vale para $n = k+1$, ou seja, mostraremos que $x^{k+1} = F_{k+1}x + F_k$. Temos que:

$$x^{k+1} = x^k.x = (F_k x + F_{k-1}).x = F_k x^2 + (F_{k-1}).x = F_k(x+1) + (F_{k-1}).x$$

$$x^{k+1} = F_k x + F_k + (F_{k-1}).x = F_k + (F_k + F_{k-1}).x$$

$$x^{k+1} = F_{k+1}.x + F_k$$

Portanto, $x^{k+1} = F_{k+1}x + F_k$ é valido, logo $x^k = F_k x + F_{k-1}$ é verdadeiro para todo $n \geq 1$.

$\square$

Assim, temos que a equação algébrica geral da Proporção Áurea é

$$x^n = F_n x^2 - F_{n-2} = F_n x + F_{n-1}$$

onde F_n , F_{n-1} e F_{n-2} são Números da Sequência de Fibonacci.

Quando os coeficientes numéricos de equações do segundo grau com essa estrutura são os números de Fibonacci, é certo que um dos valores de x, ou seja, uma de suas raízes será $\mathbf{\Phi}$.

4.2 MÉTODO PARA OBTER, GEOMETRICAMENTE, O SEGMENTO ÁUREO

Seja o retângulo $ABFG$ formado por dois quadrados de lados iguais a um,

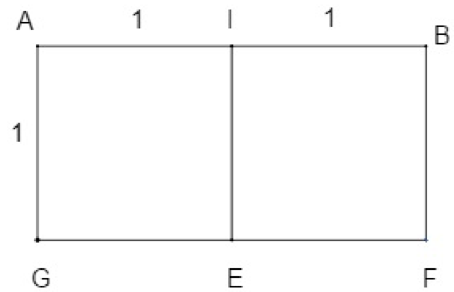


Figura 9: Dois quadrados de lados iguais a um

logo $\overline{AF} = \sqrt{5}$, pois $\overline{AF}^2 = 2^2 + 1^2 \Longrightarrow \overline{AF}^2 = 5 \Longrightarrow \overline{AF} = \sqrt{5}$,

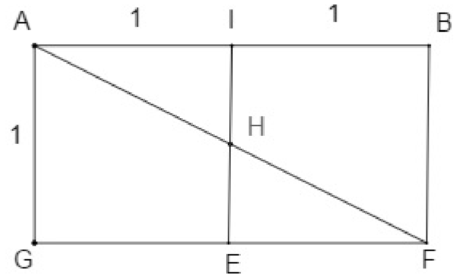


Figura 10: Diagonal $\overline{AF} = \sqrt{5}$

tomando H como centro e $\overline{HF}$ como raio (Figura 10), traçamos um arco cuja intersecção com o prolongamento de $\overline{IE}$ gera o ponto D, então:

$\overline{HF} = \overline{HD} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $\overline{IH} = \overline{HE} = \frac{1}{2}$

Daí temos: $\overline{ID} = \overline{IH} + \overline{HD} \Longrightarrow \overline{ID} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \overline{ID} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618 \ldots$

Logo: $\overline{ED} = \overline{ID}$ - $\overline{IE} \Longrightarrow \overline{ED} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \Longrightarrow \overline{ED} = 0{,}618 \ldots$

Assim podemos verificar que o segmento $\overline{ID}$ ficou dividido em média e extrema razão pelo ponto E.

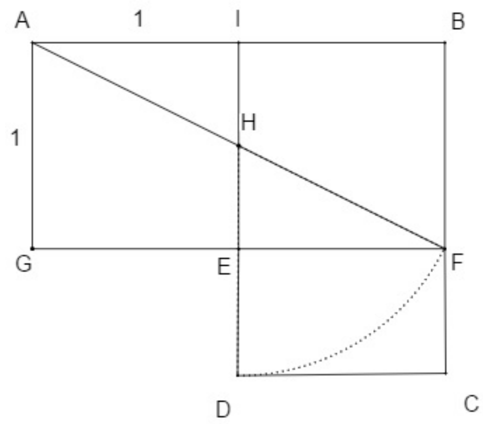


Figura 11: Segmento Áureo $\overline{ID}$

4.3 MÉTODO PARA OBTER, GEOMETRICAMENTE, O RETÂNGULO ÁUREO

Definindo-se um quadrado $ABCD$ com lados $\overline{AB}$ =$\overline{BC}$ = $\overline{CD}$ = $\overline{DA}$ = 1, através de um segmento, uniremos os pontos médios F da base $\overline{DC}$ e E do lado oposto $\overline{AB}$.

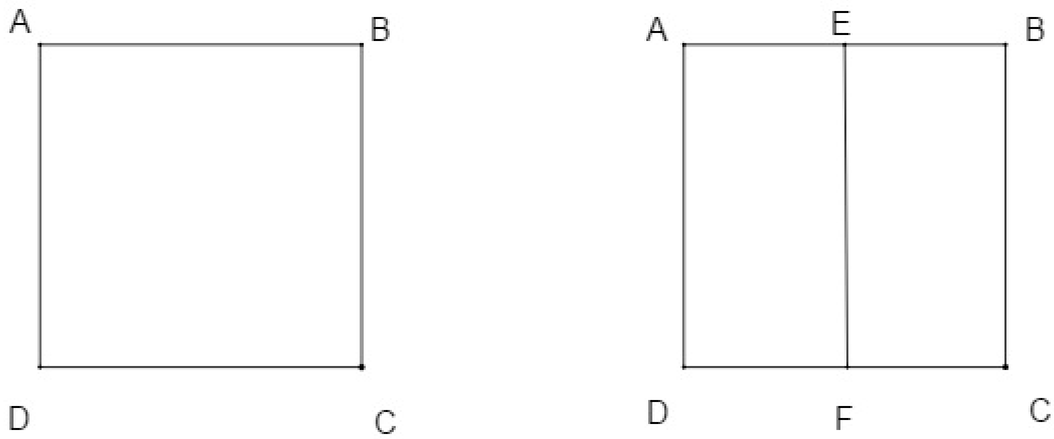


Figura 12: A esquerda quadrado $ABCD$ de lados iguais a um, a direita E é o ponto médio de $\overline{AB}$ e F o ponto médio de $\overline{CD}$

Em seguida, usando a diagonal $\overline{FB}$ do retângulo $EBCF$ como raio, traça-se um arco que interceptará o prolongamento de $\overline{DC}$ em G.

Em G, ergue-se uma perpendicular que interceptará o prolongamento de $\overline{AB}$ em H. O novo retângulo $AHGD$ é um retângulo áureo(Figura 13) e será válida a relação $\frac{\overline{DG}}{\overline{GH}} = \Phi$.

De fato, temos que:

$\overline{DF}$ =$\overline{FC}$ = $\frac{\overline{DC}}{2}$ =$\frac{1}{2}$ e $\overline{BC}$ = $\overline{DC}$ = $\overline{GH}$ = 1, utilizando o Teorema de Pitágoras, no triângulo retângulo BCF, temos,

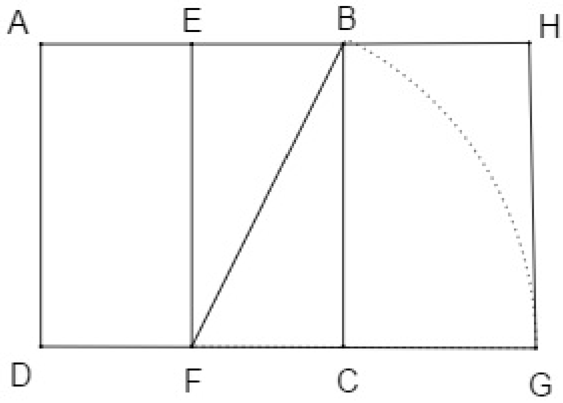


Figura 13: Retângulo Áureo

$$\overline{FB} = \sqrt{(\frac{\overline{DC}}{2})^2 + \overline{DC}^2} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

Então, $\overline{FB} = \overline{FG} = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

Como $\overline{DF} = \frac{1}{2}$, temos que

$$\overline{DG} = \overline{DF} + \overline{FG} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Portanto,

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{GH}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

4.4 MÉTODO DE EUCLIDES

Seja o quadrado $ABCD$, a seguir, de lados iguais a um, marcamos o ponto médio I do lado $\overline{DC}$, tal que $\overline{IC} = \overline{ID} = \frac{1}{2}$.

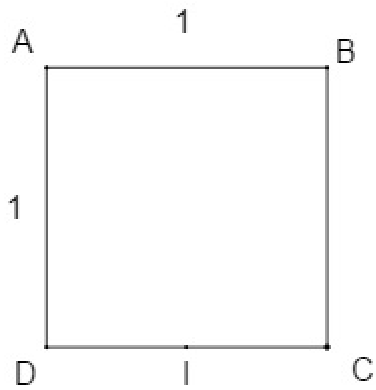


Figura 14: Quadrado $ABCD$ de lados iguais a um, I é o ponto médio de $\overline{DC}$

Com centro em I e abertura $\overline{AI}$, traçamos o arco até interceptar o prolongamento de $\overline{CD}$, no ponto E assim, $\overline{AI} = \overline{EI}$ e montamos o quadrado $DEFG$.

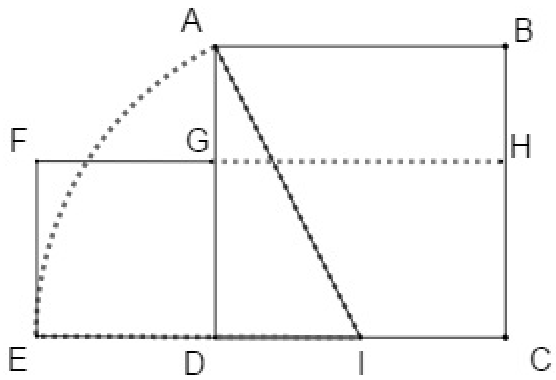


Figura 15: O ponto D dividi o segmento $\overline{EC}$ na razão extrema e média

Dessa forma, pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$\overline{AI}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DI}^2 \Longrightarrow$$

$$\overline{AI^2} = 1^2 + (\tfrac{1}{2})^2 \Longrightarrow \overline{AI} = \tfrac{\sqrt{5}}{2}$$

Como,

$$\overline{ED} = \overline{EI} \text{ - } \overline{DI}, \text{ mas } \overline{EI} = \overline{AI} \Longrightarrow \overline{ED} = \overline{AI} \text{ - } \overline{DI} \Longrightarrow$$

$$\overline{ED} = \tfrac{\sqrt{5}}{2} - \tfrac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$\overline{ED} = \tfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Longrightarrow \overline{ED} = 0{,}618\ldots$$

Logo, o ponto D divide o segmento $\overline{EC}$ em extrema e média razão.

4.5 MÉTODO PARA OBTER, GEOMETRICAMENTE, A ESPIRAL ÁUREA

Os quadrados que podem ser desenhados no interior do Retângulo Áureo é que vão determinar o padrão da Espiral Áurea. Seja $\overline{DH}$ o Segmento Áureo do segmento $\overline{DC}$, desenha-se então o Retângulo Áureo $ABCD$, ergue-se uma perpendicular em H que intercepta $\overline{AB}$ em E onde $\overline{DH} = \overline{HE}$.
Traçamos o arco $\overline{DE}$ com centro em H.

Fazendo $\overline{EF} = \overline{EB}$, ergue-se uma perpendicular em F, que vai interceptar $\overline{BC}$ em G, traçamos o arco $\overline{EG}$ com centro em F.

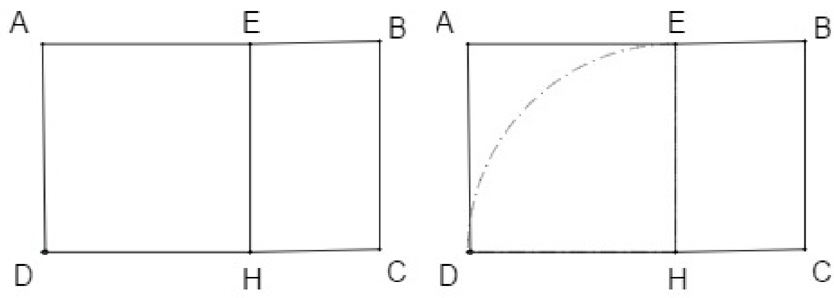


Figura 16: Retângulo áureo $ABCD$

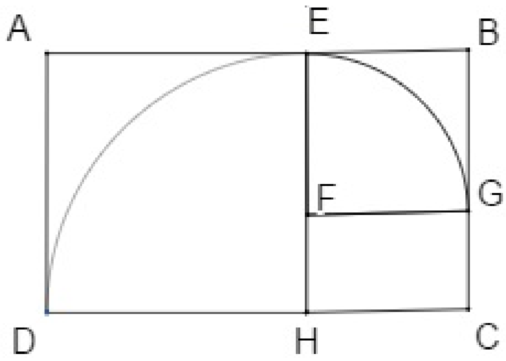


Figura 17: Retângulo áureo $BCHE$

Repete-se o processo quantas vezes quiser e os arcos descritos, anteriormente, formarão uma curva logarítmica conhecida como *Espiral Logarítmica, Espiral Áurea* ou, ainda, *Espiral equiangular* [6], pois corta todos os raios vetores (É o raio de cada setor circular inscritos nos quadrados, que coincidem com as diagonais do quadrado, exemplo: na Figura 17 temos o quadrado $ADHE$ e o raio vetor, que coincide com a diagonal $\overline{HA}$) sob o mesmo ângulo. É uma curva gerada por dois movimentos, enquanto o raio vetor gira em torno de um polo em progressão aritmética, numa sucessão de ângulos iguais, um ponto o percorre em progressão geométrica, descrevendo uma curva.

Observando os retângulos $ABCD$, $BCHE$, $CGFH$, na Figura 18, temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{FH}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Como o retângulo tem a proporção áurea, essa espiral será semelhante a ela própria (em proporção áurea), ou seja, se a ampliarmos, obteremos o mesmo desenho.

[6] Este nome foi dado em 1638 pelo filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), pelo fato do raio vetor sempre formar o mesmo ângulo com a curva. (Fonte[2])

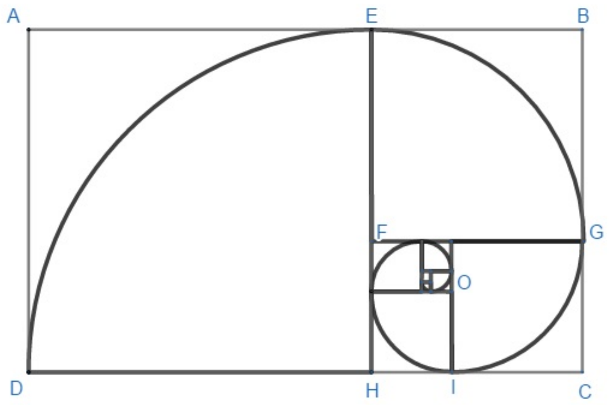


Figura 18: Espiral Áurea

4.6 CRESCIMENTO DO RAIO DA ESPIRAL ÁUREA

O retângulo da Figura 19, com lados iguais a x e gx, é conhecido pelo nome Retângulo de Ouro, pois ao montar um quadrado de lado x, os outros retângulos restantes terão a mesma forma que o primeiro. O procedimento pode ser repetido infinitas vezes, obtendo uma sequência infinita de pequenos retângulos de ouro.

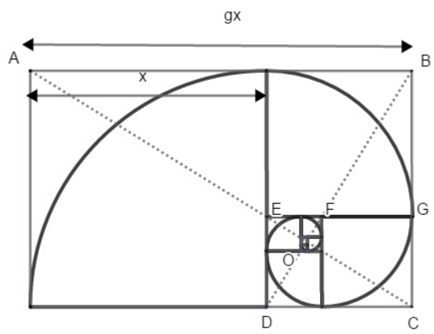


Figura 19: Raio da Espiral Áurea

Entre o retângulo maior e o perímetro menor, podemos montar a relação:

$$\frac{x}{gx} = \frac{gx-x}{x} \Longrightarrow \frac{1}{g} = \text{g - 1}$$

Essa relação se repetirá entre os outros retângulos menores. As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares entre si e interceptam-se no ponto O, os pontos A, B, C, D, E e F determinam uma curva que é conhecida como espiral áurea, com início da espiral em O. Os triângulos ABC e AOB são semelhantes - caso de semelhança de triângulos, ou seja, caso AA (ângulo, ângulo), onde o ângulo $ABC = AOB = 90°$ e o ângulo C é ângulo comum. Portanto, é valida a relação :

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OB}} = \frac{gx}{x} \Longrightarrow \frac{\overline{AO}}{\overline{OB}} = \text{g}$$

Essa relação também acontece com os triângulos menores, sendo assim, podemos dizer que os raios da Espiral Áurea têm crescimento geométrico igual a 1,618 . . .

5

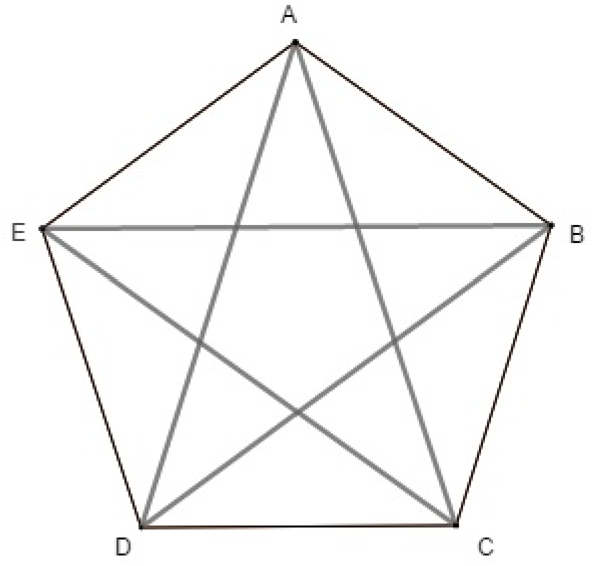
O PENTAGRAMA E O TRIÂNGULO TRIPLO

Segundo Livio [7], o pentagrama é uma estrela de cinco pontas formada a partir da união dos vértices de um pentágono regular e cinco triângulos isósceles congruentes, tal que a razão entre o lado do triângulo e sua base é o Número de Ouro. De acordo com Huntley [6] o pentagrama era um emblema sagrado pelo qual os pitagóricos reconheciam os seus membros. Eles consideravam o pentagrama como um símbolo de boa saúde.

5.1 O NÚMERO DE OURO E O PENTAGRAMA

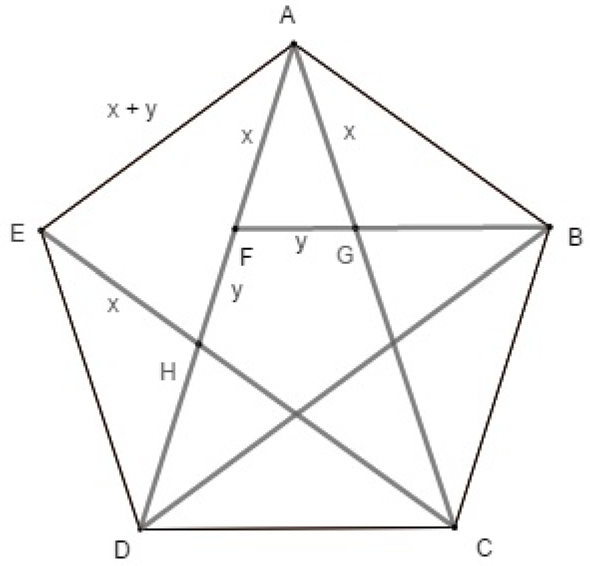
Vamos calcular a medida do lado de um pentagrama inscrito em um pentágono regular.

1. No interior de um pentágono regular $ABCDE$, desenhemos um pentagrama de arestas: $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{BE}$ e $\overline{CE}$.



2. Considere os pontos F e G a intersecção da aresta $\overline{BE}$ com as arestas $\overline{AD}$ e $\overline{AC}$, e o ponto H a intersecção da aresta $\overline{AD}$ com a aresta $\overline{CE}$. Note que os triângulos AFG e AEH são isósceles com $\overline{AF} = \overline{AG} = x$, $\overline{AH} = \overline{AE} = x + y$, $\overline{FG} = \overline{FH} = y$ e $\overline{EH} = x$. Como são isósceles, temos a seguinte relação: no triângulo AFG, x está para y, assim como no AEH, $x + y$ está para x.

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} \Longrightarrow x^2 = xy + y^2;$$



$$x^2 - xy - y^2 = 0.$$

multiplicando por $\frac{1}{y^2}$, temos que

$$\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} - 1 = 0.$$

fazendo $\frac{x}{y} = m$, obtemos

$$m^2 - m - 1 = 0.$$

Usando a fórmula de Bhaskara para resolver a equação do 2 grau, temos

$$m = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.(1).(-1)}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como se trata de medida de comprimento, utiliza-se o valor de positivo e encontra-se, assim, a razão áurea:

$$m = \frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \mathbf{\Phi}$$

Fazendo $y = 1$, temos que a medida dos lados do pentagrama inscrito no pentágono regular $ABCDE$ valem $\mathbf{\Phi}$.

5.2 ALGUMAS PROPRIEDADES DO PENTAGRAMA

A figura geométrica, onde se pode encontrar uma variedade de razões áureas, é o pentagrama. Podemos encontrar várias propriedades no pentagrama. Sejam R e r os raios dos círculos maior e menor, respectivamente, com centro comum O, onde o pentágono A', B', C', D' e E' está inscrito no círculo maior, e o pentágono P, Q, R, S, T, com lado igual a 1, está inscrito no círculo menor(Figura 20).

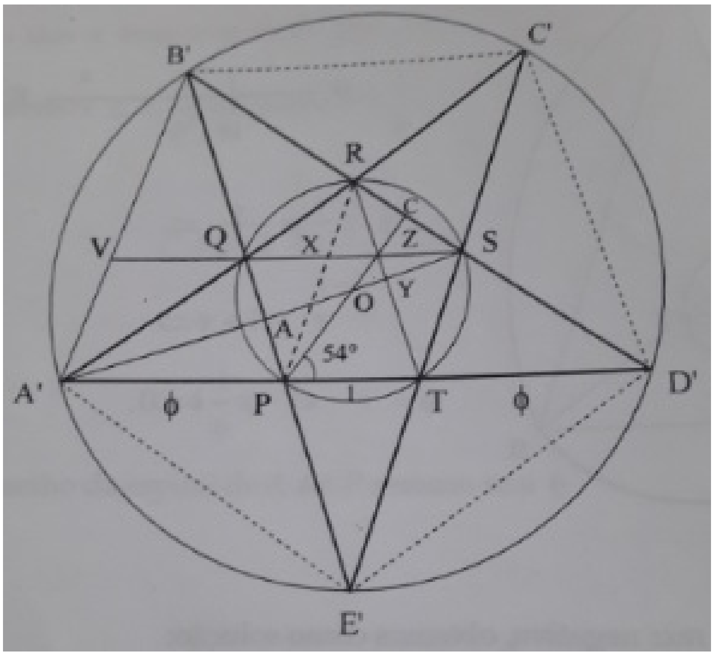


Figura 20: Pentagrama

- Sendo $\overline{PT} = 1$, temos que $\overline{A'P} = \overline{TD}' = \Phi$.

- Os triângulos OAP e PCD' são semelhantes e $\overline{OP} = r$, daí vem que

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{PD'}} \Longrightarrow \frac{\overline{OA}}{r} = \frac{\Phi+\frac{1}{2}}{\Phi+1} \Longrightarrow \frac{\overline{OA}}{r} = \frac{2.\Phi+1}{2.(\Phi+1)}$$

$$\frac{\overline{OA}}{r} = \frac{\Phi^3}{2.\Phi^2} \Longrightarrow \frac{\overline{OA}}{r} = \frac{\Phi}{2}$$

- Os triângulos $OA'P$ e OZS são semelhantes. Como $\overline{QS}= \Phi$, logo $\overline{ZS}= \frac{1}{\Phi}$, daí vem que

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{A'P}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{ZS}} \Longrightarrow \frac{\overline{OA'}}{\Phi} = \frac{r}{\frac{1}{\frac{1}{\Phi}}} \Longrightarrow \frac{\overline{OA'}}{r} = \Phi^2.$$

- de imediato temos que $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = 2.\Phi$;

-a diagonal $\overline{QS}$ tem comprimento igual á Φ;

-sendo X o ponto de intersecção entre duas diagonais, então:

$$\frac{\overline{SX}}{\overline{XQ}} = \frac{\overline{PX}}{\overline{XR}} = \frac{\overline{B'X}}{\overline{XT}} = \Phi;$$

-Prolongando $\overline{SQ}$ este vai interceptar $\overline{A'B'}$ em V e, como VQS é paralelo á $\overline{A'D'}$, temos

$$\frac{\overline{B'V}}{\overline{VA'}} = \frac{\overline{B'Q}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{B'S}}{\overline{SD'}} = \Phi$$

-Todos os seis segmentos $\overline{A'D'}$, $\overline{A'T}$, $\overline{A'P}$, $\overline{PT}$, $\overline{RX}$ e $\overline{XZ}$ estão em progressão geométrica. Vejamos, na Figura 20 que

$$\overline{A'D'} = 2.\Phi + 1 \text{ como } 2.\Phi + 1 = \Phi^3 \text{ logo } \overline{A'D'} = \Phi^3;$$

$$\overline{A'T} = \Phi + 1 \text{ como } \Phi + 1 = \Phi^2 \text{ logo } \overline{A'T} = \Phi^2,\ \overline{A'P} = \Phi,\ \overline{PT} = 1;$$

$\overline{PQ} = \overline{PX} = 1$, sabemos que $\frac{\overline{PX}}{\overline{RX}} = \Phi \Longrightarrow \overline{RX} = \frac{\overline{PX}}{Q} \Longrightarrow \overline{RX} = \Phi^{-1}$.

-Os triângulos PRT e XRZ são semelhantes, pois $\overline{PT}$ é paralelo a $\overline{XZ}$, logo

$$\frac{\overline{XZ}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{RX}}{\overline{RP}} \Longrightarrow$$

$$\frac{\overline{XZ}}{1} = \frac{\Phi^{-1}}{1+\Phi^{-1}} \Longrightarrow$$

$$\overline{XZ} = \Phi^{-2}.$$

- O pentágono A', B', C', D', E', possui lados cada qual com comprimento igual a Φ^2.

-Os triângulos $A'B'Q$ e PQR são opostos pelo vértice e $\overline{A'B'}$ e $\overline{PQ}$ são paralelos, logo eles são semelhantes. Assim:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{A'Q}}{\overline{PQ}} \Longrightarrow$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{1+\frac{1}{\Phi}} = \frac{\Phi}{1} \Longrightarrow$$

$$\overline{A'B'} = \mathbf{\Phi}^2$$

-A relação entre os raios dos círculos é dada por: $\frac{R}{r} = \mathbf{\Phi}^2$

-Na Figura 21, dobrando o triângulo $A'PQ$ na linha PQ, e repetindo o processo para os outros triângulos correspondentes do pentagrama, de modo que os pontos A', B', C', D' e E' se encontrem em H, obtemos uma pirâmide de altura $\overline{OH}$, Figura 22. Daí, tiramos que

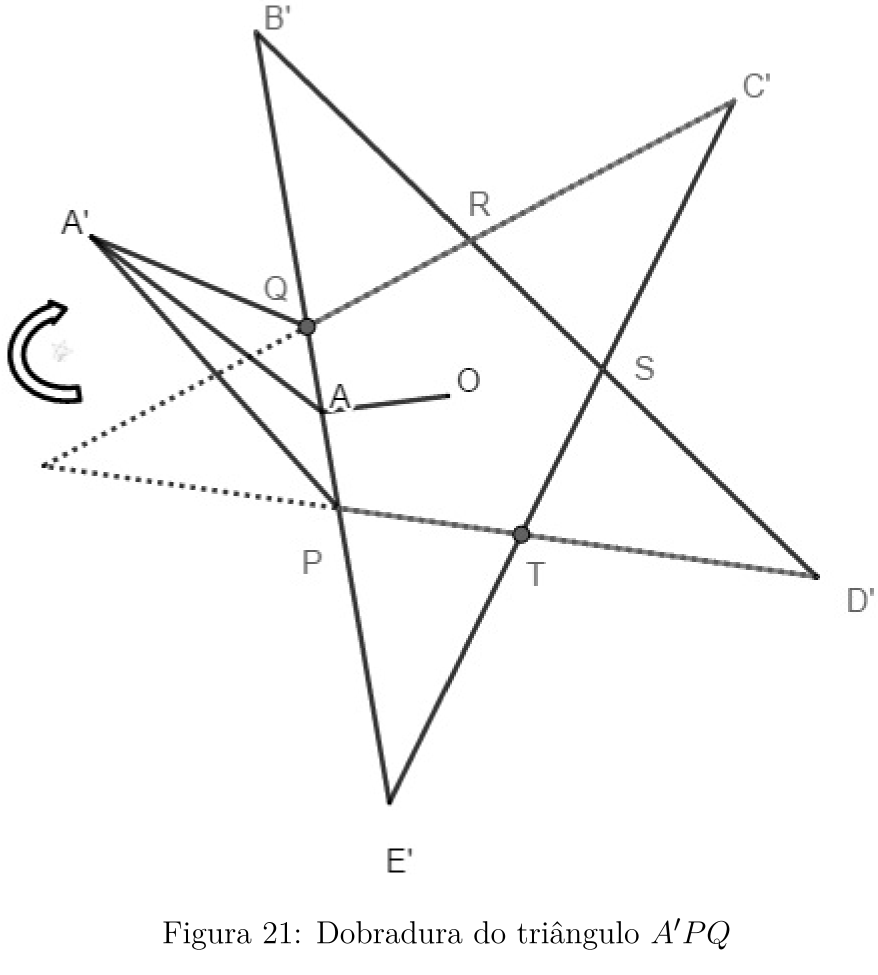


Figura 21: Dobradura do triângulo $A'PQ$

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = 2 \text{ e } \frac{\overline{OH}}{r} = \mathbf{\Phi}$$

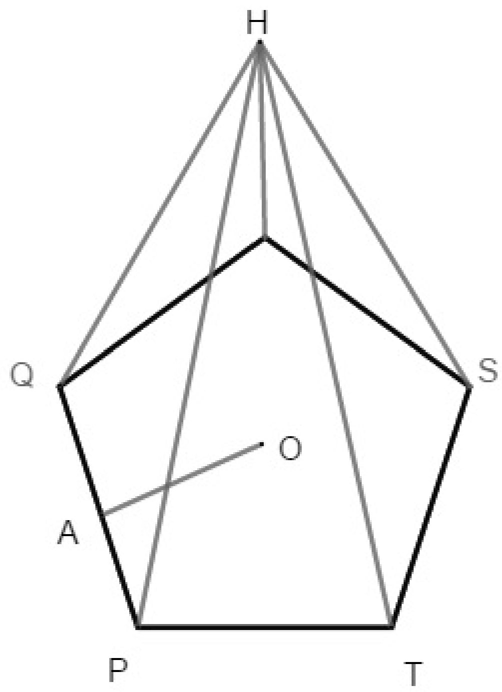


Figura 22: Pirâmide $HSTPQ$

6

ONDE ENCONTRAMOS O NÚMERO DE OURO

6.1 A PRIMEIRA BANDEIRA DO CHILE E O NÚMERO DE OURO

Existem diferentes métodos de se obter a proporção áurea. Talvez o mais simples seja dado pelo triângulo mágico- triângulo isósceles formado por dois ângulos de 72° e um de 36°. Quando dividimos o comprimento do lado maior pelo lado menor, encontramos o Número de Ouro. Quando traçamos a bissetriz do ângulo 72°, obtemos dois ângulos de 36°; o segmento obtido pela intersecção da bissetriz com o lado oposto ao ângulo determina, também, a razão áurea (Figura 23), portanto temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \mathbf{\Phi}$$

Outro triângulo com propriedade similar é o que possui dois ângulos de 36° e um ângulo de 108°, onde a razão do lado maior pelo menor também é igual a $\mathbf{\Phi}$.

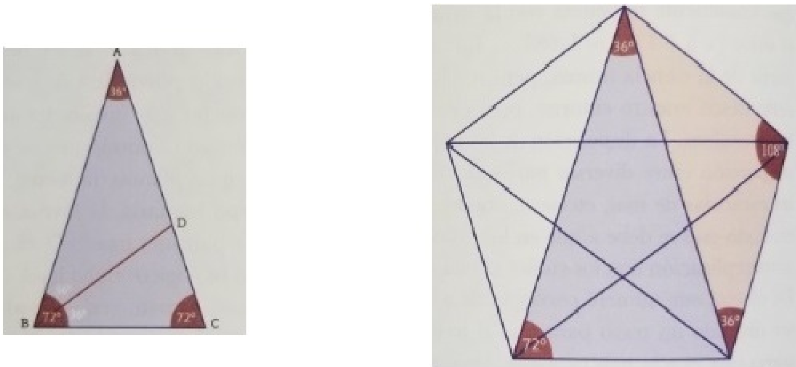


Figura 23: Triângulo áureo

O Número de Ouro está estritamente ligado ao pentágono regular, os triângulos mágicos aparecem quando traçamos as diagonais do pentágono, dando origem à estrela de cinco pontas.

A bandeira nacional do Chile, *estrela do Chile* também conhecida como *estrela solitária* é dividida horizontalmente em duas partes iguais: a parte inferior vermelho e a parte superior branco, com um retângulo azul à esquerda no qual está inserida uma estrela branca de cinco pontas.

O retângulo azul possui $\sqrt[4]{5}$ m de largura por $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ m de comprimento. A razão entre a largura e o comprimento é igual a $0,72654\cdots$ que corresponde à

Figura 24: Bandeira do Chile de 1818

tangente 36°. Desse modo a intersecção das diagonais do retângulo azul formam, à esquerda e à direita, dois ângulos de 72°, esse ângulo corresponde à quinta parte de uma circunferência. Na parte inferior e superior da intersecção das diagonais, formam-se dois ângulos iguais a 108°, que podem ser divididos em três ângulos iguais a 36°.

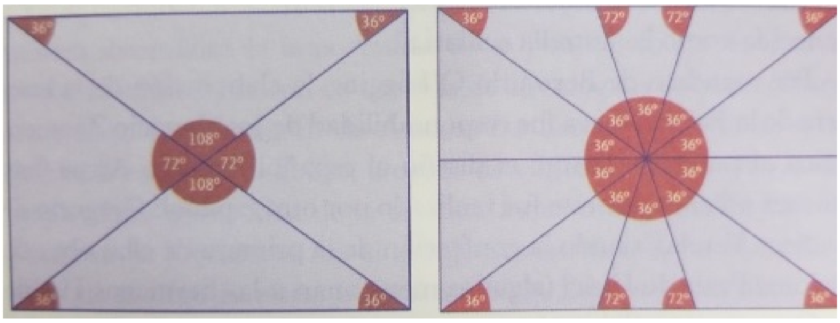


Figura 25: Retângulo azul dividido pela intersecção das duas diagonais em dois ângulos de 36° e dois ângulos de 72°

No centro do retângulo, passam 5 linhas que formam consecutivamente ângulos de 36°. Dessa forma, escolhendo alternadamente cinco pontos nesses traços, sobre uma circunferência cujo o centro é a intersecção das diagonais do retângulo, obtemos os vértices de estrela pentagonal regular com uma inclinação para a esquerda.

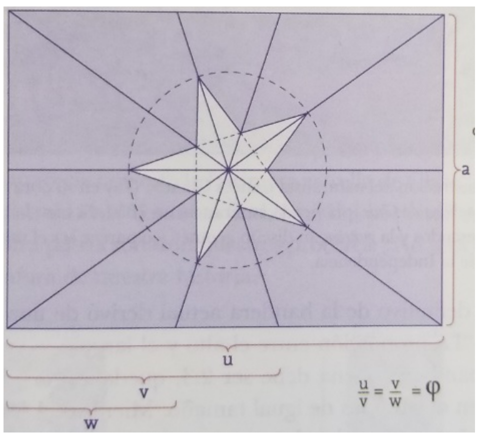


Figura 26: Razão áurea - Antiga Bandeira do Chile

Observando a Figura 26, percebemos que alguns de seus triângulos são mágicos, determinando dessa forma a razão áurea, portanto temos

$$\frac{u}{v} = \frac{v}{w} = \Phi$$

6.2 ÁRVORE GENEALÓGICA DO ZANGÃO

Segundo Contador [2], as abelhas fêmeas se desenvolvem a partir de um ovo fertilizado, assim tem pai e mãe. A abelha macho ou zangão se desenvolve a partir de um ovo não fertilizado, ou seja, o zangão não tem pai, mas tem uma mãe e dois avós maternos, três bisavós- sendo dois pais da avó mais a mãe do avô- cinco trisavós, onde dois pais para cada bisavó e uma mãe para o seu bisavô, etc. Observando os números encontrados nessa árvore genealógica, 1, 1, 2, 3, 5, 8, . . . , pertencem a Sequência de Fibonacci, conforme a Figura 27.

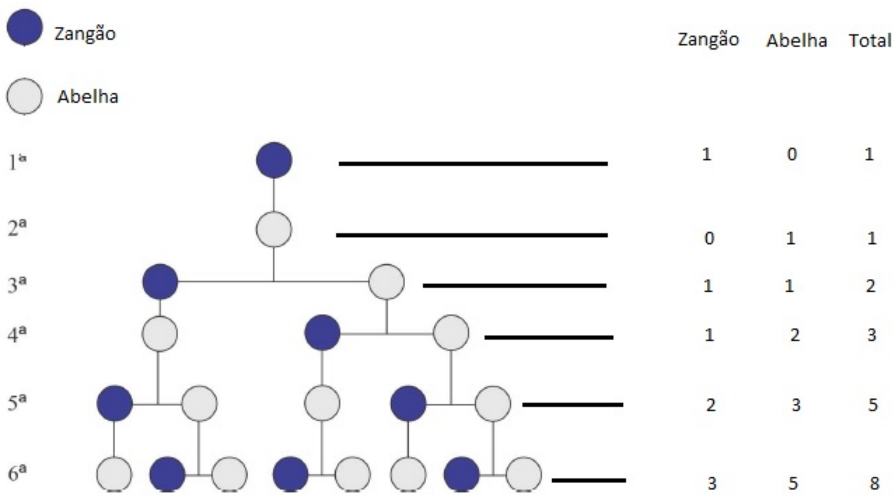


Figura 27: Representação genealógica da reprodução das abelhas numa colmeia.

Como podemos observar, os Números de Fibonacci aparecem de forma inusitada na árvore genealógica de um zangão.

6.3 A ESPIRAL ÁUREA NA NATUREZA

O girassol é uma flor muito fascinante, sua beleza não se resume apenas ao seu formato ou no movimento realizado, diariamente, seguindo o sol. A distribuição das sementes no núcleo do girassol formam várias espirais no sentido horário e no anti-horário. De acordo com Contador [2], quando contamos a quantidade de espirais de um girassol, dependendo do tamanho, encontramos 21 espirais orientadas num sentido, sobrepostos a 34 espirais no outro sentido. O mais surpreendente é o fato de que, quando contamos o número de espirais de um girassol, obtemos quase invariavelmente dois termos 21 e 34, 34 e 55, 55 e 89 ou 89 e 144, Figura 28, novamente temos os números da Sequência de Fibonacci.

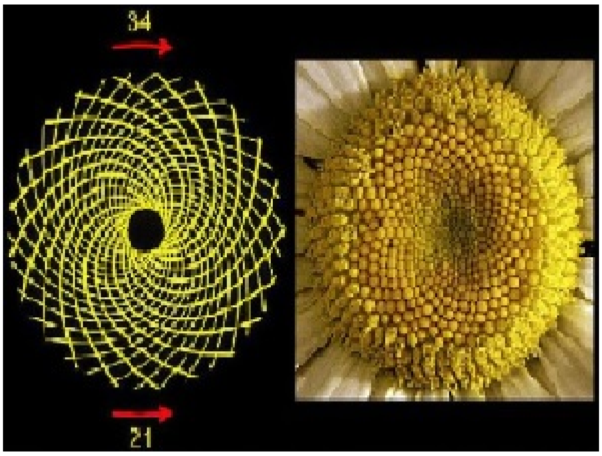


Figura 28: Girassol e suas espirais

Podemos observar, na pinha, que suas pétalas não são distribuídas de forma aleatória . Sua distribuição forma dois tipos de espirais: um para direita e o outro para esquerda. O número de pétalas, quase sempre, segue os Números de Fibonacci. Geralmente, uma pinha possui 5 e 8 ou 8 e 13 espirais (Figura 29).

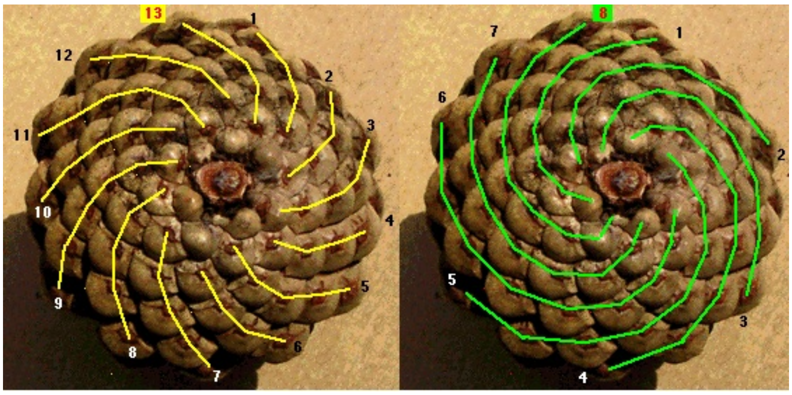


Figura 29: Espiral de uma pinha vista superiormente.

De acordo com Contador [2], existe também um pequeno molusco, conhecido por *Nautilus ponpilius* (Figura 30), que habita em uma concha marinha construída por ele mesmo, onde encontramos a Proporção Áurea. Conforme o molusco vai crescendo, é construída uma nova câmara maior para morar. Comparando a câmara anterior com a nova, verificamos que estão em proporção áurea, ou seja, quando ampliarmos umas das câmaras anteriores, notaremos que se encaixa perfeitamente na seguinte, se ampliarmos todas as câmaras, ao mesmo tempo, uma por uma se encaixa na câmara seguinte. Isso demonstra que são construídas na mesma proporção-a Proporção Áurea.

Figura 30: À esquerda o *Nautilus ponpilius*, e à direita em corte.

6.4 O PENTÁGONO NA NATUREZA

É fácil encontrar na natureza a forma geométrica do pentágono, talvez seja a forma mais visível e simples. A Natureza apresenta essa esta forma em vários seres vivos como exemplos: a petúnia, o jasmim estrela, a estrela-do-mar, a flor-de-cera, dentre outros.

Como vimos no capítulo anterior, o pentágono está ligado diretamente à Proporção Áurea, ou seja, ao Número de Ouro, pois ele está presente no seu interior. Se traçarmos as diagonais de um pentágono regular (ângulos internos congruentes e lados de mesmo tamanho), a partir de dois vértices consecutivos, essas diagonais cortam-se segundo a Proporção Áurea, e os segmentos maiores são congruentes ao lado do pentágono.

Figura 31: À esquerda, a flor petúnia e, à direita estrela do mar

De a acordo com Contador [2], o pentágono não está relacionado somente com a vida vegetal, também está presente na vida animal e, inclusive, na vida humana. Essa estreita relação com os seres vivos, deu-lhe o status de figura geométrica símbolo da vida.

De acordo com Huntley [6], o pentagrama era também considerado, pelos membros da antiga sociedade de Pitágoras, um símbolo de boa saúde. Era um símbolo

Figura 32: Pentágono no interior da maçã.

sagrado que mostrava harmonia entre o corpo e a alma. Atribuíam virtudes especiais ao pentagrama, porque é uma figura que pode ser construída por uma linha única, linha fechada entrelaçada e, por isso, era considerado o símbolo da perfeição.

6.5 O NÚMERO DE OURO E A ARQUITETURA

Um arquiteto, por via da matemática ou da geometria, procura uma forma de organização para sua construção, não buscando apenas expressar a beleza mas, também, harmonia e estética em seu projeto arquitetônico. O arquiteto romano Marcus Vitruvius Pollio, que viveu por volta dos anos 90 e 20 A.C., aborda em seu trabalho *De architectura*, composto por dez livros, que para conseguir essas qualidades, o arquiteto deve buscar para seu trabalho as proporções da natureza. Vitrúvio (livro III, capítulo I) afirmava que a beleza de uma obra arquitetônica não se limita a uma aparência de bom gosto e encantadora mas, também, quando num todo os seus elementos são proporcionais. Para Vitrúvio, o arquiteto tinha que conhecer a matemática e geometria. O retângulo de ouro é tido por muitos como o mais agradável aos olhos, suas propriedades artísticas e estéticas podem ser observadas tanto na arquitetura, quanto nas esculturas gregas. Para os gregos, esse retângulo representava a lei da beleza Matemática.

6.5.1 *Luca Pacioli*

Pacioli [6], como matemático, foi um grande estudioso e admirador da secção áurea, como mostra o tratado escrito por ele- *De divina proportione*- que pode ser dividido em três partes. A primeira, *Compendium de divina proportione* trata dos poliedros regulares; da divisão de um segmento em média e extrema razão; da razão áurea e, então, obtém treze propriedades entre elas: se em um pentágono equilátero equiangular (polígono com ângulos internos congruentes e os cinco lados

[6] È considerado um dos principais responsáveis pelo ressurgimento do Renascimento, do interesse da divisão proporcional de Pitágoras de média e extrema razão. Morreu em 1515, e desde então, seus trabalhos ficaram esquecidos por quase quatro séculos(Fonte [6])

Figura 33: Retrato de Pacioli

iguais) traçarmos as diagonais, a partir de dois vértices consecutivos, essas diagonais cortam-se segundo a proporção áurea, e os segmentos maiores são congruentes ao lado do pentágono. A segunda parte é uma tratado de arquitetura baseado no trabalho de Vitrúvio elencam-se algumas regras na construção civil. A terceira parte é uma tradução, do latim para o italiano, do trabalho do pintor italiano Piero della Francesca, *Libellus de Quince Corporibus Regularibus*, um trabalho sobre a construção dos poliedros regulares e as aplicações da secção áurea na Arquitetura.

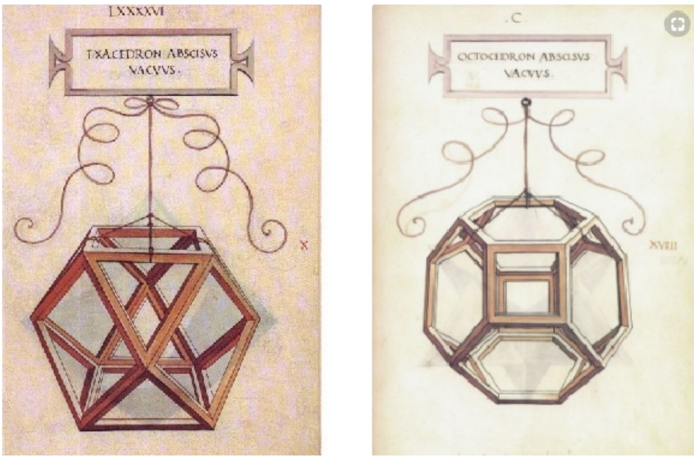


Figura 34: Ilustração de Leonardo da Vinci para o livro de Pacioli

A representação do poliedro na Figura 34, é uma das mais de 60 ilustrações de Leonardo Da Vinci, encomendada por Luca Pacioli para ilustrar o livro “De Divina Proportione”, um tratado sobre a razão áurea aplicada à geometria, escrito entre 1496 e 1498.

6.5.2 *Le Corbusier*

Charles-Édouard Jeanneret, 1887-1965, mais conhecido como Le Corbusier, apresentou um sistema de medidas para seus projetos arquitetônicos fundamentado na proporção humana. Entendia ele que seu sistema de medida atenderia tanto as exigências de beleza, por originar-se da Proporção Áurea, quanto às exigências funcionais, pois também estava relacionada com as medidas do homem. Seu sistema recebeu o nome de Modulor, (módulo de ouro). Para ele seria um instrumento universal, pois uma vez que era baseado nas proporções do ser humano, seria de fácil execução e poderia ser usado no mundo inteiro, levando a racionalidade e beleza.

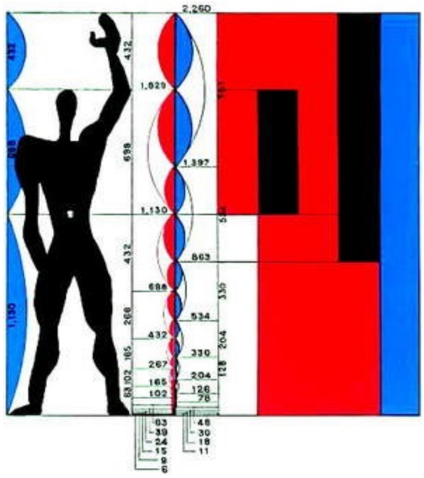


Figura 35: O Modulor, baseado nas proporções humanas.

O *Modulor* é um sistema baseado nas medições médias do corpo humano, usando a Razão de Ouro, através do retângulo áureo e da Sequência de Fibonacci. Existem dois modulor: o modulor de 1,75, conhecido como versão azul, e o modulor com 1,83, versão vermelha. A criação do modulor tinha como objetivo conseguir uma medida harmônica para a escala humana, uma média global que poderia ser aplicada na arquitetura e na mecânica.

O modulor é a combinação de duas séries coordenadas de segmentos áureos que estabelecem um sistema proporcional e relacionado com a estatura humana, evidentemente, com um padrão médio escolhido: uma grandeza referencial que determina as dimensões e proporções criadas dentro deste critério definido pela proporção áurea. Sua construção fundamentou-se em três medidas básicas, 43 cm, 70 cm, e 113 cm. Diretamente percebemos que $113 = 70 + 43$ cuja razão é uma boa aproximação do Número de Ouro. Também é fácil constatar que 113 tem como secção áurea 70 e que 70 tem secção áurea 43 e, que 43 é 113 - 70. A secção áurea de 43 é 27 que é igual a 70 - 43, e assim sucessivamente. Foi assim que Le Corbusier iniciando do número 113 continuou, nos dois sentidos, construindo uma série de secções áureas a que chamou série vermelha:

$$4, 6, 10, 16, 27, 43, 70, 113, 183, 296$$

A escolha do número 113 nos deixa entender que está relacionado com as proporções do corpo humano, já que a medida da estatura humana correspondia à medida

183 cm, e que a medida que vai do solo ao umbigo seria de 113 cm e do umbigo a parte superior da cabeça 70 cm , cuja razão chega bem próximo do Número de Ouro.

Um homem medindo 1,83m, com seu braço erguido a uma altura de 2,26m, foi inserido em um quadrado, a razão entre a altura do homem (183cm de altura) e a altura do seu umbigo (113cm) foi escolhida precisamente em uma razão áurea. A altura total (dos pés até o braço levantado) também estava dividido em proporção áurea (em 140cm e 86cm) no nível do pulso de um braço solto para baixo (Figura 36). Os dois quocientes $(\frac{113}{70})$ e $(\frac{140}{86})$ foram subdivididos em dimensões ainda menores. De acordo com a série de Fibonacci, cada número sendo igual à soma dos dois anteriores, conforme a Figura 37.

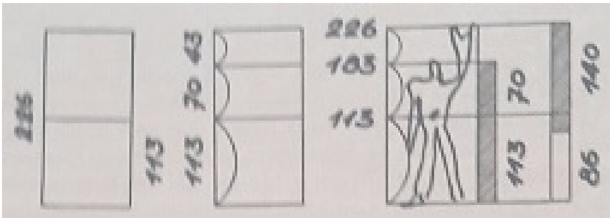


Figura 36: A medidas de um homem inserido em um quadrado.

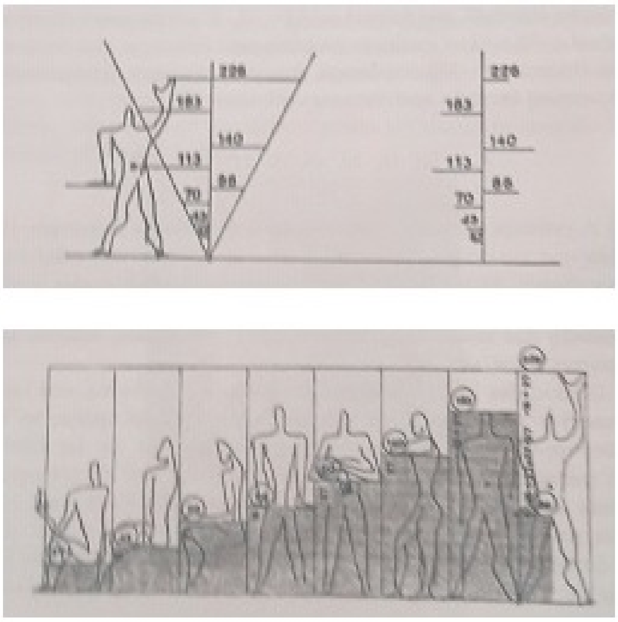


Figura 37: Medidas usadas por Le Corbusier em se trabalho.

O Modulor foi apresentado ao público, na metade do Século XX, e seu sucesso foi responsável por uma nova publicação, alguns anos depois.

Um exemplo de onde podemos encontrar a aplicação do “Modulor” é na obra arquitetônica Chapel de Notre Dame du Haut, figura 38 e 39 de Le Corbusier, sua obra mais conhecida, onde temos:

Figura 38: Chapel de Notre Dame du Haut, localizado em Ronchamp, na França.

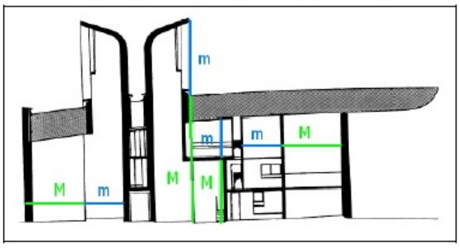


Figura 39: Chapel de Notre Dame du Haut- Razão Áurea entre as dimensões M e m .

$$\frac{M+m}{M} = \frac{M}{m},$$

cujo resultado é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6.5.3 *O Paternon*

Figura 40: Partenon, construído na Acrópole de Atenas- Grécia.

O Paternon ("o lugar da virgem" em grego) foi construído entre 447 e 432 A.C. É um belíssimo templo com aproximadamente 70 metros de comprimento e 30 metros de largura. O Partenon estava rodeado por colunas em todo seu perímetro, 8 nas fachadas principais e 17 nas laterais. Foi construído na Acrópole de Atenas, como um templo sagrado, para o culto de Atena Paternos (Atenas a Vigem). Construído pelo arquiteto e escultor Fídias, um dos maiores escultores da Grécia antiga. Partenon, talvez seja a mais famosa construção da Grécia antiga; nela encontramos vários Retângulos de Ouro.

Figura 41: O fabuloso Partenon e sua arquitetura áurea.

À frente do Templo há um retângulo em que o lado maior dividido pelo lado menor é igual à divisão do lado menor, pela diferença do lado maior e lado menor. Podemos afirmar que os gregos não utilizaram essas medidas por acidente, pois eles sabiam, principalmente Fídias, que retângulos ou construções com essas proporções eram mais harmoniosas, mais belas, consequentemente, mais encantadoras aos olhos.

Existem alguns exemplos sobre como o retângulo áureo se ajusta a frente do Paternon. Sua planta mostra que o templo foi construído tendo por base um retângulo com o comprimento igual à raiz quadrada de cinco e largura igual a um. E as Cariátides- figuras humanas, geralmente femininas, esculpidas em fachadas da Grécia antiga cuja função era justamente dar o suporte para a construção- estavam dispostas segundo Retângulos Áureos.

Figura 42: As cariátides e os retângulos de ouro.

De acordo com Contador [2], Pitágoras estudou a secção áurea e conhecia que ela era a base das proporções do corpo humano. Essa descoberta, com o passar do tempo, teve grande repercussão na arte grega. O Partenon talvez seja o melhor exemplo.

6.5.4 *A Catedral de Notre Dame*

A definição de beleza relacionada ao Número de Ouro foi muito bem admitida no mundo ocidental, e com certeza teve grande influência nas artes em geral. Na construção civil, entre outras, a Catedral de Notre Dame na França é um exemplo fabuloso. A construção da sua parte frontal é composta por vários retângulos de ouro, como podemos verificar na Figura 43.

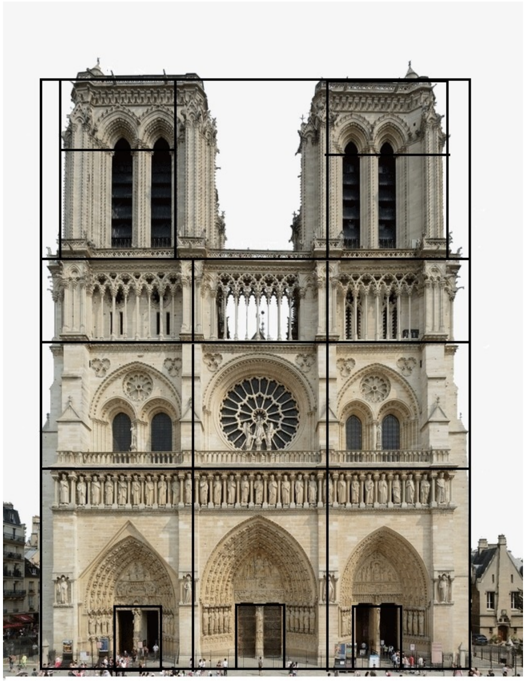


Figura 43: Catedral de Notre Dame.

Na época renascentista , os artistas usavam frequentemente a secção áurea, dividindo a superfície de uma pintura em agradáveis proporções, bem como os arquitetos a utilizavam para analisar as proporções dos edifício. A primeira edição italiana do *De Architectura*, de Vitrúvio, utilizou a proporção áurea para analisar a edificação da Catedral de Milão.

6.6 O HOMEM E A PROPORÇÃO ÁUREA

A percepção das proporções humanas tem variado muito ao longo dos séculos. Como mencionado na seção anterior, um dos primeiros documentos sobre esse assunto foi escrito por Marcus Vitruvius Pollo, arquiteto e escritor romano do século I. Segundo Vitruvius :

> ... no corpo humano, o ponto central naturalmente é o umbigo. Porque se um homem for colocado deitado de costas, com as mãos e os pés estendidos e um compasso for centrado no seu umbigo, os dedos de suas mãos e seus pés irão tocar a circunferência do círculo descrito, a partir desse ponto e, assim, como o corpo humano produz um contorno circular, uma figura quadrada também pode ser encontrada a partir dele. Pois, se medirmos a distância das solas dos pés até o topo da cabeça, e depois aplicarmos essa medida aos braços esticados, veremos que a largura será a mesma que a altura, como no caso de superfícies planas que são perfeitamente quadradas.

Muitos estudiosos renascentistas consideraram essa passagem mais uma demonstração da ligação entre a base orgânica e a geométrica da beleza, e isso levou ao conceito do " Homem Vitruviano", desenhado por Leonardo da Vinci, Figura 44.

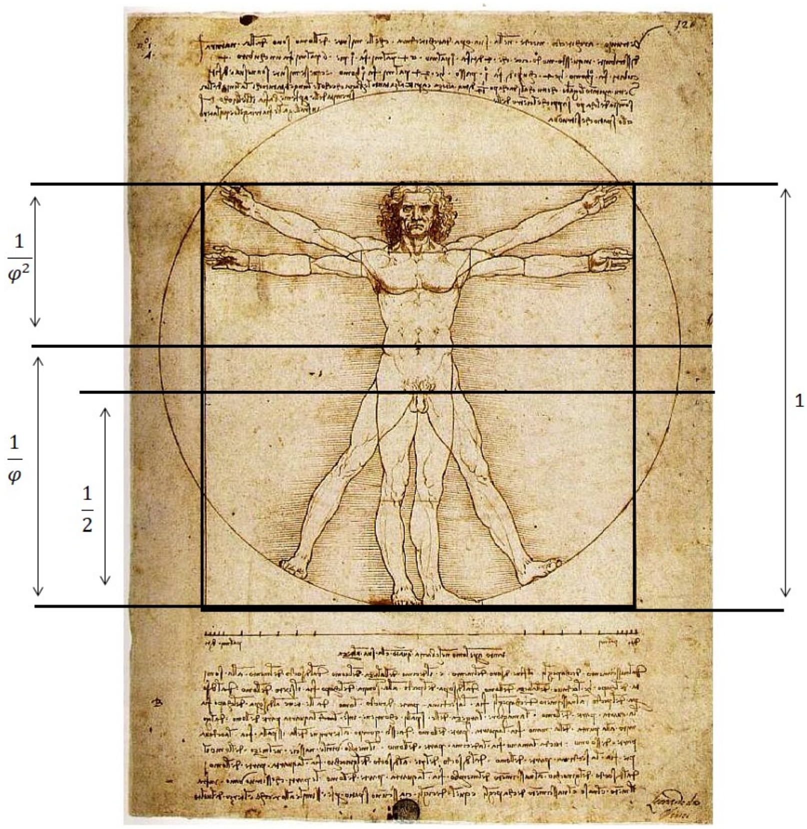


Figura 44: Homem Vitruviano

Essa relação adjacente do corpo humano com o círculo e o quadrado é baseada na ideia arquetípica da " quadratura do círculo", que tanto fascinou os antigos. Essas formas eram consideradas perfeitas e até sagradas: o círculo simbolizava as órbitas celestes e o quadrado era uma representação da estabilidade "quádrupla" da terra. Os dois combinados no corpo humano sugerem, na linguagem dos padrões simbólicos, que unimos dentro de nosso corpo as diversidades do céu e da terra.

De acordo com Contador [2] o umbigo divide o corpo humano de acordo a Proporção Áurea, ou seja, o resultado da divisão da altura total de uma pessoa pela altura do seu umbigo é próximo ao Número de Ouro. Quando uma criança nasce, o umbigo está situado exatamente no meio do corpo. Com o crescimento o umbigo passa a ocupar a posição de divisão Φ, e o órgão genital é que passa a ocupar o meio do corpo. Assim, se a altura total for 1, a altura até o umbigo será $\frac{1}{\Phi}$ e do umbigo até o alto da cabeça será $\frac{1}{\Phi^2}$, e o órgão genital $\frac{1}{2}$.

Leonardo da Vinci foi o primeiro a demonstrar que o corpo humano é formado por estruturas cujas raízes proporcionais sempre se aproximam ao Número de Ouro. O número Φ aparece de várias maneiras em nosso corpo: quando dividimos a altura total pela altura do umbigo; dividindo a distância que vai do ombro até as pontas dos dedos pela distância do cotovelo até as pontas dos dedos; dividindo a altura dos quadris pela altura do joelho.

Após várias tentativas de Vitrúvio para encaixar as proporções do corpo humano dentro da figura de um quadrado e um círculo, foi apenas com Leonardo que o encaixe saiu perfeito, dentro dos padrões matemáticos esperados.

7

SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA A SALA DE AULA

O ensino da Matemática, em muitas escolas, vem sendo apresentada de forma mecânica, os docentes não procuram contextualizar os conteúdos desenvolvidos, apenas reproduzem o conteúdo do livro didático, enchendo os alunos com uma sequência de atividades que não fazem nenhum sentido para eles, causando um profundo desinteresse pela aprendizagem, principalmente para aqueles que apresentam uma maior dificuldade com a disciplina.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais [9],

> o ensino de Matemática prestará sua contribuição, à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios.

Entendemos que a matemática para ser aprendida, necessita ser praticada. No entanto, existem outras maneiras, através das quais os alunos podem receber mais estímulos e motivação para estudá-la. Uma dessas formas é a aproximação do conteúdo com a sua realidade, mostrando que a matemática está presente em nosso dia a dia.

Dessa forma, o Número de Ouro, juntamente com a Sequência de Fibonacci, se tornam excelentes instrumentos para demonstrar a conexão da Matemática com o cotidiano dos alunos, além do mais, contribui para despertar a curiosidade e motivar os alunos na aprendizagem da Matemática.

Nesse capítulo, apresentaremos algumas atividades voltadas para os alunos do ensino básico com o intuito de tornar o ensino-aprendizagem da Matemática mais divertido e prazeroso buscando assim, despertar seu interesse e sua motivação.

7.1 CONSTRUÇÃO DO SEGMENTO ÁUREO COM DOBRADURA

Assunto : Segmento de reta.

Público alvo: 6° ano- Ensino Fundamental.

Material: Folha A4, lápis, régua e borracha.

Objetivo: Construir o Segmento Áureo, através de dobradura de uma folha.

Duração: 1 hora-aula

Metodologia: Aula expositiva e os alunos deveram ser divididos em grupos.

Atividade

Utilizando a dobradura, marque o lado menor de uma folha A4 na proporção áurea.

1 ° - Dobre a ponta da folha A4 até a sua lateral, de modo a obter um quadrado.

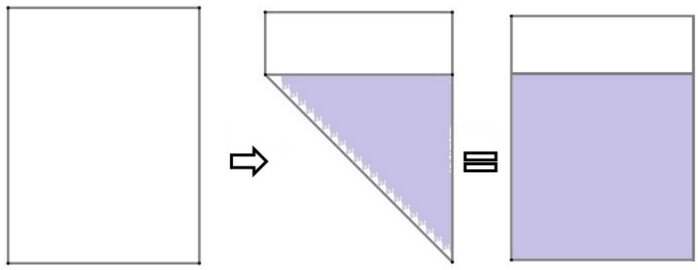


Figura 45: Quadrado obtido a partir da dobra de uma folha A4

2 ° - Considere os dois vértices A e B inferiores do quadrado. Inicialmente, dobre o quadrado ao meio, obtendo os pontos C e D.

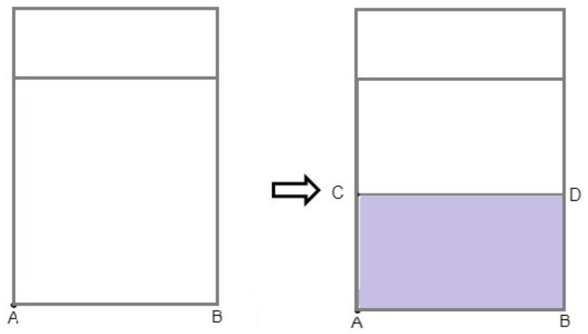


Figura 46: Quadrado dobrado ao meio obtendo o segmento $\overline{CD}$

3 °- Dobre a diagonal do retângulo que contém os vértices A e B.

4 °- Dobre o segmento $\overline{BD}$ até a diagonal $\overline{AD}$ e marque o ponto E.

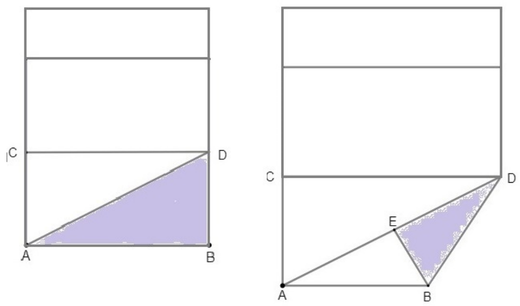


Figura 47: Triângulo ABD obtido dobrando a metade do quadrado

5°- Dobre o lado $\overline{AB}$ sobre a diagonal $\overline{AD}$, marcando o ponto E' coincidente ao ponto E sobre o lado $\overline{AB}$.

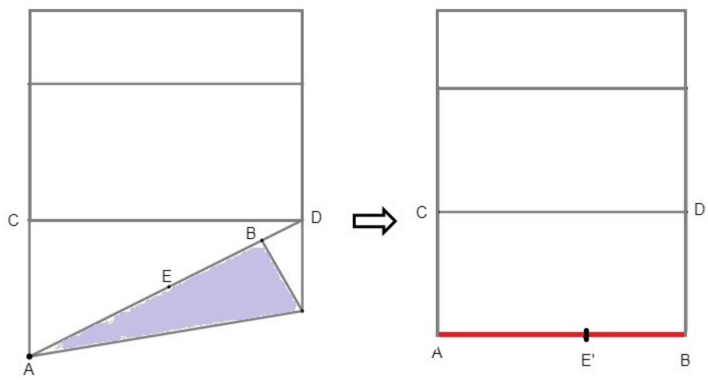


Figura 48: Segmento áureo

6°- Com a régua meça o segmento $\overline{AE'}$ e $\overline{BE'}$.

7°- Calcule a razão entre $\overline{AE'}$ e $\overline{BE'}$.

$$\frac{\overline{AE'}}{\overline{BE'}}$$

Portanto, temos que E' divide o segmento $\overline{AB}$ em média e extrema razão.

7.2 CONSTRUÇÃO DO SEGMENTO ÁUREO COM RÉGUA E COMPASSO

Assunto : Razão, proporção e Equação do 2° grau .

Público alvo: 9° ano- Ensino Fundamental.

Material: Folha A4, lápis, borracha, régua, compasso, paquímetro e calculadora.

Objetivo: Determinar o valor do Número de Ouro através de segmentos de reta, utilizando a razão, proporção e equação do 2° grau; Construir com régua e compasso o segmento áureo; Verificar através do paquímetro e a calculadora, se o segmento construído é o segmento áureo.

Duração: 2 hora-aulas

Metodologia: A aula será ministrada no quadro negro com régua e compasso e os alunos organizados em grupos.

Atividade - 1^a parte

O Número de Ouro pode ser obtido por intermédio de um segmento, através da seguinte definição:

Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor.

Então, a razão do segmento maior com o segmento menor é o Número de Ouro.

Observe a Figura 49.

Figura 49: Segmento Áureo.

De acordo com a definição, utilizando a razão, proporção e a fórmula de Bhaskara, obtenha o valor do Número de Ouro.

Resolução:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

que pode ser escrito da seguinte forma

$$\frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

Suponhamos que $\frac{a}{b} = x$, substituindo temos:

$$1 + \frac{1}{x} = x$$

$$x + 1 = x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Utilizando a fórmula de resolução de uma equação do 2° grau (fórmula de Bhaskara), onde os coeficientes constantes são $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$, temos:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.(1).(-1)}}{2.1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Logo, temos duas raízes reais

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618 \text{ e } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0,618$$

Como se trata de medida de comprimento consideremos a raiz positiva, portanto

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618.$$

Assim, a relação $\frac{a}{b}$ representa o Segmento Áureo.

2^a **parte:** Dado um segmento $\overline{AB}$ qualquer, construa com régua e compasso o segmento áureo, conforme os passos a seguir:

(a) Coloque a ponta seca do compasso em A, com abertura maior do que $\frac{\overline{AB}}{2}$; trace um arco para cima e para baixo do segmento $\overline{AB}$;

(b) Coloque a ponta seca do compasso em B com a mesma abertura anterior; trace um arco para cima e para baixo do segmento $\overline{AB}$;

(c) Una os pontos onde os arcos se cruzam por um segmento de reta;

(d) Marque o ponto médio M, onde o segmento de reta intersecta $\overline{AB}$;

(e) Prolongue a reta que contém o segmento $\overline{AB}$, com a ponta seca do compasso em B e abertura $\overline{BM}$; trace um arco que intersecta a reta que contém $\overline{AB}$ e marque o ponto C;

(f) Coloque a ponta seca do compasso em B com abertura maior do que $\overline{MB}$, e trace um arco para cima e para baixo do segmento $\overline{BC}$;

(g) Coloque a ponta seca do compasso em C, com abertura maior do que $\overline{MB}$; trace um arco para cima e para baixo do segmento $\overline{BC}$;

(h) Una os pontos onde os arcos se cruzam por um segmento de reta perpendicular a $\overline{AB}$ em B;

(i) Com a ponta seca em B e comprimento $\overline{MB}$, marque o pondo D na reta perpendicular a $\overline{AB}$ em B;

(j) Una os pontos A e D com um segmento de reta obtendo, assim, o triângulo ABD;

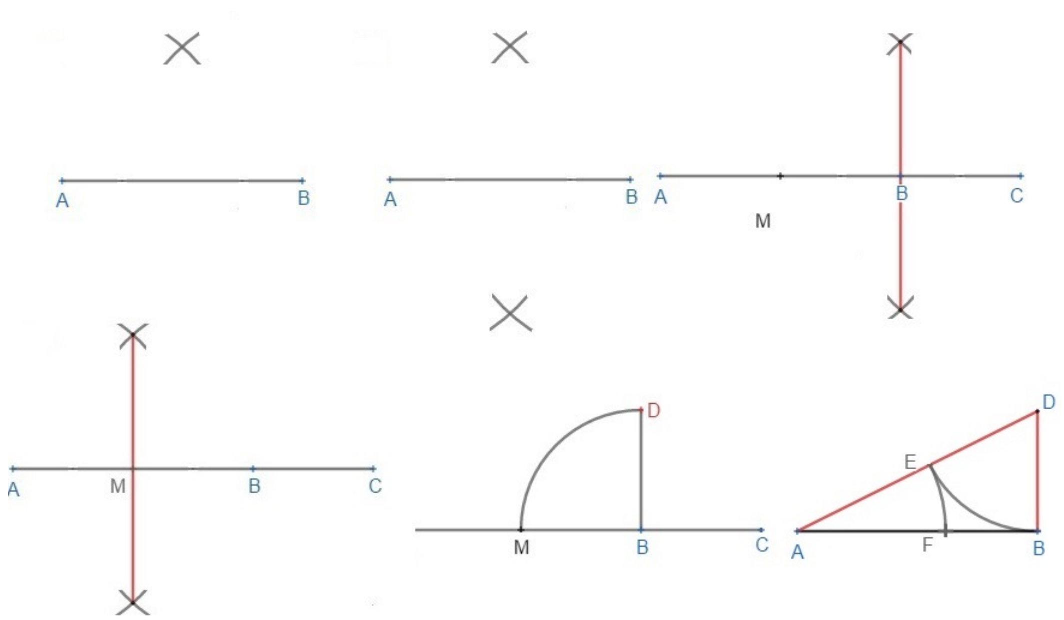
(k) Coloque a ponta seca do compasso no vértice D do triângulo e abra até o ponto B. Use este raio para marcar o ponto E na hipotenusa do triângulo;

(l) Com a ponta seca do compasso no vértice A, abra-o até o ponto E marcado na hipotenusa, e use este raio para marcar o ponto F no segmento $\overline{AB}$.

(m) Com a régua, meça a medida do segmento $\overline{AF}$ e, de $\overline{FB}$, com o auxílio da calculadora, determine a razão de $\overline{AF}$ por $\overline{FB}$.

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \Phi$$

O ponto F é o ponto que divide o segmento $\overline{AB}$ em duas partes, onde o maior segmento é 1,618... vezes o menor;



Portanto, obtemos o ponto F que divide o segmento $\overline{AB}$ em média e extrema razão.

As atividades 7.1 e 7.2 são semelhantes às atividades aplicadas em sala de aula por Santos [10] e estão vinculadas à construção geométrica. De acordo com o seu trabalho, a maioria de seus alunos gostaram das atividades e pediram para que houvesse outras aulas sobre o conteúdo abordado. Também afirmaram que não haviam, ainda, utilizado o compasso e a régua e que apesar das dificuldades encontradas com os instrumentos, ficaram muito satisfeitos em concluírem as atividades.

7.3 SEQUÊNCIA DE 1S E 0S

Assunto : Conjunto numérico.

Público alvo: 6° ano- Ensino Fundamental.

Material: Caderno, caneta, lápis e borracha.

Objetivo: Reconhecer a Sequência de Fibonacci em uma sequência de 1s e 0s.

Duração: 1 hora-aula

Metodologia: Os alunos serão separados em grupos e a aula será ministrada no quadro negro.

Atividade

Sequência de Fibonacci é uma sucessão de números que obedecem um padrão em que cada elemento subsequente é a soma dos dois anteriores. É a sequência numérica proposta pelo matemático Leonardo Pisa, mais conhecido como Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...$$

Originou-se a partir do problema da reprodução de coelhos contido no livro Liber Abacci de Leonardo Pisa.

Considere o seguinte algoritmo simples para a criação de uma sequência. Comece com o número 1, e depois, substitua o 1 por 10. Daí por diante, troque cada 1 por 10 e cada 0 por 1.

(a) Escreva as 8 primeiras linhas dessa sequência.

1

10

101

10110

10110101

1011010110110

101101011011010110101

1011010110110101101011011010110110

(b) Escreva o número de 1s que aparecem em cada linha da sequência.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21.

(c) A partir da segunda linha, escreva o número de 0s que aparecem em cada linha da sequência.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13.

(d) Observando as respostas obtidas do item (b) e (c) e analisando as informações contidas na atividade, qual a sequência obtida?

A sequência de Fibonacci.

(e) Determine o quociente entre o último e o penúltimo termo da sequência obtida.

$\frac{13}{8} = 1,625$

(f) E do sexto com o quinto termo da sequência?

$\frac{5}{3} = 1,66666\cdots$

Os quocientes obtidos são uma aproximação do valor do Número de Ouro (Φ). Se estendermos, a sequência o quociente obtido de dois termos consecutivos se aproxima cada vez mais do Número de Ouro.

7.4 CONSTRUÇÃO DA ESPIRAL ÁUREA UTILIZANDO A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Assunto : Conjuntos - sequência numérica, geometria plana, razão.

Público alvo: 8° ano- Ensino Fundamental.

Material: Folha A4, folha quadriculada, lápis, borracha, régua, compasso.

Objetivo: Obter a quantidade de pares de coelhos gerados em um ano; Escrever a sequência do número de pares de coelhos gerados em um ano, buscando a relação existente entre eles; Construir a espiral áurea utilizando a sequência de Fibonacci; Utilizar, adequadamente, os instrumentos de medida.

Duração: 2 hora-aulas

Metodologia: A aula deverá ser ministrada no quadro negro utilizando compasso, régua e giz, de forma mais detalhada possível, caso o aluno tenha alguma dúvida, o professor deverá orientá-lo.

Atividade

O problema a seguir motivou a criação da Sequência de Fibonacci.

"Um homem pôs um casal de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos casais de coelhos podem ser gerados a partir desse casal em um ano se, supostamente, todo mês cada casal dá à luz a um novo casal, que é fértil, a partir do segundo mês e não há mortes de coelhos?"

De acordo com o problema, responda :

1.Qual a quantidade de pares de coelhos obtidos no décimo segundo mês?

Solução:

1° mês: 1
2° mês : 1
3° mês : 2
4° mês : 3
5° mês : 5
6° mês : 8
7° mês: 13
8° mês : 21
9° mês : 34
10° mês : 55
11° mês : 89
12° mês : 144

2. Escreva a sequência do número de pares de coelhos, referente aos doze primeiros meses.

{1, 1, 2, 3, 5, 8 ,13, 21, 34, 55, 89, 144.}

3. Observando essa sequência, descubra a relação existente entre esses termos.

O termo seguinte é igual à soma dos dois termos anteriores a ele.

4. Seguindo os passos abaixo, construa a espiral áurea, utilizando os números da Sequência de Fibonacci.

1°) Utilizando a folha quadriculada, construa dois quadrados de lado 1, um sobre o outro, formando um retângulo 2 por 1.

2°) Do lado direito desse retângulo, construa um quadrado de lado 2, obtendo um retângulo de lados 3 por 2;

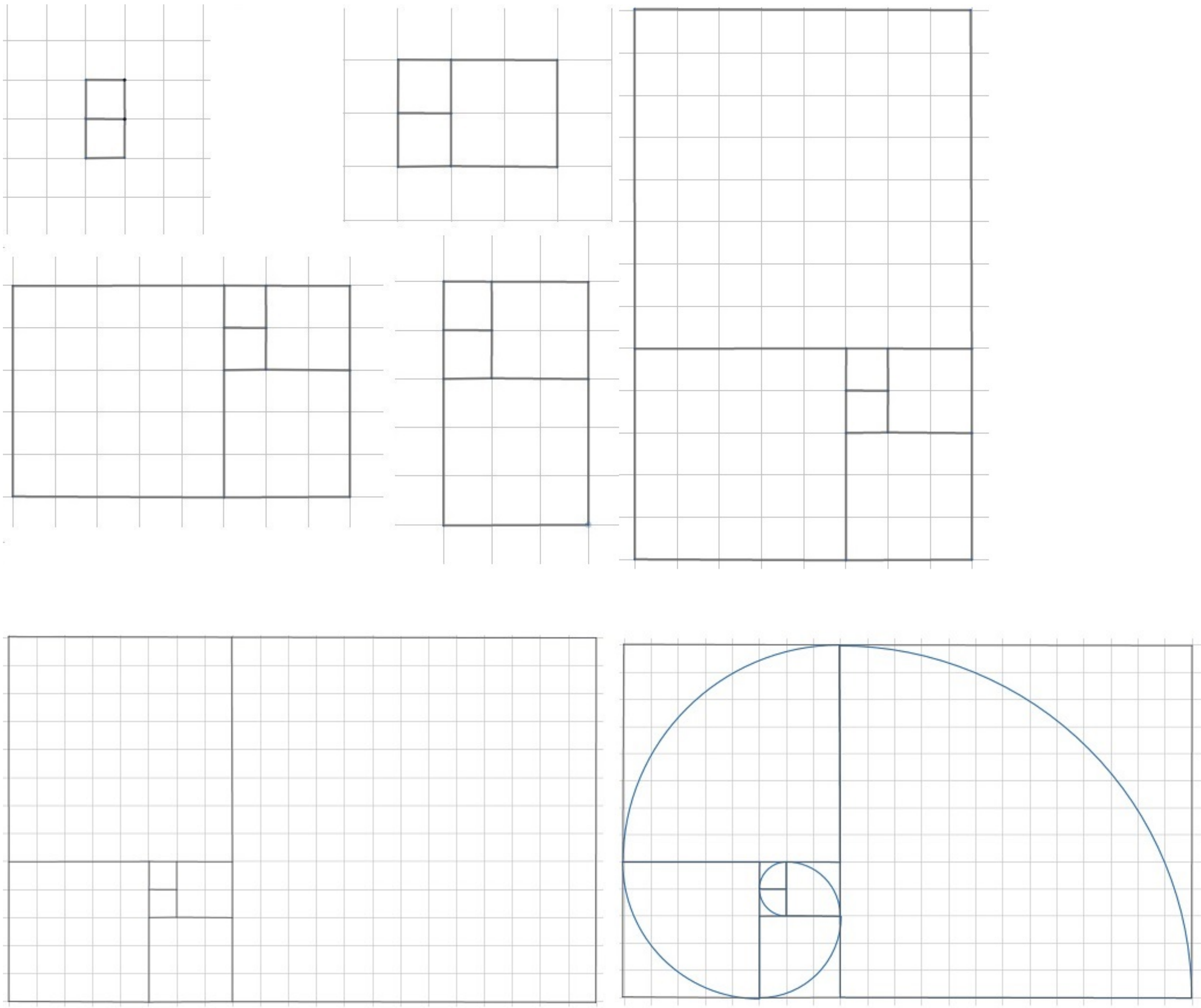
3°) Embaixo desse retângulo (3 por 2), construa um quadrado de lado 3, obtendo um retângulo de lados 5 por 3;

4°) Do lado esquerdo do retângulo (5 por 3), construa um quadrado de lado 5, obtendo um retângulo de lados 8 por 5;

5°) Na parte de cima do retângulo (8 por 5), construa um quadrado de lado 8, obtendo um retângulo de lados 13 por 8;

6 °) No lado direito do retângulo (13 por 8), construa um quadrado de lado 13, obtendo um retângulo de lados 21 por 13;

7 °) Agora, usando o compasso, trace um quarto de círculo nos quadrados obtidos, originando a espiral áurea.



Curiosidade: Quando determinamos a razão entre o comprimento e a largura do retângulo, que contém a espiral áurea, obtemos uma aproximação do número de ouro, $\frac{21}{13} = 1,61538\ldots$. O Número de Ouro é um número irracional representado pela letra grega $\mathbf{\Phi}$ (phi), que representa matematicamente a perfeição.

As atividades 7.3 e 7.4 são referentes à Sequência de Fibonacci, e são semelhantes às atividades apresentadas por Santos [10] as quais foram aplicadas em sala de aula, obtendo boa repercussão. Os alunos se sentiram motivados por não encontrarem dificuldades em realizá-las.

7.5 BANDEIRA DO BRASIL ÁUREA

Assunto : Geometria plana e razão.

Público alvo: 7° ano- Ensino Fundamental.

Material: Folha A4, lápis, borracha, régua, compasso, transferidor e lápis de cor.

Objetivo: Construir a bandeira do Brasil com dimensões áureas, utilizando o triângulo e o retângulo áureo.

Duração: 2 hora-aulas

Metodologia: A aula será ministrada no quadro negro com régua e compasso e os alunos organizados em grupos.

Atividade

A bandeira do Brasil é composta por uma base verde em forma de retângulo, sobreposta por um losango amarelo e um círculo azul, no meio do qual está atravessada uma faixa branca com o lema nacional, em letras maiúsculas verdes. O Brasil adotou oficialmente este projeto para sua bandeira nacional, em 19 de novembro de 1889, substituindo a bandeira do Império do Brasil.

Figura 50: Bandeira do Brasil

Construa uma bandeira do Brasil, de forma que suas proporções estejam em razão áurea. Utilize o retângulo e o triângulo áureo de modo que as dimensões do retângulo estejam em função das dimensões do losango.

1° **passo:** Construir o triângulo áureo com os ângulos da base igual a 72° com régua, compasso e transferidor.

-Em um seguimento qualquer, marque os pontos A e B;

-Com a ponta seca do compasso em A e abertura $\overline{AB}$, trace um semicírculo;

-Com a ponta seca do compasso em B e abertura $\overline{AB}$, trace um semicírculo;

-Una com uma reta a intersecção dos dois semicírculos, os pontos C e D respectivamente;

-Com o transferidor em A, marque o ângulo de $72\,°$;

-Com o transferidor em B, marque o ângulo de $72\,°$;

- Temos os ângulos A e B iguais a $72\,°$;

- Marque o ponto E na intersecção das retas que passam pelos ângulos A e B, e a reta que passa pelos pontos C e D;

-Una os pontos A e E , B e E;

- Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180\,°$, temos que o ângulo em E igual a $36\,°$.

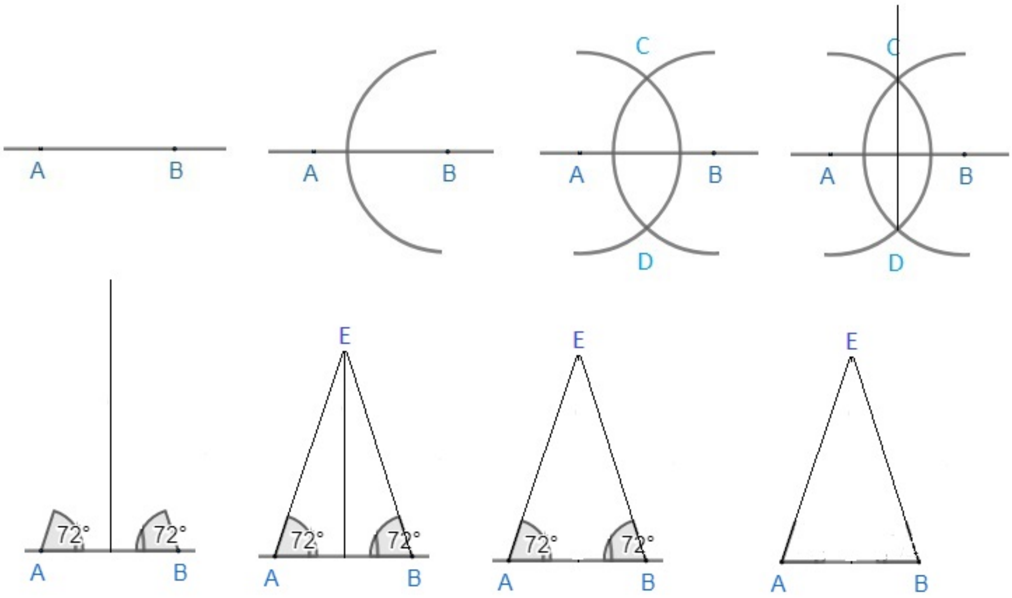


Figura 51: Construção do triângulo áureo ABE

Considerando $\overline{AE} = a$ e $\overline{AB} = b$, temos que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{a}{b} = \Phi.$$

Portanto, temos o triângulo áureo ABE.

Repita o processo para obter o segundo triângulo áureo.

$2\,°$ **passo:** Una pela base os dois triângulos áureos, de modo a obter um losango de lado a.

$3\,°$ **passo:** Construir o retângulo áureo em função das dimensões do losango.

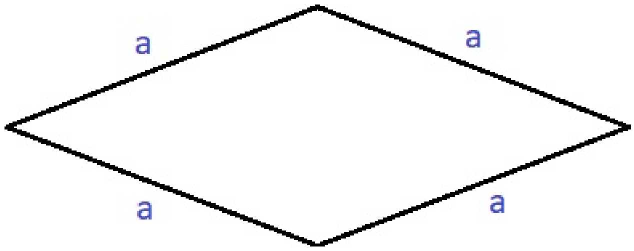


Figura 52: Losango de lado a

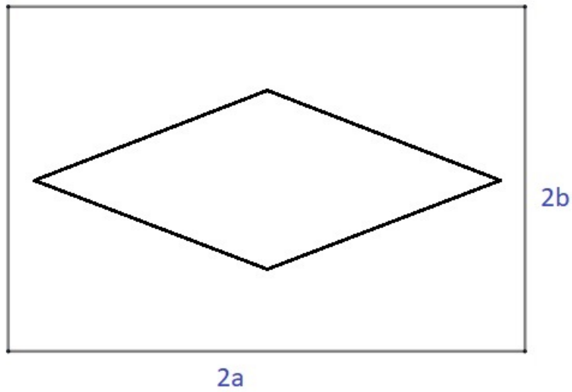
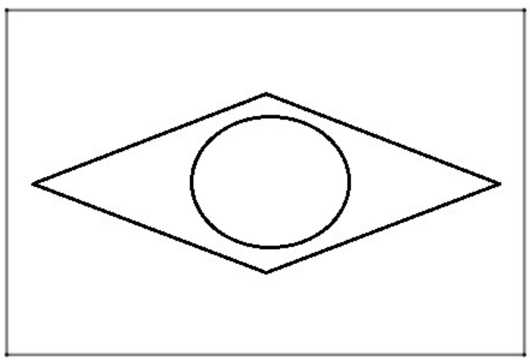


Figura 53: Retângulo de base $2a$ e altura $2b$

- O retângulo terá a medida da base igual a duas vezes o lado do losango ($2a$), e a medida da altura igual a duas vezes a medida da diagonal menor do losango ($2b$).

Portanto $\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = \mathbf{\Phi}$.

4 $^\circ$ **passo:** Inserir o círculo dentro do losango.



5 $^\circ$ **passo:** Realizar a pintura da bandeira.

Assim, temos a bandeira do Brasil áurea formada por retângulo e losango cuja as dimensões estão em razão áurea.

Figura 54: Bandeira do Brasil áurea

7.6 ARQUITETO ÁUREO

Assunto : Razão, proporção, escala e regra de três simples.

Público alvo: 7° ano- Ensino Fundamental.

Material: Caderno, régua, lápis, borracha, cola, tesoura, cartolina ondulada, tinta guache branca, palitos de madeira 12 mm e isopor.

Objetivo: Construir maquete do Partenon utilizando a razão, proporção e regra de três simples; Desenvolver habilidades para o trabalho em grupo; Reconhecer conteúdos em comum, em duas ou mais disciplinas, através da interdisciplinaridade.

Duração: 5 hora-aulas

Metodologia: Será passado um vídeo sobre a arquitetura e o Número de Ouro, Depois os alunos serão divididos em grupos para realizar a revisão bibliográfica, registrando todas as informações e cálculos necessários no caderno. A atividade realizada será desenvolvida juntamente com as disciplinas de história e artes, fomentando a interdisciplinaridade.

Atividade

O edifício do Partenon, construído com mármore branco do Monte Pentélico, foi concebido para abrigar a imagem de ouro e marfim de Atena Parthenos- uma colossal estátua de doze metros de altura, elaborada por Fídias. Com aproximadamente 70 metros de comprimento e 30 de largura, o Partenon estava rodeado por colunas em todo seu perímetro, 8 nas fachadas principais e 17 nas laterais.

Figura 55: O fabuloso Partenon e sua arquitetura áurea.

O Partenon foi construído entre os anos 447 e 432 A.C. na Acrópole, é um dos monumentos mais importantes da antiga civilização grega, além do edifício mais representativo de toda Grécia. Nela, encontramos vários retângulos de ouro. A frente do templo configura-se num retângulo em que o lado maior dividido pelo lado menor resulta no Número de Ouro.

Construa uma maquete do Partenon procurando reproduzir características e proporções existentes no edifício.

1° **passo**: Sabendo que a frente do Templo é um retângulo cujas dimensões estão em proporção áurea, calcule a altura do Partenon.

$\frac{30}{x} = \mathbf{\Phi}$

Considerando $\mathbf{\Phi} \cong 1,618$, temos que

$x = \frac{30}{1{,}618}$

$x \cong 18,54m$

2° **passo**: Calcular as medidas da maquete baseado nas dimensões da planta baixa, utilizando a escala 1:100.

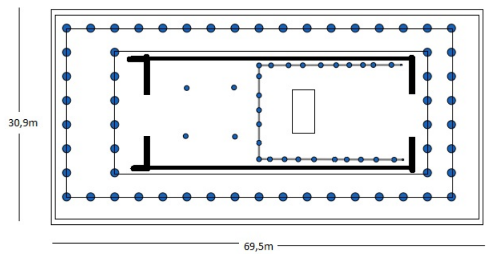


Figura 56: Esboço da planta baixo do Partenon.

Medida do comprimento real	escala	razão	medida do desenho
69,5 m = 6950 cm	1:100	6950:100	69,50cm

Medida da altura real	escala	razão	medida do desenho
18,54 m = 1854 cm	1:100	1854:100	18,54cm

Medida da largura real	escala	razão	medida do desenho
30,9 m= 3090 cm	1:100	3090:100	30,9cm

3° **passo**: Confeccionar as partes que compõem o Partenon: Base de isopor (69,5 cm por 30,9 cm); colunas de cartolina ondulada; telhado de palito de picolé.

4° **passo**: Confeccionar a maquete.

Após a confecção das maquetes, será organizada uma exposição onde os alunos poderão expor os trabalhos realizados por eles. Durante a exposição será realizada a votação do melhor trabalho atribuindo o título de Arquiteto Áureo, ao confeccionador da maquete com maior número de votos.

7.7 A PROPORÇÃO ÁUREA NA CRIAÇÃO DO LOGO

Assunto : Geometria plana e Razão.

Público alvo: Ensino Fundamental e médio.

Material: Folha, lápis, borracha, régua, dvd e lápis de cor.

Objetivo: Aplicar o conceito de razão áurea na criação de um logotipo.

Duração: 2 hora-aulas

Metodologia: Para o desenvolvimento da atividade será necessário exibir um vídeo sobre logotipo. Portanto, será utilizada a tv, dvd e o quadro negro. Os alunos deverão ser organizados em grupos.

Atividade

No sentido lato, o termo LOGO pode ser usado como o conjunto formado pela representação gráfica do nome de determinada marca, em letras de traçado específico, fixo e característico (logotipo) e seu símbolo visual (figurativo ou emblemático) o que, por extensão de sentido, pode ser entendido como a representação visual de qualquer marca.

Um grupo de alunos ganhou medalha de ouro na OBMEP. Para receberem a medalha, os alunos deveriam comparecer na cidade de Brasília. Porém a escola não possuía um LOGO que representasse seu nome. Diante dessa situação, a diretora da escola, juntamente com o professor de matemática, propôs o seguinte concurso:

"LOGO ESCOLA ESTADUAL MARQUÊS DE SAPUCAÍ"

O LOGO deve ser criado de modo que na sua confecção apareça a razão áurea. O objetivo do concurso é escolher o melhor LOGO para o representar a escola na entrega das medalhas da OBMEP.

O LOGO acima foi criado com dois triângulos isósceles amarelo e preto inferiormente e superiormente, onde a razão da base do triângulo pelo seu lado seja igual a $\boldsymbol{\Phi}$. As dimensões do retângulo, onde está contido o LOGO também estão em razão áurea.

Figura 57: Logotipo da Escola Estadual Marquês de Sapucaí

7.8 A PROPORÇÃO ÁUREA NO CORPO HUMANO

Assunto : Sistema de medidas e razão.

Público alvo: 6° ano- Ensino Fundamental.

Material: Tv, dvd, folha, lápis, borracha, dvd e fita métrica.

Objetivo: Reconhecer a existência do Número de Ouro; Identificar diferentes situações onde é encontrado o Número de Ouro; Demonstrar, de forma prática e curiosa, a presença da proporção áurea no corpo humano; Promover a socialização e discussão entre os alunos; Despertar o interesse pela matemática.

Duração: 2 hora-aulas

Metodologia: Para o desenvolvimento da atividade,será necessário exibir um vídeo "Aula de Matemática: proporção áurea", para a turma se familiarizar com assunto. Portanto, será utilizada a tv, dvd e o quadro negro. Os alunos deveram ser organizados em grupos.

Atividade

O Homem Vitruviano

O nome "homem vitruviano" deriva de um trabalho realizado pelo arquiteto romano chamado Marcus Vitruvius Pollio, quem apresentou um estudo matemático, no século I A. C. Nesse estudo, Vitruvius descreve, num Tratado de Arquitetura, as proporções ideais do corpo humano.

É o nome de um desenho icônico feito por Leonardo da Vinci (1452 - 1519), e representa o ideal clássico do equilíbrio, da beleza, da harmonia e da perfeição das proporções do corpo humano. Em seus estudos de anatomia, ele descobriu que o corpo humano obedece a uma proporção: a proporção áurea.

1. Utilizando uma fita métrica, obtenha as medidas de comprimento, a seguir, completando as tabelas abaixo.

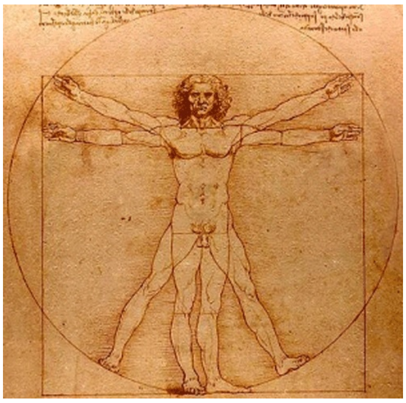


Figura 58: Homem Vitruviano

Medida da altura da pessoa	Medida da altura do umbigo até o chão	razão

Medida da cintura até a cabeça	Medida do tamanho do tórax	razão

Medida da altura do crânio	Medida da mandíbula até o alto da cabeça	razão

Medida do ombro à ponta do dedo	Medida do cotovelo à ponta do dedo	razão

Medida do tamanho dos dedos	Medida da dobra central até a ponta do dedo	razão

Medida do quadril ao chão	Medida do joelho até o chão	razão

2. Calcule a razão entre essas medidas, ou seja, determine o quociente da medida da altura de uma pessoa pela medida da altura do umbigo até o chão; repita esse processo para as outras tabelas.

3. Comparando os resultados obtidos, o que você observou?

O número cujo valor é uma aproximação de 1,618...é conhecido como **"Número de Ouro"**, encontrado em muitos lugares como na arquitetura, natureza, no corpo humano. Esse número é o representante matemático da perfeição. Ele aparece nas coisas que consideramos mais belas.

8 CONCLUSÃO

Quando decidimos empreender estudo acerca do Número de Ouro, não fazíamos ideia do tamanho do desafio e riqueza que esse número tinha a oferecer, visto que ele foi encontrado em diversos contextos. Desde a antiguidade até aos dias atuais, vem despertando um profundo interesse e fascínio, pela beleza, harmonia e suas aparições em lugares inesperados.

Não era de imaginar que uma simples definição de "razão extrema e média", dada por Euclides e o problema de reprodução dos coelhos de Leonardo Fibonacci, puderam produzir tanto empenho, dedicação e questionamentos no campo da Matemática ou fora dela.

A história da razão áurea se entrelaça ao trabalho de Fibonacci: a sequência de Fibonacci e a conhecida Espiral Áurea fundamentaram ou ainda fundamentam as várias relações e estudos do Número de Ouro na fauna, flora, arquitetura e no corpo humano, já que o limite de razões sucessivas dos termos da Sequência de Fibonacci converge ao Número de Ouro.

Na geometria, o retângulo de ouro merece realce pois, suporte para a construção da Espiral Áurea, o pentagrama construído a partir de um pentágono regular, encontrado com frequência na natureza, arquitetura, revela o quanto a beleza e a harmonia estão ligadas a presença da razão áurea.

Vimos vários exemplos onde o Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci podem ser encontrados: na árvore genealógica de um zangão: na distribuição das sementes no núcleo do girassol, em construções antigas como a Pirâmide do Egito e o Partenon etc.

Mostramos através de algumas sugestões de atividades para sala de aula como o conceito da Razão Áurea e da Sequência de Fibonacci podem ser utilizados no desenvolvimento de alguns conteúdos do Ensino Básico, como o de Razões e Proporções, Equações Quadráticas, Sequências Numéricas e Geometria Plana.

Diante dessas considerações, entendemos que o desenvolvimento desse trabalho foi muito importante para nós, enquanto professores, pois confirma que é possível encontrar formas diferenciadas de promover o ensino-aprendizagem da Matemática, buscando resgatar o gosto dos alunos pela disciplina, pois as crianças ao ingressarem na escola gostam da matemática, entretanto, não é difícil constatar que o seu interesse diminui à medida que avançam pelos ciclos.

Portanto, o Número de Ouro se apresenta como um excelente instrumento para demostrar a conexão da Matemática com o cotidiano dos alunos, contribuindo para despertar sua curiosidade e motivação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BOYER, Carl B. História da Matemática; tradução Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücler, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

[2] CONTADOR, Paulo Roberto Martins. A matemática na arte e na vida, 3ª ed. rev. - São Paulo, Editora Livraria da Física, 2013.

[3] DOCZI, Gyorgy. O poder dos limites: harmonia e proporção na natureza, arte e arquitetura; tradução Maria Helena de Oliveira Tricca e Julia Bárány Bartolomeu- São Paulo, Editora Mercuryo, 1990.

[4] FERRER, Joseane V., O Número de Ouro na Arte, Arquitetura e Natureza. Disponível em `www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_IV/numero_de_ouro.pdf>` Acesso em: 27 de fevereiro de 2018.

[5] FLORES, Andrés N. Un Viaje a las Ideas: 33 historias matemáticas asombrosas, 1ª Edição Santiago: Planeta, 2017.

[6] HUNTLEY, H. E. A Divina Proporção - Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática. Brasília : Editora Universidade de Brasília, 1985.

[7] LIVIO, Mario, 1945 – Razão Áurea: a história de Fi, um número surpreendente. Tradução Marco Shinobu Matsumura 4ª Edição Rio de Janeiro: Record, 2009.

[8] MORGADO, Augusto C. Matemática Discreta, 2ª Edição Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[9] PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DO ENSINO MÉDIO: Pcns. 1997. Disponível em `http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>`. Acesso em: 24 mar. 2018.

[10] SANTOS, Maria Dayane D. Número de Ouro na Educação Básica: construções geométricas na sala de aula- Maceió, 2014.

[11] ZAHN, Maurício Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderrna Ltda.,2011.