UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional- PROFMAT

FLAVIO RIBEIRO DA SILVA

TRAJETÓRIAS DE SUCESSO ESCOLAR: CAPACITANDO PROFESSORES POR MEIO DE UM MINICURSO PARA O ENSINO DE FUNÇÕES BÁSICAS UTILIZANDO O RECURSO COMPUTACIONAL GEOGEBRA

Teófilo Otoni
2018

FLAVIO RIBEIRO DA SILVA

TRAJETÓRIAS DE SUCESSO ESCOLAR: CAPACITANDO PROFESSORES POR MEIO DE UM MINICURSO PARA O ENSINO DE FUNÇÕES BÁSICAS UTILIZANDO O RECURSO COMPUTACIONAL GEOGEBRA

Dissertação apresentada à Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – PROFMAT – Programa de Mestrado em Rede Nacional, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Faissal Brito.

Teófilo Otoni

2018

Ficha Catalográfica
Preparada pelo Serviço de Biblioteca/UFVJM
Bibliotecário responsável: Gilson Rodrigues Horta – CRB6 nº 3104

S586t
2019

Silva, Flavio Ribeiro da.

Trajetórias de sucesso escolar: capacitando professores por meio de um minicurso para o ensino de funções básicas utilizando o recurso computacional GeoGebra. / Flavio Ribeiro da Silva. Teófilo Otoni, 2019.

201 p. ; il.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Faissal Brito.

1. Funções básicas. 2. Metodologia de ensino. 3. Ensino e aprendizagem. 4. Resolução de situações-problemas. 5. GeoGebra. I. Título.

CDD: 510

FLAVIO RIBEIRO DA SILVA

TRAJETÓRIAS DE SUCESSO ESCOLAR: CAPACITANDO PROFESSORES POR MEIO DE UM MINICURSO PARA O ENSINO DE FUNÇÕES BÁSICAS UTILIZANDO O RECURSO COMPUTACIONAL GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, nível de MESTRADO como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA

Orientador (a): Prof. Dr. Alexandre Faissal Brito

Data da aprovação : 07/12/2018

Prof.Dr. ALEXANDRE FAISSAL BRITO - UFVJM

Prof.Dr. CARLOS HENRIQUE ALEXANDRINO - UFVJM

Prof.Dr. ANTÔNIO FRANCISCO CRUZ ARAPIRACA - CEFET - MG

TEÓFILO OTONI

Dedico este Trabalho a Deus, aos meus pais, a meu irmão e a minha filha.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus primeiramente, dono de tudo e de todos. Ele me deu vida, saúde, força, inteligência e capacidade para realizar o sonho de ser mestre. Ofereceu ainda, segurança conduzindo-me de São Mateus – ES a Teófilo Otóni – MG, ao longo de todo o mestrado.

Agradeço aos meus pais Fausto José da Silva e Maria da Penha Ribeiro da Silva, minha filha Melissa Bonomo Ribeiro, meu irmão Gleidson Ribeiro da Silva por terem me ajudado de todas as maneiras possíveis.

Agradeço a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) pela organização e coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Agradeço a Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM) por ofertar a estrutura física para eu cursar o mestrado.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro ao me conceder a bolsa de estudos.

Agradeço aos professores do PROFMAT, em especial ao professor Doutor Alexandre Faissal Brito, pela orientação e pelas sugestões durante a elaboração da dissertação.

Agradeço aos meus amigos do PROFMAT pelos momentos de aprendizados coletivos, pelos momentos companheirismo e pelos momentos de descontração.

Finalmente, agradeço a todos que de alguma maneira me ajudaram a realizar o sonho de ser mestre.

A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo. (Pitágoras)

RESUMO

O cenário nacional objetiva evolução no processo de ensino e aprendizado de matemática, requisitando então a necessidade de tornar o ensino de matemática mais atrativo e consistente. Neste sentido destacamos pesquisas e estudos de casos têm sido realizados mostrando uma possível opção facilitadora no ensino da matemática: o auxílio dos recursos tecnológicos no processo ensino e aprendizagem de matemática na educação básica, em especial o software de matemática dinâmica GeoGebra, particularmente aplicado ao ensino de funções básicas. Objetivamos nesta produção, oportunizar aos professores de matemática da educação básica uma alternativa metodológica para o ensino e aprendizagem de funções básicas, utilizando o recurso computacional de matemática dinâmica GeoGebra, bem como discutir e refletir uma alternativa facilitadora ao ensino de matemática, elaborando e disponibilizando um documento que possa ser consultado parcial ou integralmente junto ao ensino de funções básicas com o auxílio do recurso computacional GeoGebra. Como proposta metodológica empregamos a metodologia de pesquisa, a pesquisa qualitativa do tipo bibliográfica baseada na análise de conteúdo é compreendida como a etapa essencial em todo trabalho científico que foi decisiva em todas as etapas e proporcionou o embasamento teórico. Definimos e apresentamos um plano de aula versando sobre funções básicas e mostramos a aplicação do GeoGebra como ferramenta propulsora ao ensino deste conteúdo, especialmente por meio de animações, da relação que há com os coeficientes reais apresentado em cada função e da resolução de situações-problemas relacionadas a funções básicas com o auxílio do GeoGebra. Consideramos finalmente a pertinência do software de matemática dinâmica associado ao ensino de funções básicas, frente a atual configuração nacional que cada vez mais faz o uso da tecnologia por parte dos discentes, que requer proporcionalmente a necessidade de seu emprego, por parte do docente. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Palavras-chave: Funções Básicas. Metodologia de Ensino. Ensino e Aprendizagem. Resolução de Situações-Problemas. GeoGebra.

ABSTRACT

The national scenario aims to evolve the teaching and learning process of mathematics, thus requiring the need to make teaching mathematics more attractive and consistent. In this sense we highlight researches and case studies have been carried out showing a possible facilitating option in the teaching of Mathematics: the aid of technological resources in the teaching and learning process of mathematics in basic education, especially GeoGebra dynamic mathematics software, particularly applied to teaching functions. In this paper, we aim to provide teachers of basic education mathematics with a methodological alternative for the teaching and learning of basic functions, using the computational resource of GeoGebra dynamic mathematics, as well as discussing and reflecting a facilitating alternative to mathematics teaching, elaborating and making available a document that can be consulted partially or integrally to the teaching of basic functions with the aid of the computational resource GeoGebra. As a methodological proposal we used the research methodology, the qualitative research of the bibliographic type based on the analysis of content is understood as the essential step in all scientific work that was decisive in all the stages and provided the theoretical basis. We define and present a lesson plan about basic functions and show the application of GeoGebra as a propulsive tool to teach this content, especially through animations, the relation that exists with the real coefficients presented in each function and the resolution of situations-problems related to basic functions with the help of GeoGebra. Finally, we consider the relevance of the dynamic mathematics software associated to the teaching of basic functions, in face of the current national configuration that increasingly makes the use of technology by the students, which requires proportionally the need for their employment, by the teacher. This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001.

Keywords: Basic Functions. Teaching Methodology. Teaching and learning. Resolution of Situations-Problems. GeoGebra.

LISTA DE SIGLAS

AMAN – Academia Militar das Agulhas Negras

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior

CEFET/PR – Centro Federal de Educação e Tecnologia do Estado do Paraná

EFOMM – Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante

ESPCEX – Escola Preparatória de Cadetes do Exército

FGV – Fundação Getúlio Vargas

FMABC – Faculdade de Medicina do ABC

IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada

PAEBES – Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo

PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PUC/RJ – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

UERJ – Universidade Estadual do Rio de Janeiro

UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro

UFSM – Universidade Federal de Santa Maria

UFVJM – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

UNESP – Universidade Estadual Paulista

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

VUNESP – Vestibular da Universidade Paulista

WWW – World Vide Web

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O cenário nacional objetiva evolução no processo de ensino e aprendizagem da matemática, partindo de mecanismos de memorização e repetição até a construção do pensamento cognitivo e significativo que, proporciona ao aluno, ter novas ideias e ações frente ao requerido conhecimento necessário na resolução de problemas matemáticos.

Oriundo dessa evolução, pesquisas e estudos de casos têm sido realizados mostrando uma possível opção facilitadora no ensino da Matemática: o auxílio dos recursos computacionais, especialmente o software livre multiplataforma de matemática dinâmica GeoGebra no processo ensino e aprendizagem de matemática na educação básica, particularmente a aplicação junto ao ensino de funções. Moraes (2016) reitera que neste contexto os recursos computacionais no ensino de matemática na educação básica têm se configurado como grandes aliados no processo ensino e aprendizagem, pois essa metodologia é de grande valia no processo de ensino e aprendizagem conectando o uso do recurso computacional com o que é ensinado nas escolas.

Segundo Júnior (2011) o software de Geometria Dinâmica GeoGebra, oferece a visualização do que está sendo trabalhado, enfatiza um aspecto fundamental na proposta da disciplina que é a experimentação, e favorecem a percepção por parte do aluno, auxiliando-o a descobrir formas menos triviais de encontrar a solução do problema.

O Ensino Médio é considerado a etapa final da escolaridade básica e objetiva complementar a formação obtida nos anos anteriores. Para que essa etapa complemente e possibilite a ampliação das capacidades que são os alvos do ensino de matemática, é necessário analisar e redimensionar alguns dos temas tradicionalmente trabalhados (ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO, 2006, p. 5).

Ainda segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006),

> Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática (ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO, 2006).

É comum haver resistência por parte do aluno em aprender e compreender a matemática. Associado a este fato, as formas de trabalhar conteúdos matemáticos em muitos lugares, não atendem a esse valor formativo (ROCHA et. al, 2015). Divergindo do que é proposto pelas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), ao aluno vagamente é apresentado a variados modelos que conectem diferentes áreas do conhecimento. Ainda segundo o autor, embora o ensino tenha progredido nos últimos anos, ainda apresenta um forte viés tradicional e pouco atrativo, em ralação a inserção dos recursos computacionais no Brasil.

Buscando minimizar os agravantes no processo ensino e aprendizagem citados anteriormente e com o intuito mais completo e atrativo, o principal objetivo deste trabalho é de integrar os recursos computacionais, especialmente o GeoGebra, ao ensino como instrumento no processo de ensino e aprendizado de matemática.

Neste sentido, destacamos São Pedro (2016), quando vemos que é perceptível que o estudante atual sinta a necessidade de ver em sua escola a mesma tecnologia que faz parte de seus outros contextos sociais. O autor ainda conclui, afirmando que a utilização dos recursos computacionais junto ao ensino de matemática facilita o entendimento de situações complexas.

A eficiência da utilização dos recursos computacionais não se dá apenas em tornar prazeroso o aprendizado, todavia, em dar carga importante de significado ao que se aprende, com a empregabilidade dos conteúdos que ficam as margens da teoria e são vislumbrados na prática de profundas atividades diárias. O emprego dos recursos computacionais, como ferramenta que proporciona um avanço no ensino de matemática se dá por meio de vários aspectos pois, segundo São Pedro (2016) a utilização das tecnologias da informação e da comunicação em sala de aula pode ser de forma sutil a exemplo do traçado de um gráfico de função usando esquadros e papel milimetrado ou mais sofisticado, como a construção desse mesmo gráfico em um software específico.

Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), enfatizam a importância da inclusão dos recursos computacionais junto ao ensino de matemática.

> Já se pensando na *Tecnologia para a Matemática*, há programas de computador (*softwares*) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão. Os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o “pensar matematicamente”, ou seja, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas. São características desses programas: a) conter um certo domínio de saber

> matemático – a sua base de conhecimento; b) oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica, geométrica; c) possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macroconstruções; d) permitir a manipulação dos objetos que estão na tela (ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO, 2006).

Para os Parâmetros Curriculares de Nacionais “esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular”. Devendo ser trabalhados, nessa disciplina, ao longo do Ensino Médio habilidades e capacidades que propiciem aos alunos adquirir conhecimento suficiente para serem detentores de um saber fazer e pensar matemáticos.

Finalmente, com a finalidade de atender ao processo de ensino e aprendizagem de funções, numa dimensão do conhecimento que abranja situações cotidianas, resolução de situações-problemas, enaltecemos o uso da tecnologias como mecanismo de propulsão, mais especificamente, a utilização do software livre multiplataforma de matemática dinâmica GeoGebra, empregado de maneira sistemática, tornando-se aliados ao docente, dinamizando o processo de ensino e aprendizagem, contribuindo na construção do conhecimento e, consequentemente, tornando o discente um sujeito pensante, questionador e propulsor na era digital.

1.1. Motivação do Trabalho

Contemporaneamente, o advento da tecnologia voltada para o ensino nas escolas, com muitos docentes utilizando novas ferramentas que vão aparecendo no contexto escolar para a construção do conhecimento em todas as áreas faz emergir um assunto de extrema importância, a utilização de recursos computacionais para ensinar conteúdos pedagógicos de um determinado assunto.

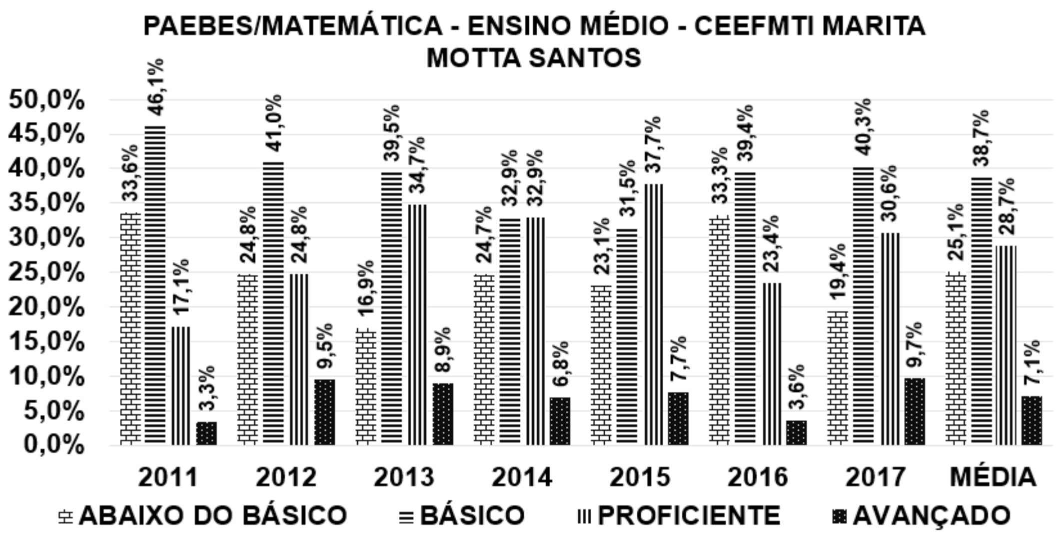
Ensinar e aprender matemática não são tarefas fáceis, afinal os obstáculos contemplados para o desenvolvimento do ensino, bem como, do aprendizado são evidenciados desde os primeiros anos. Neste sentido, qualquer atividade desenvolvida, como proposta propulsora no processo de ensino e aprendizagem de matemática, levando o discente a uma melhor compreensão e motivando-os, é muito bem-vinda.

Para Mileno (2015), contemporaneamente, quase que todas as áreas da sociedade usufruem de equipamentos tecnológicos, que melhoram o desempenho das atividade e necessidades de cada uma das áreas em questão. Assim é impossível imaginar a educação sem a utilização dos recursos computacionais, de maneira que educador e educando possam interagir tecnologicamente.

Para o desenvolvimento deste projeto catalogamos informações preciosas junto ao Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES), verificamos e tabulamos os dados dos anos de 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016 e 2017, que são previamente definidos em quatro níveis principais: abaixo do básico, básico, proficiente e avançado. Diante desse agrupamento, calculamos a média aritmética simples do percentual apresentado no PAEBES, para cada nível, chegando a uma série histórica de dados, o que viabilizou precisamente, como de fato, está a situação do ensino e aprendizado de matemática, na terceira série do ensino médio, na cidade de São Mateus no estado do Espírito Santo. Verificamos que as escolas estaduais da cidade de São Mateus, cidade em que resido, no estado do Espírito Santo, estavam com baixo índice de aprendizado em matemática e este foi o ponto de partida que precisávamos para fazer uma intervenção positiva, junto ao ensino e aprendizado de matemática, em especial, o ensino e aprendizado de funções básicas mediado pelo GeoGebra. Estes dados podem ser acessados, segundo a figura 1, a figura 2, a figura 3, figura 4, figura 5 e figura 6, a seguir.

Na figura 01, apresentamos os dados do Paebes do Centro Estadual de Ensino Fundamental e Médio em tempo integral, localizada na zona urbana da cidade de São Mateus – ES, também conhecida como escola viva que sempre apresentou, embora baixo um índice de alunos com nível avançado.

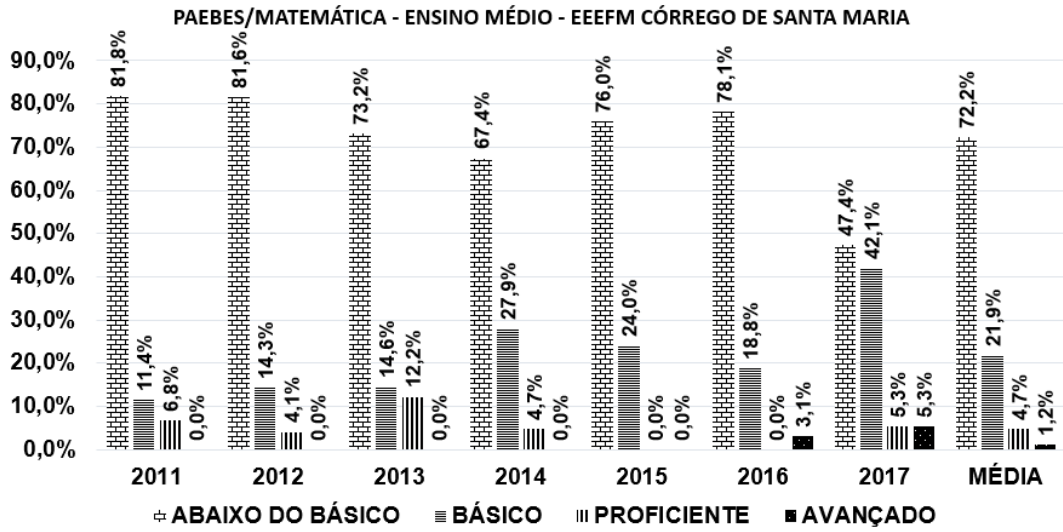
Figura 1: Dados do Paebes da CEEFMTI Marita Motta Santos



Fonte: o autor

Na figura 2, expomos os dados do Paebes da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Córrego de Santa Maria, escola localizada na zona rural da cidade de São Mateus – ES. Constatamos que os alunos presentes no nível abaixo do básico se destacam ao longo dos anos investigados, e que os alunos classificados no nível proficiente somente foram identificados nos anos de 2016 e 2017.

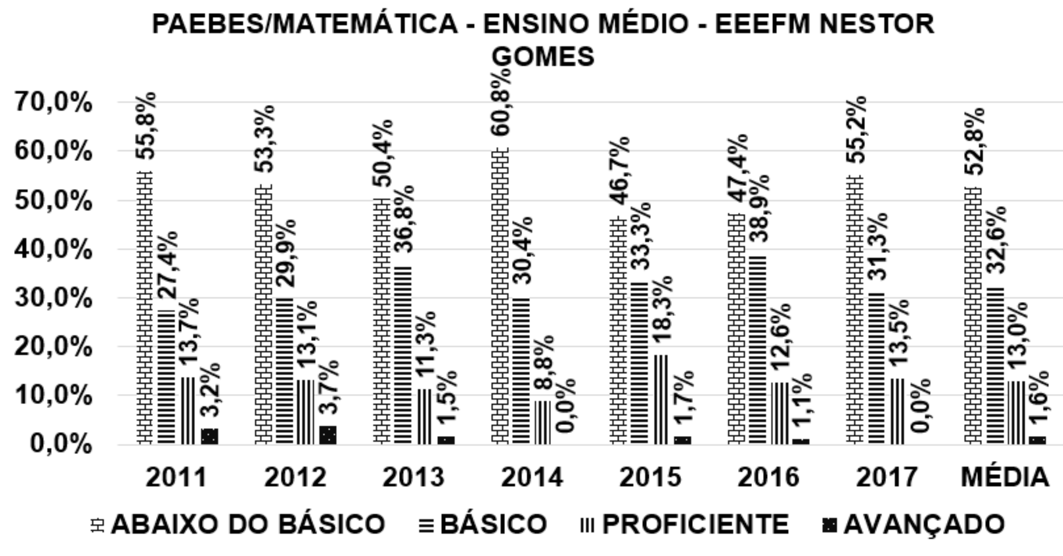
Figura 2: Dados do Paebes da EEEFM Córrego de Santa Maria



Fonte: o autor

Na figura 3, mostramos os dados do Paebes da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Nestor Gomes, também localizada na zona rural da cidade de São Mateus – ES. Destacamos o fato de que nos anos 2014 e 2017 nenhum aluno ter sido identificado em nível proficiente.

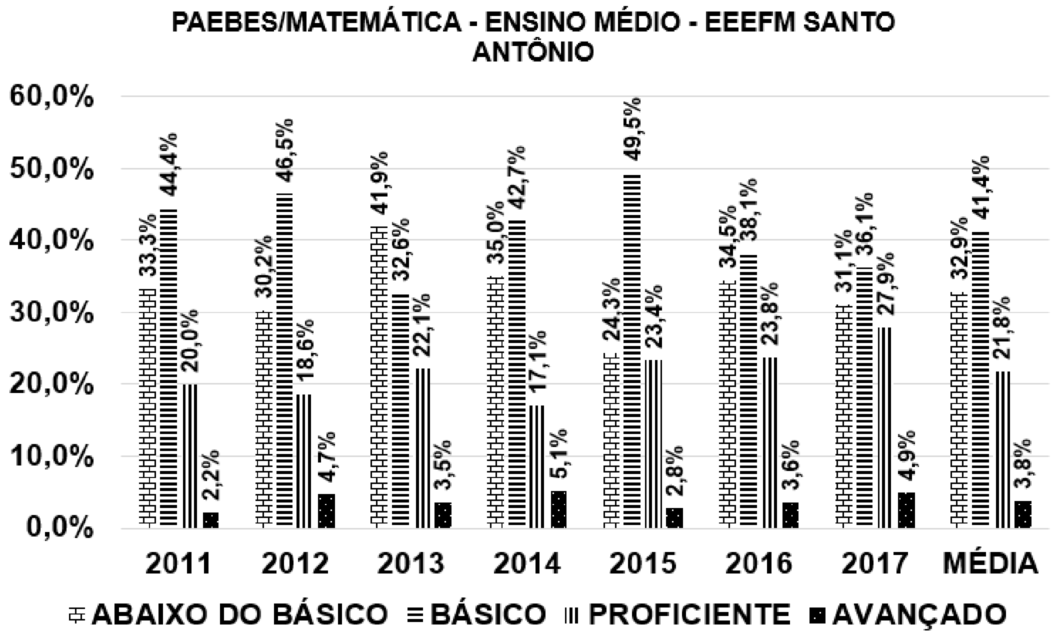
Figura 3: Dados do Paebes da EEEFM Nestor Gomes



Fonte: o autor

Na figura 4, exibimos os dados do Paebes da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Santo Antônio, localizada na zona urbana da Cidade de São Mateus – ES. Ressaltamos que, assim como no CEEFMTI Marita Motta Santos, a EEEFM Santo Antônio apresentou alunos, embora com percentual baixo, em nível proficiente em todos os anos pesquisados.

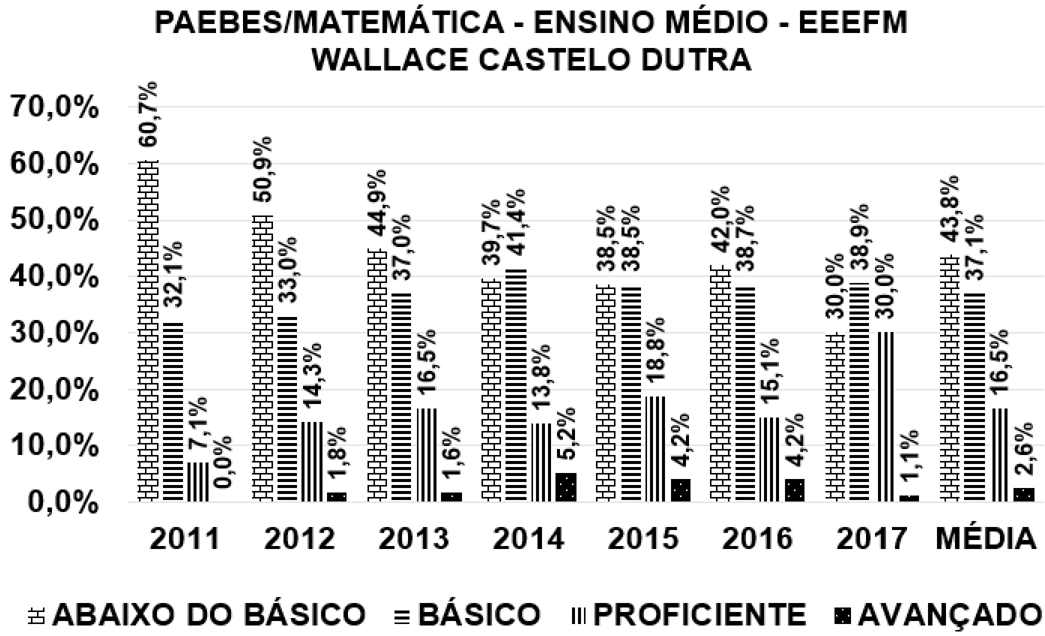
Figura 4: Dados do Paebes da EEEFM Santo Antônio



Fonte: o autor

Na figura 5 revelamos os dados do Paebes da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Wallace Castelo Dutra, localizada no bairro Guriri, parte litorânea da Cidade de São Mateus – ES. Ressaltamos o ano de 2011 em que a escola não apresentou alunos em nível proficiente, a partir de então vemos também uma tendência constante de comportamentos nos anos 2014, 2015 e 2016 nos níveis abaixo do básico, básico e proficiente.

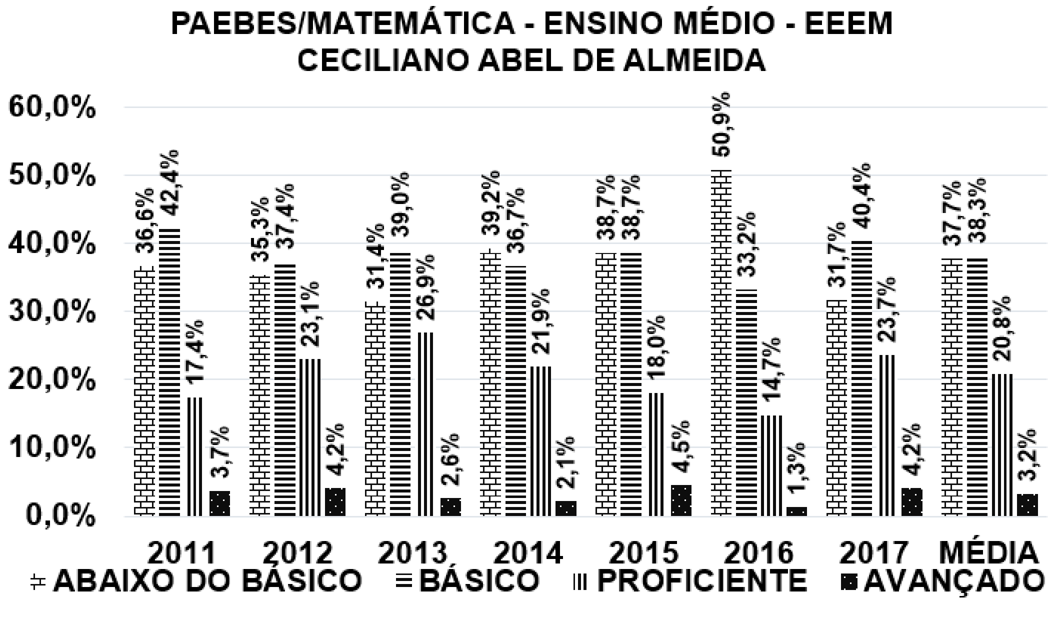
Figura 5: Dados do Paebes da EEEFM Wallace Castelo Dutra



Fonte: o autor

Na figura 6 divulgamos os dados do Paebes da Escola Estadual de Ensino Médio Ceciliano Abel de Almeida, localizada no centro da cidade de São Mateus – ES. Assim como no CEEFMTI Marita Motta Santos e EEEFM Santo Antônio, a EEEM Ceciliano Abel de Almeida apresentou alunos, embora com percentual baixo, em nível proficiente em todos os anos pesquisados.

Figura 6: Dados do Paebes da EEEM Ceciliano Abel de Almeida



Fonte: o autor

Considerando os dados do Paebes, relacionados as escolas da cidade de São Mateus – ES investigados nos anos de 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016 e 2017 e a média de cada escola nos anos investigados, comprovamos o baixo percentual de alunos classificados no nível proficiente e o baixíssimo percentual de alunos classificados no nível avançado. Esta situação educacional com baixo percentual de aprendizado, justifica a proposta metodológica deste trabalho que propõem capacitar professores da educação básica por meio de um minicurso enaltecendo a inserção do recurso tecnológico nos planos de aula do professor, dando suporte aos conteúdos matemáticos ensinados e aprendidos.

Por sua vez, o estudo das funções básicas é considerado um assunto extremamente relevante no ensino de matemática, por estar presente no dia a dia do discente no ambiente escolar e em outros contextos sociais. Destacamos neste projeto o software multiplataforma de matemática dinâmica GeoGebra, em especial por ser gratuito e não haver a necessidade de estar conectado a internet para o seu manuseio, além de ser interativo e de fácil manuseio.

> O GeoGebra é um software de matemática dinâmica (permite animar objetos e simular construções em sua interface) para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. O dinamismo desse software permite que ao representar a expressão algébrica de uma função na Janela de Álgebra, o gráfico correspondente é apresentado na Janela de Visualização, sendo que as alterações e/ou animações feitas em objetos são imediatamente visíveis na janela algébrica e de visualização. Assim, o GeoGebra dá aos professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, testar hipóteses e investigar com detalhes os objetos estudados. Estas são algumas das possibilidades que se apresentam no software GeoGebra disponível gratuitamente em http://www.geogebra.org. O GeoGebra é um programa de fácil utilização. Considerando o conteúdo função, estima-se que em duas ou três aulas, no máximo, seja suficiente para que um usuário se familiarize com o software e aprenda a usar suas ferramentas básicas. Além disso, trabalhos, artigos, tutoriais e vídeos podem ser facilmente encontrados na internet para o auxílio no uso deste software (MILENO, 2015).

Com essa potencialidade o software multiplataforma livre de matemática dinâmica GeoGebra passa a ser um ambiente eficaz e atrativo, capaz de permitir ao aluno a simulação de construções algébricas e geométricas, com dinamismo, fazendo do programa uma ótima ferramenta no auxílio de aprendizagem matemática. Pensando em tornar a assimilação do conteúdo funções básicas mais consistente, pensamos num ambiente coletivo para favorecer no desenvolvimento da criatividade dos alunos e na familiarização com o software.

As orientações curriculares nacionais versam, descrevendo e incentivando a boa utilização dos recursos computacionais:

> Para o estudo das funções, das equações e das desigualdades da geometria analítica (retas, círculos, cônicas, superfícies), tem-se uma grande variedade de programa de expressão. Em muitos desses programas, pode-se trabalhar tanto com coordenadas cartesianas como com coordenadas polares. Os recursos neles disponibilizados facilitam a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, e isso ajuda o aluno a entender o conceito de função, e o significado geométrico do conjunto-solução de uma equação – inequação (ORIENTAÇÕES CURRICULARES NACIONAIS, 2006).

Com o software multiplataforma de matemática dinâmica GeoGebra o aluno tem uma visão geral sobre o conceito de funções, onde observam que o uso do programa GeoGebra não é uma mera troca de variáveis e que o uso correto das funções tornará seu estudo mais agradável e fácil em outras disciplinas ou assuntos, tanto no campo da matemática, como no de física ou outra ciência, com isso, o aluno será capaz no seu dia a dia de resolver qualquer problema que por ventura possa surgir durante seus estudos.

1.2. Descrição do Trabalho

Esta dissertação está estruturada conforme doze capítulos sendo o primeiro a introdução, o qual lemos agora, que expõem de maneira sucinta o trabalho. Ao final complementamos a dissertação com quatro apêndices.

No segundo capítulo definimos e apresentamos um breve histórico sobre o recurso computacional multiplataforma livre de matemática dinâmica GeoGebra.

No terceiro capítulo nos aprofundamos, dando ênfase ao impacto positivo que os recursos computacionais, em especial o software GeoGebra, propiciam junto a representação gráfica e a solução de situações-problemas de maneira dinâmica no processo de ensino e aprendizagem das funções básicas. Essencialmente, nos apropriamos de vários autores, que versaram sobre o referido tema, para obtermos o aporte necessário e expressamos de maneira objetiva nossas ideias e pretensões.

Do quarto ao nono capítulo, fundamentamos matematicamente a dissertação. No quarto capítulo apresentamos as funções reais de variável real constantes e afins, aplicado ao ensino médio. Iniciamos com as funções constantes e passamos para as funções afins. Logo após definimos os coeficientes das funções afins, apresentamos a representação gráfica das funções afins, determinamos o zero (ou raiz) das funções afins e estudamos o sinal da representação gráfica das funções afins. Falamos ainda, finalizando o capítulo sobre funções lineares, apresentamos a representação gráfica das funções lineares e apresentamos uma proposta para abordagem das funções afins e resolução de situações-problemas, relacionadas a funções afins, utilizando o software GeoGebra.

No quinto capítulo apresentamos as funções reais de variável real quadráticas ou simplesmente funções quadráticas, podendo ainda ser chamada de funções polinomiais de segundo grau, aplicado ao ensino médio. Iniciamos definindo funções quadráticas, logo após, definimos parábola e a representação gráfica das funções quadráticas. Seguimos trabalhando os interceptos da representação gráfica das funções quadráticas com os eixos cartesianos e apresentamos um dispositivo prático para a elaboração da representação gráfica das funções quadráticas. Falamos ainda, sobre os coeficientes a, b e c que estão presentes na lei de formação das funções quadráticas, bem como a funcionalidade de cada um deles na representação gráfica das funções quadráticas, finalmente, abordamos os conceitos de imagem de uma função quadrática, estudamos o sinal da representação gráfica das funções quadráticas e apresentamos uma proposta para abordagem das funções quadráticas e resolução de situações-problemas, relacionadas a funções quadráticas, utilizando o software GeoGebra.

No sexto capítulo apresentamos as funções reais de variável real modulares ou apenas funções modulares, aplicado ao ensino médio. Iniciamos com o conceito de módulo, também chamado de valor absoluto e algumas propriedades decorrentes. Na sequência definimos funções modulares e apresentamos sua representação gráfica. Falamos ainda, sobre translação vertical, translação horizontal e translação vertical e horizontal da representação gráfica das funções modulares e apresentamos uma proposta para abordagem das funções modulares e resolução de situações-problemas, relacionadas a funções modulares, utilizando o software GeoGebra, finalizando o capítulo.

No sétimo capítulo apresentamos as funções reais de variável real exponenciais ou apenas funções exponenciais, aplicado ao ensino médio. Iniciamos definindo potenciação e radiciação. Na sequência definimos e caracterizamos funções exponenciais e apresentamos sua representação gráfica. Falamos ainda, sobre representação gráfica das funções exponenciais e apresentamos uma proposta para abordagem das funções exponenciais e resolução de situações-problemas, relacionadas a funções exponenciais, utilizando o software GeoGebra, finalizando o capítulo.

No oitavo capítulo apresentamos as funções reais de variável real logarítmicas ou apenas funções logarítmicas, aplicado ao ensino médio. Iniciamos definindo logaritmos e suas propriedades. Na sequência definimos funções logarítmicas e apresentamos sua representação gráfica. Falamos ainda, sobre a relação que há entre as funções exponenciais e as funções logarítmicas e apresentamos uma proposta para abordagem das funções logarítmicas e resolução de situações-problemas, relacionadas a funções logarítmicas, utilizando o software GeoGebra, finalizando o capítulo finalizando o capítulo.

No nono capítulo presentamos as funções reais de variável real trigonométricas, ou apenas funções trigonométricas, com ênfase no seno e cosseno que são as bases para o desenvolvimento da trigonometria, aplicado ao ensino médio. Iniciamos definindo a função de Euler, o ciclo trigonométrico e as funções periódicas, na sequência definimos as funções seno e cosseno, apresentando suas propriedades, representação gráfica e apresentamos uma proposta para abordagem das funções seno e cosseno e resolução de situações-problemas, relacionadas as funções seno e cosseno, utilizando o software GeoGebra, finalizando o capítulo.

No décimo capítulo desenvolvemos metodologicamente o trabalho e apresentamos minunciosamente a experiência exitosa que tivemos ao preparar e aplicar a capacitação que executamos junto a quatro professores da educação básica, versando sobre o ensino de funções básicas mediado pelo software GeoGebra.

No décimo primeiro capítulo discutimos os resultados que obtivemos junto a aplicação do minicurso a quatro professores da educação básica, embasando a discussão por meio de pesquisadores que defendem a aplicabilidade dos recursos computacionais junto ao ensino e aprendizagem de matemática.

No décimo segundo capítulo concluímos a dissertação enaltecendo a aplicabilidade do recurso computacional GeoGebra junto ao ensino de funções básicas na educação básica, por ser amplamente exequível.

Ao final da dissertação, expomos as referências e quatro apêndices. No apêndice A e no apêndice B, expomos os questionários aplicados antes e depois do minicurso ofertado. No apêndice C, destacamos inicialmente as cinco principais áreas apresentadas no layout de apresentação do recurso computacional e finalizamos o capítulo descrevendo cada ferramenta do software. No apêndice D, apresentamos a teoria geral das funções reais de variável real, pois essa teoria norteia os casos particulares das relações matemáticas definidos como funções reais de variável real, aplicado ao ensino médio. Iniciamos com as noções preliminares, definimos uma função real de variável real, definimos ainda domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função real, tratamos minunciosamente do plano cartesiano e da representação gráfica de uma função real de variável real. Falamos ainda, finalizando, sobre funções compostas e funções inversas.

2. O SOFTWARE LIVRE MULTIPLATAFORMA DE MATEMÁTICA DINÂMICA GEOGEBRA

Neste capítulo definimos e apresentamos um breve histórico sobre o recurso computacional multiplataforma livre de matemática dinâmica GeoGebra. Destacamos inicialmente as cinco principais áreas apresentadas no layout de apresentação do recurso computacional e finalizamos descrevendo cada ferramenta do software.

2.1. Definição e Breve Histórico Sobre o GeoGebra

O software livre de matemática dinâmica multiplataforma GeoGebra é um recurso computacional que combina conceitos de geometria e álgebra, criado inicialmente em 2001, por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburg, que sempre é aperfeiçoado pelo desenvolvedor, se destaca por ser gratuito, de fácil instalação, multiplataforma e não necessitar da internet para utilizá-lo, apenas para instalá-lo, amplamente aplicável nos ambientes de ensino, desde os níveis básicos aos mais avançados, especialmente no ensino de matemática nas escolas. Estas potencialidades foram decisivas na escolha deste software para a elaboração deste trabalho.

Outra vantagem do GeoGebra é seu alcance, por ser um software multiplataforma ele pode ser instalado em praticamente toda máquina computadora existente hoje, pois o programa tem versões para as plataformas Desktop Windows, Linux e Mac Os. Ele também é executável em tablets com sistema operacional Android, Windows Phone e iOS, além de oferecer uma calculadora gráfica muito interessantes para dispositivos Android. Em todas essas plataformas o programa é distribuído de forma livre e gratuita (ALVES, 2016).

O GeoGebra oferece a possibilidade de trabalharmos álgebra, geometria, planilha de cálculos, cálculos simbólicos, estatística e probabilidade. Seu dinamismo propicia o aprendizado dos conteúdos matemáticos, em especial, o ensino de funções torna-se mais eficaz, por vários argumentos, dentre eles a atração do educando pelos recursos tecnológicos empregados no ambiente de aprendizagem e, após aprendido a plotar o gráfico das funções à mão, a otimização do tempo com a inserção de controles deslizantes que fazem translação, compressão, expansão e inversão das representações gráficas.

O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas. Portanto, o GeoGebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivar e integrar funções, e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Dessa forma, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Daí a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto (CERQUEIRA, 2016).

Empregando a experimentação, reflexão e dedução por meio de construções, no software GeoGebra orientadas e previamente planejadas pelo educador o educando pode tomar um pouco mais de profundidade, fixando significados e efetivamente aprendendo os conteúdos matemáticos. Ressaltamos que o GeoGebra é uma ótima ferramenta auxiliar e que deve ser trabalhada junto as intervenções do professor. Seguindo o trabalho descreveremos os principais comandos do software GeoGebra.

3. REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo nos aprofundamos dando ênfase ao impacto positivo que os recursos computacionais, em especial o software GeoGebra, proporcionam junto a solução de situações-problemas de maneira dinâmica no processo de ensino e aprendizagem das funções básicas. Essencialmente, nos apropriamos de vários autores, que versaram sobre o referido tema, para temos o suporte necessário e expressamos de maneira objetiva nossas ideias e pretensões.

3.1. Recursos Computacionais no Processo de Ensino-Aprendizagem de Funções Segundo a Ótica de Alguns Autores

Optamos pelo tema observando a nossa volta, o atual cenário tecnológico em nosso país sugere a necessidade de utilização da tecnologia no ensino e após fazermos uma análise documental, ora perpassando pelas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, ora lendo os artigos (CÂMARA, 2018), (CUNHA, 2017), (NOGUEIRA,2015), (PAIVA, 2003) e (TORMA, 2018) que versam sobre a utilização do Software de matemática dinâmica GeoGebra, concluímos a importância do ensino das funções básicas com o auxílio dos recursos computacionais, que transcendem o universo puramente matemático e que atingem uma dimensão de aplicabilidade mais ampla no campo das ciências, como a física.

No tange o ensino de funções de maneira mais eficiente, segundo Araújo (2015) na matemática, assim como em todas as disciplinas, uma boa sequência do conteúdo ensinado resulta num melhor aprendizado por parte dos alunos. Para se ensinar funções não é diferente, já que função é uma relação binária específica.

A significativa contribuição que há na utilização do GeoGebra junto ao ensino de funções elementares, segundo Ramos (2018) a aprendizagem de funções é facilitada com o GeoGebra em virtude apresentar representações diferentes de um mesmo objeto, que tem ainda interação entre si.

Quanto a utilização do GeoGebra junto ao ensino de funções afins, destacamos Araújo (2015), que versa sobre a complementação que há, tanto nas propriedades da função afim, quanto nos gráficos. Segundo o pesquisador a construção dos gráficos das funções afins na lousa geralmente são imprecisas e necessitam de muito tempo, apesar de sua importância para o aprendizado, e que pode ser agilizado via recurso computacional

Para Canavezi (2016) não é diferente, ensinar e aprender funções quadráticas, torna-se mais efetivo a partir da inserção dos recursos computacionais. Para o pesquisador, funções quadráticas é um dos conteúdos que o aluno apresenta mais dificuldades, e que pode ser facilitados com a utilização do GeoGebra, pois pelo gráfico, por exemplo já é explicito, se houver, as raízes da função quadrática, entre outros dados importantes fornecidos, como a variação e importância dos parâmetros a, b e c.

Quando pensamos o ensino e o aprendizado de funções modulares com utilização do GeoGebra, segundo Souza (2013), a elaboração dos gráficos e suas propriedades algébricas, podem ser enriquecidas com a utilização do recurso computacional. Para o pesquisador a função modular por ser estudada posteriormente às funções de 1º e 2º grau, exponencia, logarítmica e trigonométrica, consolida o conhecimento das representações algébricas e gráficas dessas, coroando, então, o conhecimento dsobre o conceito de função, que pode ser facilitado contando com os recursos computacionais.

Destacamos também, o impacto positivo que o software GeoGebra junto ao ensino de funções exponenciais tem, pois para Coelho (2016), as propriedades gráficas e a construção dos conceitos de crescimento e decrescimento, ficam muito mais bem compreendidos pelo aluno, pois com o recurso computacional, associado ao ensino de funções exponenciais, o professor poderá envolver ainda mais seus alunos no processo de construção dos conceitos referentes ao crescimento, limites, continuidade, reflexão, sobrejetividade e injetividade.

Quando falamos em funções exponenciais e logarítmicas, pensando no ensino e aprendizagem deste conteúdo, mediado pelo recurso computacional GeoGebra, frisamos as considerações tecidas por Souza (2013), que observa a possibilidade de facilitação do conteúdo e interação dos alunos, pois para o pesquisador, no ensino médio, tentar trabalhar com o ensino de funções exponenciais e logarítmicas de um modo diferenciado e com a ajuda de simuladores, softwares de geometria dinâmica e plotadores de gráficos podem auxiliar o professor a ensinar essas funções de uma maneira mais aplicada, buscando interagir com seus alunos.

Temos um expressivo aporte, visando utilização do GeoGebra no ensino de funções trigonométricas, convergindo com esse pensamento, indicamos Costa (2017), que escreve sobre a melhor compreensão dos parâmetros que norteiam as funções trigonométricas, por meio animação dos parâmetros que o GeoGebra proporciona, pois o pesquisador desenvolveu uma proposta de ensino de funções trigonométricas a eficiência da aplicação dos recursos computacionais.

> Durante o desenvolvimento da proposta de ensino, o GeoGebra revelou-se uma ferramenta importante na construção e análise de triângulos semelhantes, na construção de triângulos retângulo, equilátero e isósceles, nas demonstrações das razões trigonométricas e, principalmente, na construção dos gráficos e definição das propriedades das Funções

> Trigonométricas. A construção e manipulação dos controles deslizantes a, b, c e d de funções do tipo $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$ e $f(x) = a + b \cdot cos(c \cdot x + d)$ revelaram-se determinantes para a formulação de conjecturas e demonstrações do papel desempenhado por cada parâmetro na construção do gráfico. A ferramenta "habilitar rastro" ao definir um ponto, movê-lo ao longo da circunferência trigonométrica e observar sua imagem em outra janela de visualização foi de grande importância para observar o crescimento, o decrescimento e a variação dos sinais das funções trigonométricas. No desenvolvimento das situações-problema propostas, concluímos que a utilização do software para confirmar a resolução realizada por cada grupo, trouxe grande satisfação aos alunos, que puderam resolver o exercício de forma rápida e precisa no GeoGebra e observarem os erros e acertos cometidos. Os alunos relataram que utilizarão esse recurso em outros conteúdos para confirmar suas construções e resoluções.

A ordem cronológica ao ensino de funções sugere a teoria geral das funções afins, funções quadráticas, funções modulares, funções exponenciais, funções logarítmicas e funções trigonométricas. As funções afins contemplam se apresentam com um entendimento razoável, contudo, a partir das funções quadráticas que faz a transição para um comportamento mais elaborado, graficamente e algebricamente requer uma observação para o seu ensino sistemático e minucioso, assim a utilização dos recursos computacionais – o Software de matemática Dinâmica GeoGebra – tem sido uma ferramenta propulsora ao processo ensino-aprendizagem.

Ferreira (2016) reitera que a construção de diferentes gráficos, cada um mostrando a parte algébrica e geométrica é facilitada pelo GeoGebra, dando ao aprendiz o poder de testar hipóteses e verificar soluções dentro de pouco tempo.

Com um pensamento análogo observemos Júnior (2013) que destaca a dificuldade em absorver conhecimentos de funções sobre o conceito, propriedades e aplicações associadas a outros campos do saber, tem sido identificada na experiência de colegas docentes e, ainda, ressalta que esta dificuldade assola tanto o Ensino Médio quanto o Ensino Superior.

Os autores citados sugerem um mesmo comportamento por parte dos discentes, que é resistência quanto ao ensino de funções e o encorajamento por parte dos docentes quanto a tornar suas aulas mais atrativas e dinâmicas com a utilização dos recursos computacionais – Software de Matemática Dinâmica GeoGebra – no processo de ensino-aprendizagem.

Conforme Nogueira (2015), propomos inovação, criatividade e encorajamento no que tange o ensino e aprendizagem com um caráter geral, por meio de capacitação aos professores para a inserção de recursos computacionais. Uma opção viável é a inserção do recurso computacional GeoGebra, junto ao ensino de funções básicas.

> Nessa direção de propor mecanismos de inovação para o ensino de matemática, utilizamos um software matemático de Geometria Dinâmica, chamado GeoGebra, para ser um ferramental a auxiliar o Ensino de Funções, por meio de oficinas de construções e modelamento das mesmas. Por ser um tema recorrente e de grande aplicação nos estudos matemáticos e de áreas afins, se faz interessante o uso de mecanismos diversos para progressão do Ensino e de suas aplicações, em todos os anos do Ensino Médio. O estudo de funções pode e é melhor assimilado a medida em que a visualização de tal objeto matemático é compreendido de maneira sistemática. Além da utilização do software com um construtor de gráficos a ferramenta de animação permite aos alunos a visualização de movimento gráfico de acordo com a variação dos coeficientes. Buscar ferramentas para um melhor entendimento desse importante tópico, aliar o aspecto lúdico ao ensino, tentando cativar o aluno para que ele possa se interessar mais profundamente pelo assunto, auxiliando seu aprendizado. O GeoGebra tem a capacidade de "plotagem" (no jargão matemático: "desenhar") de gráficos na forma (geral) literal e ainda possui uma ferramenta que possibilita animar os gráficos o que pretendemos explorar para facilitar a compreensão dos alunos ao estudo dessas funções (NOGUEIRA, 2015).

Ressaltamos a importância dos conceitos que perfazem a atmosfera das funções básicas, afinal para o discente que escolher a área de exatas, contemplará tal proposta em seu cotidiano, como na arquitetura, por exemplo, e até mesmo, quanto ao discente que adentrar o universo das ciências humanas e até biológicas contemplará também o ensino de funções básicas, contudo com menos propriedades e rigor matemático. Finalmente, concebemos o GeoGebra como ferramenta essencial a ser explorada junto ao ensino de funções básicas. Salientamos não ser o GeoGebra a solução definitiva a todos os entraves educacionais, quando falamos no processo de ensino e aprendizagem de funções, contudo com o preparo sistemático por parte do professor em seu plano de aula e a inserção do software GeoGebra, ampliamos a dimensão do ensino e do aprendizado das funções na educação básica.

4. FUNÇÕES CONSTANTES E FUNÇÕES AFINS

Neste capítulo apresentamos as funções reais de variável real constantes e afins, aplicado ao ensino médio. Iniciamos com as funções constantes e passamos para as funções afins. Logo após definimos os coeficientes das funções afins, apresentamos a representação gráfica das funções afins, determinamos o zero (ou raiz) das funções afins e estudamos o sinal da representação gráfica das funções afins. Falamos ainda, finalizando o capítulo sobre funções lineares e apresentamos a representação gráfica das funções lineares e apresentamos uma proposta para abordagem das funções afins e resolução de situações-problemas, relacionadas a funções afins, utilizando o software GeoGebra.

O conteúdo deste capítulo que apresenta definições, fórmulas e gráficos de funções foi baseado nas seguintes referências: (CUNHA, 2017), (GIOVANNI; BONJORNO, 2000), (IEZZI; MURAKAMI, 1993), (IEZZI; MURAKAMI, 2013), (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2013), (IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PÉRIGO, 2005), (IEZZI; DOLCE; TEIXEIRA; MACHADO; GOULART; CASTRO; MACHADO, 1990), (PAIVA, 2003) E (YOUSSEF, 2005).

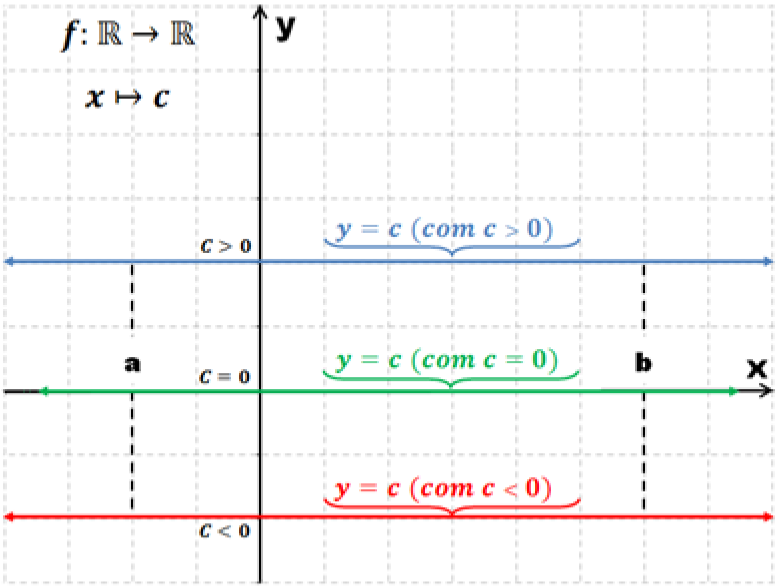
4.1. Funções Constantes

Definimos funções constantes com uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ em que todos os elementos do domínio têm uma só imagem, em outras, para todo x do domínio, a imagem de x pela função é $f(x) = c \in \mathbb{R}$. Em símbolos:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = c$$

Os possíveis gráficos das funções constantes estão na figura 07, a seguir:

Figura 7: Gráfico das funções constantes



Fonte: o autor

4.2. Funções Afins

Definimos uma função afim g quando sua lei de formação é expressa por um polinômio de grau um, em outras palavras, para todo x do domínio, a imagem de x pela função é $g(x) = a \cdot x + b$, com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Em símbolos:

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = a \cdot x + b$$

4.2.1. Coeficientes das Funções Afins

Sabemos que a função afim é representada pela lei de formação $g(x) = ax + b$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$. Os elementos $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$, chamam-se coeficientes da função afim.

O elemento $a \in \mathbb{R}^*$ é denominado coeficiente angular função afim.

Enquanto o coeficiente $b \in \mathbb{R}$ é denominado coeficiente linear da função afim.

Os coeficientes das funções afins são importantes, pois determinam se a função é decrescente ou crescente, se o gráfico da função afim toca o eixo das ordenadas em sua parte superior.

4.2.2. Representação Gráfica das funções Afins: Decrescentes ou Crescentes

O decrescimento/crescimento de uma função afim é definido em função do seu coeficiente angular a:

Se a função afim for crescente, então $a > 0$.

Seja $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, pelo fato de a função afim ser crescente. Como $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, substituindo:

$$\frac{ax_1 + b - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{ax_1 + b - ax_2 - b}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{ax_1 - ax_2}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

$$\Leftrightarrow a > 0$$

Observamos que a recíproca também é verdadeira: Se $a > 0$, então a função afim é crescente (a demonstração é análoga).

Se a função afim for decrescente, então $a < 0$.

Seja $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, pelo fato de a função afim ser decrescente. Como $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, substituindo:

$$\frac{ax_1 + b - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{ax_1 + b - ax_2 - b}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{ax_1 - ax_2}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

$$\Leftrightarrow a < 0$$

Observamos que a recíproca também é verdadeira: Se $a < 0$, então a função afim é decrescente (a demonstração é análoga).

Se o coeficiente linear $b < 0$, então a função afim toca o eixo das ordenas na parte negativa.

A representação gráfica de uma função afim toca o gráfico quando $x = 0$ daí $y = a \cdot x + b \Longrightarrow\ y = 0 \cdot x + b \Longrightarrow y = b$. Sendo $b < 0$, então $y_0 < 0$. O par ordenado gerado é $\big(0\,; f(0)\big) \Longrightarrow (0\,;\ y_0)$, como $y_0 < 0$, então a função afim toca o eixo das ordenas na parte negativa.

Se o coeficiente linear $b > 0$, então a função afim toca o eixo das ordenas na parte positiva.

A representação gráfica de uma função afim toca o gráfico quando $x = 0$ daí $y = a \cdot x + b \Longrightarrow\ y = 0 \cdot x + b \Longrightarrow y = b$. Sendo $b > 0$, então $y_0 > 0$. O par ordenado gerado é $\big(0\,; f(0)\big) \rightarrow (0\,;\ y_0)$, como $y_0 > 0$, então a função afim toca o eixo das ordenas na parte negativa.

Considerando os coeficientes angular e linear da função, a representação gráfica é:

i. Sendo $a < 0$ e $b < 0$;

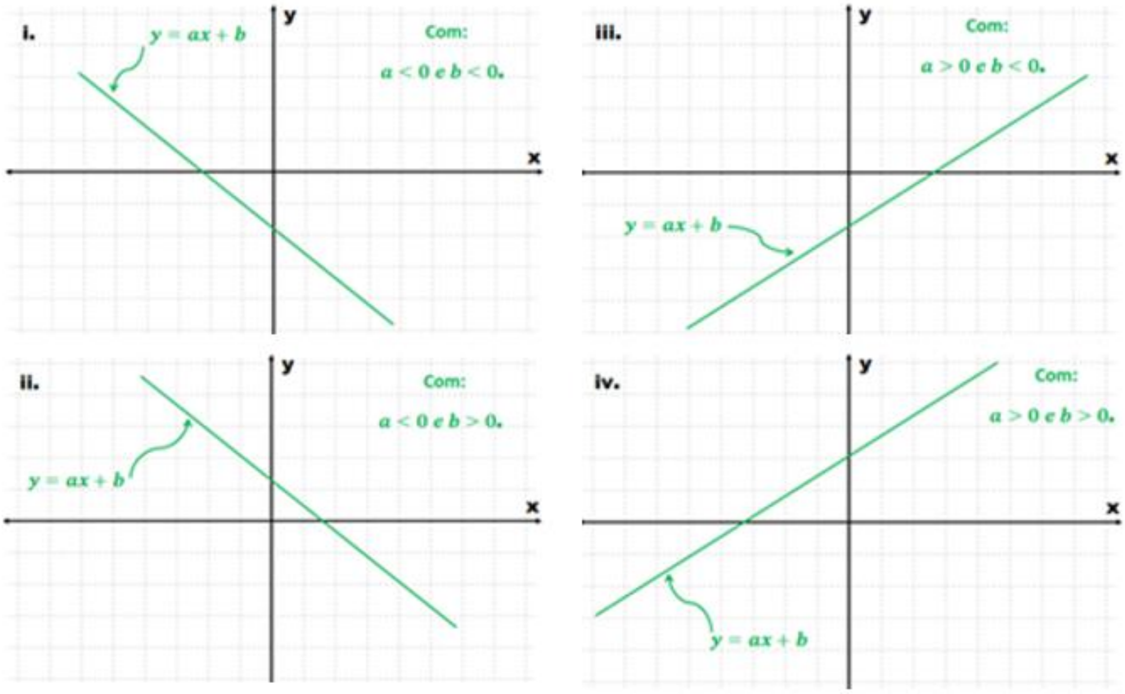
ii. Sendo $a < 0$ e $b > 0$;

iii. Sendo $a > 0$ e $b < 0$;

iv. Sendo $a > 0$ e $b > 0$.

As possíveis representações gráficas das funções constantes estão na figura 8, a seguir:

Figura 8: Representação gráfica das funções afins



Fonte: o autor

4.2.3. Dispositivos Práticos Para a Construção da Representação Gráfica de Funções Afins

A representação gráfica das funções afins é uma reta não vertical e não horizontal. Para obtermos a representação gráfica das funções afins, basta que tenhamos dois pontos, a partir desses dois pontos determinamos a reta que os contém. A construção da representação gráfica das funções afins é possível de duas maneiras. No primeiro modo, de acordo com a lei de formação, basta atribuir valores a variável independente x, obtendo em conformidade com a lei de formação, valores da variável dependente y, obtendo dois ou mais pares ordenados e finalmente a reta que os contém. No segundo modo, basta determinar os interceptos com o eixo das abscissas fazendo $f(x) = 0$, resultando num valor para x, consequentemente obtendo o par ordenado $(x; 0)$ e com o eixo das ordenadas fazendo $x = 0$, resultando num valor para y, consequentemente obtendo o par ordenado $(0; y)$, finalmente determinando a reta que contém os pares ordenados encontrados $(x; 0)$ e $(0; y)$.

4.2.4. Determinação da Lei de Formação de Funções Afins

É comum em situações-problemas serem apresentados dois pares ordenados pertencentes a função afim e a proposta de determinar um novo par ordenado. Em linhas gerais solução para essa proposta é por meio da resolução de um sistema de equações, de modo a obter o valor de a e o valor de b, de acordo com a lei de formação $f(x) = a \cdot x + b$, contudo também é possível resolver tal problema empregando uma fórmula, a qual apresentaremos a seguir.

Sendo os dois pares ordenados conhecidos, sendo $x_1 \neq x_2$ e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = a \cdot x + b,\ x \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$, para determinarmos o valor de a, basta fazermos:

$$f(x_1) = a \cdot x_1 + b = y_1$$

$$f(x_2) = a \cdot x_2 + b = y_2$$

Fazendo $f(x_1) - f(x_2)$, temos:

$$a \cdot x_1 - a \cdot x_2 = y_1 - y_2$$

$$a \cdot (x_1 - x_2) = y_1 - y_2$$

Como $x_1 \neq x_2$, segue que $x_1 - x_2 \neq 0$, logo:

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Para determinarmos o valor de b, procederemos da seguinte maneira:

$$a \cdot x_1 + b = y_1$$

$$b = y_1 - a \cdot x_1$$

$$b = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x_1$$

$$b = \frac{y_1 \cdot (x_1 - x_2) - (y_1 - y_2) \cdot x_1}{x_1 - x_2}$$

$$b = \frac{y_1 \cdot x_1 - y_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_1}{x_1 - x_2}$$

$$b = \frac{y_2 \cdot x_1 - y_1 \cdot x_2}{x_1 - x_2}$$

De posse dos valores de de a e o valor de b, de acordo com a lei de formação $f(x) = a \cdot x + b$ é possível determinar quaisquer pares ordenados contidos na representação gráfica da função afim.

4.2.5. Zero ou Raiz das Funções Afins

O zero da função afim é o valor de x , tal que, $f(x) = 0$.

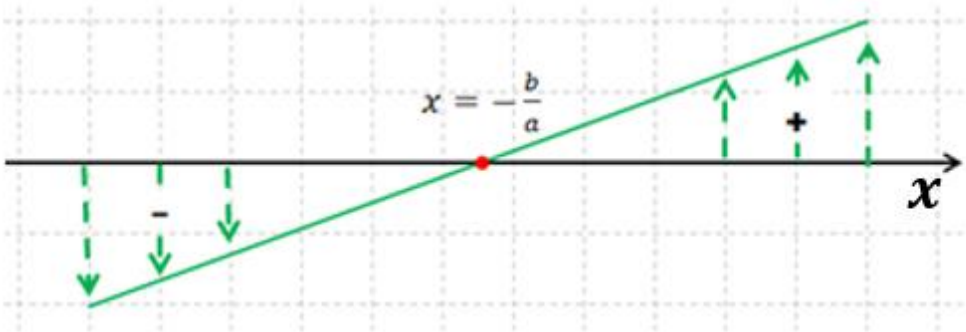
Temos então que sendo $y = 0$ então $y = 0 = a \cdot x + b \rightarrow a \cdot x + b = 0 \Longrightarrow a \cdot x = -b \Longrightarrow x = -\frac{b}{a}$, assim $x = -\frac{b}{a}$, é o zero ou raiz da função afim. O par ordenado gerado é para o zero ou raiz da função afim é $\left(-\frac{b}{a} ; 0\right)$.

4.2.6. Estudo do Sinal das Funções Afins

Para o estudo do sinal de uma função afim, consideramos dois casos:

Sendo o coeficiente angular positivo $(a > 0)$, independente do coeficiente linear, a consequentemente, a função afim é crescente e os elementos do domínio que estão à esquerda da raiz da função afim tem imagens negativas, já os elementos que estão à direita da raiz da função afim tem imagens positivas. O estudo do sinal obedecerá ao esquema representado na figura 9, a seguir.

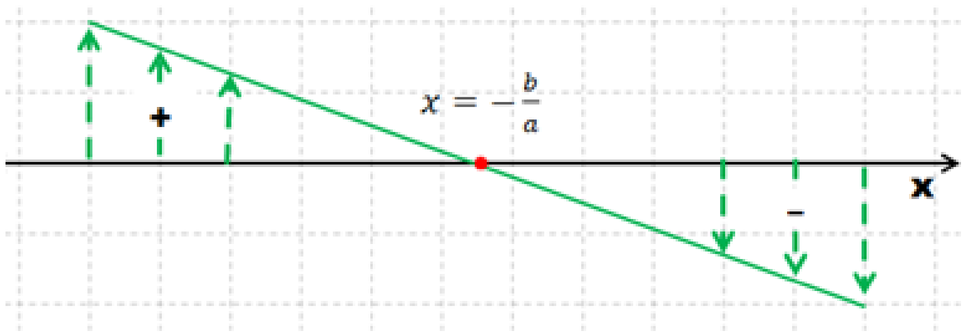
Figura 9: Estudo do sinal de uma função afim crescente



Fonte: o autor

Sendo o coeficiente angular negativo $(a < 0)$, independente do coeficiente linear, a consequentemente, a função afim é decrescente e os elementos do domínio que estão à esquerda da raiz da função afim tem imagens positivas, já os elementos que estão à direita da raiz da função afim tem imagens negativas. O estudo do sinal obedecerá ao esquema representado na figura 10, a seguir.

Figura 10: Estudo do sinal de uma função afim decrescente



Fonte: o autor

4.3. Função Linear

Seja $a \in \mathbb{R}^*$ e a função real associando, por meio da lei de correspondência, cada elemento do domínio x, ao elemento $a \cdot x$, esta função é denominada função linear (caso particular da função afim, em que $b = 0$).

Em símbolos:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = ax, \qquad a \in \mathbb{R}^*$$

Duas características se destacam nas funções lineares são:

A proporcionalidade e possibilidade de obtenção de resultados, por meio de regra de três simples.

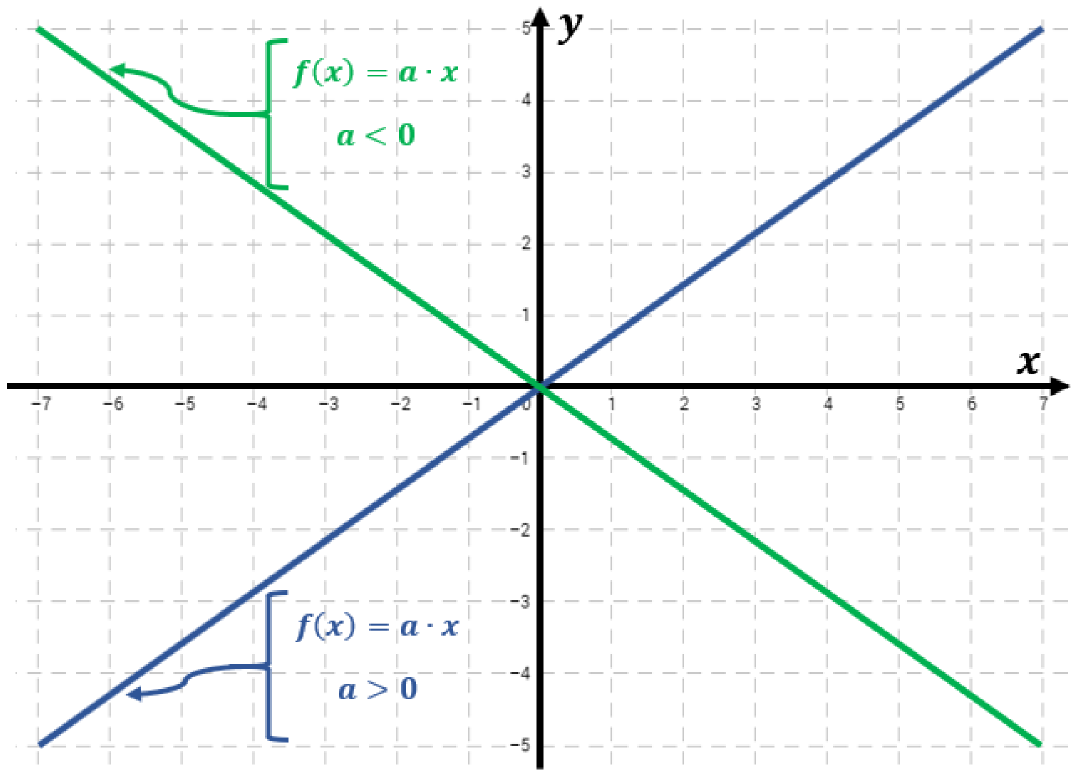
A representação gráfica tocar a origem do sistema cartesiano, pois para todo $a \in \mathbb{R}^*$ abordado, $f(0) = a \cdot 0 = 0$, gerando, o par ordenado $(0\,;\,0)$.

A representação gráfica da função linear é:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = ax$$

As possíveis representações gráficas das funções lineares estão representadas na figura 11, a seguir.

Figura 11: Possíveis representações gráficas das funções afins

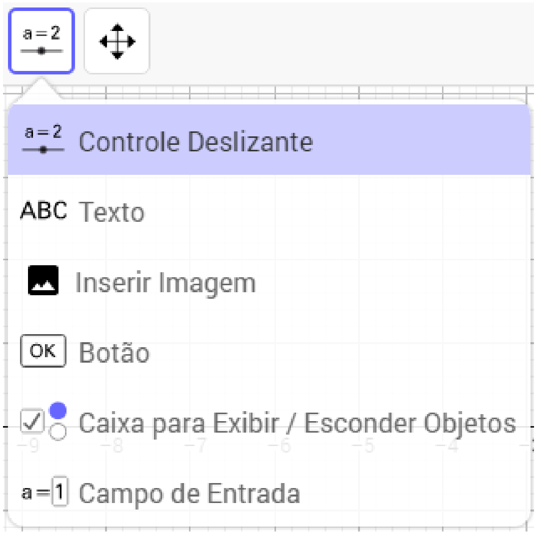


Fonte: o autor

4.4. Capacitação: O Ensino de Funções Afins Empregando o GeoGebra

Inicialmente elabore dois controles deslizantes, afinal eles serão úteis para desenvolver a sintaxe das funções afins. Para isso, clica-se no décimo ícone da caixa de ferramentas, com a finalidade de elaborar controles deslizantes. A orientação é dada segundo a figura 12, a seguir.

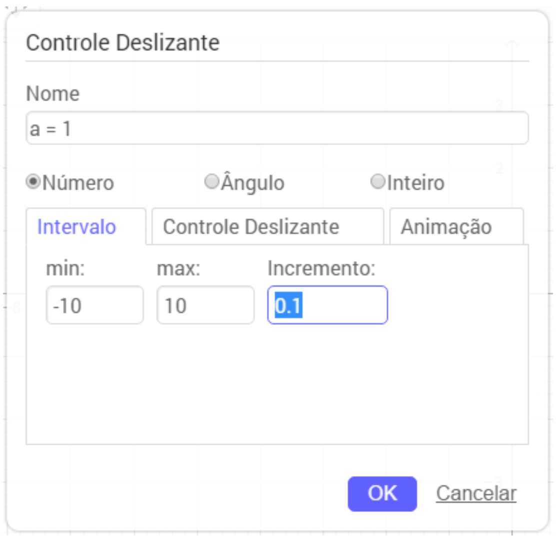
Figura 12: Elaborando controles deslizantes



Fonte: o autor

Clique na janela de visualização, com isso, imediatamente, uma caixa de diálogo é aberta, diante disso, configure de acordo com a ilustração na figura 13, a seguir.

Figura 13: Elaborando o controle deslizante a



Fonte: Elaborado pelo autor.

Elaborare o controle deslizante associado a variável b, clicando na janela de visualização, uma nova caixa de diálogo será aberta, diante disso, emprega-se mesmos comandos e definições para criar o controle deslizante b, seguindo ainda as orientações contidas na figura 14, a seguir.

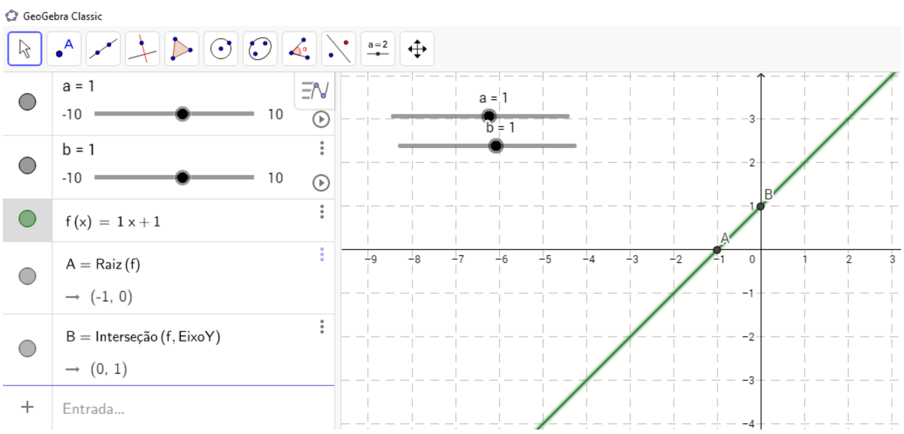
Figura 14: Elaborando o controle deslizante *b*

Fonte: o autor

Temos então, as bases necessárias para desenvolver a sintaxe das funções afins: $f(x) = a \cdot x + b$.

Faça então a animação desejada. Na caixa de entrada do software digite a sintaxe das funções afins $f(x) = a \cdot x + b$ e clique em enter, conforme a figura 15, a seguir.

Figura 15: Elaborando funções afins no GeoGebra



Fonte: o autor

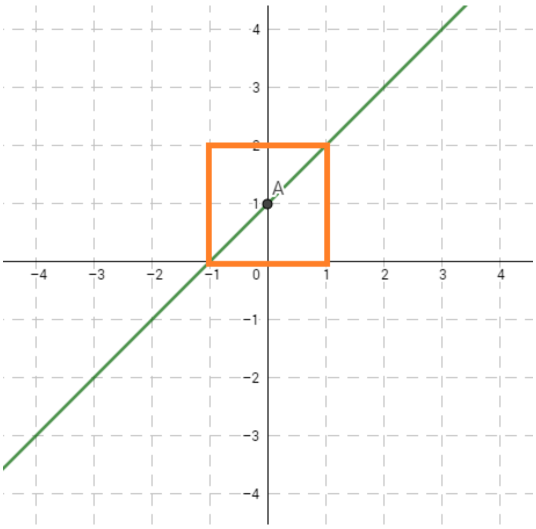
Antes de animar, determine a interseção do gráfico das funções afins com o eixo das ordenadas, isso facilitará a identificação do parâmetro b e sua funcionalidade. Para isso, clique no segundo ícone na caixa de ferramenta que é a ferramenta ponto, na sequência marque a interseção de dois objetos, como exposto na orientação contida na figura 16, a seguir.

Figura 16: Determinando a interseção das funções afins com o eixo das ordenadas

Fonte: o autor

Na sequência clique no gráfico das funções afins na janela de visualização e dê um novo clique no eixo das ordenadas. Eis que se tem um ponto *A*, que é a interseção desejada, mostrado na figura 17, a seguir

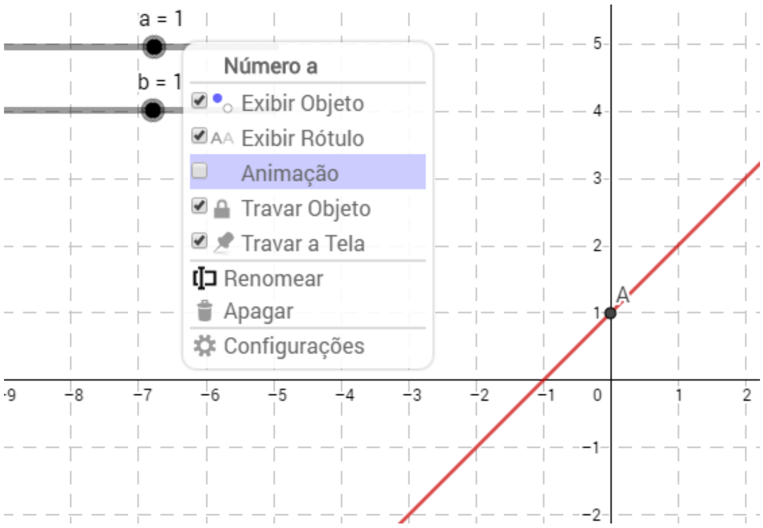
Figura 17: Determinando o ponto de interseção das funções afins com o eixo das ordenadas



Fonte: Elaborando pelo autor.

Seguindo a construção, anime o controle deslizante associado a variável a, para isso, clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante associado a variável a, aberta a caixa de diálogo, como na figura 18, marcamos a opção animação.

Figura 18: Animando o comando deslizante associado a variável a



Fonte: o autor

A partir dessa animação, verifica-se então a funcionalidade do parâmetro a na família das funções afins. De fato, o parâmetro a na família das funções afins determina decrescimento ou crescimento.

Proceda analogamente, desmarque a caixa animar para o controle deslizante associado a variável a e anime o controle deslizante associado a variável b.

A partir dessa animação, verifica-se a funcionalidade do parâmetro b na família das funções afins. De fato, o parâmetro b na família das funções afins determina a ordenada da interseção do gráfico da família função afim com o eixo das ordenadas.

4.5. Resolvendo Situações-Problemas Sobre Funções Afins Utilizando o GeoGebra

QUESTÃO 01 (EFOMM): Uma empresa mercante A paga $R\$\ 1000{,}00$ fixos mais $R\$\ 600{,}00$ por dia de viagem e uma empresa B $R\$\ 400{,}00$ fixos mais $R\$\ 800{,}00$ por dia de viagem. Sabe-se que Marcos trabalha na empresa A e Cláudio na B obtiveram o mesmo valor salarial. Quantos dias eles ficaram embarcados?

a) 1.

b) 3.

c) 5.

d) 7.

e) 9.

Resolução: Incialmente modele o enunciado de acordo com a função afim $f(x) = a \cdot x + b$.

Para representar os salários correspondentes nas empresas A e B, respectivamente, considerando x, como sendo os dias embarcados, faça:

$$A(x) = 600 \cdot x + 1000$$

$$B(x) = 800 \cdot x + 400$$

Para que o valor salarial de João e Marcos seja o mesmo é necessário que:

$$A(x) = B(x) \Rightarrow 600 \cdot x + 1000 = 800 \cdot x + 400 \Rightarrow 800 \cdot x + 400 = 600 \cdot x + 1000$$

$$\Rightarrow 800 \cdot x - 600 \cdot x = 1000 - 400 \Rightarrow 200 \cdot x = 600 \Rightarrow$$

$$200 \cdot x \cdot \frac{1}{200} = 600 \cdot \frac{1}{200} \Rightarrow x = 3$$

Com isso sabe-se ainda quanto cada um recebeu pelos três dias embarcados:

João: $A(x) = 600 \cdot x + 1000 \Rightarrow A(3) = 600 \cdot 3 + 1000 \Rightarrow A(3) = 2800.$

Marcos: $B(x) = 800 \cdot x + 400 \Rightarrow B(3) = 800 \cdot 3 + 400 \Rightarrow B(3) = 2800.$

Resposta: Alternativa b, João e Marcos ficaram embarcados por três dias e receberam $R\$ \ 2800,00$ de salário.

Resolução empregando o GeoGebra: Incialmente faça como na resolução tradicional, na etapa da modelagem dos dados no enunciado empregando a função afim.

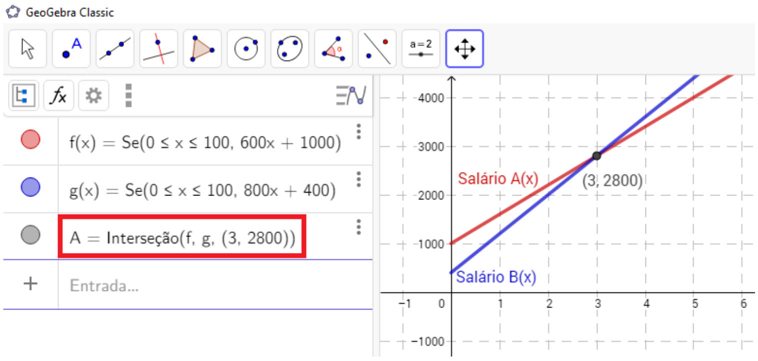
Para representar os salários correspondentes nas empresas A e B, respectivamente, considerando x, como sendo os dias embarcados, faça:

$$A(x) = 600 \cdot x + 1000$$

$$B(x) = 800 \cdot x + 400$$

Agora expresse as funções afins A e B no campo de entrada e obtendo as representações gráficas na janela de visualização. Na sequência clique no segundo ícone da caixa de ferramentas que é a ferramenta Ponto, marcando a ferramenta interseção entre dois objetos. Finalmente clique na representação gráfica de $A(x)$ e $B(x)$. Será exibido um par ordenado em que a abscissa representa a quantidade de dias embarcados e a ordenada o valor salarial destacados na figura 19, a seguir.

Figura 19: Resolvendo o problema dos dias embarcados empregado o GeoGebra



Fonte: o autor

Resposta: Alternativa b, João e Marcos ficaram embarcados por três dias e receberam $R\$$ 2800,00 de salário.

Nota: Como o autor da questão definiu a remuneração em dias, possivelmente a representação gráfica dos salários seriam pontos colineares de abscissas inteiras, contudo não há perda de generalidade junto a figura 08.

QUESTÃO 02 (UNICAMP): Três planos de telefonia celular são apresentados na tabela abaixo.

PLANO	CUSTO FIXO MENSAL	CUSTO ADICIONAL POR MINUTO
$\boldsymbol{A}$	$R\$$ 35,00	$R\$$ 0,50
$\boldsymbol{B}$	$R\$$ 20,00	$R\$$ 0,80
$\boldsymbol{C}$	0	$R\$$ 1,20

a) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utilize 25 minutos por mês?

Resolução: Incialmente o custo dos planos A, B e C é modelado por meio da função afim $f(x) = a \cdot x + b$ de acordo com o enunciado, ou seja, x dado em minutos e $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ custos dados em reais.

$$A(x) = 35 + 0{,}5x$$
$$B(x) = 20 + 0{,}8x$$
$$C(x) = 1{,}2x$$

Para alguém que utilize 25 minutos por mês, os custos são:

$$A(x) = 35 + 0{,}5x \Rightarrow A(25) = 35 + 0{,}5 \cdot 25 \Rightarrow A(25) = 47{,}50$$
$$B(x) = 20 + 0{,}8x \Rightarrow B(25) = 20 + 0{,}8 \cdot 25 \Rightarrow B(25) = 40{,}00$$
$$C(x) = 1{,}2x \Rightarrow C(25) = 1{,}2 \cdot 25 \Rightarrow C(25) = 30{,}00$$

Resposta: Nessas condições o plano mais vantajoso é o C.

Resolução empregando o GeoGebra: Incialmente insira na janela de álgebra a sintaxe das três funções afins em questão. Na sequência ainda na janela de álgebra escreva a sintaxe das funções em questão:

$$A(x) = 35 + 0{,}5x$$

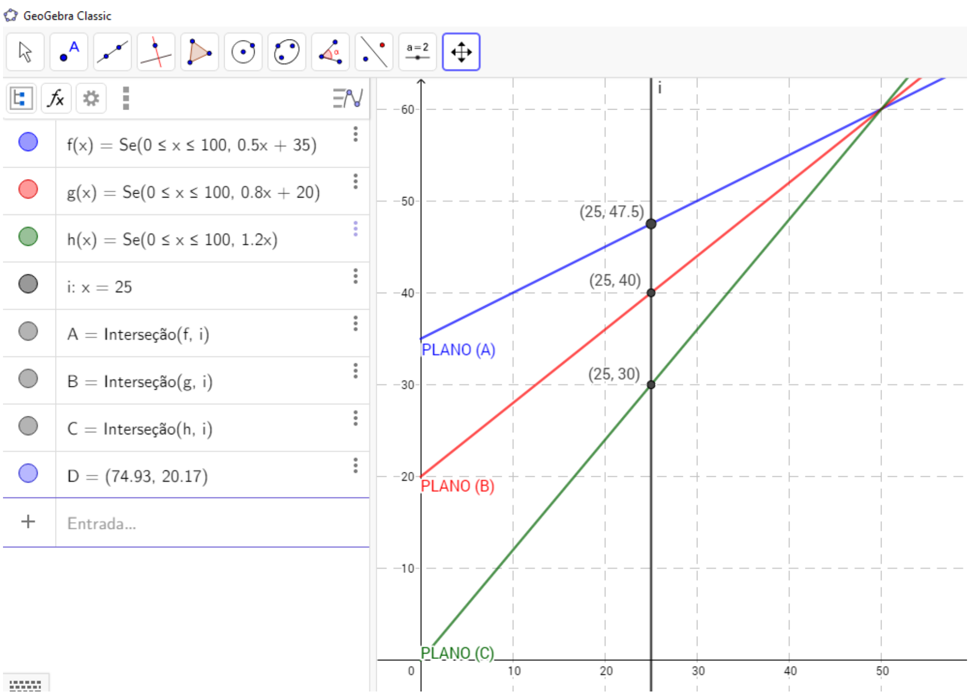
$$B(x) = 20 + 0{,}8x$$

$$C(x) = 1{,}2x$$

Escreva ainda na janela de álgebra $x = 25$.

Na sequência marque a segunda ferramenta da caixa de ferramentas. Clique em Intersecção entre dois objetos. Já na janela de visualização clique na reta $x = 25$ e na função que representa o plano A, novamente na reta $x = 25$ e na função que representa o plano B e finalmente clique na reta $x = 25$ e na função que representa o plano C. Com esses passos teremos as interseções das funções que representam os custos e da reta $x = 25$, mostrado na figura 20, que de fato, é a solução desejada, mostrando que o plano mais vantajoso para alguém que utiliza 25 minutos é o C.

Figura 20: Resolvendo o problema dos custos telefônicos empregando o GeoGebra



Fonte: Elaborando pelo autor.

Resposta: Nessas condições o plano mais vantajoso é o C.

b) A partir de quantos minutos de uso mensal o plano A é mais vantajoso?

Resolução: Mantendo o raciocínio segundo o item a) desta mesma questão, para que o plano A seja mais vantajoso, duas inequações serão necessárias:

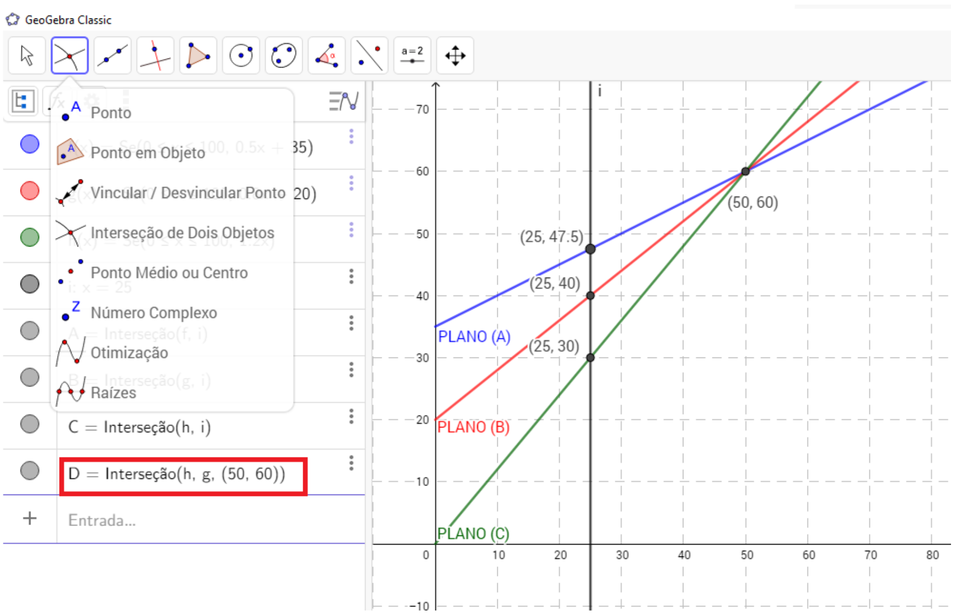
$$A(x) < B(x) \Rightarrow 0{,}5x + 35 < 0{,}8x + 20 \Rightarrow x > 50$$

$$A(x) < C(x) \Rightarrow 0{,}5x + 35 < 1{,}2x \Rightarrow x > 50$$

Resposta: Portanto as duas inequações indicam que o plano A será mais vantajoso para alguém que utiliza mais que 50 minutos.

Resolução empregando o GeoGebra: Mantendo toda a configuração como no item a) desta mesma questão, marque o segundo item da janela de ferramentas clicando em Interseção entre Dois Objetos, na sequência escolha duas das representações na janela de visualização e clique em uma depois na outra. A solução será dada por meio deste ponto de interseção evidenciado na figura 21, a seguir.

Figura 21: Resolvendo o problema dos custos telefônicos empregando o GeoGebra – item b



Fonte: o autor

Resposta: Portanto as duas inequações indicam que o plano A será mais vantajoso para alguém que utiliza mais que 50 minutos.

Nota: Como o autor da questão definiu o custo das ligações em função da quantidade de minutos utilizado, possivelmente a representação gráfica dos salários seriam pontos colineares de abscissas inteiras, contudo não há perda de generalidade junto a figura 40.

5. FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Neste capítulo apresentamos as funções reais de variável real quadráticas ou simplesmente funções quadráticas, podendo ainda ser chamada de funções polinomiais de segundo grau, aplicado ao ensino médio. Iniciamos definindo funções quadráticas, logo após, definimos parábola e a representação gráfica das funções quadráticas. Seguimos trabalhando os interceptos da representação gráfica das funções quadráticas com os eixos cartesianos e apresentamos um dispositivo prático para a elaboração da representação gráfica das funções quadráticas.

Falamos ainda, sobre os coeficientes a, b e c que estão presentes na lei de formação das funções quadráticas, bem como a funcionalidade de cada um deles na representação gráfica das funções quadráticas e finalmente abordamos os conceitos de imagem de uma função quadrática e estudamos o sinal da representação gráfica das funções quadráticas e apresentamos uma proposta para abordagem das funções quadráticas e resolução de situações-problemas, relacionadas a funções quadráticas, utilizando o software GeoGebra.

O conteúdo deste capítulo que apresenta definições, fórmulas e gráficos de funções foi baseado nas seguintes referências: (CUNHA, 2017), (GIOVANNI; BONJORNO, 2000), (IEZZI; MURAKAMI, 1993), (IEZZI; MURAKAMI, 2013), (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2013), (IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PÉRIGO, 2005), (IEZZI; DOLCE; TEIXEIRA; MACHADO; GOULART; CASTRO; MACHADO, 1990), (PAIVA, 2003) e (YOUSSEF, 2005).

5.1. Definição das Funções Quadráticas

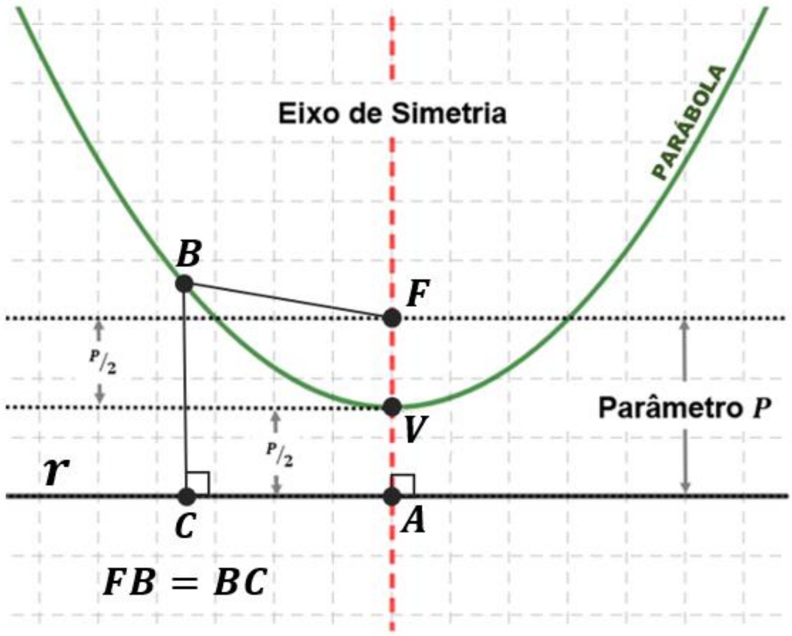
Definimos uma função quadráticas, também chamadas de funções polinomiais do segundo grau, como sendo a função f em que sua lei de formação é expressa por um polinômio de grau dois, em outras palavras, para todo x do domínio, a imagem de x pela função é $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.Em símbolos:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

5.2. Representação Gráfica da Função Quadrática

Inicialmente, definiremos parábola como sendo dado um ponto F no plano cartesiano e uma reta r, respectivamente chamados de foco e diretriz, parábola é o conjunto dos pontos B que são equidistantes a diretriz e ao foco. Ainda sobre as parábolas a reta perpendicular a diretriz que passa pelo foco é chamado de eixo de simetria e a interseção entre o eixo de simetria e a parábola é chamado vértice da parábola, denotado pela letra V, o vértice é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz. A distância entre o foco e a diretriz é chamada parâmetro, denotado pela letra P. Todos os elementos estão evidenciados na figura 22, a seguir.

Figura 22: Parábola e seus elementos



Fonte: o autor

A representação gráfica da função quadrática é uma curva, particularmente chamada parábola. Fundamentalmente, o lugar geométrico dos pontos equidistantes a reta diretriz e ao ponto foco forma a representação gráfica da função quadrática.

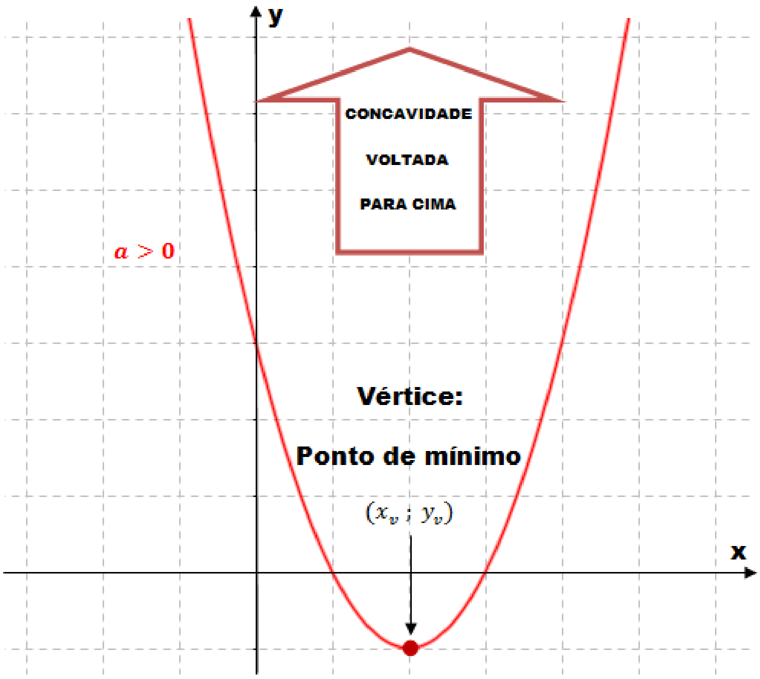
Mais adiante, faremos a construção da representação gráfica da função quadrática, por meio de seus pontos definidos como notáveis, que são as coordenadas dos interceptos com os eixos cartesianos e a coordenada do vértice da parábola.

5.3. O Coeficiente $\boldsymbol{a}$ da Lei De Formação das Funções Quadráticas

A representação gráfica das funções quadráticas apresenta apenas dois comportamentos, com relação a concavidade. Esse comportamento está associado ao coeficiente a, como evidenciado a seguir.

Se $a > 0$ a concavidade da parábola será voltada para cima e, portanto, a função quadrática admitirá um valor de mínimo, chamado ponto de mínimo que é o vértice da função, mostrado na figura 23, a seguir.

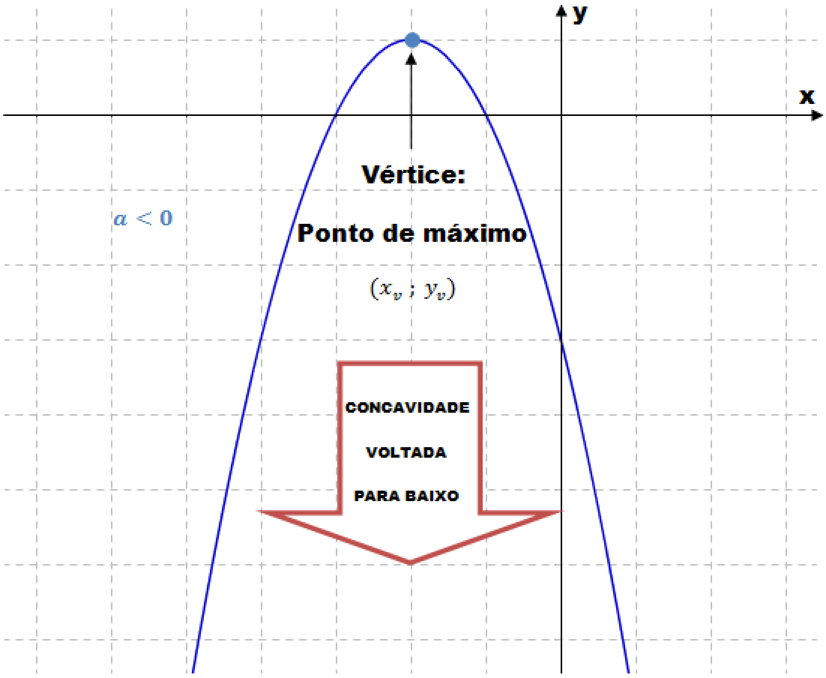
Figura 23: Parábola com a concavidade voltada para cima e vértice



Fonte: o autor

Se $a < 0$ a concavidade da parábola será voltada para baixo e, portanto, a função quadrática admitirá um valor de máximo, chamado ponto de máximo que é o vértice da função, mostrado na figura 24, a seguir.

Figura 24: Parábola com a concavidade voltada para baixo e vértice



Fonte: o autor

5.4. Coordenadas do Vértice da Representação Gráfica das Funções Quadráticas

Estudaremos analiticamente as funções quadráticas, para isso nos apropriaremos da forma canônica da equação $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Para chegarmos a forma canônica, procederemos da seguinte forma:

Sendo $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, evidenciando a, temos:

$$f(x) = a \cdot \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)\right]$$

. Adicionando e subtraindo o fator $\frac{b^2}{4a^2}$ no segundo membro da equação, temos:

$$f(x) = a \cdot \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)\right]$$

Evidenciando o quadrado perfeito no segundo membro temos:

$$f(x) = a \cdot \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

O fator $\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right)$ equivale ao quadrado perfeito $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, substituindo na equação, temos:

$$f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right]$$

Calculando o mínimo múltiplo comum a fração algébrica $\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)$, obtemos:

$$\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

Retomando a equação e substituição de $\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)$ por $\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$, temos:

$$f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right]$$

Representando $b^2 - 4ac$ como Δ (delta ou discriminante do trinômio do segundo grau), temos finalmente, a forma canônica:

$$f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Para $a < 0$, a função quadrática $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, admite o valor máximo:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Representando a função quadrática na forma canônica $f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$, o valor de $f(x)$ torna-se cada vez maior se a diferença $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ tornar-se cada vez menor. Quem varia é x, deste modo, para que a diferença seja menor é necessário que $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a}$.

Para o cálculo do y_v que é a imagem do x_v pela função $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, assim temos:

$$y_v = f(x_v) = ax^2 + bx + c$$

$$y_v = a \cdot {x_v}^2 + b \cdot x_v + c$$

$$y_v = a \cdot \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a} \right) + c$$

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

A partir da equação $a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}$, obtemos $x_v = -\frac{b}{2a}$.

Para $a > 0$, a função quadrática $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ admite o valor mínimo:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Representando a função quadrática na forma canônica $f(x) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$, o valor de $f(x)$ torna-se cada vez menor se a diferença $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ tornar-se cada vez menor. Quem varia é x, deste modo, para que a diferença seja maior é necessário que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a}$.

Para o cálculo do y_v que é a imagem do x_v pela função $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, assim temos:

$$y_v = f(x_v) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$y_v = a \cdot {x_v}^2 + b \cdot x_v + c$$

$$y_v = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

A partir da equação $a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}$, obtemos $x_v = -\frac{b}{2a}$.

A abscissa e ordenada do vértice são:

$$(x_v;\ y_v) = \left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

5.5. Intercepto da Representação Gráfica das Funções Quadráticas com o Eixo $\boldsymbol{X}$ (Zeros ou Raízes)

Os valores x reais que fazem com a $f(x) = 0$, são os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, representam ainda os interceptos com o eixo das abscissas.

Com efeito, obtemos os zeros das funções quadráticas, calculando as raízes da equação $f(x) = 0$, que é o mesmo que, usando a forma canônica.

$$a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

Como $a \neq 0$ pela definição de funções quadráticas, temos:

$$a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O número máximo de raízes para a equação $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ é duas, bem como pode ocorrer uma raiz (duas raízes com o mesmo valor) e não ocorrer raízes. A existência e o número de raízes é condicionados ao discriminante Δ. Sabemos que:

Se $\Delta < 0$, então $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$ e este fato implica em não existir raízes para a equação $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.

Se $\Delta = 0$, então $\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$ e este fato implica em existir duas raízes (de mesmo valor) para a equação $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, que são:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Se $\Delta > 0$, então $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$ e este fato implica em existir duas raízes para a equação $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, que são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

5.6. Intercepto da Representação Gráfica das Funções Quadráticas com o Eixo $\boldsymbol{Y}$ (Coeficiente $\boldsymbol{c}$ da Lei de Formação das Funções Quadráticas)

O valor y real, valendo $x = 0$ é o intercepto da representação gráfica das funções quadráticas com o eixo y. Para isso, temos $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, e $x = 0$, segue que:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

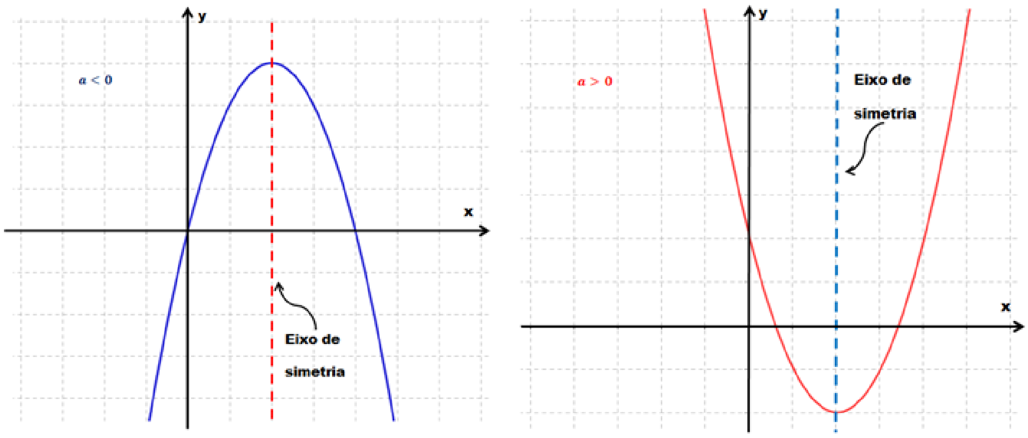
$$f(0) = c$$

Portanto, o coeficiente c na lei de formação das funções quadráticas $(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, representa a ordenada do par ordenado que determina o intercepto da representação gráfica das funções quadráticas com o eixo y.

5.7. Eixo de Simetria da Representação Gráfica das Funções Quadráticas

Sabemos que a representação gráfica das funções quadráticas é uma parábola, como foi tratado no item 6.2. deste capítulo. Sabemos ainda que a parábola admite um eixo de simetria que é uma reta imaginária que passa pelo vértice da parábola que é perpendicular ao eixo x. O comportamento da parábola é simétrico em relação ao eixo de simetria, como ilustrado na figura 25, a seguir.

Figura 25: Eixo de simetria da representação gráfica das funções quadráticas



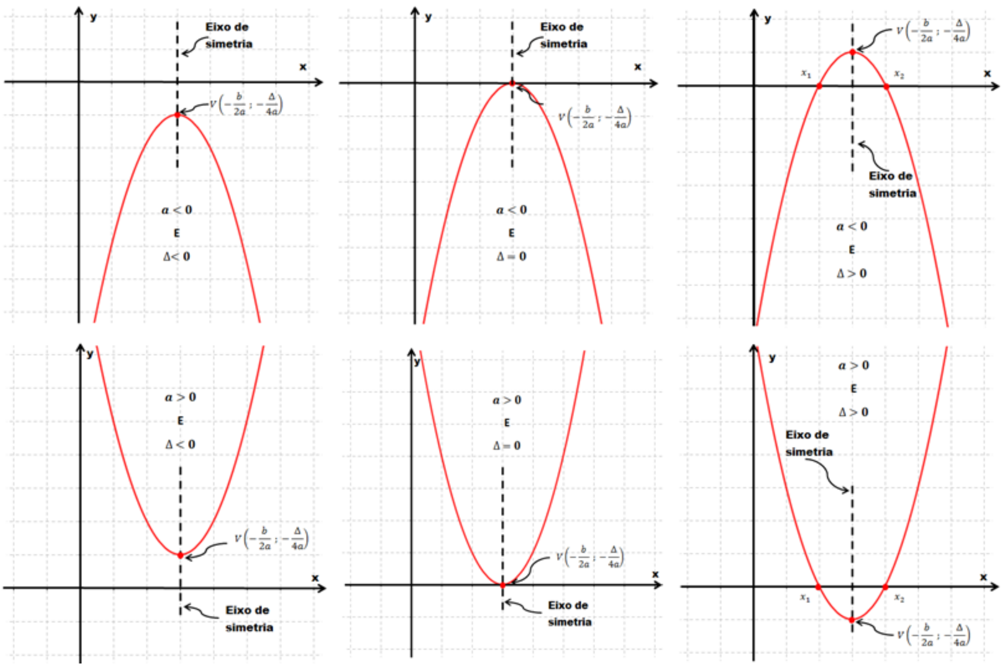
Fonte: o autor

5.8. Dispositivo Prático Para a Construção da Representação Gráfica de Funções Quadráticas

Os valores de a e do discriminante são decisivos para a confecção da representação gráfica das funções quadráticas $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Bem como, o vértice também é significativo na confecção do gráfico.

Inicialmente sabemos que a representação gráfica das funções quadráticas é uma parábola que admite um eixo de simetria com abscissa $-\frac{b}{2a}$ e ordenada $-\frac{\Delta}{4a}$, denominado o vértice da parábola podendo ser ponto de mínimo ou ponto de máximo. Sabemos também que se $a > 0$ então, a representação gráfica das funções quadráticas tem sua concavidade voltada para cima e admitirá um valor de mínimo. Analogamente se $a < 0$ então, a representação gráfica das funções quadráticas terá sua concavidade voltada para baixo e admitirá um valor de máximo. Destacamos que as abscissas da parábola que tocam o eixo x, são os valores de x que satisfazem a equação $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$. A existência de raízes está associada ao valor do discriminante Δ. Combinando os valores do coeficiente a e do discriminante Δ seis são as possibilidades de representação gráfica das funções quadráticas, mostrados na figura 26, a seguir.

Figura 26: Representação gráfica das combinações entre os valores do coeficiente a na lei de formação das funções quadráticas e o valor do discriminante Δ



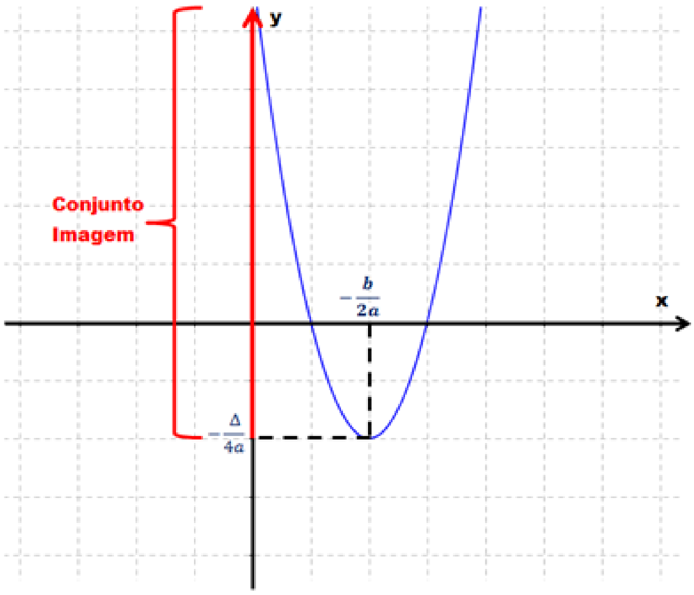
Fonte: o autor

5.9. Imagem da Representação Gráfica de uma Função Quadrática

Se o coeficiente $a > 0$, então a representação da função quadrática $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ admite um ponto de mínimo, chamado vértice da parábola. Como este ponto tem a menor ordenada em relação a todos as outros, segue que: $y_v \leq y_a$, para todo y_a do conjunto imagem da função quadrática.

Assim sendo, a imagem da representação gráfica das funções quadráticas é todo $y_a \geq -\frac{\Delta}{4a^2}$, mostrado na figura 27, a seguir.

Figura 27: Imagem da representação gráfica das funções quadráticas, com o coeficiente $a > 0$

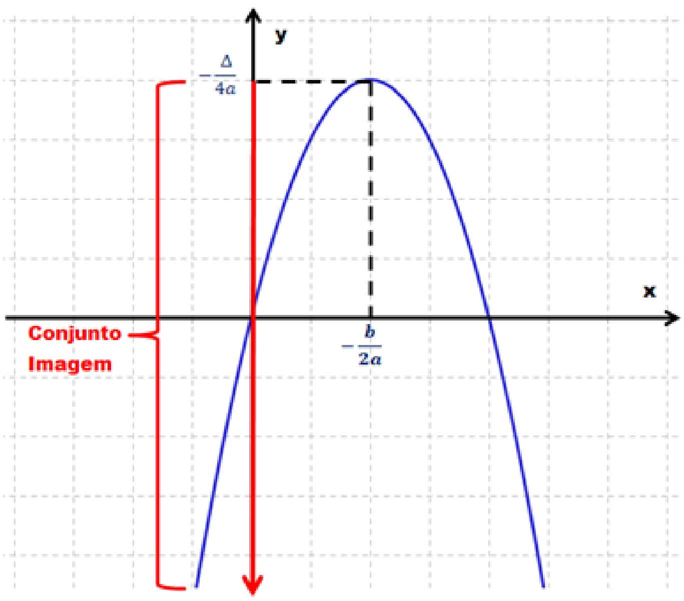


Fonte: o autor

Se o coeficiente $a < 0$, então a representação da função quadrática $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ admite um ponto de máximo, chamado vértice da parábola. Como este ponto tem a maior ordenada em relação a todos as outros, segue que: $y_v \geq y_b$, para todo y_b do conjunto imagem da função quadrática.

Assim sendo, a imagem da representação gráfica das funções quadráticas é todo $y_b \leq -\frac{\Delta}{4a^2}$, mostrado na figura 28, a seguir.

Figura 28: Imagem da representação gráfica das funções quadráticas, com o coeficiente $a < 0$



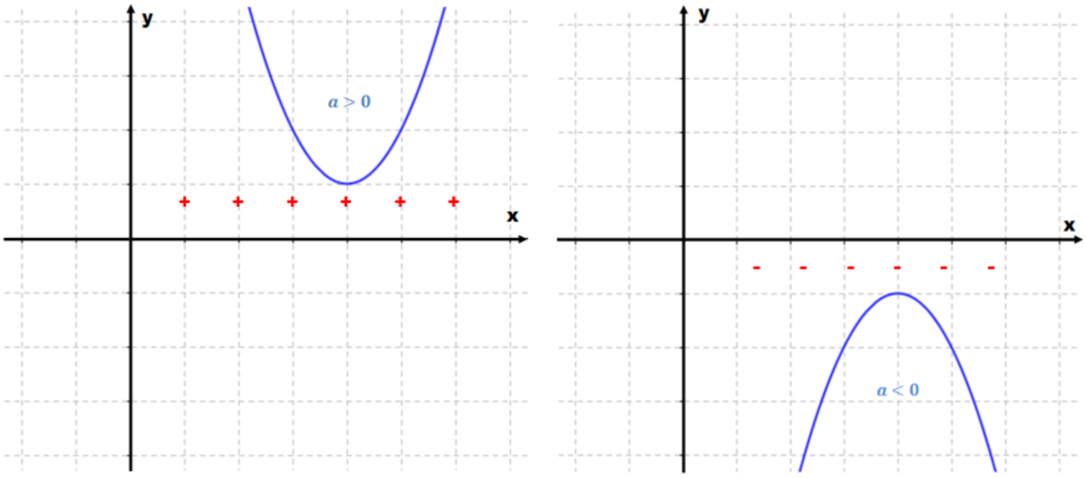
Fonte: o autor

5.10. Estudo do Sinal da Representação Gráfica de uma Função Quadrática

Estudar o sinal de função significa verificar o(s) intervalo(s) real(is) onde a representação gráfica de uma função quadrática ocupa a parte positiva e a parte negativa considerando o eixo y. Neste contexto, três casos são evidenciados.

1° caso: quando $\Delta < 0$ a representação gráfica da função quadrática $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ não admite raízes reais e a parábola não toca o eixo x, mostrado na figura 29, a seguir.

Figura 29: Estudo da representação gráfica das funções quadráticas



Fonte: o autor

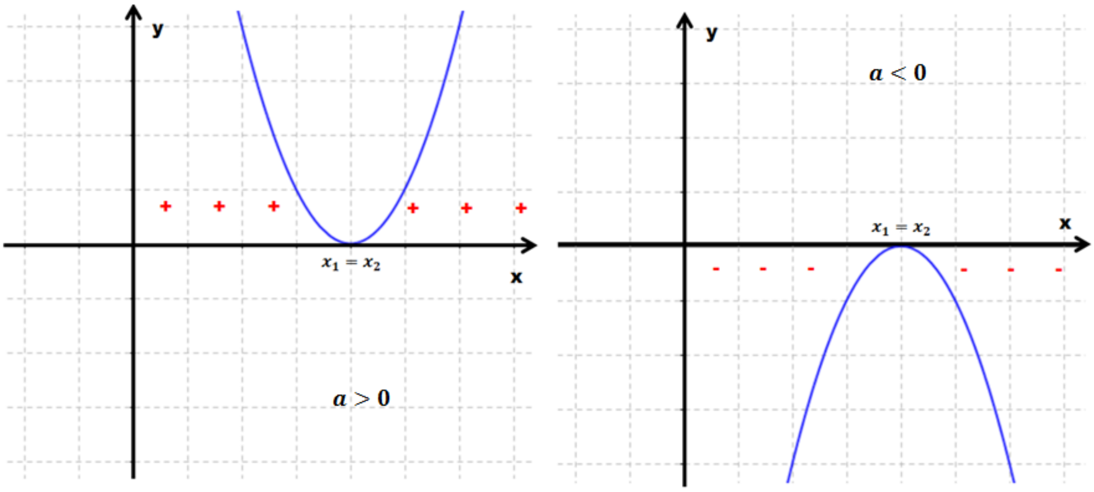
Para todo x do domínio $(x \in \mathbb{R})$, verificamos que:

Se $a > 0$ então, $f(x) > 0$.

Se $a < 0$ então, $f(x) < 0$.

2° caso: quando $\Delta = 0$ a representação gráfica da função quadrática $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ admite duas raízes reais $x_1 = x_2$. Assim sendo a parábola toca o eixo x em apenas um ponto, mostrado na figura 30, a seguir.

Figura 30: Estudo da representação gráfica das funções quadráticas quando $\Delta = 0$



Fonte: o autor

Se $a > 0$, para todo $x \in \left]-\infty\, ;\, x_1\right[$, verificamos que: $f(x) > 0$.

Se $a > 0$, $x = x_1$ e $x = x_2$, verificamos que: $f(x) = 0$.

Se $a > 0$, para todo $x \in \left]x_2\, ;\, +\infty\right[$, verificamos que: $f(x) > 0$.

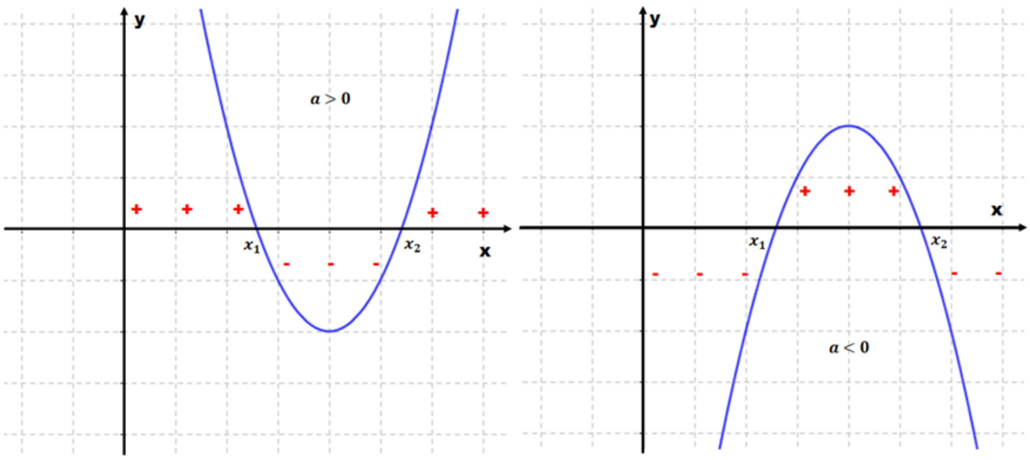
Se $a < 0$, para todo $x \in \left]-\infty\, ;\, x_1\right[$, verificamos que: $f(x) < 0$.

Se $a < 0$, $x = x_1$ e $x = x_2$, verificamos que: $f(x) = 0$.

Se $a < 0$, para todo $x \in \left]x_2\, ;\, +\infty\right[$, verificamos que: $f(x) < 0$.

3° caso: quando $\Delta > 0$ a representação gráfica da função quadrática $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ admite duas raízes reais distintas, x_1 e x_2. Assim sendo a representação gráfica da função quadrática toca o eixo x em dois pontos, mostrado na figura 31, a seguir.

Figura 31: Estudo da representação gráfica das funções quadráticas quando $\Delta > 0$



Fonte: o autor

Se $a > 0$, para todo $x \in]-\infty\,;\, x_1[$, verificamos que: $f(x) > 0$.

Se $a > 0$, para todo $x \in]x_1\,; x_2[$, , verificamos que: $f(x) < 0$.

Se $a > 0$, para todo $x \in]x_2\,;\, +\infty[$, verificamos que: $f(x) > 0$.

Se $a < 0$, para todo $x \in]-\infty\,;\, x_1[$, verificamos que: $f(x) < 0$.

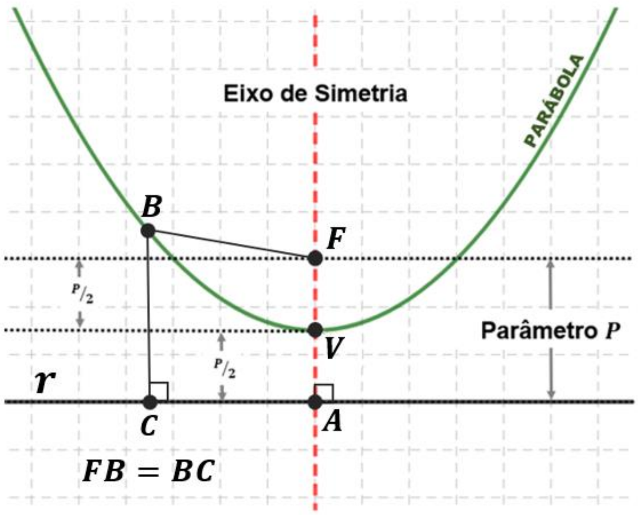
Se $a < 0$, para todo $x \in]x_1\,; x_2[$, , verificamos que: $f(x) > 0$.

Se $a < 0$, para todo $x \in]x_2\,;\, +\infty[$, verificamos que: $f(x) < 0$.

5.11. Capacitação: o Ensino de Funções Quadráticas Empregando o GeoGebra

Inicialmente defina parábola como sendo dado um ponto F no plano cartesiano e uma reta r, respectivamente chamados de foco e diretriz, parábola é o conjunto dos pontos P que são equidistantes a diretriz e ao foco. Ainda sobre as parábolas a reta perpendicular a diretriz que passa pelo foco é chamado de eixo de simetria e a interseção entre o eixo de simetria e a parábola é chamado vértice da parábola, o vértice é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz. Todos os elementos estão evidenciados na figura 32, a seguir.

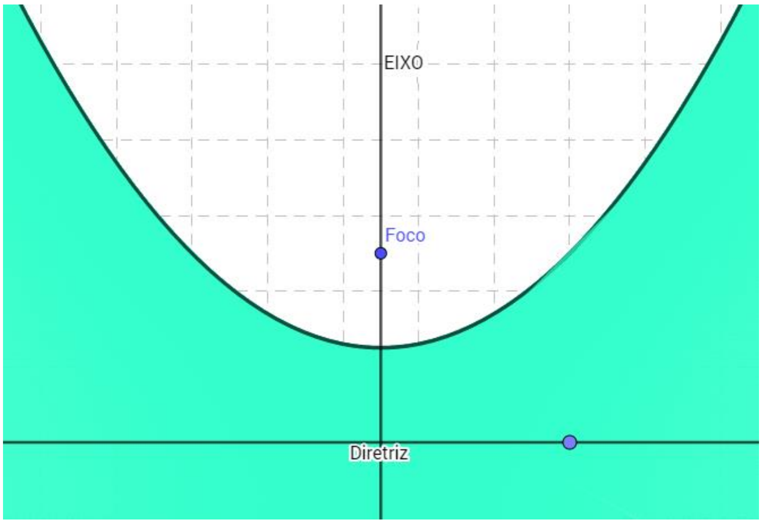
Figura 32: Parábola e seus elementos



Fonte: o autor

Neste momento, elabore uma parábola junto ao GeoGebra seguindo os passos: incialmente crie um ponto na janela de visualização e dê nome “Foco” ao ponto. Na sequência crie uma reta que não contenha o ponto “Foco”. Ainda sobre a reta, dê nome “Diretriz” a reta criada. Clique no segundo ícone da caixa de ferramentas e marque a ferramenta Ponto em Objeto, para criar um ponto sobre a reta Diretriz. Na sequência clique no quarto ícone da caixa de ferramentas e marque a ferramenta Mediatriz, continuando, na caixa de ferramentas clique no ponto Foco e no ponto sobre a reta criado anteriormente, obtendo a mediatriz entre os dois pontos. Configure a reta mediatriz criada anteriormente com uma cor clara e marque, ainda junto as configurações, a opção Exibir Rastro. Na sequência anime a reta mediatriz criada. Com reta mediatriz animada, clique no sétimo ícone da caixa de ferramentas e marque a ferramenta Parábola, como mostrado na figura 33, a seguir.

Figura 33: Parábola e seus elementos



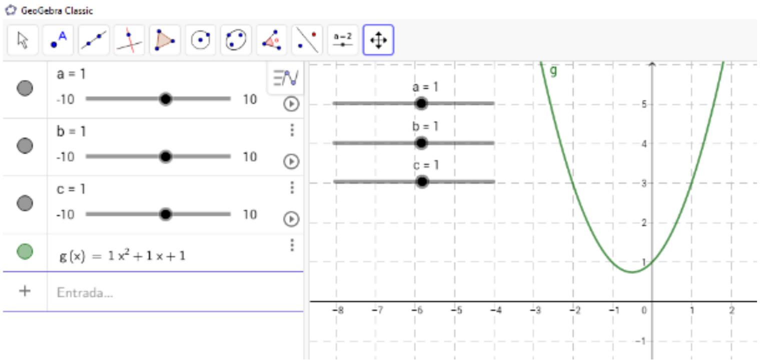
Fonte: o autor

Para o estudo dos parâmetros que norteiam a família de funções quadráticas, bem como a sintaxe das funções quadráticas, elabore três comandos deslizantes, associados às variáveis a, b e c. Para isso, siga passos análogos aos descritos no estudo das famílias das funções afins para a criação dos controles deslizantes associados as variáveis a e b.

Temos então, as bases necessárias para desenvolver a sintaxe das funções quadráticas: $g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Faça então a animação desejada. Na caixa de entrada do GeoGebra digite a sintaxe das funções afins $g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ e clique em enter, mostrado na figura 34, a seguir.

Figura 34: Sintaxe das funções quadráticas junto ao GeoGebra



Fonte: o autor

Antes de animar, determine a intersecção do gráfico das funções quadráticas com o eixo das ordenadas, isso facilitará a identificação do parâmetro c e sua funcionalidade. Para isso, proceda como nas famílias das funções afins quando determinou a interseção da reta com o eixo das ordenadas. Seguindo a construção anime o parâmetro a da sintaxe das funções quadráticas.

A partir dessa animação, percebe-se então a funcionalidade do parâmetro a na família das funções quadráticas. De fato, o parâmetro a na família das funções quadráticas determina se a concavidade ficará voltada para baixo ou para cima.

Siga passos análogos a animação do comando deslizante associado ao parâmetro a, pare sua animação. O foco agora, passará a ser investigar a funcionalidade do parâmetro b, dada a representação gráfica das funções quadráticas. De fato, o parâmetro b na família das funções quadráticas determina se a intersecção da representação gráfica das funções quadráticas com o eixo das ordenadas, se dá em sua parte decrescente, exatamente no vértice ou na parte crescente.

Seguindo passos análogos a animação do comando deslizante associado ao parâmetro b, pararemos sua animação. O foco agora, passará a ser investigar a funcionalidade do parâmetro c, dada a representação gráfica das funções quadráticas. Para isso, animaremos o parâmetro c. De fato, o parâmetro c na família das funções quadráticas determina se a intersecção da representação gráfica das funções quadráticas com o eixo das ordenadas, se dará em sua parte negativa, nula ou positiva.

5.12. Resolvendo Situações-Problemas Sobre Funções Quadráticas Utilizando o GeoGebra

QUESTÃO 03 (EXPCEX – AMAM – 2014): Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal da produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Sabendo que o lucro é obtido pela diferença entre o valor resultante das vendas e o custo da produção, então o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo é igual a:

a) 4 lotes.
b) 5 lotes.
c) 6 lotes.
d) 7 lotes.
e) 8 lotes.

Resolução: Incialmente considere o enunciado e chegue a função lucro L definida por:

$$L(x) = V(x) - C(x)$$

Simplifique a expressão:

$$L(x) = V(x) - C(x)$$
$$L(x) = 3x^2 - 12x \; - (5x^2 - 40x - 40)$$
$$L(x) = 3x^2 - 12x \; - 5x^2 + 40x + 40$$
$$L(x) = -2x^2 + 28x + 40$$

Como o coeficiente $a = -2 < 0$ da função lucro, segue essa parábola tem sua concavidade voltada para baixo, logo, admite um ponto de máximo de abscissa $x_v = -\frac{b}{2a}$ e ordenada $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$.

Determine o valor da abscissa do ponto de máximo para ter a solução para o problema proposto.

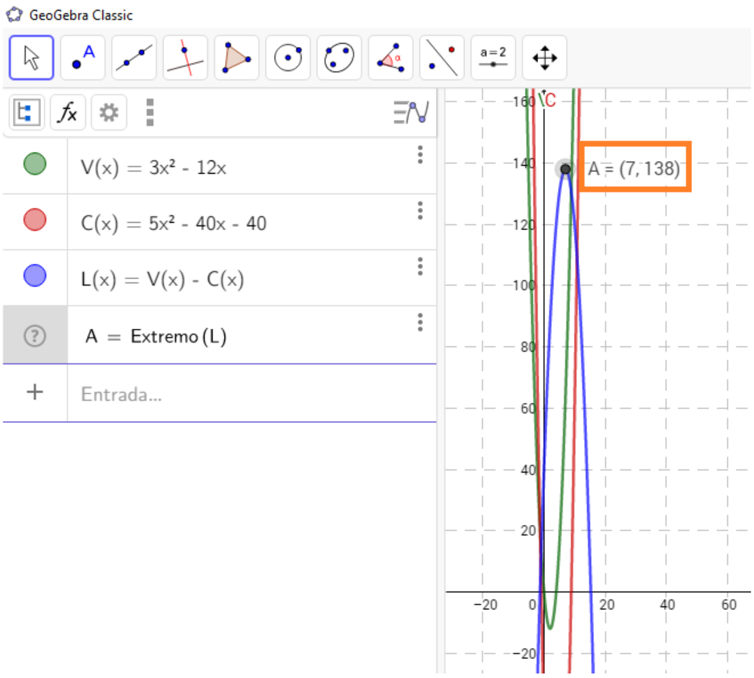
$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{28}{2(-2)} \Rightarrow x_v = -\frac{28}{-4} \Rightarrow x_v = -\frac{28}{-4} \Rightarrow x_v = 7$$

Resposta: Alternativa d, portanto, diante do enunciado, a indústria teve seu lucro máximo com a venda de 7 lotes.

Resolução com o GeoGebra: Inicialmente na janela de álgebra digite a sintaxe da função venda e clique em enter. Na sequência digite a sintaxe da função custo, clique em enter também, e por fim, ainda na janela de álgebra digite a sintaxe da função lucro, que pelo enunciado é definida pela diferença entre a sintaxe da função venda e a sintaxe da função custo, clique em enter. Na janela de visualização está exposto a representação gráfica das três funções (um pouco carregado de informações, contudo volte a atenção a janela de álgebra). Clique agora na segunda ferramenta da caixa de ferramentas, marque a opção Otimização e clique na representação gráfica da função lucro, na janela de visualização.

Com isso, o ponto de máximo fica evidenciado, clique o sobre ele e solicite, nas configurações, exibir nome e valor. Com isso a solução fica evidenciada na janela de visualização, como mostrado na figura 35, a seguir.

Figura 35: Resolução com o GeoGebra do problema da quantidade de lotes vendidos para maximizar lucros



Fonte: o autor

Ficando evidente a abscissa (e também a ordenada, caso fosse proposto) do vértice da parábola.

Resposta: Alternativa d, portanto, diante do enunciado, a indústria teve seu lucro máximo com a venda de 7 lotes.

QUESTÃO 04 (PUC – RJ): O número de pontos de intersecção das duas parábolas $y = x^2$ e $y = 2x^2 - 1$ é:

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

e) 4.

Resolução: Para saber o número de pontos de intersecção entre as parábolas, basta igualá-las. Logo, faça:

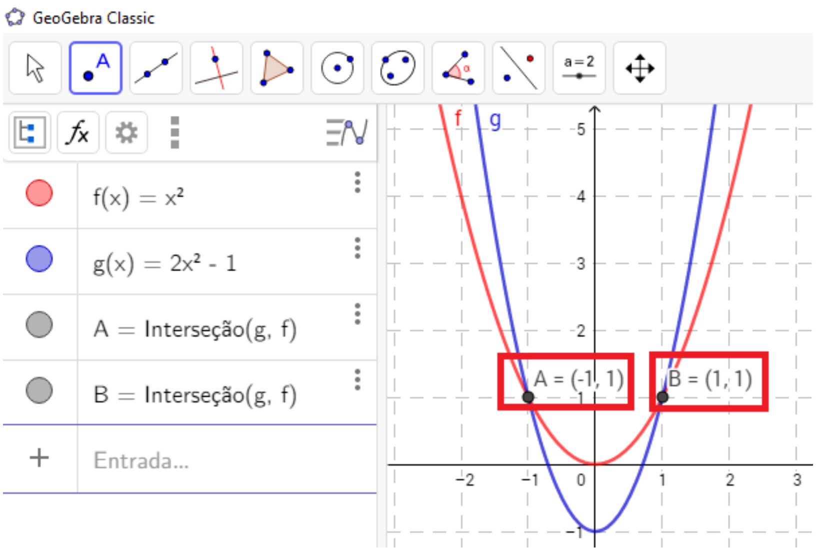
$$2x^2 - 1 = x^2$$

$$2x^2 - x^2 = 1$$
$$x^2 = 1$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$
$$|x| = 1$$
$$x = \pm 1$$

Resposta: Alternativa c, portanto, o número de pontos de intersecção entre as parábolas é 2.

Resolução empregando o GeoGebra: Inicialmente na janela de álgebra digite a sintaxe da primeira parábola que é x^2 e tecle enter. Na sequência digite a sintaxe da segunda parábola que é $2x^2 - 1$ e tecle enter. Imediatamente as representações gráficas são exibidas na janela de visualização. Visualmente já se tem a resposta, contudo, clique no segundo ícone da caixa de ferramentas e marque a opção Interseção de Dois Objetos, na sequência na janela de visualização, clique sobre a representação gráfica de x^2 e de $2x^2 - 1$. Automaticamente será exibido dois pontos de interseção, mostrado na figura 36, a seguir.

Figura 36: Resolução com o GeoGebra do problema da interseção entre duas parábolas



Fonte: o autor

Resposta: Alternativa c, portanto, o número de pontos de intersecção entre as parábolas é 2.

QUESTÃO 05 (FGV): O lucro mensal de uma empresa é dado por $L = -x^2 + 30x - 5$, onde x é a quantidade mensal vendida.

a) Qual é o lucro mensal máximo possível?

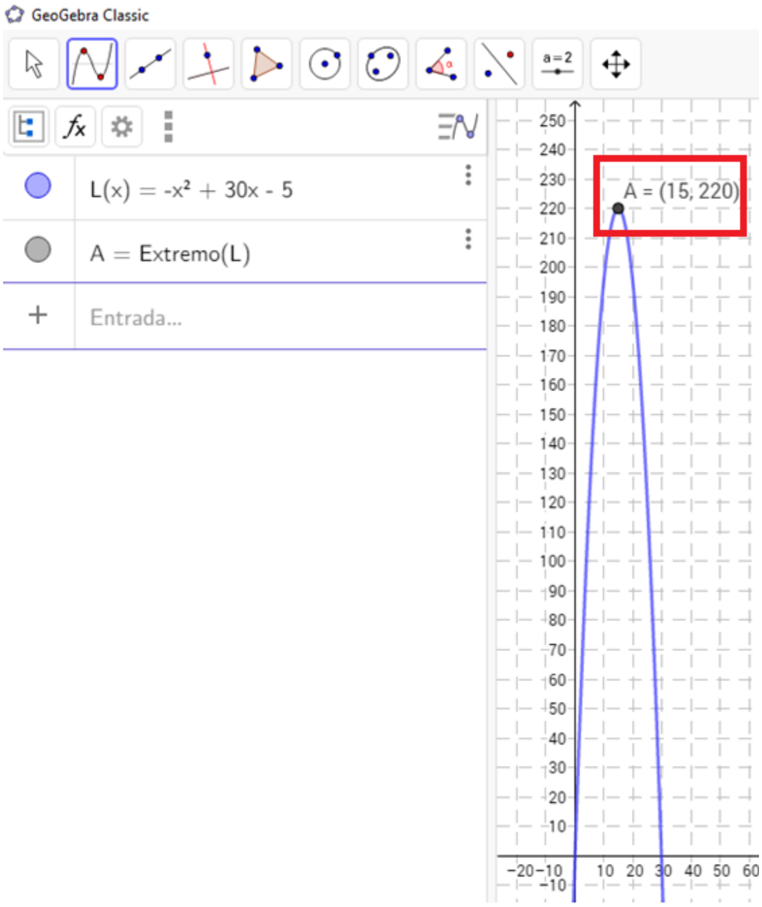
Resolução: Considere o enunciado e função quadrática dada por $L = -x^2 + 30x - 5$ sendo o lucro. Segue que $a = -1 < 0$ implica uma parábola com concavidade voltada para baixo, ou seja, a função admite um ponto de máximo. A abscissa desse ponto de máximo, $x_v = -\frac{b}{2a}$, representa a quantidade mensal vendida que maximiza os lucros, mas não é o desejado. A ordenada desse ponto de máximo, $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, representa o lucro máximo, ou seja, a imagem da quantidade mensal vendida que maximiza os lucros. Logo, o cálculo para o lucro máximo é:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{\left(30^2 - 4(-1)(-5)\right)}{4(-1)} \Rightarrow y_v = 220$$

Resposta: Portanto, o lucro máximo possível é $220{,}00$ unidades monetárias.

Resolução empregando o GeoGebra: Inicialmente na janela de álgebra digite a sintaxe da função que representa o lucro $L(x) = -x^2 + 30x - 5$ e tecle enter, isso fará com que a representação gráfica da função lucro é exibida na janela de visualização. Na sequência clique no segundo ícone da caixa de ferramentas e marque a ferramenta Otimização, por fim, clique na representação gráfica da função lucro. Esses passos são suficientes para que a resposta seja exibida, como na figura 37, a seguir.

Figura 37: Resolução com o GeoGebra do problema do lucro máximo de uma empresa



Fonte: o autor

Resposta: Portanto, o lucro máximo possível é 220,00 unidades monetárias.

b) Entre quais valores deve variar x para que o lucro mensal seja no mínimo igual a 195?

Resolução: Para saber quais valores deve variar x para que o lucro mensal seja no mínimo igual a 195, faça:

$$-x^2 + 30x - 5 \leq 195$$

$$-x^2 + 30x - 200 \leq 0$$

Esta inequação polinomial do segundo grau representa uma parábola com a concavidade voltada para baixo, sua solução se dá, por meio da determinação de suas raízes e o intervalo que interessará será o intervalo entre as raízes.

Para o cálculo das raízes, faça:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

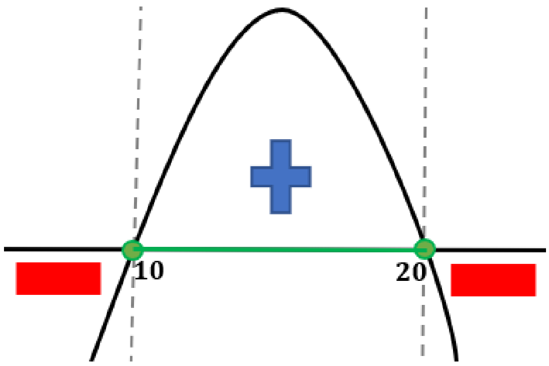
$$x = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4(-1)(-200)}}{2(-1)}$$

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = 20$$

A resposta fica evidente junto a figura 38, com o estudo do sinal da parábola $y = -x^2 + 30x - 200$.

Figura 38: Estudo do sinal da parábola $y = -x^2 + 30x - 200$

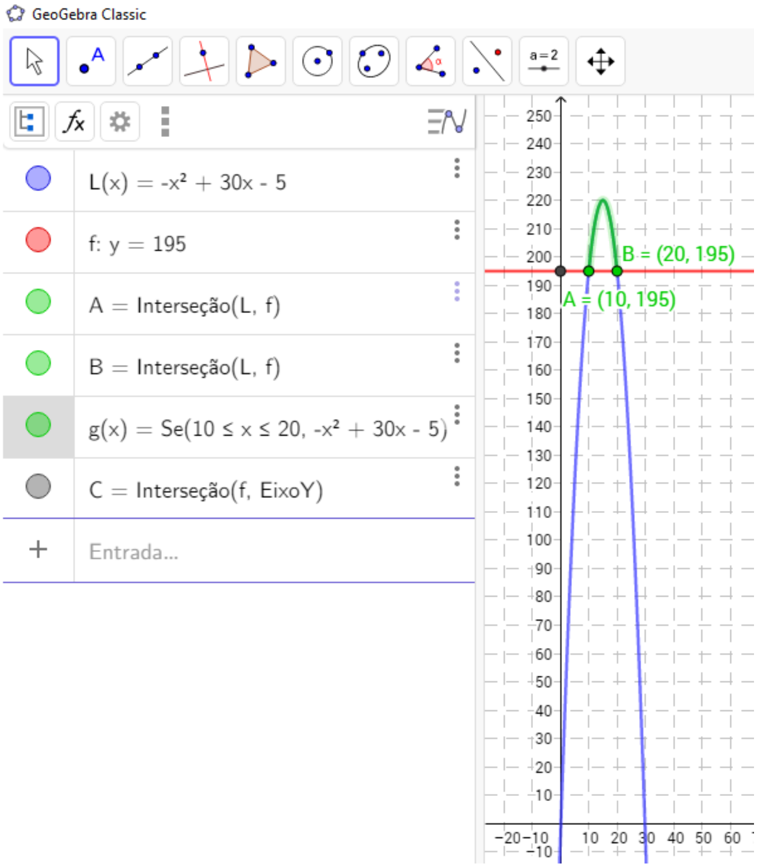


Fonte: o autor

Resposta: Portanto, deve variar x entre os valores 10 e 20, para que o lucro mensal seja no mínimo igual a 195.

Resolução empregando o GeoGebra: Inicialmente na janela de álgebra digite a sintaxe da função lucro e tecle enter. Na sequência, ainda na janela de álgebra, digite a sintaxe da função $y = 195$ e tecle enter. Imediatamente as representações gráficas são exibidas na janela de visualização. Visualmente já se tem a resposta, contudo, clique no segundo ícone da caixa de ferramentas e marque a opção Interseção de Dois Objetos, na sequência na janela de visualização, clique sobre a representação gráfica das duas funções. Automaticamente será exibido dois pontos de interseção, entre esses dois pontos está a solução desejada. Para tornar ainda mais evidente, digite na janela de álgebra a seguinte sintaxe: $função(-x^2 + 30x - 5,10,20)$. Com isso, será exibida uma nova função, sobre a antiga, apenas no intervalo desejado como exposto na figura 39, a seguir.

Figura 39: Resolução com o GeoGebra do problema do lucro de uma empresa, com no mínimo determinado valor



Fonte: o autor

Resposta: Portanto, deve variar x entre os valores 10 e 20, para que o lucro mensal seja no mínimo igual a 195.

6. FUNÇÕES MODULARES

Neste capítulo apresentamos as funções reais de variável real modulares ou apenas funções modulares, aplicado ao ensino médio. Iniciamos com o conceito de módulo, também chamado de valor absoluto e algumas propriedades decorrentes. Na sequência definimos funções modulares e apresentamos sua representação gráfica.

Falamos ainda, sobre translação vertical, translação horizontal e translação vertical e horizontal da representação gráfica das funções modulares e apresentamos uma proposta para abordagem das funções modulares e resolução de situações-problemas, relacionadas a funções modulares, utilizando o software GeoGebra, finalizando o capítulo.

O conteúdo deste capítulo que apresenta definições, fórmulas e gráficos de funções foi baseado nas seguintes referências: (CUNHA, 2017), (GIOVANNI; BONJORNO, 2000), (IEZZI; MURAKAMI, 1993), (IEZZI; MURAKAMI, 2013), (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2013), (IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PÉRIGO, 2005), (IEZZI; DOLCE; TEIXEIRA; MACHADO; GOULART; CASTRO; MACHADO, 1990), (PAIVA, 2003) e (YOUSSEF, 2005).

6.1. Módulo ou Valor Absoluto de um Número Real

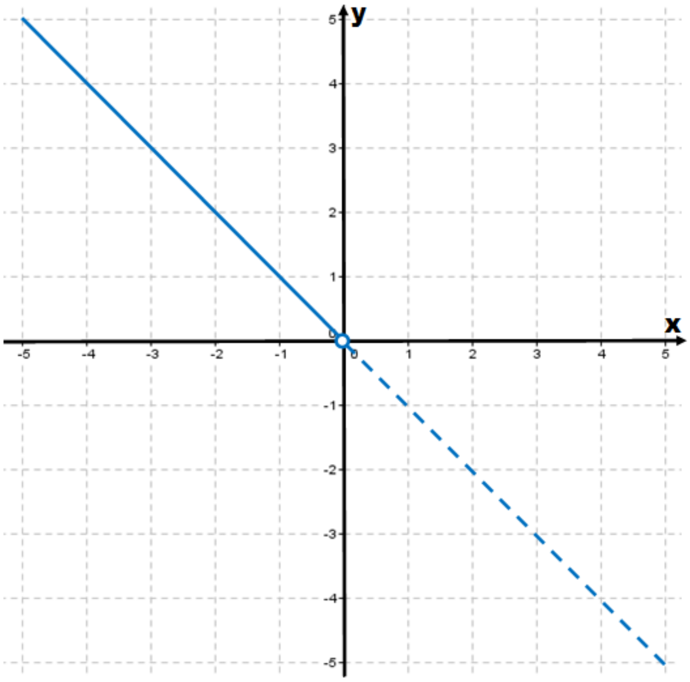
Definimos módulo ou valor absoluto de um número real, geometricamente, como a distância desse número à origem dos números reais, ou seja, representa a distância desse número ao zero na reta orientada de números reais. Algébrica o módulo de um número real x, é representado por $|x|$, e a seguinte definição é válida:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Por exemplo, $|-5| = 5$, pois -5 está 5 unidades à esquerda do zero e $|7| = 7$, pois o 7 está 7 unidades à direita do zero.

Para $x \in \mathbb{R}$ e $x < 0$, segue que $|x| = -x$ e representamos esse comportamento no gráfico cartesiano, conforme a figura 40, a seguir.

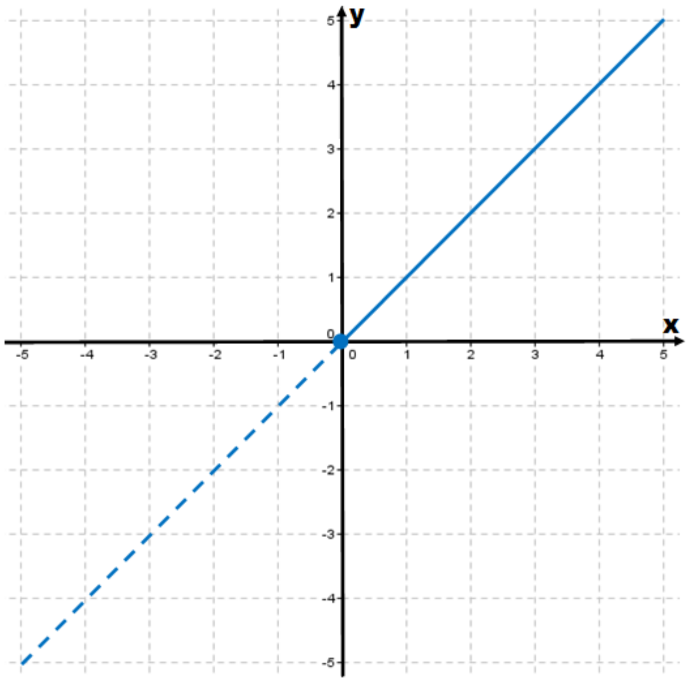
Figura 40: A representação gráfica no plano cartesiano de |x|, para x ∈ R e x < 0



Fonte: o autor

Para $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$, segue que $|x| = x$ e representamos esse comportamento no gráfico cartesiano, conforme a figura 41, a seguir.

Figura 41: A representação gráfica no plano cartesiano de $|x|$, para $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 0$



Fonte: o autor

6.2. Propriedades dos Módulos de Números Reais

Ao tratarmos do assunto módulo de números reais, algumas propriedades são verificadas, de modo que possam auxiliar na resolução de situações-problemas. Dado um $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades são válidas:

I. $|x| = 0 \iff x = 0$;

II. $|x| \geq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$;

III. $|x| = a \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ ou \\ x = -a \end{cases}$;

IV. $|x| = |a| \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ ou \\ x = -a \end{cases}$;

V. $|x| = |-x|\ \forall\ x \in \mathbb{R}$;

VI. $|x \cdot a| = |x| \cdot |a|$;

VII. $\left|\frac{x}{a}\right| = \frac{|x|}{|a|}$;

VIII. $\sqrt{x^2} = |x|$;

IX. $|x|^{2n} = |x^{2n}| = x^{2n}$.

6.3. Funções Modulares

Denominamos funções modulares como a função real de variável real que apresenta módulo na variável em sua lei de formação. A mais tradicional das funções modulares é $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ expressa pela lei de formação $f(x) = |x|$. De acordo com a lei de formação dessa função modular, cada elemento é associado ao seu valor absoluto.

Definimos algebricamente a mais tradicional dentre as funções modulares, como:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

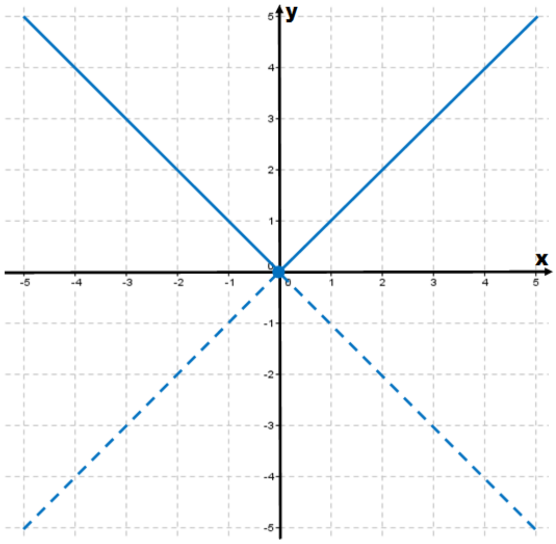
$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

O domínio é o $\mathbb{R}$, bem como conjunto imagem $\mathbb{R}_+$ e o contradomínio também é o $\mathbb{R}$.

6.4. Representação Gráfica das Funções Modulares

A representação gráfica da função modular preserva as propriedades do módulo aplicado aos números reais. Para construirmos a representação gráfica de uma função modular, estudamos a expressão algébrica na lei de formação, definindo-a por meio de várias sentenças em intervalos distintos e ao final esboçamos no plano cartesiano o que foi determinado por meio das várias sentenças em intervalos distintos, como mostrado na figura 42, a seguir.

Figura 42: A representação gráfica da função modular $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$



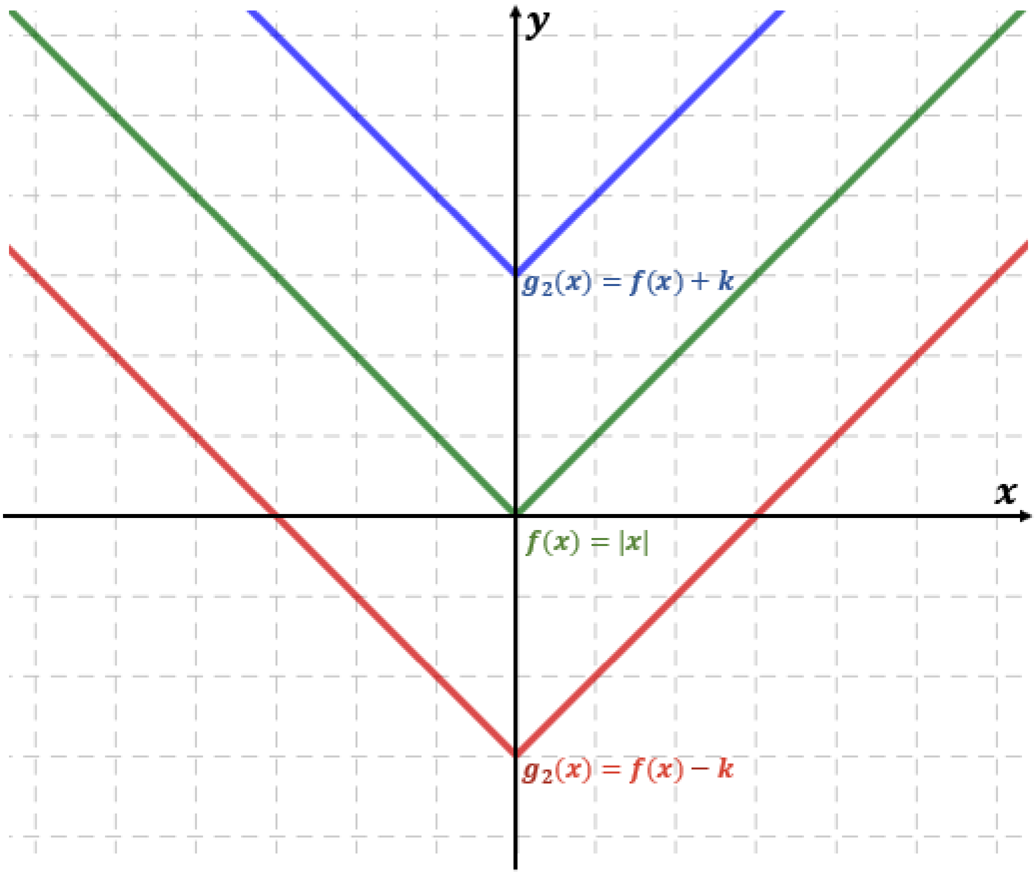
Fonte: o autor

6.5. Translação Vertical da Representação Gráfica das Funções Modulares

Definimos translação vertical da representação gráfica das funções modulares como o retrocesso ou avanço vertical (movimento de descida ou subida) da representação gráfica da mais tradicional das funções modulares definida por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$.

Assim, a partir da lei de formação da função modular $f(x) = |x|$, com o translado vertical da representação gráfica das funções modulares chegamos a uma nova família de funções modulares como $g(x) = f(x) + k$, com $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$. A constante com $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, é responsável pelo translado vertical, ou seja, a representação gráfica da função modular g é congruente a representação gráfica da função modular f, contudo transladada $|k|$ unidades para baixo se e $k < 0$ ou $|k|$ unidades para cima se $k > 0$, como mostrado na figura 43, a seguir:

Figura 43: O translado vertical da representação gráfica das funções modulares a partir da representação gráfica de $f(x) = |x|$



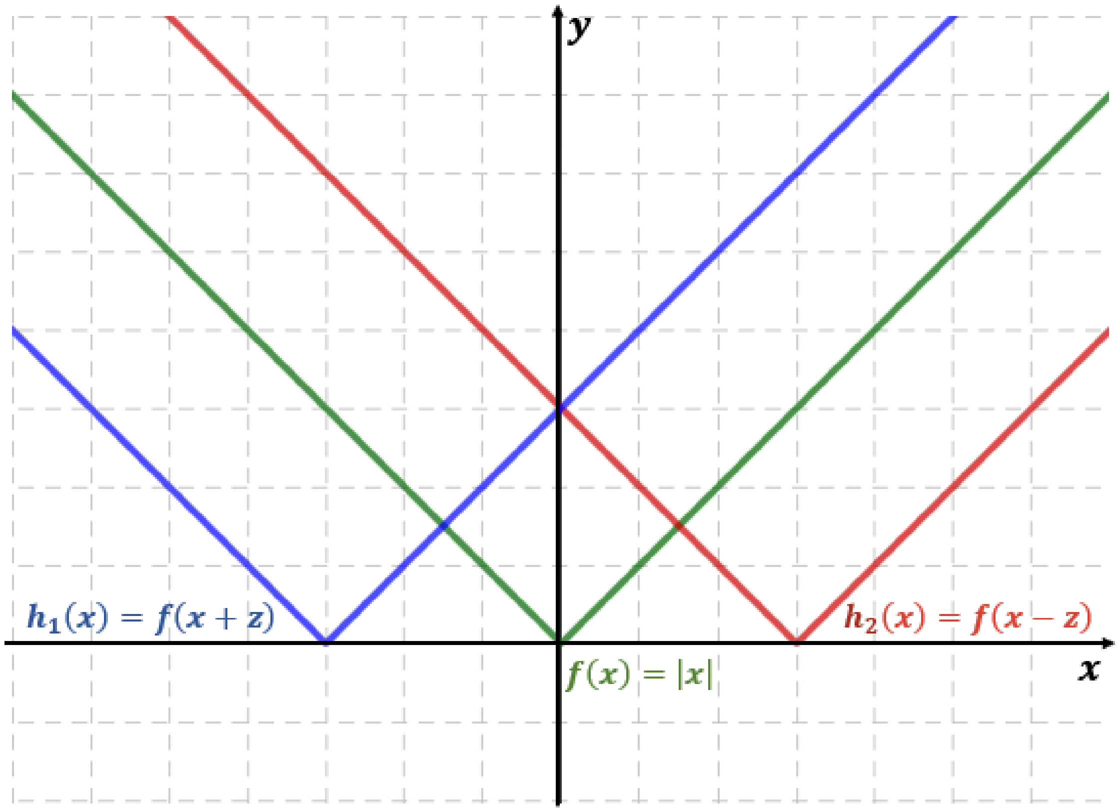
Fonte: o autor

6.6. Translação Horizontal da Representação Gráfica das Funções Modulares

Definimos translação horizontal da representação gráfica das funções modulares como o retrocesso ou avanço horizontal (movimento à esquerda ou à direita) da representação gráfica da mais tradicional das funções modulares definida por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$.

Assim, a partir da lei de formação da função modular$f(x) = |x|$, com o translado horizontal da representação gráfica das funções modulares chegamos a uma nova família de funções modulares como $h(x) = f(x + z)$, com $z \in \mathbb{R}$ e $z \neq 0$. A constante com $z \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, é responsável pelo translado horizontal, ou seja, a representação gráfica da função modular h é congruente a representação gráfica da função modular f, contudo transladada $|z|$ unidades à esquerda se $z > 0$ ou $|z|$ unidades á direita se $z < 0$, como mostrado na figura 44, a seguir:

Figura 44: O translado horizontal da representação gráfica das funções modulares a partir da representação gráfica de $f(x) = |x|$



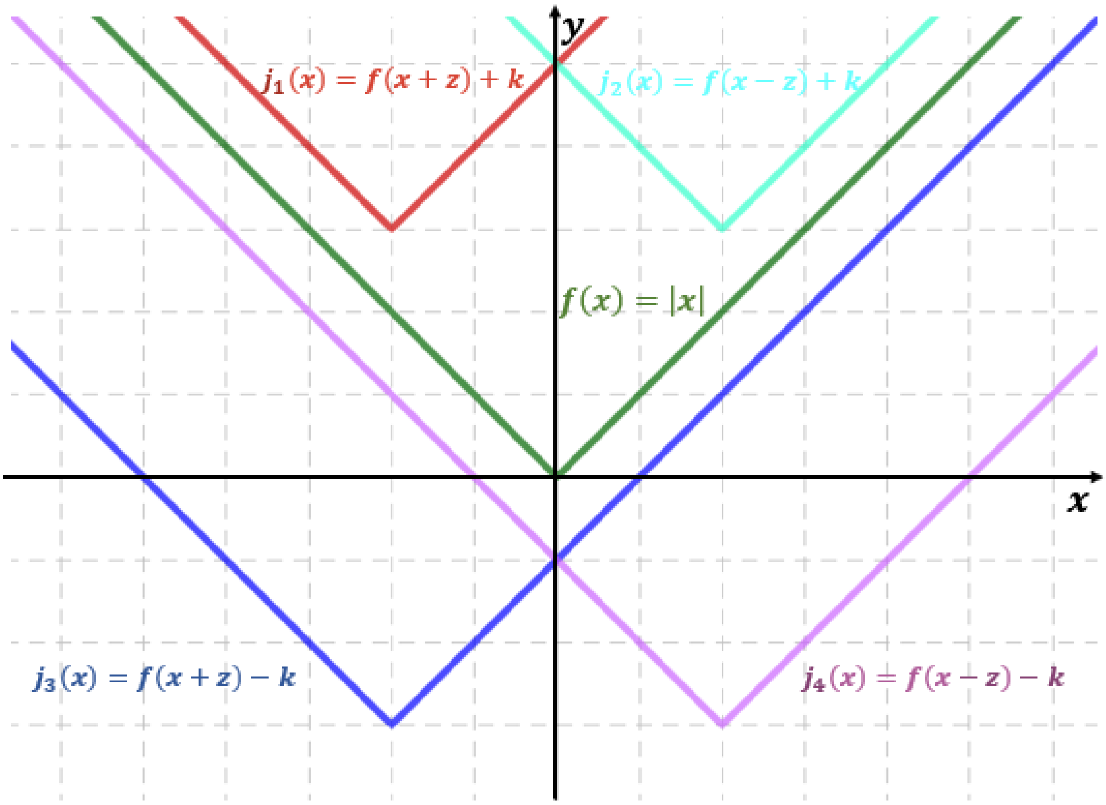
Fonte: o autor

6.7. Translação Vertical e Horizontal da Representação Gráfica das Funções Modulares

Definimos translação vertical e horizontal da representação gráfica das funções modulares quando ocorrem ao mesmo tempo a translação vertical e a translação horizontal da representação gráfica da mais tradicional das funções modulares definida por $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$.

Assim, a partir da função modular $f(x) = |x|$, com o translado vertical e horizontal da representação gráfica das funções modulares chegamos a uma nova família de funções modulares como $\mathrm{j}(x) = f(x + z) + k$, com $z, k \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$ e $k \neq 0$. As constantes $z, k \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$ e $k \neq 0$, são respectivamente responsáveis pelo translado horizontal, movimento à esquerda se $z > 0$ ou à direita se $z < 0$ e pelo translado vertical, movimento de descida se $k < 0$ ou movimento de subida se $k > 0$, como mostrado na figura 45, a seguir.

Figura 45: O translado vertical e horizontal da representação gráfica das funções modulares a partir da representação gráfica de $f(x) = |x|$

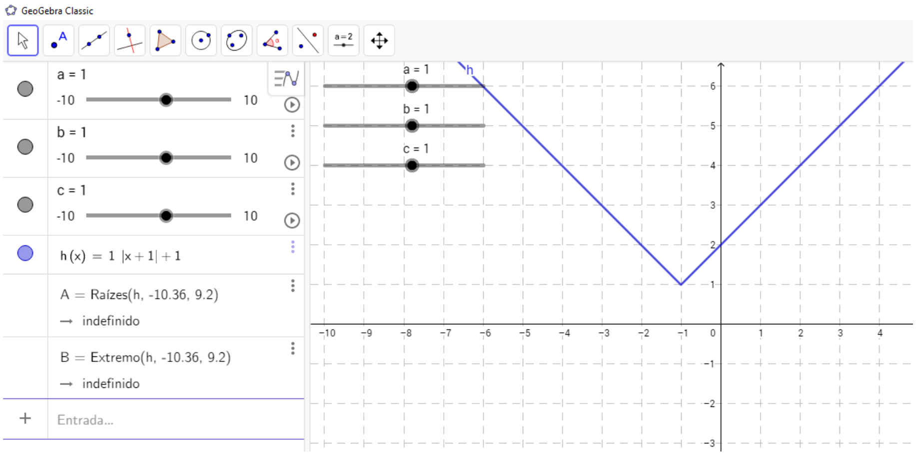


Fonte: o autor

6.8. Capacitação: o Ensino de Funções Modulares Empregando o GeoGebra

De início, como feito anteriormente, crie três controles deslizantes a, b e c, pois eles serão necessários à sintaxe das funções modulares. Na sequência desenvolva a sintaxe das funções modulares e investigue a funcionalidade de seus parâmetros. Para isso, no campo de entrada escreveremos $h(x) = a \cdot |x + b| + c$, como na figura 46, a seguir.

Figura 46: Escrevendo a sintaxe das funções modulares no software GeoGebra



Fonte: o autor

Seguindo a construção serão investigados padrões e regularidades sobre o parâmetro a animando-o. A partir dessa animação verifica-se a funcionalidade do parâmetro a na família das funções modulares. De fato, o parâmetro a na família das funções modulares determina se a abertura da representação gráfica das funções modulares estará voltada para baixo ou para cima.

Seguindo passos análogos a animação do controle deslizante associado ao parâmetro a, pare sua animação. O foco agora, passará a ser investigar a funcionalidade do parâmetro b, dada a representação gráfica das funções quadráticas. Para isso, anime o controle deslizante vinculado ao parâmetro c. A partir dessa animação verifica-se a funcionalidade do parâmetro b na família das funções modulares. De fato, o parâmetro b na família das funções modulares determina o translado horizontal da representação gráfica das funções.

Seguindo passos análogos a animação do controle deslizante associado ao parâmetro b, pare sua animação. O foco agora, passará a ser investigar a funcionalidade do parâmetro c, dada a representação gráfica das funções quadráticas. Para isso, anime o controle deslizante vinculado ao parâmetro c. A partir dessa animação, verifica-se a funcionalidade do parâmetro c na família das funções modulares. De fato, o parâmetro c na família das funções modulares determina o translado vertical da representação gráfica das funções.

6.9. Resolvendo Situações-Problemas Sobre Funções Modulares Utilizando o GeoGebra

QUESTÃO 06 (UFRJ – 1999): Uma empresa teve seu lucro diário L dado pela função:

$$L(x) = 50 \cdot (|x - 100| + |x - 200|)$$

Onde $x = 1; 2; 3; 4; \ldots; 363; 364; 365$ correspondente a cada dia do ano e L é dado em reais.

Determine em que dias (x) do ano o lucro foi de $R\$$ 10 000,00.

Resolução: Para se ter um lucro de R$ 10 000,00 é necessário que:

$$\mathrm{L(x)} = 10\,000$$

$$50 \cdot (|\mathrm{x} - 100| + |\mathrm{x} - 200|) = 10\,000$$

$$|\mathrm{x} - 100| + |\mathrm{x} - 200| = 200$$

Uma equação modular que envolva vários módulos, sua resolução requer o estudo de todos os módulos envolvidos. Para isso, faça:

$$\mathrm{f(x)} = |\mathrm{x} - 100| + |\mathrm{x} - 200|$$

$$\mathrm{h(x)} = 200$$

$$\mathrm{m(x)} = |\mathrm{x} - 100|$$

$$\mathrm{n(x)} = |\mathrm{x} - 200|$$

Para compor $\mathrm{f(x)} = \mathrm{m(x)} + \mathrm{n(x)}$ é necessário estudar minuciosamente $\mathrm{m(x)}$ e $\mathrm{n(x)}$, da seguinte maneira:

$$\mathrm{m(x)} = |\mathrm{x} - 100| = \begin{cases} -(\mathrm{x} - 100), & (\mathrm{x} - 100) < 0 \\ +(\mathrm{x} - 100), & (\mathrm{x} - 100) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -\mathrm{x} + 100, & \mathrm{x} < 100 \\ \mathrm{x} - 100, & \mathrm{x} \geq 100 \end{cases}$$

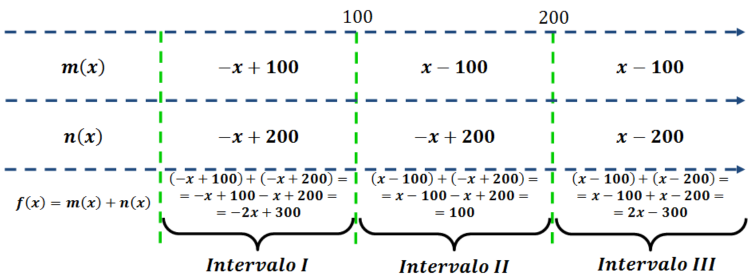
$$\mathrm{m(x)} = \begin{cases} -\mathrm{x} + 100, & \mathrm{x} < 100 \\ \mathrm{x} - 100, & \mathrm{x} \geq 100 \end{cases}$$

$$\mathrm{n(x)} = |\mathrm{x} - 200| = \begin{cases} -(\mathrm{x} - 200), & (\mathrm{x} - 200) < 0 \\ +(\mathrm{x} - 200), & (\mathrm{x} - 200) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -\mathrm{x} + 200, & \mathrm{x} < 200 \\ \mathrm{x} - 200, & \mathrm{x} \geq 200 \end{cases}$$

$$\mathrm{n(x)} = \begin{cases} -\mathrm{x} + 200, & \mathrm{x} < 200 \\ \mathrm{x} - 200, & \mathrm{x} \geq 200 \end{cases}$$

Feito o estudo algébrico de $\mathrm{m(x)}$ e $\mathrm{n(x)}$, faça o quadro, como na figura 47, com os valores e expressões obtidas.

Figura 47: Quadro com intervalos modulares, para solução da questão associada ao lucro diário



Fonte: autor

Logo, $\mathrm{f(x)} = \mathrm{m(x)} + \mathrm{n(x)}$, fica definida da seguinte maneira:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 300; & x < 100 \\ 100; & 100 \leq x < 200 \\ 2x - 300; & x \geq 200 \end{cases}$$

Retomando a equação, faça:

$$|x - 100| + |x - 200| = 200$$

$$f(x) = g(x)$$

Para isso é necessário igualar os intervalos de f(x), pois f(x) é uma função definida por uma tripla sentença, a g(x) que por sua vez é uma função constante, diante disso, faça:

I. Intervalo real I $\{x \in \mathbb{R}, \text{tal que}, x < 100\}$:

$$f(x) = g(x) \rightarrow -2x + 300 = 200 \rightarrow -2x = -100 \rightarrow \mathbf{x = 50}$$

II. Intervalo real II $\{x \in \mathbb{R}, \text{tal que}, 100 \leq x < 200\}$:

$$f(x) = g(x) \rightarrow 100 = 200 \rightarrow \mathbf{x} = \emptyset$$

III. Intervalo real III $\{x \in \mathbb{R}, \text{tal que}, x \geq 200\}$:

$$f(x) = g(x) \rightarrow 2x - 300 = 200 \rightarrow 2x = 500 \rightarrow \mathbf{x = 250}$$

Resposta: Os dias (x) do ano em que o lucro foi de R$ 10 000,00, foram $x = 50$ e $x = 250$.

Resolução empregando o GeoGebra: Para se ter um lucro de R$ 10 000,00 é necessário que:

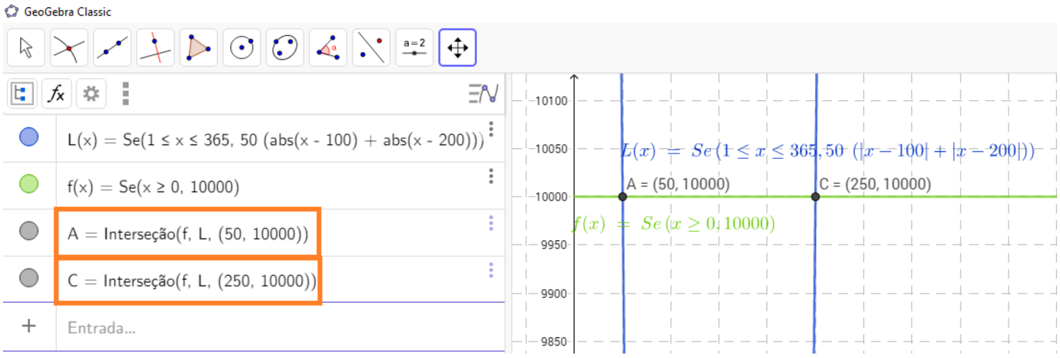
$$L(x) = 10\,000$$

$$50 \cdot (|x - 100| + |x - 200|) = 10\,000$$

Para a solução junto ao GeoGebra, faça:

Inicialmente digite na janela de álgebra a sintaxe da função lucro que é $L(x) = função(50 \cdot (|x - 100| + |x - 200|), 1{,}365)$ e clique em enter, o que corresponderá a função lucro no intervalo de $1 \leq x \leq 365$. Ainda na janela de álgebra, digite a sintaxe $f(x) = Se(x \geq 0{,}10000)$ e clique em enter. Com isso, será exibida a representação gráfica das duas funções na janela de visualização. Agora, na caixa de ferramentas clique no segundo ícone marcando a opção Interseção de Dois Objetos, na sequência clique na função L e depois na função f. Repita os passos para que os dois pontos de interseção sejam obtidos. A resposta será apresentada na janela de álgebra e também na janela de visualização como na figura 48, a seguir.

Figura 48: Solução de um problema de função modulares associado a lucros com o GeoGebra



Fonte: o autor

Resposta: Os dias (x) do ano o lucro foi de R$ 10 000,00, foram $x = 50$ e $x = 250$.

Nota: Como o autor da questão definiu o lucro em dias, a representação gráfica do lucro é dada por pontos colineares de abscissas inteiras no intervalo $[1; 2; 3; \ldots; 364; 365]$, contudo não há perda de generalidade junto a figura 48.

QUESTÃO 07 (UERJ – 2001): O volume de água em um tanque varia com o tempo de acordo com a seguinte equação:

$$\boldsymbol{V = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|, \qquad t \in \mathbb{R}_+}$$

Nela, V é o volume medido, em m^3, após t horas, contadas a partir de $8h$ de uma manhã. Determine os horários inicial e final dessa manhã em que o volume permanece constante.

Resolução: Para determinar o horário em que o volume permaneceu constante, rearranje a função, estudando os seus módulos.

Sejam $V = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|$, $m(x) = |4 - 2t|$ e $n(x) = |2t - 6|$, desta forma

$$V = 10 - m(x) - n(x)$$

Neste momento, estude $m(x)$ e $n(x)$.

$$m(x) = |4 - 2t| = \begin{cases} -(4 - 2t); & (4 - 2t) < 0 \\ +(4 - 2t); & (4 - 2t) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -4 + 2t; & -2t < -4 \\ 4 - 2t; & -2t \geq -4 \end{cases} = \begin{cases} 2t - 4; & t > 2 \\ -2t + 4; & t \leq 2 \end{cases}$$

Neste caso, pelo fato de o enunciado trata da variável t como sendo tempo segue que uma alteração será necessária na expressão que define $m(x)$.

$$m(x) = \begin{cases} 2t - 4; & t > 2 \\ -2t + 4; & 0 < t \leq 2 \end{cases}$$

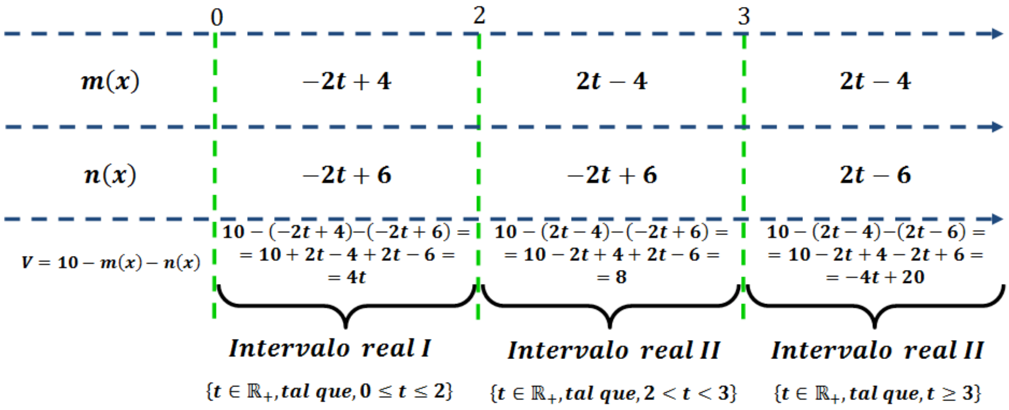
$$n(x) = |2t - 6| = \begin{cases} -(2t - 6); & (2t - 6) < 0 \\ +(2t - 6); & (2t - 6) \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -2t + 6; & 2t < 6 \\ 2t - 6; & 2t \geq 6 \end{cases} = \begin{cases} -2t + 6; & t < 3 \\ 2t - 6; & t \geq 3 \end{cases}$$

Novamente, neste caso, pelo fato de o enunciado trata da variável t como sendo tempo segue que uma alteração será necessária na expressão que define $n(x)$.

$$n(x) = \begin{cases} -2t + 6; & 0 < t < 3 \\ 2t - 6; & t \geq 3 \end{cases}$$

Feito o estudo algébrico de $\mathrm{m}(\mathrm{x})$ e $\mathrm{n}(\mathrm{x})$, cria-se um quadro com os valores e expressões obtidas, destacado na figura 49, a seguir.

Figura 49: Quadro com intervalos modulares, para solução da questão associada ao volume



Fonte: o autor

Finalmente chegue a seguinte definição para o volume:

$$\mathrm{V} = \begin{cases} 4\mathrm{t}; & 0 \leq \mathrm{t} \leq 2 \\ 8; & 2 < \mathrm{t} < 3 \\ -4\mathrm{t} + 20; & \mathrm{t} \geq 3 \end{cases}$$

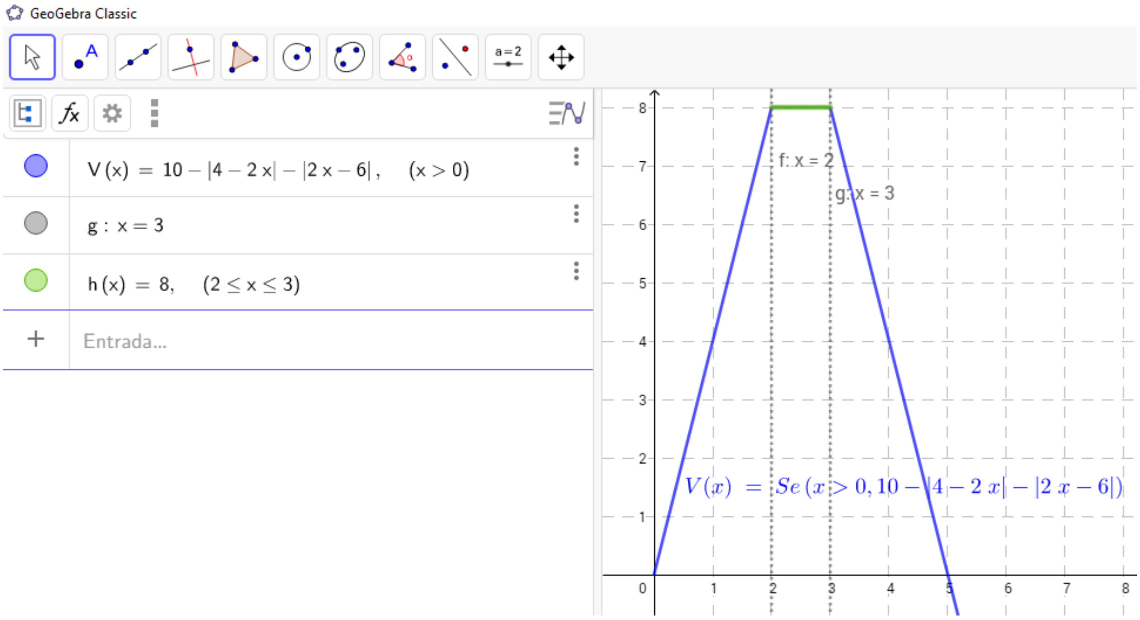
Observando-se a expressão que define V, concluí-se que $\mathrm{V} = 8$ é constante e $2 < \mathrm{t} < 3$. Contudo, pelo enunciado da questão, t foi contabilizado após às 8h, diante disso o intervalo $2 < \mathrm{t} < 3$, fica definido, da seguinte maneira:

$$2 + 8 < \mathrm{t} < 3 + 8 \rightarrow 10 < \mathrm{t} < 11$$

Resposta: O volume, diante das condições impostas pelo enunciado, permaneceu constante das $10{:}\,00$ as $11{:}\,00$ horas.

Resolução empregando o GeoGebra: Incialmente na janela de álgebra digite a sintaxe da função volume, segundo o enunciado, substituindo a varável t por x. Com isso, será exibido na janela de visualização a representação gráfica do comportamento do volume. Visualmente já é sabido o intervalo em que o volume permaneceu constante, conforme a figura 50, a seguir.

Figura 50: Solução de um problema de função modulares associado ao volume com o GeoGebra



Fonte: o autor

Observando-se a expressão que define V, concluí-se que $V = 8$ é constante e $2 < t < 3$. Contudo, pelo enunciado da questão, t foi contabilizado após às 8h, diante disso o intervalo $2 < t < 3$, fica definido, da seguinte maneira:

$$2 + 8 < t < 3 + 8 \rightarrow 10 < t < 11$$

Resposta: O volume, diante das condições impostas pelo enunciado, permaneceu constante das $10:00$ as $11:00$ horas.

Nota: Na representação gráfica exposta na figura 50, é possível ver uma parte em que o volume assume valores negativos, contudo numa situação real isso não é possível. Desconsidere no gráfico os valores negativos para o volume. Sem o auxílio do GeoGebra, fica um pouco mais trabalhoso identificar o intervalo em que x (tempo) pode variar segundo o enunciado.

7. FUNÇÕES EXPONENCIAS

Neste capítulo apresentamos as funções reais de variável real exponenciais ou apenas funções exponenciais, aplicado ao ensino médio. Iniciamos definindo potenciação e radiciação. Na sequência definimos funções e caracterizamos funções exponenciais e apresentamos sua representação gráfica.

Falamos ainda, a representação gráfica das funções exponenciais e apresentamos uma proposta para abordagem das funções exponenciais e resolução de situações-problemas, relacionadas a funções exponenciais, utilizando o software GeoGebra, finalizando o capítulo.

O conteúdo deste capítulo que apresenta definições, fórmulas e gráficos de funções foi baseado nas seguintes referências: (CUNHA, 2017), (GIOVANNI; BONJORNO, 2000), (IEZZI; MURAKAMI, 1993), (IEZZI; MURAKAMI, 2013), (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2013), (IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PÉRIGO, 2005), (IEZZI; DOLCE; TEIXEIRA; MACHADO; GOULART; CASTRO; MACHADO, 1990), (PAIVA, 2003) e (YOUSSEF, 2005).

7.1. Potenciação com Expoentes Naturais

Seja a um número real e $a \neq 0$, definimos potência de base a com expoente zero como $a^0 = 1$. Definimos também a primeira potência de a como $a^1 = a$, sendo a um número real (podendo ser e $a = 0$). Finalmente, sendo a um número real, para todo b natural e $b \geq 2$, definimos a *b-ésima* potência de a como $a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a}_{b\ fatores}$.

Generalizando, para todo b natural e $b \geq 2$, a^b é o produto de b fatores, com cada um fator valendo a. Na potência a^b, a poderá assumir valores reais negativos, nulos ou positivos, fixamos b, como um número natural, par ou ímpar, assim listamos as seguintes possibilidades:

Se a real e $a < 0$ e b natural ímpar, então $a^b < 0$, pois potências de base real negativa e expoente natural ímpar resultam números negativos;

Se a real e $a < 0$ e b natural par, então $a^b > 0$, pois potências de base real negativa e expoente natural par resultam números positivos;

Se $a = 0$ e b natural ímpar ou par, então $a^b = 0$, pois potências de base real nula e expoente natural ímpar ou par resultam zero;

Não há definição para o caso, $a = 0$ e $b = 0$, dizemos apenas que não existe, podendo ser representado por $a^b = 0^0 = \nexists$;

Se a real e $a > 0$ e b natural ímpar, então $a^b > 0$, pois potências de base real positiva e expoente natural impar resultam números positivos;

Se a real e $a > 0$ e b natural par, então $a^b > 0$, pois potências de base real positiva e expoente natural par resultam números positivos.

Finalmente definimos as propriedades para a potenciação com números naturais, sejam a e b reais e c e d naturais, assim, são válidas as seguintes propriedades:

$a^c \cdot b^d = a^{c+d}$;

$\frac{a^c}{b^d} = a^{c-d}$ com $b \neq 0$ e $c > d$;

$(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$ com $b \neq 0$;

$(a^c)^d = a^{c \cdot d}$.

7.2. Potenciação com Expoentes Inteiros

Sejam a um número real não nulo e b um número inteiro (podendo ser ou não nulo). Desta forma, é válida a propriedade:

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

Denominamos a^{-b} como inverso de a^b. Com esta propriedade não há restrição para o quociente $\frac{a^c}{b^d} = a^{c-d}$ com $b \neq 0$ e $c > d$, pois para o quociente $\frac{a^c}{b^d} = a^{c-d}$ com $b \neq 0$, c poderá ser menor do que b, igual a b ou maior que b.

7.3. Radiciação com Números Reais

Seja a um número real não nulo e n um número natural e $n \geq 1$. Definimos a raiz *n-ézima* do número real a, como b, b real e $b \geq 0$, se e somente se $b^n = a$.

Em símbolos:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \; e \; b \geq 0$$

Na equação $\sqrt[n]{a} = b$, são nomeados:

$\sqrt[n]{}$: radical de índice n;

a: radicando.

Se o índice for igual a 2, sua representação torna-se facultativa. Na radiciação as seguintes propriedades são verificadas, definidos a e b números reais, com $a > 0$ e $b > 0$, m um número inteiro e n e p, números naturais, com $n > 0$ e $p > 0$, segue que:

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, com $b \neq 0$;

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$;

$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$;

$\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$.

7.4. Potenciação com Expoentes Racionais

Seja a um número real, com $a > 0$ e o quociente racional $\frac{p}{q}$, com p e q números inteiros e $q \geq 2$, definimos:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

7.5. Potenciação com Expoentes Irracionais

O processo de obtenção do valor das potências com expoentes irracionais consiste em verificar aproximação arbitrariamente satisfatória para a expressão a^n, admitindo n um número irracional, a um número real e $a > 0$.

Faremos o processo de aproximação para a potência $5^{\sqrt{2}}$. Inicialmente, com auxílio de máquinas de calcular, para o valor de $\sqrt{2}$ dispomos os resultados, conforme a figura 51, a seguir.

Figura 51: Aproximações à esquerda (pelos valores menores) e à direita (pelos valores maiores) para o valor de $\sqrt{2}$

Aproximação com	Pelos valores menores que $\sqrt{2}$	Pelos valores maiores que $\sqrt{2}$
Uma casa decimal	1,4	1,5
Duas casas decimais	1,41	1,42
Três casas decimais	1,414	1,415
Quatro casas decimais	1,4142	1,4143

Fonte: o autor

Nesta etapa, fazemos uma nova aproximação para o cálculo da potência $5^{\sqrt{2}}$, considerando os resultados obtidos na figura 70 (a aproximação para o valor da expressão $\sqrt{2}$), conforme a tabela 52, a seguir.

Figura 52: Aproximações à esquerda (pelos valores menores) e à direita (pelos valores maiores) para o valor de $5^{\sqrt{2}}$

Resultados de $5^{\sqrt{2}}$, com sete casas decimais, tendo em vista a aproximações pelos valores menores para o expoente $\sqrt{2}$	Resultados de $5^{\sqrt{2}}$, com sete casas decimais tendo em vista a aproximações pelos valores maiores para o expoente $\sqrt{2}$
$5^{1,4} = 9{,}5182696$	$5^{1,5} = 11{,}8033989$
$5^{1,41} = 9{,}6726997$	$5^{1,42} = 9{,}8296353$
$5^{1,414} = 9{,}7351710$	$5^{1,415} = 9{,}7508518$
$5^{1,4142} = 9{,}7383051$	$5^{1,4143} = 9{,}7398726$

Fonte: o autor

Diante da figura 52, observamos que quão melhor for a aproximação para $\sqrt{2}$, aplicando esta aproximação, à potência $5^{\sqrt{2}}$, melhor fica a aproximação para o valor da potência. Assim conjecturamos $5^{\sqrt{2}}$ como o resultado para o qual convergem os valores das duas sequências da tabela anterior 02. Pelos resultados obtidos, temos:

$$9{,}7383051 < 5^{\sqrt{2}} < 9{,}7398726$$

Analogamente, seja a um número real, $a \neq 0$ e um número irracional β, considerando as aproximações pelos valores menores e maiores que α, definimos o valor para a^{β}, por meio da da convergência das séries, que são resultados gerados pelos valores menores e maiores que o expoente β apresenta, aplicados na potência a^{β} .

7.6. Potenciação com Expoentes Reais

Construtivamente discorremos sobre os assuntos potências com expoentes racionais e potências com expoentes irracionais, portanto abordamos potências no formato a^{β} com expoentes reais. Com a expansão dos expoentes para o conjunto dos números reais, listamos as seguintes propriedades válidas:

- Se $a \in \mathbb{R}$,$a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$, então $a^b > 0$;
- Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, então $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$;

- Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, então $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$;
- Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ e $c \in \mathbb{R}$, então $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$;
- Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ e $c \in \mathbb{R}$, então $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$;
- Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, então $\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$.

7.7. Definição das Funções Exponenciais

Definimos as funções exponenciais como aquelas que apresentam a variável independente no expoente de pelo menos uma potência da lei de formação.

Ainda sobre as funções exponenciais, dado um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, as funções exponenciais, em símbolos são definidas como:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$
$$f(x) = a^x$$

7.7.1. Considerações Pertinentes às Funções Exponenciais

Da definição de a, na função exponencial $f(x) = a^x$ e de acordo com as propriedades dos números reais, se $x = 0$, então, $f(0) = a^0 = 1$. Portanto o par ordenado $(0\,;1)$ pertence a representação gráfica a função exponencial. Assim a representação gráfica da função exponencial corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

A função exponencial admite apenas um comportamento para sua representação gráfica, podendo ser apenas decrescente ou apenas crescente, definido do seguinte modo:

A representação gráfica da função exponencial $f(x) = a^x$ é decrescente, quando $0 < a < 1$. Se x_1 e x_2 são elementos do domínio da função, então:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_1)$$

A representação gráfica da função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente, quando $a > 1$. Se x_1 e x_2 são elementos do domínio da função, então:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_1)$$

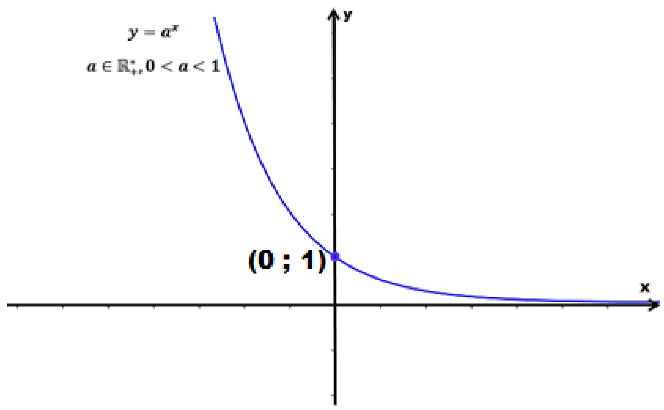
A função exponencial $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$ é injetora pois, dados x_1 e x_2 elementos do domínio da função, com $x_1 \neq x_2$, implica que $f(x_1) \neq f(x_1)$, os dois argumentos anteriores comprovam este fato. A função também é sobrejetora, pois para todo real θ, com $\theta > 0$, existe algum $x \in \mathbb{R}$, de modo $a^x = \theta$, logo a função exponencial é bijetora.

7.8. Representação Gráfica das Funções Exponenciais

A representação gráfica das funções exponenciais é uma curva descendente ou ascendente denominada curva exponencial. Apresentaremos a reapresentação gráfica das funções exponenciais de duas maneiras, a primeira a curva descendente, com $0 < a < 1$ e segunda curva ascendente, com $a > 1$ na lei de formação da função que é $f(x) = a^x$:

A representação gráfica da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ com $f(x) = a^x$ é decrescente quando $0 < a < 1$, conforme a figura 53, a seguir:

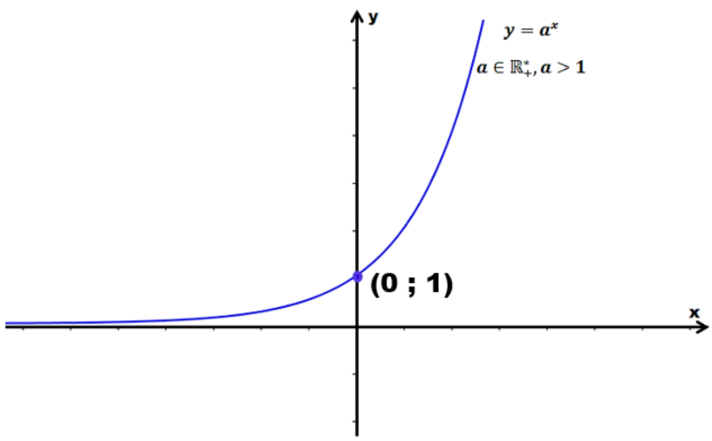
Figura 53: Representação gráfica da função exponencial $f(x) = a^x$ decrescente, com a base no intervalo real $0 < a < 1$



Fonte: o autor

A representação gráfica da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ com $f(x) = a^x$ é crescente quando $a > 1$, conforme a figura 54, a seguir.

Figura 54: Representação gráfica da função exponencial $f(x) = a^x$ crescente, com $a > 1$



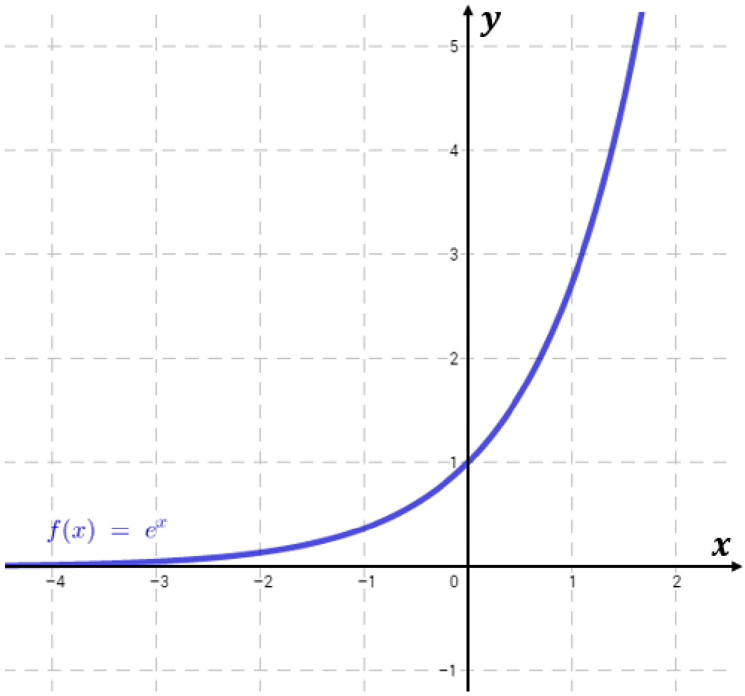
Fonte: o autor

Um caso particular das funções exponenciais é a função exponencial natural, definida por:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{+}^{*}$$
$$f(x) = e^{x}$$

Em que $e = 2{,}7183 \ldots$ é um número irracional (constante de Euler). Há aplicações importantes das funções exponenciais naturais: lei do resfriamento dos corpos, curvas de aprendizagens, crescimento populacional, desintegração radioativa, entre outros. A representação gráfica dessa função é apresentada na figura 55, a seguir.

Figura 55: Representação gráfica da função exponencial natural $f(x) = e^{x}$

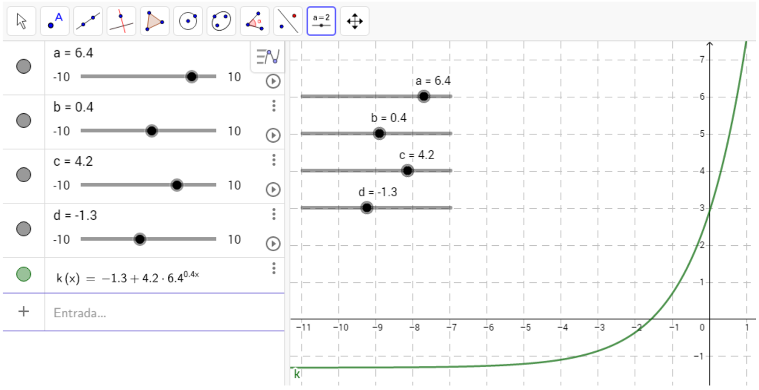


Fonte: o autor

7.9. Capacitação: o Ensino de Funções Exponenciais Empregando o GeoGebra

Para iniciar, crie quatro controles deslizantes a, b, c, e d, pois eles serão necessários à sintaxe das funções exponenciais. Em termos de comandos deslizantes, tem-se o que é necessário. A proposta agora é desenvolver a sintaxe das funções exponenciais e investigar a funcionalidade de seus parâmetros. Para isso, no campo de entrada escreva $k(x) = d + c \cdot a^{b \cdot x}$, mostrado na figura 56, a seguir.

Figura 56: Escrevendo a sintaxe das funções exponenciais utilizando o GeoGebra



Fonte: o autor

Seguindo a construção serão investigados padrões e regularidades sobre o parâmetro a animando-o. A partir dessa animação, verifica-se a funcionalidade do parâmetro a na família das funções exponenciais. De fato, o parâmetro a associado aos parâmetros b e c na família das funções exponenciais determina se a curva que define a representação gráfica das funções exponenciais será crescente ou decrescente.

Empregando passos análogos a animação do controle deslizante associado ao parâmetro a, pare sua animação. O foco agora, passará a ser investigar a funcionalidade do parâmetro b, dada a representação gráfica das funções exponenciais. Para isso, anime controle deslizante vinculado ao parâmetro b. A partir dessa animação, verifica-se então a funcionalidade do parâmetro b na família das funções exponenciais. De fato, o parâmetro b associado aos parâmetros a e c na família das funções exponenciais determina se a representação gráfica das funções exponenciais será crescente ou decrescente.

Seguindo passos análogos a animação do controle deslizante associado ao parâmetro b, pare sua animação. O foco agora, passará a ser investigar a funcionalidade do parâmetro c, dada a representação gráfica das funções exponenciais. Para isso, anime o controle deslizante vinculado ao parâmetro c. A partir dessa animação, verifica-se a funcionalidade com parâmetro c na família das funções exponenciais. De fato, o parâmetro c associado aos parâmetros a e b na família das funções exponenciais determina se curva que define a representação gráfica das funções exponenciais será decrescente ou crescente.

Seguindo passos análogos a animação do controle deslizante associado ao parâmetro c, pare sua animação. O foco agora, passará a ser investigar a funcionalidade do parâmetro d, dada a representação gráfica das funções exponenciais. Para isso, anime o controle deslizante vinculado parâmetro d. A partir dessa animação verifica-se a funcionalidade do parâmetro d na família das funções exponenciais. De fato, o parâmetro d na família das funções exponenciais determina uma assíntota horizontal, de modo que toda a representação gráfica das funções exponenciais estará abaixo ou acima desta assíntota. Ressalta-se ainda que o parâmetro c será decisivo para que a representação gráfica das funções exponenciais esteja abaixo ou acima desta assíntota.

7.10. Resolvendo Situações-Problemas Sobre Funções Exponenciais Utilizando o GeoGebra

QUESTÃO 08 (FGV – SP): Curva de aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por este indivíduo. Um exemplo de Curva de Aprendizagem é dado pela expressão: $Q = 700 - 400e^{-0,5t}$, em que:

$Q =$ Quantidade de peças produzidas mensalmente por um funcionário;

$t =$ meses de experiência;

$e \cong 2,7183$.

a) De acordo com essa expressão, quantas peças um funcionário com 2 meses de experiência deverá cumprir mensalmente?

Resolução: Para determinar quantas peças um funcionário com 2 meses de experiência deverá cumprir mensalmente, faça $t = 2$, na função $Q(t) = 700 - 400e^{-0,5t}$.

$$Q(t) = 700 - 400e^{-0,5t}$$

$$t = 2$$

$$Q(2) = 700 - 400e^{-0,5\cdot 2}$$

$$Q(2) = 700 - 400e^{-1}$$

$$Q(2) = 700 - \frac{400}{e}$$

$$Q(2) \cong 552,85$$

Resposta: Um funcionário com 2 meses de experiência deverá cumprir mensalmente com, aproximadamente, 553 peças.

Resolução com o GeoGebra: Incialmente, na janela de álgebra, digite a sintaxe da função curva de aprendizado $Q(t) = 700 - 400e^{-0,5t}$ e tecle enter. Na sequência ainda na janela de álgebra, digite $x = 2$ e após enter. Dando continuidade clique no segundo ícone na caixa de ferramentas e marque a opção Interseção de Dois Objetos, para finalizar na janela de visualização clique na função representação gráfica Q e na representação gráfica de $x = 4$. Automaticamente será exibida a resposta, conforme a figura 57.

Resposta: Um funcionário com 2 meses de experiência deverá cumprir mensalmente com, aproximadamente, 553 peças.

a) Quantas peças um funcionário sem qualquer experiência deverá produzir mensalmente?

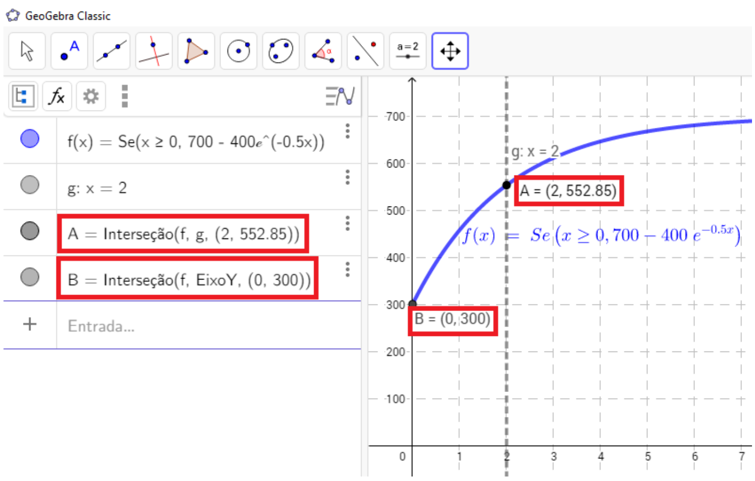
Resolução: Para um funcionário sem qualquer experiência, diante do enunciado, faça $t = 0$ em $Q(t) = 700 - 400e^{-0,5t}$.

$$Q(t) = 700 - 400e^{-0,5t}$$
$$t = 0$$
$$Q(t) = 700 - 400e^{-0,5 \cdot 0}$$
$$Q(t) = 700 - 400e^{0}$$
$$Q(t) = 300$$

Resposta: Um funcionário sem nenhuma experiência deverá cumprir mensalmente com 300 peças.

Resolução com o GeoGebra: Incialmente, na janela de álgebra, digite a sintaxe da função curva de aprendizado $Q(t) = 700 - 400e^{-0,5t}$ e tecle enter. Na sequência clique no segundo ícone na caixa de ferramentas e marque a opção Interseção de Dois Objetos, para finalizar na janela de visualização clique na representação gráfica Q e no eixo y (que representa o tempo 0). Automaticamente será exibida a resposta, conforme a figura 57, a seguir.

Figura 57: Solução de um problema de função exponencial associado a curva de aprendizagem com o GeoGebra



Fonte: o autor

Resposta: Um funcionário sem nenhuma experiência deverá cumprir mensalmente com 300 peças.

QUESTÃO 09 (CEFET – PR): Cientistas de um certo país, preocupados, com as possibilidades cada vez mais ameaçadoras de uma "guerra biológica", pesquisam uma determinada bactéria, que cresce segundo a expressão $P(t) = \frac{256}{125} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{t+1}$, onde t representa o tempo em horas. Para obter-se uma população de 3125 bactérias, será necessário um tempo, em horas, com valor absoluto no intervalo:

a) $]0;2]$.
b) $]2;4]$.
c) $]4;6]$.
d) $]6;8]$.
e) $]8;10]$.

Resolução: Diante do enunciado, para que o número de bactérias seja 3125 é necessário que $P(t) = \frac{256}{124} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{t+1} = 3125$.

$$\frac{256}{125} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{t+1} = 3125$$

$$\frac{2^8}{5^3} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{t+1} = 5^5$$

Multiplique ambos os membros da equação por $\frac{5^3}{2^8}$:

$$\frac{5^3}{2^8} \cdot \frac{2^8}{5^3} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{t+1} = \frac{5^3}{2^8} \cdot 5^5$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{t+1} = \frac{5^8}{2^8}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{t+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^8$$

Segue que:

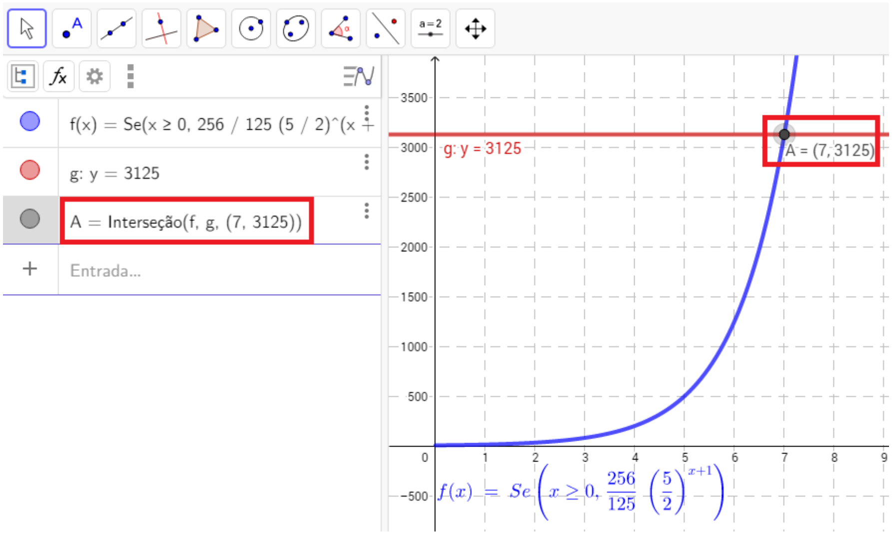
$$t + 1 = 8$$

$$t = 7$$

Respostas: Alternativa d, para obter-se uma população de 3125 bactérias, será necessário um tempo 7 horas.

Resolução com o GeoGebra: Incialmente, na janela de álgebra, digite a sintaxe da função curva do crescimento das bactérias $P(t) = \frac{256}{125} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{t+1}$ e tecle enter. Ainda na janela de álgebra digite $y = 3125$ e tecle enter. Na sequência clique no segundo ícone na caixa de ferramentas e marque a opção Interseção de Dois Objetos, para finalizar na janela de visualização clique na representação gráfica P e na representação gráfica de $y = 3125$. Automaticamente será exibida a resposta, conforme a figura 58, a seguir.

Figura 58: Solução de um problema de função exponencial associado ao crescimento de bactérias com o GeoGebra



Fonte: o autor

Respostas: Alternativa d, para obter-se uma população de 3125 bactérias, será necessário um tempo 7 horas.

8. FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Neste capítulo apresentamos as funções reais de variável real logarítmicas ou apenas funções logarítmicas, aplicado ao ensino médio. Iniciamos definindo logaritmos e suas propriedades. Na sequência definimos funções logarítmicas e apresentamos sua representação gráfica.

Falamos ainda, sobre a relação que há entre as funções exponenciais e as funções logarítmicas e apresentamos uma proposta para abordagem das funções logarítmicas e resolução de situações-problemas, relacionadas a funções logarítmicas, utilizando o software GeoGebra, finalizando o capítulo finalizando o capítulo.

O conteúdo deste capítulo que apresenta definições, fórmulas e gráficos de funções foi baseado nas seguintes referências: (CUNHA, 2017), (GIOVANNI; BONJORNO, 2000), (IEZZI; MURAKAMI, 1993), (IEZZI; MURAKAMI, 2013), (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2013), (IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PÉRIGO, 2005), (IEZZI; DOLCE; TEIXEIRA; MACHADO; GOULART; CASTRO; MACHADO, 1990), (PAIVA, 2003) e (YOUSSEF, 2005).

8.1. Definição e propriedades dos logaritmos

8.1.1. Definição dos Logaritmos

As operações matemáticas apresentam uma operação inversa, e isto se aplica à potenciação. A operação inversa à potenciação é a radiciação, diante disto, apresentamos:

$$2^3 = 8$$

Em que 2 é a base da potência, 3 é o expoente e 8 o resultado do cálculo da potência. Qual seria o expoente para que o valor de uma potência de base 2, tenha como resultado 64? Verificamos rapidamente que $2^6 = 64$, disto, o valor desejado é 6.

Este questionamento gerou em matemáticos da antiguidade o desejo de uma nova operação matemática, que é denominada logaritmação, palavra que pode ser substituída sem perda de generalidade, por logaritmo.

Denotamos a operação de logaritmo por $\log_a b$, expressão usada quando questionamos: Qual é o expoente da potência de base a, que tem como resultado b?

Para $\log_a b$, lemos: “logaritmos de a na base b”.

Sejam $k, a\ e\ b$ números reais, com $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$, denotamos a operação de logaritmo por $\log_a b = k$, se e somente se, $a^k = b$, sendo que:

a é a base do logaritmo;

b é o logarimando ou antilogaritmo;

k é o valor do logaritmo.

Generalizando: $\log_a b = k \Leftrightarrow a^k = b$.Dizemos que k é o logaritmo de b na base a. Diante das definições sobre logaritmos decorrem algumas implicações, para todo $a, b\ e\ c$ reais, com $a > 0$ e $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$ temos:

1ª Implicação: $\log_a 1 = 0$. Qualquer real não nulo, elevado a zero tem como resultado 1;

2ª Implicação: $\log_a a = 1$. Qualquer real não nulo, elevado a um tem como resultado ele mesmo.

3ª Implicação: $\log_a a^b = b$. Pela definição de logaritmos, verifica-se facilmente esta implicação.

4ª Implicação: $a^{\log_a b} = b$. Demonstração: Seja $\log_a b = c \Rightarrow a^c = b \Rightarrow a^c = a^{\log_a b}$. Como $a^c = b$ a equação apresenta $a^c = a^{\log_a b} \Rightarrow b = a^{\log_a b} \Rightarrow a^{\log_a b} = b$.

5ª Implicação (equação logarítmica): Se $\log_a b = \log_a c$, então $b = c$. Demonstração:

$$\log_a b = \log_a c \Rightarrow a^{\log_a c} = b$$

Para a expressão $a^{\log_a c}$, pela 4ª implicação, concluímos que $a^{\log_a c} = c$, então:

$$a^{\log_a c} = b \Rightarrow c = b \Rightarrow b = c$$

8.1.2. Logaritmos com Representações Especiais

Alguns logaritmos se destacam por terem representações especiais, conforme listamos a seguir:

- Logaritmo decimal é o logaritmo com base 10, em que é facultativa a escrita da base:

$$\log_{10} a = \log a$$

- Logaritmo natural é o logaritmo com base e, em que a escrita também é especial:

$$ln\, a = \log_e a$$

Em que $e = 2{,}71828182 \ldots$ é um número irracional, conhecido também como número de Euler.

8.1.3. Condição de Existência dos Logaritmos

Pela definição de logaritmo, temos importantes vestígios para a formalização da existência dos logaritmos.

Para ser válida a expressão $\log_a b$, é necessário que:

A base a, deverá ser necessariamente um número real, com $a > 0$ e $a \neq 1$;

O logarimando b, deverá ser necessariamente um número real $b > 0$.

8.1.4. Propriedades Especiais dos Logaritmos

Algumas propriedades especiais momentaneamente poderão ser se aplicadas com a finalidade de facilitar a resolução de exercícios. Sejam a, b e c, números reais tais que: $a > 0$ e $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, valem as seguintes propriedades:

1ª propriedades: Logaritmo do produto: o logaritmo do produto equivale à soma dos logaritmos dos fatores, tomados na mesma base, isto é:

$$\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração: $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$, assim sendo $a^x = b$ e $a^y = c$.

Assim, $\log_a (b \cdot c) = \log_a a^x \cdot a^y = \log_a a^{x+y} = x + y = \log_a b + \log_a c$;

2ª propriedades: Logaritmo do quociente: o logaritmo do quociente equivale à diferença dos logaritmos dos fatores, tomados na mesma base, isto é:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração: $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$, assim sendo $a^x = b$ e $a^y = c$.

Diante disto, $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a a^x \cdot a^y = \log_a a^{x-y} = x - y = \log_a b - \log_a c$.

3ª propriedades: Logaritmo da potência: o logaritmo da potência equivale ao produto do expoente pelo logaritmo, tomados na mesma base, isto é:

$$\log_a b^c = \mathrm{c} \cdot \log_a b$$

Demonstração: $\log_a b^c = x$, assim sendo $a^x = b^c$.

Seja ainda, $\log_a b = y$, logo $a^y = b$.

Destes fatos, $a^x = b^c \rightarrow a^x = (a^y)^c \rightarrow x = y \cdot c \rightarrow \log_a b^c = \mathrm{c} \cdot \log_a b$.

4ª propriedades: Mudança de base: o processo denominado mudança de base, consiste em passar um logaritmo que está em determinada base para outra base convenientemente diferente. Algebricamente este processo é representado pela seguinte expressão, dados a, b e c, números reais tais que: $a > 0$ e $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Com $\log_c a \neq 0$.

Demonstração: Seja $\log_a b = x$, assim sendo $a^x = b$. Com $\log_c a \neq 0$ Demonstração: Seja $\log_a b = x$, assim sendo $a^x = b$. Seja $\log_a b = x$, assim sendo $a^x = b$. Seja também, $\log_c b = y$, logo $c^y = b$. Seja ainda, $\log_c a = z$, logo $c^z = a$.

Destes fatos, $a^x = c^y \Rightarrow (c^z)^x = c^y \Rightarrow z \cdot x = y \Rightarrow x = \frac{y}{z} \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

8.2. Definição das Funções logarítmicas

Definimos as funções logarítmicas como aquelas que apresentam logaritmos na variável independente da lei de formação.

Ainda sobre as funções logarítmicas, dado um número real a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, definimos, em símbolos como:

$$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \log_a x$$

8.2.1. Considerações Pertinentes às Funções Logarítmicas

Da definição de a, na função logarítmica $f(x) = \log_a x$ e de acordo com as propriedades dos números reais, se $x = 1$, então, $f(0) = \log_a 1 = 0$. Portanto o par ordenado $(1\,;0)$ pertence a representação gráfica a função Logarítmicas. Assim a representação gráfica da função logarítmica corta o eixo x no ponto de abscissa 1.

A função logarítmica admite apenas um comportamento para sua representação gráfica, podendo ser apenas decrescente ou apenas crescente, definida do seguinte modo:

A representação gráfica da função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é decrescente, quando $0 < a < 1$. Se x_1 e x_2 são elementos do domínio da função, então:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_1)$$

A representação gráfica da função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é crescente, quando $a > 1$. Se x_1 e x_2 são elementos do domínio da função, então:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_1)$$

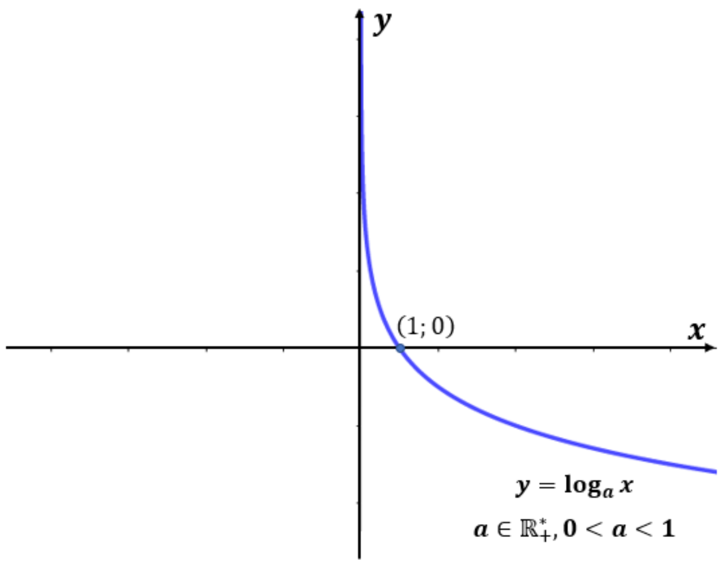
A função logaritmica $f(x) = \log_a x$ com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$ é injetora pois, dados x_1 e x_2 elementos do domínio da função, com $x_1 \neq x_2$, implica que $f(x_1) \neq f(x_1)$, os dois argumentos anteriores comprovam este fato. A função também é sobrejetora, pois para todo real β, existe algum $x \in \mathbb{R}_+^*$, de modo $\log_a x = \beta$, logo a função logarítmica é bijetora.

8.3. A Representação Gráfica das Funções Logarítmicas

A representação gráfica das funções logarítmicas é uma curva descendente ou ascendente denominada curva logarítmica. Apresentaremos a reapresentação gráfica das funções exponenciais de duas maneiras, a primeira a curva descendente, com $0 < a < 1$ e segunda curva ascendente, com $a > 1$ na lei de formação da função que é $f(x) = a^x$:

A representação gráfica da função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ com $f(x) = \log_a x$ é decrescente quando $0 < a < 1$, conforme a figura 59, a seguir.

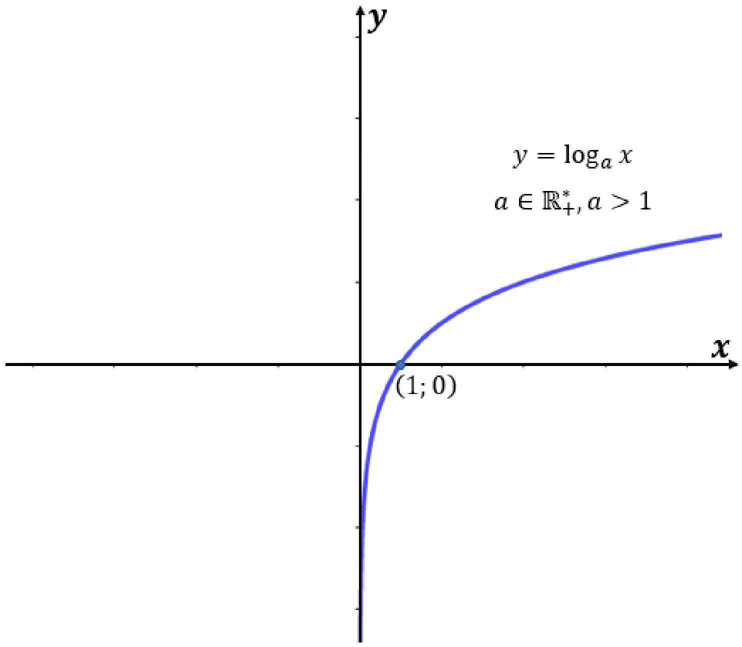
Figura 59: Representação gráfica da função logarítmica $f(x) = \log_a x$ decrescente, com a base no intervalo real $0 < a < 1$



Fonte: o autor

A representação gráfica da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ com $f(x) = \log_a x$ é crescente quando $a > 1$, conforme a figura 60, a seguir.

Figura 60: Representação gráfica da função logarítmica $f(x) = \log_a x$ crescente, com $a > 1$



Fonte: o autor

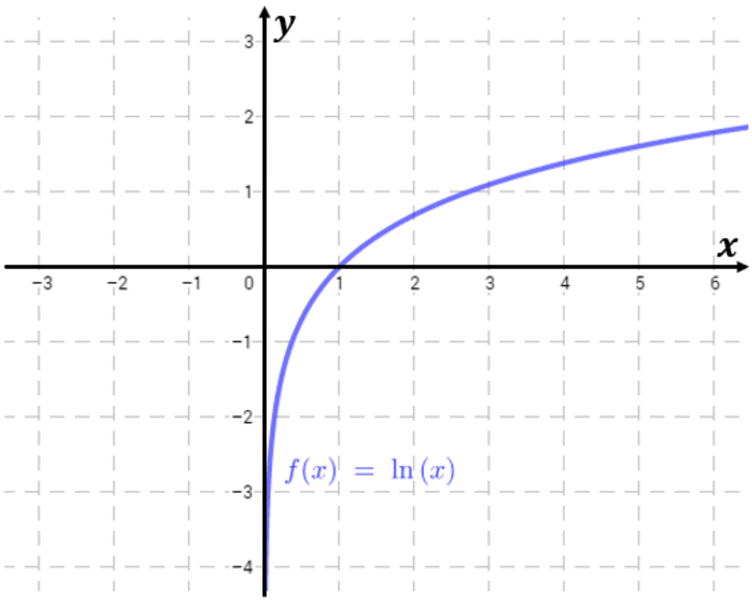
Um caso particular das funções logarítmicas é a função logaritmo natural, definida por:

$$f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \log_e x = \ln x$$

Em que $e = 2{,}7183\ldots$ é um número irracional (constante de Euler). Há aplicações importantes das funções logaritmos naturais: economia, medicina, energia liberada num terremoto, entre outros. A representação gráfica dessa função é apresentada na figura 61, a seguir.

Figura 61: Representação gráfica da função logaritmo natural $f(x) = \ln x$



Fonte: o autor

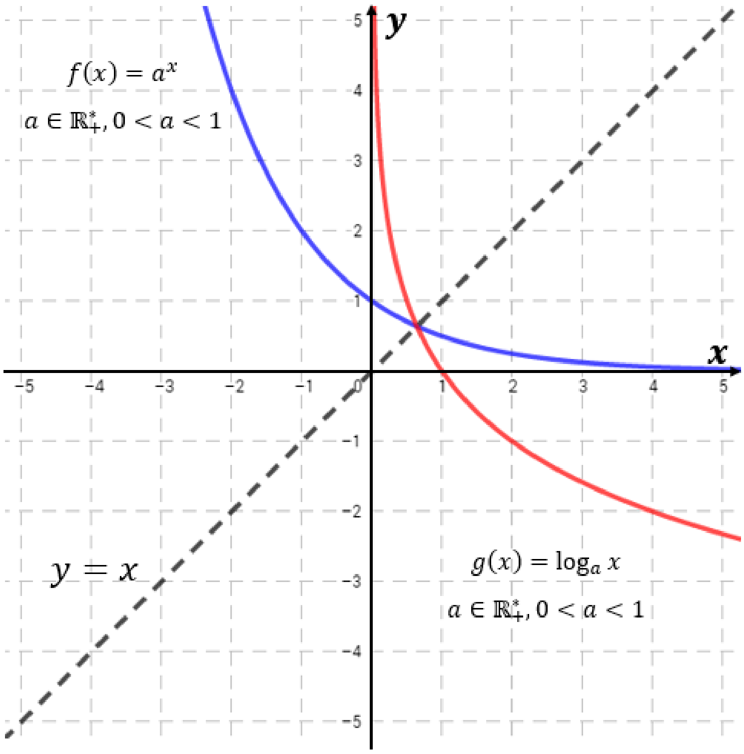
8.4. Relação entre as funções exponenciais e as funções logarítmicas

Na seção anterior, em que tratamos das funções exponencias, vimos que elas são bijetoras. Vimos também, nesta seção, que as funções logarítmicas também são bijetoras. Sendo as funções exponenciais bijetoras, admitem funções inversas que também são funções, para a função exponencial com $a \in a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{+}^{*}$ definida por $f(x) = a^x$, obtendo sua lei de formação da função inversa da temos:

$$y = a^x$$
$$x = a^y$$
$$\log_a x = \log_a (a^y)$$
$$\log_a x = \log_a (a)^y$$
$$\log_a (a)^y = \log_a x$$
$$y \cdot \log_a (a) = \log_a x$$
$$y \cdot 1 = \log_a x$$
$$y = \log_a x$$
$$f^{-1}(x) = \log_a x$$

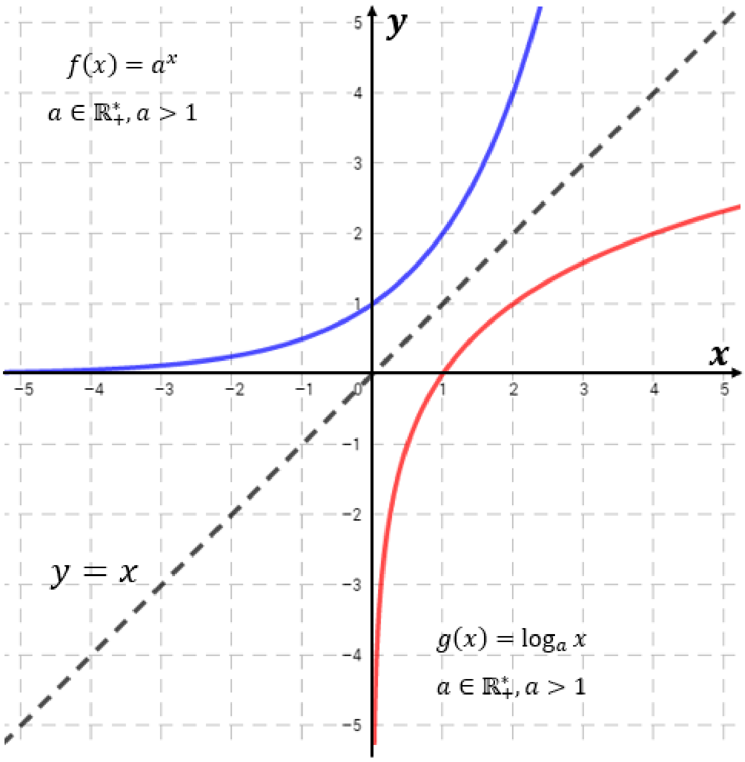
Diante da obtenção da lei de formação inversa das funções exponenciais, com $a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, $f: \mathbb{R}_{+}^{*} \to \mathbb{R}$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$, chegamos as funções exponencias. Concluímos então, que as funções exponencias e as funções logarítmicas são inversas. Este comportamento pode ser evidenciado de acordo com as respectivas representações gráficas das funções exponenciais e logarítmicas, inversas em ralação a $y = x$ que é a bissetriz dos quadrantes ímpares, as quais apresentaremos a seguir, conforme a figura 62, a figura 63 e a figura 64, em três momentos: o primeiro para $0 < a < 1$ com as representações gráficas decrescentes, o segundo momento $a > 1$ com as representações gráficas crescentes e o terceiro com o gráfico das funções expoente natural e logaritmo natural.

Figura 62: Representação gráfica das funções $f(x) = a^x$, $y = x$ e $g(x) = \log_a x$ com $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$



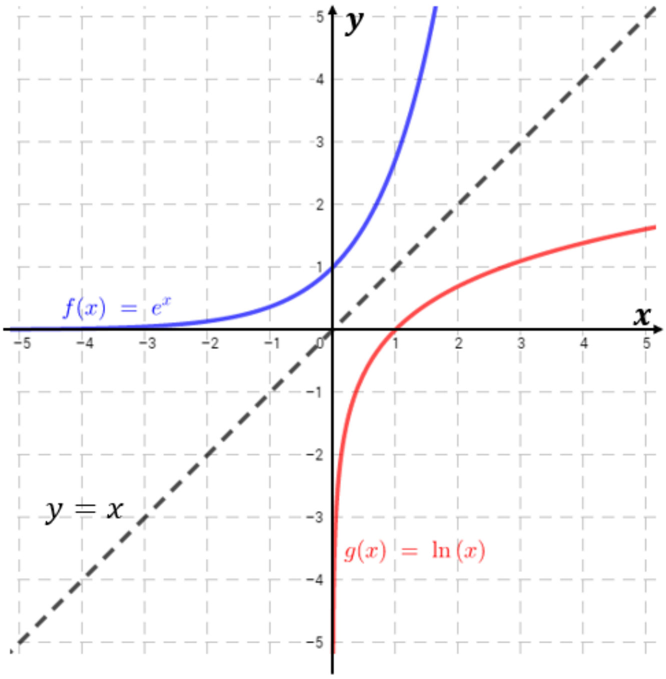
Fonte: o autor

Figura 63: Representação gráfica das funções $f(x) = a^x$, $y = x$ e $g(x) = \log_a x$ com $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$



Fonte: o autor

Figura 64: Representação gráfica das funções $f(x) = e^x$, $y = x$ e $g(x) = ln\, x$

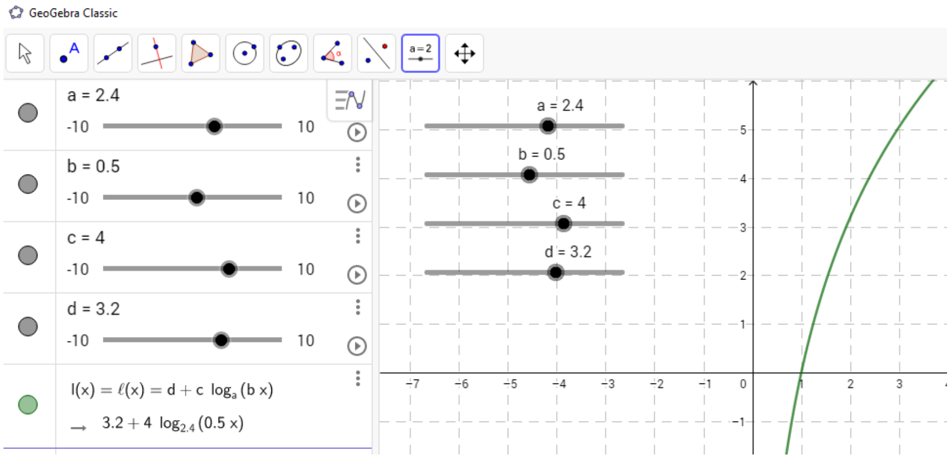


Fonte: o autor

8.5. Capacitação: o Ensino de Funções Logarítmicas Empregando o GeoGebra

Inicialmente crie quatro controles deslizantes a, b, c, e d, pois eles serão necessários à sintaxe das Funções Logarítmicas. Elaborados os quatro controles deslizantes a, b, c, e d, a proposta agora é desenvolver a sintaxe das funções logarítmicas e investigar a funcionalidade de seus parâmetros. Para isso, no campo de entrada escreva $l(x) = d + c \cdot \log_a(b \cdot x)$, mostrado na figura 65, a seguir.

Figura 65: Escrevendo a sintaxe das funções logarítmicas no software GeoGebra



Fonte: o autor

Seguindo a construção serão investigados padrões e regularidades sobre o parâmetro a animando-o. A partir dessa animação verifica-se a funcionalidade do parâmetro a na família das funções logarítmicas. De fato, o parâmetro a associado ao parâmetro c na família das funções logarítmicas determina se a representação gráfica das funções logarítmicas será decrescente ou crescente.

Seguindo passos análogos a animação do controle deslizante associado ao parâmetro a, pare sua animação. O foco agora, passará a ser investigar a funcionalidade do parâmetro b, dada a representação gráfica das funções logarítmicas. Para isso, anime o parâmetro b. A partir dessa animação verifica-se a funcionalidade do parâmetro b na família das funções logarítmicas. De fato, o parâmetro b nas funções logarítmicas determina se a representação gráfica das funções exponenciais estará à esquerda ou à direita do eixo das ordenadas.

Seguindo passos análogos a animação do controle deslizante associado ao parâmetro b, pare sua animação. O foco agora, passará a ser investigar a funcionalidade do parâmetro c, dada a representação gráfica das funções logarítmicas. Para isso, anime o parâmetro c. A partir dessa animação verifica-se a funcionalidade do parâmetro c na família das funções logarítmicas. De fato, o parâmetro c associado ao parâmetro a na família das funções logarítmicas determina se a representação gráfica das funções logarítmicas será decrescente ou crescente.

Seguindo passos análogos a animação do comando deslizante associado ao parâmetro c, pare sua animação. O foco agora, passará a ser investigar a funcionalidade do parâmetro d, dada a representação gráfica das funções logarítmicas. Para isso, anime o controle deslizante vinculado ao parâmetro d. A partir dessa animação verificamos a funcionalidade do parâmetro d na família das funções logarítmicas. De fato, o parâmetro d na família das funções logarítmicas torna a representação gráfica mais próxima, ou mais afastada ao eixo das ordenadas.

8.6. Resolvendo Situações-Problemas Sobre Funções Logarítmicas Utilizando o GeoGebra

QUESTÃO 10 (FMABC – PR – 2016): Um comerciante usa a equação $y = \log_2 800 - \log_2 x$ para estabelecer a relação entre y (número de unidades que ele compra de certo produto), e x (preço pelo qual deve ser vendida a unidade desse mesmo produto). Nessas condições, pela compra de 6 unidades, que quantia o comerciante deverá estabelecer para o preço unitário de venda de tal produto?

a) $R\$\ 12{,}00$.
b) $R\$\ 12{,}50$.
c) $R\$\ 14{,}00$.
d) $R\$\ 14{,}50$.

Resolução: Diante do enunciado, para que o valor de compra seja 6 é necessário que $y = \log_2 800 - \log_2 x = 6$. Com a condição de existência $x > 0$.

$$\log_2 800 - \log_2 x = 6$$

$$\log_2 \left(\frac{800}{x}\right) = 6$$

Segue que:

$$\frac{800}{x} = 2^6$$

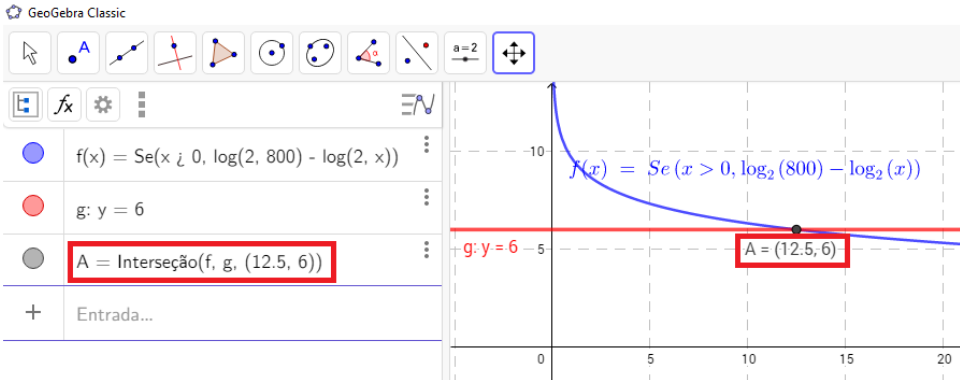
$$x = \frac{800}{64}$$

$$x = 12{,}50$$

Resposta: Alternativa b, pela compra de 6 unidades, o preço unitário de venda de tal produto deverá ser $R\$\ 12{,}50$.

Resolução com o GeoGebra: Incialmente, na janela de álgebra, digite a sintaxe da função que relaciona do preço de compra o do preço de venda do produto $y = \log_2 800 - \log_2 x$ e tecle enter. Ainda na janela de álgebra digite $y = 6$ e tecle enter. Na sequência clique no segundo ícone na caixa de ferramentas e marque a opção Interseção de Dois Objetos, para finalizar na janela de visualização clique na representação gráfica y e na representação gráfica de $y = 6$. Automaticamente será exibida a resposta, conforme a figura 66, a seguir.

Figura 66: Solução de um problema de função logarítmica associado ao preço de compra e venda de determinado produto com o GeoGebra



Fonte: o autor

Resposta: Alternativa b, pela compra de 6 unidades, o preço unitário de venda de tal produto deverá ser $R\$\ 12{,}50$.

QUESTÃO 11 (VUNESP – SP): Numa plantação de certa espécie de árvore, as medidas aproximadas da altura e do diâmetro do tronco, desde o instante em que as árvores são plantadas até completarem 10 anos, são dadas respectivamente pelas funções:

Altura: $H(t) = 1 + (0{,}8) \cdot \log_2(t+1)$.

Diâmetro do tronco: $D(t) = (0{,}1) \cdot 2^{\frac{t}{7}}$.

Com $H(t)$ e $D(t)$ em metros e t anos.

a) Determine as medidas aproximadas da altura, em metros, e do diâmetro do tronco, em centímetros, das árvores no momento em que são plantadas.

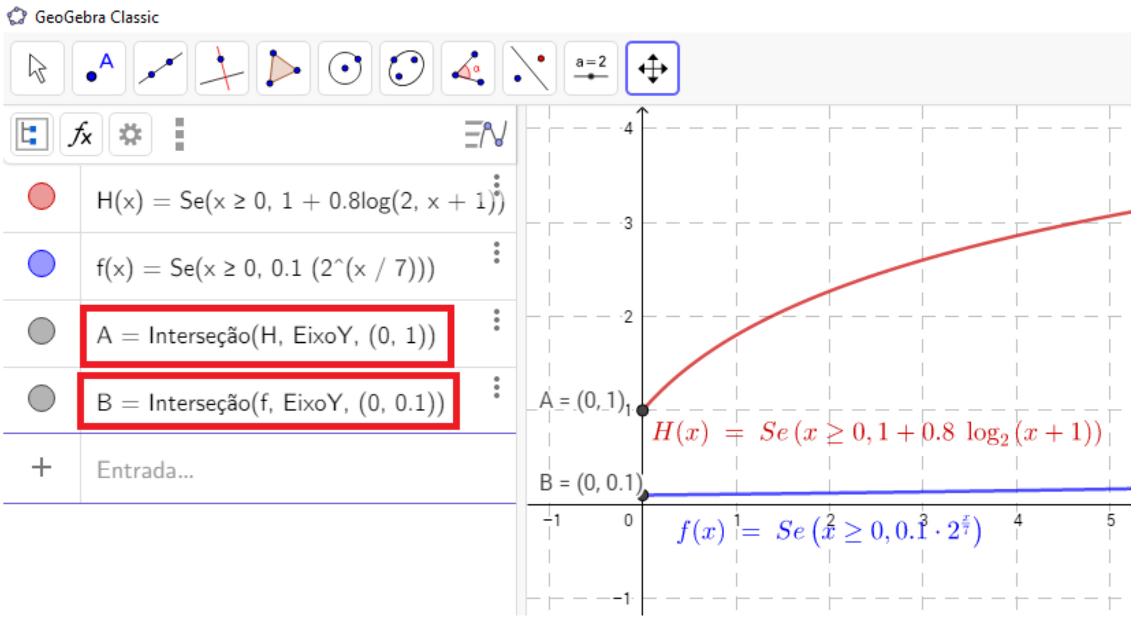
Resolução: Diante do enunciado, a altura, em metros, e do diâmetro do tronco, em centímetros, das árvores no momento em que são plantadas, de fato é substituir $t = 0$ em $H(t) = 1 + (0{,}8) \cdot \log_2(t+1)$ e $D(t) = (0{,}1) \cdot 2^{\frac{t}{7}}$. Portanto, faça:

$$H(t) = 1 + (0{,}8) \cdot \log_2(t+1)$$
$$H(0) = 1 + (0{,}8) \cdot \log_2(0+1)$$
$$H(0) = 1 + (0{,}8) \cdot \log_2(1)$$
$$H(0) = 1 + (0{,}8) \cdot 0$$
$$H(0) = 1\ m$$
$$D(t) = (0{,}1) \cdot 2^{\frac{t}{7}}$$
$$D(0) = (0{,}1) \cdot 2^{\frac{0}{7}}$$
$$D(0) = (0{,}1) \cdot 1$$
$$D(0) = 0{,}1\ m = 10\ cm$$

Resposta: As árvores no momento em que são plantadas tem 1,0 metro de altura e 10 centímetros de diâmetro.

Resolução com o GeoGebra: Incialmente, na janela de álgebra, digite a sintaxe das funções que representam a altura da árvore e o diâmetro, respectivamente as funções H e D, restringindo $x \geq 0$, para o domínio da função e tecle enter. Na sequência clique no segundo ícone na caixa de ferramentas e marque a opção Interseção de Dois Objetos, para finalizar na janela de visualização clique na representação gráfica H e no eixo y, e na representação gráfica de D e novamente no eixo y. Automaticamente será exibida a resposta, conforme a figura 67, a seguir.

Figura 67: Solução de um problema de função logarítmica associado a altura e diâmetro de uma árvore, no momento inicial, com o GeoGebra



Fonte: o autor

b) A altura de uma árvore é 3,4 m. Determine o diâmetro aproximado do tronco dessa árvore, em centímetros.

Resolução: Para uma árvore é 3,4 m, diante do enunciado, faça:

$$H(t) = 1 + (0{,}8) \cdot \log_2(t + 1) = 3{,}4$$

$$(0{,}8) \cdot \log_2(t + 1) = 2{,}4$$

$$\log_2(t + 1) = 3$$

$$t + 1 = 2^3$$

$$t = 7$$

Determinado o tempo de 7 anos, para o cálculo do diâmetro da árvore, faça $t = 7$, na função $D(t) = (0,1) \cdot 2^{\frac{t}{7}}$.

$$D(t) = (0,1) \cdot 2^{\frac{t}{7}}$$

$$D(t) = (0,1) \cdot 2^{\frac{7}{7}}$$

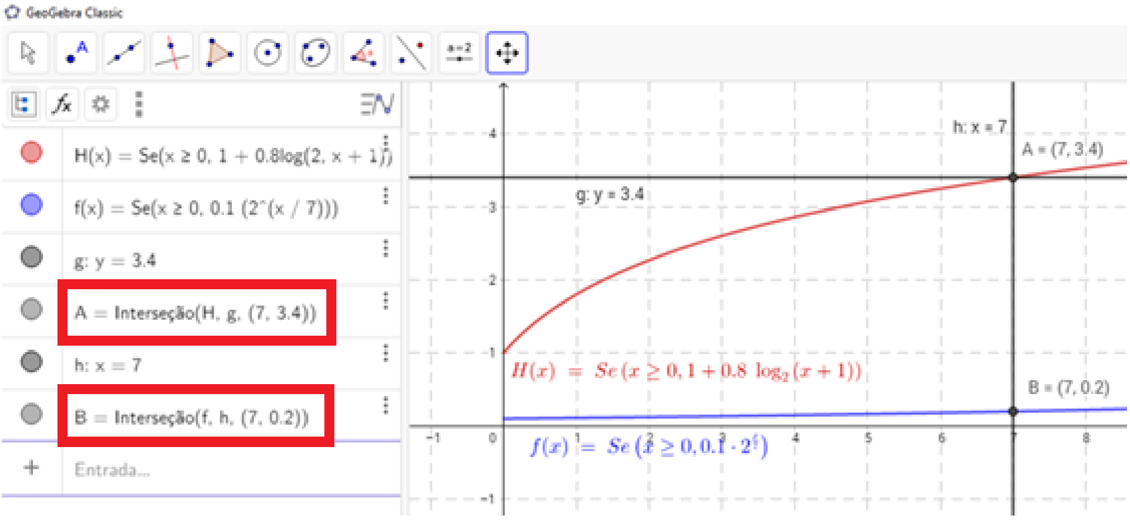
$$D(t) = (0,1) \cdot 2$$

$$D(t) = 0,2\, m = 20\, cm$$

Resposta: Sendo altura de uma árvore é $3,4\, m$, o diâmetro aproximado do tronco dessa árvore mede 20 centímetros.

Resolução com o GeoGebra: Incialmente, na janela de álgebra, digite a sintaxe da função que representa a altura da árvore que é a funções H, restrigindo $x \geq 0$, para o domínio da função e tecle enter. Ainda na janela de álgebra, digite a sintaxe da função que representam o diâmetro da árvore, que é a funções D, restrigindo $x \geq 0$, para o domínio da função e tecle enter. Digite, novamente na janela de álgebra o comando $y = 3,4$. Clique no segundo ícone na caixa de ferramentas e marque a opção Interseção de Dois Objetos e na janela de visualização clique na representação gráfica H e na representação gráfica de $y = 3,4$. Com isso obtenha o ponto $(7;\ 3,4)$, observe que abscissa desse ponto será a ordenada da função que representa o diâmetro da função. Ainda na janela de álgebra, digite a sintaxe da função que representa diâmetro da árvore que é a funções D, restrigindo $x \geq 0$, para o domínio da função e tecle enter. Digite também, na janela de álgebra digite o comando $x = 7$. Finalmente, Clique no segundo ícone na caixa de ferramentas e marque a opção Interseção de Dois Objetos e na janela de visualização clique na representação gráfica D e na representação gráfica de $x = 7$. Automaticamente será exibida a resposta, conforme a figura 68, a seguir.

Figura 68: Solução de um problema de função logarítmica associado a altura e diâmetro de uma árvore com o GeoGebra



Fonte: o autor

Resposta: Sendo altura de uma árvore é 3,4 m, o diâmetro aproximado do tronco dessa árvore mede 20 centímetros.

9. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo apresentamos as funções reais de variável real trigonométricas, ou apenas funções trigonométricas, com ênfase no seno e cosseno que são as bases para o desenvolvimento da trigonometria, aplicado ao ensino médio. Iniciamos definindo a função de Euler, o ciclo trigonométrico e as funções periódicas, na sequência definimos as funções seno e cosseno, apresentando suas propriedades e representação gráfica e apresentamos uma proposta para abordagem das funções seno e cosseno e resolução de situações-problemas, relacionadas as funções seno e cosseno, utilizando o software GeoGebra, finalizando o capítulo.

O conteúdo deste capítulo que apresenta definições, fórmulas e gráficos de funções foi baseado nas seguintes referências: (CÂMARA, 2018), (GIOVANNI; BONJORNO, 2000), (IEZZI; MURAKAMI, 1993), (IEZZI; MURAKAMI, 2013), (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2013), (IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PÉRIGO, 2005), (IEZZI; DOLCE; TEIXEIRA; MACHADO; GOULART; CASTRO; MACHADO, 1990), (LAGES, 2017), (PAIVA, 2003), (TORMA, 2018) e (YOUSSEF, 2005).

9.1. Funções Periódicas

Denominamos funções periódicas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que a representação gráfica da função se repete ao longo de acréscimos constantes $k \in \mathbb{R}$ com $k \neq 0$, à variável independente, embora k possa assumir valores negativo, convencionamos, sem perda de generalidade, $k > 0$, pois na maioria das aplicações envolve tempo. Em todo caso se k for negativo, basta consideramos o eixo das abscissas em seu sentido contrário. Em símbolos, para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = f(x + k)$$

Observamos ainda que, se a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica, vale $f(x) = f(x + P \cdot k)$, com $P \in \mathbb{Z}$. O menor número $k > 0$ tal que $f(x) = f(x + P \cdot k)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ denominamos período da função f. Antecipamos que as funções seno e cosseno são periódicas, de período 2π.

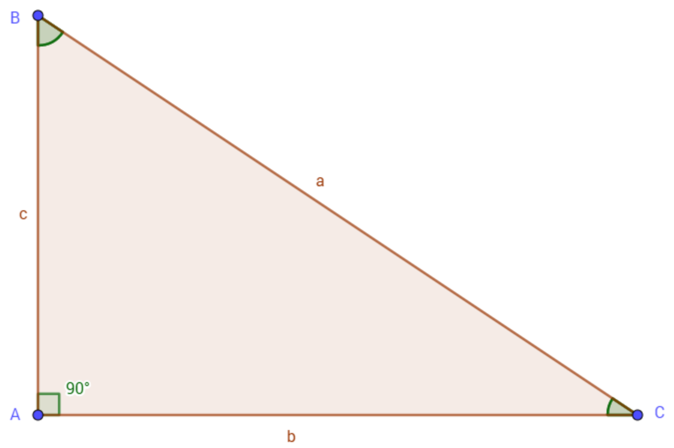
9.2. Funções Pares e Funções Ímpares

Denominaremos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, como uma função par se para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $f(-t) = f(t)$. Denominamos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, como uma função ímpar se para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $f(-t) = -f(t)$.

9.3. A Função de Euler e o Ciclo Trigonométrico

Iniciaremos apresentando um triângulo retângulo e definindo o seno e cosseno de um ângulo, na sequência admitiremos a validade do teorema de Pitágoras para chegarmos ao ciclo trigonométrico. A figura 69 ilustra um triângulo retângulo com vértices A, B e C e lados a, oposto ao vértice A, b, oposto ao vértice B e c, oposto ao vértice C.

Figura 69: Triângulo retângulo ABC



Fonte: o autor

Independente das dimensões do triângulo, de acordo com os ângulos internos, as definições são válidas:

$$\sin(\hat{C}) = \frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{C}}{hipotenusa} = \frac{c}{a};$$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{C}}{hipotenusa} = \frac{b}{a};$$

$$\sin(\hat{B}) = \frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{B}}{hipotenusa} = \frac{b}{a};$$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{B}}{hipotenusa} = \frac{c}{a}.$$

Admitindo o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo na figura 84, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Retomando as definições do seno e do cosseno no triângulo retângulo na figura 84, temos:

$$\sin\ (\hat{C}) = \frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{C}}{hipotenusa} = \frac{c}{a} \Rightarrow sin^2(\hat{C}) = \frac{c^2}{a^2};$$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{C}}{hipotenusa} = \frac{b}{a} \Rightarrow cos^2(\hat{C}) = \frac{b^2}{a^2};$$

$$\sin(\hat{B}) = \frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{B}}{hipotenusa} = \frac{b}{a} \Rightarrow sin^2(\hat{B}) = \frac{b^2}{a^2};$$

$\cos(\hat{B}) = \frac{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{B}}{hipotenusa} = \frac{c}{a} \Rightarrow cos^2(\hat{B}) = \frac{c^2}{a^2}.$

Abordando novamente a equação do teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Podemos dividir ambos os membros da equação anterior por a^2, pelo fato de a representar uma distância, sendo um número real positivo, assim sendo, segue que:

$$\frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2}$$

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$$

$$cos^2(\hat{C}) + \sin^2(\hat{C}) = 1$$

$$\sin^2(\hat{C}) + cos^2(\hat{C}) = 1$$

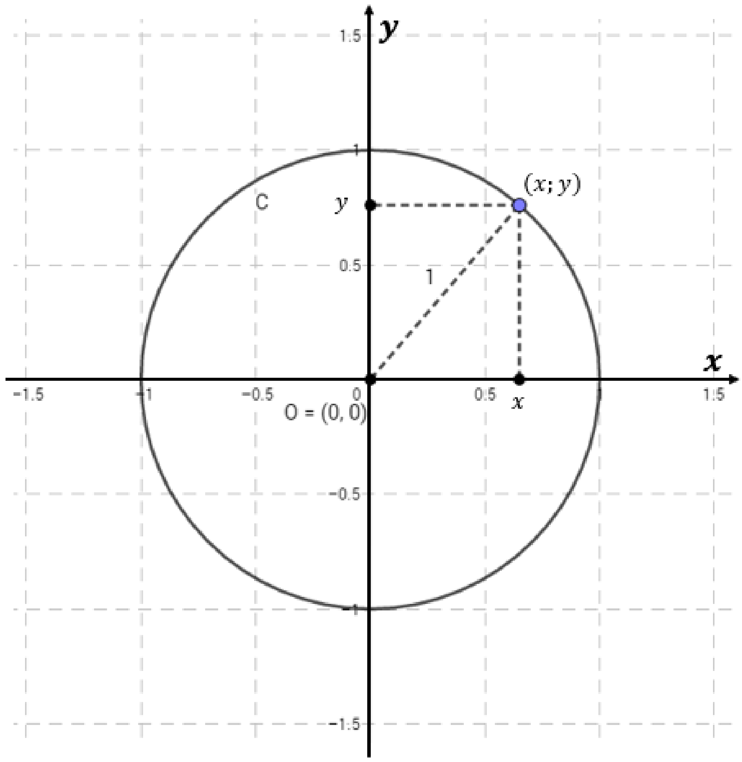
Observamos ainda que, da equação $\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$, poderíamos ter seguido outro caminho, mostrado a seguir:

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$$

$$\sin^2(\hat{B}) + cos^2(\hat{B}) = 1$$

As igualdades $\sin^2(\hat{C}) + cos^2(\hat{C}) = 1$ e $sen^2(\hat{B}) + cos^2(\hat{B}) = 1$ são conhecidas como Relação Fundamental da Trigonometria. Ainda sobre as igualdades $\sin^2(\hat{C}) + cos^2(\hat{C}) = 1$ e $sen^2(\hat{B}) + cos^2(\hat{B}) = 1$, elas sugerem, independente dos valores do $\hat{B}$ e $\hat{C}$, uma circunferência de raio medindo 1 em $\mathbb{R}^2$, afinal o seno de um ângulo é a sua projeção sobre o eixo y e cosseno sobre o eixo x. Indicaremos circunferência unitária pela letra C, e definiremos seu centro como sendo a origem do sistema cartesiano de modo que $C = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$. Mais adiante, acrescentaremos algumas definições e a denominaremos ciclo trigonométrico. A circunferência unitária é mostrada na figura 70, a seguir.

Figura 70: Circunferência unitária obtida a partir da projeção de seno e cosseno plano cartesiano



Fonte: o autor

Ainda sobre a circunferência unitária, ela é a imagem a qual chamamos de função de Euler, definida $E: \mathbb{R} \rightarrow C$. A função de Euler (função periódica) associa os valores reais t, em graus ou em radianos, a um ponto $E(t) = (\cos t\,;\, \sin t) = (x; y) \in C$, com as seguintes definições:

Se $(x; y) \in C$ então $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$;

$E(0) = (1; 0)$;

Se $t > 0$, a partir de $(1; 0)$ percorremos em C no sentido anti-horário, um arco de comprimento t; O ponto $E(t)$, na circunferência unitária será o ponto final desta extensão;

Se $t < 0$, a partir de $(1; 0)$ percorremos em C no sentido horário, um arco de comprimento $|t|$. O ponto $E(t)$, na circunferência unitária será o ponto final desta extensão;

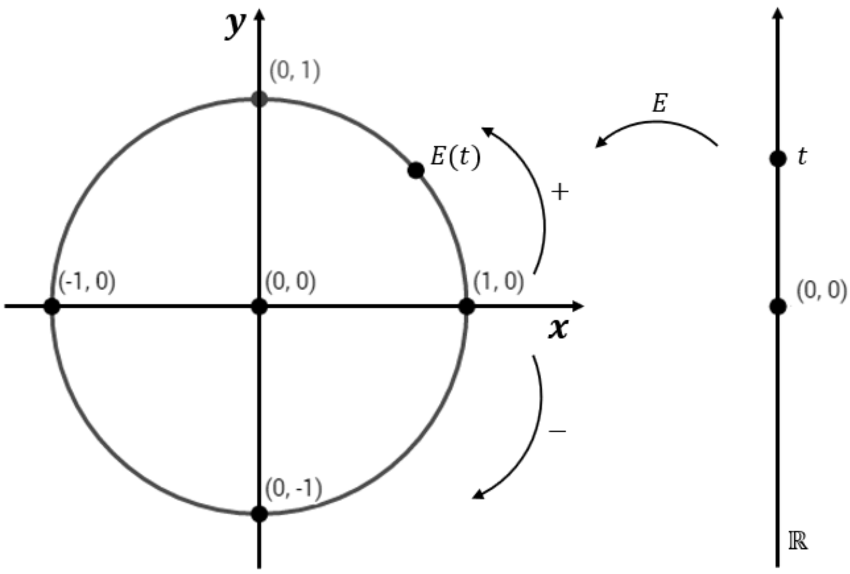
Para todo $t \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$, $E(t) = E(t + 2 \cdot k \cdot \pi)$, pelo fato de a função de Euler ser periódica.

$E(t) = E(b) \Leftrightarrow b = t + 2 \cdot k \cdot \pi$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Sejam $A = (1; 0)$ e $O = (0; 0)$, para cada $t \in \mathbb{R}$, com $B = E(t)$, definimos a medida do ângulo $A\hat{O}B$ como sendo t radianos.

Representamos, na figura 71, a função de Euler no plano cartesiano e a definição de sentido positivo e negativo, bem como, ela tem a funcionalidade de um “carretel” que “enrola” os números reais na circunferência unitária.

Figura 71: A função de Euler representada no plano cartesiano



Fonte: o autor

A partir de agora, a circunferência unitária que é a imagem da função de Euler no plano cartesiano, será associada ao ciclo trigonométrico que disponibiliza informações integradas. A partir do ciclo trigonométrico desmembramos as funções seno e cosseno, bases para as funções trigonométricas apresentadas no ensino médio.

9.4. Arcos no Ciclo Trigonométrico: Medida de um Ângulo

No ciclo trigonométrico cada uma das partes, dividas por dois quaisquer de seus pontos, definimos arcos da circunferência. Dado o ciclo trigonométrico e dois pontos sobre ele, A e B, então temos: $\widehat{AB}$, que representa o arco que tem extremidades em A e em B e $med(\widehat{AB})$ que representa a medida de do arco $\widehat{AB}$ que tem extremidades em A e em B.

Seja $\widehat{AB}$ um arco do ciclo trigonométrico, tal qual, $med(\widehat{AB}) = \frac{1}{360}$ da circunferência. Assim definido $\widehat{AB}$ é denominado grau. Denotamos um grau, com 1°.

Seja $\widehat{AB}$ um arco do ciclo trigonométrico, tal qual, $med(\widehat{AB}) = medida\ do\ raio\ do\ ciclo\ trigonométrico$. Assim definido $\widehat{AB}$ é denominado radiano. Denotamos um radiano, com $1\ rad$.

Como o raio do ciclo trigonométrico é unitário e o comprimento de uma circunferência de raio medindo r é dado por $2 \cdot \pi \cdot r$, segue a relação que permite a conversão de graus em radianos e de radianos em graus:

$$2 \cdot \pi \cdot r = 360°$$

$$2 \cdot \pi \cdot 1 = 360°$$

$$2 \cdot \pi = 360°$$

A figura 72, a seguir, nos fornece alguns ângulos graduados em graus e em radianos.

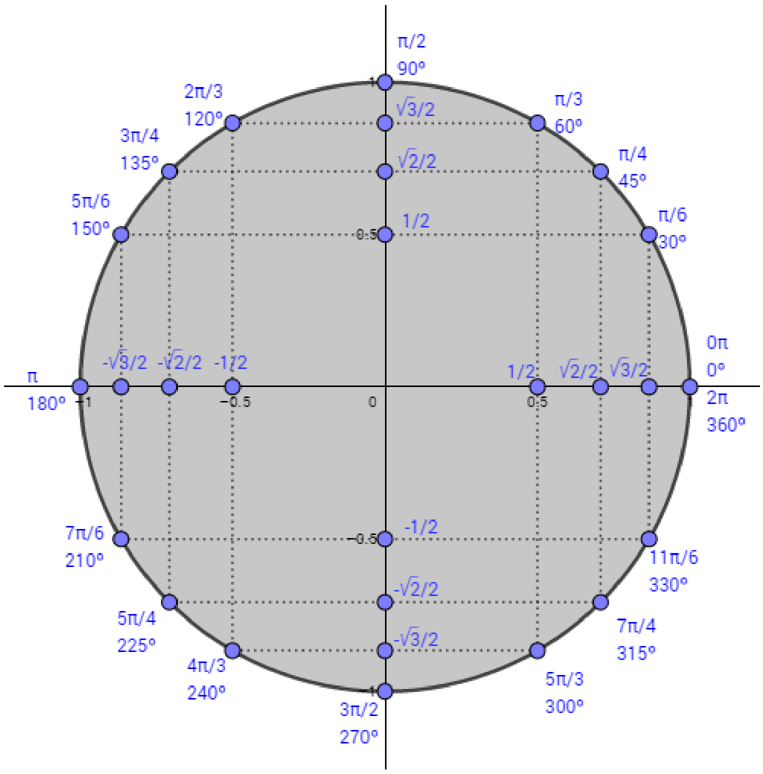
Figura 72: Alguns ângulos graduados em graus e em radianos

GRAU	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
RADIANO	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\frac{5\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{7\pi}{4}}$	$\boldsymbol{2\pi}$

Fonte: o autor

Na figura 73, a seguir, representamos o ciclo trigonométrico com medidas de alguns arcos, ditos notáveis graduados em graus e em radianos.

Figura 73: Ciclo trigonométrico com arcos notáveis graduados em graus e em radianos



Fonte: o autor

9.5. Função Seno

Definimos como função seno a função real de variável real que apresenta seno na variável independente em sua lei de formação. As imagens obtidas com a função seno são, de fato, as ordenadas de cada par ordenado obtido na função de Euler. Em símbolos:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \sin x$$

Ainda sobre a função $f(x) = \sin x$, é válido que:

O domínio da função seno é $\mathbb{R}$;

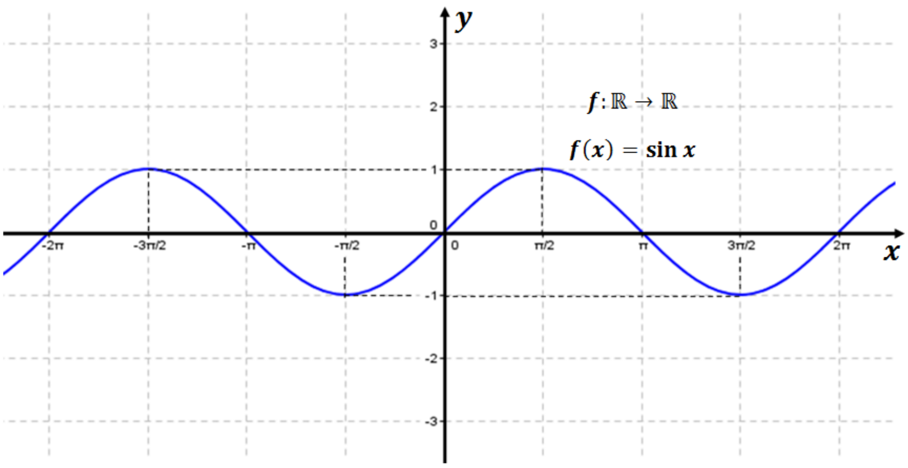
A imagem da função seno: $[-1\,;1]$. Assim, ela é limitada superior e inferiormente;

É uma função ímpar, afinal $\sin(x) = -\sin(-x) \Rightarrow f(x) = -f(-x)$.

9.6. Representação Gráfica da Função Seno

Como a função seno é periódica, pois cada imagem da função está associada ao ciclo trigonométrico, segue que sua representação gráfica é uma curva chamada senóide, mais particularmente onda senoidal, que se repete ao longo do eixo das abscissas, representada na figura 74, a seguir.

Figura 74: Representação gráfica da função seno no plano cartesiano



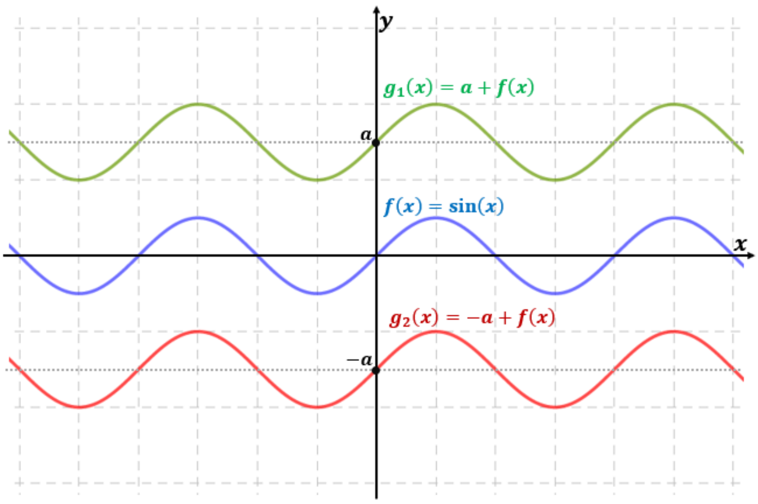
Fonte: o autor

9.7. Translação Vertical da Representação Gráfica da Função Seno

Definimos translação vertical da representação gráfica da função seno, como sendo o avanço ou retrocesso vertical (movimento de subida ou descida) no plano cartesiano da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = \sin x$.

Assim, a partir de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, com o translado vertical da representação gráfica da função seno, chegamos a uma nova família de funções trigonométricas como $g(x) = f(x) + a$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. A constante com $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, é responsável pelo translado vertical, ou seja, a representação gráfica da função seno g é congruente a representação gráfica da função seno f, contudo transladada $|a|$ unidades para baixo se $a < 0$ ou a unidades para cima se $a > 0$. Ainda sobre a constante a citada, ela representa o eixo central da função seno, determinando o intercepto da função seno com o eixo das ordenadas, como mostrado na figura 75, a seguir:

Figura 75: O translado vertical da representação gráfica da função seno no plano cartesiano



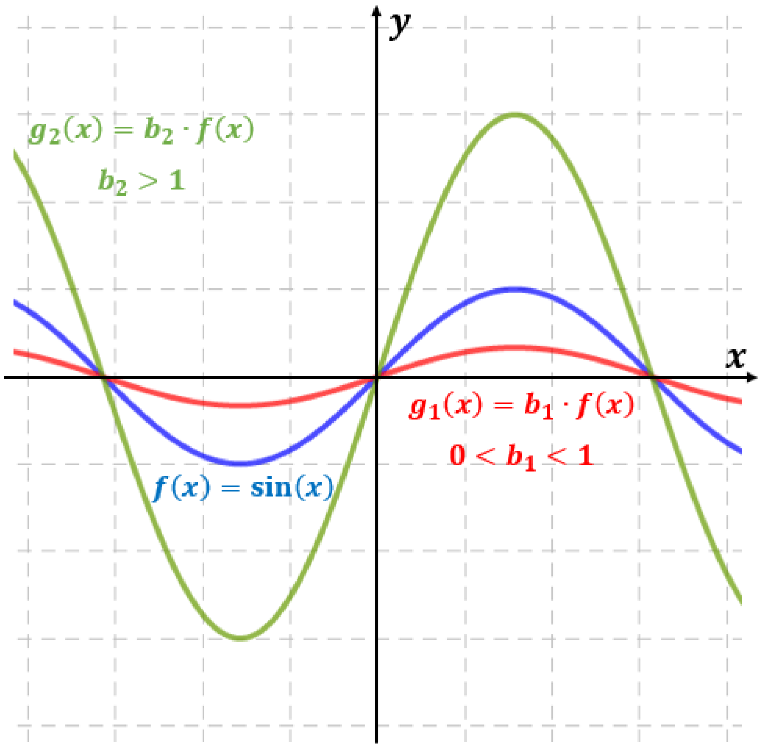
Fonte: o autor

9.8. Amplitude e/ou inversão da Representação Gráfica da Função Seno

Definimos a amplitude da representação gráfica da função seno como sendo a compressão ou expansão na direção horizontal. Definimos ainda a inversão da representação gráfica da função seno como sendo a inversão do sinal de cada imagem em relação ao seu eixo central.

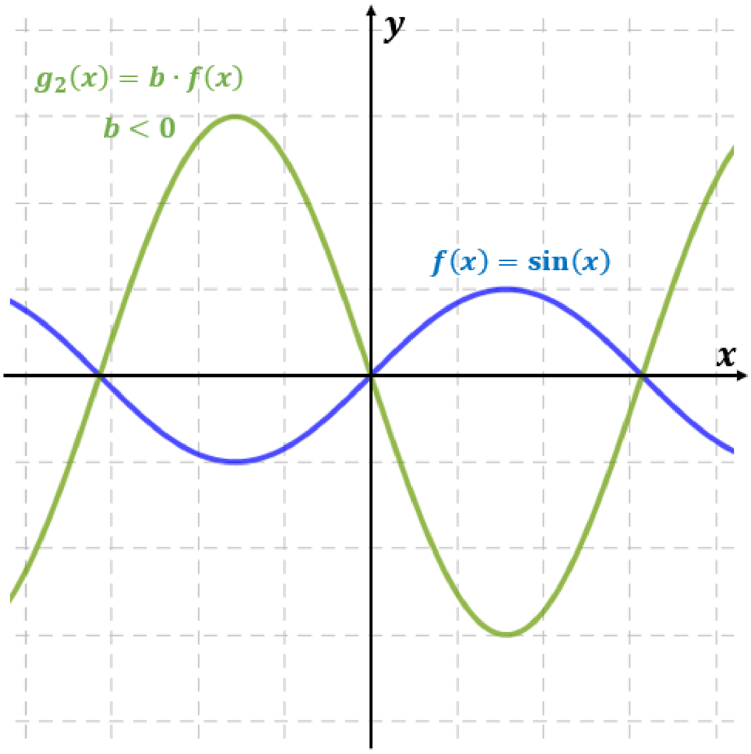
Assim, a partir de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, com a amplitude e/ou inversão da representação gráfica da função seno, chegamos a uma nova família de funções trigonométricas como $g(x) = b \cdot f(x)$, com $b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. A constante com $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, é responsável pela amplitude e/ou inversão, ou seja, a representação gráfica da função seno g é comprimida ou expandida e/ou invertida em relação a representação gráfica da função seno f. Assim a função seno f é comprimida ou expandida $|b|$ unidades acima ou abaixo de seu eixo central e/ou invertida, de acordo com o sinal de b, ou seja, se $b > 0$ a representação gráfica da função $g(x) = b \cdot f(x)$ é mantida, contudo se $b < 0$, invertida em relação a $f(x) = \sin x$, como mostrado na figura 76 e na figura 77, a seguir.

Figura 76: O translado vertical da representação gráfica da função seno no plano cartesiano



Fonte: o autor

Figura 77: Inversão da representação gráfica da função seno no plano cartesiano



Fonte: o autor

9.9. Período da Representação Gráfica da Função Seno

A representação gráfica da função seno obtida no intervalo $[0\,;2\pi]$ repete-se para $x > 2\pi$ e $x < 0$, então, dizemos que a função seno é periódica e o período da função $f(x) = \sin x$ é 2π. Ainda sobre o período o definimos como sendo o menor espaço de unidade(s) na abscissa que faz com que a função seno repita seus resultados. Vejamos:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \cdot \cos(2\pi) + \sin(2\pi) \cdot \cos(x)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \cdot 1 + 0 \cdot \cos(x)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

O que pode ser ampliado admitindo $k \in \mathbb{Z}$, do seguinte modo:

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin(x) \cdot \cos(k \cdot 2\pi) + \sin(k \cdot 2\pi) \cdot \cos(x)$$

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin(x) \cdot 1 + 0 \cdot \cos(x)$$

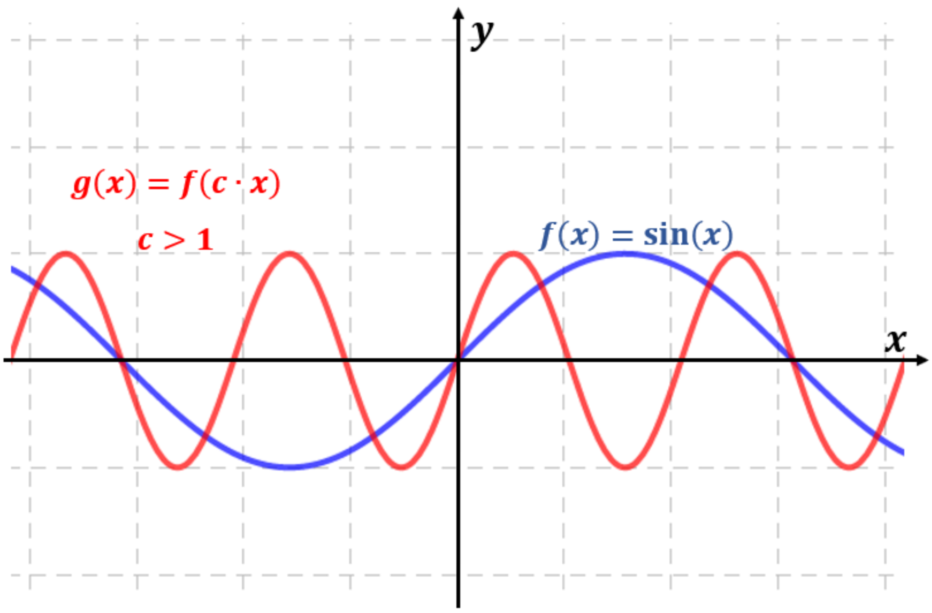
$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin(x)$$

Portanto, provamos algebricamente que o período da função $f(x) = \sin x$ é 2π.

Ainda sobre o período, há uma constante $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, responsável pela compressão ou expansão na direção horizontal da representação gráfica da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = \sin x$.

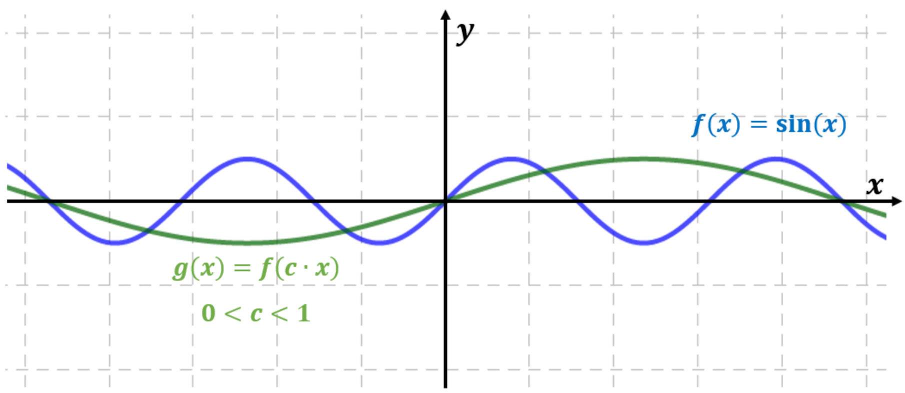
Assim, a partir de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, com compressão ou expansão na direção horizontal da representação gráfica da função seno, chegamos a uma nova família de funções trigonométricas como $g(x) = f(c \cdot x)$, com $c \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$. A constante com $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, é responsável pela compressão ou expansão na direção horizontal, ou seja, a representação gráfica da função seno g é varia o período em ralação função seno f, como mostrado na figura 78 e na figura 79, a seguir.

Figura 78: Compressão horizontal da representação gráfica da função seno no plano cartesiano



Fonte: o autor

Figura 79: Expansão horizontal da representação gráfica da função seno no plano cartesiano



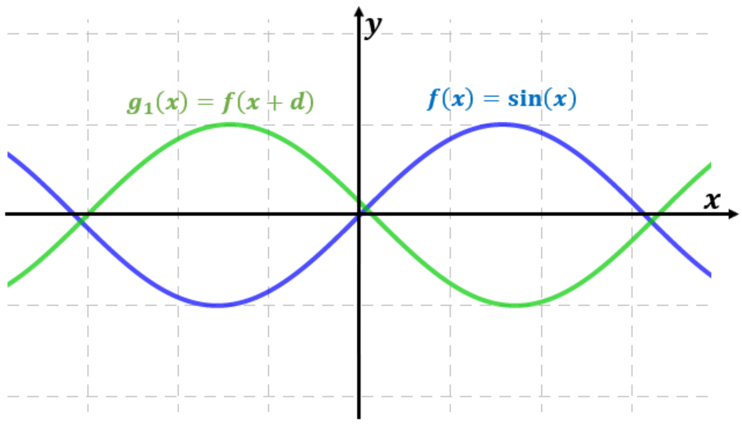
Fonte: o autor

9.10. Translação Horizontal da Representação Gráfica da Função Seno

Definimos translação horizontal da representação gráfica da função seno como sendo o retrocesso ou avanço horizontal (movimento à esquerda ou à direita) da representação gráfica da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = \sin x$.

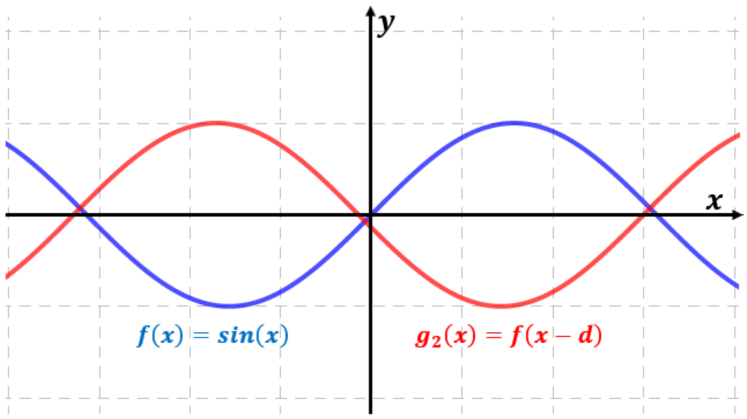
Assim, a partir de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, com o translado horizontal da representação gráfica da função seno, chegamos a uma nova família de funções trigonométricas como $g(x) = f(x + d)$, com $d \in \mathbb{R}$ e $d \neq 0$. A constante com $d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, é responsável pelo translado horizontal, ou seja, a representação gráfica da função seno g é congruente a representação gráfica da função seno f, contudo transladada $|d|$ unidades à direita se $d < 0$ ou d unidades à esquerda se $d > 0$, como mostrado na figura 80 e na figura 81, a seguir.

Figura 80: O translado horizontal à esquerda da representação gráfica da função seno no plano cartesiano



Fonte: o autor

Figura 81: O translado horizontal à direita da representação gráfica da função seno no plano cartesiano



Fonte: o autor

Agrupando os estudos de translação, compressão, expansão e inversão da representação gráfica chegamos ao que consideramos uma maneira mais abrangente da função seno que é:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = a + b \cdot \sin(c \cdot x + d)$$

As constantes reais a, b, c e d, são chamadas de parâmetros da função seno. As constantes reais a e d podem ser nulas, contudo as constantes b e c não, pois se forem b e/ou c nulos a função $f(x) = a + b \cdot \sin(c \cdot x + d)$, torna-se constante. Como definido, seno de um ângulo é a ordenada da função de Euler, que varia no intervalo fechado de $[-1; 1]$, logo para um ângulo θ, $-1 \leq \sin\theta \leq 1$. Seja $\theta = c \cdot x + d$, segue que:

$$-1 \leq \sin(\theta) \leq 1 \Rightarrow$$

$$-1 \leq \sin(c \cdot x + d) \leq 1 \Rightarrow$$

$$|b| \cdot (-1) \leq b \cdot \sin(c \cdot x + d) \leq |b| \cdot 1 \Rightarrow$$

$$a - |b| \leq a + b \cdot \sin(c \cdot x + d) \leq a + |b|$$

Esta última desigualdade nos revela a imagem da função real $f(x) = a + b \cdot \sin(c \cdot x + d)$, que é o intervalo real $[a - |b|; a + |b|]$.

Na busca pelo período P da função $f(x) = a + b \cdot \sin(c \cdot x + d)$, empregaremos o seguinte raciocínio $f(x) = f(x + P)$, para isso, segue que:

$$f(x) = f(x + P) \Rightarrow$$

$$a + b \cdot \sin(c \cdot x + d) = a + b \cdot \sin[c \cdot (x + P) + d] \Rightarrow$$

$$b \cdot \sin(c \cdot x + d) = b \cdot \sin[c \cdot (x + P) + d]$$

Como, por definição, $b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, segue que:

$$b \cdot \sin(c \cdot x + d) = b \cdot \sin[c \cdot (x + P) + d] \Rightarrow$$

$$\sin(c \cdot x + d) = \sin[c \cdot (x + P) + d] \Rightarrow$$

$$c \cdot x + d = c \cdot (x + P) + d \pm 2 \cdot k \cdot \pi \Rightarrow$$

$$c \cdot x = c \cdot x + c \cdot P \pm 2 \cdot k \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\mp 2 \cdot k \cdot \pi = c \cdot P \Rightarrow$$

$$c \cdot P = \mp 2 \cdot k \cdot \pi$$

Como, por definição, $c \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$, segue que:

$$c \cdot P = \mp 2 \cdot k \cdot \pi \Rightarrow P = \frac{\mp 2 \cdot k \cdot \pi}{c} \Rightarrow P = \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{\mp c}$$

O período é o menor intervalo possível para que a representação gráfica da função $f(x) = a + b \cdot \sin(c \cdot x + d)$ descreva um ciclo completo. Para que isso ocorra, na equação $P = \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{\mp c}$ é necessário que $k = 1$. Diante disso, segue que:

$$P = \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{\mp c} \Rightarrow P = \frac{2 \cdot \pi}{\mp c} \Rightarrow P = \frac{2 \cdot \pi}{|c|}$$

Portanto, o período P da função $f(x) = a + b \cdot \sin(c \cdot x + d)$ é dado por: $P = \frac{2 \cdot \pi}{|c|}$.

9.11. Função Cosseno

Definimos como função cosseno a função real de variável real que apresenta cosseno na variável independente em sua lei de formação. As imagens obtidas com a função cosseno são, de fato, as abscissas de cada par ordenado obtido na função de Euler. Em símbolos:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \cos x$$

Ainda sobre a função $f(x) = \cos x$, é válido que:

O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$;

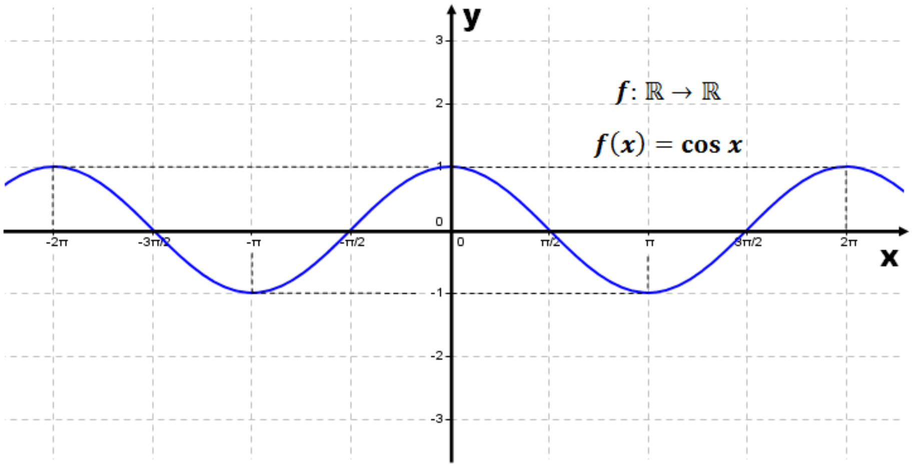
A imagem da função cosseno: $[-1\,;1]$. Assim, ela é limitada superior e inferiormente;

É uma função par, afinal $\cos(x) = \cos(-x) \Rightarrow f(x) = f(-x)$.

9.12. Representação Gráfica da Função Cosseno

Como a função cosseno é periódica, pois cada imagem da função está associada ao ciclo trigonométrico, segue que sua representação gráfica é uma curva chamada senóide (mesmo nome da representação gráfica da função seno, afinal, a representação gráfica é a mesma, contudo há entre elas um translado horizontal de $\frac{\pi}{2}$ radianos) mais particularmente onda cossenoidal, que se repete ao longo do eixo das abscissas, representada na figura 82, a seguir.

Figura 82: Representação gráfica da função cosseno no plano cartesiano



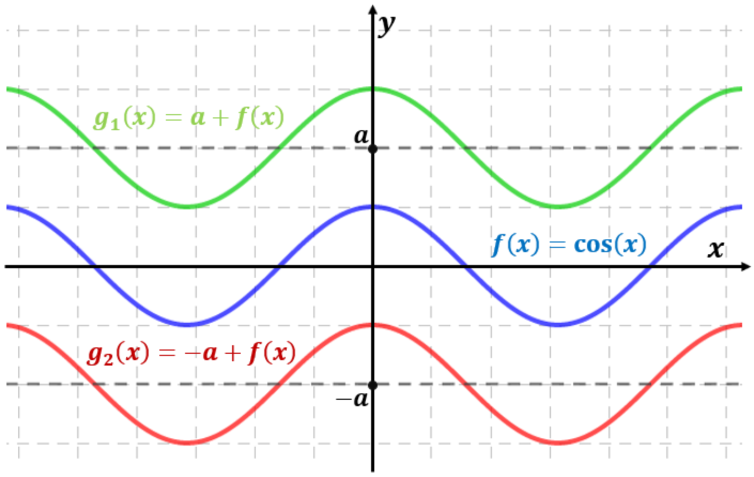
Fonte: o autor

9.13. Translação Vertical da Representação Gráfica da Função Cosseno

Definimos translação vertical da representação gráfica da função cosseno, como sendo o avanço ou retrocesso vertical (movimento de subida ou descida) no plano cartesiano da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = \cos x$.

Assim, a partir de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, com o translado vertical da representação gráfica da função cosseno, chegamos a uma nova família de funções trigonométricas como $g(x) = f(x) + a$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. A constante com $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, é responsável pelo translado vertical, ou seja, a representação gráfica da função cosseno g é congruente a representação gráfica da função cosseno f, contudo transladada $|a|$ unidades para baixo se $a < 0$ ou a unidades para cima se $a > 0$. Ainda sobre a constante a citada, ela representa o eixo central da função cosseno, determinando o intercepto da função cosseno com o eixo das ordenadas, de modo que o intercepto se dá em uma unidade a mais que o valor de a, como mostrado na figura 83, a seguir:

Figura 83: O translado vertical da representação gráfica da função cosseno no plano cartesiano



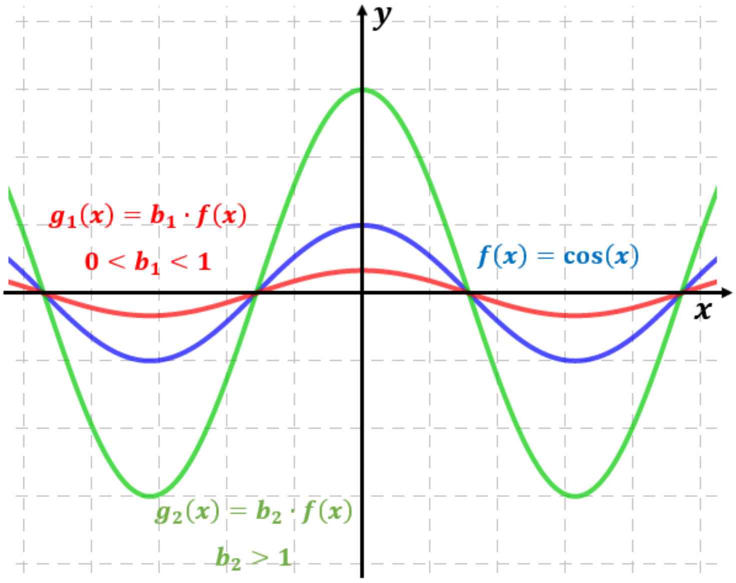
Fonte: o autor

9.14. Amplitude e/ou inversão da Representação Gráfica da Função Cosseno

Definimos a amplitude da representação gráfica da função cosseno como sendo a compressão ou expansão na direção horizontal. Definimos ainda a inversão da representação gráfica da função seno como sendo a inversão do sinal de cada imagem em relação ao seu eixo central.

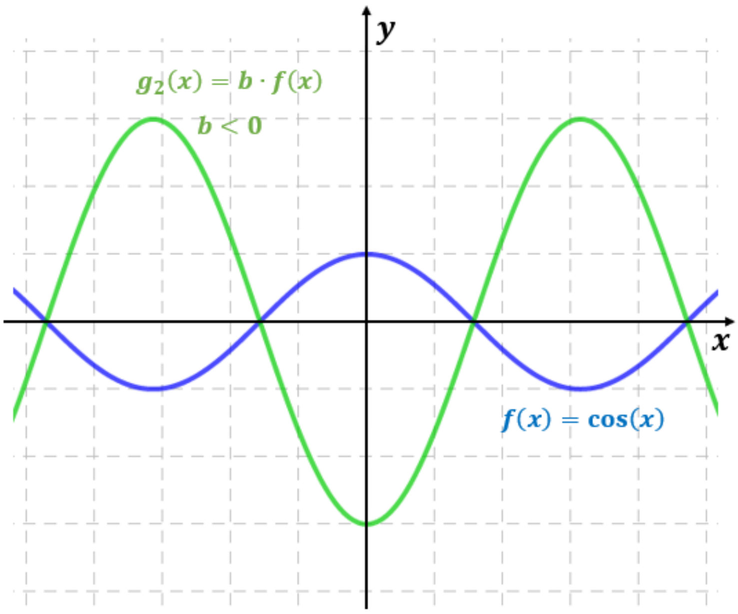
Assim, a partir de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, com a amplitude e/ou inversão da representação gráfica da função cosseno, chegamos a uma nova família de funções trigonométricas como $g(x) = \ b \cdot f(x)$, com $b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. A constante com $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, é responsável pela amplitude e/ou inversão, ou seja, a representação gráfica da função cosseno g é comprimida ou expandida e/ou invertida em relação a representação gráfica da função cosseno f. Assim a função cosseno f é comprimida ou expandida $|b|$ unidades acima ou abaixo de seu eixo central e/ou invertida, de acordo com o sinal de b, ou seja, se $b > 0$ a representação gráfica da função $g(x) = \ b \cdot f(x)$ é mantida, contudo se $b < 0$, invertida em relação a $f(x) = \cos x$, como mostrado na figura 84 e na figura 85, a seguir.

Figura 84: Compressão ou expansão vertical da representação gráfica da função cosseno no plano cartesiano



Fonte: o autor

Figura 85: Inversão da representação gráfica da função seno no plano cartesiano



Fonte: o autor

9.15. Período da Representação Gráfica da Função Cosseno

A representação gráfica da função cosseno obtida no intervalo $[0\,;2\pi]$ repete-se para $x > 2\pi$ e $x < 0$, então, dizemos que a função cosseno é periódica e o período da função $f(x) = \sin x$ é 2π. Ainda sobre o período o definimos como sendo o menor espaço de unidade(s) na abscissa que faz com que a função cosseno repita seus resultados. Vejamos:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \cdot \cos(2\pi) + \sin(x) \cdot \sin(2\pi)$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \cdot 1 + \sin(x) \cdot 0$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

O que pode ser ampliado admitindo $k \in \mathbb{Z}$, do seguinte modo:

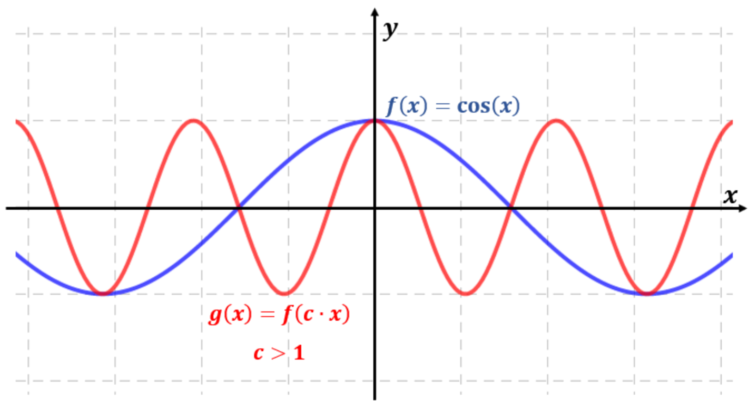
$$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos(x) \cdot \cos(k \cdot 2\pi) + \sin(x) \cdot \sin(k \cdot 2\pi)$$
$$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos(x) \cdot 1 + \sin(x) \cdot 0$$
$$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos(x) \cdot 1 + \sin(x) \cdot 0$$

Portanto, provado algebricamente que o período da função $f(x) = \cos x$ é 2π.

Ainda sobre o período, há uma constante $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, responsável pela compressão ou expansão na direção horizontal da representação gráfica da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = \cos x$.

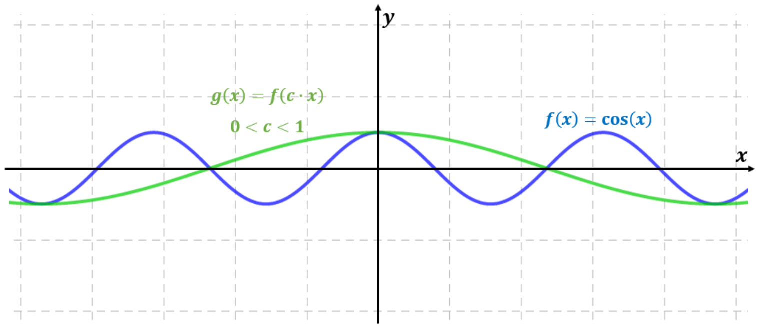
Assim, a partir de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, com compressão ou expansão na direção horizontal da representação gráfica da função cosseno, chegamos a uma nova família de funções trigonométricas como $g(x) = f(c \cdot x)$, com $c \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$. A constante com $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, é responsável pela compressão ou expansão na direção horizontal, ou seja, a representação gráfica da função cosseno g varia o período em ralação função cosseno f, como mostrado na figura 86 e na figura 87, a seguir.

Figura 86: Compressão horizontal da representação gráfica da função cosseno no plano cartesiano



Fonte: o autor

Figura 87: Expansão horizontal da representação gráfica da função cosseno no plano cartesiano



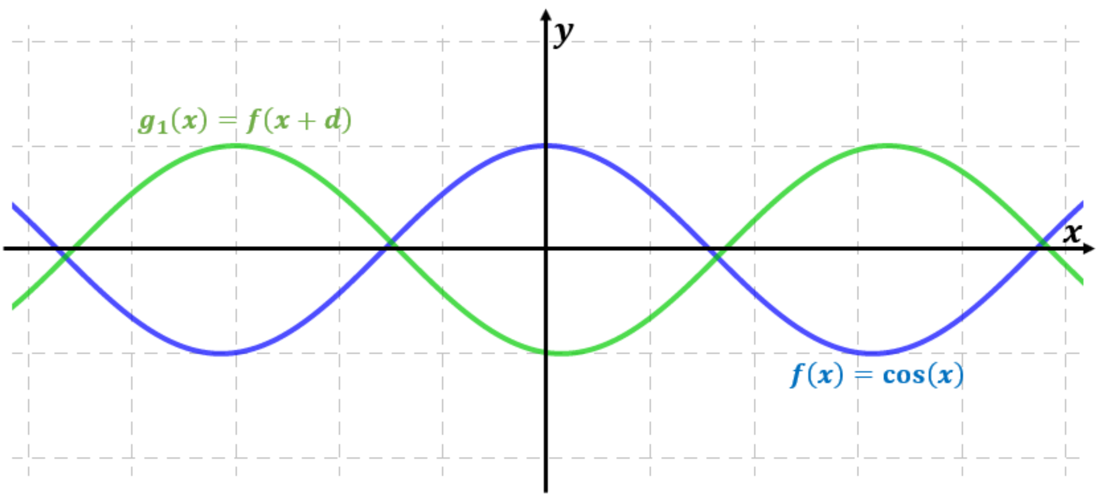
Fonte: o autor

9.16. Translação Horizontal da Representação Gráfica da Função Cosseno

Definimos translação horizontal da representação gráfica da função cosseno como sendo o retrocesso ou avanço horizontal (movimento à esquerda ou à direita) da representação gráfica da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = \cos x$.

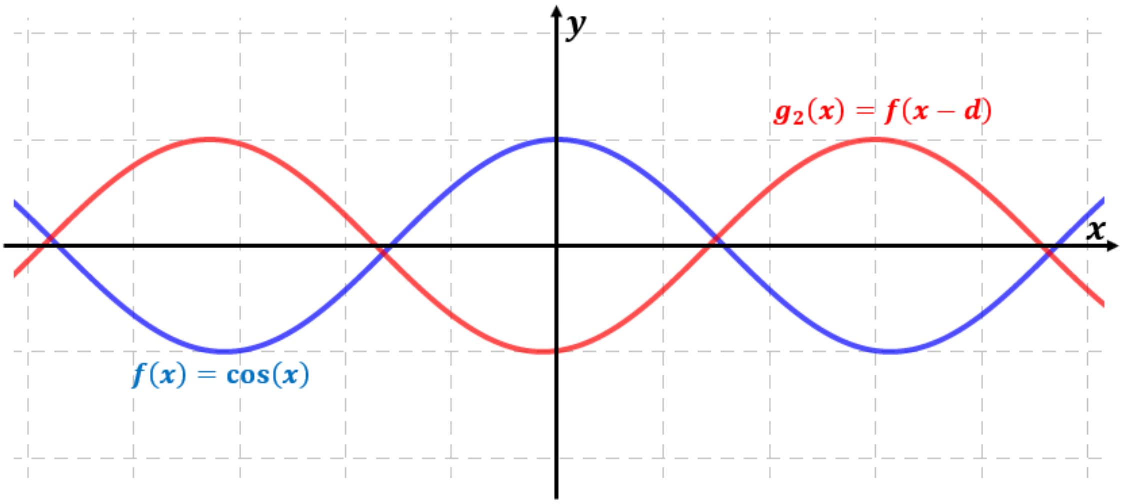
Assim, a partir de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, com o translado horizontal da representação gráfica da função cosseno, chegamos a uma nova família de funções trigonométricas como $g(x) = f(x + d)$, com $d \in \mathbb{R}$ e $d \neq 0$. A constante com $d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, é responsável pelo translado horizontal, ou seja, a representação gráfica da função cosseno g é congruente a representação gráfica da função cosseno f, contudo transladada $|d|$ unidades à direita se $d < 0$ ou d unidades à esquerda se $d > 0$, como mostrado na figura 88 e na figura 89, a seguir.

Figura 88: O translado horizontal à esquerda da representação gráfica da função cosseno no plano cartesiano



Fonte: o autor

Figura 89: O translado horizontal à direita da representação gráfica da função cosseno no plano cartesiano



Fonte: o autor

Agrupando os estudos de translação, compressão, expansão e inversão da representação gráfica chegamos ao que consideramos uma maneira mais abrangente da função cosseno que é:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = a + b \cdot \cos(c \cdot x + d)$$

As constantes reais a, b, c e d, são chamadas de parâmetros da função cosseno. As constantes reais a e d podem ser nulas, contudo as constantes b e c não, pois se forem b e/ou c nulos a função $f(x) = a + b \cdot \cos(c \cdot x + d)$, torna-se constante. Como definido, cosseno de um ângulo é a abscissa da função de Euler, que varia no intervalo fechado de $[-1; 1]$, logo para um ângulo θ, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$. Seja $\theta = c \cdot x + d$, segue que:

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1 \Rightarrow$$

$$-1 \leq \cos(c \cdot x + d) \leq 1 \Rightarrow$$

$$|b| \cdot (-1) \leq b \cdot \cos(c \cdot x + d) \leq |b| \cdot 1 \Rightarrow$$

$$a - |b| \leq a + b \cdot \cos(c \cdot x + d) \leq a + |b|$$

Esta última desigualdade nos revela a imagem da função real $f(x) = a + b \cdot \cos(c \cdot x + d)$, que é o intervalo real $[a - |b|; a + |b|]$.

Na busca pelo período P da função $f(x) = a + b \cdot \cos(c \cdot x + d)$, empregaremos o seguinte raciocínio $f(x) = f(x + P)$, para isso, segue que:

$$f(x) = f(x + P) \Rightarrow$$

$$a + b \cdot \cos(c \cdot x + d) = a + b \cdot \cos[c \cdot (x + P) + d] \Rightarrow$$
$$b \cdot \cos(c \cdot x + d) = b \cdot \cos[c \cdot (x + P) + d]$$

Como, por definição, $b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, segue que:

$$b \cdot \cos(c \cdot x + d) = b \cdot \cos[c \cdot (x + P) + d] \Rightarrow$$
$$\cos(c \cdot x + d) = \cos[c \cdot (x + P) + d] \Rightarrow$$
$$c \cdot x + d = c \cdot (x + P) + d \pm 2 \cdot k \cdot \pi \Rightarrow$$
$$c \cdot x = c \cdot x + c \cdot P \pm 2 \cdot k \cdot \pi \Rightarrow$$
$$\mp 2 \cdot k \cdot \pi = c \cdot P \Rightarrow$$
$$c \cdot P = \mp 2 \cdot k \cdot \pi$$

Como, por definição, $c \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$, segue que:

$$c \cdot P = \mp 2 \cdot k \cdot \pi \Rightarrow P = \frac{\mp 2 \cdot k \cdot \pi}{c} \Rightarrow P = \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{\mp c}$$

O período é o menor intervalo possível para que a representação gráfica da função $f(x) = a + b \cdot \cos(c \cdot x + d)$ descreva um ciclo completo. Para que isso ocorra, na equação $P = \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{\mp c}$ é necessário que $k = 1$. Diante disso, segue que:

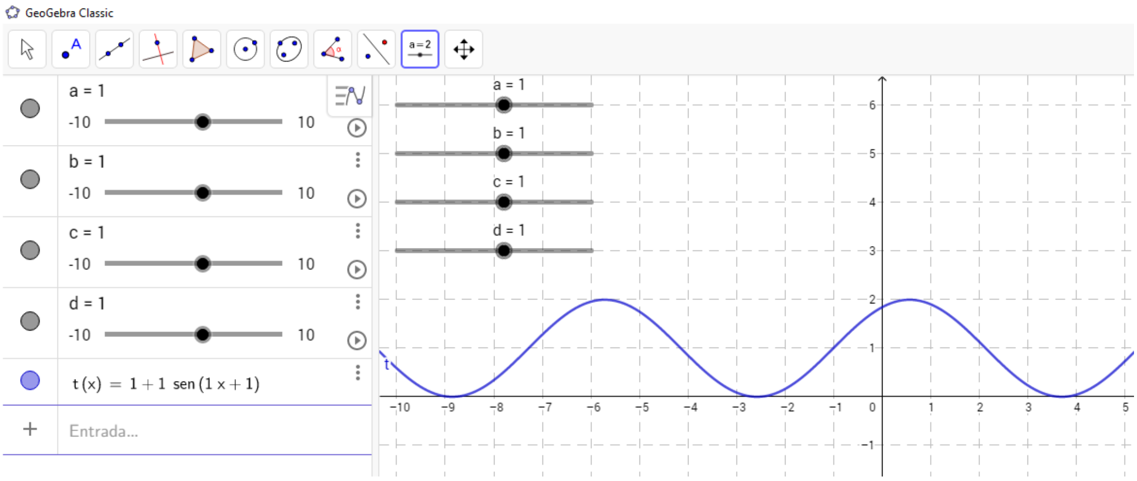
$$P = \frac{2 \cdot k \cdot \pi}{\mp c} \Rightarrow P = \frac{2 \cdot \pi}{\mp c} \Rightarrow P = \frac{2 \cdot \pi}{|c|}$$

Portanto, o período P da função $f(x) = a + b \cdot \cos(c \cdot x + d)$ é dado por: $P = \frac{2 \cdot \pi}{|c|}$.

9.17. Capacitação: o Ensino de Funções Trigonométricas Empregando o GeoGebra

Inicialmente crie quatro controles deslizantes a, b, c, e d, pois serão necessários à sintaxe das Funções Trigonométricas, com ênfase na onda senoidal. Criados os controles deslizantes, a proposta agora é desenvolver a sintaxe das funções trigonométricas e investigar a funcionalidade de seus parâmetros. Para isso, no campo de entrada escreva $t(x) = a + b \cdot \sin(c \cdot x + d)$, como na figura 90, a seguir.

Figura 90: Escrevendo a sintaxe das funções trigonométricas no software GeoGebra



Fonte: o autor

Seguindo a construção serão investigados padrões e regularidades sobre o parâmetro c animando-o. A partir dessa animação verifica-se a funcionalidade do parâmetro c na família das funções trigonométricas, com ênfase na onda senoidal. De fato, o parâmetro c define o período das funções trigonométricas. O período de uma onda senoidal é definido pelo quociente $\frac{2\cdot\pi}{|c|}$.

Seguindo passos análogos a animação do controle deslizante associado ao parâmetro c, pare sua animação. O foco agora, passará a ser investigar a funcionalidade do parâmetro d, dada a representação gráfica das funções trigonométricas, com ênfase na onda senoidal. Para isso, anime o parâmetro b. A partir dessa animação, verifica-se a funcionalidade do parâmetro d na família das funções trigonométricas, com ênfase na onda senoidal. De fato, o parâmetro d na família das funções trigonométricas, com ênfase na onda senoidal determina o translado horizontal.

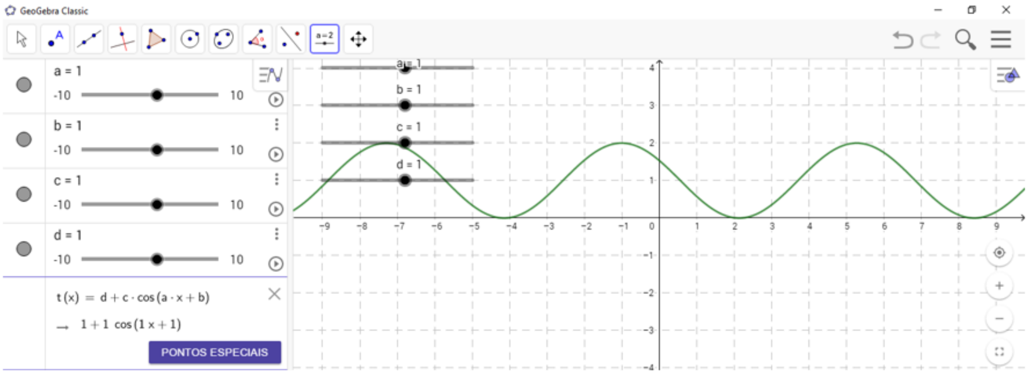
Seguindo passos análogos a animação do controle deslizante associado ao parâmetro d, pare sua animação. O foco agora, passará a ser investigar a funcionalidade do parâmetro b, dada a representação gráfica das funções trigonométricas, com ênfase na onda senoidal. Para isso, anime o parâmetro b. De fato, o parâmetro b na família das funções trigonométricas determina a amplitude.

Seguindo passos análogos a animação do controle deslizante associado ao parâmetro b, pararemos sua animação. O foco agora, passará a ser investigar a funcionalidade do parâmetro a, dada a representação gráfica das funções trigonométricas, com ênfase na onda senoidal. Para isso, anime o parâmetro a. A partir dessa animação, verifica-se a funcionalidade com parâmetro d na família das funções trigonométricas, com ênfase na onda senoidal. De fato, o parâmetro a

na família das funções trigonométricas, com ênfase na onda senoidal determina o eixo central, dada a extensão horizontal da representação gráfica.

Tratamos agora a onda cossenoidal. Para isso, crie quatro comandos a, b, c, e d, pois eles serão necessários à sintaxe das Funções Trigonométricas, com ênfase na onda cossenoidal. A proposta agora é desenvolver a sintaxe das funções trigonométricas, com ênfase na onda cossenoidal e investigar a funcionalidade de seus parâmetros. Para isso, no campo de entrada escreva $t(x) = a + b \cdot \cos(c \cdot x + d)$, como na figura 91, a seguir.

Figura 91: Escrevendo a sintaxe das Funções Trigonométricas, com ênfase na onda cossenoidal no software GeoGebra



Fonte: Elaborando pelo autor.

Seguindo a construção investigaremos padrões e regularidades sobre o parâmetro c animando-o. A partir dessa animação, verifica-se a funcionalidade do parâmetro c na família das funções trigonométricas, com ênfase na onda cossenoidal. De fato, o parâmetro c define o período das funções trigonométricas, com ênfase na onda cossenoidal. O período de uma onda cossenoidal é definido pelo quociente $\frac{2 \cdot \pi}{|c|}$.

Seguindo passos análogos a animação do controle deslizante associado ao parâmetro c, pare sua animação. O foco agora passará a ser investigar a funcionalidade do parâmetro d, dada a representação gráfica das funções trigonométricas, com ênfase na onda cossenoidal. Para isso, anime o parâmetro d. A partir dessa animação, verificamos a funcionalidade do parâmetro d na família das funções trigonométricas, com ênfase na onda cossenoidal. De fato, o parâmetro d nas funções trigonométricas, com ênfase na onda cossenoidal determina o translado horizontal.

Seguindo passos análogos a animação do controle deslizante associado ao parâmetro d, pare sua animação. O foco agora, passará a ser investigar a funcionalidade do parâmetro b, dada a representação gráfica das funções trigonométricas, com ênfase na onda cossenoidal. Para isso, anime o parâmetro b. A partir dessa animação, podemos então verificar a funcionalidade do parâmetro b na família das funções trigonométricas, com ênfase na onda cossenoidal. De fato, o parâmetro b na família das funções trigonométricas, com ênfase na onda cossenoidal determina a amplitude.

Seguindo passos análogos a animação do controle deslizante associado ao parâmetro b, pare sua animação. O foco agora, passará a ser investigar a funcionalidade do parâmetro a, dada a representação gráfica das funções trigonométricas, com ênfase na onda cossenoidal. Para isso, anime o parâmetro a. A partir dessa animação, verificamos a funcionalidade do parâmetro a na família das funções trigonométricas, com ênfase na onda cossenoidal. De fato, o parâmetro a na família das funções trigonométricas, com ênfase na onda cossenoidal determina o eixo central, dada a extensão horizontal da representação gráfica.

9.18. Resolvendo Situações-Problemas Sobre Funções Trigonométricas Utilizando o Geogebra

QUESTÃO 12 (UFSM – 2008): Em determinada cidade, a concentração diária, em gramas, de partículas de fósforo na atmosfera é medida pela função $C(t) = 3 + 2 \cdot sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$, em que t é a quantidade de horas para fazer essa medição.

O tempo mínimo necessário para fazer uma medição que registrou 4 gramas de fósforo é de:

a) $\frac{1}{2}$ hora.
b) 1 hora.
c) 2 horas.
d) 3 horas.
e) 4 horas.

Resolução: O tempo mínimo necessário para fazer uma medição que registrou 4 gramas de fósforo, para ser determinado, resolva a equação $C(t) = 3 + 2 \cdot sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) = 4$.

$$3 + 2 \cdot sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) = 4$$

$$2 \cdot sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) = 1$$

$$sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi \cdot t}{6} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow t = 1 + 12k$$

Ou

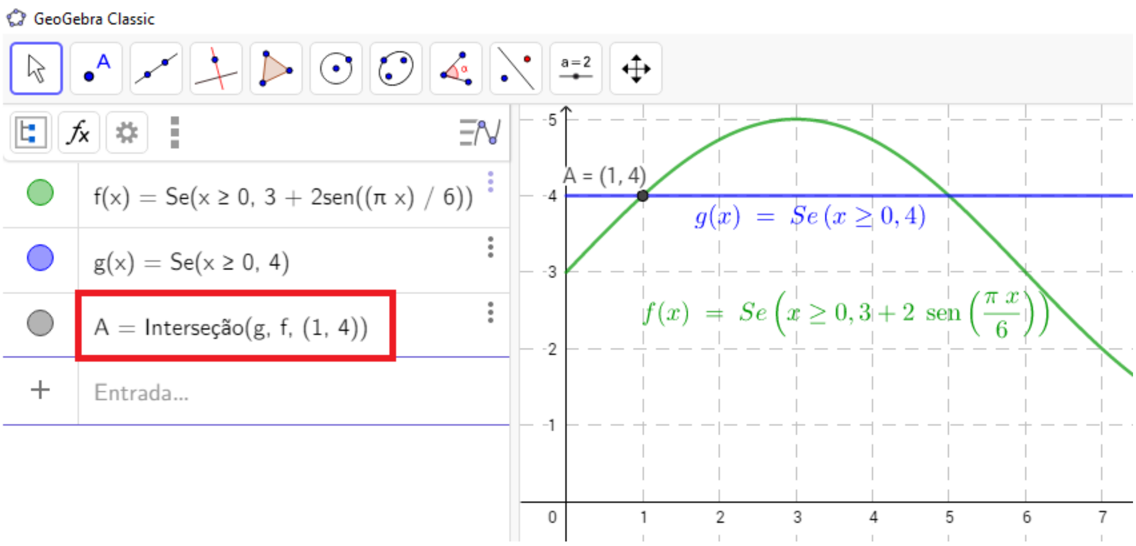
$$\frac{\pi \cdot t}{6} = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \Rightarrow t = 5 + 12k$$

Com $k \in \mathbb{Z}$.

Resposta: Alternativa b, desse modo, como t deverá ser o valor mínimo, segue que $t = 1$.

Resolução com o GeoGebra: Incialmente, na janela de álgebra, digite a sintaxe da função que determinada a concentração diária, em gramas, de partículas de fósforo na atmosfera $C(x) = 3 + 2 \cdot sin\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right)$ e tecle enter. Ainda na janela de álgebra digite $y = 4$ e tecle enter. Na sequência clique no segundo ícone na caixa de ferramentas e marque a opção Interseção de Dois Objetos, para finalizar na janela de visualização clique na representação gráfica C e na representação gráfica de $y = 4$. Automaticamente será exibida a resposta, conforme a figura 92, a seguir.

Figura 92: Solução de um problema de função trigonométrica associado a partículas na atmosfera com o GeoGebra



Fonte: o autor

Resposta: Alternativa b, desse modo, como t deverá ser o valor mínimo, segue que $t = 1$.

QUESTÃO 13 (FGV – 2012): Em certa cidade litorânea, verificou-se que a altura da água do mar em certo ponto era dada por $f(x) = 4 + 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right)$ em que x representa o número de horas decorridas a partir de zero hora de determinado dia, e a altura $f(x)$ é medida em metros.

Em que instantes, entre 0 e 12 horas, a maré atingiu a altura de $2{,}5\ m$ naquele dia?

a) 5 e 9 horas.

b) 7 e 12 horas.

c) 4 e 8 horas.

d) 3 e 7 horas.

e) 6 e 10 horas.

Resolução: Diante do enunciado, para que a maré atinja a altura de $2{,}5\ m$, faça $f(x) = 4 + 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right) = 2{,}5$.

$$4 + 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right) = 2{,}5$$

$$3 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right) = -1{,}5$$

$$\cos\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi \cdot x}{6} = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = 4 + 12k$$

Ou

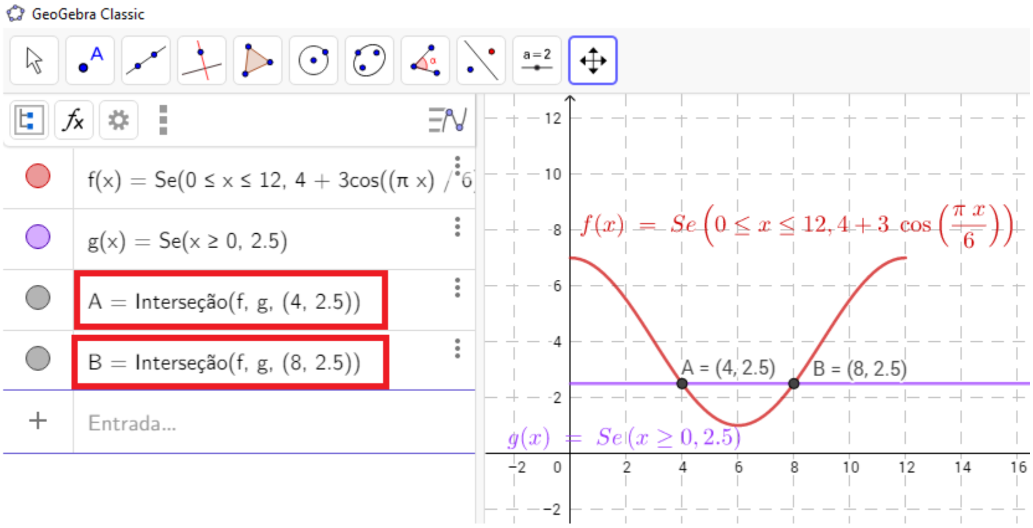
$$\frac{\pi \cdot x}{6} = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = 8 + 12k$$

Com $k \in \mathbb{Z}$.

Resposta: Alternativa c, desse modo, no intervalo $[0; 12]$, os únicos valores possíveis de x são 4 e 8.

Resolução com o GeoGebra: Incialmente, na janela de álgebra, digite a sintaxe da função que relaciona a altura da água do mar $f(x) = 4 + 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right)$ e tecle enter. Ainda na janela de álgebra digite $y = 2{,}5$ e tecle enter. Na sequência clique no segundo ícone na caixa de ferramentas e marque a opção Interseção de Dois Objetos, para finalizar na janela de visualização clique na representação gráfica f e na representação gráfica de $y = 2{,}5$. Automaticamente será exibida a resposta, conforme a figura 93, a seguir.

Figura 93: Solução de um problema de função trigonométrica associado a altura da água do mar com o GeoGebra



Fonte: Elaborando pelo autor.

Resposta: Alternativa c, desse modo, no intervalo $[0; 12]$, os únicos valores possíveis de x são 4 e 8.

QUESTÃO 14 (UNESP – 2003): Uma máquina produz diariamente x dezenas de certo tipo de peças. Sabe-se que o custo de produção $C(x)$ e o valor de venda $V(x)$ são dados, aproximadamente, em milhares de reais, respectivamente, pelas funções $C(x) = 2 - \cos\left(\frac{x \cdot \pi}{6}\right)$ e $V(x) = 3(\sqrt{2}) \cdot \sin\left(\frac{x \cdot \pi}{12}\right)$, $0 \leq x \leq 6$.

O lucro, em reais, obtido na produção de 3 dezenas de peças é:

a) 500.
b) 750.
c) 1000.
d) 2000.
e) 3000.

Resolução: Diante do enunciado, dadas as funções custo $C(x) = 2 - \cos\left(\frac{x \cdot \pi}{6}\right)$ e venda $V(x) = 3(\sqrt{2}) \cdot \sin\left(\frac{x \cdot \pi}{12}\right)$, em milhares de reais, definidas no intervalo real $0 \leq x \leq 6$, para o lucro $L(x) = V(x) - C(x)$, em reais, obtido na produção de 3 dezenas de peças, basta fazer $V(3) - C(3)$ para isso, faça:

$$V(x) = 3(\sqrt{2}) \cdot \sin\left(\frac{x \cdot \pi}{12}\right) \Rightarrow V(x) = 3(\sqrt{2}) \cdot \sin\left(\frac{x \cdot 3}{12}\right) \Rightarrow V(x) = 3$$

$$C(x) = 2 - \cos\left(\frac{x \cdot \pi}{6}\right) \Rightarrow C(3) = 2 - \cos\left(\frac{x \cdot 3}{6}\right) \Rightarrow C(3) = 2$$

Segue que:

$$L(x) = V(x) - C(x)$$
$$L(3) = V(3) - C(3)$$
$$L(3) = 3 - 2$$
$$L(3) = 1$$

Resposta: Alternativa c, desse modo, no intervalo real $[0; 6]$, o lucro, em reais, obtido na produção de 3 dezenas de peças é $1 \cdot 1000 = 1000$.

solução com o GeoGebra: De acordo com o enunciado que define o domínio sendo o intervalo real $0 \leq x \leq 6$, com as unidades em definidas em dezenas e a imagem em milhares de reais, incialmente na janela de álgebra, digite a sintaxe das funções que relacionam as vendas e o custo, no intervalo real $[0; 6]$, que respectivamente são, teclando enter ao fim:

$função\left(3(\sqrt{2}) \cdot \sin\left(\frac{x \cdot \pi}{12}\right), 0{,}6\right)$.

$função\left(2 - \cos\left(\frac{x \cdot \pi}{6}\right), 0{,}6\right)$.

Ainda na janela de álgebra, digite a sintaxe da função que determinará o lucro, teclando enter, ao fim:

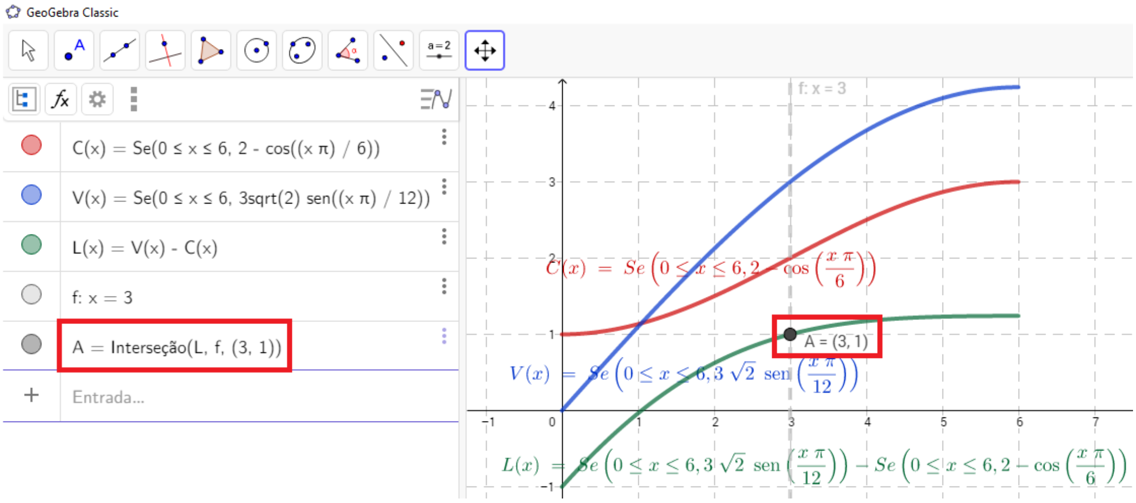
$$L(x) = V(x) - C(x)$$

Com estes passos, na janela de visualização foram exibidos a função venda, a função custo e a função lucro (que é a deseja para solucionar o problema).

Retome a janela de álgebra e digite o comando $x = 3$, teclando enter ao fim.

Na sequência clique no segundo ícone na caixa de ferramentas e marque a opção Interseção de Dois Objetos, para finalizar na janela de visualização clique na representação gráfica L e na representação gráfica de $x = 3$. Automaticamente será exibida a resposta, conforme a figura 94, a seguir.

Figura 94: Solução de um problema de função trigonométrica ao lucro na venda peças com o GeoGebra



Fonte: Elaborando pelo autor.

Resposta: Alternativa c, desse modo, no intervalo $[0; 6]$, o lucro, em reais, obtido na produção de 3 dezenas de peças é $1 \cdot 1000 = 1000$.

10. DESENVOLVIMENTO METODOLÓGIO DO TRABALHO

Neste capítulo desenvolvemos metodologicamente o trabalho, explanado sucintamente a maneira que cada etapa do trabalho foi realizada.

Neste trabalho empregamos a metodologia de pesquisa, a pesquisa qualitativa do tipo bibliográfica baseada na análise de conteúdo. A pesquisa bibliográfica foi compreendida como a etapa essencial em todo trabalho científico que influenciou em todas as etapas da pesquisa, proporcionando o embasamento teórico. No decorrer da revisão bibliográfica contemplamos uma grande quantidade de trabalhos relacionados envolvendo a prática dos recursos computacionais no processo de ensino e aprendizado de matemática, voltados especialmente à postura do docente, encorajando-o a utilizar o GeoGebra, assim como, as contribuições das propostas que envolvem essa metodologia para o aprendizado de matemática. As etapas de nosso trabalho foram:

Revisão bibliográfica relacionada ao tema, visando averiguar da melhor forma possível de modelar o ensino de funções básicas junto a aplicação do software livre de matemática dinâmica GeoGebra;

Elaboração de uma sequência didática para trabalhar o conteúdo de função básicas;

Elaboração de uma sequência didática para trabalhar o conteúdo funções básicas, junto a aplicação do software livre de matemática dinâmica GeoGebra;

Pesquisar e resolver utilizando o GeoGebra situações-problemas que envolvam funções básicas, bem expor as resoluções no trabalho;

Elaborar e apresentar um minicurso versando sobre o ensino de funções básicas via GeoGebra, em dois encontros, com o conteúdo funções e a resolução de situações-problemas relacionados a funções básicas. Contando ainda com um questionário de anterior, para termos um perfil dos professores cursistas e questionário de posterior, para confrontarmos os dados e verificarmos o quão pertinente foi a aplicação do minicurso junto aos professores.

Com a tríade: aplicação do questionário anterior, aplicação do minicurso e aplicação do questionário posterior, buscamos, baseados nos preceitos da engenharia didática, a concepção das respostas do questionário anterior como uma forma de traçar um perfil e quantificar a aceitabilidade dos recursos computacionais junto ao ensino de funções, por parte dos professores cursistas, a aplicação do minicurso, como experimentação e verificação do questionário posterior, aplicado após o minicurso, como avaliação do que foi traçado no minicurso. A finalidade dos questionários foi, conflitarmos os dados e verificarmos teórica e praticamente se, de fato, a aplicação do minicurso foi exitosa.

Segundo Bitencourt (2017) a engenharia didática se define como um processo empírico que objetiva conceber, realizar, observar e analisar as situações didáticas. A autora pondera que a engenharia didática pode ser utilizada como metodologia qualitativa de pesquisa na área da matemática e também é extremamente útil para a elaboração de situações didáticas que configurem um quadro de aprendizagem significativo.

11. RESULTADOS OBTIDOS COM A APLICAÇÃO DA CAPACITAÇÃO VOLTADA AO ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES BÁSICAS UTILIZANDO O GEOGEBRA

Neste capítulo apresentamos minunciosamente a experiência exitosa que tivemos ao preparar e aplicar a capacitação que executamos junto a quatro professores da educação básica, versando sobre o ensino de funções básicas mediado pelo software GeoGebra. Catalogamos informações preciosas junto aos questionários aplicados e minicurso apresentados e, com esses dados, apresentamos os resultados.

Para aplicar a capacitação, ofertada por meio de um minicurso, a quatro professores da educação básica, versando sobre o ensino e a resolução de situações-problemas relacionados a funções básicas, contando com o auxílio do software livre de matemática dinâmica GeoGebra aplicamos o questionário anterior, documento presente no apêndice A desta dissertação, com o objetivo traçar um perfil dos professores cursistas e de diagnosticar assuntos pertinentes ao emprego dos recursos computacionais junto ao ensino de funções básicas. O questionário anterior contou com 8 questões, sendo 7 questões fechadas e 1 questão aberta.

Sobre o questionário anterior destacamos: na primeira questão buscamos saber o grau de instrução do professor cursista, sendo um mestre, um mestrando e dois especialistas.

Na segunda questão do questionário anterior, buscamos saber com quais níveis de ensino, se no fundamental II, no ensino médio ou nos dois níveis de ensino o professor cursista trabalhava na educação básica, sendo que, dois responderam que trabalhavam apenas no ensino fundamental II, um respondeu que trabalhava no ensino fundamental II e no ensino médio e um respondeu que trabalhava apenas no ensino médio.

Na terceira questão do questionário anterior, buscamos saber qual era o tempo de trabalho até a data do minicurso, em que o professor cursista trabalhava sendo que, dois responderam que trabalhavam de sete a dez anos na educação e dois responderam que trabalhavam a mais que dez anos na educação.

Na quarta questão do questionário anterior, buscamos saber especificamente quais dos recursos computacionais mais acessíveis, se os professores cursistas conheciam sendo que, três responderam que conheciam o Excel e o GeoGebra e um respondeu que além do Excel e do GeoGebra, conhecia o Scilab, LibreOffice, FreeCAD, XMind, Inkscape, GMP e Marble, mostrando-se bastante tecnológico.

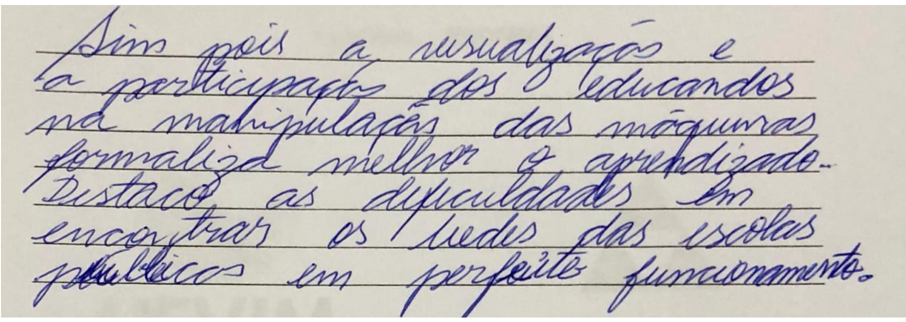
Na quinta questão do questionário anterior, buscamos saber qual era a ótica do professor cursista com relação ao papel desempenhado pelos recursos computacionais junto ao ensino dos conteúdos matemáticos sendo que, dois responderam muito relevante e dois responderam relevante.

Na sexta questão do questionário anterior, buscamos saber especificamente se entre as funções básicas, quais delas os professores cursistas já haviam abordado contando com o auxílio de algum recurso computacional sendo que, um respondeu que nunca havia utilizado os recursos computacionais junto ao ensino de funções reais de variável real, um respondeu que havia utilizado o recurso computacional junto ao ensino de funções afins, um respondeu que havia utilizado o recurso computacional junto ao ensino de funções exponenciais e um respondeu que havia utilizado o recurso computacional junto ao ensino de funções afins, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas – onda senoidal e trigonométricas onda cossenoidal.

Na sétima questão do questionário anterior, buscamos saber, com relação ao ano anterior, quantas vezes os professores cursistas haviam contado com o auxílio dos recursos computacionais em suas aulas, sendo que, um respondeu que não havia utilizado, um respondeu entre um e três vezes, um respondeu entre seis e oito vezes e um respondeu nove ou mais vezes.

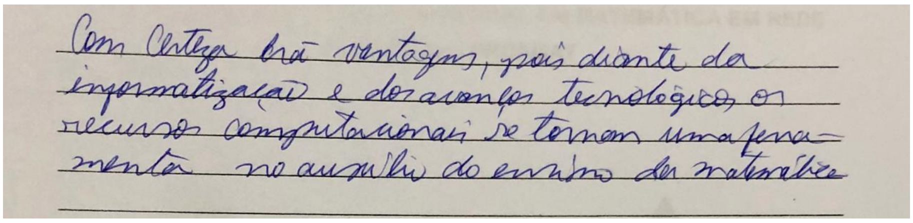
Na oitava questão do questionário anterior, buscamos saber, por meio de uma questão aberta, se o professor cursista identificava vantagens em utilizar os recursos computacionais e identificar possível entraves quanto a utilização dos recursos computacionais em sala de aula. Seguem as respostas, conforme a figuras 95, a figura 96, a figura 97 e a figura 98.

Figura 95: Resposta do professor cursista 01, com relação a oitava pergunta do questionário anterior


Sim pois a visualização e
a participação dos educandos
na manipulação das máquinas
formaliza melhor o aprendizado.
Destaco as dificuldades em
encontrar os redes das escolas
públicos em perfeito funcionamento.

Fonte: o autor

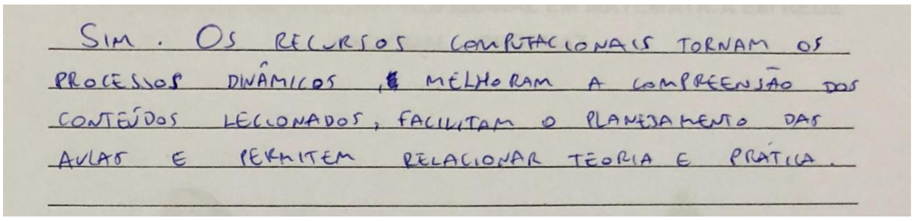
Figura 96: Resposta do professor cursista 02, com relação a oitava pergunta do questionário anterior



Com Certeza terá vantagens, pois diante da informatização e dos avanços tecnológicos, os recursos computacionais se tornam uma ferramenta no auxílio do ensino da matemática

Fonte: o autor

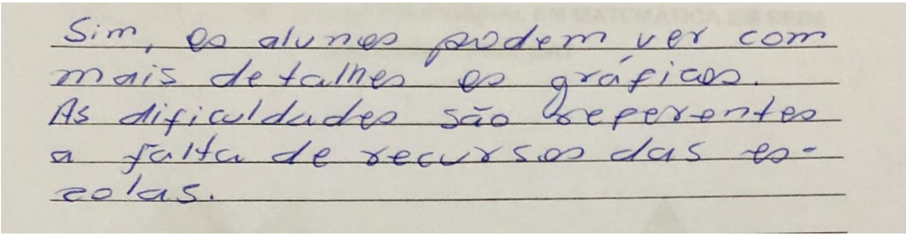
Figura 97: Resposta do professor cursista 03, com relação a oitava pergunta do questionário anterior



SIM. OS RECURSOS COMPUTACIONAIS TORNAM OS PROCESSOS DINÂMICOS, MELHORAM A COMPREENSÃO DOS CONTEÚDOS LECIONADOS, FACILITAM O PLANEJAMENTO DAS AULAS E PERMITEM RELACIONAR TEORIA E PRÁTICA.

Fonte: o autor

Figura 98: Resposta do professor cursista 04, com relação a oitava pergunta do questionário anterior



Sim, os alunos podem ver com mais detalhes os gráficos. As dificuldades são referentes a falta de recursos das escolas.

Fonte: o autor

Após investigamos e traçarmos um perfil, verificamos a aceitação e a aplicabilidade dos recursos computacionais por parte dos professores cursistas. Diante disso, marcamos a data 19 de julho de 2018 para fazermos dois encontros, um pela manhã e outro após o meio-dia para ofertarmos aos professores cursistas o minicurso: Capacitando Professores Para o Ensino e Utilização do GeoGebra na Resolução de Situações-Problemas com as Funções Básicas.

No primeiro encontro, por meio de projeção em slides, capacitamos os professores cursistas quanto ao ensino, mediado pelo GeoGebra, e resolução de situações-problemas das funções afins, quadráticas, modulares e exponenciais. No segundo encontro, também por meio de projeção em slides, capacitamos os professores cursistas quanto ao ensino, mediado pelo GeoGebra, e resolução de situações-problemas das funções logarítmicas e trigonométricas.

Após a capacitação, aplicamos o questionário posterior, com 8 questões, sendo 6 abertas e 2 fechadas.

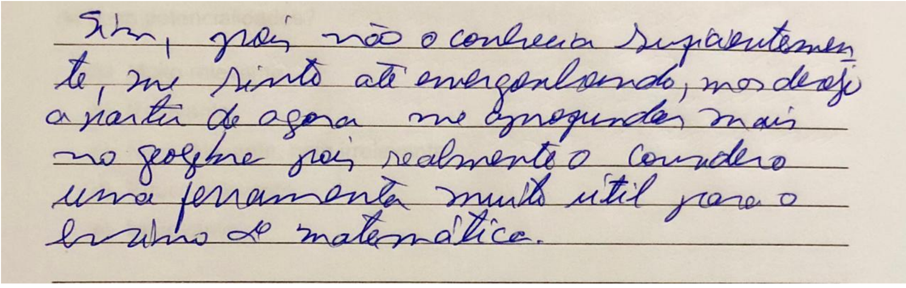
Sobre o questionário posterior, na primeira questão buscamos investigar se após participar do minicurso, o professor cursista, enxerga os recursos computacionais com uma ferramenta que pode ampliar o ensino e aprendizado de matemática sendo que todos responderam que sim, portanto analisamos como positivo o impacto que o minicurso ofertado teve quanto aos recursos computacionais, como ferramenta propulsora do ensino de matemática. Neste contexto, destacamos Moraes (2016), que além de identificar o impacto positivo que tem a inserção dos recursos computacionais junto ao ensino de matemática, o autor reitera o uso dos recursos computacionais como mecanismo de conexão com o que é ensinado nas escolas e o que o aluno vive em seu contexto social.

Na segunda questão do questionário posterior, buscamos investigar se após participar do minicurso, o professor cursista, se sente motivado a preparar as aulas inserindo o recurso computacional sendo que todos responderam que sim, portanto analisamos como positivo o impacto que o minicurso ofertado teve enaltecendo o plano de aulas passando a contar com os recursos computacionais. A motivação em utilizar os recursos computacionais se dá por dois motivos, em especial. O primeiro motivo é que, para São Pedro (2016) o estudante atual sente a necessidade de ver em sua escola a mesma tecnologia que faz parte dos seus outros contextos sociais, logo cabe ao professor a inserção dos recursos computacionais em suas práticas docentes. Tendendo a esse pensamento, o segundo motivo é que, para Rocha (2015) houve progresso no ensino de matemática no Brasil, contudo, ainda há um forte viés tradicional no que é ensinado, necessitando então de aulas mais atrativas, o que pode ser proporcionado com a inserção dos recursos computacionais.

Na terceira questão do questionário posterior, buscamos investigar se após participar do minicurso, os professores cursistas consideraram o minicurso relevante sendo que todos responderam que sim, portanto analisamos como positiva a importâncias que o minicurso ofertado teve. Nesse contexto lembramos as Orientações Curriculares Para o Ensino Médio (2006) que destacam o impacto da tecnologia como ferramenta para entender a matemática e matemática para entender a tecnologia. Ainda sobre a relevância de preparo de novas práticas metodológicas, para Nogueira (2015) há necessidade de inovação, criatividade e encorajamento no tange o ensino de aprendizagem com um caráter geral, logo, uma alternativa viável é a capacitação de professores da educação básica.

Na quarta questão do questionário posterior, buscamos investigar se após participarem do minicurso ofertado os professores cursistas sentiam dificuldades em utilizar o GeoGebra no ensino de funções sendo que três professores responderam que não e um professor respondeu que sim, conforme a figura 99, a seguir.

Figura 99: Resposta de um dos professores cursistas, com relação a oitava pergunta do questionário posterior


Sim, pois não o conhecia suficientemente, me sinto até envergonhado, mas desejo a partir de agora me aprofundar mais no geogebra pois realmente o considero uma ferramenta muito útil para o ensino de matemática.

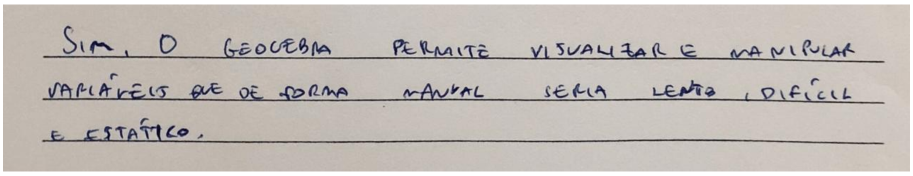
Fonte: o autor

Diante do exposto, embora um dos quatro professores cursistas tenha afirmando que ainda lhe restava dificuldades, analisamos como positiva as ferramentas apresentadas no minicurso ofertado, pois em sua resposta o professor se compromete a, a partir da participação no minicurso, dar mais aprofundamento em seus planos de aula contando com o GeoGebra como suporte. De acordo com Nogueira (2015), ferramentas tecnológicas, com as ferramentas do GeoGebra são de extrema importância ao ensino de funções, afinal dinamizam e facilitam o processo de ensino, portanto há a necessidade de tomarmos conhecimento das potencialidades que há nos recursos computacionais.

Na quinta questão do questionário posterior, buscamos investigar em quais assuntos do ensino de matemática e/ou física os professores cursistas tentarão abordar contando com o auxílio de algum recurso computacional, a opção de trabalhar funções básicas e as representações gráficas das funções esteve presente em todas as respostas, destacamos ainda as respostas: sistema cartesiano, geometria, trigonometria e matemática financeira. Portanto, analisamos como positiva o impacto que teve o minicurso quanto as novas possibilidades de abordagens de conteúdos matemáticos e/ou físicos contando com o auxílio do recurso computacional. Ainda sobre a potencialidade que há em aplicar os recursos computacionais junto ao ensino de forma geral e específico, para Nogueira (2015) é interessante o uso de recursos computacionais para progressão do ensino e de suas aplicações, em todos os anos do ensino médio, especificamente o autor, afirma que o ensino de funções básicas que é recorrente em outras áreas do conhecimento pode e é melhor assimilado a medida em que a visualização de tal objeto matemático é compreendido de maneira sistemática, proporcionada pelos recursos computacionais.

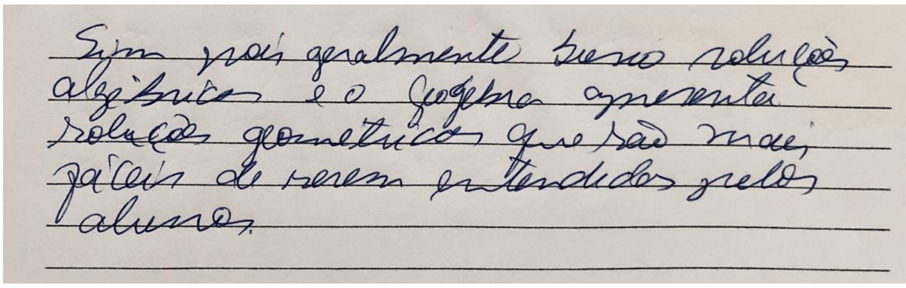
Na sexta questão do questionário posterior, buscamos investigar especificamente se os professores cursistas entenderam que o GeoGebra facilitou as resoluções das situações-problemas relacionadas a funções básicas apresentadas no minicurso, sendo que todos responderam que sim, conforme a figura 100, a figura 101, a figura 102 e a figura103.

Figura 100: Resposta do professor cursista 01, com relação a sexta pergunta do questionário posterior


SIM, O GEOGEBRA PERMITE VISUALIZAR E MANIPULAR VARIÁVEIS QUE DE FORMA MANUAL SERIA LENTO, DIFÍCIL E ESTÁTICO.

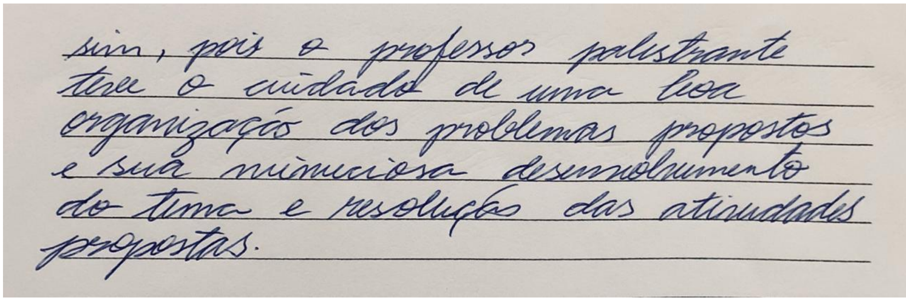
Fonte: o autor

Figura 101: Resposta do professor cursista 02, com relação a sexta pergunta do questionário posterior


Sim pois geralmente temos soluções algébricas e o Geogebra apresenta soluções geométricas que são mais fáceis de serem entendidos pelos alunos.

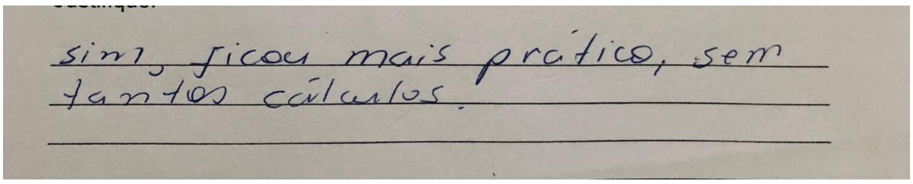
Fonte: o autor

Figura 102: Resposta do professor cursista 03, com relação a sexta pergunta do questionário posterior


sim, pois o professor palestrante teve o cuidado de uma boa organização dos problemas propostos e sua minuciosa desenvolvimento do tema e resoluções das atividades propostas.

Fonte: o autor

Figura 103: Resposta do professor cursista 04, com relação a sexta pergunta do questionário posterior

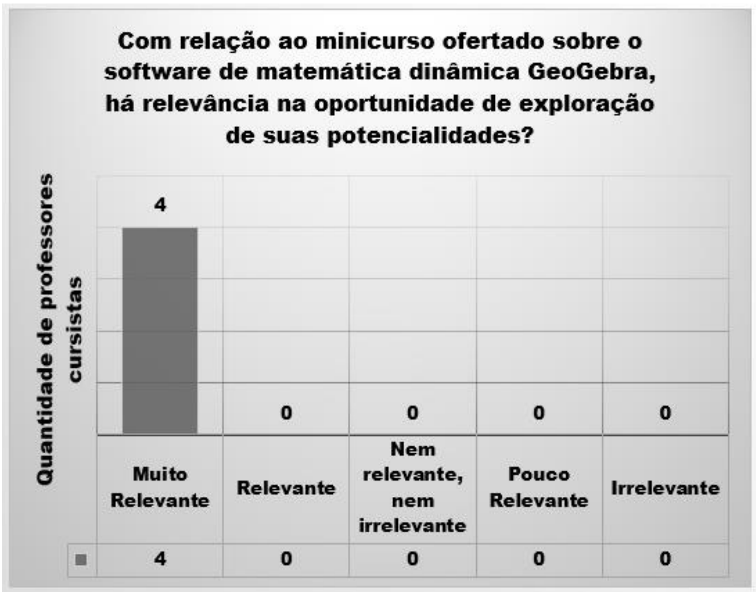

sim, ficou mais prático, sem tantos cálculos.

Fonte: o autor

Portanto, analisamos como positivo a apresentação de resoluções de situações-problemas envolvendo as funções básicas que o minicurso apresentou aos professores cursistas. Em conformidade aos resultados obtidos temos São Pedro (2015), o autor reitera que a utilização das tecnologias da informação e da comunicação em sala de aula pode ser de forma sutil a exemplo do traçado de um gráfico de função usando esquadros e papel milimetrado ou mais sofisticado, como a construção desse mesmo gráfico em um software específico. Diante disso, situações-problemas que tenham um caráter geométrico, podem ser resolvidas de forma tradicional, dando mais ênfase a parte algébrica e conferida a solução via recurso computacional com plotagem, e até mesmo a animação da representação gráfica envolvida na situação-problema.

Na sétima questão do questionário posterior, buscamos investigar houve relevância no minicurso sendo que todos responderam que houve muita relevância, conforme a figura 104, a seguir.

Figura 104: Gráfico com os resultados da relevância do minicurso ofertado

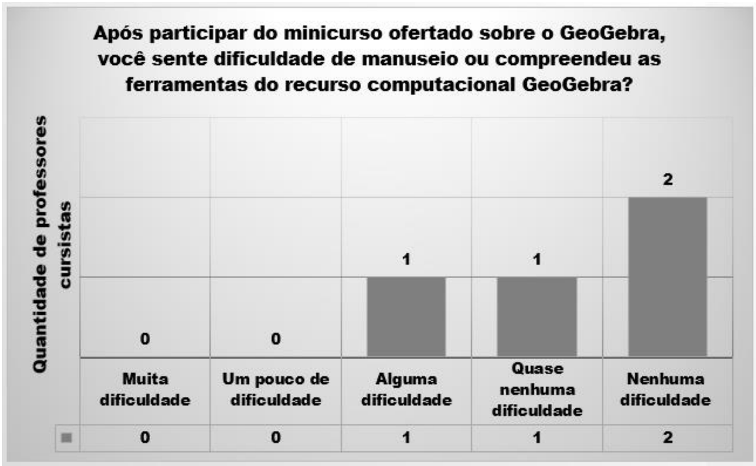


Fonte: o autor.

Esperávamos um resultado positivo afinal nos apropriando de Mileno (2015) contemporaneamente, praticamente todas as áreas do conhecimento usufruem da tecnologia que surgem para melhorar o ensino, assim é impossível imaginar a educação sem a utilização das tecnologias. Assim o uso dos recursos computacionais se torna valioso, aplicado de maneira correta, de modo a instigar mais e mais a busco pelo conhecimento por parte dos estudantes, tornando as aulas mais dinâmicas, motivadoras e atrativas. Especificamente, Ferreira (2016) reitera que a construção de diferentes gráficos, cada um mostrando a parte algébrica e geométrica é facilitada pelo GeoGebra, dando ao aprendiz o poder de testar hipóteses e verificar soluções dentro de pouco tempo.

Na oitava questão do questionário posterior, conforme a figura 105 a seguir, buscamos investigar se restaram dúvidas nas ferramentas apresentadas junto ao GeoGebra no minicurso sendo que um professor respondeu que sentia alguma dificuldade, um professor respondeu que sentia quase nenhuma dificuldade e dois professores responderam sentir nenhuma dificuldade, portanto analisamos como positivo a apresentação do minicurso e das ferramentas que nortearam a oficina.

Figura 105: Gráfico com a quantificação de aprendizado dos comandos ministrados junto ao minicurso



Fonte: o autor.

É inegável o impacto positivo que o software GeoGebra tem adicionado ao ensino tradicional de funções básicas, portanto é de extrema importância nos capacitarmos para utilizá-lo em sala de aula. O resultado da questão 08, o qual avaliamos como positivo enaltece o impacto positivo e a necessidade de buscarmos capacitação, pois de acordo com Ramos (2018) a aprendizagem de matemática é viabilizada ao estudante via recurso computacional em virtude dos diferentes recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente que essa ferramenta disponibiliza. Com isso, concluímos que com os recursos computacionais, junto ao ensino e aprendizagem de matemática se torna didaticamente vantajoso de ser apresentado, pois, ao mesmo tempo podemos expor diferentes representações, de um mesmo objeto, que interagem entre si.

12. CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

Desenvolver um projeto de pesquisa e uma dissertação certamente não são tarefas fáceis, por exigir planejamento, tempo e dedicação. Contudo a partir do desenvolvimento destas duas atividades construímos o conhecimento e tivemos uma visão mais ampla do ensino e aprendizado de função mediado pelo recurso computacional GeoGebra. Vencido o projeto de pesquisa, nesta etapa final da dissertação, tecemos considerações pertinentes sobre os objetivos propostos, os resultados alcançados, as limitações identificadas e perspectivas futuras de aplicação.

É oportuno elucidar que enaltecemos o principal agente de transmissão do conhecimento que é o professor. Pensando nisso, tornam-se necessários a capacitação e o desenvolvimento de meios que facilitem o ensino mediado pelo professor e que tenham um caráter mais atrativo ao aluno, neste contexto destacamos a utilização dos recursos computacionais.

Os recursos computacionais sugiram com o desenvolvimento de novas metodologias para ensino e aprendizado de matemática. Neste sentido, apresentamos uma trajetória de sucesso educacional que é o processo de ensino e aprendizado de funções básicas utilizando o software GeoGebra. O software GeoGebra foi escolhido como meio propulsor por ser gratuito, de fácil instalação e manuseio, multiplataforma e por dinamizar, por meio de controles deslizantes o ensino de matemática.

O principal objetivo da pesquisa foi desenvolver um minicurso, em dois encontros, no formato de oficina para professores da educação básica tratando o tema ensino e aprendizado de funções básicas utilizando o software GeoGebra. Durante o minicurso, destacamos o impacto positivo relatado pelos professores cursistas ao apresentarmos o dinamismo da representação gráfica de cada função abordada, o que demanda muito tempo se exercitado de modo tradicional apenas e as soluções de situações-problemas utilizando o software GeoGebra, dando ênfase a parte geométrica da resolução, como possibilidade de conferência da resolução algébrica.

Com a pesquisa e o minicurso ministrado, destacamos ainda o vasto horizonte educacional que pode ter se expandido, afinal, aos professores cursistas deixamos bem claro, que a intenção não era esgotar a aplicabilidade do software GeoGebra junto ao ensino de funções básicas. O que propomos de fato, foi uma nova metodologia encorajadora, no que compete ensinar e aprender matemática mediado por meio de um recurso computacional, que pode ser adaptada de acordo com o contexto de cada ambiente escolar e em vários níveis de ensino.

Como perspectiva futura, temos em mente tabular novos resultados junto ao PAEBES, dos alunos dos professores que cursaram o minicurso e que devidamente aplicaram a metodologia de ensino e aprendizado de matemática, contando com os recursos computacionais, como tratado no minicurso e posteriormente escrever um artigo mediado pelos resultados obtidos anterior ao minicurso e posteriormente, que se bem sucedido, pode até incentivar políticas públicas voltadas a capacitação de professores por meio de cursos de aperfeiçoamento constante.

Finalmente, inferimos que a proposta da pesquisa é de extrema relevância para o progresso da aprendizagem de matemática, evidenciado pelas considerações feitas pelos professores cursistas do minicurso, em que as funções básicas podem ser melhores compreendidas com a utilização por parte do professor do recurso computacional GeoGebra, possibilitando promover atratividade, motivação e entusiasmo por parte do aluno, numa dimensão mais ampla de entendimento, com relação ao que é explanado. Além do mais, nossa pesquisa se dispõe a futuras abordagens adaptadas e abertas a novos olhares para refletir e inovar a prática pedagógica em favor do ensino e da aprendizagem de matemática, numa esfera mais ampla.

REFERÊNCIAS

ALQUIMIM, Bruno César Magalhaes. Uma proposta do ensino de função quadrática utilizando o GeoGebra. PROFMAT, 2016. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94206>. Acesso em 18/06/2018.

ALVES, Luiz Fernando Giolo. Uma abordagem do estudo de cônicas e quadráticas com o auxílio do software GeoGebra. PROFMAT, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=84973> . Acesso em 17/09/2018.

ARAÚJO, João Francisco Medina. Uma complementação para o ensino do conceito de função, funções afins e funções quadráticas para o currículo da rede pública estadual de São Paulo. PROFMAT, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=772>. Acesso em 04/11/2017.

BITENCOURT, Rosely Rodrigues Rego. Aplicação do conceito de proporcionalidade a partir da engenharia didática. PROFMAT, 2017. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=95310>. Acesso em 05/11/2017.

BRASIL. Orientações curriculares para o ensino médio. v 2. Secretaria de Educação Básica. *Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf> . Acesso em: 01/06/2018.

BRASIL (2002). PCN+:ensino médio. Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Brasília. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em 04/06/2018.

CÂMARA, Maykel Samuel Marinho. Uma proposta de abordagem de trigonometria apresentando a função de Euler no espaço com o software geogebra. PROFMAT, 2018.

Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150250422>. Acesso em 13/08/2018.

CANAVEZI, Leandro Souza. Uma Proposta Lúdica com Utilização do GeoGebra Para o Estudo de Funções Quadráticas e Probabilidade Geométrica. PROFMAT, 2016. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94892>. Acesso em 18/09/2018.

CERQUEIRA, Luciano de Souza. Isomerias no plano: uma proposta de atividades para educação básica com o uso do GeoGebra. PROFMAT, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150140571>. Acesso em 17/09/2018.

COELHO, José Renato Paveis. O GeoGebra no Ensino das Funções Exponenciais. PROFMAT, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94815>. Acesso em 17/08/2018.

COSTA, Andressa Solane Moreira. A Utilização do GeoGebra Como Ferramenta Para o Ensino de Trigonometria. PROFMAT, 2017. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150371009>. Acesso em 19/09/2018.

CUNHA, Jaqueline de Fátima Vieira. Funções: proposta para o ensino na educação básica através do software GeoGebra e da resolução de problemas. PROFMAT, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150431192>. Acesso em 23/07/2018.

D'AMBRÓSIO, U. Da realidade à: reflexões sobre educação e Matemática. São Paulo: Summus; Campinas: Ed. Da Universidade Estadual de Campinas. 1986. 115 p.

LAGES, E. L. Números e Funções Reais: Coleção PROFMAT. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora e Gráfica DRQ LTDA, 2017. 3a reimpressão.

FERREIRA, Arnaldo Alves. Proposta de Ensino das Funções Afins e Quadráticas e Suas Derivadas Com o Auxílio de Geogebra. PROFMAT, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94187>. Acesso em 15/06/2018.

GIOVANNI, José Ruy., BONJORNO, José Roberto. Matemática: Uma nova abordagem, vol. 1: versão trigonométrica. 1. Ed. São Paulo: FTD, 2000.

IEZZI, Gelson. MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar**: volume 1.9. Ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar**: volume 2.9. Ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson., MURAKAMI, Carlos. **Conjuntos e funções:** exercícios resolvidos, exercícios propostos com resposta, testes de vestibular com resposta.7. Ed. São Paulo: Atual, 1993.

IEZZI, Gelson., DOLCE, Osvaldo., DEGENSZAJN, David., PÉRIGO, Roberto. **Matemática:** volume único. Ensino médio. 3. Ed. São Paulo: Atual, 2005.

IEZZI, Gelson., DOLCE, Osvaldo., TEIXEIRA, José Carlos., MACHADO, José Nilson., GOULART, Márcio Cintra., CASTRO, Luiz Roberto da Silveira., MACHADO, Antônio dos Santos. **Matemática:** 1ª série, Ensino médio. Ensino médio. 10. Ed. São Paulo: Atual, 1990.

JÚNIOR, Geraldo Lopes. Geometria Dinâmica com o GeoGebra no Ensino de Algumas Funções. PROFMAT, 2013. Disponível em: <http://www.locus.ufv.br/bitstream/handle/123456789/5877/texto%20completo.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 12/06/2018.

MILENO, Evandro. GeoGebra e as funções elementares que são no ensino médio. PROFMAT, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=78016>. Acesso em 02/11/2017.

MORAES, Carlene Fonseca de. Geometria analítica: explorando conceitos do ensino médio como uso de animações no GeoGebra. Ciência e Natura, v. 37 Ed. Especial PROFMAT,

2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94228>. Acesso em 02/06/2018.

NASCIMENTO, Eimard Gomes Antunes. Avaliação Do Uso do *Software* GeoGebra no Ensino de Geometria: Reflexão da Prática na Escola. **Conferencia Latinoamericana de GeoGebra**, Uruguay, v. único, p. Disponível em:<http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/67.pdf>. Acesso em 13/06/2018.

NOGUEIRA, Gabriel Leite. Uma proposta metodológica para estudo, modelagem e aplicações de funções afins (lineares), quadráticas e exponenciais com o uso do software GeoGebra no Ensino Médio. PROFMAT, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=79387>. Acesso em 04/11/2017.

PAIVA, Manoel. Coleção base: **Matemática:** volume único. 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2003.

PETLA, Revelino José. GeoGebra – Possibilidades para o Ensino de Matemática. **Unidade Didática**. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1419-6.pdf>. Acesso em 18/06/2018.

RAMOS, David Martins. Investigação do Uso de Ambientes Gráficos no Ensino de Funções Elementares no Ensino Médio: Explorando o Software GeoGebra. PROFMAT, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150301426>. Acesso em 17/09/2018.

RAYMUNDO, Alexandre. Et al. **CONEXÕES COM A MATEMÁTICA:** Volume único/ obra coletiva, concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. Editora executiva: Juliane Matsubara Barroso. (Vereda digital). 1. Ed. São Paulo: Editora Moderna, 2012.

ROCHA, Lúcia Andréia de Souza; POFFAL, Cristiana Andrade; MENEGHETTI, Cinthya Maria Schneider. A Utilização de Softewares no Ensino de Funções Quadráticas. Ciência e Natura, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, p. 19 – 35, 2015. Disponível em: <https://periodicos. ufsm.br/cienciaenatura/article/download/14226/pdf>. Acesso em 01/06/2018.

SÃO PEDRO, Márcio Dos Anjos. O Geogebra Como Uma Ferramenta No Processo De Escalonamento De Matrizes E Resolução De Sistemas Lineares. PROFMAT, 2016. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150140252>. Acesso em 02/11/2017.

SILVA, Circe Mary Silva da; LOURENÇO, Simone Torres; CÔGO, Ana Maria. *O ensino-aprendizagem da matemática e a pedagogia do texto*. Brasília: Plano Editora, 2004. 170 p.

SILVA, Luiz Fernando da. Usando o Software GeoGebra Para Explorar Funções Exponenciais e Logarítmicas: Uma Proposta de Aplicações. PROFMAT, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=27375>. Acesso em 18/09/2018.

SOUZA, Helena Tavares. Um Estudo com Professores do Ensino Médio sobre Funções Modulares por meio da Resolução de Problemas Utilizando o Software GeoGebra como Estratégia Pedagógica. Mestrado Profissional Em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2013. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/10955/1/Helena%20Tavares%20de%20Souza.pdf> . Acesso em 17/09/2018.

TORMA, Luciano da Silva. Funções trigonométricas no ensino médio: construindo uma paisagem utilizando o software Graphmatica. PROFMAT, 2018. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160680101>. Acesso em 13/08/2018.

YOUSSEF, Antônio Nicolau., SOARES, Elizabete., FERNANDEZ, Vicente Paz. Coleção base: **Matemática:** ensino médio, volume único. 1. Ed. São Paulo: Scipione, 2005.

APÊNDICE A – Questionário Anterior a Aplicação do Minicurso

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI - UFVJM

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSINAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

QUESTIONÁRIO ANTERIOR A APLICAÇÃO DO MINICURSO – CAPACITANDO PROFESSORES PARA A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO ENSINO E NA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMAS COM AS FUNÇÕES BÁSICAS

ORIENTADOR: PROFESSOR DOUTOR ALEXANDRE FAISSAL BRITO

ELABORADOR: FLAVIO RIBEIRO DA SILVA

TEÓFILO OTONI – MG E SÃO MATEUS – ES

2018

QUESTÃO 01: Qual seu grau de instrução?

a) Graduado.
b) Especializando.
c) Especialista.
d) Mestrando.
e) Mestre.
f) Doutorando.
g) Doutor.
h) Pós-doutorando.
i) Pós-doutor.

QUESTÃO 02: Quais as turmas que você trabalha?

a) Fundamental II.
b) Ensino Médio.
c) Fundamental II e ensino médio.

QUESTÃO 03: A quanto tempo você trabalha como educador?

a) Menos de um ano.
b) De 1 a 3 anos.
c) De 4 a 6 anos.
d) De 7 a 9 anos.
e) Mais de 10 anos.

QUESTÃO 04: Dos recursos computacionais listados abaixo, qual(is) você conhece?

a) Excel.
b) GeoGebra.
c) wxMaxima.
d) Outros. Quais?

QUESTÃO 05: Com relação ao papel desempenhado pelos recursos computacionais no ensino dos conteúdos matemáticos, você o considera:

a) Muito relevante.
b) Relevante.
c) Nem relevante, nem irrelevante.
d) Pouco relevante.
e) Irrelevante.

QUESTÃO 06: Com relação a explicação do assunto funções reais de variável real, assinale com um x a(s) alternativa(s) em que você já utilizou algum dos recursos computacionais:

a) (   ) Funções afins (polinomiais de 1º grau).
b) (   ) Funções quadráticas (polinomiais de 2º grau).
c) (   ) Funções modulares.
d) (   ) Funções exponenciais.
e) (   ) Funções logarítmicas.
f) (   ) Funções trigonométricas – onda senoidal.
g) (   ) Funções trigonométricas – onda cossenoidal.
h) (   ) Nunca usou os recursos computacionais na explicação de funções reais de variável real.

QUESTÃO 07: No ano passado, quantas vezes você empregou os recursos computacionais em suas aulas?

a) Nenhuma.
b) Entre uma e três vezes.
c) Entre quatro e seis vezes.
d) Entre seis e oito vezes.
e) Nove ou mais vezes.

QUESTÃO 08: Professor diante de sua ótica, você identifica vantagem em utilizar os recursos computacionais? Se sim quais? Se não, quais as dificuldades?

APÊNDICE B – Questionário Posterior a Aplicação do Minicurso

UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI - UFVJM
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSINAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

UFVJM PROFMAT

QUESTIONÁRIO POSTERIOR A APLICAÇÃO DO MINICURSO – CAPACITANDO PROFESSORES PARA A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO ENSINO E NA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMAS COM AS FUNÇÕES BÁSICAS

ORIENTADOR: PROFESSOR DOUTOR ALEXANDRE FAISSAL BRITO
ELABORADOR: FLAVIO RIBEIRO DA SILVA

TEÓFILO OTONI – MG E SÃO MATEUS – ES
2018

QUESTÃO 01: Após participar do minicurso sobre o GeoGebra utilizado no ensino funções e na resolução de situações-problemas, você identifica nos recursos computacionais a possibilidade de ampliar o ambiente ensino/aprendizagem de matemática? Justifique.

QUESTÃO 02: Após participar do minicurso sobre o GeoGebra utilizado no ensino funções e na resolução de situações-problemas, você se sente motivado a preparar suas aulas inserindo este recurso computacional? Respondendo sim, se possível, dívida conosco sua motivação.

QUESTÃO 03: Com relação ao minicurso sobre o GeoGebra utilizado no ensino de funções e na resolução situações-problemas ofertado, você o considera pertinente? Se sim, justifique.

QUESTÃO 04: Você sente dificuldades ao desenvolver atividades junto ao GeoGebra. Se sim, quais?

QUESTÃO 05: Em quais conteúdos do ensino de matemática e/ou física você consegue abordar contando com o auxílio de algum recurso computacional?

QUESTÃO 06: Com relação ao minicurso GeoGebra utilizado no ensino funções e na resolução de situações-problemas ofertado, a visualização das soluções das situações-problemas foi facilitada com o auxílio do recurso computacional? Justifique.

QUESTÃO 07: Com relação ao minicurso ofertado sobre o GeoGebra utilizado no ensinar funções e resolver situações-problemas, há relevância na oportunidade de exploração de suas potencialidades?

a) Muito relevante.

b) Relevante.

c) Nem relevante, nem irrelevante.

d) Pouco relevante.

e) Irrelevante.

QUESTÃO 08: Após participar do minicurso ofertado sobre o GeoGebra utilizado no ensinar funções e resolver situações-problemas, você sente dificuldade de manuseio ou não compreendeu as ferramentas do recurso computacional?

a) Muita dificuldade.
b) Um pouco de dificuldade.
c) Alguma dificuldade.
d) Quase nenhuma dificuldade.
e) Nenhuma dificuldade.

APÊNDICE C – Descrição e Principais Comandos do GeoGebra

O software livre multiplataforma de matemática dinâmica GeoGebra é de fato um dos recursos computacionais responsáveis pela modernização do processo de ensino e aprendizagem. Ele pode ser baixado gratuitamente, segundo o site www.geogebra.org, se possível para acompanhar a escrita deste trabalho, baixe e instale o GeoGebra, caso ainda não o tenha.

Ao abrir o software livre de matemática dinâmica GeoGebra no computador observamos o layout inicial que se divide em várias áreas. A atenção estará voltada a cinco destas áreas, conforme identificado na figura 106.

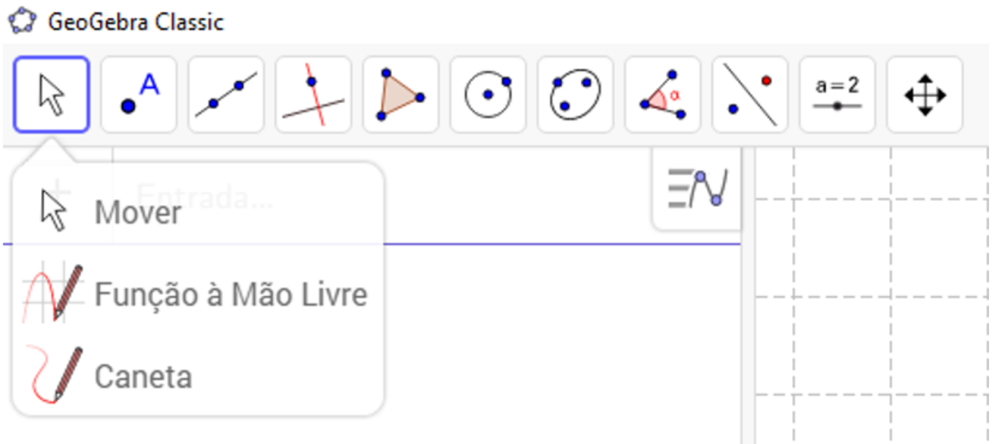
Figura 106: Layout de apresentação do software GeoGebra em sua interface inicial

Fonte: o autor

O campo de entrada é onde inserimos os comandos, a janela de álgebra é onde os comandos ficam registrados os comandos inseridos, na janela de visualização fica a representação gráfica de todos os comandos dados no campo de entrada, a janela de funções, com seus caracteres especiais viabiliza a escrita dos comandos junto ao campo de entra e finalmente, a caixa de ferramentas é um menu de ferramentas, a qual daremos mais ênfase, a seguir.

Ao posicionar o cursor do mouse sobre os ícones no canto superior esquerdo do visor, ou seja, na caixa de ferramentas, uma caixa de diálogo é aberta, apresentando a funcionalidade de cada comando a ser executado, conforme a figura 107.

Figura 107: Comando Mover, Função à Mão Livre e Caneta do software GeoGebra em sua interface inicial

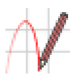


Fonte: o autor

Ainda sobre a figura 107, identificamos o primeiro comando na caixa de ferramenta que permite arrastar e largar objetos com o mouse, além de após selecionado, poder ainda excluir um objeto. Permite também por meio da ferramenta Função à Mão livre desenhar uma função ou um objeto geométrico, permite ainda por meio da ferramenta Caneta escrever, desenhar ou trocar a cor de um objeto usando a barra de estilos.

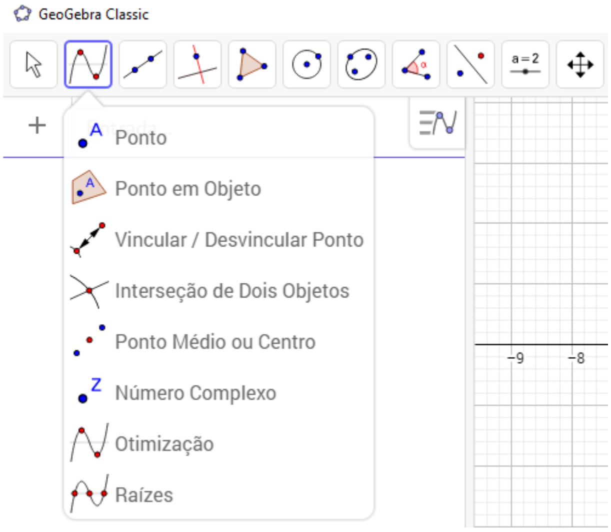
Segue a descrição detalhada das ferramentas do primeiro ícone da caixa de ferramentas:

 ferramenta Mover: a partir de um clique mantido com o mouse a ferramenta Mover move um objeto, podendo ainda arrastar e largar objetos na janela de visualização.

 ferramenta Função à mão livre: a ferramenta Função à mão livre permite o desenho de uma função ou um lugar geométrico, com um clique mantido, ambos arbitrários ou um objeto na janela de visualização.

 ferramenta Caneta: a ferramenta Caneta permite a escrita ou desenho na janela de visualização, que pode ter sua cor modificada usando a Barra de Estilo.

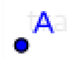
Figura 108: Comando Ponto do software GeoGebra em sua interface inicial

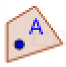


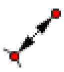
Fonte: o autor

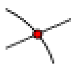
Na figura 108, identificamos segundo comando da caixa de ferramenta que possibilita a criação de um ponto, a associação de um ponto a um objeto, por meio de uma vinculação, há também a criação de um ponto identificando a interseção de duas curvas, o ponto médio ou centro e ainda as raízes de uma representação gráfica, a inserção de um número complexo e por fim auxilia na otimização dada a função.

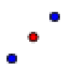
Segue a descrição detalhada das ferramentas do segundo ícone da caixa de ferramentas:

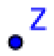
 ferramenta Ponto: A ferramenta Ponto permite a inserção de um ponto na janela de visualização com um clique do mouse.

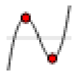
 ferramenta Ponto em Objeto: a ferramenta Ponto em Objeto permite a inserção de um ponto em um objeto na janela de visualização com um clique do mouse.

 ferramenta Vincular / Desvincular Ponto: a ferramenta Vincular / Desvincular Ponto permite a inserção de um ponto vinculado a um objeto na janela de visualização, bastando um clique com o mouse.

 ferramenta Interseção de Dois Objetos: a partir da seleção de duas curvas (ou retas) a ferramenta Interseção de Dois Objetos identifica a interseção de dois objetos.

 ferramenta Ponto Médio ou Centro: a partir da seleção de dois pontos ou um segmento a ferramenta Ponto Médio ou Centro identifica o ponto médio. Feita a seleção de um círculo ou uma cônica a mesma ferramenta identifica o centro.

 ferramenta Número Complexo: considerando o eixo das abscissas como a parte real e o eixo da ordenadas como sendo a parte imaginária do número complexo, a partir do clique na janela de visualização, a ferramenta Número Complexo identifica o número complexo.

 ferramenta Otimização: a partir da seleção de uma função a ferramenta Otimização identifica os pontos extremos da função selecionada.

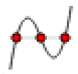
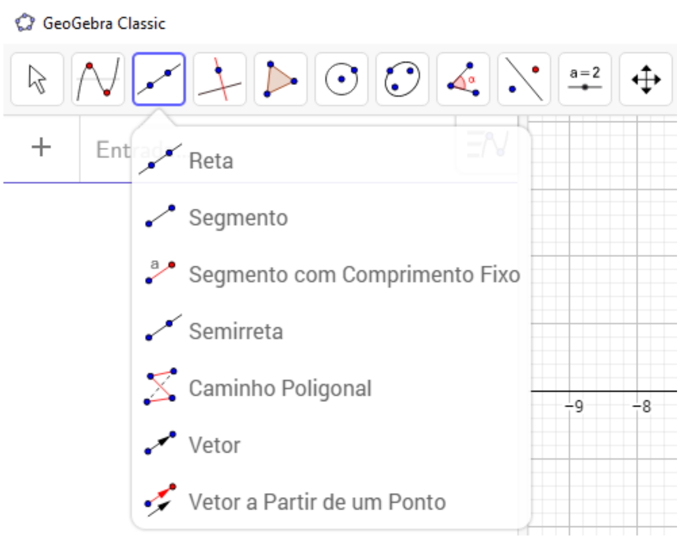
 ferramenta Raízes: a partir da seleção de uma função a ferramenta Raízes identifica a(s) interseção(ões) da representação gráfica da função com o eixo das abscissas.

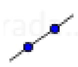
Figura 109: Comando Reta, Segmento de Reta e Vetor do software GeoGebra em sua interface inicial

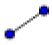


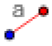
Fonte: o autor

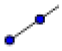
Na figura 109, identificamos o terceiro comando da caixa de ferramenta que possibilita criar uma reta que passe por dois pontos, um segmento de reta que dado seu ponto inicial e final, um segmento de reta de comprimento fixo, uma semirreta com origem em um ponto e passando por outro ponto dado, um caminho poligonal dados os pontos, um vetor dado por dois pontos e finalmente um vetor a partir de um ponto.

Segue a descrição detalhada das ferramentas do terceiro ícone da caixa de ferramentas:

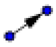
 ferramenta Reta: a ferramenta Reta exibe uma reta a partir de dois cliques na janela de visualização.

 ferramenta Segmento: a partir da seleção de dois cliques na janela de visualização, a ferramenta Segmento exibe um segmento de reta contendo os dois pontos.

 ferramenta Segmento de comprimento fixo: a partir de um clique na janela de visualização e da inserção de um comprimento a ferramenta segmento de comprimento fixo identifica um segmento de reta com o comprimento estabelecido.

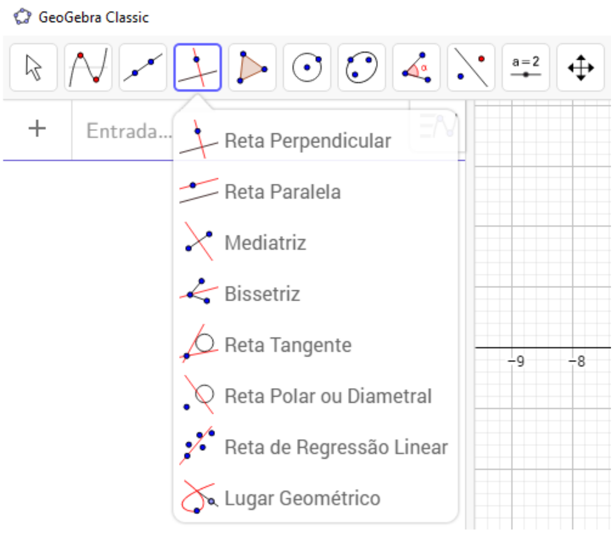
 ferramenta Semirreta: a partir de dois cliques na janela de visualização a ferramenta Semirreta identifica uma semirreta contendo os dois pontos, com a origem no primeiro ponto.

 ferramenta Caminho Poligonal: a partir da inserção de pontos no plano cartesiano a ferramenta Caminho Poligonal exibe um caminho poligonal passando pelos pontos estabelecidos na janela de visualização.

 ferramenta Vetor: a ferramenta Vetor permite a inserção de um vetor, a partir de um clique na janela de visualização, tornando-se a origem e um segundo clique também na janela de visualização sendo a extremidade do vetor.

 ferramenta Vetor a Partir de um Ponto: estabelecidos um ponto e um vetor na janela de visualização, a ferramenta Vetor a Partir de um Ponto permite a inserção de um novo vetor, selecionando um ponto que será a origem do vetor estabelecido, o novo vetor terá as mesmas características que o vetor estabelecido no plano.

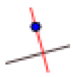
Figura 110: Comando Reta Perpendicular, Reta Paralela, Mediatriz, Bissetriz, Reta Tangente, Reta Polar, Regressão Linear e Lugar Geométrico do software GeoGebra em sua interface inicial

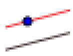


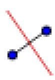
Fonte: o autor

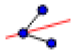
Na figura 110, identificamos o quarto comando da caixa de ferramenta que possibilita criar um reta perpendicular a uma reta dada a partir de um ponto dado, um reta paralela a uma reta dada a partir de um ponto dado, a mediatriz feita a seleção de dois pontos ou segmentos, a bissetriz a partir da seleção de dois pontos ou duas retas, a reta tangente por meio da seleção de um ponto e na sequência, um círculo, uma cônico ou uma função, uma reta polar ou diametral por meio da seleção de um ponto ou uma reta e, depois, um círculo ou uma cônica, uma reta de regressão linear por meio da seleção de vários pontos ou uma lista de pontos e finalmente um lugar geométrico a partir da seleção do ponto do lugar geométrico e, na sequência, o ponto sobre o objeto ou o controle deslizante.

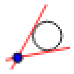
Segue a descrição detalhada das ferramentas do quarto ícone da caixa de ferramentas:

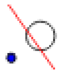
 ferramenta Reta Perpendicular: a partir da seleção de um ponto e um reta (ou um segmento, ou semirreta, ou vetor) a ferramenta Reta Perpendicular cria uma nova reta perpendicular a reta (ou um segmento, ou semirreta, ou vetor) passando pelo ponto selecionado.

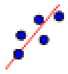
 ferramenta Reta Paralela: a partir da seleção de um ponto e um reta (ou um segmento, ou semirreta, ou vetor) a ferramenta Reta Paralela cria uma nova reta paralela a reta (ou um segmento, ou semirreta, ou vetor) passando pelo ponto selecionado.

 ferramenta Mediatriz: a partir da seleção de dois pontos na janela de visualização a ferramenta Mediatriz permite a inserção da mediatriz entre eles.

 ferramenta Bissetriz: a partir da seleção de três pontos ou duas retas na janela de visualização, a ferramenta Bissetriz exibe a bissetriz entre os três pontos ou as duas retas.

 ferramenta Reta Tangente: a partir da seleção de um ponto e um círculo (ou uma cônica ou uma função) na janela de visualização a ferramenta Reta Tangente exibe a reta tangente entre os elementos selecionados.

 ferramenta Reta Polar ou Diametral: a partir da seleção de um ponto e uma reta ou um círculo, ou ainda, uma cônica, na janela de visualização a ferramenta Reta Polar ou Diametral exibe a reta diametral.

 ferramenta Reta de Regressão Linear: a partir da seção de um conjunto de pontos dados na janela de visualização, a ferramenta Reta de Regressão Linear exibe a melhor reta que se ajusta aos pontos.

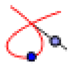
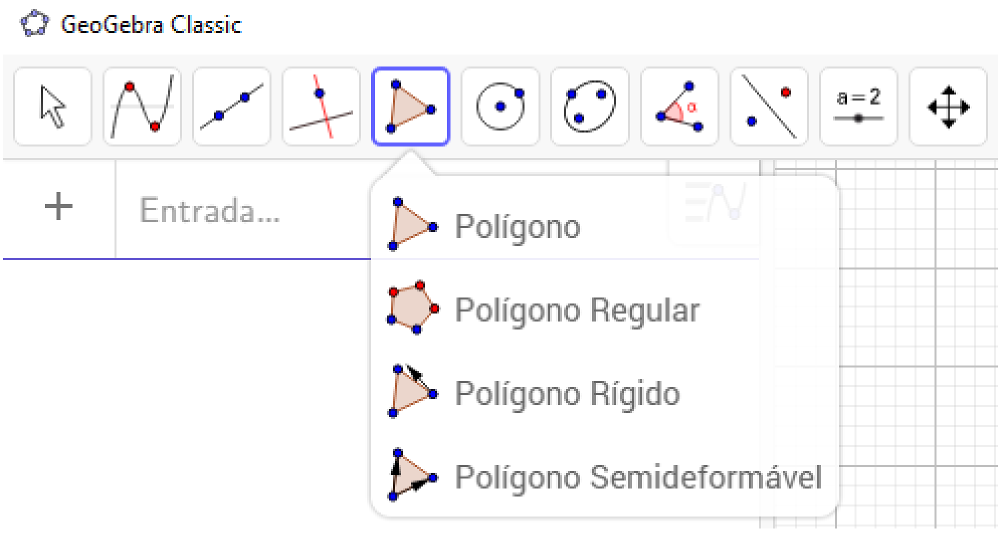
 ferramenta Lugar Geométrico: a partir da seleção de um ponto do lugar geométrico e do ponto sobre um objeto ou um controle deslizante na janela de visualização, a ferramenta Lugar Geométrico exibe o lugar geométrico descrito pelo movimento do ponto no objeto ou pela animação do controle deslizante.

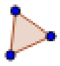
Figura 111: Comando Polígono do software GeoGebra em sua interface inicial

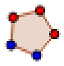


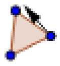
Fonte: o autor

Na figura 111, identificamos o quinto comando da caixa de ferramenta que possibilita criar um polígono a partir da seleção de todos os vértices e da seleção novamente do vértice inicial, podemos criar também um polígono regular a partir da seleção de dois pontos e do número de vértice, permite criar um polígono rígido a partir da seleção de todos os vértices e da seleção novamente do vértice inicial ou a seleção de um polígono, permite ainda criar um polígono semideformável a partir da seleção de todos os vértices e da seleção novamente do vértice inicial.

Segue a descrição detalhada das ferramentas do quinto ícone da caixa de ferramentas:

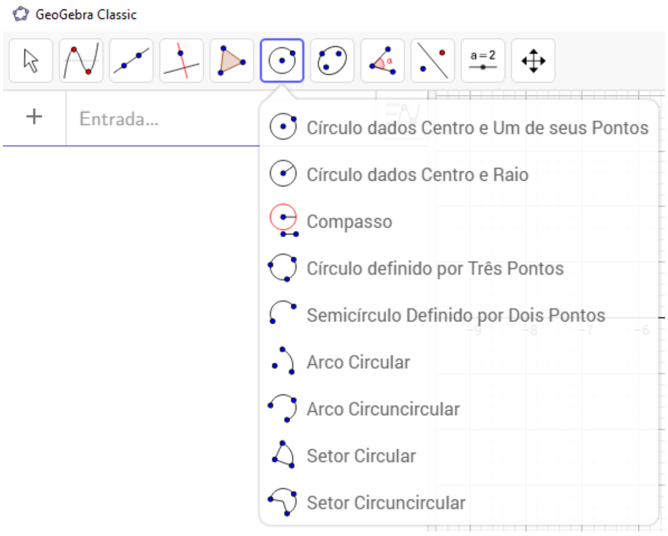
 ferramenta Polígono: a partir da seleção de três ou mais pontos retomando a seleção do ponto inicial na janela de visualização, a ferramenta Polígono exibe um polígono com vértices nos pontos selecionados.

 ferramenta Polígono Regular: a partir da seleção de dois pontos existentes na janela de visualização e da inserção da quantidade de vértices, a ferramenta Polígono Regular exibe um polígono regular.

 ferramenta Polígono Rígido: a ferramenta Polígono Regular exibe um polígono rígido a partir da seleção de três ou mais pontos e da seleção ponto inicial ou da seleção de um polígono já existente.

 ferramenta Polígono Semideformável: a ferramenta Polígono Semideformável exibe um polígono deformável a partir da seleção de três ou mais pontos na janela de visualização e da seleção do ponto inicial novamente.

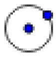
Figura 112: Comando Círculo, Setor Circular, Setor Circuncircular, Arco Circular e Arco Circuncircular do software GeoGebra em sua interface inicial

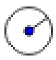


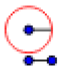
Fonte: o autor

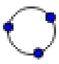
Na figura 112, identificamos o sexto comando da caixa de ferramenta que possibilita criar círculos dados o centro e um de seus pontos, dado o centro e a medida do raio, dado um segmento ou dois pontos para definir o raio e depois o centro, dado três pontos, permite criar um semicírculo definido por dois pontos, um arco circular definido o centro e depois dois pontos, um arco circular a partir de três pontos, um setor circular a partir do centro e de dois pontos e finalmente um setor circuncircular definido por três pontos dados.

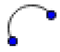
Segue a descrição detalhada das ferramentas do sexto ícone da caixa de ferramentas:

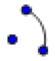
 ferramenta Círculo dados Centro e Um de seus Pontos: a ferramenta Círculo dados Centro e Um de seus Pontos exibe um círculo a partir de dois cliques na janela de visualização, representando respectivamente o centro e um dos pontos do círculo.

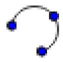
 ferramenta Círculo dados Centro e Raio: a ferramenta Círculo dados Centro e Raio exibe um círculo a partir de um clique na janela de visualização e da inserção do valor do raio.

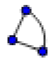
 ferramenta Compasso: dado um segmento existente na janela de visualização, a partir de sua seleção a ferramenta Compasso exibe um círculo com o raio de mesma medida que o segmento e um clique final para determinar o centro.

 ferramenta Círculo Definido por Três Pontos: a ferramenta Círculo Definido por Três Pontos exibe um círculo a partir de três cliques na janela de visualização.

 ferramenta Semicírculo Definido por Dois Pontos: a ferramenta Semicírculo Definido por Dois Pontos exibe um semicírculo a partir de dois cliques na janela de visualização.

 ferramenta Arco Circular: a ferramenta Arco Circular exibe um arco circular a partir de três cliques na janela de visualização.

 ferramenta Arco Cincucircular: a ferramenta Arco Cincucircular exibe um arco circuncircular a partir de três cliques na janela de visualização.

 ferramenta Setor Circular: a ferramenta Setor Circular exibe um setor circular a partir de três cliques na janela de visualização.

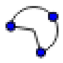
 ferramenta Setor Circucircular: a ferramenta Setor Circucircular exibe um setor circuncircular a partir de três cliques na janela de visualização.

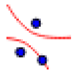
Figura 113: Comando Cônicas do software GeoGebra em sua interface inicial

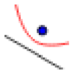
Fonte: o autor

Na figura 113, identificamos o sétimo comando da caixa de ferramenta que possibilita criar elipses a partir de dois focos dados e um dos pontos da elipse, hipérbole a partir de dois focos dados e um dos pontos da hipérbole, parábolas a partir da seleção de um foco e depois da diretriz e finalmente cônicas por cinco pontos, a partir da seleção dos cinco pontos.

Segue a descrição detalhada das ferramentas do sétimo ícone da caixa de ferramentas:

 ferramenta Elipse: a ferramenta Elipse exibe uma elipse a partir de dois cliques na janela de visualização representando os focos e um novo clique que será um ponto da elipse.

 ferramenta Hipérbole: a ferramenta Hipérbole exibe uma hipérbole a partir de dois cliques na janela de visualização representando os focos e um novo clique que será um ponto da hipérbole.

 ferramenta Parábola: dado um segmento de reta ou uma reta na janela de visualização, a ferramenta Parábola exibe uma parábola, a partir de um clique e da seleção do segmento de reta ou da reta na janela de visualização que serão, respectivamente o foco e a diretriz da parábola.

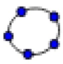
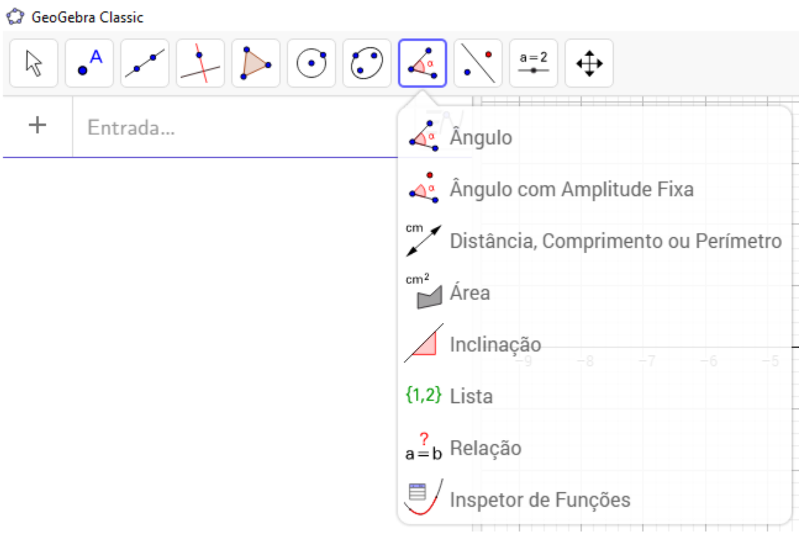
 ferramenta Cônica por Cinco Pontos: a ferramenta Cônica por Cinco Pontos exibe uma cônica (parábola, hipérbole ou elipse) a partir de cinco cliques na janela de visualização.

Figura 114: Comando Ângulo, Distância, Comprimento ou Perímetro, Área, Inclinação, Lista, Relação e Inspetor de funções do software GeoGebra em sua interface inicial



Fonte: o autor

Na figura 114, identificamos o oitavo comando da caixa de ferramenta que possibilita criar ângulos, a partir da seleção de três pontos ou duas retas, ângulos com amplitude fixa, a partir da seleção de um ponto, um vértice do ângulo e uma amplitude para o ângulo, distâncias, comprimentos ou perímetros a partir da seleção de dois pontos ou um segmento ou um polígono ou um círculo, áreas a partir da seleção de um polígono, ou um círculo ou ainda uma elipse, determinar a inclinação a parti da seleção de uma reta (ou semirreta ou segmento), criar uma lista a partir da seleção de células e, então, clique no botão da ferramenta, relacionar objetos, a partir da seleção dos objetos, e inspecionar uma função a partir da seleção de uma função.

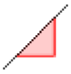
Segue a descrição detalhada das ferramentas do oitavo ícone da caixa de ferramentas:

 ferramenta Ângulo: a ferramenta Ângulo exibe e quantifica, em graus, um ângulo a partir de três cliques na janela de visualização, sendo o segundo clique definido como o vértice do ângulo.

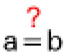
 ferramenta Ângulo com Amplitude Fixa: a ferramenta Ângulo com Amplitude Fixa exibe, em graus, um ângulo a partir de dois cliques na janela de visualização representando um ponto do ângulo e o vértice e da inserção da amplitude para o ângulo.

ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro: a partir de dois pontos na janela de visualização, a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro mede a distância entre eles.

ferramenta Área: a ferramenta Área exibe o valor da área, a partir da seleção de um polígono, círculo ou elipse na janela de visualização.

 ferramenta Inclinação: dada uma reta ou um segmento na janela de visualização, após selecionado, a ferramenta Inclinação exibe o valor da inclinação em relação ao eixo das abscissas no plano cartesiano.

ferramenta Lista: a ferramenta Lista permite a partir, de um clique e o arraste formando um retângulo sobre os objetos na janela de visualização, a criação de uma lista com objetos (pontos, segmentos de reta, polígonos, vetores, entre outros).



ferramenta Relação: a partir da seleção de dois objetos na janela de visualização, a ferramenta Relação verifica a relação entre os dois.

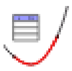
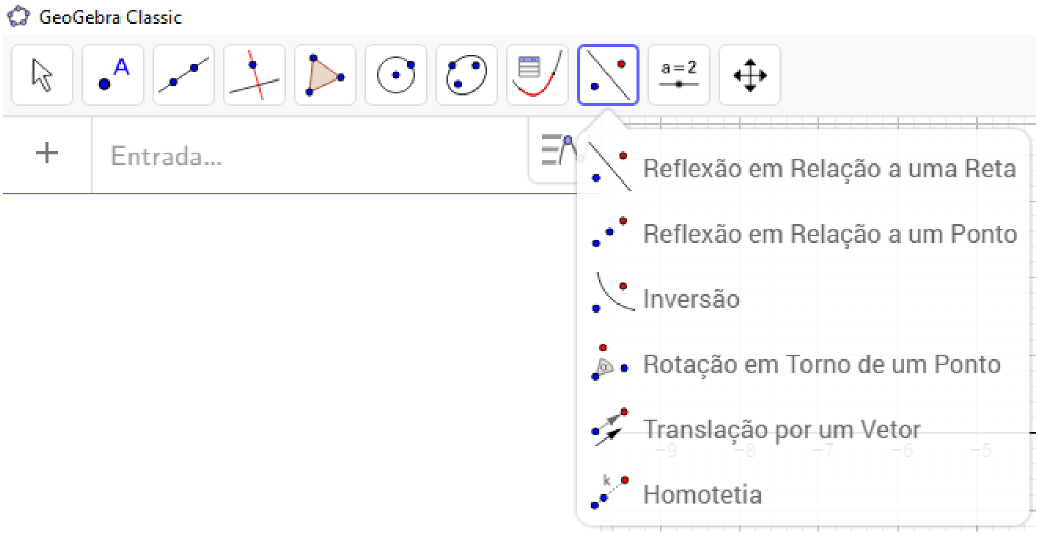
 ferramenta Inspetor de Funções: a partir de uma função dada na janela de visualização, a ferramenta Inspetor de Funções quando acionada fornece vários dados sobre a função no intervalo como: valor de máximo, valor de mínimo, raiz, integral, área, entre outros.

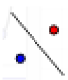
Figura 115: Comando Ângulo, Distância, Comprimento ou Perímetro, Área, Inclinação, Lista, Relação e Inspetor de funções do software GeoGebra em sua interface inicial

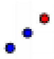


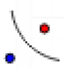
Fonte: o autor

Na figura 115, identificamos o nono comando da caixa de ferramenta que possibilita criar reflexões em relação a uma reta a partir da seleção do objeto e depois da reta, reflexões em relação a um ponto a partir da seleção do objeto e depois da seleção do centro de reflexão, inversões a partir da seleção do objeto e depois da seleção do círculo, rotações em torno de um ponto a partir da seleção do objeto, depois o centro e, então, o ângulo de rotação, translações por um vetor a partir da seleção do objeto a ser transladado e, depois, um vetor e finalmente homotetia a partir da seleção do objeto, depois o centro e, então, a razão de homotetia.

Segue a descrição detalhada das ferramentas do nono ícone da caixa de ferramentas:

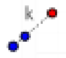
 ferramenta Reflexão em Relação a uma Reta: a partir de um clique em um objeto, seleção de uma reta ou segmento de reta na janela de visualização, a ferramenta Reflexão em Relação a uma Reta fornece a reflexão do objeto em relação a reta ou segmento selecionado.

 ferramenta Reflexão em Relação a um Ponto: a partir da seleção de um objeto e de um ponto na janela de visualização, a ferramenta Reflexão em Relação a um Ponto exibe a reflexão deste objeto em relação ao ponto selecionado.

 ferramenta Inversão: a partir da seleção de um objeto e de um círculo na janela de visualização a ferramenta Inversão inverte o objeto em relação ao círculo selecionado.

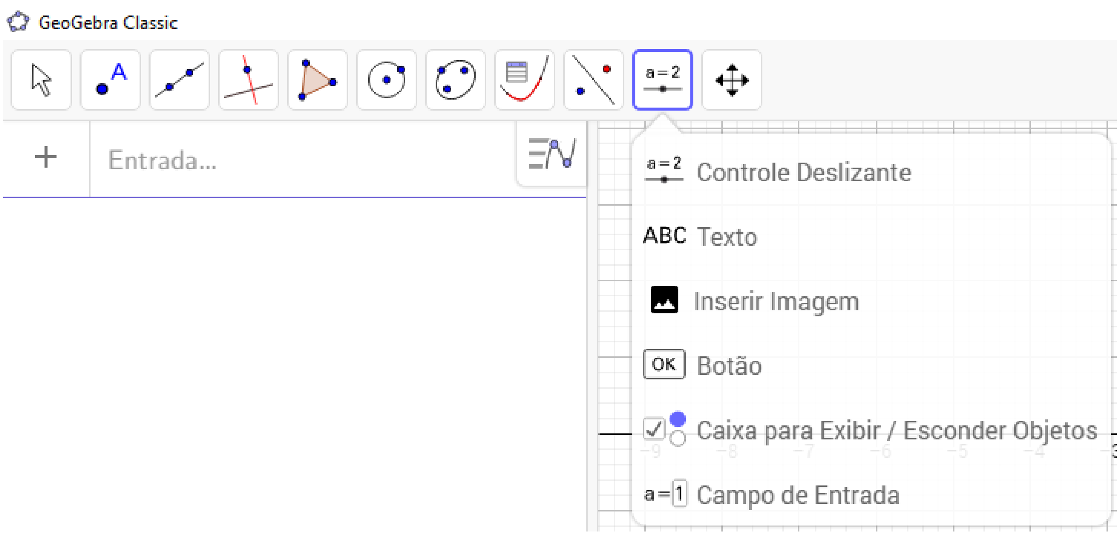
 ferramenta Rotação em Torno de um Ponto: a partir da seleção do objeto, de um ponto na janela de visualização e da inserção do valor em graus da rotação, a ferramenta Rotação em Torno de um Ponto rotaciona o objeto em questão de acordo com as especificações.

 ferramenta Translação por um Vetor: a partir da seleção de um objeto e de um vetor na janela de visualização, a ferramenta Translação por um Vetor translada o objeto, criando um novo objeto de acordo com a direção, módulo e sentido do vetor selecionado.



ferramenta Homotetia: a partir da seleção de um objeto, do centro (ambos na janela de visualização) e da inserção da razão da homotetia (fator multiplicativo), a ferramenta Homotetia cria um novo objeto de acordo com os dados inseridos.

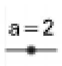
Figura 116: Controle Deslizante, Texto, Inserir Imagem, Botão, Caixa Para Exibir/ Esconder Objeto e Campo de Entrada do software GeoGebra em sua interface inicial



Fonte: o autor

Na figura 116, identificamos o décimo comando da caixa de ferramenta que possibilita a inserção de controles deslizantes, a inserção de um texto num ponto ou região, a inserção de imagens, a inserção de botões, a inserção de caixas para exibir ou esconder objetos e finalmente campos de entrada.

Segue a descrição detalhada das ferramentas do décimo ícone da caixa de ferramentas:



ferramenta Controle Deslizante: a partir de um clique na janela de visualização, a ferramenta Controle Deslizante permite a inserção de um controle deslizante na janela de visualização, usado para determinar o valor do objeto, podendo ainda ser nomeado e limitado inferior e superiormente.

 ferramenta Texto: a partir de um clique na janela de visualização, a ferramenta Texto permite a inserção de texto na janela de visualização, bem como, fórmulas estáticas e dinâmicas em LaTeX.

 ferramenta Inserir Imagem: a ferramenta Inserir Imagem permite a inserção de uma imagem na janela de visualização.

 ferramenta Botão: a ferramenta Botão permite a inserção de um botão que poderá ser combinado a outros comandos, como iniciar animação, esconder / exibir objetos entre outros.

 ferramenta Caixa para Exibir / Esconder Objetos: a ferramenta Caixa para Exibir / Esconder Objetos cria um campo onde será possível exibir ou esconder objetos na janela de visualização, a partir da seleção dos objetos e configura para exibição ou não.

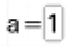
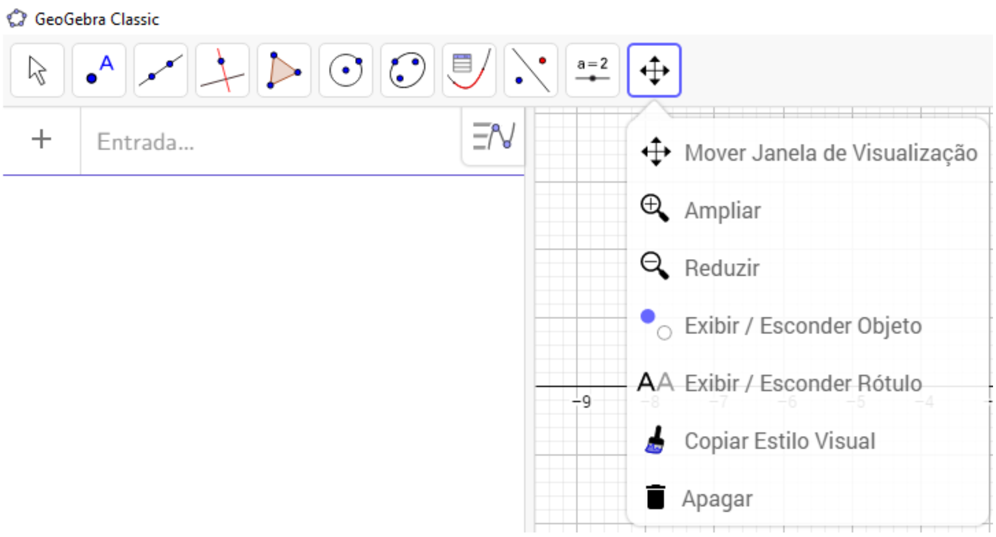
 ferramenta Campo de Entrada: a ferramenta Campo de Entrada cria um campo de entrada vinculado a uma variável, em que o usuário poderá alterar os valores inseridos.

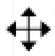
Figura 117: Comando Mover Janela de Visualização, Ampliar, Reduzir, Exibir / Esconder Objeto, Exibir / Esconder Rótulo, Copiar Estilo Visual e Apagar do software GeoGebra em sua interface inicial



Fonte: o autor

Na figura 117, identificamos o décimo primeiro comando da caixa de ferramenta que possibilita mover a janela de visualização a partir de um clique e o arraste ou então mover um dos eixo com (shift + arrastar), ampliação a partir do clique no botão, por passos análogos é possível a redução, é possível esconder ou exibir objetos, esconder ou exibir rótulos, copiar estilo visual a partir do clique no objeto modelo, e em seguida, naquele(s) cujo estilo pretende alterar e finalmente apagar objetos a partir da seleção do objeto que objetiva apagar.

Segue a descrição detalhada das ferramentas do décimo primeiro ícone da caixa de ferramentas:

 ferramenta Mover Janela de Visualização: a ferramenta Mover Janela de Visualização permite, a partir de um clique mantido, o arraste da janela de visualização ou de um eixo.

 ferramenta Ampliar: a ferramenta Ampliar permite a expansão da janela de visualização a partir de um clique, podendo ser acionada também por meio da roda do mouse.

 ferramenta Reduzir: a ferramenta Reduzir permite a redução da janela de visualização a partir de um clique, podendo ser acionada também por meio da roda do mouse.

 ferramenta Exibir / Esconder Objeto: a ferramenta Exibir / Esconder Objeto permite, a partir da seleção de um objeto ou mais objetos na janela de visualização, permite exibição ou ocultação temporária ou permanente.

 ferramenta Exibir / Esconder Rótulo: a ferramenta Exibir / Esconder Rótulo permite, a partir da seleção de um objeto ou mais objetos na janela de visualização, permite a exibição ou ocultação do rótulo temporariamente ou permanentemente.

 ferramenta Copiar Estilo Visual: a ferramenta Copiar Estilo Visual permite copiar o estilo visual de um objeto para outro objeto ou para vários objetos na janela de visualização, bastando selecionar o objeto a ser copiado e depois clicar no objeto ou nos objetos que receberá ou receberão a mesma formatação visual do objeto selecionado inicialmente.

 ferramenta Apagar: a ferramenta Apagar permite apagar qualquer objeto, bastando um clique no objeto na janela de visualização a ser apagado.

APÊNDICE D – Teoria Geral das Funções Reais de Variável Real

Neste apêndice apresentamos a teoria geral das funções reais de variável real, pois essa teoria norteia os casos particulares das relações matemáticas definidos como funções reais de variável real, aplicado ao ensino médio. Iniciamos com as noções preliminares, definimos funções reais de variável real, definimos ainda domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função real, tratamos minunciosamente do plano cartesiano e da representação gráfica das funções reais de variável real. Falamos ainda, finalizando o capítulo sobre funções compostas e funções inversas.

O conteúdo deste apêndice que apresenta definições, fórmulas e gráficos de funções foi baseado nas seguintes referências: (CUNHA, 2017), (GIOVANNI; BONJORNO, 2000), (IEZZI; MURAKAMI, 1993), (IEZZI; MURAKAMI, 2013), (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2013), (IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PÉRIGO, 2005), (IEZZI; DOLCE; TEIXEIRA; MACHADO; GOULART; CASTRO; MACHADO, 1990), (PAIVA, 2003) E (YOUSSEF, 2005).

1. Noções Preliminares de Teoria Geral das Funções Reais de Variável Real

Inicialmente, sem a formalidade matemática, apresentamos algumas situações-problemas para o entendimento de funções e suas aplicações cotidianas.

O custo do valor pago no talão, correspondendo ao consumo mensal de água.

O valor pago em um restaurante, pela massa da comida ingerida.

O crescimento de uma colônia de bactérias, em função, do tempo.

A quantidade de litros de combustível gasto em uma viagem e a quantidade total de quilômetros percorridos.

Verificamos que há um desenvolvimento de uma grandeza, a partir, de outra. Essa é a ideia básica, a respeito de função.

2. Definição de Teoria Geral das Funções Reais de Variável Real

Formalmente, temos: Dados dois conjuntos A e B de número(s) real(is), de maneira que A e B sejam conjuntos não vazios, uma relação (correspondência) f de A em B recebe o nome de função real de variáveis reais de A em B ou função real de variáveis reais definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo elemento a do conjunto A existe um único elemento b do conjunto B, ao passo que o par ordenado $(a\,;b)$ pertencerá a função f.

Em símbolos:

$$f \text{ é } uma\ função\ de\ A\ com\ imgens\ em\ B\ (f{:}\,A \to B) se\ e\ somente\ se, \forall\ a \in A, \exists\ um\ \text{único}\ b \in B, tal\ que\ (x\,;y) \in B$$

$$f: A \to B$$
$$y = f(x)$$

Cada elemento a, do conjunto A, pertencerá ao conjunto denominado domínio da função e o conjunto dos valores correspondentes b, elementos do conjunto B, contradomínio da função real f, que se associam a a, são chamados imagem da função.

Assim sendo, concluímos que o conjunto A é o domínio da função real f e que o conjunto imagem é um subconjunto do conjunto B, o conjunto B é definido como contradomínio da função real de variável real f. Segue, descritivamente, cada definição.

3. Domínio, Contradomínio e Conjunto Imagem de uma Função Real de Variável Real

3.1. Domínio de uma Função Real de Variável Real

Dada uma função real com imagens reais $f: A \to B$, definimos como domínio o conjunto A dos elementos que apresentam uma correspondência com um elemento do conjunto B. Representamos o domínio de uma função real com imagens reais $f: A \to B$ por $D(f) = A$. De fato, $D(f) = \{x \in \mathbb{R}, tal\ que,\ f(x) \in \mathbb{R}\}$.

3.2. Contradomínio

Dada uma função real com imagens reais $f: A \to B$, definimos como contradomínio o conjunto B dos elementos que ficam à disposição para serem ou não correspondentes, de um ou mais elementos do conjunto A. Representamos o contradomínio de uma função real com imagens reais $f: A \to B$ por $CD(f) = B$. De fato, $CD(f) = \mathbb{R}$.

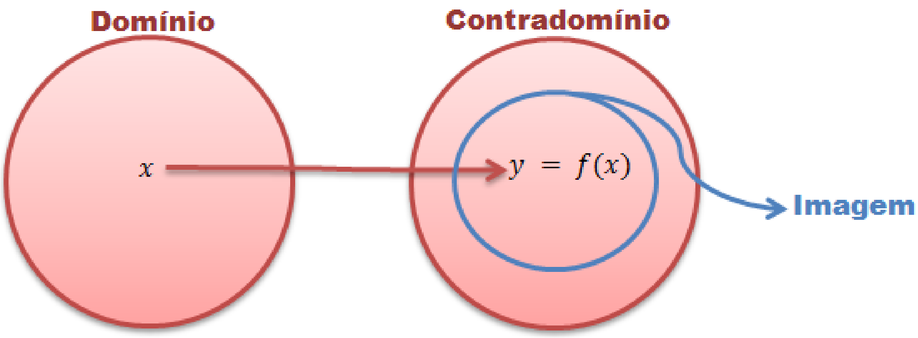
3.3. Conjunto Imagem

Dada uma função real com imagens reais $f: A \to B$, definimos como conjunto imagem, o conjunto dos elementos de B que recebem alguma correspondência de um ou mais elementos do domínio. Representamos o conjunto imagem de uma função real com imagens reais $f: A \to B$ por $Im(f)$ e sabemos que $Im(f) \subset CD(f)$.

O elemento x do conjunto A, da lei de correspondência da função, é denominado variável independente, pelo fato de poder assumir valores diferentes. Já o elemento y do conjunto B, recebe o valor, verificando a lei de correspondência, imposta pela função, e o valor assumido por x – a variável independente. Logo, chamamos y, de variável dependente, pois depende do valor assumido por x.

A seguir, a representação por meio do esquema de flechas, ilustrando domínio, contradomínio e conjunto imagem mostrada na figura 118.

Figura 118: Ilustração de domínio, contradomínio e conjunto imagem de funções reais de variáveis reais



Fonte: o autor

4. Par Ordenado

Estudo desenvolvido por René Descartes, a partir, da associação da geometria à álgebra, com a finalidade de representar graficamente as expressões algébricas. As correspondências entre x e y propiciadas pela função real gera individualmente, pares denominados, pares ordenados. Para os pares ordenados, são preservadas as seguintes propriedades:

No par ordenado $(a; b)$ tem-se que a, o primeiro elemento, representa a variável independente, pertencente ao primeiro conjunto, denominado abscissa. O segundo elemento b, é a variável dependente, pertencente ao segundo conjunto, denominado ordenada.

$(a; b) = (c; d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

$(a; b) = (b; a)$ se, e somente se, $a = b$.

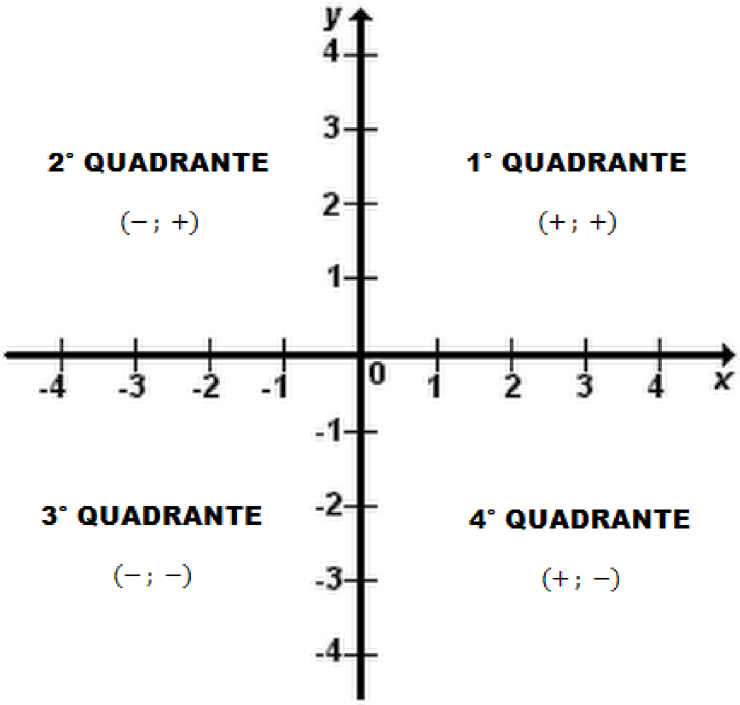
5. Plano Cartesiano – Noções Básicas

No plano cartesiano, as funções são representadas graficamente. Nesta representação verificamos as seguintes definições:

No par ordenado $(x\,; y)$, os valores assumidos por cada elemento x, elemento do conjunto A, são associados ao eixo horizontal X, que é o eixo das abcissas.

A lei de correspondência, que é a lei de associação (a sentença matemática) de cada elemento x, elemento do conjunto A, ao elemento y, elemento do conjunto B, são associados ao eixo vertical Y, que é o eixo das ordenadas. A disposição dos quadrantes, bem como seus sinais, obedece ao esquema representado na figura 119, a seguir.

Figura 119: Esquema com a disposição e sinais dos quadrantes



Fonte: o autor

6. Simbologia de Funções Reais

Usualmente no estudo de funções reais de variáveis reais, tem-se a simbologia $y = f(x), y = g(x), y = h(x)$ e outras. Contudo, o que esses símbolos representam?

Quando entra em cena a notação $y = f(x)$, associamos a lei de correspondência, que é uma sentença matemática que possibilita, após a escolha arbitrária de um elemento do domínio, a identificação da sua imagem correspondente.

Finalmente, as funções podem ser representadas da seguinte forma:

$F: A \to B$ ou $A \xrightarrow{F} B$ ou $F: A \to B$

$x \mapsto y$ $\quad x \mapsto y$ $\quad y = f(x)$

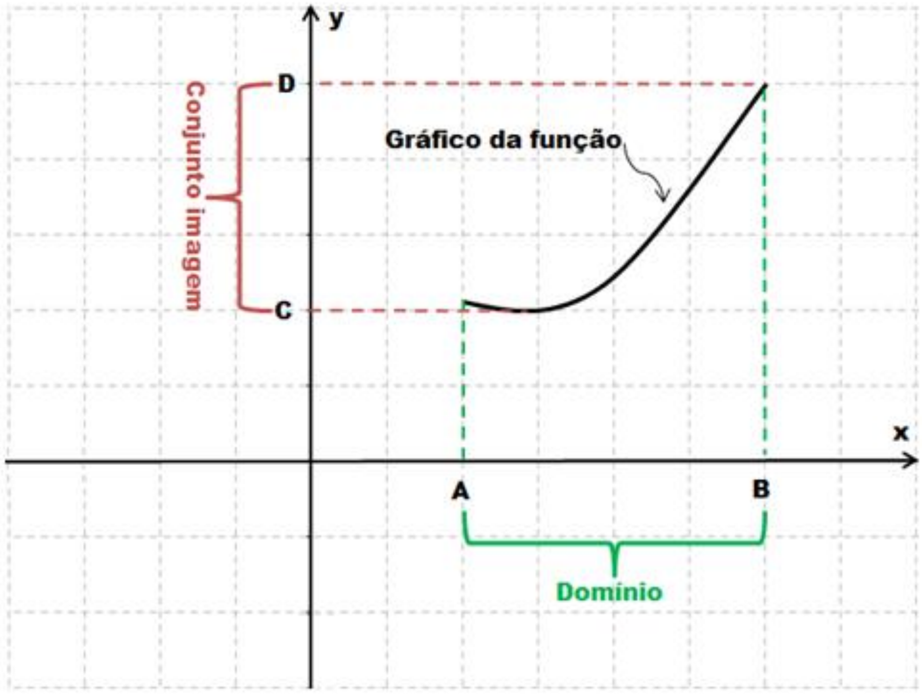
A última forma de apresentação das funções é a mais usual.

7. Gráfico de uma Função Real de Variável Real no Plano Cartesiano

A representação gráfica uma função real de variáveis reais é a união de todos os pares ordenados, gerados pela função.

Cada elemento do domínio forma um par ordenado com sua imagem, de acordo com a lei de correspondência imposta pela função real de variáveis reais. Segundo a representação gráfica, em uma função real de variável real, o domínio é a projeção ortogonal do gráfico sobre o eixo das abscissas (eixo x – horizontal) e o conjunto imagem é a projeção ortogonal sobre o eixo das ordenadas (eixo y – vertical), conforme mostra a figura 120, a seguir.

Figura 120: Gráfico cartesiano de uma função real de variáveis reais, domínio e conjunto imagem



Fonte: o autor

8. Reconhecimento de uma Função Real de Variáveis Reais por Meio do Diagrama de Flechas

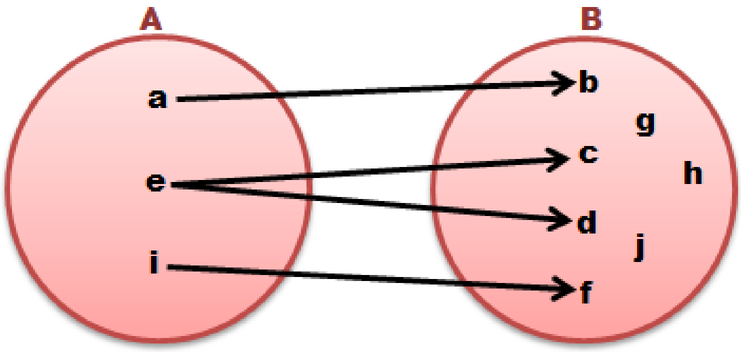
No diagrama de flechas, preservamos as seguintes restrições no conceito de função real de variáveis reais:

O domínio é o conjunto dos elementos que enviam flechas.

Cada elemento do domínio deverá enviar uma única flecha.

Com a intenção de nos aprofundarmos e formalizarmos a representação de função real de variáveis reais por meio do diagrama de flechas, verificaremos as relações nas figuras 121, 122 e 123, a seguir.

Figura 121: Primeira relação por meio do diagrama de flecha estudada

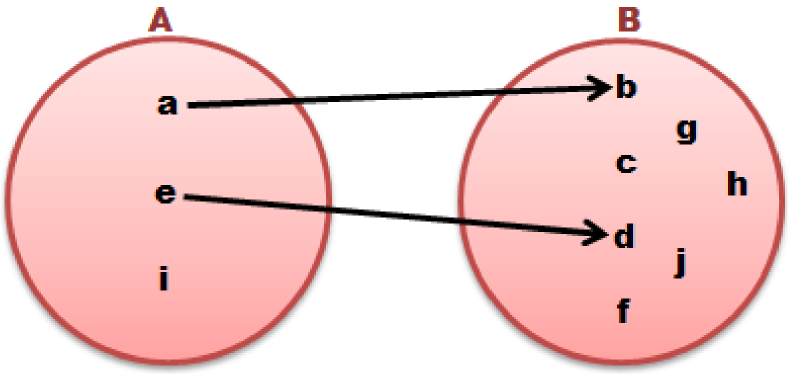


Fonte: o autor

Não representa uma função real de variáveis reais, pelo fato de partirem duas flechas do elemento e.

Não é definido o domínio, contradomínio e conjunto imagem. Somente são enunciados os conceitos, na ocorrência de funções.

Figura 122: Segunda relação por meio do diagrama de flecha estudada

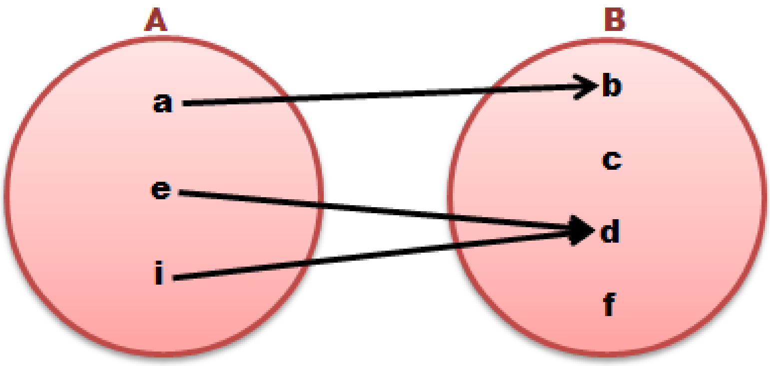


Fonte: o autor

Não representa uma função real de variáveis reais, pelo fato de não partir flecha do elemento i.

Assim, como no caso da figura 121, não é definido o domínio, contradomínio e conjunto imagem.

Figura 123: Terceira relação por meio do diagrama de flecha estudada



Fonte: o autor

Representa uma função. O fato de os elementos i e e enviarem flechas para o mesmo elemento – d –, contudo não fere o conceito de função. Deste modo, define-se o domínio, contradomínio e conjunto imagem.

Domínio: $A = \{a; e;\ i\}$.

Contradomínio: $B = \{b; c;\ d; f; g\}$.

Imagem: $\{b;\ d\} \subset B$.

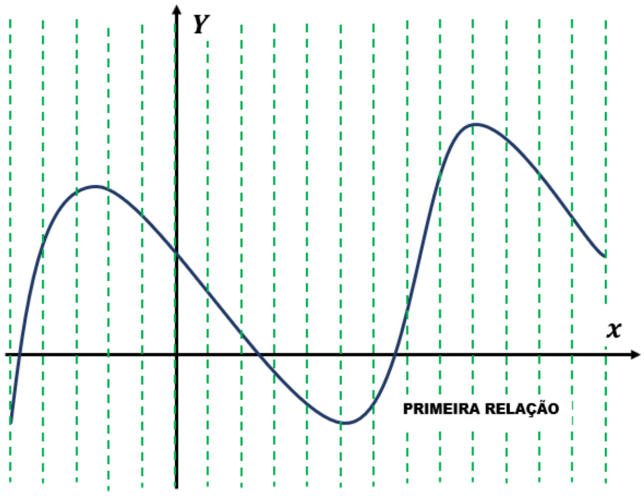
Definiremos a representação de uma função real com variáveis reais do seguinte modo. todo elemento do domínio da função real de variáveis reais deverá enviar uma, apenas uma seta aos elementos do contradomínio.

9. Análise do Gráfico Cartesiano de uma Função Real de Variáveis Reais

Sabemos que uma função real de variáveis reais, é uma relação que associa cada x do domínio a um único y do contradomínio. Essa característica é decisiva na análise de um gráfico e a conclusão se representa ou não uma função.

Analisaremos as relações nas figuras 124 e 125, a seguir.

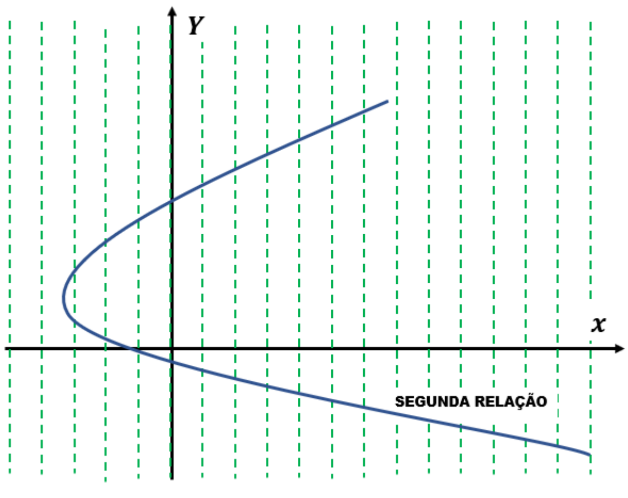
Figura 124: Primeira relação analisada por meio da representação gráfica da relação



Fonte: o autor

Observamos na primeira, na figura 118, a relação que qualquer que seja a reta traçada paralelamente ao eixo y, esta, tocará o gráfico da função em um único ponto. Isto significa que não há abscissa x associada a mais de uma ordenada y. Portanto, a primeira relação representa uma função.

Figura 125: Segunda relação analisada por meio da representação gráfica da relação



Fonte: o autor

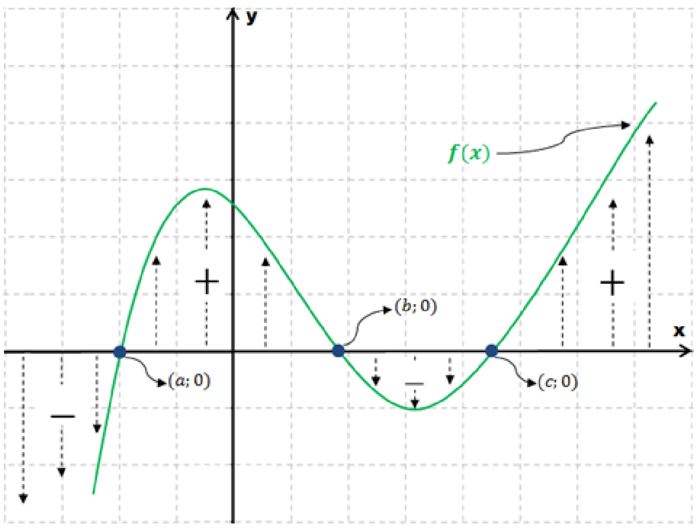
Observamos na segunda relação, na figura 125, que há ocorrência de pelo menos uma reta traçada paralelamente ao eixo y, que toca do gráfico em dois pontos distintos. Isso significa que há abscissa x associada a mais de uma ordenada y. Portanto, a segunda relação não representa uma função.

10. Estudo do Sinal e as Raízes (ou Zeros) de uma Função Real

Para o estudo do sinal da representação gráfica de uma função real de variáveis reais, observaremos o eixo das abscissas, a parte do gráfico que se localiza acima do eixo x é denominada parte positiva do gráfico. Em símbolos $f(x) > 0$. Ainda verificando o eixo das abscissas, a parte do gráfico que se localiza abaixo do eixo x é denominada parte negativa do gráfico. Em símbolos $f(x) < 0$. Algumas funções reais apresentam elementos com imagens iguais a zero. Estes elementos são chamados de zeros ou raízes da função. Em símbolos $f(x) = 0$.

No esquema da figura 126, temos a representação gráfica de uma função. Observamos ainda que $f(a) = f(b) = f(c) = 0$.

Figura 126: Esquema com o estudo do sinal e as raízes de uma representação gráfica de uma função real de variável real



Fonte: o autor

Os pontos $(a; 0), (b; 0), (c; 0)$, são pontos que pertencem a função e situam-se sobre o eixo das abscissas. Concluímos que as abscissas a, b e c são os zeros da função real de variável real.

11. Restrição do Domínio de uma Função Real de Variável Real

Quando o domínio das funções reais de variáveis reais não é especificado, subentendemos que o domínio será o mais amplo subconjunto dos reais, preservando todas as operações matemáticas apresentadas junto a lei de correspondência da função real de variáveis reais.

Com isso, determinamos o domínio das funções reais observando todas as suas restrições, que são as condições de existência, ou seja, verificando para quais elementos do domínio a lei de correspondência é válida. Para essa determinação, analisamos o numerador e, na sequência, o denominador.

A atenção estará voltada aos principais casos:

As leis de correspondência que são determinadas a partir de frações com variáveis independentes no denominador, a expressão do denominador não poderá ser zero.

As leis de correspondência que apresentarem radicais com índices pares, toda a expressão no interior do radical não poderá ser menor que zero.

Caso ocorra a combinação de a lei de formação envolver fração e uma variável no radical de índice par do denominador, toda expressão no interior do radical deverá ser maior que zero.

12. Funções Reais de Variáveis Reais Iguais

Diremos que duas funções reais de variáveis reais f e g são iguais se atenderem aos requisitos:

O domínio da função real de variáveis reais f igual ao domínio da função real de variáveis reais g.

O contradomínio da função real de variáveis reais f igual ao contradomínio da função real de variáveis reais g.

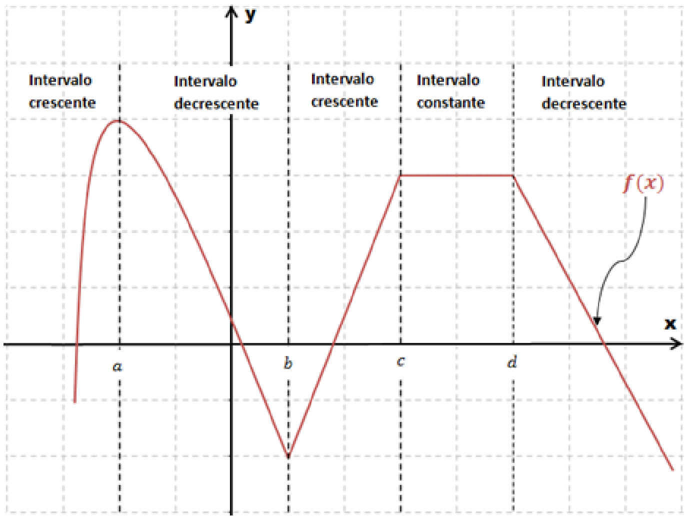
As leis de correspondência forem iguais, para todo elemento dos respectivos domínios das funções reais de variáveis reais f e g.

13. Representação Gráfica de Funções Reais de Variável Real Decrescentes, Constantes e Crescentes

As funções reais de variável real podem apresentar a representação gráfica, decrescente, constante e crescente. Uma função real de variável real é decrescente, se e somente se, havendo valores maiores na abscissa, as imagens na ordenada são menores. Uma função é constante, sé e somente se, todos os elementos do domínio são associados a uma única imagem. Uma função é crescente, se e somente se, havendo valores maiores na abcissa, as imagens na ordenada são maiores.

A figura 127 mostra um esquema, com uma função real de variáveis reais e seus intervalos decrescentes, constantes e crescentes, a seguir.

Figura 127: Esquema com os intervalos decrescente, constante e crescente de uma representação gráfica de uma função real de variável real



Fonte: o autor

Intervalos decrescentes: $]a\,;b[$ e $]d\,;+\infty[$.

Intervalo constante: $]c\,;d[$.

Intervalos crescentes: $]-\infty\,;a[$ e $]b\,;c[$.

14. Funções Reais de Variáveis Reais Compostas

14.1. Noções Gerais Sobre Funções Reais de Variáveis Reais Compostas

Iniciaremos o assunto por meio de exemplo introdutório auxiliará no entendimento da composição de funções reais de variáveis reais.

Considere as seguintes funções: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 2x + 1$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $g(x) = x^2$.

Determinamos, através da lei de formação de $f(x) = 2x + 1$, a imagem de 2, que é: $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

Na sequência, por meio da lei de formação de $g(x) = x^2$ a imagem de 5, que é: $g(5) = 5^2 = 25$.

O que, de fato foi feito: $g[f(2)] = g(5) = 25$.

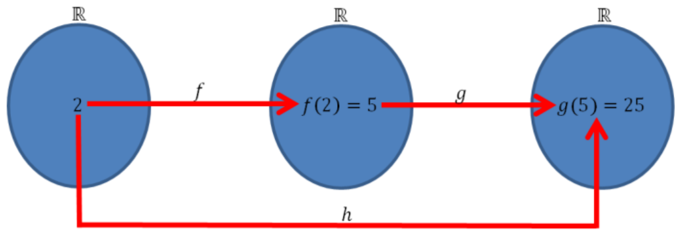
Por meio de análise, há uma função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $h(x) = g[f(x)]$.

A função h é uma composição das funções g e f.

Com efeito $g(x) = x^2 \to g[f(x)] = [f(x)]^2 \to g[f(x)] = [2x + 1\,]^2 \to g[f(x)] = 4x^2 + 4x + 1$.

Diante disto: $h(x) = 4x^2 + 4x + 1 \to h(2) = 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \to h(2) = 25$, que está representado por meio de um esquema na figura 128, a seguir.

Figura 128: Esquema para representar a composição das funções reais de variável reais $f(x) = 2x + 1$ e de $g(x) = x^2$



Fonte: o autor

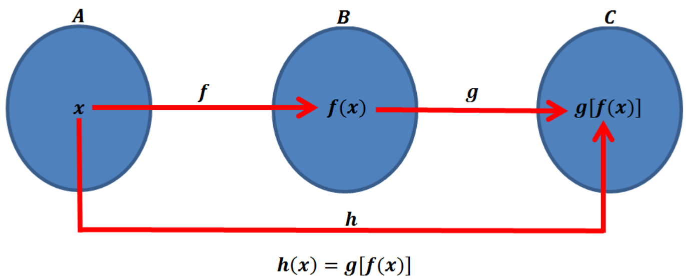
14.2. Definição de Funções Reais de Variáveis Reais Compostas

Sejam as funções $f: A \to B$, $g: B \to C$ e $h: A \to C$. Denominamos funções reais de variáveis reais composta de g com f por meio da função $h: A \to C$ de maneira que se tenha $h(x) = g[f(x)]$. A composição de funções reais de variáveis reais será indicada por $g \circ f$.

Lemos: g de $f(x)$, ou g composta com f, ou ainda, g bola f.

O esquema para representar a composição de funções reais de variáveis reais por meio de diagramas é apresentado na figura 129, a seguir.

Figura 129: Esquema representando a composição de funções reais de variáveis reais por meio de diagramas



Fonte: o autor

De maneira geral, temos: $h = g \circ f$ que é o mesmo que dizer, ou $h(x) = g[f(x)]$.

15. Função Real de Variável Real Inversa

15.1. Função Real de Variável Real Sobrejetora

Definimos como função real de variável real sobrejetora, as funções reais de variáveis reais que preservam a seguinte propriedade: cada elemento do contradomínio receberá pelo menos uma correspondência, em outras palavras, todos os elementos do contradomínio serão imagem de pelo menos um elemento do domínio da função.

Deste fato, concluímos que, para uma função real de variáveis reais ser sobrejetora é necessário que seu contradomínio seja igual ao seu conjunto imagem, que em símbolos poderá ser expresso por $CD(f) = Im(f)$. Ainda sobre a função real de variáveis reais sobrejetoras, sendo uma função $f: A \to B$, para cada $y \in B$, sempre há $x \in A$, de maneira que $f(x) = y$.

15.2. Função Real de Variável Real Injetora

Definimos como função real de variáveis reais injetora, as funções reais de variáveis reais que preservam a seguinte propriedade: cada elemento distinto do domínio apresentará uma imagem distinta no contradomínio.

Desse fato, concluímos que, para uma função real de variáveis reais f ser injetora é necessário que, se x_1 e x_2 são elementos do domínio de f, de maneira que $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ainda sobre a função real de variáveis reais injetora, sendo uma função $f: A \to B$, x_1 e x_2, elementos de A, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

15.3. Função Real de Variável Real Bijetora

Definimos como função real de variáveis reais bijetora, as funções que preservam a seguinte propriedade: a função real de variável real deverá ser simultaneamente injetora e sobrejetora.

15.4. Noções Gerais de Função Real de Variáveis Reais Inversa

Inicialmente, sejam $A = \{a\,; e; i; o; u\}$ e $B = \{k\,; l; m; n; p\}$. Definiremos a função real de variáveis reais bijetora $f: A \to B$ assim definida:

$$f(a) = k; f(e) = l; f(i) = m; f(o) = n; f(u) = p$$

Seja ainda a função bijetora $g: B \to A$ assim definida:

$$g(k) = a; g(l) = e; g(m) = i; g(n) = o; g(p) = u$$

Ressaltamos que domínio da função real de variáveis reais f é A, que é o conjunto imagem da função g e que o domínio da função g é B, que é o conjunto imagem da função f.

As funções f e g assim definidas são ditas funções reais de variável real inversas. Em símbolos representam-se as funções reais de variável real inversas da seguinte maneira: a inversa da função f é f^{-1}.

15.5. Definição de Função Real de Variáveis Reais Inversa

Definimos função real de variáveis reais inversas como, dada a função real de variáveis reais bijetora (inversível) $f: A \to B$, f admite a função $f^{-1}: B \to A$ que é denominada, função inversa f. Para todo $x \in A$ e $y \in B$, temos $f(x) = y$ e $f^{-1}(y) = x$.

15.6. Determinando a Lei de Formação de Uma Função Real de Variável Real Inversa

Dada a função real de variáveis reais $f: A \to B$, para cada par ordenado $(x\,; y) \in f$ existe o par ordenado $(y\,; x) \in f^{-1}$, este fato que é decisivo na determinação da lei de formação da função inversa.

Como exemplo. a inversa lei de formação da função real de variáveis reis $f(x) = a \cdot x + b$ é $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$. O dispositivo prático para obtenção da lei de formação da função inversa é:

1°) Na equação $y = f(x)$, troca-se x por y e y por x.

2°) Isola-se a y em função x.

No caso anterior, temos:

$$f(x) = a \cdot x + b \to y = a \cdot x + b$$

$$x = a \cdot y + b \to a \cdot y + b = x \to a \cdot y = x - b \to y = \frac{x-b}{a}$$

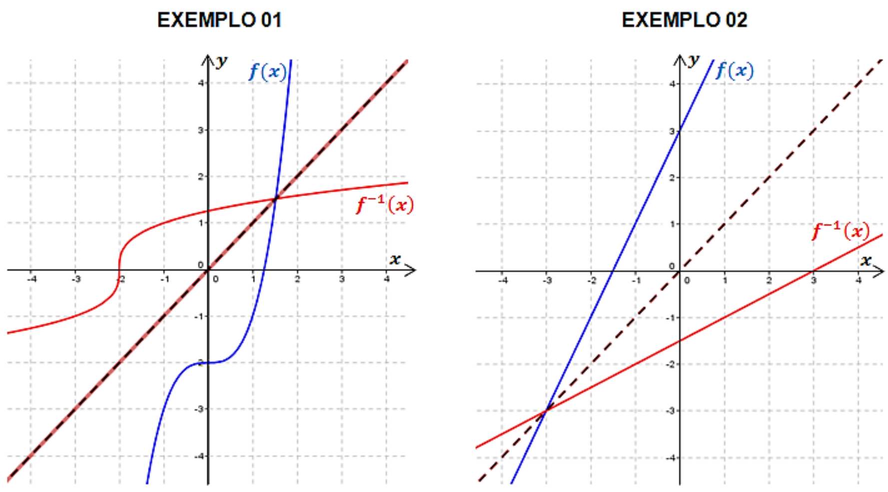
$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

15.7. Representação Gráfica de uma Função Real de Variáveis Reais Inversa

Os gráficos de uma função e de sua função inversa são simétricos em relação a bissetriz do primeiro e do terceiro quadrante.

O esquema mostrando a representação gráfica de funções reais de variáveis reais é apresentado na figura 130, a seguir.

Figura 130: Exemplos de representação gráfica de funções reais de variáveis reais e a representação gráfica de suas inversas



Fonte: o autor

UFVJM