UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

CLAUDIA SCHWARTZBACH

ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS: CONCEITOS DE RELAÇÕES E FUNÇÕES E SUAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO

2018

CLAUDIA SCHWARTZBACH

ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS: CONCEITOS DE RELAÇÕES E FUNÇÕES E SUAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Campus Pato Branco, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moises Aparecido Do Nascimento.

PATO BRANCO

2018

S399a Schwartzbach, Claudia.
Análise de livros didáticos: conceitos de relações e funções e suas múltiplas representações / Claudia Schawartzbach. – 2018.
166 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Moises Aparecido do Nascimento
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Pato Branco, PR, 2018.
Bibliografia: f. 158 - 162.

1. Matemática - Ensino e estudo. 2. Funções (Matemática). 3. Currículos. 4. Livros didáticos. I. Nascimento, Moises Aparecido do, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Ficha Catalográfica elaborada por
Suélem Belmudes Cardoso CRB9/1630
Biblioteca da UTFPR Campus Pato Branco

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Câmpus Pato Branco

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação Nº 32

"ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS: CONCEITOS DE RELAÇÕES E FUNÇÕES E SUAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES"

por

Claudia Schwartzbach

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Moisés Aparecido do Nascimento, pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR Câmpus Pato Branco, às 09:00hs do dia 12 de novembro de 2018. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Moisés Ap. do Nascimento, Dr

(Presidente – UTFPR/Pato Branco)

Prof. José Luciano Santinho Lima, Dr

(IFSP/São Carlos)

Prof. João Biesdorf, Dr

(UTFPR/Pato Branco)

Prof. Adilson da Silveira, Dr.

(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

Quero dedicar esse trabalho a todos aqueles que foram privados da minha companhia durante a elaboração do mesmo, em especial ao meu marido e à minha filha.

AGRADECIMENTOS

A conclusão desse trabalho de pesquisa encerra uma parte importante da minha vida, a obtenção do título de Mestre em Matemática. A obtenção desse título e elaboração desse trabalho só foi possível com o auxílio de várias pessoas que se apresentaram como colegas, amigos, orientadores e apoiadores de uma forma geral. Estes parágrafos não irão atender a todas essas, portanto, desde já peço desculpas àquelas que não estão presentes entre essas palavras, mas elas podem estar certas que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Moisés, pela sabedoria e paciência com que me guiou nesta trajetória.

Aos meus colegas de sala.

Aos amigos pelo apoio moral.

Aos professores do curso pelo incentivo.

A Secretaria do Curso, pela cooperação.

Gostaria de deixar registrado também, o meu reconhecimento à minha família, pois acredito que sem o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

Os homens pedem à Ciência que lhes forneçam um meio, não só de conhecer, mas de *prever* fenómenos – quanto maior for a possibilidade de previsão , maior será o domínio deles sobre a Natureza; quem sabe prever sabe melhor defender-se e, além disso, pode provocar a repetição, para seu uso, dos fenómenos naturais. A ciência deve ser considerada, acima de tudo, como um *instrumento forjado pelos homens*, instrumento *activo de penetração no desconhecido*.

(CARRAÇA, 1952)

RESUMO

SCHWARTZBACH, Claudia. **Análise De Livros Didáticos: Conceitos De Relações E Funções E Suas Múltiplas Representações**. 2018. 172. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2018.

Este trabalho apresenta a análise de livros didáticos de Matemática, do 9º ano do Ensino Fundamental, participantes do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), sobre os conceitos de relações e funções. Para o desenvolvimento da análise dos livros, são consideradas as indicações dos currículos prescritos, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC), obtendo os objetivos desses documentos para o ensino de relações e funções na Educação Básica do Brasil. É feito um levantamento do desenvolvimento histórico desses conceitos. Bem como, um levantamento das conceituações atualmente apresentadas, quanto a definições e formas de representações, com o intuito de obter suporte teórico para a análise do conteúdo científico apresentado nos livros didáticos analisados. Este trabalho também comporta, uma discussão sobre a conjuntura da atual situação do ensino de relações e funções e considerações que devem ser feitas quanto as metodologias utilizadas no seu ensino. Foram escolhidos para análise, os cinco primeiros livros didáticos, classificados como os mais escolhidos pelas escolas públicas do país no programa do PNLD de 2017, sendo analisados quanto as definições, representações e abordagens nos temas de relações e funções, sendo apresentadas considerações e conclusões a respeito, com utilização de um quadro comparativo.

Palavras-chave: Relações. Funções. Currículos. Livro didático. Conceitos. Representações.

ABSTRACT

SCHWARTZBACH**,** Claudia. **Didactic Book Analysis: Relations Concepts and Functions And Its Multiple Representations.** 2018. 172. Dissertation (masters degree in Mathematics) - Federal Technological University of Paraná. Pato Branco, 2018.

This work presents the analysis of mathematics didactic book, the 9th grade of Basic Education, participants of the National Didactic Book Program (PNLD), on the concepts of relations and functions. For the development of analysis of the books, are considered indication of prescribed curriculum, National Curriculum Parameters (PCNs) and National Curriculum Common Base (BNCC), obtaining the objectives of these documents for the teaching of relations and functions in Basic Education in Brazil. Is made a survey of the historical development of these concepts. As well as a survey of the conceptualizations currently presented, as to definitions and forms of representations, with the purpose of obtaining theoretical support for the analysis of the scientific content presented in the didactic books analyzed. This work also involves, a discussion about the current situation of the teaching of relations and functions and considerations that must be made as to methodologies used in their teaching.This work also involves, a discussion about the current situation of the teaching of relations and functions and considerations that must be made as to methodologies used in their teaching. Were chosen for analysis, the first five didactic books, classified as the most chosen by the country's public schools in the 2017 PNLD program, being analyzed the definitions, representations and approaches in the themes of relations and functions, and presented considerations and conclusions being presented considerations and conclusions about, with utilization of a comparative picture.

Keywords: Relations. Functions. Resumes. Didactic Book. Concepts. Representations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ensinar Matemática não é fácil. A existência de uma cultura onde acredita-se que este conhecimento é para poucas pessoas, contribui para que os resultados negativos nas avaliações de desempenhos dos estudantes sejam menosprezados. Resultados esses que se apresentam ainda mais graves quando os estudantes frequentam o Ensino Médio. Parte desse fracasso é atribuído a formação dos professores em relação ao seu conhecimento e formação didática e outra parte se relaciona a falhas do sistema, como a desvalorização dos profissionais e a falta de suporte material para desenvolver os conceitos na sua forma mais ampla. O fato é que não temos como culpar um setor ou outro, quando o problema provém de um conjunto de falhas do sistema, governamental, de formação profissional e de consciência no sentido de esforço individual, principalmente por parte do estudante, quanto ao não aproveitamento do acesso ao conhecimento, e consideramos neste ponto as dificuldades sociais, intelectuais, entre outras.

Em termos conceituais, consideramos o conceito de relações como a base do desenvolvimento do pensamento matemático, pois onde se compara objetos e valores, cria-se relações. Como caso particular do conceito anterior, o conceito de funções é um dos conceitos matemáticos com maior possibilidade de contextualização e vem sendo utilizado a milhares de anos pelos seres humanos, portanto, um dos mais significativos em termos de aprendizagem. Silva et al. (2018) afirma que “o conceito de função é um dos conceitos centrais da Matemática por ser fundamental para descrever fenômenos em diversas áreas do conhecimento, como na Física, Química, Engenharias, Biologia, Geografia, Sociologia, e em situações diversas”. Sua importância advém do fato de ser uma excelente ferramenta para a resolução de problemas da matemática e áreas afins, que pressupõe a noção de modelo, constituído por variáveis, relações entre elas e suas respectivas taxas de variação.

O fato de o conceito de função apresentar aplicações de forma contextualizada em diversas áreas do conhecimento, não tem garantido aos alunos uma efetiva aprendizagem ou a flexibilidade esperada para a resolução de problemas nestas diversas áreas. Os autores Margarinus (2013), Zuffi (2016) e Rezende (2013), observaram em seus trabalhos que os alunos do nível de Ensino Fundamental, Ensino Médio demonstram dificuldades em trabalhar com funções e poucos parecem compreender seu conceito, sendo que o mesmo ocorre com estudantes do Ensino

Superior, e até mesmo com professores. Notaram que, o conhecimento de professores de Matemática sobre o conceito de função, aplicados em contextos abordados no ensino básico, apresentam erros de abordagens e conceitos, como confundir a representação algébrica da função com a própria função ou não utilizar a definição do conceito na resolução de atividades propostas.

Considerando que, um professor que apresenta dificuldades de compreensão sobre determinado conceito procura um embasamento teórico para dar suporte ao seu conhecimento, consequentemente ao seu método de ensino, e sendo o livro didático um dos suportes teóricos com maior acessibilidade, este acaba por ser utilizado pela maioria dos professores em sala de aula. Neste ponto se torna necessária a análise da teoria apresentada pelos livros didáticos sobre os conceitos de relações e de funções, uma vez que professores e alunos não têm apresentado conhecimento suficiente para entender e dominar esses conceitos de forma a resolver problemas de situações diversas.

Os livros didáticos escolhidos para a análise sobre os conceitos de relações e funções, devem ser aqueles que atendem uma maior parcela da população brasileira. Considerando que no Brasil, a maior parcela dos alunos frequentam as escolas públicas, e estas são atendidas pelo Governo Federal com o programa do PNLD (Plano Nacional do Livro Didático), que consiste na distribuição gratuita, trienal, de livros didáticos, escolhidos pelos professores das escolas públicas entre uma gama de coleções aprovadas pelo MEC (Ministério de Educação e Cultura) e submetidas a análises para verificação de adequação aos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), torna o livro didático distribuído nas escolas públicas uma boa escolha para análise desses conceitos. Reafirma-se a escolha se considerarmos que o desenvolvimento do PNLD fomentou a utilização em massa dos livros didáticos nas escolas públicas, uma vez que todos os alunos deveriam receber um exemplar, e a importância do livro didático quanto currículo na prática docente.

Com base no apresentado, esse trabalho irá analisar livros didáticos de Matemática para o 9º ano do Ensino Fundamental. Foram escolhidos os livros das cinco coleções mais distribuídas no PNLD 2017, entre as onze disponibilizadas e distribuídas no Ensino Público do Brasil, caracterizando uma pesquisa bibliográfica. O objetivo inclui a verificação dos conceitos apresentados quanto, as definições e abordagens estarem matematicamente corretas para a apropriação e compreensão dos conceitos de relações e funções e sua plena utilização na resolução de problemas nas diversas áreas de aplicação. Para atingir esse objetivo, o trabalho será dividido em quatro partes, sendo cada parte um capítulo, que apresenta as análises necessárias para atingir o objetivo geral.

Inicialmente realizamos uma discussão sobre as propostas apresentadas pelos currículos prescritos no ensino de relações e funções no Ensino Fundamental anos finais, a fim de determinar o que se espera que contenha em um livro didático que participa do PNLD sobre os conceitos de relações e funções. Na análise desses currículos dar-se-á ênfase aos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) e a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) por estarmos em um período de transição de currículo a nível nacional. Como segundo quesito, encontra-se a compreensão dos conceitos de relações e funções. Para isso será considerado seu desenvolvimento histórico, a fim de compreender a evolução da definição apresentada nos dias atuais dentro da concepção Matemática. E serão considerados trabalhos recentes, para comparar essas concepções com as dificuldades mais recorrentes, considerando os métodos de ensino e conceituações relevantes e eficazes no processo de ensino e aprendizagem desses conceitos. No terceiro passo, são analisados livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental, na abordagem dos temas relações e funções, comparando as definições e metodologias apresentadas com as citadas anteriormente por matemáticos e pesquisadores da área. Por fim, apresentar-se-á as considerações finais sobre cada um dos livros e as conclusões de um modo geral.

2 **O CURRÍCULO**

O currículo escolar é considerado um artefato social e cultural, que transmite uma relação de poder, no sentido de atender os desejos de quem o elabora, com visões sociais particulares e interessadas, produzindo identidades individuais e sociais particulares, apresenta uma história, vinculadas a formas específicas e contingentes de organização da sociedade e da educação (MOREIRA E SILVA, 2005). Torna-se necessária à sua análise constante, pois a sociedade está em constante transformação e essa análise determinará se ele está atendendo as necessidades da comunidade como um todo. No Brasil foi promovida a elaboração de um currículo nacional comum, em 1997, com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e, homologado recentemente, em 2017, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

2.1 CURRÍCULO PRESCRITO: LDB, PCN, DCE E BNCC

Com o término do Regime Militar, oficializou-se, em 1988, por meio da Constituição Federal, o estabelecimento de um documento curricular de abrangência nacional, intitulado “Base Nacional Comum”, que fixa os conteúdos mínimos para os ensinos fundamental e médio (BRASIL, 1996). Tal fato fortaleceu-se, no ano de 1996, com a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), que também estabelece a necessidade de uma Base Nacional Comum (BRASIL, 1996).

De acordo com o Art. 26 da LDB, os currículos do ensino infantil, fundamental e médio devem ter base nacional comum, que deverá ser complementada por uma parte diversificada em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar de acordo com características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos. No Art.9º afirma que é responsabilidade da União juntamente com Estados e Municípios estabelecer competências e diretrizes para a educação infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, para nortear os currículos e seus conteúdos mínimos de modo a assegurar a formação básica comum (BRASIL, 1996).

A partir desse cenário, no ano de 1997 foram publicados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), com o objetivo de garantir a todas as crianças e jovens brasileiros o acesso a conhecimentos reconhecidos e elaborados socialmente, e que são considerados necessários para o exercício de sua cidadania, os quais todo cidadão tem direito de aprender, respeitando a diversidade por meio de adaptações que integrem as diferentes dimensões da prática educacional. Transforma-se assim em um referencial a partir do qual a educação pode atuar no processo de construção da cidadania, de forma aberta e flexível, possibilitando decisões regionais e locais sobre programas e transformações da realidade educacional empreendidos por governantes, escolas e professores (BRASIL, 1998).

Diante da flexibilidade da LDB, com relação a autonomia de estados e municípios, surgem documentos norteadores da educação básica. Como exemplos pode-se citar as Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE) de 2008 no Estado do Paraná, fruto de um processo de discussão coletiva, ocorrido entre 2004 e 2008, que envolveu os professores da Rede Estadual de Ensino e por críticas de especialistas nas diversas disciplinas e em história da educação vinculados a diferentes universidades brasileiras em um debate do DEB (Departamento de Educação Básica), com vistas aos necessários ajustes finais dos textos (PARANÁ, 2008) e os Parâmetros do Estado de São Paulo, que partiu dos conhecimentos e das experiências práticas já acumulados, ou seja, partiu da recuperação, da revisão e da sistematização de documentos, publicações e diagnósticos já existentes e do levantamento e análise dos resultados de projetos ou iniciativas realizados (SÃO PAULO, 2011, p.7)

Em contraponto a forma aberta e flexível dos PCN, foi homologada em 2017 a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Fundamental como resultado de um processo que iniciou em 2014, com a inserção a BNCC no Plano Nacional da Educação (PNE). Em setembro de 2015 foi apresentada a sua primeira versão, elaborada por um grupo de redatores escolhidos pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC), Conselho Nacional de Secretários de Educação (CONSED[1]) e União

[1] CONSED - Conselho Nacional de Secretários de Educação: Fundado em 1986, é uma associação de direito privado, sem fins lucrativos, que congrega, por intermédio de seus titulares, as Secretarias de Educação dos Estados e do Distrito Federal, e tem por finalidade promover a integração das Secretarias visando o desenvolvimento de uma educação pública de qualidade. (UNESCO, 2017)

Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (UNDIME[2]). Foi disponibilizada para consulta pública online, com acesso para toda a sociedade, de outubro de 2015 a março de 2016, obtendo mais de 12 milhões de contribuições da sociedade civil, professores, escolas, organizações do terceiro setor e entidades científicas. Em maio de 2016, o MEC divulga a segunda versão, discutida de junho a agosto, em seminários estaduais com mais de nove mil participantes, entre professores, gestores e alunos, com relatórios das contribuições dos seminários entregues ao MEC, pelos Consed e Undime, que serviram de insumos para a redação da versão final. Em julho o MEC instituiu o Comitê Gestor da BNCC e Reforma do Ensino Médio, para acompanhar o processo e encaminhar a proposta final do documento. Em março de 2017 o MEC entrega ao CNE a terceira versão da BNCC, com as partes da Educação Infantil e do Ensino Fundamental. De junho a setembro, O CNE realizou consultas públicas em todo país, para ouvir a sociedade sobre a terceira versão e em agosto Consed e Undime lançaram o Guia de Implementação da BNCC, com sugestões que apoiam a organização das secretarias para a implementação. Em 15 de dezembro a CNE aprovou a Base e em 20 de dezembro o MEC homologou a BNCC, que passa a valer em todo o Brasil. (MOVIMENTO PELA BASE NACIONAL COMUM, 2017, Acesso em:< http://movimentopelabase.org.br/linha-do-tempo/>)

A BNCC tem o objetivo de superar a fragmentação das políticas educacionais, promover o fortalecimento do regime de colaboração entre as três esferas de governo e ser balizadora da qualidade da educação. Sendo um documento de caráter normativo, define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais, que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, sendo aplicada exclusivamente à educação escolar, e orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e

[2] UNDIME - União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação: A Undime é uma entidade nacional que congrega os dirigentes municipais de educação. Fundada em outubro de 1986, é uma associação civil sem fins lucrativos e autônoma. A função de articuladora é primordial. Por meio da Undime, as secretarias municipais de educação podem estabelecer redes solidárias de troca de informações e experiências. a Undime desenvolve atividades de formação e capacitação do dirigente municipal, com o objetivo de melhorar a educação pública; organiza e promove seminários, fóruns, congressos e reuniões, voltados à educação pública, cidadã e de qualidade para todos. Mantém estreitos contatos com sindicatos, associações, organizações não governamentais e demais entidades da sociedade civil, que tenham interesse no processo educacional. (UNESCO, 2017)

a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. Contribuirá para o alinhamento de políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de professores, à avaliação, à elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação. (BRASIL, 2018)

2.1.1 Os PCN E A Matemática

Esse documento chega na área de Matemática como resultado das reformas curriculares iniciadas nos anos 20, mas principalmente da reforma conhecida por Matemática Moderna. Ou seja, ele é fruto de um sistema de ensino que instituía a teoria dos conjuntos nas séries iniciais, a formalização precoce de conceitos, o predomínio absoluto da álgebra nas séries finais e as poucas aplicações práticas da Matemática no ensino fundamental, acabando por se tornar uma disciplina inacessível para a maioria dos alunos. Com o intuito de mudar essa situação, esse documento se apresenta à Matemática como uma forma de compreender e atuar no mundo, entendendo o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural de forma a equilibrar a Matemática formal com a Matemática prática (BRASIL, 1998).

Os PCNs de Matemática são um referencial da prática escolar para garantir que as crianças e jovens tenham acesso a um conhecimento matemático que possibilite a sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, nas relações sociais e na cultura. Este documento norteia a formação inicial e continuada dos professores e a elaboração de livros, abrindo uma discussão sobre o papel da Matemática na construção da cidadania. Traz em seu contexto discussões sobre a importância do estabelecimento de conexões da Matemática com os conteúdos relacionados aos Temas Transversais (Ética, Pluralidade Cultural, Orientação Sexual, Meio Ambiente, Saúde, Trabalho e Consumo) e a importância do aluno valorizar a Matemática como instrumento para compreender o mundo a sua volta e assim como desenvolver área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas (BRASIL, 1998).

Os conteúdos de Matemática nos PCNs são selecionados de acordo com sua relevância social e contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno, são divididos de acordo com os objetivos a serem atingidos em cada ciclo (são quatro ciclos: 1º e 2º referentes ao ensino fundamental um, primeiro ao quinto ano, e 3º e 4º referentes ao ensino fundamental dois, sexto ao nono ano). Ainda são sugeridas metodologias como a Resolução de Problemas, História da Matemática e Tecnologias da Educação como estratégias para um bom desenvolvimento do conhecimento da área, além de fazer considerações sobre a interdisciplinaridade como incentivo, motivação e ampliação da aplicação da Matemática.

Como objetivos a serem atingidos pelos alunos no ensino de Matemática, os PCNs citam: a identificação do conhecimento matemático como meio para compreender e transformar o mundo a sua volta pelo interesse, curiosidade, espírito de investigação e resolução de problemas; fazer sistematizações de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles; selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente; resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis; descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações Matemáticas; estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares; sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções; interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL,1998).

2.1.2 As DCEs de Matemática

Esse documento é um texto sobre concepção de currículo para a Educação Básica do Estado do Paraná e tem caráter disciplinar, dando ênfase a escola como lugar de socialização do conhecimento, para oportunizar aos sujeitos de diversas regiões e com origens étnicas e culturais diferentes, sejam eles do meio urbano ou rural, a oportunidade de acesso ao conhecimento produzido pela humanidade e determinar o tipo de participação desse sujeito na sociedade, configurando assim o caráter político de um currículo. Sua análise torna-se necessária quanto ao currículo neste estado, quando a partir de 2007 o Governo do Estado implantou o Registro de Classe Online (RCO), cuja base de registros é fundamentada nas DCEs.

Sua criação partiu de um amplo debate entre professores atuantes em sala de aula em diferentes níveis e modalidades de ensino, com educadores dos Núcleos Regionais e com a Secretaria de Estado e Educação e busca resgatar importantes considerações teórico metodológicas para o Ensino de Matemática, ao considerarem que os PCNs tratam a disciplina de forma superficial, utilizando-a para resolver problemas locais e orientando práticas docentes, para o desenvolvimento de competências e habilidades, destacando o trabalho com os temas transversais, prejudicando a importância disciplinar. Diante disso, as DCEs de Matemática, vem resgatar a importância do conteúdo matemático e da disciplina Matemática, determinando que o estudante se aproprie do conhecimento de forma que compreenda os conceitos e princípios matemáticos, raciocinando claramente, comunicando ideias Matemáticas, reconhecendo suas aplicações e abordando problemas matemáticos com segurança. Dentro dessa perspectiva, apresenta um rol de conteúdo, tanto para o ensino fundamental quanto para o médio, cabendo ao docente organizar sua prática em torno desses conteúdos matemáticos, com base em uma fundamentação teórica e metodológica.

As DCEs tratam a Matemática como uma forma do homem ampliar seus conhecimentos, contribuindo com o desenvolvimento da sociedade ao proporcionar situações em que os estudantes possam analisar, discutir, conjecturar, apropriar-se de conceito e formular ideias. Nesse processo, o professor é responsável por ajudar a sistematizar os conteúdos que aparecem em aplicações, contribuindo para que o estudante constate regularidades, generalizações e aproprie-se da linguagem adequada para descrever e interpretar fenômenos matemáticos e de outras áreas do conhecimento. Faz-se uma tentativa de transpor a didática da Matemática como campo de conhecimento e disciplina escolar.

2.1.3 A BNCC e a Matemática

A BNCC é dividida em dez competências gerais, onde

> competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho." (BRASIL, 2018, p.8)

Afirma que essas competências definem aquilo que os estudantes devem aprender na Educação Básica, incluindo saberes e a capacidade de mobilizá-los e aplicá-los, argumentando que Estados e Municípios brasileiros e diferentes países as utilizam na construção de seus currículos e que esse é também o enfoque adotado nas avaliações internacionais. Ou seja, ela indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento dessas competências, mostrando de forma clara o que os alunos devem saber, considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores, sobretudo, do que devem "saber fazer", considerando a mobilização necessária para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2018).

> No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações. Requer o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades. (BRASIL, 2018, p.14)

Para isso, os componentes curriculares do Ensino Fundamental são divididos em Áreas do Conhecimentos, sendo elas: Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas, Ensino Religioso. Cada área apresenta competências específicas para serem desenvolvidas no decorrer de nove anos (do primeiro ao nono ano do Ensino Fundamental), explicitando as dez competências gerais. Para garantir o desenvolvimento das competências específicas, cada componente curricular apresenta um conjunto de habilidades que estão relacionadas a diferentes conteúdos, conceitos e processos, organizados em Unidades Temáticas. Essas aprendizagens são organizadas de acordo com uma estrutura chamada modificadores, entendidos como a explicitação das situações em que a habilidade deve ser desenvolvida, considerando a faixa etária do aluno. Nesse sentido, é deixada a conduta do professor quanto abordagens e metodologias, de livre escolha, no âmbito dos currículos e projetos pedagógicos considerando o contexto e características de seus alunos.

No que trata da Área de Conhecimento da Matemática a BNCC afirma que, no Ensino Fundamental, deve-se articular seus diversos campos (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade), de forma a garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real com representações (tabelas, figuras e esquemas) e associando-as a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo o contexto apresentado (Brasil, 2018). Outro fator que considera importante é o letramento matemático:

> definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (BRASIL, 2018, p.264)

E ele assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo, considerando o caráter intelectual da matemática, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico e estimulando a investigação de forma prazerosa.

Entre as metodologias que podem ser adotadas no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, o documento considera a Resolução de Problemas, Investigações, Modelagem e História da Matemática, pois seriam ricos para o desenvolvimento de competências como raciocínio, representação, comunicação, argumentação e pensamento computacional. Mas além desses diferentes recursos didáticos cita materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica.

O documento apresenta oito competências específicas a serem atingidas na área de Matemática no Ensino Fundamental, descritos aqui de forma resumida: Reconhecer a Matemática como ciência humana, com desenvolvimento histórico que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos; Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes; Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática e de outras áreas do conhecimento; Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados; Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, expressando suas respostas e sintetizando conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens; Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza; e interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas. (BRASIL, 2018)

A BNCC divide a Área de Conhecimento de matemática em cinco Unidades Temáticas: Números, com finalidade de desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades; Álgebra, com finalidade de desenvolver pensamento algébrico, essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e em situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos; Geometria, com a finalidade de estudar conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento; Grandezas e medidas, com finalidade quantificar grandezas do mundo físico que são fundamentais para a compreensão da realidade; e Probabilidade e estatística, com finalidade de desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas.

De modo geral, podemos dizer que a BNCC, salienta a necessidade, no Ensino Fundamental Anos Finais, de levar em conta: as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas; a comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação; os recursos que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática; e a visão das possíveis articulações entre as habilidades indicadas para as diferentes temáticas.

2.2 ABORDAGEM DOS CURRÍCULOS SOBRE OS CONTEÚDOS DE RELAÇÕES E FUNÇÕES

2.2.1 PCN

Os conteúdos matemáticos nos PCNs de Matemática são divididos em quatro grandes blocos: números e operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), espaço e formas (no campo da Geometria), grandezas e medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento) e Tratamento da Informação (trata das informações do cotidiano, como dados estatísticos, tabelas e gráficos e ideias relativas à probabilidade e à combinatória). Além disso, o ensino fundamental aqui é dividido em dois blocos em relação aos conteúdos, denominados 3º e 4º ciclo, onde no 3º ciclo se enquadram 6º e 7º ano e no 4º ciclo se enquadram o 8º e 9º ano.

Os conceitos de relação e função são citados dentro da área de números e operações, porém, o documento já antepõe que:

> [...] o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função no terceiro e quarto ciclo. Entretanto, a abordagem formal

desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio. (BRASIL, 1998, p.51)

Ou seja, o conceito de função deverá ser tratado apenas como um conceito inicial, possibilitado pelo estudo da variação de grandezas. No 4º ciclo, quando discorre sobre as diferentes funções da álgebra, os PCNs nos afirmam que:

> [...] no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação. Para apoiar a compreensão desses conceitos pode-se lançar mão da construção e interpretação de planilhas, utilizando recursos tecnológicos como a calculadora e o computador. (BRASIL, 1998, p.84)

Ainda na mesma linha de pensamento, os PCNs dizem que é suficiente que os alunos compreendam a noção de variável[3] e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas e que no campo conceitos e procedimentos deste ciclo deve-se desenvolver a compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas (BRASIL, 1998).

Ele cita como objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a observar regularidades e estabelecer Leis Matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis e afirma que isso não vem ocorrendo no ensino fundamental:

> A noção de variável, de modo geral, não tem sido explorada no ensino fundamental e por isso muitos estudantes que concluem esse grau de ensino (e também o médio) pensam que a letra em uma sentença algébrica serve sempre para indicar (ou encobrir) um valor desconhecido, ou seja, para eles a letra sempre significa uma incógnita.
>
> A introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas permite que o aluno veja uma outra função

[3] Variável: em matemática, essa palavra refere-se a letras representadas em equações cujos valores podem variar de acordo com situações apresentadas, enquanto as letras que não podem variar são ditas incógnitas. Por exemplo, a equação $x + y = 3$, considerando os valores de x e y não definidos, podemos atribuir um valor a x ou y, de forma variada, então ambos são variáveis, mas, a partir do momento que atribui, por exemplo, 1 ao x, y passa a ser uma incógnita, pois existirá apenas um valor que satisfará a igualdade em questão.

para as letras ao identificá-las como números de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações. (BRASIL, 1998, p.118)

E para suprir essas deficiências do processo de ensino e aprendizagem, os PCNs apresentam uma série de considerações quanto as metodologias a serem utilizadas e instrumentos de suporte. Quanto a metodologia da resolução de problemas:

> A introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas permite que o aluno veja uma outra função para as letras ao identificá-las como números de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações. (BRASIL, 1997, p. 118)
>
> [...] situações-problema sobre variações de grandezas fornecem excelentes contextos para desenvolver a noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Os alunos podem, por exemplo, estabelecer como varia o perímetro (ou a área) de um quadrado, em função da medida de seu lado; determinar a expressão algébrica que representa a variação, assim como esboçar o gráfico cartesiano que representa essa variação. (BRASIL, 1998, p.118)

Discorre sobre a importância de várias formas de representações de funções além da algébrica, como a representação gráfica e tabela de dados:

> Convém também destacar a importância dos gráficos para o desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos e para mostrar a variedade de relações possíveis entre duas variáveis. Quando uma variável aumenta, a outra pode permanecer constante, aumentar ou diminuir na mesma razão da primeira, crescer ou decrescer, mas não exatamente na mesma razão [...] (BRASIL, 1998, p. 118)

E para concretizar essas diferentes representações, sugere o uso de tecnologias, quando diz que existem alguns softwares interessantes que podem ser integrados às atividades algébricas, como os que utilizam planilhas e gráficos (BRASIL, 1998, p.118) e ao sugerir alguns exemplos, vincula a representação de funções em tabelas com a ampliação do conhecimento dos alunos em Matemática comercial e financeira:

> No exemplo discutido, pode-se explorar a noção de variável e de incógnita. Além disso, seu contexto possibilita que os alunos pesquisem e ampliem seus conhecimentos sobre matemática comercial e financeira: taxas, juros, descontos, fatores de conversão, impostos etc. Esse trabalho

> propicia conexões com os temas transversais Trabalho e Consumo e Ética. (BRASIL, 1998, p.121)

Resumindo, os PCNs consideram que o aluno deve desenvolver a noção de interdependência de duas grandezas em situações-problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais (função afim ou quadrática), propiciando que se expresse a variação por meio de uma sentença algébrica e a represente no plano cartesiano (BRASIL, 1998).

Verifica-se como grande objetivo no ensino de relação e função no ensino fundamental, a capacidade do aluno resolver situações-problema que envolvem a variação de duas grandezas direta ou inversamente proporcionais e representar em um sistema de coordenadas cartesianas essa variação, pois por meio deste o professor poderá verificar se o aluno é capaz de resolver situações-problema (escalas, porcentagem e juros simples) que envolvem a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias como as regras de três; de representar, em um sistema de coordenadas cartesianas, a variação de grandezas envolvidas em um fenômeno, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não-proporcional (BRASIL, 1998).

2.2.2 DCE

O conteúdo de matemática nas DCEs é dividido em cinco grupos denominados de conteúdos estruturantes, considerados como conhecimento de grande amplitude e que englobam os conceitos e práticas que identificam e organizam os campos de estudo considerados fundamentais para a compreensão da disciplina. Os conteúdos estruturantes são classificados como: Números e Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometrias, Funções e Tratamento da Informação. Dentro de cada conteúdo estruturante estão selecionados os conteúdos específicos a serem abordados.

No que trata do ensino de funções, às DCEs dizem que o aluno deve compreender que este conteúdo está presente em várias situações do cotidiano e em diversas áreas do conhecimento, modelando essas situações de forma a auxiliar o homem em suas atividades, sendo vista como uma construção histórica e dinâmica.

Especificamente no ensino fundamental, o conteúdo estruturante de funções traz os conteúdos específicos de função afim e função quadrática. Dentro desses conteúdos específicos considera-se necessário que o aluno compreenda a relação da álgebra com o conceito de funções, reconheça a relação de dependência entre duas grandezas, reconheça a relação entre variável dependente e independente, determine valor numérico de uma função, construa a representação gráfica de função afim e função quadrática e perceba a diferença entre função crescente e decrescente.

Em seu anexo a DCE de Matemática apresenta uma tabela onde estão organizados os conteúdos básicos vinculados a seu conteúdo estruturante e aos objetivos básicos a serem atingidos pelos estudantes de acordo com o ano/série em que se encontra. Ressalta que esses conteúdos são considerados imprescindíveis para a formação conceitual do estudante e que devem ser tomados como ponto de partida, podendo o professor, suplementar o conteúdo abordado, ou seja, adicionar conceitos complementares, mas não suprimir o que o documento apresenta.

Quanto a abordagem, para as DCEs os conteúdos devem ser abordados de forma articulada, possibilitando uma intercomunicação e complementação dos conceitos pertinentes a disciplina, devendo-se utilizar para isso as Metodologias de Ensino de Matemática, que para o documento, constitui de Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, Mídias Tecnológicas, Etnomatemática, História da Matemática e Investigações Matemáticas, de forma a valorizar e aprofundar o conhecimento proveniente do cotidiano do aluno. No ensino de funções, sugere mais especificamente a utilização da Metodologia de Resolução de Problemas.

Nessa tabela de conteúdos estruturantes e específicos, observa-se que o conteúdo estruturante de funções se encontra apenas no classificação de 8ª série/ 9º ano, trazendo como conteúdos específicos os já citados acima, função afim e função quadrática e como itens a serem avaliados, ou seja, objetivos a serem atingidos, que o aluno expresse a dependência de uma variável em relação à outra, reconheça uma função afim e sua representação gráfica, inclusive sua declividade em relação ao sinal da função, relacione gráficos com tabelas que descrevem uma função, reconheça a função quadrática e sua representação gráfica e associe a concavidade da parábola em relação ao sinal da função, analise graficamente as funções afins e analise graficamente as funções quadráticas.

2.2.3 BNCC

A primeira referência que a BNCC faz aos conceitos de relações e funções é percebida de forma indireta, na unidade temática álgebra, ao mencionar como objetivos que os alunos:

> identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. (BRASIL, 2018, p.268)

Podemos perceber a presença dos conceitos nas expressões “estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos” e na expressão “equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade”. E de forma mais direta, ainda na mesma unidade:

> os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. (BRASIL, 2018, p.269)

De forma específica, a BNCC apresenta uma tabela para cada ano do Ensino Fundamental Anos Finais, com Unidade temática, objetos de conhecimento e habilidade. O conceito de relação especificamente não aparece como objeto de conhecimento nas tabelas apresentadas, enquanto o conceito de função aparece como objeto de conhecimento na tabela do 9º ano, na Unidade Temática álgebra, apresentando como conceitos a serem abordados a representação numérica, algébrica e gráfica. Como habilidade desse conceito “compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis” (BRASIL, 2018, p.314-315).

Mas, ainda na mesma Unidade temática, podemos observar a apresentação de habilidade que caberiam também no objeto de conhecimento de Função, em outro objeto de conhecimento. Podemos citar a aplicação de taxa de variação na resolução de problemas, como habilidade do objeto de conhecimento grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais. Ou ainda, na tabela do 8º ano, na mesma Unidade Temática, álgebra, podemos citar os objetos de conhecimento sequências recursivas e não recursivas e variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais, com as habilidades Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes e Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano, respectivamente. De certa forma, estas habilidades estão relacionadas com conceitos básico de função, como representar elementos de uma função por uma equação algébrica, no primeiro caso e, no segundo caso, representar a situação no plano cartesiano, ou seja, uma representação geométrica.

2.2.4 Observações Gerais Referentes aos Currículos e os Conceitos de Relações e Funções

Pode-se perceber com base nas análises que os currículos prescritos salientam a importância de se trabalhar não só o conteúdo de função, mas todos os conteúdos matemáticos no geral, utilizando as metodologias de Resolução de Problemas, pois esta é citada nos três documentos mencionados, como propícia para o desenvolvimento da linguagem matemática e pensamento algébrico. Aparecem outras sugestões, para o desenvolvimento do conceito de funções, como utilização de software para desenvolver representações gráficas e promover a percepção de variações gráficas, a História da Matemática na valorização da Matemática como ciência em desenvolvimento, entre outras.

Enquanto os PCNs não listam um rol de conteúdo, mas citam apenas competências e habilidades que os alunos devem atingir em cada ciclo, as DCEs citam especificamente o conteúdo e junto com eles as competências e habilidades a serem atingidas pelos alunos. A abordagem da BNCC é semelhante à das DCEs, pois apresentam objetivos gerais para a disciplina de matemática e, apresentam as habilidades específicas a serem atingidas pelos alunos, de forma sucinta e direta em forma de tabela. Quanto ao conteúdo de relações, em nenhum documento ele foi apresentado como um conteúdo específico do ensino fundamental, estando apenas presente nos objetivos e habilidades, de forma indireta, apenas como um meio para um fim, desde o 7º ao 9º ano (2º ao 4º ciclo nos PCNs).

Referente ao conteúdo de funções, os PCNs citam como fundamental no 4º ciclo desenvolver a compreensão de conceitos como o de variável e de função, enquanto as DCEs trazem como um conteúdo específico no 9º ano, salientando a importância do entendimento de variável, a representação gráfica e o entendimento de função afim e quadrática. Para a BNCC, esse conceito deve ser desenvolvido no 9º ano, mas diferente das DCEs não salienta a necessidade de desenvolver os conceitos de função afim e quadrática, apenas o entendimento de função como dependência unívoca entre duas variáveis, desenvolvendo sua representação numérica, algébrica e gráfica, ou seja, desenvolve o conceito de uma forma geral.

Pensando nos dois documentos norteadores da Educação Básica Nacional, PCN, vigente até 2017, e BNCC vigente a partir de 2018, pode-se dizer que, no que trata dos conceitos de relações e funções, ambos tratam o tema de forma superficial no Ensino fundamental. Enquanto os PCNs ponderam apenas o desenvolvimento da ideia do conceito, sem mencionar conceitos específicos que devem ser ensinados, para que haja uma aprendizagem significativa, deixando uma variação conceitual ampla na margem curricular dentro do país, a BNCC, traz o conceito de forma simples e minimalista, apresentando apenas uma habilidade específica a ser atingida, limitando o conceito ao valor numérico, representação algébrica e gráfica, quando sabemos que envolve outros elementos significativos para a compreensão do mesmo. E, a supressão de conceitos necessários para a abordagem desses conteúdos, acarretará em defasagem de conhecimento se os docentes envolvidos nesse processo de ensino, não se disporem a suplementar o que a grade mínima exige.

2.3 CURRÍCULO PRÁTICO E O PNLD

Segundo SACRISTÁN (2000), considerar apenas os documentos curriculares oficiais como currículo não condiz com a realidade prática dos professores, pois estes consideram suas práticas anteriores e os livros didáticos com tanta utilidade quanto estes. Assim:

> o currículo que se realiza por meio de uma prática pedagógica é o resultado de uma série de influências convergentes e sucessivas, coerentes ou contraditórias, adquirindo, dessa forma, a característica de ser um objeto preparado num processo complexo, que se transforma e constrói no mesmo. (SACRISTÁN, 2000, p.102)

Ele ainda nos afirma que o currículo tem significados diversos, pois pode referir-se às disposições da administração, que determina um plano de estudo, objetivos, conteúdos, habilidades, etc...; ao produto dos livros didáticos; a estruturação das atividades que o professor trabalha em sala de aula; as experiências que o alunos trazem para a sala de aula; e até avaliações de experiência ou programas que fazem parte do processo e produtos de aprendizagem.

As vistas do descrito até aqui sobre o currículo prescrito, torna-se importante a análise do livro didático, sendo esta parte prática do currículo e sua utilização em massa nas escolas públicas do país com o surgimento em 1985 do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD).

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica. O programa é executado em ciclos trienais alternados e a escolha do livro didático é feita pelos professores. Assim, a partir de 2010, a cada ano o MEC adquire e distribui livros para todos os alunos de um segmento, que pode ser: Anos Iniciais do Ensino Fundamental, Anos Finais do Ensino Fundamental ou Ensino Médio. À exceção dos livros consumíveis, os livros distribuídos deverão ser conservados e devolvidos para utilização por outros alunos por um período de três anos. Os livros dispostos para escolha são sujeitados a uma avaliação pedagógica feita pelo MEC, desde 1996, conforme critérios previamente discutidos e que são aplicados até os dias atuais, sendo que os livros que apresentam erros conceituais, indução de erros, desatualizações, preconceito ou descriminalização de qualquer tipo são excluídos do Guia do Livro Didático. (BRASIL, http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/historico)

A Coordenação Geral de Materiais Didáticos (COGEAM) é responsável pela avaliação e seleção das obras inscritas no Programa Nacional do Didático (PNLD), bem como pela elaboração do Guia dos Livros Didáticos voltado a auxiliar o professor na escolha dos livros. As obras são inscritas pelos detentores de direitos autorais, conforme critérios estabelecidos em edital, e avaliadas por equipes de avaliação formadas por professores das redes públicas e privadas de ensino superior e da educação básica (Decreto nº 9.099, Acesso em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2017/Decreto/D9099.htm). Se aprovadas, compõem o Guia do Livro Didático, que orienta o corpo docente e o corpo diretivo da escola na escolha das coleções para aquela etapa de ensino (Anos Iniciais do Ensino Fundamental, Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Com o desenvolvimento do PNLD e sua utilização em massa nas escolas públicas do nosso país e sabendo a importância que o livro didático tem como currículo na prática docente, torna necessária uma análise sobre o conteúdo que este traz para as salas de aula, se está atendendo aos critérios estabelecidos a nível nacional pelos currículos e se faz isso de forma correta. A análise desse trabalho será limitada as definições e diferentes formas de representações dos conceitos matemáticos de relação e função no 9º ano do ensino fundamental anos finais. Para tanto, faz-se necessário compreender os conceitos de relação e função, sua importância no contexto social e como está o ensino desses conceitos atualmente. Essa discussão será realizada no capítulo que segue.

3. **RELAÇÕES E FUNÇÕES**

2.1 OS CONCEITOS DE RELAÇÕES E FUNÇÕES NA HISTÓRIA

Quando ensinamos conceitos matemáticos não podemos achar que estes simplesmente surgiram do jeito que são apresentados nos livros didáticos ou matemáticos. Todo conhecimento que nos é apresentado passou por um desenvolvimento histórico, incluímos nesses conceitos os de relação e função. Para entendermos os conceitos como nos são apresentados é necessário que conheçamos o seu desenvolvimento histórico, pois esse pode nos mostrar quais as dificuldades encontradas na sua formulação e desfazer a ideia de que a Matemática seria uma ciência estática. Esse subitem trata do desenvolvimento histórico dos conceitos de relação e função, mas de forma superficial, conjecturando sobre a forma que teriam surgido e citando algumas dificuldades encontradas pelos matemáticos que os desenvolveram.

Quanto ao questionamento de quem descobriu ou criou estes conceitos, nos baseamos em Ribeiro e Cury (2015). Esses autores nos dizem que se pensarmos em termos de representações de funções como tabelas e gráficos, podemos considerar que esse conceito já era usado pelas civilizações antigas como os babilônicos, egípcios, chineses, hindus, gregos, árabes que desenvolveram sistemas de tabelas, contagem entre outras situações que lembram o conceito intuitivo de função. Zuffi (2016) confirma a ideia anterior ao afirmar que há registros de uma ideia geral de função em tabelas de cálculos babilônicos de cerca de 2000 a.C. podendo ser consideradas como “funções tabuladas”, destinadas a um fim prático. Os gregos também faziam tabelas que conectavam a Matemática e a Astronomia, mostrando evidências de que percebiam a ideia de dependência funcional, através da interpolação linear.

Complementando os autores citados no parágrafo anterior, Ponte (1990) diz que podemos considerar tempos mais remotos quando as civilizações antigas iniciaram o processo de contagem, implicando uma correspondência entre um conjunto de objetos dados e uma sequência de números de contagem e mesmo as quatro operações aritméticas elementares, que são funções de duas variáveis. Dificilmente poderá se estabelecer uma data precisa do início do uso desses conceitos, pois pela sua aplicabilidade prática ele era utilizado antes mesmo de receber uma nomenclatura e um rigor matemático, de forma simples, com o uso de cálculos numéricos e valores tabelados.

Essa ideia de aplicabilidade fica clara quando Ribeiro e Cury (2015) afirmam que os babilônicos e egípcios tinham uma ideia implícita de função, pois usavam esse conceito para resolver problemas práticos do cotidiano utilizando o conceito de relação dentro do contexto de funções. Enquanto os gregos, utilizavam a ideia de funcionalidade ao trabalharem com casos particulares de leis de interdependência entre quantidades físicas, diferente do que foi desenvolvido pelos Europeus no período moderno, onde era encontrado um significado de variação funcional e de lei algébrica, operando o conceito por si só, considerando as suas propriedades, caracterizando o conceito formal utilizado atualmente.

De acordo com Youschkevitch (1976, apud ZUFFI, 2016) podemos classificar o desenvolvimento do conceito de função em três fases, a fase antiga onde a dependência entre duas quantidades não estavam isoladas da noção de variável e função; a Idade média, onde as expressões eram resolvidas de forma geométrica e mecânica, prevalecendo as descrições verbais ou gráficas e; o período moderno, onde Galileu Galilei (1564-1642) introduziu o quantitativo nas representações gráficas e Descartes (1696-1650) transcreveu as propriedades das curvas por meio de expressões algébricas, utilizando equações em x e y, estabelecendo uma correspondência entre conjuntos de pontos e conjuntos de números, que através de relações de interdependência, poderiam representar curvas, introduzindo assim, uma relação de dependência entre quantidades variáveis de modo a permitir o cálculo de valores de uma delas, a partir dos valores da outra (FAINGUELERNT; GOTTLIEB, 2007).

Apesar de vermos o desenvolvimento desses conceitos por vários matemáticos com enfoques diferentes, foram Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) que desenvolveram o conceito de função como o conhecemos hoje, ao estudarem as curvas e taxas de variações de quantidades que mudavam continuamente, sendo de autoria de Leibniz o termo função, constante, variável e parâmetro. E em 1939, Bourbaki foi responsável pelo estabelecimento da definição que utilizamos nos dias atuais. (ZUFFI, 2016)

Souza (2011) apresenta o desenvolvimento de algumas teorias que ajudaram aos matemáticos conjecturar as ideias iniciais de relação e função, enfatizando as citações anteriores quanto os conceitos de relações e funções terem surgido da necessidade de resolver problemas no transcorrer da história das civilizações. Um dos matemáticos citados é Oresme (1323-1382), que desenvolveu uma teoria geométrica de latitudes de formas representando diferentes graus de intensidade e extensão:

> Ao observar o deslocamento de um móvel em função do espaço e do tempo, Oresme percebeu a variação e reflete sobre como seria possível descrever matematicamente a aceleração uniformemente variada; como representar as formas fenomenais mutáveis do tempo. Ele compreende a relação de dependência e percebe que a dificuldade estava justamente em descrever as variações. (SOUZA, 2011, p.24)

Outros matemáticos ajudaram no desenvolvimento desses conceitos ao tentar resolver problemas, entre eles temos Descartes (1596-1650) que utilizou a ideia de derivada como forma de encontrar a tangente a qualquer ponto de uma curva, sendo esta curva a representação geométrica de uma equação em duas variáveis, indicando uma dependência entre as quantidades variáveis, tornando necessário o estudo das curvas por métodos algébricos. Outros problemas que impulsionaram o desenvolvimento destes conceitos foram o problema da corda de vibração, o problema de fluxo de calor em corpos materiais desenvolvido por Fourier (1768-1830) e mesmo a teoria do jogo iniciada por Cantor (PONTE, 1990)

No meio de desenvolvimento dessas teorias foram surgindo os conceitos de relações e funções. Teorias essas que determinaram a utilização de três conceitos primitivos de função nos séculos XVII e XVIII:

> (a) a notação algébrica, com aspectos importantes como simplicidade e rigor, permitindo a manipulação de expressões analíticas e condensando em si uma grande quantidade de informação; (b) a representação geométrica, produzindo uma base intuitiva fundamental, dos quais um exemplo notável é a associação das noções de tangente a uma curva e derivada de uma função; e (c) a conexão com os problemas concretos do mundo físico, associada à idéia de regularidade, proporcionando motivação e interesse fundamentais para o estudo das famílias de funções. (PONTE, 1990, p.8)

Com os incensantes estudos que envolviam os conceitos de relação e função, os matemáticos começaram a considerar funções que não correspondiam à expressão analítica e que não possuíam uma representação geométrica simples ou mesmo funções que não tinham relação com situações físicas concretas, foram criadas com base nas conjecturas e o conceito começou a evoluir por conta própria e foi marcado pela preocupação com a coerência e com a generalidade. (PONTE,1990)

Hoje, quando estudamos e ensinamos relações e funções, encontramos em muitos materiais de estudo o conceito de relação como pré-requisito para o conceito de função, pois esta última seria um caso particular da primeira. É interessante notarmos que de acordo com PONTE (1990) a evolução do conceito de função permitiu o desenvolvimento da noção de correspondência para a noção de relação, que constitui um conceito primitivo na teoria de função. Essa noção de relação foi apresentada por Bento Caraça (1951) como a Ferramenta Matemática necessária para o estudo quantitativo de fenômenos naturais, medindo-os, quantificando-os e identificando regularidades, mas, havia sido iniciada por Galileu (1564-1642) e Kepler (1571-1630) e tendo seu desenvolvimento baseado na notação algébrica moderna de Viéte (1540-1603) e na geometria analítica introduzida por Descartes e Fermat (1601-1665).

Essa associação entre representações algébricas e geométrica na aplicação do conceito de função é o que torna essa teoria tão importante no desenvolvimento do pensamento matemático e da própria Matemática, tanto histórica quanto atual, contribuindo para o desenvolvimento de outras ciências como a Física, Biologia, Química, Economia, Estatística e outras mais ao permitir o estudo de fenômenos utilizando modelos matemáticos que são compostos de variáveis, das relações entre elas e das suas respectivas taxas de variação. A possibilidade de serem representadas de forma algébrica e gráfica, permite uma releitura da realidade com maior precisão, pois são excelentes ferramentas para estudar quantidades que podem variar no tempo e no espaço, podendo variar com outras quantidades, ou mesmo variar simultaneamente em diversas dimensões. Essa variação pode ser mais rápida ou mais lenta, ou pode até desaparecer em algum momento, podem seguir padrões simples ou complexos e obedecer a restrições muito diversificadas (PONTE, 1990).

3.2 DEFINIÇÕES DE RELAÇÕES E FUNÇÕES E SUAS MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES

O primeiro passo para se ensinar algo a alguém é conhecer intrinsicamente o conceito envolvido e se apropriar o máximo possível de suas propriedades, compreendendo todos os processos envolvidos e necessários para uma boa interpretação e utilização desse conhecimento. Com o objetivo de adquirir o necessário para ensinar os conceitos de relação e funções, são apresentados nesse item alguns autores cujas interpretações e definições desses conceitos se apresentaram pertinentes no desenvolvimento dessa pesquisa, contextualizando em um primeiro momento sobre a importância desses conceitos na sociedade e em seguida apresentando quais as ideias envolvidas até uma definição matematicamente correta.

Dentro do aspecto de sua importância, podemos dizer que a utilização dos conceitos de relação e função estão contextualizados nas práticas e desenvolvimento da sociedade a milhares de anos e nos permite concordar com Fainguelernt e Gottlieb (2007) sobre o fato da necessidade de relacionar objetos constituir a essência do nosso conhecimento e a sua compreensão. Permite também, concordar com Ponte (1990) ao considerar que o conceito de função é um dos mais importantes em toda a Matemática, sendo as funções excelentes ferramentas para a Resolução de Problemas de variação e para aplicações da Matemática que pressupõe a noção de modelo[4], constituído por variáveis, relações entre elas e suas respectivas taxas de variação[5]. Complementando a ideia de Ponte (1990), Silva et al. (2018) diz que, função é um dos conceitos centrais da Matemática, e sua importância transcende os limites dessa ciência, sendo fundamental para descrever fenómenos em diversas áreas do conhecimento, não só nas mais próximas, como a Física, a Química, ou as Engenharias como também em Biologia, Geografia, Sociologia, e em situações cotidianas diversas.

Percebemos essas relações na prática recorrente do cotidiano de comparação de grandezas ou características, o que segundo Fainguelernt e Gottlieb

[4] Modelo: Aquilo que serve ou deve servir como objeto de imitação. (RIOS,2010, p.354)

[5] Taxas de variação: Dadas duas variáveis, x e y, onde y se relaciona com x e varia de acordo com as suas variações, ou seja, depende de x, determina-se como taxa de variação, a medição da variação dos valores de y para cada uma unidade de x (y/x).

(2007) caracteriza um relacionamento entre objetos, quando, por exemplo, comparamos preço de mercadorias, idade de pessoas, área de terrenos, ser divisor de números naturais, comparar grandezas de mesma espécie classificando em menor, maior ou igual, etc. E, identificar relações é um dos trabalhos mais importantes, para quem estuda Matemática por esta ser a ciência que investiga as relações entre os objetos abstratos e através delas cria modelos capazes de descrever fenómenos naturais e sociais, sendo algumas dessas relações chamadas de funções (CAETANO e PATERLINE, 2013). Para Silva et al. (2018) as funções além de conectar grandezas e medidas, conectam conjuntos numéricos e até variáveis que não podem ser quantificadas, como, por exemplo, as variáveis qualitativas estudadas pela Estatística (classe social, cor dos olhos, local de nascimento, gênero, etc.).

Como a Matemática reflete a necessidade de compreender e construir relações, torna-se necessário, para analisar se o processo de ensino aprendizagem desses conceitos vêm sendo desenvolvidos de forma suficiente e coerente com a importância social que representam, um conhecimento preciso dos conceitos de relação e função. Utilizamos para essa análise três autores: Caraça (1952), Caetano e Paterline (2013), Lima (2013) e Silva et al. (2018). Segue na sequência um relato das concepções de cada autor sobre esses conceitos.

Caraça (1952) apresenta uma análise intuitiva da definição desses conceitos, permitindo uma concepção mais ampla. Em um primeiro momento justifica a existência desses conceitos afirmando que o objetivo final da ciência é a formação de um quadro ordenado e explicativo dos fenômenos naturais, sejam eles físicos ou humanos, individuais ou sociais. Esses fenômenos estariam todos relacionados uns com os outros, um dependendo do outro e em constante evolução e o desenvolvimento dessa análise se daria a partir de um recorte da realidade, afim de melhor compreendê-la.

Baseado nesse recorte da realidade, Caraça (1952) considera dois componentes A e B e afirma que existirá entre eles relações, uma de A com B e outra de B com A, essa relação é definida como a correspondência entre esses dois objetos de forma interdependente, onde a cada relação de interdependência corresponde uma qualidade de A em relação a B e de B em relação a A, definindo a unicidade da relação, pois a relação de interdependência de A com B será diferente da relação de interdependência de A com C. A garantia da unicidade é determinada pela qualidade da relação entre dois objetos e não pela qualidade do objeto e, a primeira varia de acordo com as relações dos objetos selecionados. Observa-se nesse ponto que Caraça (1992) define relação entre objetos da natureza, que não necessariamente são entes matemáticos.

Ele cita como uma das tarefas mais importantes, a procura de regularidades dos fenômenos naturais e chama-as de leis, podendo ser qualitativas e quantitativas. Afirma que à medida que se conhece melhor a realidade as leis tendem a se tornar mais quantitativas, uma vez que para se explicar as variações de qualidades deve-se aprofundar as variações de quantidades. No estudo das leis quantitativas, surge um instrumento matemático cuja essência é a correspondência de dois conjuntos que consiste na correspondência de dois conjuntos numéricos. Neste ponto Caraça (1952) insere o conceito de variável, como uma representação simbólica que representa qualquer elemento de um conjunto, seja ele finito ou infinito, e determina que o seu domínio pode ser contínuo ou discreto.

Se considerarmos a natureza a que se refere Caraça (1952) como a realidade social em que vivemos, então Fainguelernt e Gottlieb (2007) concordam com ele em sua obra que trata exclusivamente dos conceitos de relações e funções, ao afirmarem que o conceito de relação deve ser apresentado em Matemática com o mesmo sentido que no cotidiano, com comparação de grandezas ou características e que apresentam significado quando estabelecidas dentro de um contexto, ou seja, deve basear-se em um conjunto de referência, podendo então serem estabelecidas relações entre conjuntos diferentes ou dentro de um mesmo conjunto. Mas voltando aos autores que estão sendo analisados, Caetano e Paterline (2013) confirmam a amplitude da utilização do conceito de relação quando argumentam:

> Evitamos descrever relação através da linguagem comum devido à dificuldade de fazer isso. Relação é uma associação? Uma regra? Uma equação? Na verdade, é tudo isso, mas pode ser também outras coisas que nem saberíamos descrever. Assim, consideramos “relação” como um conceito espontâneo e que pode ser potencializado, do ponto de vista da Matemática (CAETANO e PATERLINE, 2013, p.40)

Eles ainda complementam a conceituação relação e a identificação de relações ao apresentarem algumas características que devem ser observadas em uma relação Matemática, independente do seu contexto como: Identificar com precisão os conjuntos de partida e chegada; aplicar corretamente a regra que define a relação; verificar se há algum elemento no conjunto de partida que se relaciona com apenas um, mais de um elemento do conjunto de chegada ou nenhum deles; verificar se “restam” elementos no conjunto de chegada, ou seja, se algum elemento desse conjunto não entra na relação.

Partindo das observações das características citadas acima, os autores destacam as relações unívocas, pela sua presença sólida nas aplicações da Matemática, pois apresentam características necessárias para descrever muitos fenômenos através de modelos determinísticos, recebendo um nome específico, funções, e apresentam uma definição para estas relações:

> Uma função é constituída de um conjunto de partida A, de um conjunto de chegada B e de uma relação entre esses conjuntos que satisfaça as seguintes condições particulares: ▹ (i) todo elemento de A faz parte da relação; ▹ (ii) cada elemento de A está relacionado com um único elemento de B. (CAETANO e PATERLINE, 2013,p.18)

Apresentam também alguns termos que são normalmente utilizados pela Matemática para definir precisamente os elementos que constituem a função:

> dada uma função $f: A \to B$, o conjunto de partida A chama-se domínio de f, e o conjunto de chegada B chama-se contradomínio. Se x é um elemento genérico de A, o elemento de B $f(x)$ que lhe corresponde é chamado imagem de x por f. O conjunto dos elementos $f(x)$ de B para todo x em A chama-se conjunto imagem de f, ou, simplesmente, imagem de f. (CAETANO e PATERLINE, 2013, p.24)

Resumindo o conceito desses dois autores, função seria a nomenclatura que representa relações entre dois conjuntos um dito domínio e outro contradomínio onde, cada elemento do primeiro conjunto está relacionado com apenas um elemento do segundo conjunto, dito imagem. Com essa mesma conceituação, Silva et al. (2018), as apresenta de uma forma mais sucinta:

> **Função:** Dizemos que uma relação f entre os elementos de dois conjuntos não vazios, A e B, é uma função de A em B se todo elemento do conjunto A estiver relacionado a um único elemento do conjunto B.
>
> Assim, para cada x ∈ A deve existir um único elemento y ∈ B que está associado a x pela função f. Esse elemento y é também denotado por f (x):

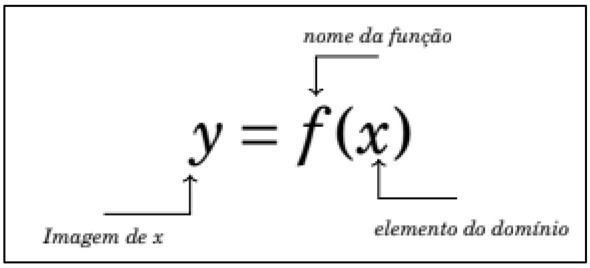


Figura 1 - Definição de Função
Fonte: Silva et al. (2018)

> O conjunto A é chamado domínio da função f, o conjunto B é chamado contradomínio de f e o subconjunto de B formado pelas imagens de todos os elementos de A é chamado conjunto imagem da função f. (SILVA et al., 2018, p.5)

Já para Caraça (1952), função é um instrumento próprio para estudar as leis, onde as leis consistem em uma correspondência entre duas variáveis, onde uma delas está em função da outra, onde uma é dita variável dependente e a outra variável independente. Sua definição para função é:

> Definição: Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se
> 1) $y = f(x)$
> se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \to y$. A x chama-se variável independente, a y variável dependente. (CARAÇA, 1952, P.129)

Neste ponto, ele cita a definição analítica de função como um meio de dar um conjunto de operações de tal modo que, por meio delas, possa fazer corresponder um valor a de x um valor b de y, frisando que não se confunda o conceito de função com o de expressão analítica, pois esta é apenas um modo de estabelecer a correspondência das duas variáveis. Enquanto (LIMA, 2013), não se prende a conceituação de relação e na sua ideia intuitiva, apresenta a definição de função com uma linguagem Matemática acentuada, mas que acaba unindo as definições dos dois autores anteriores:

> Dados os conjuntos X e Y, Uma função $f: X \to Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se " y igual a f de x". O conjunto X chama-se domínio e Y é o contra-domínio da função f. Para cada

> $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. (LIMA, 2013, p.36)

O desenvolvimento do conceito de relação, pelos autores citados, ocorre de forma intuitiva, com o uso de situações que permitam a compreensão da relação entre objetos, sejam eles matemáticos ou não e que componham a natureza do indivíduo que faz a análise. Existem nesse conceito algumas ideias básicas que devem ser percebidas, como o fato de haver relação se for entre dois conjuntos, iguais ou diferentes, a existência de uma ‘lei’ de vinculação entre os objetos dos dois conjuntos. Para o conceito de função, as quatro definições apresentadas trazem a essência da definição de função, deixando claro o fato de função ser um tipo de relação com características específicas como, a vinculação de todos os elementos do conjunto domínio com apenas um elemento do conjunto dito contradomínio. Os autores Caetano e Paterline (2013) e Silva et al. (2018) utilizaram uma linguagem menos formal em termos matemáticos, ou seja, utilizaram uma linguagem menos simbólica, com utilização de expressões literais nas suas definições, porém mais acessível para leigos no assunto, enquanto Caraça (1952) e Lima (2013) utilizam uma linguagem formal, com ênfase na notação matemática, pouco compreendida pela população em geral. O que não podemos esquecer é que:

> A aplicação da Matemática nas mais diversas áreas são feitas na maioria das vezes, por meio da noção de modelo matemático. Um modelo matemático[6] permite representar uma determinada situação ou fenômeno a partir de variáveis e de relações entre essas variáveis. Portanto, funções são fundamentais tanto na concepção e construção de um modelo matemático como no estudo desses modelos. (SILVA et al.,2018, p.2-3)

Além das definições, esses conceitos também apresentam diferentes formas de representações, que colaboram na compreensão do significado e análise desses conceitos. Para ajudar na compreensão desses conceitos é apresentado no próximo subitem as diferentes formas de representação de relações e funções e em quais situações é conveniente utilizá-las.

[6] Modelo Matemático: Representação matemática, com base em conceitos, obtida pela análise de dados reais ou fictícios.

3.2.1 Representações

A Matemática trabalha com objetos abstratos que não são diretamente acessíveis a percepção, sendo necessária uma representação, seja ela por símbolos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos ou desenhos, que permita a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de diferentes representações de um mesmo objeto (DAMM, 2008, p.167). Para Duval (2011) o progresso do conhecimento está estritamente ligado à invenção de novos sistemas de representação reduzindo o emprego da linguagem nas explicações Matemáticas ou nos enunciados finais, sendo a representação algébrica e gráfica um acesso as funções.

Ainda segundo Duval (2011) a atividade Matemática consiste na transformação semiótica, permitindo abrir um campo de operações específicas que permitem transformá-las em novas representações, tomando consciência das operações de cada um dos registros mobilizados, criando uma autonomia mínima de controle que permite produzir novos conhecimentos, uma vez que seus processos de exploração e de prova, e mesmo de aplicação a realidade, consiste na transformação de representações semióticas. Ele afirma que os registros são as ferramentas que permitem analisar todas as produções Matemáticas, principalmente as produzidas com objetivo de ensino e aprendizagem, fazendo então, um inventário das variações possíveis que permitem passar de uma representação a outra, gerando todas as modificações para convertê-la para esse outro registro. Cada registro permite efetuar operações de transformações das representações que não são possíveis em outros registros, constituindo uma variável cognitiva de tratamento, essencial para entrar nas condutas Matemáticas de definição, prova, visualização, raciocínio e para desenvolver as práticas heurísticas sem as quais não é possível resolver um problema.

Considerando que o tema desse trabalho são os conceitos de relação e função, apresenta-se de acordo com Fainguelernt e Gottlieb (2007) as possíveis formas de representar relações e funções, devida a importância das múltiplas representações no processo cognitivo de ensino aprendizagem. De acordo com os autores, pode-se representar uma relação de seis formas diferentes: linguagem coloquial; linguagem simbólica; conjunto dos pares ordenados; diagrama sagital; plano cartesiano; e tabela de dupla entrada ou tabela matricial.

São apresentados na sequência uma descrição do que seria cada forma de representação e um exemplo da mesma, utilizando para isso uma relação R entre dois conjuntos de elementos A e B:

- **linguagem coloquial**: descreve-se com palavras qual a característica que define essa relação entre os conjuntos A e B. Um exemplo dessa representação seria: **'A relação R entre os conjuntos A dos algarismos e B dos números entre 1 e 20, que associa cada elemento de A com o seu quadrado no conjunto B'**.
- **linguagem simbólica ou algébrica**: utiliza-se símbolos matemáticos e algébricos para descrever a relação entre A e B. De acordo com (CAETANO e PATERLINE, 2013) essa linguagem algébrica nos dá a oportunidade de sermos mais precisos, nos ajudando a pensar com exatidão. Um exemplo dessa representação seria: **Os conjuntos** $\boldsymbol{A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}}$ **e** $\boldsymbol{B = \{x \in \mathbb{Z} | 1 < x < 20\}}$ **e a relação** $\boldsymbol{R = \{\, (x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}}$**.**
- **conjunto de pares ordenados:** associando um elemento do conjunto A com seu correspondente do conjunto B, assim o primeiro elemento de cada par pertence ao domínio e o segundo elemento pertence a imagem e dizemos que o segundo elemento é a imagem do primeiro elemento pela relação R do conjunto A no conjunto B. Um exemplo dessa representação seria: $\boldsymbol{R = \{(2, 4); (3, 9); (4, 16)\}}$.
- **diagrama sagital:** ao representar os elementos dos dois conjuntos cada um em um 'balão' e unir os elementos do conjunto A com os do conjunto B por setas. Um exemplo dessa representação seria:

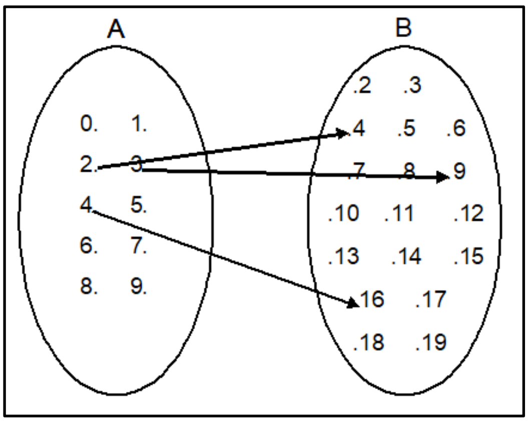


Figura 2 - Diagrama Sagital
Fonte: Autoria própria

- **plano cartesiano:** ao associar pontos do plano com os elementos do conjunto A que se relacionam com elementos do conjunto B. Essa relação no plano cartesiano pode ser representada como pontos isolados, linhas ou regiões do plano de acordo com a definição dos conjuntos A e B e as relações definida entre eles. Um exemplo dessa representação seria:

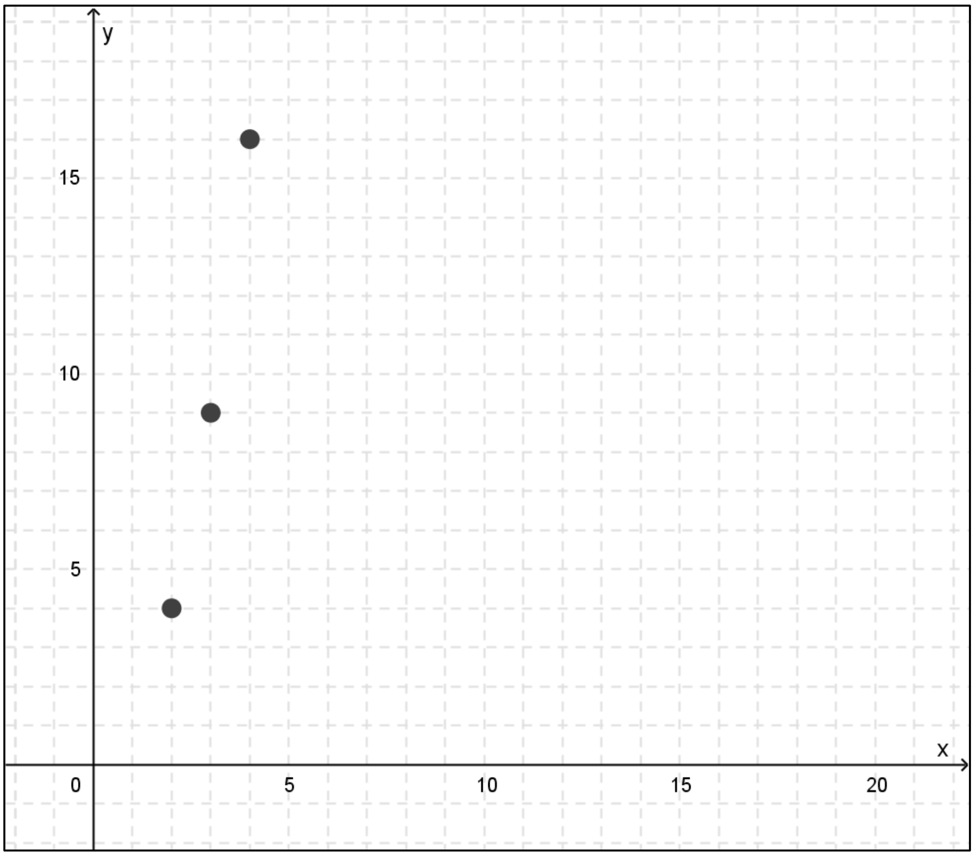


Figura 3 - Representação De Um Plano Cartesiano
Fonte: Autoria própria

- **tabela de dupla entrada:** ao dispor os elementos do conjunto **A** como primeira entrada de uma tabela e os do conjunto **B** como segunda entrada marcando as relações que ocorrem, não sendo necessário colocar cada par ordenado, somente um símbolo. Um exemplo dessa representação seria:

B A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0																		
1																		
2			X															
3								X										
4															X			
5																		
6																		
7																		
8																		
9																		

Figura 4 - Tabela De Dupla Entrada
Fonte: Autoria própria

Das representações apresentadas, algumas são limitadas para alguns contextos, como afirmam Fainguelernt e Gottlieb (2007) ao salientar que as representações por diagrama sagital, enumeração de pares ou tabelas de dupla entrada só devem ser usadas em relações com um número finito e pequeno de elementos nos conjuntos A e B. As representações apresentadas podem ser usadas com relações e consequentemente com funções, porém no contexto de funções tem algumas representações que são mais usuais como tabelas, gráficos, regras escritas expressas em palavras, ou fórmulas algébricas Caetano e Paterline (2013).

As obras dos autores Caetano e Paterline (2013), ressaltam a utilização da representação na forma algébrica nos conceitos de relações e funções, pois permitiriam a sintetização da linguagem, dando a oportunidade de ser mais preciso na obtenção de resultados e a pensar com exatidão, sobre tudo por ser necessário nessa representação nomear as funções e dar significado a elementos da notação como os dois pontos que servem para separar o nome da função do nome do conjunto ou da variável, ou a seta que indica o conjunto de domínio e de contradomínio ou a relação existente entre as variáveis. Para eles essa notação deixa claro quem é o conjunto de partida, o conjunto de chegada e uma relação que associa cada elemento do conjunto de partida a um único elemento do conjunto de chegada.

A utilização das duas primeiras, linguagem coloquial e simbólica, é justificada por Caraça (1952) quando cita o fato de que toda função apresenta uma representação geométrica, que pode ser construída quando uma função é definida pela linguagem simbólica ou coloquial, podendo assim, associar a cada valor *a* da variável x a um valor *b* da variável y, vinculando *a* e *b* a um par ordenado, ou seja, um ponto do plano cartesiano Oxy e feita essa analogia para cada par de valores das duas variáveis obtemos no plano um conjunto de pontos.

> O conceito de função permite estabelecer uma correspondência entre as leis matemáticas e as leis geométricas, entre as expressões analíticas e os lugares geométricos (conjunto de todos os pontos que gozam de uma mesma propriedade). Para estabelecer essa correspondência não há mais que, a cada *expressão* analítica, fazer corresponder aquele *lugar* que defini a mesma função que ela. A expressão analítica, ou, melhor, a igualdade y = *expressão analítica* chama-se *equação* do lugar que lhe corresponde (CARAÇA, 1952, p.139)

Na mesma linha de pensamento de Caraça (1952), Caetano e Paterline (2013) ressaltam que a representação visual das relações e particularmente de funções, é um importante recurso para a comunicação da informação, pois ao analisarmos funções que descrevem algum fenômeno natural ou social, nota-se que os conjuntos domínio e contradomínio são impostos pelas características do próprio fenômeno, e geralmente pensamos nos pares que estarão na relação (elemento do conjunto de partida e elemento do conjunto de chegada), definindo uma função como um conjunto de pares ordenados, que podem ser representados em um plano cartesiano. E Silva et al.(2018) salienta que cada par identifica as grandezas ou variáveis relacionadas e a ordem no par distingue o papel de cada uma delas: elemento do domínio, abscissa, e imagem, ordenada, permitindo também a identificação da relação estabelecida entre as variáveis e nos casos em que as variáveis assumem valores reais, sua representação gráfica no plano cartesiano será o conjunto dos pares ordenados $(x, f\ (x))$ em que x pertence ao domínio da função, sem contar que os conjuntos domínio e imagem ficam evidenciados na representação gráfica de uma função, facilitando sua determinação a partir dos eixos coordenados.

De um modo geral quando se trata da representação de conteúdos matemáticos Duval (2012) salienta que se deve poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) e no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro.

> o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações. A coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis. É nestas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente como representação, quer dizer, ela dá acesso ao objeto representado. (DUVAL, 2012, p.270)

Para ele, no processo de representação de conceitos, considerando as suas múltiplas representações deve-se considerar três características sendo elas, a representação identificável, transformação da representação dentro do mesmo registro que foi representada e a transformação da representação em um novo registro. Inicialmente considera a representação identificável de um registro dado (conteúdo), seja por uma frase, texto, desenho, esquema, fórmula, etc., implicando em seleção de relações e de dados do conteúdo a representar, em função de unidades e de regras de formação no qual a representação é produto. A função destas regras é de assegurar as condições de identificação e de reconhecimento da representação e a possibilidade de sua utilização para tratamentos. Depois procedimento inicial está o tratamento de uma representação que consiste na transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada com o tratamento sendo uma transformação interna a um registro e com regras de tratamento próprio a cada registro. E em última instância a conversão de um registro em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial, sendo a conversão uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento. A conversão seria transcrever uma representação de registro em outra diferente da inicial utilizando substituições, aplicando regras de correspondências, efetuadas diretamente sobre os significantes que compõem a representação, sem considerar a organização de representação da mesma e nem o que representa. Geralmente somente a formação e o tratamento são levados em conta no ensino.

De forma resumida DUVAL (2012) afirma que devemos saber representar dados e relações de um conteúdo inicial, tratar essa informação dentro da representação obtida e transformar essa em uma nova representação fazendo tratamentos dentro dessa nova representação de forma a obter a compreensão do significado do conceito em sua totalidade dentro de cada representação a que este é submetido.

3.3 O ENSINO DE RELAÇÕES E FUNÇÕES NOS DIAS ATUAIS.

Não tem como pensar em ensino de Matemática sem pensar em um currículo. Nas últimas décadas o currículo da educação Matemática vem sofrendo mudanças em todos os âmbitos, desde conteúdos considerados necessários a metodologias e considerações sociais. Dentro destas transformações o conteúdo de funções também veio sofrendo transformações quanto a conceitos abordados, metodologias e suas aplicações em diversos setores da sociedade.

Desde as décadas de 60 e 70 até os dias atuais vem se discutindo o currículo da educação Matemática. Percebe-se no transcorrer destas discussões que os conceitos matemáticos que a priori eram formais, metódicos e lógicos passam a ganhar uma característica mais aplicável e social desde a metodologia com a qual trabalham-se os conceitos tanto quanto o seu rigor matemático. A Matemática então deixa de ser usada apenas pela Matemática e segundo Pires (2008) surgem propostas:

> com projetos que estimulem a interpretação e explicação da realidade, permitindo aos alunos um processo de análise crítica de valores e ideias, mediante atividades apresentadas em contextos significativos para os alunos, centradas em problemas ou tarefas estimulantes referentes ao entorno físico e social mais amplo. Surgem também propostas de trabalho de "investigação em sala de aula", com o objetivo de aproximar o fazer do aluno do fazer matemático, ou seja, de atividades inerentes ao processo de construção histórica do conhecimento, como a experimentação, a validação, a comunicação por escrito da experiência, entre outros. (PIRES, 2008, p.28)

Essa ideia de Educação Matemática com base em metodologias mais contextualizadas permanece até os dias atuais, é concretizada pelos PCNs e considera relevante o contexto social em que o estudante está inserido. Referente especificamente ao Ensino Médio e ao ensino de funções este documento deixa em aberto os conceitos que devem ser trabalhados, frisando apenas com qual intuito devem ser explorados, o que segundo Pires (2008) seriam valores formativos e instrumentais, sem deixar de ser vista como ciência com suas características e estruturas específicas, além de fornecer informações e instrumentos necessários que permitam ao estudante continuar aprendendo.

Segundo a autora, esse currículo não se concretiza na prática da sala de aula, devido a fatores que vem se arrastando a décadas na educação brasileira, como os baixos salários do magistério, a rotatividade de pessoal nas escolas, a qualidade da formação dos docentes, também pela falta de políticas públicas de implantação curricular e de avaliação das inovações para verificação de eficiência das mesmas.

O conceito de função por sua vez, desde a década de 70, teve propostas para ser trabalhado a partir de situações cotidianas dos alunos utilizando as ferramentas necessárias quando fossem oportunas, e se pensarmos na contextualização sugerida pelos PCNs atualmente, essa proposta não está fora de contexto. Porém essa ideia contradiz Ponte (1990), ao dizer que:

> Pedagogicamente parece aconselhável introduzir as funções como correspondência entre conjuntos numéricos. Os exemplos “bem comportados”, em que existe uma expressão analítica ou uma regra simples devem ser de todo salientados. (PONTE, 1990, p.8)

Neste contexto de contradições, o que vem fazendo os docentes no seu currículo prático? Respondendo essa pergunta Zuffi (2016) em uma de suas pesquisas publicadas no seu artigo “Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função” referente aos trabalhos dos docentes, nos diz que:

> as definições foram elaboradas de maneira a atingir as mais recentes propostas históricas, muito próximas às definições de função de Dirichlet e Bourbaki, enquanto que no tratamento informal, ou com exemplos e resoluções de problemas/exercícios, as ideias propostas para as funções estavam muito mais próximas da definição de Euler, dando destaque para as expressões analíticas (algébricas) que representavam as funções. [...] faziam uma separação bastante dicotômica entre o “teórico” e o “prático”, relegando ao primeiro, um papel muito menor. Em geral, as definições formais eram colocadas na introdução do assunto (funções) e depois eram abandonadas ao tratarem dos exemplos, exercícios e problemas relativos ao tema (em geral, nesta ordem), sem que houvesse uma aproximação mais detalhada das ideias que cada uma delas destacava. Acreditamos que essas práticas ainda persistam para muitos professores, ao tratarem dessa temática em sala de aula. (ZUFFI, 2016, p.8)

Pelo apresentado por Zuffi (2016), podemos dizer que os docentes na sua prática trabalham com o conceito formal e com o conceito contextualizado, mas que não conseguem vincular de uma forma produtiva essas duas formas de apresentação de conceitos, muito provavelmente por serem frutos de uma formação sistemática e formal o que dificulta a prática pedagógica contextualizada, quanto mais partir da contextualização para um conceito formal.

Rezende (2003) vai ainda mais fundo ao criticar a forma como o conceito de função é apresentado no ensino médio, apenas como uma expressão analítica, determinando uma correspondência estática entre as variáveis “x” e “y”, sem associar ao contexto de variabilidade, sendo seus gráficos plotados por uma tabela, com valores notáveis, com suas curvas induzidas pelo professor e não deixando clara a diferença entre discreto e contínuo. Além disso, diz que seus elementos principais são ignorados, pois discute-se crescimento/decrescimento, zeros e períodos das funções, mas, não se discute seus pontos críticos, que são os elementos de articulação no esboço do gráfico de uma função de uma variável, formando um conceito estático, estético e induzido por propriedades algébricas e assim conceituadamente errado. E esta conceituação errônea, não permitiria ao aluno “enxergar” as quantidades variáveis em um problema e nem a relação funcional entre elas e, sem conseguir identificar o que varia e em função de que varia não conseguem resolver o problema em questão. Sendo esse conceito de funcionalidade/variabilidade um eixo fundamental para o desenvolvimento do cálculo, principalmente no aspecto de relação interdependente entre quantidades variáveis.

A prática como professor de Matemática no Ensino Fundamental e Médio, apesar da possibilidade de contextualização e interdisciplinaridade no ensino de funções, não garante aos alunos uma efetiva aprendizagem ou a flexibilidade esperada para a Resolução de Problemas diversos. Margarinus (2013) reforça o dito por Zuffi (2016) e Rezende (2013), ao observar em seus trabalhos que os alunos demonstram dificuldades em trabalhar com funções, poucos parecem compreender seu conceito e o mesmo ocorre com estudantes do Ensino Superior. Mas, mais interessante foi investigar o conhecimento do professor de Matemática sobre o conceito de função, pois verificou-se que estes, quando confrontados com questões envolvendo funções que geralmente são abordadas no ensino básico, apresentam erros de abordagens e conceitos.

Além dessa dificuldade dos professores, Ponte (1992) cita o fato dos alunos chegarem ao ensino médio com muita dificuldade no desenvolvimento do pensamento abstrato, dificultando a vinculação de equações algébricas com gráficos cartesianos, uma vez que a Matemática escolar pressiona o uso de entidades abstratas, sem considerar as bases naturais que seriam a utilização de estratégias numéricas. Para ele, essa é a estratégia com a qual os alunos se sentem mais confiantes. Para Caetano e Paterline (2013), os equívocos cometidos pelos alunos também se relacionam ao não entendimento do significado daquilo que está sendo representado algebricamente, que pode estar relacionado à incompreensão de conceitos ali subentendidos, como determinar o domínio mais adequado a cada situação, ou relacioná-la com gráficos, tabelas e expressões escritas.

Segundo Matos Filho (2008) esses erros conceituais de funções também foram cometidos durante a formulação histórica do seu conceito, uma vez que o interesse era resolver problemas de natureza prática, saindo da ideia de funcionalidade que era atribuída ao conceito de função na Idade Antiga e chegando na Idade Moderna. Ele e Zuffi (2016) concordam quando dizem que, é comum que professores e alunos geralmente pensem nas funções somente em termos de equações e de elementos desconhecidos a serem extraídos, as ideias que estas englobam, de conjuntos, relação e variabilidade ficam perdidas, mostrando dificuldades em determinar quais eram as variáveis dependentes e independentes, identificando mais a função com uma expressão analítica, forma considerada por Euler, do que como uma relação especial entre duas variáveis.

Considerando que a maioria dos professores, principalmente de escolas públicas, baseiam suas aulas nos livros didáticos, torna importante analisar de que forma estes tratam os conceitos de relações e funções. Neste ponto Silva (2007), em um de seus trabalhos de análise de livros didáticos de Ensino Médio, salientou que na atualidade, os livros buscam atender os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) e a LDB (Leis de Diretrizes e Bases), no sentido de propor a metodologia de Resolução de Problemas como alicerce na construção do conceito de função, mas que não enfatizam questões referentes as representações gráficas, no ponto de vista da construção cognitiva. E a partir de 2018, os livros didáticos do PNLD serão baseados na BNCC para sua elaboração, que considera a metodologia de Resolução de Problemas, mas não enfatiza a sua utilização. E quanto as considerações conceituais, este documento, assim como os PCNs, tratam os conceitos de forma superficial, sem dar ênfase específica a pontos considerados imprescindíveis para o ensino de relações e funções, como a sua definição, ressaltando apenas o seu valor numérico e representações algébricas e gráficas e, sem descrever o tratamento que deve ser dado dentro dessas representações.

De uma forma geral no contexto de representações dos conceitos, Duval (2012) descreve que no atual ensino, os envolvidos consideram que a conversão das representações acontece por si mesma, desde que haja capacidade de formar representações nos registros diferentes e efetuar tratamentos sobre as representações. Quando se trata de função podemos citar como exemplo a construção de um gráfico com uma equação, substituindo na equação valores numéricos nas variáveis. Eles consideram ainda, a conversão sem importância real para a compreensão dos objetos ou dos conteúdos representados, pois o seu resultado se limita a uma mudança de registro. Mas, neste ponto estariam mascarando a característica fundamental desta atividade para a compreensão, negligenciando o fato de que na aprendizagem a conversão desempenha um papel essencial na conceitualização e, para melhor percebê-la, se examina o quanto a diversidade de registros de representação engloba.

No sentido de atender todas as demandas de defasagens que encontramos na compreensão dos alunos e até de professores sobre os conceitos de relação e funções, devemos refletir sobre o processo de ensino, de que forma ele deveria ocorrer e em que pontos falhos devemos focar, quais são os elos entre as representações que estão deixando de ser significados e o tratamento que se está dando a cada representação, sempre considerando o aspecto prático e matemático desses conceitos. Afim de entender como suprir essas falhas, analisamos no tópico seguinte o que os pesquisadores dessa área sugerem.

3.2.2 Observações Sobre o Ensino de Relações e Funções Segundo Alguns Autores

Para dar conta da demanda conceitual e metodológica no ensino de relações e funções, Caetano e Paterline (2013) sugerem que o professor deve desenvolver uma sequência didática adequada para o ensino de relações e funções partindo do conhecimento prévio adquirido pelo aluno, pensando sempre de onde vem esse conhecimento que gera essas concepções prévias. Observando se um desses conhecimentos construídos é o conceito de variável, por ser este um dos conceitos fundamentais para a compreensão de função e ele significa em particular, que o aluno apreendeu a como fazer afirmações gerais sobre os elementos de um conjunto e como representar algebricamente um elemento arbitrário desse conjunto. Caso este conceito não esteja claro, o estudo de funções ficaria limitado a funções definidas em conjuntos finitos, nomeando a relação elemento a elemento ou a fazer descrições de funções em linguagem comum, em geral, mais longas e menos precisas.

Eles consideram que, o formato mais adequado dos conceitos de relação e função para serem trabalhados na escola é assumir o conceito de conjunto e relação como postulado, desde que tenha havido o aprendizado prévio desses conceitos através de experiências com a linguagem comum, reunida ao conhecimento de alguma linguagem Matemática e a definição de função mais adequada, neste caso uma definição apropriada seria:

> “Uma função é constituída de um conjunto de partida A, de um conjunto de chegada B e de uma relação entre esses conjuntos que satisfaz às seguintes condições particulares:
> i) todo elemento de A faz parte da relação;
> ii) cada elemento de A está relacionado com um único elemento de B.” (CAETANO e PATERLINE, 2013, p.18)

Neste ponto ele destoa do que diz os PCNs e a BNCC de Matemática para a educação básica, pois enquanto um propõe o ensino de relações e funções de forma perceptiva, sem definições e postulados e limitando o estudo a casos de variações de grandezas, a outra não considera a definição do conceito de função de nenhuma forma, nem mesmo o conceito de variação. Com essa comparação podemos nos questionar se essa limitação da compreensão de relações e funções no Ensino Fundamental, sem considerar todos os elementos históricos para a construção desses conceitos, como os de variáveis, estariam contribuindo para a dificuldade de compreensão, ao submeter o aluno a um estudo mais aprofundado desses conceitos, seja no Ensino Médio ou no Ensino Superior.

Apesar das críticas à utilização da álgebra aplicada ao conceito de funções, não podemos deixá-la de lado, pois o tratamento desses conceitos necessita do tratamento algébrico, neste ponto Meneghetti e Redling (2012) nos lembra que a definição de função aborda números e variáveis em conjuntos infinitos e quase sempre contínuos. E de acordo com eles, os procedimentos básicos envolvidos se referem a calcular, resolver, identificar as variáveis, traçar e interpretar gráficos e resolver equações, de acordo com as propriedades das operações no conjunto dos números reais, ou seja, realizando operações válidas para o cálculo algébrico e fornecendo à álgebra um caráter de linguagem, com seus códigos (números e letras) e regras (propriedades das operações), formando os termos desta linguagem, denominados expressões, que, por sua vez, compõem as igualdades e desigualdades.

Considerando o propósito de manter a álgebra e suas propriedades no conceito de função, mas, desenvolver o conceito de variabilidade entre as grandezas envolvidas nas situações problemas[7], Meneghetti e Redling (2012) e Moura et al. (2003) sugerem que relacionar o conceito com o conhecimento prévio do aluno pode significá-lo, favorecendo a aprendizagem. O primeiro sugere a Resolução de Problemas como metodologia com bons resultados no sentido de buscar o significado do conceito de função, enquanto o segundo sugere a mesma metodologia, porém, em grupo.

Além destes autores, Brito e Almeida (2005) defendem que a modelagem Matemática possibilita a construção de significados para o conceito de função como correlação entre variação de grandezas, pois fornece um papel instrumental dinâmico na descrição, explicação e previsão de comportamentos de situações reais. Assim verifica-se que as metodologias de Resolução de Problemas e Modelagem Matemática apresentam resultados satisfatórios na busca do conceito de função vinculado com a variabilidade.

O conhecimento prévio do aluno é ponderado por vários autores citados anteriormente como um método eficaz de contextualizar os conceitos de relações e funções. Para Moura et al. (2003), isso ocorre principalmente quando o trabalho é realizado em grupo, pois, quando realizado individualmente, não possibilita um movimento de abstração e generalização, não permitindo a elaboração de expressões analíticas que representam os problemas estudados, sendo insuficiente. Sugere que quando o tema é desenvolvido em uma situação de interação, a troca de informações entre os alunos possibilita a discussão do problema e a análise das diferentes soluções, permitindo chegar a uma solução analítica para o problema e determinando

[7] Situação Problema: Um problema é uma questão sobre objetos ou estruturas que requer uma explicação ou solução, uma situação problema em matemática é a forma como o problema foi configurado. Enquanto a Resolução de Problemas, é a busca pelos entes matemáticos que permitem satisfazer as condições do problema.

um movimento progressivo de compreensão do conceito. Assim a generalização surge como uma necessidade, uma forma de viabilizar e/ou facilitar o estudo do problema e os alunos adquirem uma visão dinâmica da Matemática.

Além de compreender as variáveis envolvidas, seus comportamentos e expressar a situação estudada por uma expressão algébrica, o aluno deve saber como representar a relação ou função de acordo com o tipo de análise que deseja fazer, para tratar a informação de forma otimizada. Neste tema Ponte (1992) específica as três formas mais usadas de representação de funções, a numérica, a gráfica e a algébrica salientando que a articulação entre as três deve ser de forma equilibrada, sem minimizar a importância de nenhuma. Ele ressalta a importância das três representações ao afirmar que, para analisar tabelas, calcular valores numéricos, desenvolver o sentido quantitativo e determinar o que são aproximações aceitáveis ou inaceitáveis, precisa-se de números concretos organizados em tabelas e cálculos, pois em situações reais, os valores numéricos concretos sobresaem com relação a expressões algébricas e curvas geométricas, mas para interpretar características significativas de uma função como, a ideia de variação, aumento, diminuição, constância, máximo e mínimo, variação rápida e lenta, taxa de mudança, suavidade, continuidade e descontinuidade, são melhor compreendidas pelas representações gráficas, enquanto a representação algébrica permite maior precisão e síntese da linguagem (CAETANO e PATERLINE, 2013).

Sobre as representações de funções em sala de aula, Silva (2007) salienta a necessidade de propor atividades que possibilitem a conversão entre os registros gráficos e algébricos nos dois sentidos, de forma qualitativa, para que o sujeito perceba que as alterações nos coeficientes da expressão algébrica provocam modificações nas variáveis visuais do gráfico, como, inclinação, intersecção com os eixos, além de localizar uma função em uma família delas pela translação e reflexão, sugerindo para isso o trabalho com software gráfico. Neste ponto, Ponte (1992), enfatiza que a tecnologia pode auxiliar no processo educacional ao substituir a repetição mecânica de cálculos no sentido de manipular dados ou obter soluções dentro de modelos matemáticos, simplificando os aspectos rotineiros do trabalho e permitindo uma maior concentração nos aspectos que são verdadeiramente importantes: a compreensão do significado dos conceitos, a formulação de problemas, a compreensão de sua natureza, a elaboração de estratégias adequadas e sua discussão detalhada e análise crítica.

De acordo com os PCNs, o desenvolvimento do tema funções, deve ser contextualizado e interdisciplinar, pois deve permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre as demais ciências. Cabendo ao ensino de Matemática, garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas, incentivando a busca por soluções e ajustando seus conhecimentos sobre o tema, para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. Para complementar, de acordo com Ponte (1992), uma aluno matematicamente alfabetizado com os conceitos de relações e funções deve conseguir fazer previsões, interpolar, estabelecendo relações entre diversas funções, superpondo gráficos e, construir curvas de regressão que se aproximem de relações para dados empiricamente obtidos e tenham uma idéia do grau de associação entre duas variáveis, compreendendo o significado das expressões algébricas em situações concretas como na Física e outras Ciências. Para ele os alunos precisam ter oportunidades de prática e reflexão sobre Resolução de Problemas significativos.

Caetano e Paterline (2013) ressalta a importância de o aluno ter clareza sobre as características de relação e função e saiba usar adequadamente a linguagem matemática, tendo para isso o conceito de variável previamente construído para poder fazer afirmações gerais sobre os elementos de um conjunto e como representar algebricamente um elemento arbitrário desse conjunto. Ele confirma a necessidade do aluno saber transitar entre as diferentes formas de representações, enfatizando a importância de saber ler e interpretar, tanto quanto construir o gráfico de uma função, sugerindo que os professores explorem mais o caminho gráfico para obter função, percebendo as características de uma função a partir de seu gráfico ou ainda construir o gráfico aproximado de uma função a partir de suas propriedades, mesmo quando não tiver sua expressão algébrica.

Com este tópico, podemos sintetizar a ideia de uma metodologia de ensino de relações e funções, ponderando colocações dos autores mencionados como, considerar o conhecimento prévio dos alunos ao utilizar metodologias de ensino como a resolução de problemas que sejam contextualizados e interdisciplinar, enfatizando a percepção das variáveis dentro destes problemas, o que permitiria uma representação algébrica clara dentro da linguagem matemática, desenvolvendo a transitividade entre as representações permitindo identificações de propriedades e elementos indispensáveis quando aplicado estes conceitos em situações de análise de situações reais, utilizando software para obter generalizações sobre famílias de funções com características específicas.

Mas, cabe aqui a observação que o conhecimento prévio trazido pelos alunos para a sala de aula, não é homogêneo. Pelo contrário, encontra-se em sala de aula realidades sociais diferentes (de cultura, financeira e localização da residência dentro do município), apresentando variedade de vivencias e hábitos, dificultando o trabalho do professor se este considerar o conhecimento prévio de cada aluno, pois de uma forma ou outra, acabará por não atender a realidade vivenciada por cada um. O que o professor pode fazer, é procurar utilizar situações que não fogem da rotina da maioria dos alunos, como compras em um supermercado, fatura de energia elétrica, entre outras. E de modo geral, devemos lembrar que ensinar Matemática não se resume a utilizar metodologias para contextualizar o conceito, em vários momentos são necessários conceitos que não permitem uma contextualização, ou simplesmente não requerem uma para a sua compreensão. Limitar o ensino a conceitos contextualizados pode provocar percas em termos de conhecimento científico a longo prazo, uma vez que em nível científico, o conhecimento matemático é desenvolvido por si só, sem a busca de uma aplicação momentânea, mas que podem ocorrer eventualmente.

4. ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Com o objetivo de identificar os problemas no ensino dos conceitos de relações e funções identificados anteriormente, optamos por analisar livros didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental Anos Finais, especificamente do 9º ano, distribuídos pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD). Esses livros foram escolhidos por serem distribuídos nas escolas públicas de todo o Brasil, abrangendo a maioria dos estudantes brasileiros, e sua utilização como material base para o desenvolvimento das aulas dos professores. A apresentação dos conceitos de relações e funções são indicadas pelos PCNs para ocorrer no Ensino Fundamental anos finais, nos 8º e 9º anos. Não ponderamos a indicação dos conceitos para o 9º ano pela BNCC, por ser utilizada como base na elaboração dos livros didáticos do ano corrente em diante. Os livros selecionados pelo PNLD até 2018, devem atender os requisitos dos PCNs e os autores disponibilizam os conceitos de relações e funções no livro didático do 9º ano, possibilitando limitar as análises a essa classe de livros.

Como dito acima, todos os livros do PNLD atendem as demandas dos PCNs, e atenderão as demandas da BNCC, assim, restringiremos nossa análise a perguntas como:

- O mínimo exigido pelos PCNs e pela BNCC, é suficiente para garantir um processo de ensino/aprendizagem de relações e funções matematicamente correta? Atendem à demanda observada nas afirmações dos autores citados como referencial teórico?
- Estão sendo abordados os conceitos e propriedades básicos para a compreensão e apropriação do conhecimento de relações e funções?
- A abordagem dos conceitos e propriedades é clara e compreensível?
- Estão sendo utilizadas as diversas representações apropriadas para a compreensão dos conceitos?
- As transposições entre as representações são feitas de forma significativa?
- O tratamento das informações dentro de cada representação é feito de forma a significar o conteúdo envolvido e permitindo a identificação de propriedades e características?

- Existe a conexão entre o conceito formal e as situações práticas da vivência do aluno?
- As metodologias de ensino são utilizadas de forma clara?
- A Linguagem Matemática é atendida no desenvolvimento dos conceitos?

Para responder a estas perguntas serão analisados livros didáticos disponibilizados no PNLD 2017. A tabela PNLD 2017 - Coleções mais distribuídas por componente curricular - Séries finais Ensino Fundamental, apresentada no anexo 1, retirada do site do Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação (http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/dados-estatisticos), apresenta os dados estatísticos do Programa do Livro Didático, com onze coleções disponibilizadas para escolha do professor. Dentre estas apresentadas na tabela, serão analisadas às cinco primeiras colocadas a nível nacional. Assim, serão analisadas as coleções:

- Coleção Praticando Matemática de Álvaro Andrini, editora do Brasil;
- A Coleção Vontade De Saber de Joamir Roberto de Souza e Patricia Rosana Moreno Pataro, editora FTD.
- Coleção Matemática: Compreensão e Prática de Ênio Silveira, editora Moderna;
- Coleção Projeto Teláris de Luiz Roberto Dante, editora Ática;
- Coleção Matemática Bianchini de Edwaldo Bianchini, editora Moderna.

O que será analisado em cada livro? O tema que queremos analisar é a introdução do conceito inicial de função, sem ir para casos particulares desse tipo de relação, apenas analisando se é conceituado relação, variável dependente e independente, função e os diferentes tipos de representações envolvidos na compreensão desses conceitos; se estes conceitos são abordados de forma clara e articulada, bem como se há a conexão entre as diferentes representações desses conceitos e se está se fazendo o tratamento necessário dentro de cada representação, afim de verificar se o significado amplo de função está sendo atingido pelos autores desses livros.

Dentro do que foi apresentado no capitulo dois, adotou-se como critérios de verificação para atingir os objetivos mencionados:

- Dentro do conceito de relação: existe uma definição; a definição está de acordo com Carraça (1952); formas de representação adotadas; apresenta situações que representam o cotidiano dos alunos; é trabalhado os conceitos de variáveis independente e dependente.

- Dentro do conceito de função: definição de função como um caso particular de relação, de acordo com Caetano e Paterline (2013), ou seja, como um caso particular de relação; aplicação do conceito de função a prática cotidiana do aluno; utilização de diferentes formas de representação de funções; a transposição de uma representação para outra; análises desenvolvidas dentro de cada tipo de representação.

Segue na sequência a análise dos livros didáticos em questão, consideraremos para análise, além do capítulo que traz as definições de relações e funções também os objetivos que o autor quis atingir e as suas sugestões de desenvolvimento do conteúdo apresentadas nas instruções para o professor.

4.1 PRATICANDO MATEMÁTICA

O livro do 9º ano da coleção Praticando Matemática de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos da editora do Brasil, apresenta a unidade 4 sob o Título ‘Funções’. O autor traz como objetivo geral desse capítulo estudar a relação entre grandezas por meio de expressões algébricas, tabelas e gráficos e como objetivos específicos a compreensão do que é função, identificando suas variáveis e sua lei de formação; determinar e utilizar a lei de formação para construir a tabela de valores da função; escrever a lei de formação com base na tabela da função; analisar e interpretar gráficos para obter, com base neles, informações sobre a função que representam e construir gráfico de funções do 1º e 2º grau. No manual do professor referente ao capítulo 4 os autores salientam que foram inseridas várias definições, mas sem o formalismo adotado no Ensino Médio, tendo o texto por objetivo que o aluno reconheça uma função e suas variáveis, empregando as formas de representação das funções para expressar as variações de grandezas presentes em situações de trabalho, do dia a dia e da própria Matemática. Eles sugerem que o professor enriqueça suas aulas trazendo para os alunos exemplos e aplicações de funções contidas em contextos mais próximos dos alunos.

Os autores iniciam o conteúdo da unidade 4 apresentando o subtítulo 1, denominado “Conceito de função”. Apresentam a imagem de um carro sendo abastecido em um posto de combustível e afirma que a quantidade de combustível consumida por um automóvel é função da distância que ele percorre, e que a expressão “é função” é utilizada no nosso dia a dia para mostrar que a quantidade de combustível depende do número de quilômetros rodados pelo automóvel. Questionam “o que é função?” e responde afirmando haver ligação entre a palavra e a relação de interdependência entre os valores de grandezas.

Podemos perceber que os autores não definem o conceito relação, mas usam esse conceito na tentativa de apresentar uma noção básica do significado de função, citam que esta é uma situação de relação de interdependência entre os valores de grandezas, sem definir a palavra interdependência. Esse aspecto da abordagem se torna importante ao considerarmos que função é um caso particular do conceito de relação, de acordo com a definição de Caetano e Paterline (2013) para função, ou por se tratar de uma noção do conceito, espera-se uma abordagem do conteúdo de função pela definição apresentada por Lima (2013). Se considerarmos a noção intuitiva desenvolvida por Carraça (1952) para os dois conceitos analisados, relações e funções, podemos dizer que se perde a essência de relacionar elementos de dois conjuntos e determinar suas relações de interdependência, ao analisar somente situações em que se relacionam grandezas, pois a noção de relação é maior que isso, e de forma intuitiva, facilita o processo de compreender a relação entre variável dependente e independente.

Para iniciar os conceitos do tema função, os autores apresentam uma situação, onde existe uma regra que relaciona elementos numéricos à valores iniciais pré-fornecidos por um professor, situação apresentada na Figura 5, cabendo aos alunos realizar os procedimentos dados, obtendo como consequência uma tabela com as escolhas do professor e possíveis respostas obtidas pelos alunos (Figura *6*).

Figura 5 - Função: Expressão Literal
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Número dado pelo professor	Resposta dos alunos
4	11
6	15
−5	−7
0	3

Figura 6 - Função: Tabela de valores
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Ele utiliza a regra apresentada na Figura 5 e os dados da Figura 6, para mostrar a relação de dependência entre o número dado pelo professor e as possíveis respostas obtidas pelos alunos. Relaciona os valores escolhidos pelo professor da situação como variável x, correspondente a um único resultado correto, denominado variável y, que foi determinado pelos alunos. Apresenta a fórmula que descreve essa relação entre x e y como sendo $y = 2x + 3$ e define ela como lei de formação dessa função. Abre espaço para questionamentos sobre as escolhas dos valores utilizados pelo professor na tabela, serem compostos apenas por números inteiros, por meio de uma observação, questionando, quais seriam os valores obtidos se a escolha do professor fossem números fracionários como $\frac{1}{2}$ e 1,3.

A situação apresentada pelos autores, ajuda na compreensão da relação de dependência entre os valores escolhidos e os valores obtidos. Utilizaram a representação tabular para obter os valores que se relacionam e consequentemente a expressão algébrica correspondente, mas, poderiam ter obtido uma compreensão mais significativa na transição entre as duas representações, apresentando o desenvolvimento do cálculo para cada valor de x escolhido pelo professor, permitindo ao aluno visualizar a estrutura de cada cálculo numérico e identificando os valores fixos e variáveis envolvidos. Ficou perceptível e condizente com a afirmação dos autores que y é função de x, porém ao afirmar que "$y = 2x + 3$ é lei de formação dessa função", eles afirmam que a situação é uma função, mas não ficou claro quais são os atributos que caracterizam essa situação ser uma função.

Como outra opção de representação dos dados da tabela, apresentam um diagrama onde relaciona os valores atribuídos pelo professor com as respostas obtidas pelos alunos por meio de setas. Definiram com base no diagrama da Figura 7, a formação de um conjunto A, com os valores escolhidos pelo professor e um conjunto B, com as respostas obtidas pelos alunos, concluíram que como os conjuntos A e B estão relacionados, esta seria uma função de A em B.

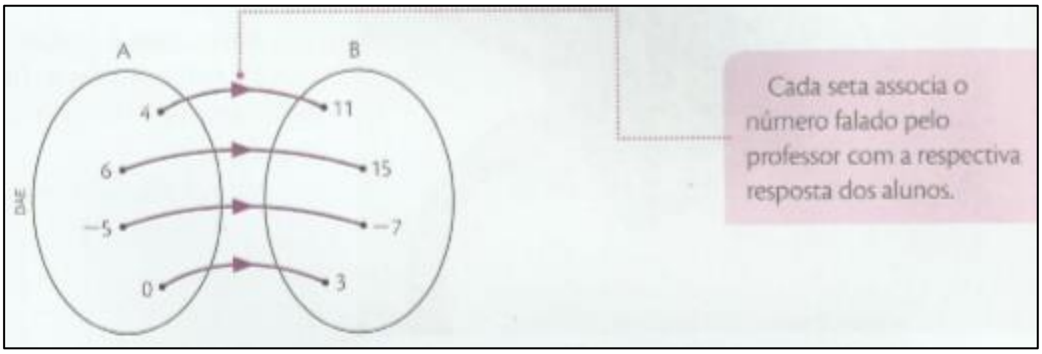


Figura 7 - Função: Diagrama
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Na sequência, apresentam uma definição para função (Figura 8), representando a existência de uma vinculação entre os conjuntos A e B em uma Linguagem Matemática formal, mas sem continuar a utilizá-la nas situações posteriores.

$f\colon A \longrightarrow B$ (Lê-se: f é uma função de A em B.)

Figura 8 - Função: Definição
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

De forma um tanto quanto brusca, usufruíram da afirmação que, ao atribuirmos um valor para x e determinarmos um valor correspondente y por meio da lei de formação da função, obtemos um par ordenado que pode ser escrito na forma (x, y). Apresentam o quadro da Figura 9, com as associações da Figura 6, na forma de pares ordenados.

• $x = 4$; $y = 11$	par ordenado $(4; 11)$
• $x = 6$; $y = 15$	par ordenado $(6; 15)$
• $x = -5$; $y = -7$	par ordenado $(-5; -7)$
• $x = 0$; $y = 3$	par ordenado $(0; 3)$

Os pares são **ordenados**: o primeiro elemento do par é x, e o segundo é y.

Figura 9 - Função: Pares Ordenados
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Com característica similar a situação anterior da Figura 5, os autores apresentam uma nova situação, com uma regra diferente. Nessa, o professor apresenta na lousa os números 2, 4, 6 e 8 e, ao dizer um número, os alunos devem responder qual ou quais dos números, são menores do que aquele dito. A interpretação dessa situação se resume a um diagrama, com um conjunto A, representando os valores escolhidos pelo professor, um conjunto B, com os números que estavam escritos na lousa, e setas, relacionando os elementos dos dois conjuntos. Interpretam para o leitor que, nessa situação, para um valor x dado pelo professor, a resposta y dada pelos alunos, é obtida pela lei de formação $\mathrm{y} < \mathrm{x}$. E, esta situação não representaria uma função, pois um mesmo valor de x no conjunto A, possui correspondência com dois valores y do conjunto B, e um elemento do conjunto A não possui um y correspondente no conjunto B (Figura 10).

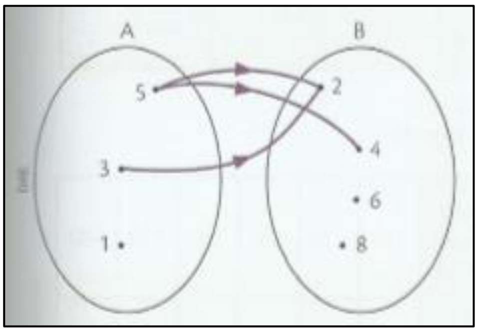
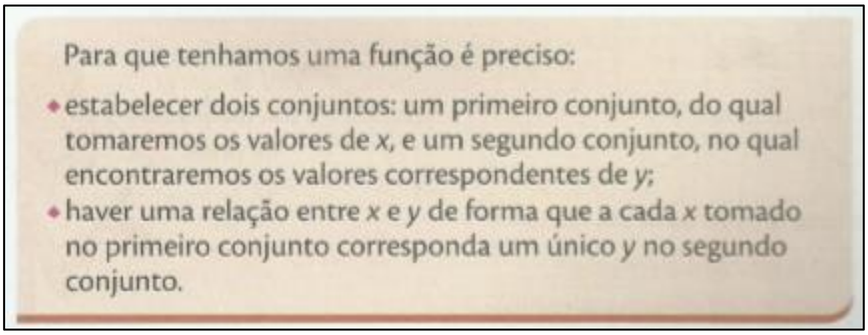


Figura 10 - Função: Diagrama
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Com base nesses exemplos o autor conclui que:



Para que tenhamos uma função é preciso:

- estabelecer dois conjuntos: um primeiro conjunto, do qual tomaremos os valores de *x*, e um segundo conjunto, no qual encontraremos os valores correspondentes de *y*;
- haver uma relação entre *x* e *y* de forma que a cada *x* tomado no primeiro conjunto corresponda um único *y* no segundo conjunto.

Figura 11 - Função: Definição
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

O objetivo de apresentar a definição do autor, é compará-la com as definições apresentadas como referências, observando possíveis erros e similaridades. De modo geral, o autor atende a definição de função apresentada na referência de Caetano e Paternile (2013), contrariando a suspeita inicial que utilizaria a noção de função de Lima (2013), uma vez que o autor não definiu relação, mas utiliza o conceito abertamente na definição de função que apresenta. Um conectivo ao final do primeiro item, torna a definição duvidosa ou incorreta, ao afirmar que o segundo conjunto é aquele em que encontraremos os valores correspondentes de y, quando na verdade deveria ser, o segundo conjunto, no qual encontraremos os valores de y, correspondentes aos x do primeiro conjunto.

As quantidades de representações apresentadas até esse momento, foram significativas, observa-se a presença de representação nas formas de tabela de valores, expressões algébricas, diagramas e pares ordenados. Porém, a transformação de uma representação para a outra, não ocorreu de forma sutil e articulada, dificultando a compreensão do aluno sobre o processo de transformação, e sim de forma pronta e acabada, como se não pudessem ser articuladas. Mesmo dentro da própria representação não houve um tratamento interno como sugere Duval (2011). Os autores poderiam ter apresentado o desenvolvimento numérico na obtenção dos valores da tabela da Figura 6 e uma tabela de valores para a segunda situação, a fim de facilitar a transição para a representação algébrica. Nesta representação, não foi explorada a substituição das variáveis, o que permitiria a identificação da variável dependente e independente na representação algébrica. A transição da tabela para o diagrama, poderia ser de forma mais sutil, com o uso de simples frases como, “expressando os elementos x da tabela em um diagrama e os elementos y em um outro ao lado, podemos relacionar os elementos dos dois conjuntos por setas que partem de um x em direção ao seu y correspondente”. Idem para a segunda situação. Na representação em forma de pares ordenados, os pares poderiam ser associados diretamente com os valores apresentados na Figura 6, principalmente na segunda situação, explorando essa representação e analisando o fato de que, quando a situação não é uma função, tem-se pares ordenados com abscissas de valores iguais.

Voltando a falar do conceito de relação, os autores poderiam ter utilizado as duas situações apresentadas para definir relação. Diferenciando aquela que atende determinadas características como um caso particular denominado função. Ou seja, utilizaria o que apresentou, mas definindo relação e ofertando um amparo maior para a compreensão da definição dada.

A sessão “Exercícios”, é composta dos exercícios 1 à 5. Eles possibilitam o desenvolvimento da definição de função, por meio da construção e análise de diagramas e ligações efetuadas entre os elementos dos conjuntos representados. Retrata principalmente no exercício 3, Figura 12, o conceito de função desenvolvido nas situações apresentadas para contextualizar a definição, utilizando perguntas pertinentes sobre a definição de função, solicitando a determinação da expressão algébrica que determina a função e obtenção de pares ordenados associados a função. Já nos exercícios 4 e 5, explora a representação tabular, solicitando o preenchimento de valores e vinculando a análise, da correspondência dos valores das tabelas com a definição de função, vide exercício 5 na Figura 13, sugerindo a representação em diagrama em casos de dúvidas.

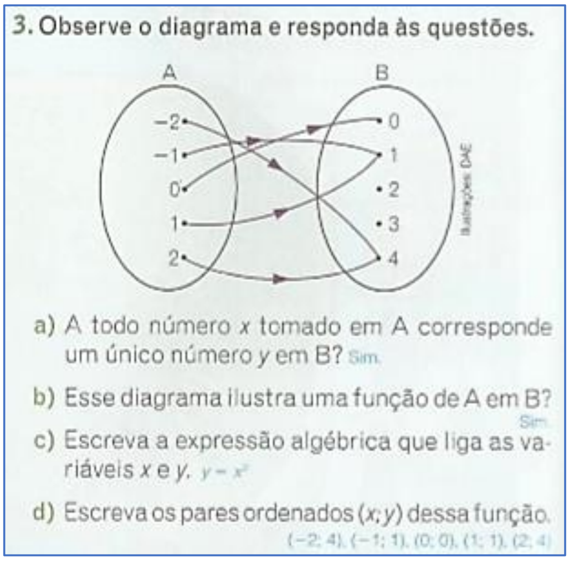


Figura 12 - Exercício 3
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Figura 13 - Exercício 5
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Como percepção do desenvolvimento dos conceitos e exercícios iniciais, percebe-se que o autor contextualiza a introdução dos conceitos de variabilidade por meio de uma situação que não se enquadra exatamente como conhecimento prévio do aluno, como sugerido por Caetano e Paterline (2013) e Moura et al. (2013). Os exercícios mostraram-se limitados em suas análises, ao serem comparados com a proposta apresentada pelos autores no desenvolvimento dos conceitos, principalmente quanto a relacionar variáveis. Os exercícios que apresentam vinculação com situações reais, são objetivos e pouco explorados, como no exercício 5, o que obstrui possibilidades de exploração do conceito vinculado a essas situações.

O próximo tópico é apresentado pelos autores como fixador da ideia que função transforma valores. Apresenta o subitem “A Ideia da Máquina”, sugerindo que os alunos desenvolvam a atividade em duplas e pensem em uma função como uma máquina, onde, se coloca um valor de entrada e ela executa as operações necessárias fornecendo um valor de saída. Cabendo ao aluno nesse contexto, preencher os valores de saída apresentados na Figura 14:

Figura 14 - Função: Situação Problema Da Máquina
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Para desenvolver uma análise sobre a situação, o autor apresenta na sequência a atividade “interagindo”. Nela, o aluno deve identificar, qual seria o número de entrada na máquina se o de saída for 71, como fazer para obter o número três na saída, aplicando dessa forma o conceito de valor numérico de uma função. Abre espaço para a criatividade, ao sugerir que inventem no caderno um exemplo de máquina como a apresentada, trocando o caderno com um colega para este resolver e depois conferirem as respostas. Continua a explorar essa ideia da máquina, apresentando uma nova máquina com a regra: “eleva o número ao quadrado e depois soma o mesmo número”. Cabendo ao aluno determinar os valores de saída quando as entradas forem os números -4, -1 e para o valor qualquer x, com o objetivo de obter a lei de formação da função. Na sequência, devem determinar os números que podem entrar na máquina, para que a saída seja 6. Introduz aqui, perguntas que estimulam a análise de possíveis valores de entrada para a máquina, como se é possível obter o número 23 na saída e se para todo elemento que entra na máquina corresponde um único elemento na saída. Nessa atividade o autor busca explorar a ideia de obtenção de valores conhecendo uma das variáveis em questão, enfatizando a noção de variabilidade dos valores e a possibilidade de obter qualquer valor na saída.

Com o objetivo de definir domínio e imagem de uma função, apresenta o subitem “Domínio e Imagem”. Parte da situação onde uma menina, Marcela, compra bombons em uma confeitaria com custo unitário de R$ 1,80, afirmando que a quantidade que ela pagará , y,está em função da quantidade x, de bombons que ela levar, pois para cada quantidade de bombons há um único valor a ser cobrado, apresentando a tabela de valores disposta na Figura 15:

Número de bombons (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	etc.
Preço a pagar (y)	0	1,80	3,60	5,40	7,20	9,00	10,80	12,60	14,40	16,20	18,00	

Figura 15 - Função: Tabela De Valores
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Com base na situação e na tabela, o autor conclui que o valor de x nessa função é um número natural, pois corresponde ao número de bombons comprados e não há a possibilidade de se comprar bombons fracionados, concluindo que o domínio dessa função é o conjunto dos números naturais. Parte do exemplo em que $x = 3$ corresponde à $y = 5{,}40$, para concluir que y é dito imagem de 3 por esta função, garantindo que todo elemento do domínio possui uma única imagem. E deixa a pergunta, qual seria a imagem de 8 por essa função?

Como segundo exemplo ele apresenta a função $y = 2x$, ou seja, associa um número ao seu dobro, levantando o questionamento sobre a existência de algum número que não possui dobro. Ao responder o questionamento, afirma que essa possibilidade não existe, e neste caso o domínio da função em questão seria o conjunto dos números reais. Reflete sobre a possibilidade de existir funções onde o domínio da função não pode ser todo o conjunto dos números reais, citando como exemplo a função que associa um número ao seu inverso, argumentando que neste caso o domínio deveria ser todos os números reais menos o zero, pois $x = 0$ não é definido para a função $y = \frac{1}{x}$. Comenta que em geral, quando o domínio de uma função não é explicitado, considera-se o conjunto dos números reais, mas, deve-se tomar o devido cuidado de excluir os elementos do domínio para os quais não existem y correspondentes.

A contextualização apresentada pelo autor para tratar o conceito de domínio e imagem de função se mostra significativa, porém não em sua totalidade. Ele poderia ter explorado o registro do domínio e imagem na forma de conjuntos, ampliando a concepção do conceito de função em sua totalidade, inserindo diagramas de funções onde no conjunto B, nem todos os elementos do conjunto estivessem relacionados com um elemento do conjunto A, permitindo a definição de contradomínio de uma função. Quanto as funções citadas de exemplos com domínio real, a representação das mesmas por meio de tabela, com x assumindo valores racionais e irracionais, teria trazido um significado maior quanto a afirmação que a variável x, pode assumir qualquer valor real para o primeiro caso e não pode ser zero no segundo caso. A sugestão para esses exemplos parte da concepção de Ponte (1992) ao considerar as estratégias numéricas no desenvolvimento da confiança do aluno em termos de abstração.

Na sessão de exercícios referente ao tratamento de valores de uma função e determinação do seu domínio e imagem, o autor apresenta os exercícios do 6 ao 10 como forma de fixar a metodologia de cálculo de valor numérico de uma função e determinação de x, dado o valor de y, sendo os exercícios 6, 8 e 10 de forma mais objetiva e o 7 e 9 com uma pequena contextualização, mas sem diferir muito dos demais. Resumindo, esses exercícios são casos similares a situação da máquina apresentada na sessão 'interagindo'. O exercício 11 é o único que aborda o termo imagem de uma função, mas, não menciona o domínio da função, apresenta a função $y = 3x - 1$ e cabe ao aluno preencher uma tabela de valores, com valores de x e y de acordo com a lei de formação da função, e também responder, baseado na tabela, qual seria a imagem do elemento $-0,2$ e qual o elemento que possui imagem 14 (Figura 16).

11. Considere a função definida por:

$$y = 3x - 1$$

a) Copie e complete a tabela.

x	$y = 3x - 1$	
0		-1
1		2
-2		-7
4	11	

b) Qual é a imagem do elemento $-0,2$? $-1,6$

$y = 3 \cdot (-0,2) - 1 = -1,6$

c) Qual é o elemento que tem imagem 14? 5

$14 = 3x - 1 \rightarrow x = 5$

Figura 16 - Exercício 11
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Pensando em exploração de determinação de valores de variáveis de uma função, os exercícios propostos cumprem bem esse papel, porém, no que trata da base do conceito de função, falham quanto a análise do domínio e imagem, deixando esses conceitos sem significado na resolução dos exercício, quando, se houvessem apresentados questionamentos pertinentes aos alunos, obter-se-ia uma compreensão maior da ideia de função.

Os autores tratam especificamente de relações entre grandezas como uma linha de estudo de funções, apresentando essa ideia no subtítulo “A funções e suas aplicações”, onde começa afirmando que na ciência e nas mais variadas atividades humanas as funções são utilizadas para relacionar grandezas. Apresentam algumas imagens relacionadas com grandezas e expressas pelas frases: o gasto com combustível é função do número de litros colocados no tanque do automóvel; a dose de remédio dada a uma criança, muitas vezes, é função da massa da criança; o preço de uma ligação telefônica interurbana frequentemente é função do tempo de conversação e; o juro pago por um empréstimo é calculado em função da quantia emprestada.

Como metodologia de vinculação entre as situações em que utilizamos medidas de grandezas e funções, ele utiliza uma sequência de exemplos que ocorrem ou podem ocorrer em situações do cotidiano e de trabalho, apresentando uma sequência de três situações problemas, com domínios diferentes e considerações a serem feitas em cada situação de forma peculiar. O primeiro exemplo, relaciona ao conceito função a compra de carne em um açougue, determinando y como o preço a pagar e x a quantidade de carne comprada em kg, partindo de um custo R$ 26,00 por kg de carne, vinculando a situação a uma tabela que relaciona as quantidades em quilogramas de 1 á 4 kg com o preço que será pago em reais. Nessa tabela, o autor mantém na coluna do preço a desenvolvimento numérico do cálculo, permitindo que o aluno visualize a obtenção da lei de formação dessa função como sendo $y = 26x$. Como consequência da situação, o autor observa que essa lei estabelece a relação matemática entre x e y, associando para cada valor de x a existência de um único y, sendo x e y as variáveis da função.

Aprofundam a análise da situação, associando ela, a determinação do valor numérico da função com o seu significado prático, ao apresentar perguntas como “quanto pagou uma pessoa que comprou 1,8 kg de carne?” e “quantos kg de carne é possível comprar com R$ 20,80?”, apresentam as respostas das perguntas pelo método algébrico que cabe a cada situação, e fazendo a interpretação para associar o valor obtido com a pergunta em questão. Ressalta ao final da apresentação do exemplo que a variável independente, x, não pode assumir valores negativos, por representar os quilogramas de carne que serão adquiridos, sendo que uma medida de massa não pode assumir valores negativos. Além do desenvolvimento pertinente dos exemplos associando-os com o conceito de função, se observa como ponto positivo do desenvolvimento da situação, a apresentação de uma sequência de imagens com os processos de compra e pesagem da carne em um açougue e com legenda mostrando como funciona o processo de pesagem da carne.

O segundo exemplo é baseado em um parque de diversões em que os visitantes pagam R$ 15,00 para entrar no parque, mais R$ 13,00 por cada uma das 20 atrações disponíveis. E assim, como na situação anterior, o autor define a quantia gasta pelo visitante como variável p e o número de atrações que ele escolher pela variável n, sugerindo que a relação entre o valor pago e a quantidade de atrações pode ser representada pela fórmula $p = 15 + 13n$. Ressaltam que as variáveis nessa situação são n e p, onde, n só assume valores inteiros de zero a vinte, pois foi definida como o número de atrações, que são no máximo 20. E, a cada valor de n dessa função, existe apenas um valor p pago para ele, fazendo com que p esteja em função de n. Como propostas de interação com o aluno, os autores citam um exemplo em que Paulo teria ido a quatro atrações, apresentando o desenvolvimento do cálculo dos seus gastos e concluindo que ele gastou R$ 67,00. Sugerem que o aluno calcule qual seria o gasto quando um visitante for a dez atrações. Abre a possibilidade de reflexão quanto ao domínio da função ao questionar o aluno para quais valores de n, ou seja, quantidades de atrações visitadas, seria possível obter o menor e o maior valor para p nessa função.

No terceiro exemplo, os autores envolvem geometria ao considerar a situação de produção de placas metálicas retangulares com medidas variáveis, onde a medida do comprimento tem sempre cinco centímetros a mais que a medida da largura. Como questão de debate ele apresenta a pergunta: “quantos centímetros quadrados de aço são gastos em cada placa?”. A resposta apresentada determina que, para cada valor de x é possível obter um valor diferente para a área, e considerando que este seja o material produzido por uma empresa, se torna de extrema importância saber qual a relação entre as medidas dos lados do retângulo e a sua área, afim de prever custos e aproveitar melhor o material. Associando os lados com as expressões algébricas x e $x + 5$, como largura e comprimento do retângulo, respectivamente, apresenta a equação algébrica que descreve a área do retângulo como sendo $y = (x + 5) \cdot x$, e ao aplicar a propriedade distributiva obtém-se $y = x^2 + 5x$. Assegura que, como para cada valor de x corresponde um único valor de y, podemos dizer que y é função de x. E apresenta a tabela a seguir com alguns valores de x e de y, justificando a utilização de valores reais positivos para x, por ele representar medida de comprimento (Figura 17):

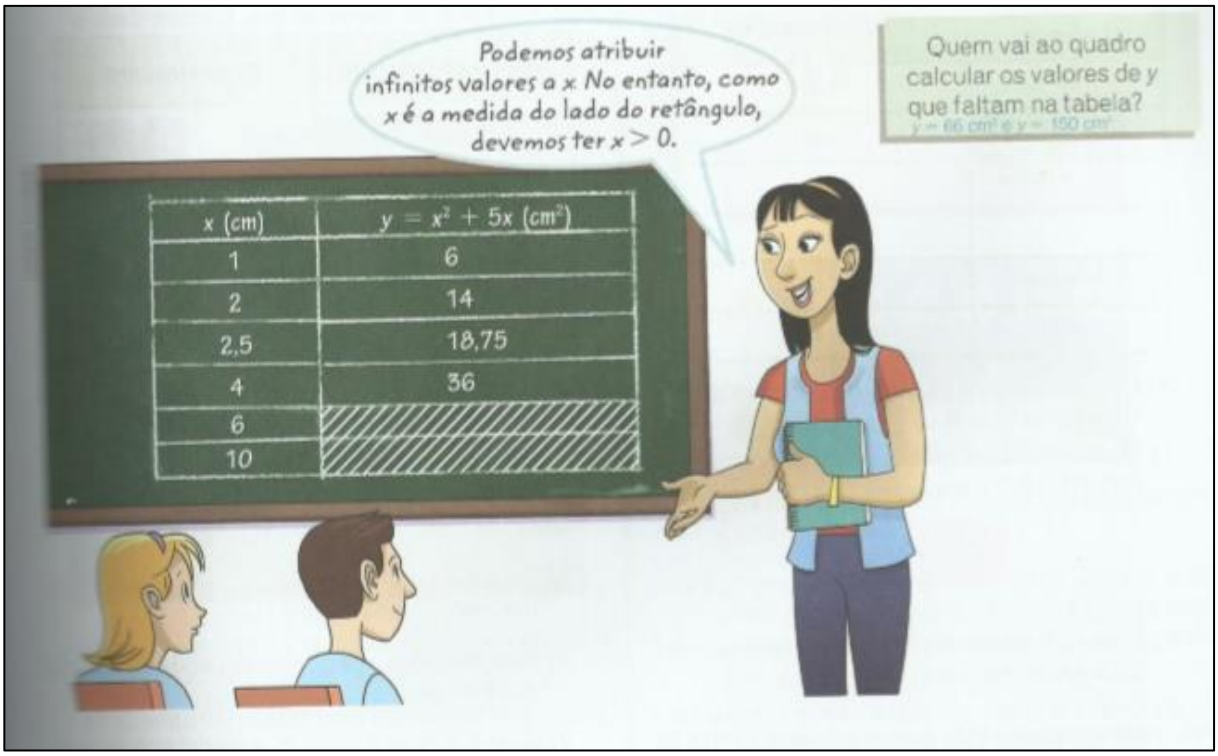


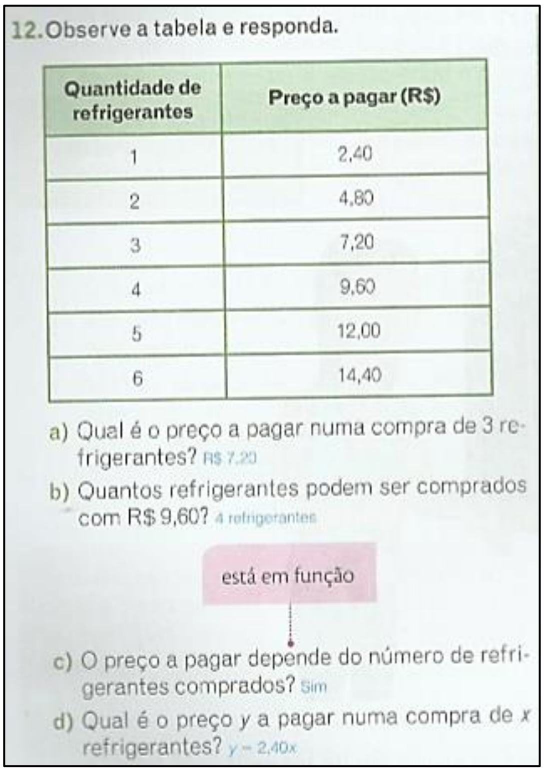
Figura 17 - Função: Tabela De Valores
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Da mesma forma que no exemplo 1, o autor apresenta questionamentos que permitem a vinculação da situação problema com valores numéricos da função, mostrando na obtenção das respostas o tratamento necessário a ser efetuado para com as variáveis envolvidas. Ao questionar sobre: “Qual deve ser a medida de x para que a área da peça retangular seja de 104 cm^2?”, ele apresenta a obtenção da resposta, utilizando a fórmula resolutiva para equações do segundo grau, uma vez que ao substituir $y = 104$ na equação, obtém-se uma equação do segundo grau. Ao obter as possíveis soluções, uma positiva e outra negativa, argumenta a escolha apenas da solução positiva, justificando com o fato de x representar a medida do lado do retângulo em questão.

Nas vinculações dos conceitos de funções desenvolvidos com as situações do cotidiano do aluno, os autores foram pertinentes na escolha dos exemplos. Apresentando os dados de forma clara, permitindo a articulação entre as representações tabular e algébrica, ponderando a escolha de domínios que permitem a análise do sentido das respostas obtidas para as perguntas feitas, e permitindo apresentar um sentido para o desenvolvimento do cálculo numérico de uma função ao contextualizá-lo.

Na sessão de exercícios apresentada na sequência, como faz referência ao subtítulo “As funções e suas aplicações”, os exercícios são contextualizados como Situações Problemas. Seus contextos baseiam-se, do 12 ao 14, em tabelas de valores que relacionam variáveis quantitativas. Apresentam questionamentos que relacionam as medidas apresentadas, recaindo no conceito de valores numéricos, para em seguida determinar a relação de dependência entre as variáveis, ou seja, qual depende de qual, afim de obter a lei de formação da função em questão (Figura 18). Já o exercício 15 é similar ao exemplo 3 desenvolvido no subtítulo, partindo de uma sequência de três placas retangulares, onde de uma figura para outra, o comprimento diminui na mesma proporção em que a largura aumenta, instigando nos questionamentos, o aluno a determinar o comprimento da próxima figura, supondo que o valor da largura seja um dado valor apresentado, e posteriormente relacionando a largura a uma variável x, o comprimento a uma variável y e determinar a lei de formação dessa função.

Os exercícios 16 e 17, respectivamente, apresentam situações problemas que envolvem a corrida de um taxi com uma bandeirada, ou seja, valor fixo, acompanhado de um valor pago por quilômetro rodado e a fabricação de suco de laranja em uma indústria, onde para cada 12 laranjas produz-se um litro de suco. Para ambos os casos, são feitos questionamentos sobre a expressão que representa a função e possíveis valores para as variáveis x e y de acordo com dados fornecidos. Com o mesmo sentido dos demais, o exercício 18, apresenta uma sequência de números que se relacionam, cabendo ao aluno a determinação de números ausentes e da lei de formação que representa essa vinculação. Já o exercício 19 (Figura 19), representa a situação envolvendo a área de construção de um canil, para que o aluno determine a expressão que representa a área do mesmo, em função da metragem de tela disponível e a determinação das medidas laterais do canil, sabendo que a área total é 40 m². O que se aplicaria nos exemplos 2 e 3 apresentados pelo autor, por tratar-se de geometria e um valor máximo para a área do canil.



12. Observe a tabela e responda.

Quantidade de refrigerantes	Preço a pagar (R$)
1	2,40
2	4,80
3	7,20
4	9,60
5	12,00
6	14,40

a) Qual é o preço a pagar numa compra de 3 refrigerantes? R$ 7,20
b) Quantos refrigerantes podem ser comprados com R$ 9,60? 4 refrigerantes

está em função

c) O preço a pagar depende do número de refrigerantes comprados? Sim
d) Qual é o preço y a pagar numa compra de x refrigerantes? $y = 2{,}40x$

Figura 18 - Exercício 12
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Figura 19 - Exercício 19
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Esses exercícios, cumprem o papel apresentado de relacionar situações problemas da realidade social do aluno com o conceito de função, pelo menos com os conceitos apresentados pelos subtítulos listados até este ponto.

Como sequência da conceituação apresentada, os autores inserem o subtítulo "Da tabela para a lei de formação da função". São apresentadas nesta sessão, situações com tabelas que relacionam grandezas ou apenas conjuntos numéricos, ressaltando a forma como estão vinculados os valores da primeira variável com os valores da segunda variável. Na primeira situação são relacionados o tempo de viagem de um trem (t), em horas, com a distância percorrida por ele (d), em quilômetros, considerando a velocidade constante e com o auxílio de uma tabela relacionando as duas variáveis. Apresenta valores naturais para o tempo, iniciando em zero, e concluindo a lei de formação dessa função, baseando-se na tabela apresentada, como sendo $d = 30t$. No segundo exemplo, os autores apresentam a situação em que um professor fala um número, os alunos efetuam operações com esse número e fornecem uma resposta, associando a situação com uma tabela de valores naturais e um decimal, expressando ao lado dela os cálculos que foram feitos para obter os valores respondidos pelos alunos, concluindo que quando o número dito pelo professor for n a resposta dada pelo aluno será $R = n^2 + 1$. Podemos observar, pelo apresentado, que o autor está utilizando funções afim e quadrática para obter a lei de formação das funções, apresentando ao lado da tabela, os cálculos dos valores numéricos do segundo exemplo, necessários para a obtenção da representação algébrica, por esta se tratar da função quadrática (Figura 20).

Número dado pelo professor (n)	Resultado calculado pelos alunos (R)
2	5
3	10
4	17
5	26
0,5	1,25

R é função de n. Qual é a lei de formação da função?
Observe:
$2^2 + 1 = 5$
$3^2 + 1 = 10$
$4^2 + 1 = 17$
$5^2 + 1 = 26$
$0{,}5^2 + 1 = 0{,}25 + 1 = 1{,}25$

Figura 20 - Tabela com cálculo de valores numéricos
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Os exercícios correspondentes a este subtítulo, fazem referência na sua maioria a preenchimento de valores ausentes em tabelas, apresentadas com uma coluna para a variável x e outra para a variável y. Isso ocorre nos exercícios 20 e 21, porém, o exercício 21 possui em sua tabela uma coluna extra, onde associa os valores de x e de seu y correspondente com um par ordenado. Nos exercícios do 22 e 23, o objetivo é que o aluno determine a lei de formação das funções envolvidas, diferenciando-se o exercício 22, por tratar-se de uma situação problema tendo sua resposta escolhida entre múltiplas alternativas. Enquanto os exercícios 24 e 25 tratam de tabelas de valores associadas com elementos de figuras que determinam uma sequência para serem analisadas e no 26 apenas uma sequência de figuras geométricas, todos esses com o objetivo de o aluno determinar a lei de formação que descreve a situação. O objetivo entre esses exercícios é claro, determinar a lei de formação das funções que representam cada situação, mas, já foram apresentados exercícios semelhantes nas seções anteriores. O que podemos citar como diferencial, são os exercícios que envolvem sequências de figuras, para determinar a lei ou fórmula que representa os elementos das sequências, como observamos nas Figura

21 e Figura 22. Notamos também que há uma evolução em termos de abstração de uma para a outra, enquanto a primeira apresenta uma tabela de valores para auxiliar na obtenção da lei de formação, a outra pede de forma direta a lei, sem apresentar valores, apenas as imagens.

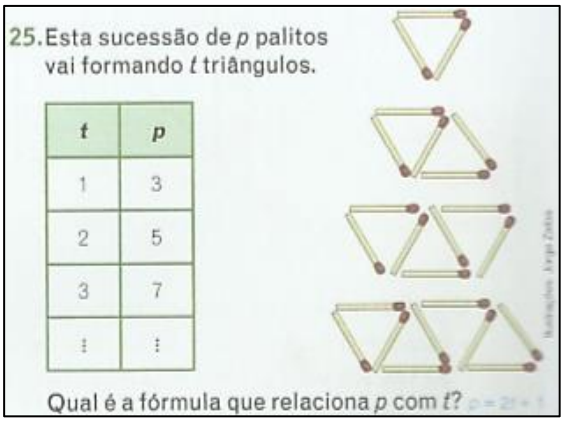


Figura 21 - Exercício 25
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

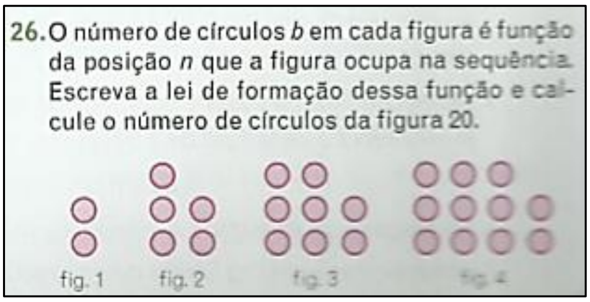


Figura 22 - Exercício 26
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

O subtítulo 4 é apresentado pelos autores com o título: “Interpretando gráficos”, trata da apresentação de três gráficos que representam situações práticas do cotidiano e fazem observações referentes a interpretação desses gráficos. O primeiro dos exemplos, Figura 23, representa a distância percorrida por um carro em função do tempo:

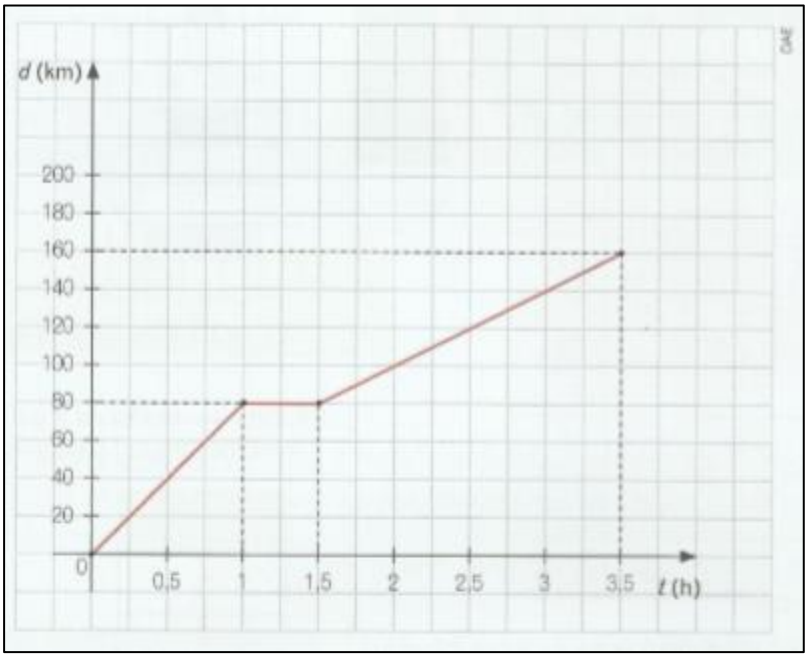


Figura 23 - Função: Gráfico
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Para este gráfico, os autores fazem observações interessantes sobre movimentação do veículo, como a afirmação de que: para $t = 1\,h$ a distância percorrida pelo veículo é $d = 80\,km$, concluindo que o significado dessa situação é a manutenção de uma velocidade média de $80\,km/h$ por parte do veículo. Também observam que do tempo $t = 1\,h$ até $t = 1{,}5\,h$ o veículo manteve a distância constante, significando que o veículo estava parado nesse intervalo de tempo. Para a parte final do gráfico, a observação dos autores consiste em afirmar que o veículo demorou 2 horas para percorrer 80 km, determinando uma velocidade média de $40\,km/h$.

Para o segundo exemplo, Figura 24**,** os autores apresentam a situação de um paciente com febre, que deverá ser medicado se atingir 38°C de febre, deixando a cargo do aluno observador a interpretação do gráfico abaixo:

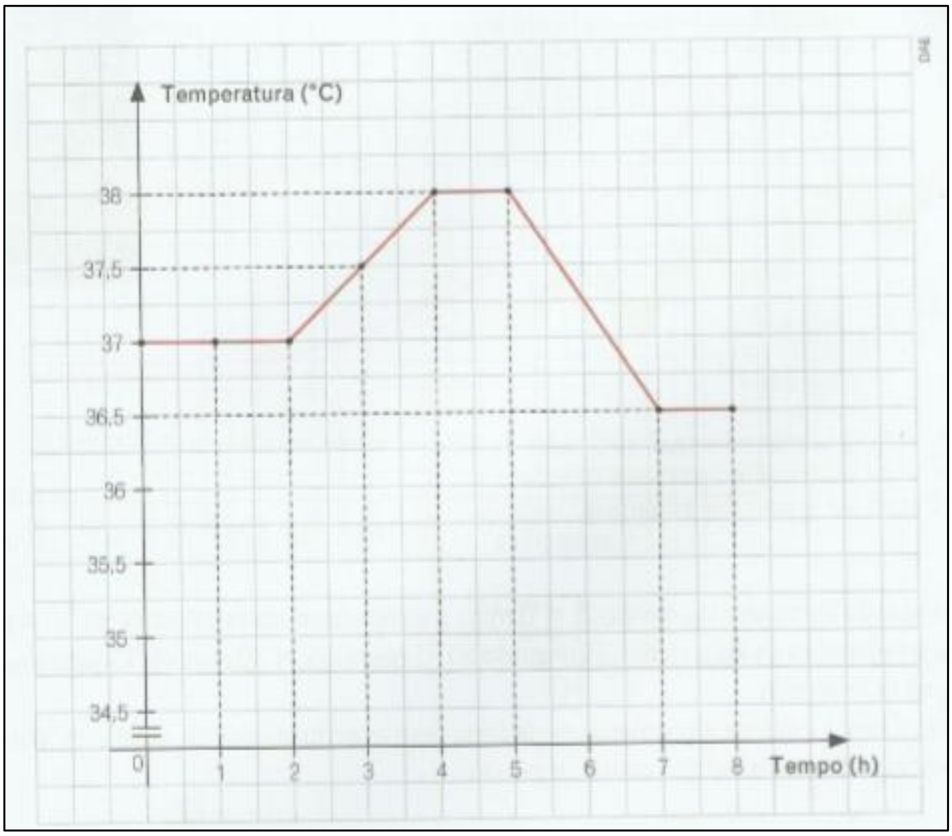


Figura 24 - Função: Gráfico
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Para auxiliar na interpretação do observador, os autores utilizam questionamentos que, induzem o aluno a obter a análise desejada por ele. Esses questionamentos consistem em observar quais as grandezas que se relacionam no gráfico, determinar o significado da secção no eixo y próxima a zero, observar qual a temperatura do paciente as zero horas e as 2 horas, relatar o que ocorreu com a temperatura das 2 às 4 horas e também entre as 4 e 5 horas, porém com a justificativa para ela não ter decaído nesse intervalo. O autor, posterior a todas as observações as quais induziu o aluno, compartilha algo não questionado, quanto ao fato de que entre 5 e 7 horas a temperatura decaiu, permanecendo constante das 7 às 8 horas.

No terceiro exemplo, apresenta a situação de resfriamento de uma quantidade de água que foi aquecida até 80°C em função do tempo, definindo a variável x como o tempo, em minutos, e a variável y como a temperatura, em graus Celsius. Situação representada por um gráfico diferente dos dois anteriores, por tratar-se de uma curva e não de segmentos de retas conectados pelos seus extremos:

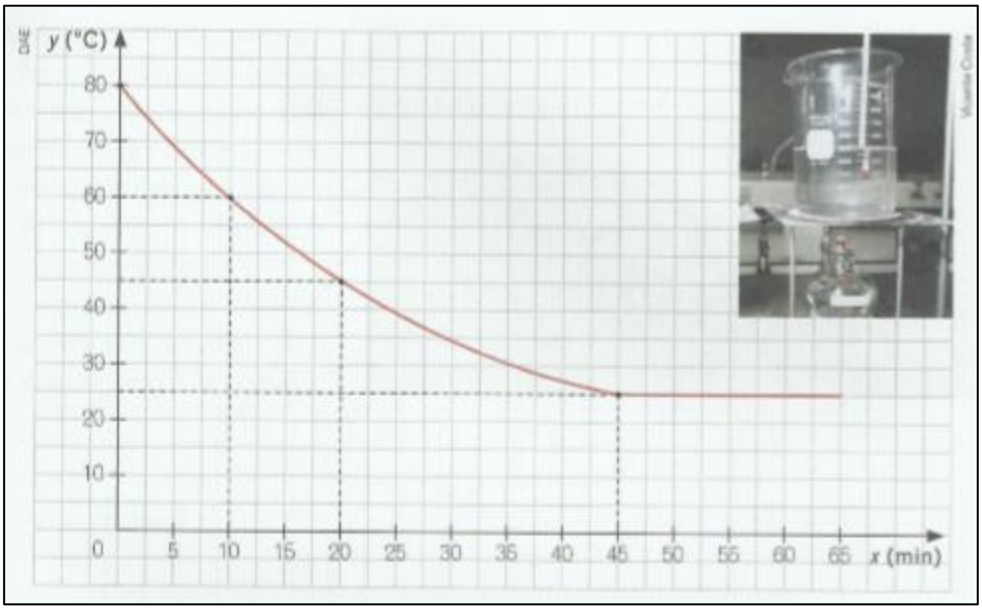


Figura 25 - Função: Gráfico Para Análise
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Neste caso, o autor apenas apresenta comentários sobre determinadas temperaturas correspondentes a alguns instantes de tempo. Suas observações consistem em apresentar afirmações como, quando o tempo chegou em 45 min o processo natural de resfriamento teria terminado, pois observasse que a temperatura permaneceu constante. Como um método de aprofundamento do contexto histórico das escalas de medida de temperatura, ele apresenta na sequência, observações sobre o histórico das escalas Celsius e Fahrenheit, apresentando a relação entre essas duas escalas e a fórmula utilizada para transformar uma unidade de medida na outra.

A apresentação desse subtítulo pelo autor, mostra que esteve preocupado com a interpretação das representações gráficas de funções no plano cartesiano, aborda na sequência do conteúdo desenvolvido por ele no livro, trazendo os casos citados como uma forma de melhorar a leitura e interpretação de dados gráficos. Foi pertinente, claro e objetivo nas observações que fez nos exemplos citados e muito didático ao possibilitar a interação do aluno no processo de interpretação gráfica ainda no contexto explicativo da situação. Explorou as opções de exemplos de forma otimizada, envolvendo intervalos com representação crescente, decrescente, constante sem limitar-se apenas a linhas retas e mostrando que curvas gráficas representam situações práticas do cotidiano. Assim, prepara o aluno para situações de análise e interpretação de gráficos de funções que envolvam grandezas, observando principalmente os pontos onde houveram mudanças nas representações e quais os significados das mudanças apresentadas.

Quanto aos exercícios referentes a este subtítulo, verifica-se que todos apresentam gráficos, com pequenas variações na resolução. Para os exercícios 27, 31 e 33, o autor dispõe de questionamentos com respostas abertas referentes a análise e interpretação dos gráficos disponibilizados, enquanto nos exercícios 30 e 32 envolve a análise do gráfico partindo da opção de múltipla escolha para obter a resposta condizente. O diferencial dessa sessão, é o exercício 28 (Figura 28), nele foi solicitado que os alunos registrassem, em uma tabela, pontos que estão representados em dois gráficos, com base nesses pontos, devem determinar se os dois gráficos apresentados representam funções. Infelizmente, os autores se limitam a essa exploração, quando poderia ter buscado o desenvolvimento de uma argumentação do porque a situação representar ou não uma função. Esse processo de representar dados na forma de par ordenado, é importante no sentido de preparar o aluno para o processo de transposição de representações gráficas para pares ordenados e depois para expressões algébricas. O exercício 29 abre espaço para a verificação da aplicabilidade dos gráficos na vida social dos indivíduos, pois sugere a busca de gráficos e tabelas de dados que representam funções em revistas e jornais.

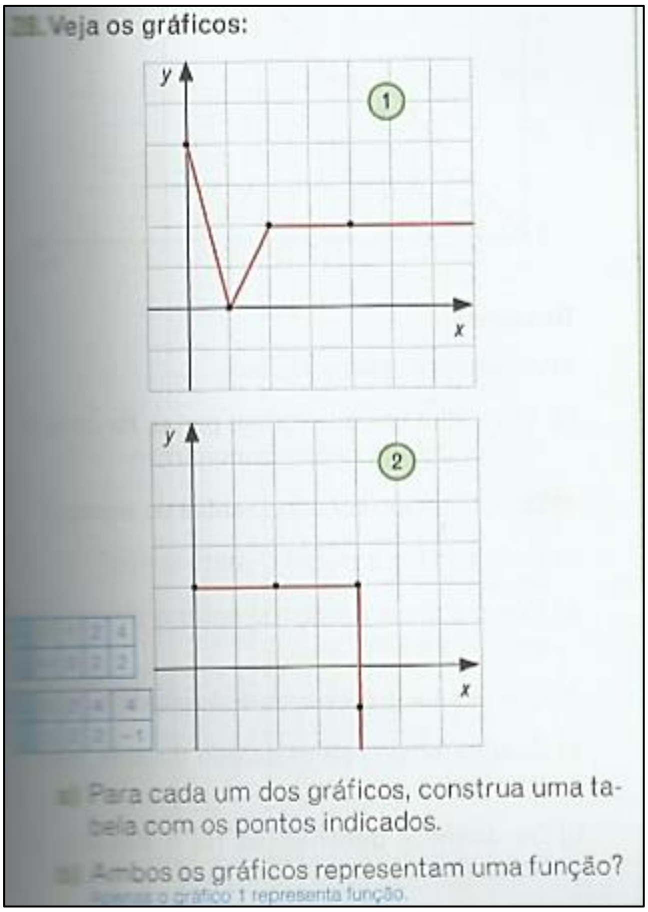


Figura 26 - Exercício 28
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Como sequência lógica dos conceitos, é apresentado no subtítulo 5 a construção de gráficos de funções, apresentado com título ‘Construindo gráficos de funções”. Os autores iniciam o desenvolvimento teórico, utilizando como situação inicial, a função $y = 2x$, apresentando a tabela da Figura 27, contendo alguns pares ordenados associados a função e obtidos aplicando a lei de formação em alguns valores de x. Comentam que a escolha dos valores de x, nesta situação, é escolha do aluno, pois a função não possui um domínio pré-determinado. A escolha por parte dos autores, segundo comentário dos mesmos, por valores inteiros, teve por objetivo facilitar os cálculos, porém, pode limitar a concepção de domínio da função se essa escolha se repetir sempre. Com base na tabela, apresenta dois gráficos, um com pontos localizados e outro com os mesmos pontos interligados por uma reta. Como observado nas Figura 28 e Figura 29:

x	$y = 2x$	$(x; y)$
-3	-6	$(-3; -6)$
-2	-4	$(-2; -4)$
-1	-2	$(-1; -2)$
0	0	$(0; 0)$
1	2	$(1; 2)$
2	4	$(2; 4)$
3	6	$(3; 6)$

Figura 27 - Função: Tabela
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

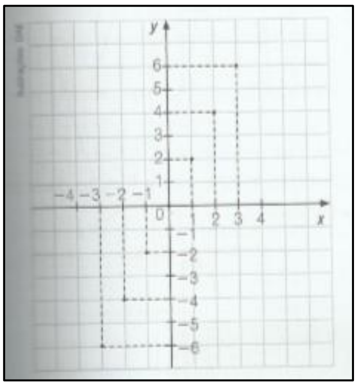


Figura 28 - Função: Gráfico
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

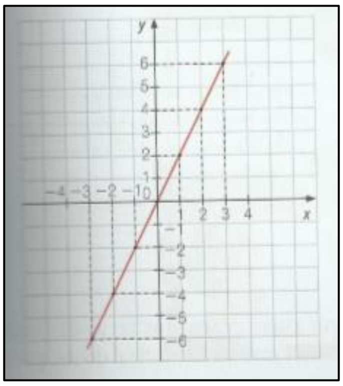


Figura 29 - Função: Gráfico
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Os autores realizam a conversão entre a representação tabular e geométrica por meio dos pares ordenados, uma terceira representação, argumentando que ao localizar os pares ordenados da terceira coluna da tabela no plano cartesiano obtém-se uma sequência de pontos alinhados. A inclusão de outros pares ordenados obtidos pela função na mesma representação gráfica, segundo os autores, apenas reforçará a condição de alinhamento dos pontos que representam os elementos dessa função, ficando para verificação do aluno, a inclusão de um novo valor para o x, obtendo um novo par ordenado (x, y) e a sua localização no plano. Do primeiro para o segundo gráfico do plano cartesiano, ele observa que todos os pontos que representam os pares ordenados dessa função formam seu gráfico, neste caso, ele seria uma reta. Trabalha a ideia, de que todos os pares ordenados que representam a função determinam o seu gráfico, ao questionar o aluno sobre a existência de um y correspondente para $x = 150000$, e se existir esse ponto, representado por esse par ordenado, que satisfaz a lei da função, estaria representado nessa reta?

Como segundo exemplo apresenta a função $y = -3x + 1$, utilizando o mesmo procedimento de construção do gráfico como no exemplo um, com valores inteiros para x, obtendo pares ordenados que foram representados no plano e ligados segundo o alinhamento apresentado, formando novamente uma reta. Questionam: “será que toda função tem como gráfico uma reta?” e como contra argumentação a esta pergunta, ele apresenta a construção gráfica para a função $y = x^2 + 2x - 1$ dá mesma forma que nos outros dois exemplos, utilizando valores inteiros para x e fazendo apenas observações quanto ao fato dos pontos não estarem alinhados e não determinarem uma reta, como mostram as Figura 30 e Figura 31.

x	$y = x^2 + 2x - 1$	(x; y)
−4	7	(−4; 7)
−3	2	(−3; 2)
−2	−1	(−2; −1)
−1	−2	(−1; −2)
0	−1	(0; −1)
1	2	(1; 2)
2	7	(2; 7)

Figura 30 - Função: Tabela
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

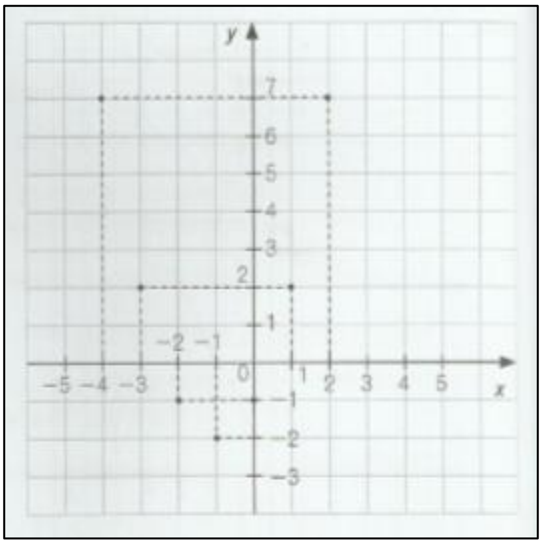


Figura 31 - Função: Gráfico
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Como forma de esclarecer a forma da curva da função, os autores relembram que x pode assumir valores não inteiros, reapresentando a tabela usada anteriormente, para determinar novos pares ordenados relacionados com a função, atribuindo números decimais à variável x, plotando estes novos pontos com os demais no plano cartesiano e definindo a curva sugestionada pelos pontos, como sendo uma parábola[8] (Figura 31, Figura 32 e Figura 33).

x	$y = x^2 + 2x - 1$	(x; y)
−3,5	4,25	(−3,5; 4,25)
−2,5	0,25	(−2,5; 0,25)
−1,5	−1,75	(−1,5; −1,75)
−0,5	−1,75	(−0,5; −1,75)
0,5	0,25	(0,5; 0,25)
1,5	4,25	(1,5; 4,25)

Figura 32 - Função: Tabela
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

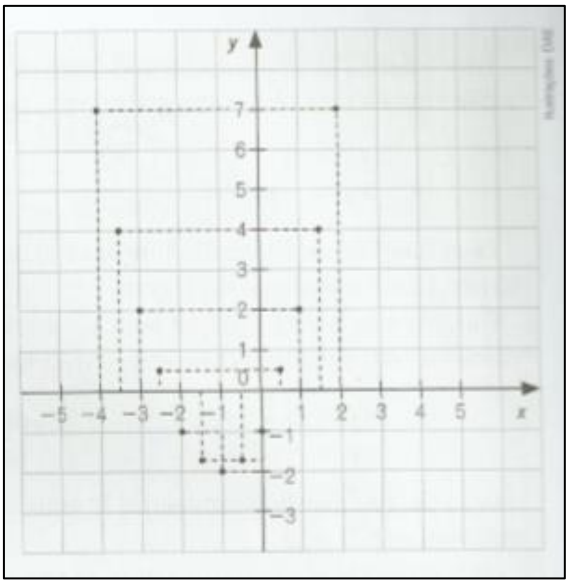


Figura 33 - Função: Gráfico
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

[8] Parábola: Conjunto de pontos do plano que equidistam de um ponto dado F, dito foco, e de uma reta d, dita reta diretriz.

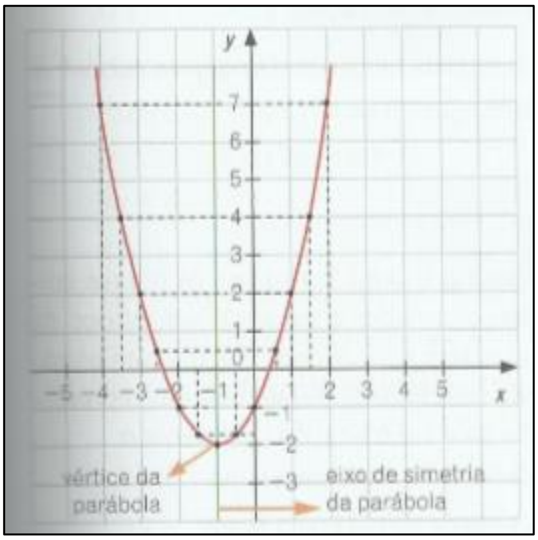


Figura 34 - Função: Gráfico
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Os autores aprofundam um pouco mais a análise do gráfico dessa função especificamente, ao observar a existência do eixo de simetria da parábola e definir o ponto da parábola que pertence a esse eixo, como vértice, dando suas coordenadas. E comentaram o fato de neste caso, a parábola ter concavidade para cima, mas, em outros casos, poderá ter concavidade voltada para baixo. Ele entra em um questionamento pertinente: “Como saber se o gráfico de uma função será uma reta ou uma parábola?”, no que responde “Observando a lei de formação”. Aproveita a questão para definir funções polinomiais do 1º grau, como sendo uma função expressa na sua forma algébrica por $y = ax + b$, tendo seu gráfico representado por uma reta, e também funções polinomiais do 2º grau como sendo funções expressas da forma $y = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico será uma parábola.

Como que para reiterar o que definiram, apresentam mais um exemplo de função quadrática, $y = -2x^2 + 4$, construindo uma tabela para obtenção de pares ordenados e determinando o gráfico como uma parábola que passa pelos pontos determinados. Com base na representação gráfica obtida, comprovaram a afirmação anterior, quanto a existência de funções cuja representação gráfica será uma parábola com concavidade voltada para baixo (Figura 35 e Figura 36).

x	$y = -2x^2 + 4$	$(x; y)$
-2	-4	$(-2; -4)$
-1	2	$(-1; 2)$
0	4	$(0; 4)$
1	2	$(1; 2)$
2	-4	$(2; -4)$

Figura 35 - Função: Tabela
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

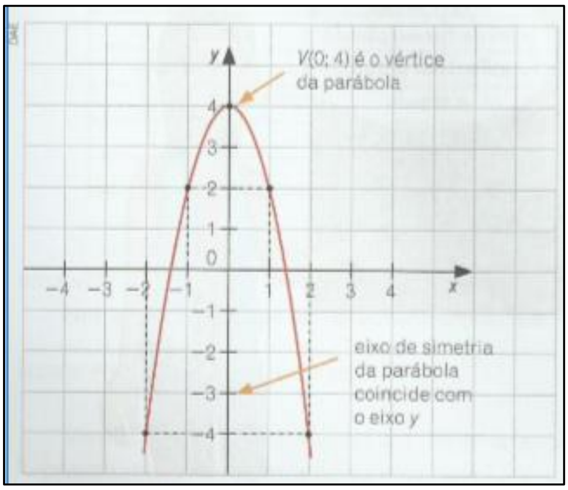


Figura 36 - Função: Gráfico
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Pelos dois exemplos de representação gráfica de funções quadrática, apresentou suas conclusões quanto a análise do coeficiente **a** dessas funções, donde determinou que para saber se a concavidade da parábola é para cima ou para baixo, basta verificar se o coeficiente **a** é maior que zero, a concavidade estará voltada para cima, e no caso em que **a** for menor que zero, a concavidade da parábola estará virada para baixo.

Em termos da construção gráfica de uma função, o autor utilizou a ideia de transposição de representação, associando os valores da tabela numérica com pares ordenados e os pares ordenados com sua representação gráfica, método muito utilizado por muitos autores. Neste caso o método mostrou-se limitado para as funções afins utilizadas como exemplos nas construções gráficas, pois as escolhas de valores inteiros para a variável x, quando existe uma gama de possibilidades para a escolha de números racionais e irracionais que não foram explorados, não tornou natural a ideia de "'fechar os buracos'" na reta que representa a função. Enquanto que na sequência, para o primeiro exemplo de função quadrática, os autores exploraram os números racionais como valores para a variável x, mas, continuaram ignorando os irracionais. E, no segundo exemplo voltou a escolher valores inteiros para a variável x. Pode-se observar a exploração de características gráficas das funções quadráticas pelos autores, como eixo de simetria, vértice e determinação de concavidade da parábola, obtida pela representação gráfica ou pela análise da expressão algébrica, o que foi incoerente se pensarmos que para as funções afins utilizadas de exemplos não foram feitas observações referentes a características gráficas, que poderiam ter sido exploradas. Entre essas características cita-se a análise do coeficiente angular da função afim para determinação se a representação gráfica será uma reta crescente ou decrescente, e mesmo o termo independente como ponto de interseção da representação gráfica da função com o eixo das ordenadas no plano cartesiano.

Na continuidade do tema gráfico de função, é apresentado o subitem “Intersecções de gráficos com eixos do sistema cartesiano e vértice da parábola”, onde ele analisa em quais pontos dos eixos o gráfico de uma função irá interceptar. Inicia observando que as coordenadas dos pontos que pertencem ao eixo x são da forma $(x, 0)$ e os pontos que pertencem ao eixo y são da forma $(0, y)$. Como exemplo na exploração e análise considera a função $y = 2x - 6$, e determina o ponto em que o gráfico corta o eixo y substituindo $x = 0$ na equação da função obtendo $y = -6$ e consequentemente o ponto de interseção $(0, -6)$. Na sequência substituí $y = 0$ na equação da função, para determinar o ponto em que o gráfico da função intersecta o eixo x, obtendo $x = 3$ e como consequência o ponto de intersecção $(3, 0)$. Utiliza esses dois pontos para traçar o gráfico dessa função que como definiu anteriormente é uma reta (Figura 37). Aqui, os autores definem como zero da função o valor de x quando se substituí $y = 0$ na equação, salientando que uma função pode ter um ou mais zeros ou mesmo nenhum.

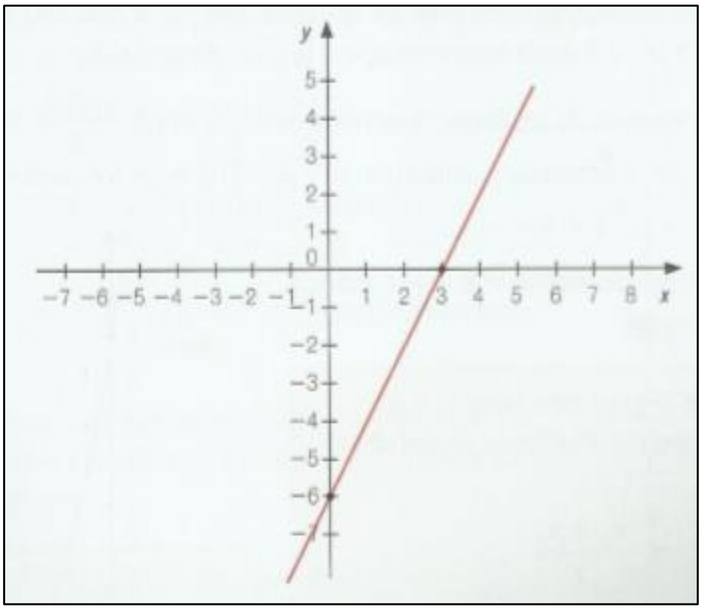


Figura 37 - Função: Gráfico
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Na sequência os autores transcrevem temas específicos como funções do 2º grau, determinação do vértice de uma parábola, função constante e função linear, que não são temas que terão sua análise abordadas neste trabalho. Como último aspecto a ser observado, passamos a analisar os exercícios correspondentes aos conceitos citados anteriormente. Para essa sessão que trata de gráfico de funções, os exercícios foram divididos em duas partes visivelmente separadas em termos de conteúdo, a primeira, do exercício 34 ao 40, constituem na abordagem do tema função afim, enquanto a segunda, do exercício 41 ao 44, trata do tema função quadrática. Na parte que trata de função afim, verificamos que o exercício 34 consiste na análise de um gráfico e a vinculação dessa representação com a expressão algébrica que determina a lei de formação da função representada. Os exercícios 35 e 36 constituem a construção gráfica, utilizando a tabela de valores que representa a vinculação das variáveis da função, mas se diferenciam, pois no exercício 35 a construção no plano cartesiano de cada gráfico deve ser individual, enquanto que no exercício 36, deve ser em um mesmo plano cartesiano todas as representações gráficas, permitindo assim, a análise de fatos geométricos presentes nas representações (Figura 38). Na sequência, os exercícios 37, 39 e 40 são apresentados por situações problemas com suas respectivas representações gráficas, e suas resoluções consistem na análise dos seus gráficos, com o intuito, de responder questionamentos sobre pontos consideráveis em cada representação gráfica. O exercício 38 de diferencia dos três anteriores, por não representar uma situação problema contextualizada, mas, sua resolução consiste em análise de um gráfico, representando seus valores do gráfico em uma tabela de valores, para auxiliar na obtenção da lei de formação da função (Figura 39).

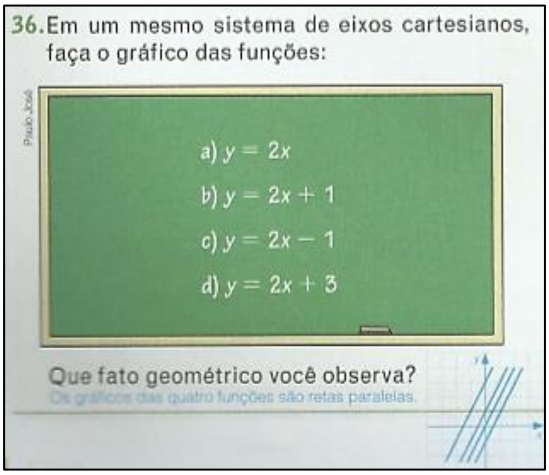
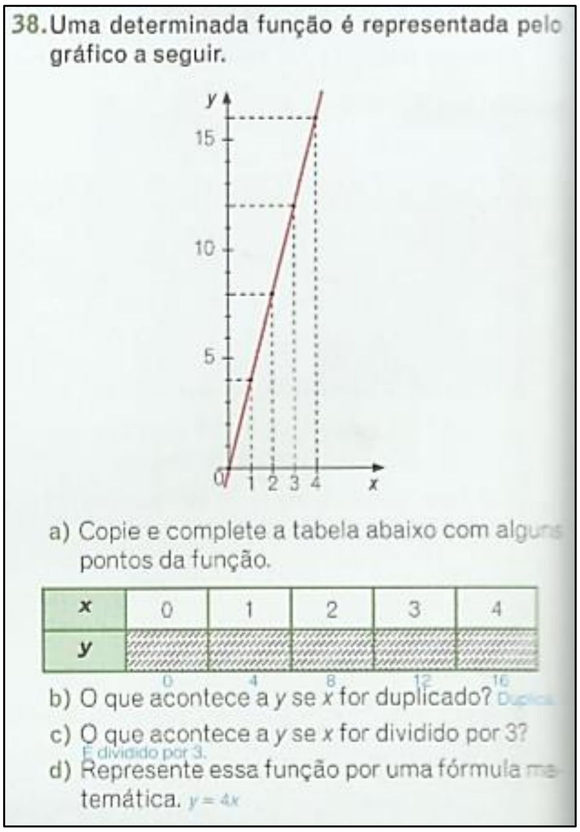


Figura 38 - Exercício 36
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)



38. Uma determinada função é representada pelo gráfico a seguir.

a) Copie e complete a tabela abaixo com alguns pontos da função.

x	0	1	2	3	4
y	0	4	8	12	16

b) O que acontece a y se x for duplicado? Duplica.

c) O que acontece a y se x for dividido por 3? É dividido por 3.

d) Represente essa função por uma fórmula matemática. $y = 4x$

Figura 39 - Exercício 38
Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015)

Os demais exercícios, que correspondem aos conteúdos abordados, são sobre o conceito de funções quadráticas. Considerando o desenvolvimento teórico apresentado pelo autor, em termos de análise de gráfico, comportamento da curva de acordo com coeficientes, os exercícios não cumprem exatamente o papel de desenvolver a análise sugerida pelos autores, pois limitam-se apenas em preencher valores de uma tabela de acordo com a lei de formação da função dada. O único entre esses que apresentou algo diferente dessa proposta é o exercício 44, nele é apresentado um gráfico com uma parábola que representa uma função, e sua resolução consiste em associar o gráfico com uma das equações apresentadas como múltipla escolha.

Os contextos de interseção da representação gráfica de uma função com os eixos do plano cartesiano, zero de uma função afim, ou determinação de vértice de uma parábola e de sua concavidade, praticamente não foram explorados pelo autor nos exercícios propostos. Verificamos apenas na sessão “revisando”, a abordagem de um exercício sobre função quadrática, cuja resolução, consiste em o aluno determinar os pontos do gráfico da função que interceptam os eixos do plano cartesiano e determinar a representação gráfica da função em questão.

Comparando a abordagem adotada pelo autor na construção e determinação de elementos importantes de um gráfico, ou mesmo, antes desta abordagem, a iniciação a análise gráfica que adotou, com os exercícios apresentados para esses temas, podemos afirmar que a significação desses conceitos não foi bem representada, primeiro por não abordar todas as relações e elementos apresentados e segundo por não retratar nenhuma situação em que se pudesse aplicar os conceitos de forma simultânea e conectados por uma mesma função, deixando-os de certa forma separados em “caixinhas”.

Será observado a partir desta análise, que as demais ocorreram em quantidade menor de páginas. Isso se explica, pelo fato do autor desta obra ter abordado função afim e quadrática na conceituação geral de função, sem abrir tópicos a parte para analisar as propriedades individualmente, enquanto os demais, apresentaram função, função afim e função quadrática em capítulos ou tópicos diferentes, alguns inserindo a ideia geral de função no tópico de função afim.

4.2 VONTADE DE SABER

Este livro da coleção vontade de saber de Joamir Roberto de Souza e Patricia Rosana Moreno Pataro, da editora FTD, apresenta como objetivos a serem atingidos pelos autores para os conceitos de relações e funções: Identificar relações entre duas grandezas; compreender o conceito de função; escrever a lei de formação de uma função; identificar a variável independente e a variável dependente; representar uma função por meio de diagramas e gráficos e; verificar se um gráfico representa uma função.

Dentro dos conteúdos abordados no 9º ano, o conceito de relações e funções é apresentado no capítulo 5, sob o título “Função Afim”. Como tema inicial desse capítulo, os autores utilizam um pequeno texto sobre criptografia e apresentam uma tabela com símbolos para cada algarismo numérico, mostrando por meio de exemplos como funciona o processo de criptografar. Abre espaço para a discussão em sala de aula entre os envolvidos, sobre a importância da criptografia, ficando como sugestão no desenvolvimento do contexto que o aluno execute um código dado e posteriormente que crie um código, com base na Figura 40:

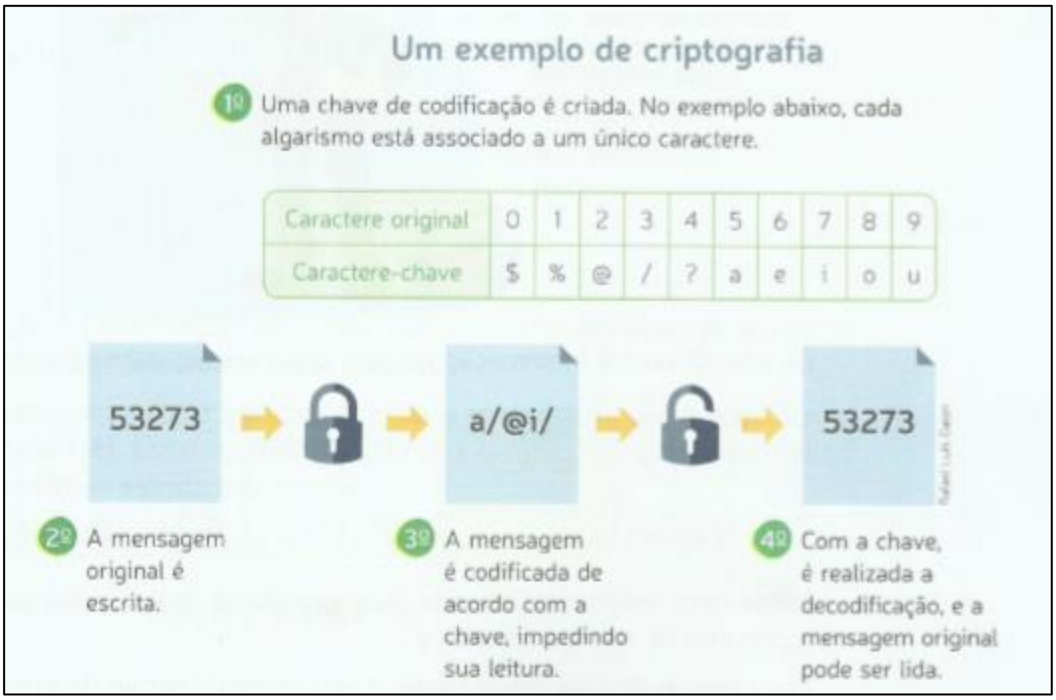


Figura 40 - Tabela De Símbolos Para Criptografia
Fonte: Souza e Pataro (2015)

Como sugestão ao professor, sugere a leitura do texto sobre criptografia, promovendo um debate, afim de verificar as diferentes opiniões dos alunos e propõe a resolução das perguntas individuais ou em duplas para que as respostas sejam discutidas pela turma. Sugere ainda que para complementar o assunto seja elaborado com os alunos um sistema de criptografia para o alfabeto, em que cada letra é associada a um único símbolo e com base nesse sistema, sejam codificadas e descodificadas algumas palavras na lousa. Essa situação apresentada pelos autores, representa uma relação onde associa um conjunto de símbolos com algarismos, porém esse exemplo de relação de certa forma induz o aluno ao conceito de função, ao considerar a existência de um único algarismo para cada símbolo utilizado na codificação. Os autores poderiam ter apresentado uma situação em que, se relaciona dois elementos de um primeiro conjunto com um único de um segundo conjunto, e comparando as duas situações, definir as duas como relações, porém com a primeira sendo um caso específico dito função.

Os autores iniciam o conceito de função, apresentando o subtítulo “A Noção de Função”, onde utilizam o exemplo citado da criptografia para pré-definir o conceito de função como sendo: “o relacionamento de elementos onde, como no exemplo, cada algarismo se relaciona a um único símbolo”. Na sequência, são apresentados situações que representam exemplos de relações entre grandezas, as quais o autor cita como exemplos de funções no cotidiano, sendo eles, a dependência da fatura do telefone de acordo com o tempo de uso, a dependência da comissão de um vendedor de acordo com as vendas realizadas em um determinado período, a dependência do tempo de viajem de acordo com a velocidade utilizada.

Aprofundam a análise desse conceito, quando apresenta como exemplo o consumo em kwh de um chuveiro, associando o tempo em horas com uma variável x, e o consumo de energia do chuveiro elétrico em Kwh, com uma variável y, criando uma tabela associando valores de tempo (x) e consumo de energia (y), como observado na Figura 41.

Agora, observe o que diz um eletricista.

De acordo com a informação do eletricista, vamos construir o seguinte quadro.

Tempo em horas (x)	1	2	3	4	5
Consumo em kWh (y)	4,5	9	13,5	18	22,5

Figura 41 - Função: Tabela
Fonte: Souza e Pataro (2015)

Com base nesses dados, ele enfatiza a relação de todos os tempos de uso do chuveiro com um único consumo de energia, o que, segundo os autores, caracterizaria um exemplo de função, apresentando uma "sentença" que permite calcular o consumo y, em Kwh, em função do tempo x, em horas, e classifica x como variável independente e y como variável dependente, pois y depende de x. A sentença referida é apresentada na Figura 42.

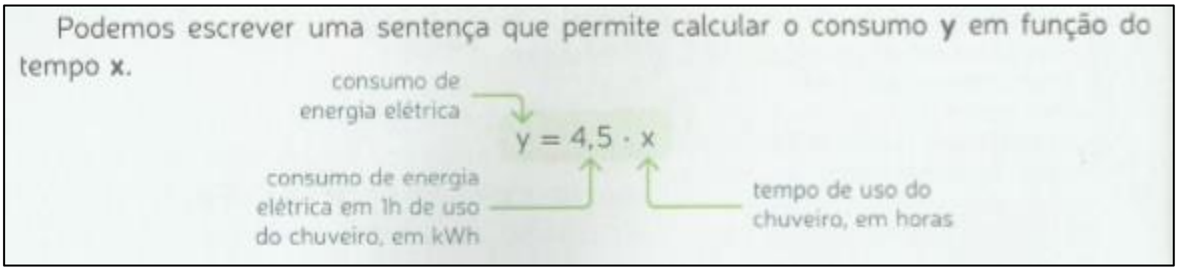


Figura 42 - Função: Lei De Formação
Fonte: Souza e Pataro (2015)

Definem a "sentença" como lei de formação da função ou fórmula da função, utilizando-a para calcular coisas como o consumo de energia em 8h de uso de chuveiro, ou qual seria o tempo de uso para um consumo de 54 Kwh, apresentando o desenvolvimento algébrico para a obtenção dos valores sugeridos.

Nessa primeira sequência de dados, conceitos e observações feitas pelos autores, se observa a superficialidade com que trata as definições de função e de variáveis, quanto a dependência ou não. Primeiro eles limitam a noção de função a casos de relações unívocas, não apresentando situações onde dois valores de um primeiro conjunto de dados podem estar relacionados com um mesmo valor de um segundo conjunto de dados. E quanto a diferenciação de variável dependente e independente, os autores poderiam ter explorado as sentenças apresentadas como exemplos de funções, para identificar qual grandeza em cada situação seria a variável dependente e qual grandeza seria a variável independente. Para a obtenção da lei de formação da função, poderiam ter explorado a apresentação do cálculo numérico dos valores y da tabela, permitindo ao aluno a visualização dos valores que variam e em função de qual valor variam, prejudicando o processo de abstração do aluno de acordo com Ponte (1992).

Na apresentação do segundo exemplo, novamente não exploram o desenvolvimento numérico de situações palpáveis, para obter a identificação da lei de formação da função descrita na situação problema. Problema que representa o uso da internet em um cibercafé, com um custo fixo de R$ 2,50 mais R$ 3,30 por hora de acesso, relacionando o valor a ser pago pelo acesso à internet (y) em função do número de horas (x) e apresentando a expressão mostrada na Figura 43:

Figura 43 - Função: Lei De Formação
Fonte: Souza e Pataro (2015)

Ainda na mesma situação, os autores fazem a observação: “Note que a relação é uma função”, justificando que para cada hora de acesso à internet (x) está associado um único valor a ser pago (y). Substituem a notação y pela notação $f(x)$ e como utilização dessa notação, sugerem que, como a variável independente (x) representa o números de horas de acesso, ao considerar $x = 3$, a variável dependente (valor a ser pago) será dada por $f(3) = 2{,}5 + 3{,}3 \cdot 3 = 12{,}4$. Com essa exemplificação da troca de notação, ele apresentou o cálculo do valor numérico de uma função, mas sem apresentar a definição ou fazer qualquer referência sobre, e como observação associa $f(3) = 12{,}4$ ou $y = 12{,}4$ quando $x = 3$. São apresentadas como opções de indicação de função a utilização de outras letras além de f, também sugerem o uso de outras letras para representar a variável independente (x).

De modo geral, os autores não exploraram as opções fornecidas pelos exemplos que utilizaram, mesmo tratando-se de uma noção, não lembrando que os alunos em questão, são leigos no assunto, e que de acordo com PONTE (1992) a estratégia numérica é a que os deixam mais confiantes. Eles partem direto da representação coloquial para a representação algébrica, sem considerar a transformação numérica sofrida pelos elementos, até se determinar a lei de formação da função. No segundo exemplo, poderiam ter questionado os leitores, quanto ao custo de outras quantidades de horas de acesso à internet no cibercafé.

No subtítulo da sequência, “Representação de uma função por meio de diagramas”, os autores desenvolvem o tema que o subtítulo sugere. Afirmando que para uma função f qualquer, basta substítuir valores para a variável independente x, obtendo valores para a variável dependente $f(x)$. Como exemplo, apresenta a tabela da Figura 44, com valores para x e $f(x)$, concluindo que os valores da segunda linha são obtidos ao se adicionar uma unidade aos valores da primeira linha, obtendo a lei de formação dessa função que seria $f(x) = x + 1$.

x	-2	-1	0	1	$\sqrt{3}$	5
f(x)	-1	0	1	2	$\sqrt{3}+1$	6

Figura 44 - Função: Tabela
Fonte: Souza e Pataro (2015)

Partindo da tabela, fazem a conversão direta entre a representação em tabela com o diagrama apresentado na Figura 45, observando que estão representadas as correspondências de alguns valores atribuídos a variável independente x, mas que essa variável poderia assumir qualquer valor na função f.

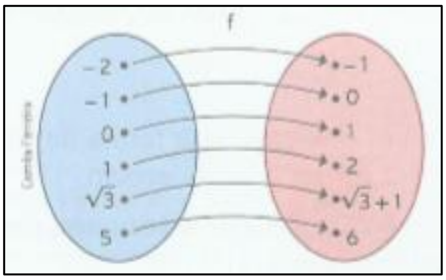


Figura 45 - Função: Diagrama
Fonte: Souza e Pataro (2015)

Não houve a mediação necessária para deixar clara a representação da relação desses valores da tabela para o diagrama. O autor não considerou vários fatores importantes, como, qual linha da tabela foi representada no primeiro "balão" do diagrama e qual no segundo. Não consideraram a possibilidade de ter mais elementos no segundo "balão" do diagrama e ainda assim ele continuar representando a mesma função, nem qual é a função (para que serve) da seta representada. São observações que para alguns alunos podem representar empecilho na obtenção da representação por diagrama.

Na apresentação da sessão "Atividades", os autores possibilitam aos alunos, entenderem um pouco mais a associação da linguagem descrita com a expressão algébrica de uma função, utilizam para isso, situações que envolvem a análise de sequências de figuras, relacionando a quantidade de elementos utilizados para a representação das figuras e/ou mesmo a posição ocupada na sequência, e situações problemas com tabelas ou regras expressas na linguagem descrita. Podemos dizer que, exploraram mais a determinação numérica de uma função nos exercícios apresentados, do que no desenvolvimento dos seus exemplos para obter conceitos, o que gera a dúvida, se a teoria não for suficiente como entender os métodos de resolução das atividades baseados nela? Das atividades apresentadas da 1 a 8, 10 e 11 estão de acordo com o descrito acima, incitando a criação de tabelas de valores, a observação de padrões para a determinação de uma ‘sentença’ matemática, o cálculo de valores dada a variável independente e posteriormente a determinação de valores dada a variável dependente. Apresentam essas atividades em diversos contextos, sendo um dos mais notáveis o exercício apresentado na FiguraFigura ***46***:

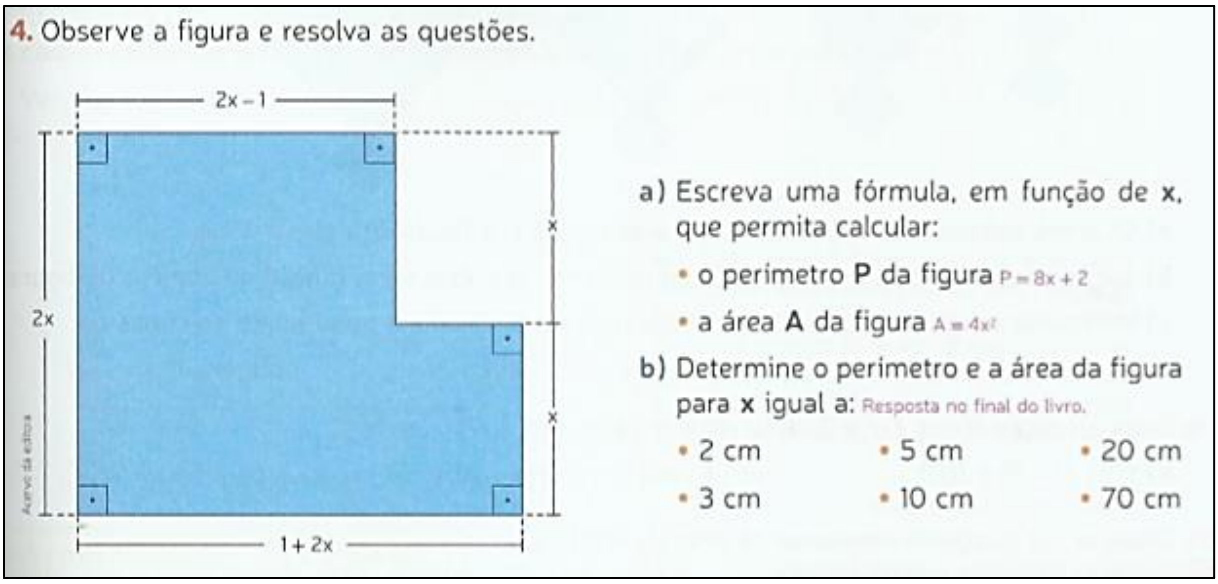


Figura 46 - Exercício 4
Fonte: Souza e Pataro (2015)

A atividade 9, apresentou um caráter de fixação de conteúdo, ao pedir que fossem determinados os valores numéricos para $f(5), f(-2)\ e\ f(0)$ dada a função $f(x) = 2x^2 + 5$, também pediu o valor de f para $x = 0{,}3$ e o valor de x para $f(x) = 7$. Mas, é no exercício 12, que aparecem as dúvidas levantadas anteriormente quanto a representação de uma função por diagrama. Considerando o exemplo apresentado pelos autores, como determinar qual dos “balões” de cada diagrama representa os valores de x? Por que agora aparecem setas ligadas com dois elementos do segundo “balão”? A apresentação do exemplo dado pelos autores, sobre representação por diagramas, é insuficiente para a compreensão do exercício 12 (Figura 47), quando pensamos em pessoas que estão tendo o primeiro contato com os conceitos e representações. Já o exercício 13, apresenta uma representação similar ao exemplo dado.

12. Qual dos diagramas representa a função $f(x) = x^2 + 1$ para os valores estabelecidos? b

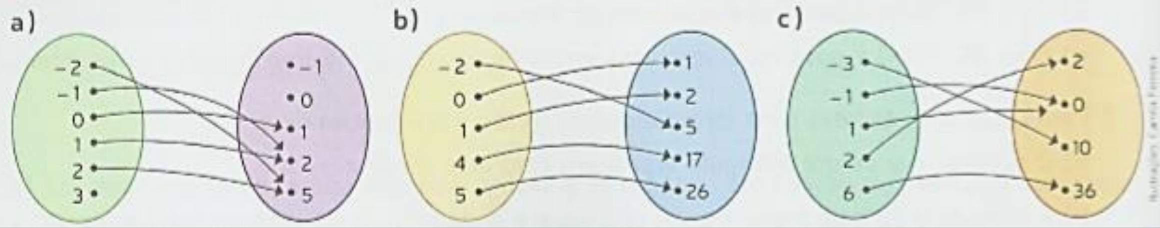


Figura 47 – Exercício 12
Fonte: Souza e Pataro (2015)

13. Represente a função $g(x) = -x + 4$ por meio de um diagrama. Para isso, atribua a **x** valores inteiros maiores que -2 e menores que 5. Resposta no final do livro.

Figura 48 – Exercício 13
Fonte: Souza e Pataro (2015)

O que fica evidente, tanto no desenvolvimento dos exemplos até o presente momento quanto nas atividades propostas, é a utilização de situações problemas do cotidiano dos alunos e vinculação entre os conceitos matemáticos. Um exemplo que pode ser citado, o exercício 2 (Figura 49), que trata de dosagem de medicamentos, sob instruções dos autores, o professor deve possibilitar a discussão em sala de aula sobre os cuidados que devemos ter ao usar medicamentos, como medicar somente com prescrição médica, acompanhados por um adulto e sempre consultar a bula do medicamente; e o exercício 10 que trata do consumo de energia elétrica, instruindo o professor a conscientizar os alunos da importância da energia elétrica, deixando disponível uma tabela com valores médios de consumo de energia de alguns eletrodomésticos em uma residência (Figura 50):

2. Entre os vários fatores que determinam a quantidade de medicamento que uma pessoa pode receber está a massa corporal. Na bula de todo medicamento consta sua posologia, ou seja, a indicação da dose adequada. O quadro a seguir foi construído com base nas informações presentes na bula de certo medicamento. Explique aos alunos que os medicamentos devem ser utilizados somente com orientações médicas e quando fornecidos por um adulto.

Massa corporal (kg)	2	4	6	8	10
Dose indicada (gota)	1	2	3	4	5

a) Escreva uma fórmula que expresse a dose **g** (em gotas) em função da massa **m** (em quilogramas). $g = \frac{m}{2}$

b) Qual a dose indicada para uma pessoa que tem 36 kg de massa? 18 gotas

c) Uma dose de 41 gotas é indicada para uma pessoa com massa igual a quantos quilogramas? 82 kg

Figura 49 - Exercício 2
Fonte: Souza e Pataro (2015)

Percentual do consumo médio de energia elétrica, por aparelho, em um domicílio	
Chuveiro elétrico	25%
Ferro elétrico	6%
Geladeira e freezer	30%
Iluminação	20%
Máquina de lavar	5%
Televisão	10%
Outros	4%

Fonte: <www.copel.com/hpcopel/educacao/sitearquivos2.nsf/arquivos/folder_use_melhor_sua_energia/$FILE/uso_energia.pdf>. Acesso em: 13 maio 2015.

Figura 50 – Tabela do exercício 10
Fonte: Souza e Pataro (2015)

Na atividade 11, associa uma função com a soma dos ângulos internos de um polígono, permitindo que os alunos percebam a aplicabilidade de conceitos matemáticos em outras áreas da própria Matemática.

No subtítulo “Representação Gráfica de uma Função”, os autores iniciam com a retomada dos conceitos sobre os elementos do plano cartesiano, e a localização de pontos nele, mostrando a associação de uma função com sua representação no plano. Sugere ao professor, retomar os conceitos de plano cartesiano desenvolvidos no volume do 8º ano dessa coleção, com representação do plano na lousa e localização de alguns pontos coordenados, deixando disponível para reprodução planos cartesianos a serem utilizados na realização das atividades.

Na vinculação do plano cartesiano ao conceito de função, os autores partem de uma situação problema, envolvendo o enchimento de uma piscina dada uma vazão de 2,5 m^3 por hora, relacionando a variável independente com o tempo x em horas, e a variável dependente com a quantidade y de água na piscina e determinando uma expressão algébrica definida por $y = 2{,}5x$. Na tentativa de transformar a função da sua representação analítica para a sua representação no plano cartesiano, os autores afirmam que ao atribuir valores para x, obtém-se valores para y, podendo associá-los a pares ordenado, representados no plano cartesiano. Para isso apresenta uma tabela, Figura 51, associando os pontos obtidos a sua representação no plano cartesiano, Figura 52.

x	y = 2,5x	(x,y)
0	y = 2,5 · 0 = 0	(0; 0)
1	y = 2,5 · 1 = 2,5	(1; 2,5)
2	y = 2,5 · 2 = 5	(2; 5)
3	y = 2,5 · 3 = 7,5	(3; 7,5)
4	y = 2,5 · 4 = 10	(4; 10)
5	y = 2,5 · 5 = 12,5	(5; 12,5)

Figura 51 - Função: Tabela
Fonte: Souza e Pataro (2015)

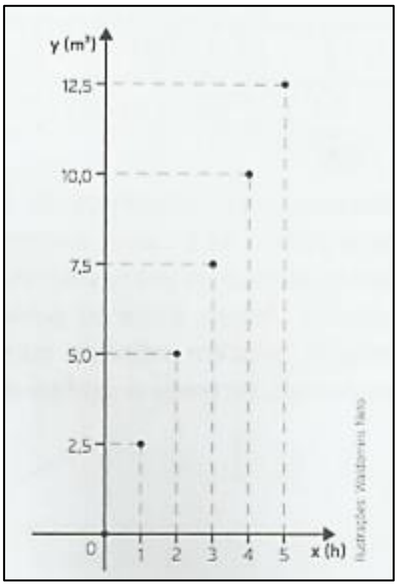


Figura 52 - Função: Gráfico
Fonte: Souza e Pataro (2015)

Ressaltam que, a situação apresentada trata de medidas, tempo e volume, não sendo considerados para a representação no plano cartesiano valores negativos para essas variáveis. Podemos observar que na tabela ele só utiliza valores inteiros, justificando posteriormente que estes valores poderiam ser qualquer valor real, o que garantiria a existência de infinitos valores para x entre os números inteiros, que foram utilizados na obtenção dos pontos, determinando que a união da representação desses infinitos pontos faz com que o gráfico seja uma reta e a representa como na Figura 53:

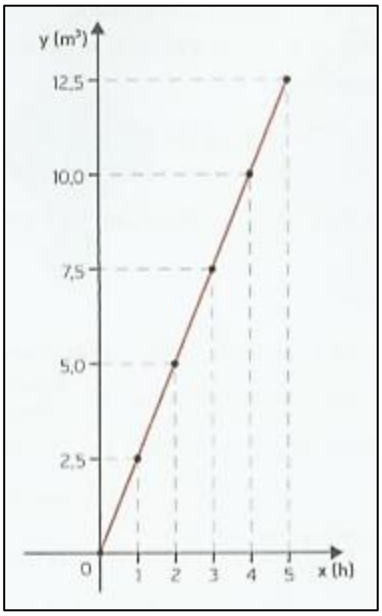


Figura 53 - Função: Gráfico
Fonte: Souza e Pataro (2015)

Como segundo exemplo, apresentam a função quadrática $f(x) = x^2 + 1$ e utilizam o mesmo formato de tabela para vincular a expressão algébrica com valores numéricos e consequentemente a pares ordenados (Figura 54), porém, neste exemplo ele utiliza números racionais e inteiros negativos como variável independente na obtenção dos pares ordenados, sem apresentar uma justificativa para a mudança de valores comparadas com a tabela do exemplo anterior, o que não faz sentido, pois eles mesmos afirmaram que poderia ser utilizado qualquer valor real para a variável x. A sequência da construção gráfica é apresentada abaixo:

x	$f(x) = x^2 + 1$	(x,y)
− 2,5	$f(-2{,}5) = (-2{,}5)^2 + 1 = 7{,}25$	(− 2,5; 7,25)
− 1	$f(-1)^2 = (-1)^2 + 1 = 2$	(− 1; 2)
0	$f(0) = (0)^2 + 1 = 1$	(0; 1)
0,5	$f(0{,}5) = (0{,}5)^2 + 1 = 1{,}25$	(0,5; 1,25)
1	$f(1) = 1^2 + 1 = 2$	(1; 2)
2	$f(2) = 2^2 + 1 = 5$	(2; 5)
2,4	$f(2{,}4) = (2{,}4)^2 + 1 = 6{,}76$	(2,4; 6,76)

Figura 54 - Função: Tabela
Fonte: Souza e Pataro (2015)

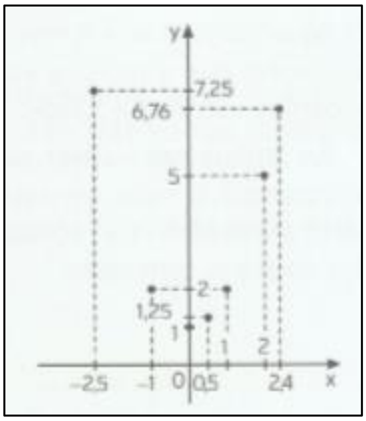


Figura 55 - Função: Gráfico
Fonte: Souza e Pataro (2015)

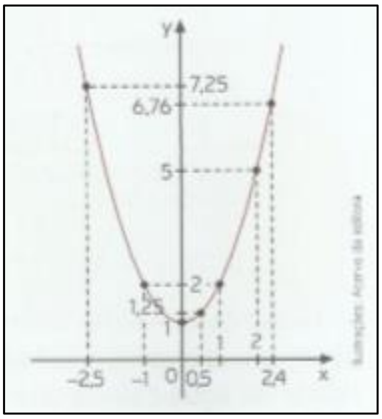


Figura 56 - Função: Gráfico
Fonte: Souza e Pataro (2015)

Entre a localização dos pontos no plano e o traçado da curva, os autores salientam que, apenas alguns pontos não são suficientes para traçar o gráfico da função, mas, de acordo com eles, devemos considerar que entre os valores considerados para a variável independente, existem infinitos outros valores que podem ser atribuídos a ela, e consequentemente infinitos valores de y que determinariam a curva em questão. Neste tópico, é importante destacar que os autores apenas apresentam a construção do gráfico de uma função, mas em nenhum momento faz observações analíticas sobre o gráfico, como forma de obter respostas a perguntas.

Faltam justificativas quanto a utilização de determinados valores em uma tabela e outros em outra tabela e no exemplo dois poderia ter acrescido mais pontos a representação gráfica, mostrando de maneira visual a aproximação da representação dos pontos a curva apresentada.

No subtítulo “Gráfico de uma função”, partem da definição de função, que segundo os autores é: “temos uma função se, ao atribuirmos um valor para a variável x, obtemos um único valor correspondente para a variável y”. Justificam assim, o traçado de uma reta paralela ao eixo y no plano cartesiano em que consta representada uma curva, afim de verificar se esta é função ou não, garantindo que se a mesma cruzar a curva em um único ponto, a curva representa função e se cruzar em mais que um ponto, então não será função, como mostrado por ele nos gráficos utilizados como exemplos na Figura 57.

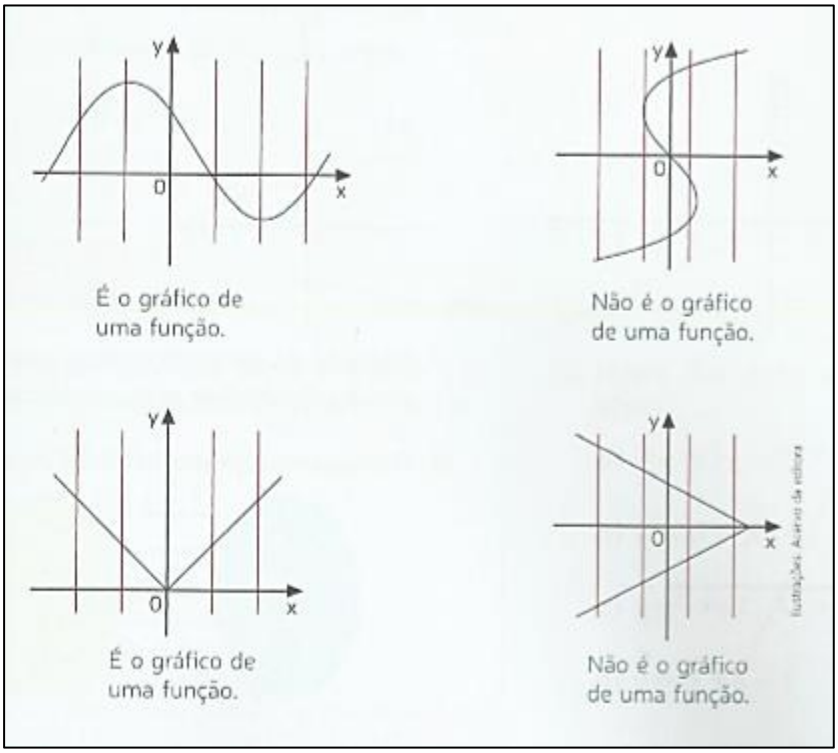


Figura 57 - Gráficos
Fonte: Souza e Pataro (2015)

As atividades desse tópico foram limitadas a apenas cinco. Temos as atividades tratando da representação de pontos no plano cartesiano. As atividades 14, 15 e 16, envolvem a observação de gráficos de funções e sua associação com a representação analítica, enquanto a 17 consiste em observar o gráfico e dizer se a curva representa uma função ou não, e a 18 (Figura 58), utiliza a definição de função para análise de um diagrama e verificação se este representa ou não uma função, apresentando como meio de relacionar a definição de função utilizada na análise de gráfico para análise do diagrama apresentado.

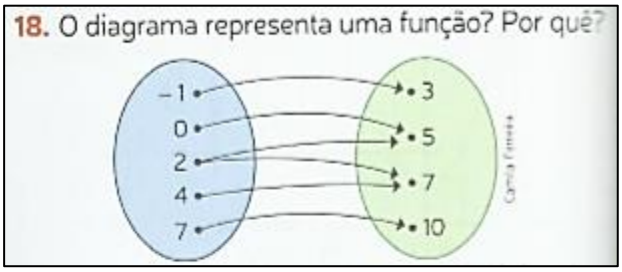


Figura 58 - Exercício
Fonte: Souza e Pataro (2015)

Percebe-se que a metodologia de Resolução de Problemas não foi abordada nesse subtítulo, nem nas atividades e nem na análise de gráficos, limitando as representações gráficas a uma mera figura abstrata sem muito significado. O conteúdo de funções que pode ser abordado, em descrições específicas como função afim e função quadrática, é mais amplo do que foi apresentado pelos autores. Conceitos como conjuntos, relação, a própria definição de função no seu sentido matemático, domínio, imagem, contradomínio, crescimento, decrescimento e valores constantes em representações gráficas, a exploração da interpretação de gráficos de funções que representam situações problemas, determinação gráfica e algébrica de zero de uma função, poderiam ser apresentados dentro da ideia de noção de função, não com características matemáticas exaltadas, mas seus significados e representações para casos mais simples. Na sequência, o autor apresenta o subtítulo referente a funções afim, onde trata especificamente desse tipo de função e posteriormente outro subtítulo sobre função quadrática, sendo que, o desenvolvimento da construção do gráfico desses dois tipos de funções, foi desenvolvido no tópico “Representação Gráfica de Uma Função”.

4.3 MATEMÁTICA: COMPREENSÃO E PRÁTICA

O próximo livro a ser analisado é da coleção Matemática: Compreensão e Prática do autor Ênio Silveira da editora Moderna. Este livro de 9º ano, apresenta o capítulo 3 sob o título “Função Afim”, onde inicia a abordagem do assunto funções com um pequeno texto “É hora de observar”. Transcreve no texto sobre o artesanato da Feira dos Caxixis, que são miniaturas de objetos em cerâmica, e ocorre uma vez ao ano na cidade de Nazaré da Farinhas na Bahia. O autor supõe que um vendedor venda cada peça por R$ 10,00 e questiona sobre qual seria o custo de 3 peças ou de 10 peças, instigando a obtenção do registro de uma sentença que relacione a quantidade de caxixis comprados (n), com o valor a pagar (V) em reais. Neste ponto, o autor sugere que, se converse com os alunos sobre a importância das feiras de artesanato para a economia de algumas cidades brasileiras, estimulando-os a contar aos colegas sobre feiras de artesanatos que conheçam.

Sugere que, o professor faça o levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos a respeito da noção de função, e como sequência das ideias iniciais, ele apresenta o quadro “trocando ideias”, onde apresenta três pessoas que querem comprar três terrenos vizinhos, com 100, 120 e 150 metros quadrados, informando o preço de um metro quadrado como sendo de R$ 400,00 e questionando sobre o preço dos terrenos de acordo com sua metragem quadrada. Para responder essa pergunta, apresentou a tabela da Figura 59:

Proprietário	Área do terreno	Preço do metro quadrado	Preço do terreno
Alberto	100 m²	R$ 400,00	R$ 40 000,00
Bruna	120 m²	R$ 400,00	R$ 48 000,00
Sandra	150 m²	R$ 400,00	R$ 60 000,00

Figura 59 - Função: Tabela
Fonte: Silveira (2015)

Levando em conta os dados da tabela acima, os alunos devem responder: “Qual seria o custo de um terreno de 200 metros quadrados? O preço do terreno varia de acordo com o quê?” e de acordo com a resposta da segunda pergunta, pede que obtenham uma sentença que relacione a área e o preço do terreno, determinando qual a área de um terreno que custa R$ 90.000,00.

As situações iniciais apresentadas pelo autor, configuram a sua abordagem do conceito de função utilizando o método de contextualização por situações problemas. Inserindo neste contexto representações como a linguagem descritiva, expressão algébrica e tabela de valores, com a participação ativa do público envolvido, no caso, os alunos. Também desenvolve a ideia de variação de valores e a generalização das operações para obtenção da lei de formação da função em questão.

Como subtítulo 1 ele apresenta “Ideia de função”, onde inicia com uma situação que descreve o ganho de um pedreiro que cobra R$ 30,00 por metro quadrado de parede rebocada, apresentando uma tabela, Figura 60, que relaciona os metros quadrados de parede rebocada com valores a serem cobrados:

Valor do serviço de acordo com a área rebocada				
Área rebocada (em m²)	20	30	40	50
Valor (em real)	600,00	900,00	1 200,00	1 500,00

Figura 60 - Função: Tabela
Fonte: Silveira (2015)

Observando nessa situação, que cada área de parede rebocada determina um único valor a ser recebido pelo pedreiro e que quando isso ocorre este valor recebido está em função da área de parede rebocada. Conclui que, quando se relaciona grandezas, se para cada medida da primeira grandeza corresponde uma única medida da segunda, diz-se que a segunda está em função da primeira. Apresenta o subitem “Lei de formação da função”, onde afirma que quando temos uma relação em que uma grandeza é função de outra, a correspondência entre os valores das grandezas é expressa por uma sentença chamada lei de formação da função ou lei da função, usa como exemplo a situação apresentada anteriormente, onde, se representarmos como y o valor recebido em reais e como x a área rebocada em metros quadrados, a lei da função será dada por $y = 30 \cdot x$.

Se observa nas situações apresentadas pelo autor, que apesar da contextualização e da representação das situações por tabela de valores, ele não apresenta as expressões numéricas referente a obtenção do valor da variável dependente de cada situação, o que dificulta a percepção por parte dos alunos das equações algébricas, utilizadas para representar as leis de formação das funções nas situações consideradas. Na sequência, no subitem “Variáveis”, o autor define para o exemplo anterior que, o valor recebido pelo pedreiro e a área de parede rebocada são grandezas ditas variáveis, o valor recebido pelo pedreiro seria a variável dependente, por depender da área de parede rebocada e a área seria a variável independente, por podermos escolher um valor para essa variável. Neste ponto, sugere ao professor, o acréscimo do comentário que, quando a situação for a representação de uma prática real, ou seja, do cotidiano, que os valores escolhidos para a variável independente devem ser coerentes com a situação e que nesse exemplo trabalhado, não podem ser usados valores negativos por se tratar de medida de área.

Na sessão das atividades deste subtítulo, apresenta duas atividades apenas, a primeira representa uma indústria com produção de embalagens biodegradáveis, com uma produção de 600 unidades por hora, solicitando que o aluno determine quantas embalagens serão produzidas em 10 horas de trabalho, quantas horas eram necessárias para produzir 4800 unidades de embalagens biodegradáveis. Questiona ainda, sobre a possibilidade de a produção de embalagens estar em função do tempo. Solicita que o aluno determine uma lei de formação que relacione o número de embalagens com o tempo em horas. Na segunda atividade, apenas pede que o aluno determine uma lei de formação que relaciona a área do quadrado com a medida l do seu lado. Considerando as análises e observações feitas pelo autor na obtenção dos conceitos, as abordagens das atividades poderiam ter sido mais aprofundadas, no sentido de identificar variável dependente e independente, determinar uma maior quantidade de valores numéricos. A quantidade de atividades apresentadas foi insuficiente, se o objetivo era o aluno desenvolver as noções apresentadas no texto, justamente por se tratar de interpretação de situações problemas, como observamos na Figura 61.

1 Uma indústria produz embalagens biodegradáveis. Sua produção é de 600 unidades por hora.

a) Em 10 horas de trabalho, quantas embalagens biodegradáveis são produzidas? 6000 embalagens

b) Para produzir 4 800 unidades de embalagens biodegradáveis, quantas horas são necessárias? 8 horas

c) Podemos afirmar que o número de embalagens biodegradáveis produzidas é função do tempo de produção? Por quê? Sim, porque cada hora corresponde a uma única quantidade de embalagens produzidas.

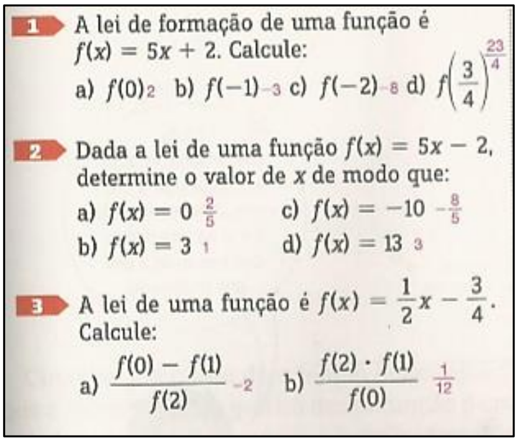
d) Escreva uma lei que relacione o número de embalagens biodegradáveis com o tempo, em hora. $y = 600t$, onde y representa a quantidade de embalagens produzidas e t o tempo (em hora)

2 A área (A) de um quadrado é dada em função da medida (ℓ) do seu lado. Escreva a lei dessa função e identifique a variável dependente e a variável independente. $A = \ell^2$
Variável dependente: área
Variável independente: medida do lado

Figura 61 - Exercícios 1 e 2
Fonte: Silveira (2015)

Os próximos subitens apresentados, se referem a notação de uma função e ao seu valor numérico. No primeiro, o autor apresenta uma situação problema em que se utiliza a fórmula $L = \frac{x}{12}$, onde L são os litros de combustível consumidos por um veículo e x é a distância percorrida. Afirma que, neste caso, podemos substituir L por $f(x)$, representando a função por $f(x) = \frac{x}{12}$, e leia-se "f de x é igual a $\frac{x}{12}$" e $f(x)$ passaria a representar a quantidade de litros de combustível consumidos. Sugere ao professor que comente sobre a possibilidade de representar funções por quaisquer outras letras no lugar de f e x, e apresenta alguns exemplos. No segundo subitem, utiliza o exemplo do primeiro para ensinar a calcular o valor numérico da função, argumentando que se o automóvel percorreu 108 km, basta substituir esse valor no lugar da variável x na lei de formação da função e, ao resolver as operações obter a quantia de combustível consumida, que neste caso seria $9\ l$, afirmando então que, o valor da função para $x = 108$ é $y = 9$.

Como exercícios desses subitens, apresenta questões de fixação para determinar o valor da variável dependente dada a independente e depois invertendo, com apenas um exercício que pede a determinação da lei de formação partindo de uma tabela com valores relacionados. Nesse tópico, a escolha das atividades feita pelo autor, não nos parece adequada, pois na apresentação da contextualização para definir a notação da função e o seu valor numérico, utilizou a resolução de uma situação problema, onde a notação definida foi pouco aplicada, e nas atividades, ele não apresentou nenhuma atividade de resolução de problemas, apenas atividades de aplicações diretas da definição do valor numérico de uma função, como podemos verificar na Figura 62.


1 A lei de formação de uma função é $f(x) = 5x + 2$. Calcule:

a) $f(0)$ 2 b) $f(-1)$ -3 c) $f(-2)$ -8 d) $f\left(\frac{3}{4}\right)$ $\frac{23}{4}$

2 Dada a lei de uma função $f(x) = 5x - 2$, determine o valor de x de modo que:

a) $f(x) = 0$ $\frac{2}{5}$ c) $f(x) = -10$ $-\frac{8}{5}$

b) $f(x) = 3$ 1 d) $f(x) = 13$ 3

3 A lei de uma função é $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$. Calcule:

a) $\frac{f(0) - f(1)}{f(2)}$ -2 b) $\frac{f(2) \cdot f(1)}{f(0)}$ $\frac{1}{12}$

Figura 62 - Exercícios 1,2 e 3
Fonte: Silveira (2015)

Na sequência, o autor apresenta o subtítulo 2, “Representação gráfica de uma função”, onde relembrou a localização de pontos na reta real e apresentou o plano cartesiano com seus elementos. Utilizando um exemplo, retomou a localização de pontos no plano cartesiano, observando que cada por ordenado (x, y) representa um ponto do plano e cada ponto representa apenas um par ordenado. Afirma que toda grandeza que pode ser expressa em função de outra pode ser representada em um plano cartesiano. E, partindo dessa revisão, apresenta três situações de representação gráfica, solicitando ao professor que em cada situação peça aos alunos que determinem a lei de formação da função em questão.

Na situação um, apresenta a quantidade (q) de água desperdiçada por uma torneira gotejando lentamente em função do tempo (t), apresentando a tabela da Figura 63.

Quantidade de água desperdiçada por uma torneira gotejando lentamente.				
t (em minuto)	0	1	1,5	3
q (em mililitro)	0	7	10,5	21

Figura 63 - Função: Tabela
Fundo: Silveira (2015)

Nessa tabela, o autor associa o tempo (em minutos) com o primeiro número do par ordenado, ou seja, a abcissa, e ao segundo que representa a quantidade de água desperdiçada pela torneira (em mililitros), com a ordenada, associando cada par ordenado com um ponto do plano. E, baseado na afirmação que, o tempo pode assumir qualquer valor real positivo ou nulo, determina a representação gráfica dessa função é uma linha contínua que parte da origem e continua indefinidamente (Figura 64).

Na situação dois, utilizou o exemplo de uma planilha eletrônica que determina o quadrado de qualquer número real inserido nela, e utilizando uma argumentação semelhante a situação um, associa cada correspondência numérica da tabela da Figura 65, a um par ordenado (x, y), os quais foram associados com o gráfico da Figura 66:

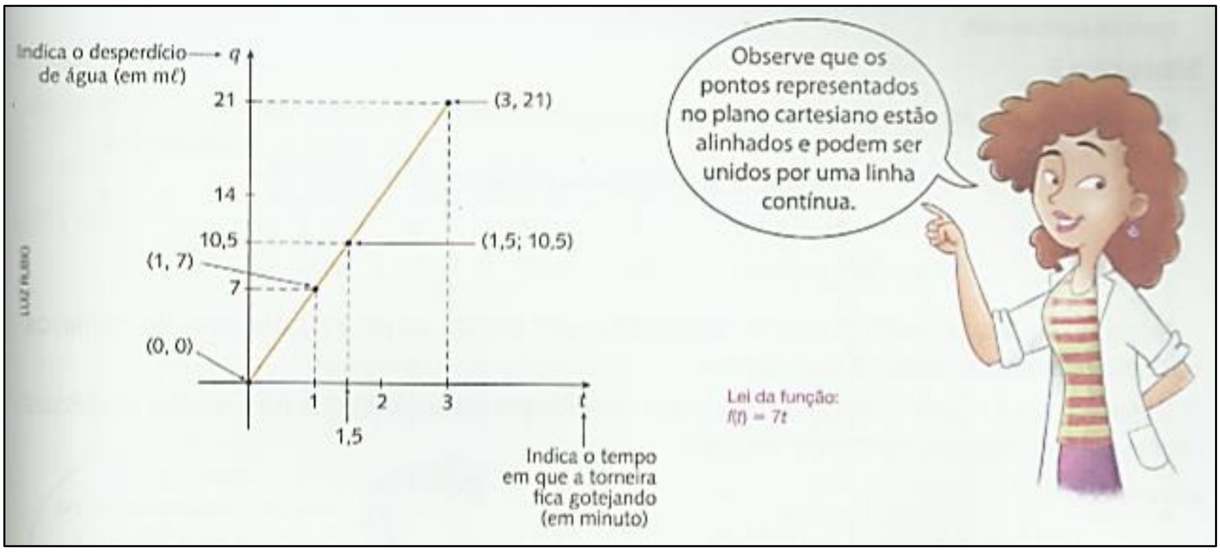


Figura 64 - Função: Gráfico
Fundo: Silveira (2015)

Resultados obtidos pela planilha de acordo com os números inseridos					
Número inserido (*x*)	−3	−1,5	0	1,5	3
Resultado (*y*)	9	2,25	0	2,25	9

Figura 65 - Função: Tabela
Fonte: Silveira (2015)

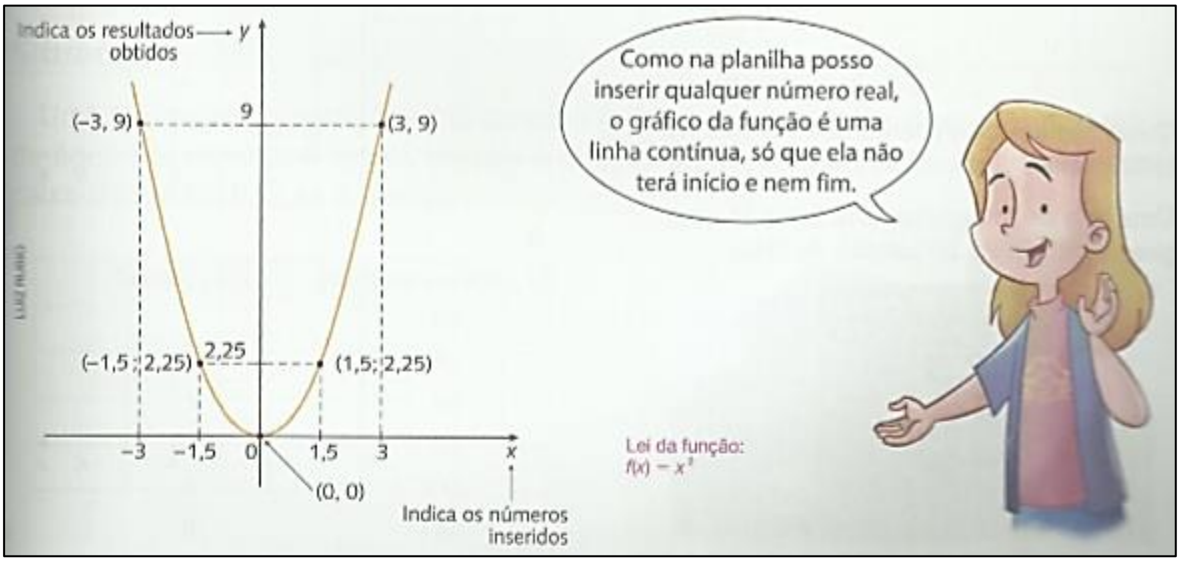


Figura 66 - Gráfico
Fonte: Silveira (2015)

Na situação três representa a venda de CDs em uma loja, representando por pontos os pares ordenados de números obtidos (n, p):

Preço de acordo com a quantidade de CDs				
Número de CDs (*n*)	1	4	6	9
Preço (em real) (*p*)	2,00	8,00	12,00	18,00

Figura 67 - Função: Tabela
Fonte: Silveira (2015)

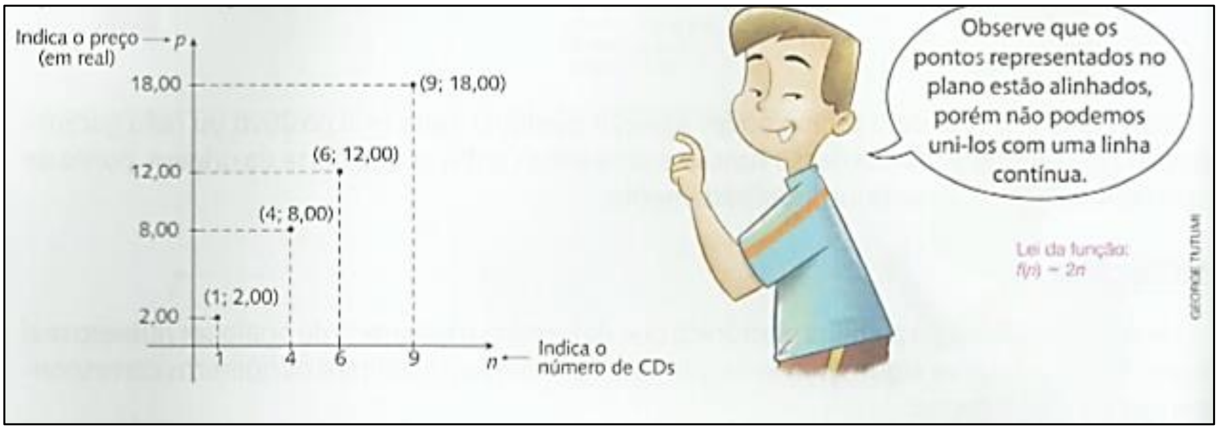


Figura 68 - Função: Gráfico
Fonte: Silveira (2015)

Como nos demais subtítulos apresentados, a contextualização dos conceitos, neste caso, representação gráfica de uma função, é feito pela apresentação de situações problemas com grandezas. O ponto positivo dos exemplos apresentados é a consideração de domínios diferentes em cada situação, determinando uma construção gráfica considerando esses valores, porém o método como foi feita a transposição dos dados da lei de formação algébrica da função, para a tabela de valores e posteriormente sua associação com o gráfico representado, se deu de forma simplória, considerando valores para o conjunto domínio como sendo números inteiros, sem vincular as valores de x e y relacionados com pares ordenados. Por mais que o autor tenha comentado sobre essa vinculação dos dados da tabela, com os pares ordenados que representam pontos do gráfico da função, ter apresentado os pares ao lado dos valores de x e y na tabela, teria contribuído no processo de transposição de representação.

Na sequência apresenta a sessão atividades. Das três atividades apresentadas, a primeira trata de identificar coordenadas de pontos em um plano cartesiano. Na segunda, deve-se determinar a lei de formação de uma função, partindo de uma propaganda de loja de fotografia e associando a lei de formação com o gráfico que representa a situação. A atividade três, trata da vinculação da função $f(x) = x + 2$ com sua representação gráfica entre quatro representações dadas. E novamente, as atividades apresentadas para serem resolvidas pelos alunos, deixaram a desejar considerando o desenvolvimento de três exemplos de representação gráfica apresentada pelo autor, quando o mesmo poderia ter explorado situações similares as do texto, com o objetivo de o aluno desenvolver o mesmo procedimento e construir por si, o gráfico da função. Assim, o autor limitou o leitor a identificar a lei de formação da função a um gráfico que à representa ou verificar se o gráfico de fato a representa, como mostra a Figura 69:

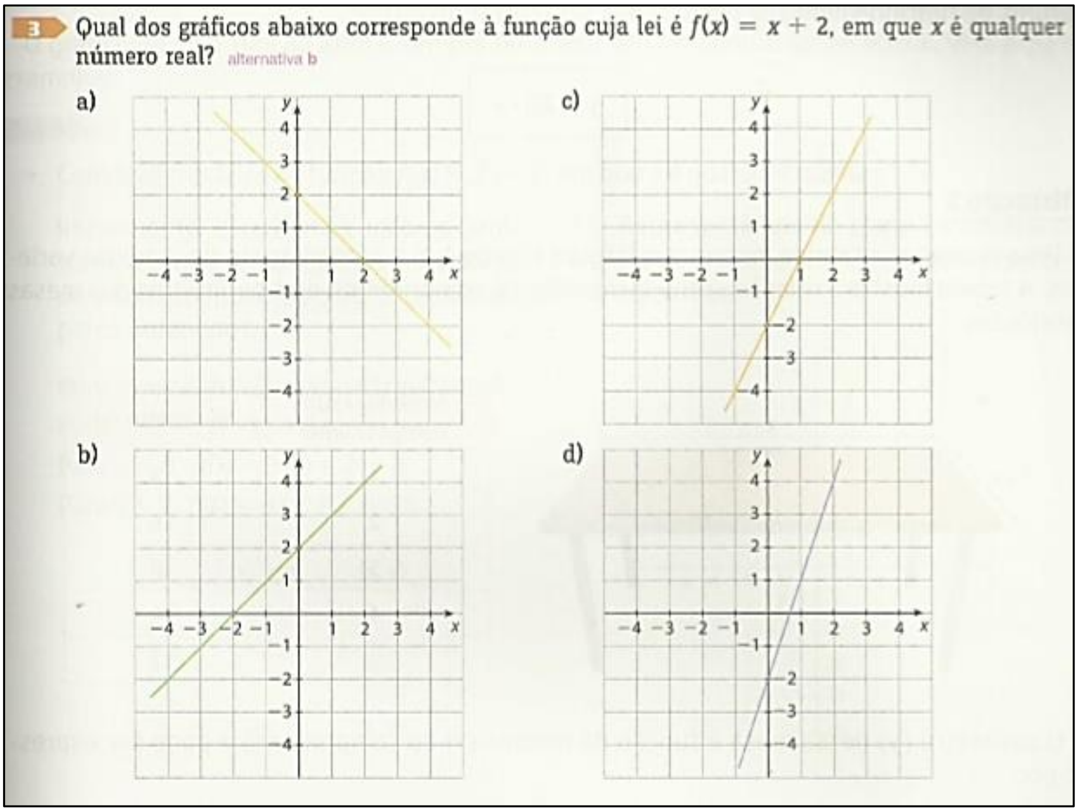
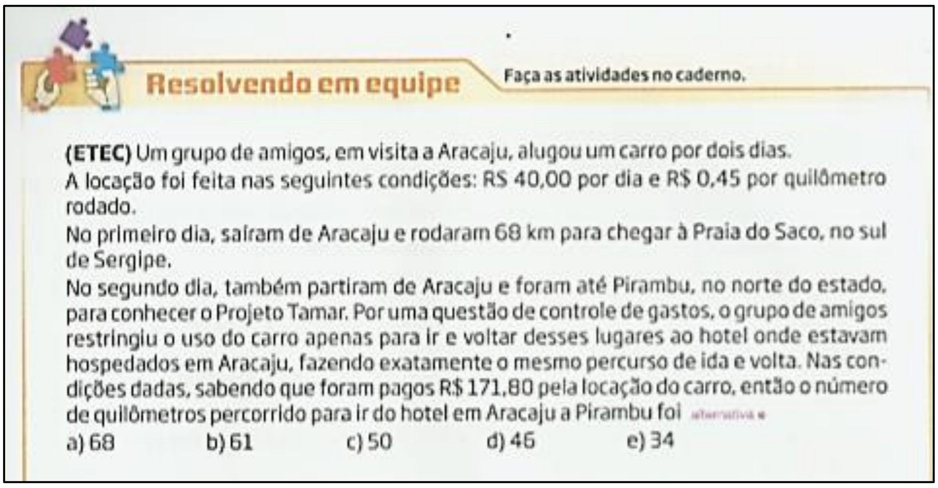


Figura 69 - Exercício 3
Fonte: Silveira (2015)

O que fica claro na apresentação dos conceitos por parte desse autor, é a utilização de situações problemas com grandezas para contextualizar os conceitos apresentados. Ele de fato, seguiu os padrões dos PCN, no sentido de apresentar noções de função. Fica claro o objetivo dele em conceituar variáveis que se relacionam segundo uma regra, determinar que esta relação deve ser de um elemento para um único correspondente a ele, além de relacionar os valores envolvidos por meio de tabelas e representá-los em um gráfico como pontos, retas ou curvas.

Ao final desse capítulo que trata de funções de modo geral e função afim, o autor apresenta uma atividade que promove a leitura e interpretação de uma situação problema, análise de dados e determinação de valores, análise e discussão em duplas, promovendo a interação e pesquisa de dados sobre informações geográficas e populacionais. O exercício, teve seu enunciado representado na Figura 70 e os seus itens com as perguntas na Figura 71, como segue:

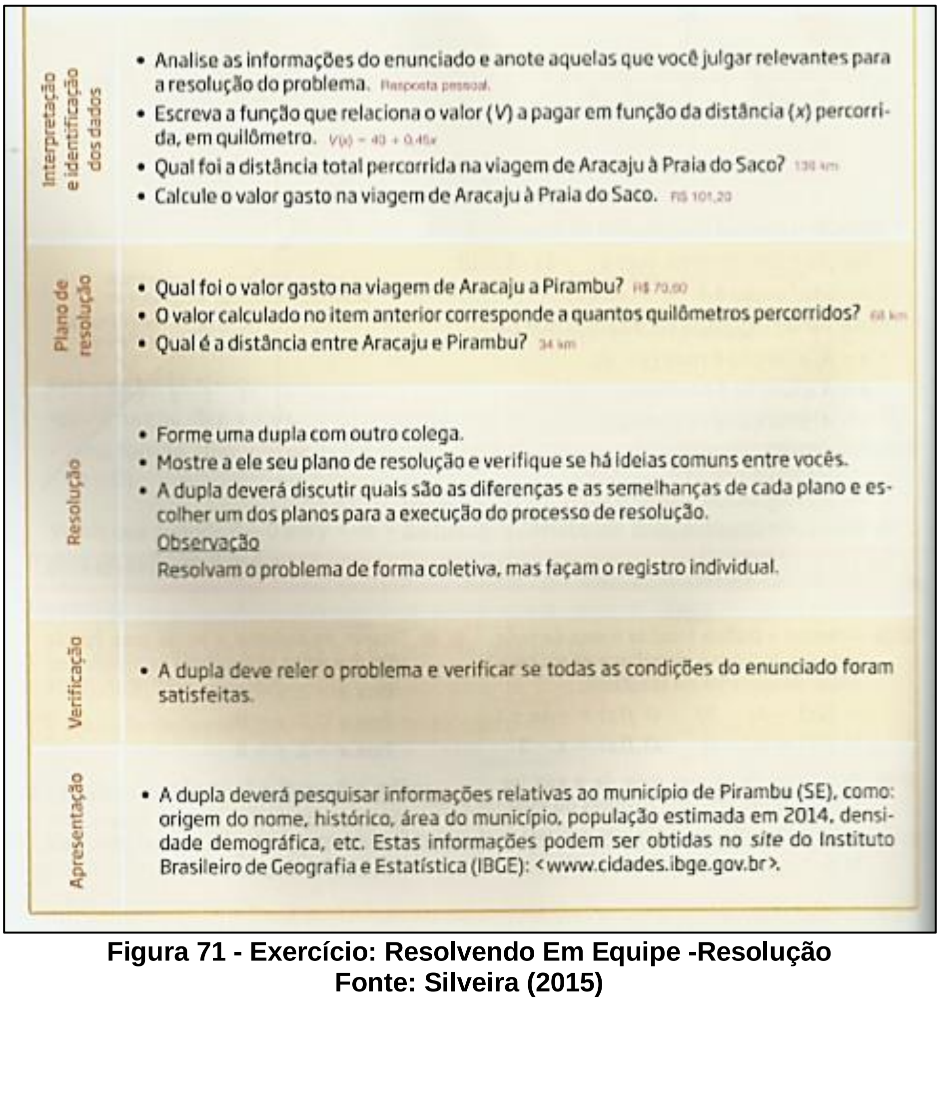


Resolvendo em equipe Faça as atividades no caderno.

(ETEC) Um grupo de amigos, em visita a Aracaju, alugou um carro por dois dias.
A locação foi feita nas seguintes condições: R$ 40,00 por dia e R$ 0,45 por quilômetro rodado.
No primeiro dia, saíram de Aracaju e rodaram 68 km para chegar à Praia do Saco, no sul de Sergipe.
No segundo dia, também partiram de Aracaju e foram até Pirambu, no norte do estado, para conhecer o Projeto Tamar. Por uma questão de controle de gastos, o grupo de amigos restringiu o uso do carro apenas para ir e voltar desses lugares ao hotel onde estavam hospedados em Aracaju, fazendo exatamente o mesmo percurso de ida e volta. Nas condições dadas, sabendo que foram pagos R$ 171,80 pela locação do carro, então o número de quilômetros percorrido para ir do hotel em Aracaju a Pirambu foi alternativa e

a) 68 b) 61 c) 50 d) 46 e) 34

Figura 70 - Exercício: Resolvendo Em Equipe – Enunciado
Fonte: Silveira (2015)



Interpretação e identificação dos dados	• Analise as informações do enunciado e anote aquelas que você julgar relevantes para a resolução do problema. Resposta pessoal. • Escreva a função que relaciona o valor (*V*) a pagar em função da distância (*x*) percorrida, em quilômetro. $V(x) = 40 + 0,45x$ • Qual foi a distância total percorrida na viagem de Aracaju à Praia do Saco? 136 km • Calcule o valor gasto na viagem de Aracaju à Praia do Saco. R$ 101,20
Plano de resolução	• Qual foi o valor gasto na viagem de Aracaju a Pirambu? R$ 70,60 • O valor calculado no item anterior corresponde a quantos quilômetros percorridos? 68 km • Qual é a distância entre Aracaju e Pirambu? 34 km
Resolução	• Forme uma dupla com outro colega. • Mostre a ele seu plano de resolução e verifique se há ideias comuns entre vocês. • A dupla deverá discutir quais são as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolher um dos planos para a execução do processo de resolução. Observação Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual.
Verificação	• A dupla deve reler o problema e verificar se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.
Apresentação	• A dupla deverá pesquisar informações relativas ao município de Pirambu (SE), como: origem do nome, histórico, área do município, população estimada em 2014, densidade demográfica, etc. Estas informações podem ser obtidas no *site* do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE): <www.cidades.ibge.gov.br>.

Figura 71 - Exercício: Resolvendo Em Equipe -Resolução
Fonte: Silveira (2015)

Para o exercício acima o autor põe em prática as sugestões de Meneghetti e Redling (2012) e Moura et al. (2003), ao considerar uma situação problema e seu desenvolvimento em grupo, promovendo a discussão de resultados e pesquisas, de forma a dar significado ao conteúdo desenvolvido e aumentar a gama de conhecimento gerais na interdisciplinaridade entre Matemática e Geografia.

Logo na sequência apresenta o título “Trabalhando os conhecimentos adquiridos”, onde questiona sobre conhecimentos que deveriam ter sido adquiridos no desenvolvimento do capítulo. Na primeira pergunta, apresenta uma função em que relaciona o número (x) de ingressos e o preço (y) a pagar, por $f(x) = 15x$. Questiona quais seriam as variáveis envolvidas nesta questão, identificando a variável dependente e a variável independente. As demais questões tratam de representação de pontos no plano cartesiano e contextualização de função afim. Apresenta também, uma lista de atividades sob o título “Aplicando”, onde os exercícios iniciais se referem a calcular valores numéricos de uma função, dada sua lei de formação ou uma tabela de valores para primeiramente obter a lei de formação da função. Quanto as atividades que envolvem gráficos, todas fazem referência a função afim.

O autor teve por objetivos nesse capítulo no que trata de funções de uma forma geral, a compreensão da noção de função pela interdependência de variação de grandezas e construir gráfico de função com o auxílio de uma tabela. Como orientação para o professor, o autor diz:

> Pode-se representar um objeto utilizando vários registros de representações, como a língua materna, o registro gráfico, o registro algébrico, o registro figural, etc. Cada um desses registros representa significados particulares que permitem caracterizar de diferentes maneiras o objeto estudado. A mobilização, por parte dos alunos, dos diferentes registros de um mesmo objeto matemático contribuí para que se apropriem dele cada vez que se dão conta dos elementos que o caracterizam e, também, para evitar que haja confusão entre representante e representado, ou seja, os alunos passam a distinguir o objeto das suas diferentes representações. (SILVEIRA, 2015, p. 323)

E deixa como sugestão, a proposição de situações em que os alunos possam expressar a variação das grandezas envolvidas por meio de diferentes registros, na forma tabular, linguagem natural, algébrica e gráfica. Ressalta na sequência a importância de os alunos saberem que uma função pode ter mais que uma variável independente e propõe para isso a situação problema: “Um armazém vende farinha a

R$ 4,00 o quilograma e feijão a R$ 5,50 o quilograma. Qual é a função que relaciona o faturamento F, em reais, com a venda de x quilogramas de farinha e y quilogramas de feijão?”

Na sequência das orientações, faz pequenas observações, como a identificação de variável dependente e independente ser um aspecto importante no qual os alunos posem ter dificuldades; que se deve deixar claro que a representação $f(x)$ substitui a variável dependente e que a utilização das letras x e y é por habito, mas, podem ser substituídos por quaisquer outras letras; que ao calcular valores de um função deve-se utilizar valores inteiros, fracionários e irracionais; considera importante verificar o conhecimento dos alunos sobre o plano cartesiano pra a representação gráfica das funções, sugerindo o jogo batalha naval para a associação de pontos no plano; sugere a construção gráfica de funções com domínio inteiro e domínio real para que os alunos compreendam a diferença entre gráfico de pontos e de linha, analisando com eles situações errôneas de gráficos apresentados pelas mídias. Por fim, para funções de modo em geral, ressalta a importância da passagem de um registro de representação para outro, afirmando que essas conversões entre as representações favorecem a apreensão conceitual dos alunos a respeito dos conteúdos estudados.

Observando o que o autor apresentou na contextualização dos conceitos abordados e o que sugere ao professor comentar ou executar em sala de aula com seus alunos, podemos considerar as observações contraditórias, pois se as considera tão importantes, porque não inseri-las na contextualização dos conceitos, apresentando situações que permitissem as análises das discussões sugeridas? Ou no mínimo, que apresentassem essas situações como atividades, onde poderiam ser abertas a discussões entre os alunos ou a classe com o professor, ou ainda como motivo de pesquisa para verificação.

A contextualização foi bem explorada na obtenção dos conceitos, mas é a prática do aluno que determina seu grau de aprendizagem na disciplina de Matemática. Limitar a quantidade de atividades desenvolvidas sobre os conceitos apresentados, não foi uma estratégia adequada escolhida pelo autor, pois dificulta a prática discente no desenvolvimento do pensamento abstrato, principalmente no não desenvolvimento de estratégias numéricas para a obtenção da representação gráfica, e como afirma Ponte (1992), não os deixando há vontade na utilização desses conceitos. Existem ainda, muitos conceitos que fazem parte do tema função, que não foram abordados, nem de forma direta e nem indireta, como a concepção de domínio e imagem e o tratamento dentro da representação gráfica, se apresentadas situações que permitissem essas análises.

4.4 COLEÇÃO PROJETO TELÁRIS

A coleção Teláris do Autor Luiz Roberto Dante, limita os conceitos de relações e funções ao livro do 9º ano, apresentando a unidade dois do volume com o título “Funções e Geometria”. Inicia a abordagem colocando na abertura da unidade a Montanha-russa Kingda Ka (Nova Jersei, EUA) que até 2014 era a mais alta do mundo com 139 metros de altura e chegando a uma velocidade de 206 km/h. Na sequência do título, descreve uma montanha-russa associando-as com a Matemática ao referir-se a elas como formas curvas, com quedas e elevações, com grandes alturas e altas velocidades e cujas inclinações dependem da forma geométrica e suas curvas que podem ser um arco de parábola.

Como ponto de partida, o autor apresenta uma sessão de perguntas onde faz questionamentos, a serem realizados em conjunto na sala de aula, como qual seria o custo de nove ingressos de um parque de diversões se o custo de quatro foi R$ 160,00? Como seria a representação na forma de equação quanto x pessoas pagariam pelos ingressos? O preço total pago na entrada do parque varia em função de quê? E com base na vista lateral de um parque, que estaria na escala de 1: 2000, pede o significado de escala, e qual seria a altura real da curva mais alta da montanha-russa. Nessa contextualização inicial, é possível perceber a relação de dependência entre o valor pago com o número de ingressos comprados, sendo seu objetivo de que o aluno desenvolva a percepção de variação de valores e de lei que descreve essa variação, induzindo o observador a perceber elementos que compõem uma função.

Baseado nessas ideias o autor apresenta na página 70 o capitulo três, sob o título “Explorando a ideia de função”, iniciando com o subtítulo “Introdução”, apresentando a situação de uma criança, que teria ido ao supermercado com a mãe e ao observar os números que apareciam na tela do computador do caixa, associou a situação a sua aula de Matemática, na qual teriam desenvolvido a ideia de função. Ela associou mentalmente, a quantidade de caixas de sucos com seus respectivos preços a serem pagos como apresentado na tabela da Figura 72:

Relação entre o número de caixas de suco e o preço a pagar

Número de caixas de suco	Preço a pagar (em R$)
1	2,80
2	5,60
⋮	⋮
5	14,00
⋮	⋮
10	28,00
⋮	⋮
15	42,00
⋮	⋮
20	56,00

Dados fictícios.

Figura 72 - Função: Tabela
Fonte: Dante (2015)

Baseando-se na observação da tabela, na identificação de um padrão de obtenção de valores e questionando os dados, o autor afirma que o preço a pagar é dado em função da quantidade de caixas de suco adquiridas, ou seja, que o preço a pagar depende de quantas caixas foram compradas, apresentando a relação da Figura ***73***:

$$\underbrace{\text{Preço a pagar}}_{P} = \underbrace{\text{número de caixas compradas}}_{x} \cdot 2{,}80$$

Indicamos assim: $P = 2{,}80 \cdot x$.

Figura 73 - Função: Lei De Formação
Fonte: Dante (2015)

Ele apresenta esses dados na forma de um gráfico, de maneira direta, sem associação numérica, como apresentado na Figura 74.

O autor, sugere ao professor a orientar aos alunos, quanto a representação da situação da tabela ser apenas pontos no gráfico, como consequência do fato de não podermos comprar meia caixa de suco, apenas quantidades inteiras. Conclui que a correspondência entre a quantidade de caixas de suco adquiridas e o preço a pagar é um exemplo de função, onde o preço varia de acordo com a quantidade de caixas de suco que foram compradas, e para cada quantidade de caixas, há um, e um só preço determinado a pagar, sendo a expressão $P = 2{,}80 \cdot x$ a lei dessa função.

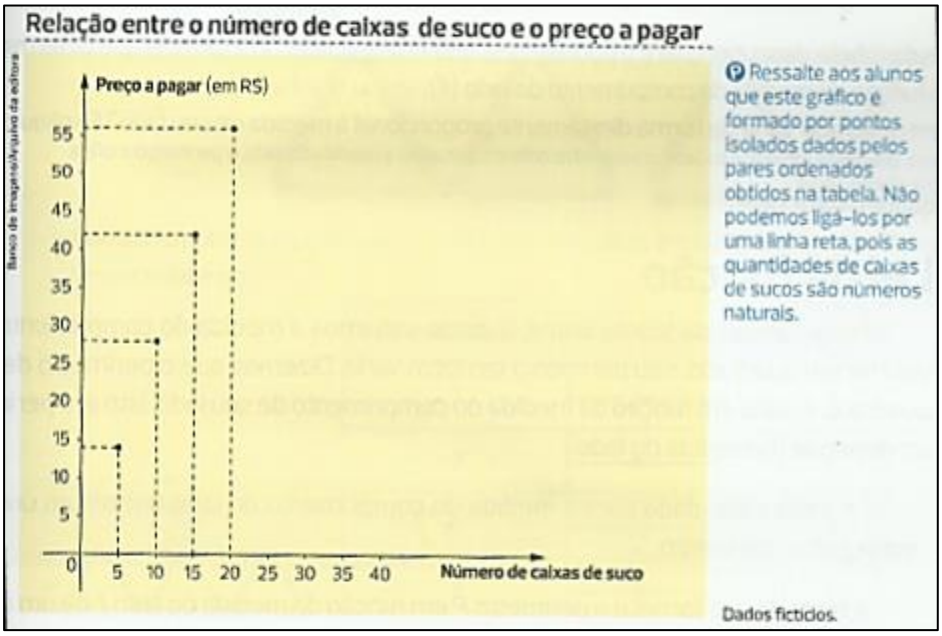


Figura 74 - Função: Gráfico
Fonte: Dante (2015)

Nesse primeiro subtítulo, foram apresentadas várias formas de representações de funções, a expressão descritiva, a tabular, a algébrica e a gráfica. Podemos observar que a transição entre uma e outra é feita de modo automático pelo autor, considerando que o aluno apresenta o nível necessário de abstração matemática para associar as representações sem intervenções numéricas entre elas, principalmente entre a tabela de valores e a expressão algébrica que representa a função. O que dificulta o processo de compreensão de transformação de representações pelo aluno, pois este é o primeiro contato que o mesmo faz com o conceito e como afirma Ponte (1992), o aluno se sente mais há vontade com a apresentação de cálculos numéricos. Outro ponto interessante é o autor afirmar diretamente que essa situação é uma função, pelo simples fato de o preço pago pelo suco variar de acordo com a quantidade de caixas, e haver um só preço correspondente a cada quantidade, mas em nenhum momento, ele apresentou essas características como definindo uma função.

No subtítulo dois, o autor traz “A ideia intuitiva de função”, onde apresenta situações de relações entre grandezas, como: o tempo estar em função da velocidade média, a metragem de tecido depender do tamanho da roupa e a área de uma sala depender do seu comprimento. Com base nesses exemplos, afirma que o conceito de função está presente em situações em que relacionamos duas grandezas variáveis. Ele poderia explorar os exemplos de relações de grandezas citados, para identificar qual variável é a dependente e qual é a variável independente em cada caso, permitindo a abstração desse conceito, por parte do observador. Na sequência apresenta uma sessão de exercícios. Utiliza conceitos da geometria para apresentar a relação entre a medida do comprimento do lado de um quadrado (l) e o perímetro (P), para isso, apresenta a tabela da Figura 75, que representa essa relação citada, para que o aluno a complete:

Relação entre a medida do comprimento do lado de um quadrado e o perímetro do quadrado

Lado (cm)	1	1,5	2	3	3,5	3,8	4	10
Perímetro (cm)	4	6	8	12	14	15,2	16	40

Dados fictícios.

Figura 75 - Função: Tabela
Fonte: Dante (2015)

O autor solicita que o aluno determine qual é o padrão para a determinação do perímetro (P) em função da medida do comprimento do lado (l). Questiona sobre a variação dos valores serem ou não diretamente proporcionais com base em uma justificativa, e qual seria o valor do perímetro se o comprimento do lado fosse $l = 11{,}75\ cm$. Porém, a apresentação de um único exercício para o aluno testar se abstraiu os conceitos discutidos, não torna a verificação significativa.

No subitem intitulado “Lei da função”, o autor apresenta a análise do exercício anterior, com foco em responder principalmente o item que corresponde a lei de formação. Com base na observação de que: “A cada valor dado para a medida do comprimento do lado temos um único valor para o perímetro”, estabelece a fórmula que fornece o perímetro P em função do lado l de um quadrado será dada por $P = 4l$, definindo-a como lei da função. Como observações finais, comenta que para essa situação l assume apenas valores reais e positivos e que tanto a tabela, quanto a fórmula, mostram como o perímetro varia em função do comprimento do lado.

Ainda utilizando o exercício apresentado, o autor insere o subitem “Variáveis”, onde, associa o perímetro P e a medida l do comprimento do lado, com variáveis que pertencem ao conjunto dos números reais positivos, onde a cada elemento l está vinculado um único elemento P. Define P como a variável dependente, por depender da medida do lado, e l, por ser de livre escolha, é definido como variável independente. Partindo da ideia apresentada sobre variáveis e relação de dependência, apresenta a definição: “Quando há dois conjuntos A e B não vazio e uma regra que indica como associar cada elemento x de A, a um único y de B, tem-se uma função”. Associando a definição a um exemplo onde, A é formado pelos números reais positivos, $B = \mathbb{R}$ e a regra ou lei de formação é dada por $P = 4l$.

De fato, o autor apresenta a definição de função de acordo com o sugerido por Caetano e Paterline (2013), utilizando dois conjuntos dados, não vazios, e relacionando os elementos do primeiro com os elementos do segundo, por uma lei de formação, de tal forma que a cada elemento do primeiro conjunto haverá somente um elemento correspondente a ele no segundo.

Na sequência, é apresentado o quadro “Explorar e descobrir”, onde o autor sugere a resolução da atividade em equipes, para observação de regularidades e obtenção da representação algébrica de funções. Com o uso de palitos de fósforos, canetas ou lápis os alunos devem reproduzir uma sequência de construções como representada na Figura 76, em seguida, devem preencher a tabela da Figura 77, contando o número de triângulos e palitos. Então, na sequência da atividade, questiona sobre a quantidade de palitos utilizados na construção de cinco triângulo, para posteriormente construírem e verificarem a resposta dada, e baseados nessa percepção, devem determinar o padrão e escrever uma lei que associa o número de palitos (P) em função do número de triângulo (t) construídos. Finalizando, os alunos devem calcular, utilizando a lei determinada por eles, qual o número de palitos necessários para a construção de 10, 15 e 25 triângulos.

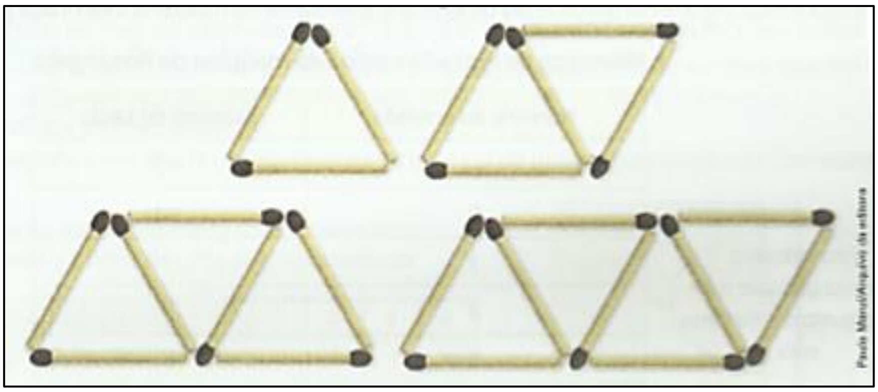


Figura 76 - Sequência De Palitos
Fonte: Dante (2015)

Número de triângulos		Número de palitos
1	→	3
2	→	5
3	→	7
4	→	9

Figura 77 - Função: Tabela
Fonte: Dante (2015)

Na sessão “Exercícios e problemas”, o autor traz seis exercícios, do 2 ao 7. No dois questiona: quem seria a variável dependente e a independente no exemplo aplicado na explicação do subtítulo “A noção de função”? Os exercícios 3, 4 e 6 se baseiam em situações em que se deve determinar a lei de formação da função com base no enunciado, preencher tabelas de valores com base na lei de formação da função, determinar variável dependente e independente e calcular valores numéricos, dados valores para a variável dependente ou independente. Nos exercícios 3 e 6 pede-se a construção gráfica da situação com base na tabela de dados obtida, e o 6 se complementa, ao perguntar qual o comportamento do gráfico dessa função. Especificamente para o exercício 3, o autor apresenta função como uma máquina que transforma números para, segundo suas orientações ao professor, dar a visão de que ‘a função faz’ ou ‘a função transforma’. Para o exercício 5 e 7 são feitos os mesmos tipos de questionamentos que nos anteriores, porém a lei de formação deve ser obtida pelo enunciado do exercício, que representam situações problemas envolvendo salário com comissão percentual e custo de produção de parafusos, sem apresentar tabelas de valores ou representações gráficas. Mostramos na sequência, na Figura 78, um exemplo de cada tipo de exercício citado.

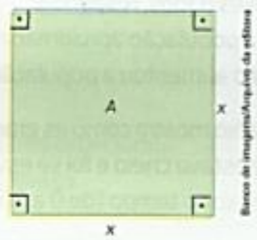
Os exercícios dessa sessão, condizem com o apresentado pelo autor, podendo ter apenas abordado a obtenção dos conjuntos que definem a função da situação em questão em alguns dos exercícios. Esta expectativa se deve ao fato de o autor ter apresentado conjuntos como parte da definição de uma função.

6. A tabela abaixo relaciona a medida do comprimento do lado (x) de uma região quadrada com sua área (A).

Relação entre a medida do comprimento do lado e a área de uma região quadrada

Lado (cm)	1	2	3	4
Área (cm^2)	1	4	9	16

Dados fictícios.



a) Examine essa tabela, copie-a e complete-a em seu caderno.

b) Observe os dados da tabela, descubra o padrão e escreva em seu caderno a equação que determina a área A em função da medida x. $A = x^2 (x \cdot x)$

c) A área de uma região quadrada varia de forma diretamente proporcional à medida de seu lado? Explique sua resposta. Não, porque, por exemplo, duplicando a medida do lado, a área não fica duplicada.

d) Use só os dados da tabela e construa um gráfico em seu caderno. O gráfico é constituído pelos quatro pontos assinalados no plano.

e) Se atribuirmos a x qualquer valor real positivo (pois x é a medida do lado da região quadrada), como será o gráfico dessa função? O gráfico será uma curva contínua.

Veja os gráficos dos itens **d** e **e** no Manual do Professor.

7. Um fabricante vende parafusos por R$ 0,80 cada um. O custo total de um lote de parafusos é formado por uma taxa fixa de R$ 40,00 mais o custo de produção de R$ 0,30 por parafuso.

a) Que sentença indica o custo total y de um lote em relação ao do número x de parafusos? $y = 40 + 0{,}3x$

b) Qual é o custo da produção de um lote de 1000 parafusos? R$ 340,00 $(40 + 0{,}3 \cdot 1000)$

c) Quanto o comerciante arrecada na venda de um lote de 1000 parafusos? R$ 800,00 $(1000 \cdot 0{,}8)$

d) Qual o número de parafusos de um lote para que, na venda, o fabricante não tenha lucro nem prejuízo? 80 parafusos $(0{,}8x = 40 + 0{,}3x \Rightarrow x = 80)$

e) Se vender um lote de 200 parafusos, o comerciante terá lucro ou prejuízo? De quanto? Lucro: R$ 60,00 $(40 + 0{,}30 \cdot 200 = 100; 200 \cdot 0{,}8 = 160; 160 - 100 = 60)$

Figura 78 - Exercícios 6 e 7
Fonte: Dante (2015)

O próximo subitem é “Gráfico de funções”, onde como orientação, o autor apenas afirma que o gráfico de uma função ajuda a analisar a variação das grandezas, uma dependendo da outra. Dispõe para os alunos a sessão “Exercícios e problemas”, que traz exercícios sobre interpretação gráfica. Nessa sessão, foram apresentados dois exercícios, o primeiro trata do crescimento populacional brasileiro de 10 em 10 anos de 1940 a 2010, com questionamentos simples como: qual era a população aproximada do Brasil em 1970? Em quanto aumentou a população brasileira de 1970 a 2010, aproximadamente? Para serem respondidas com base no gráfico da Figura 79.

E no exercício 9, o autor apresenta um gráfico que mostra a variação do volume de água de um tanque em função do tempo de esvaziamento, apresentando perguntas como: Qual o volume total desse tanque? Após 20 minutos, quantos litros de água haviam no tanque? O tempo e o volume variam de forma proporcional? Perguntas que devem ser respondidas com base no gráfico da Figura 80:

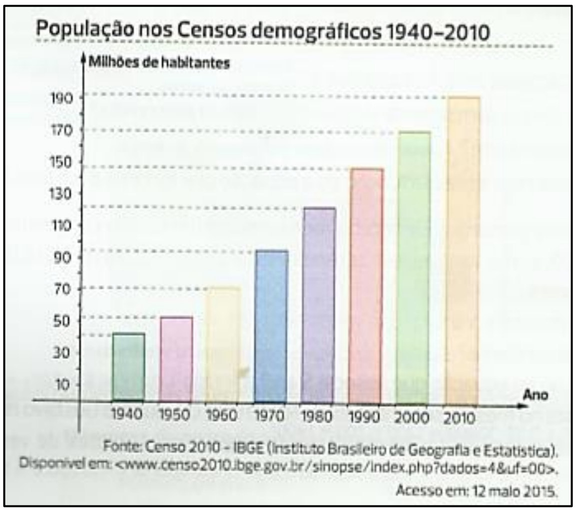


Figura 79 - Função: Gráfico
Fonte: Dante (2015)

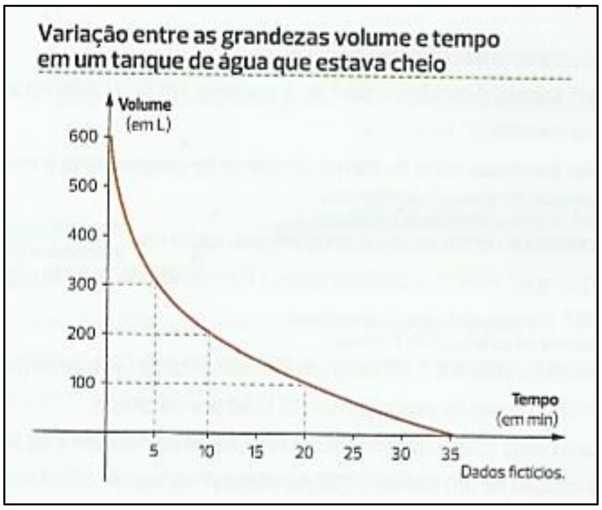


Figura 80 - Função: Gráfico
Fonte: Dante (2015)

Verifica-se com a apresentação desse subitem, a preocupação do autor em desenvolver a capacidade de análise gráfica dos observadores, porém, poderia obter resultados mais satisfatórios com a apresentação de alguns gráficos a mais, sugerindo a determinação de pontos de máximo ou de mínimo, ou simplesmente pontos em que a curva em questão mude de comportamento, refletindo em significados importantes quando o gráfico for contextualizado.

O próximo subitem é intitulado “Construção de gráficos de funções”, onde o autor apresenta um passo a passo para construir o gráfico de uma função, que seriam:

1. Construir uma tabela com valores x escolhidos convenientemente e seus respectivos correspondentes y;
2. A cada par ordenado (x, y) da tabela, associar um ponto do plano determinado pelos eixos x e y;
3. Determinar um número suficiente de pontos até que seja possível esboçar o gráfico da função.

Como que para testar a “receita”, ele apresenta exemplos para serem examinados, com a observação que nestes casos a variável x assumiria todos os valores reais possíveis, permitindo a ligação dos pontos por uma linha contínua. Como primeiro exemplo utiliza a função dada pela fórmula $y = 2x + 1$, apresentando a tabela Figura 81, com alguns valores escolhidos para x, representando os pares ordenados (x, y), que forneceu a reta dada na Figura 82:

x	y = 2x + 1	(x, y)
−2	−3	(−2, −3)
−1	−1	(−1, −1)
0	1	(0, 1)
1	3	(1, 3)
2	5	(2, 5)

Figura 81 - Função: Tabela
Fonte: Dante (2015)

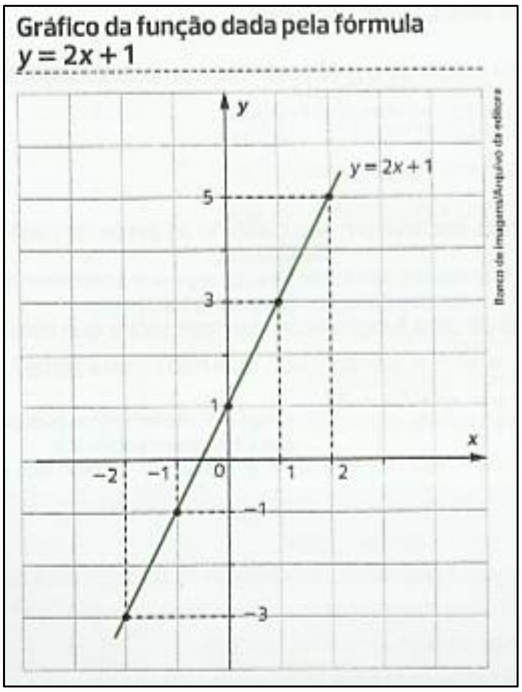


Figura 82 - Função: Gráfico
Fonte: Dante (2015)

Considerando que no subitem da construção gráfica, o autor utilizou gráficos contextualizados, este exemplo apresentado não foi de grande relevância. O autor poderia ter explorado mais a construção, contextualizando o gráfico a uma situação problema e explorando outra função que não fosse uma função afim. Ainda tratando de gráfico, apresenta o subitem “Zeros de uma função”, onde o autor apresenta a definição como sendo:

> Entre os possíveis valores que x pode assumir em uma função, é chamado de zero de uma função todo valor de x, quando existir, para o qual $y = 0$. (DANTE, 2015, p. 78)

Como exemplo de função, que terá seu zero obtido, apresenta a função usada anteriormente para o exemplo da representação gráfica, afirmando que seu zero é $-\frac{1}{2}$, e apresenta o desenvolvimento numérico quando substitui $x = -\frac{1}{2}$ na lei de formação da função $y = 2x + 1$, mostrando no gráfico que este valor aparece no cruzamento da reta com o eixo x, como mostrado na Figura 83:

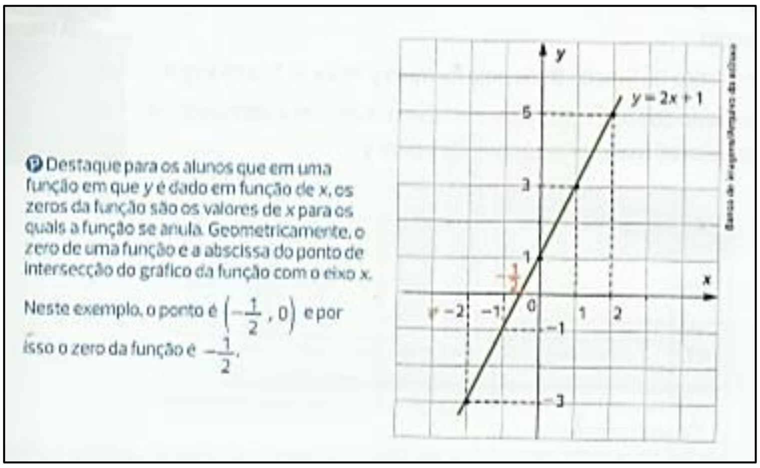


Figura 83 - Função: Gráfico
Fonte: Dante (2015)

Como consideração importante para o professor apresentar aos alunos, destaca que, em uma função onde y é dado em função de x, os zeros da função são os valores de x para os quais a função é nula. Geometricamente o zero da função é a abscissa do ponto em que o gráfico da função intersecta o eixo x. Para que essa ideia de zero de função ficasse ainda mais compreensiva para o aluno, o autor poderia ter apresentado um exemplo de obtenção de zero da função para função quadrática, por exemplo.

Sobre o tema, representações e análises gráficas, apresenta três exercícios na sessão referente a este tópico, com os exercícios 10, 11 e 12. O exercício 10 apresenta a função quadrática $y = x^2 - 4$, afirmando que esta possui dois zeros, e pede, que determinem quais são esses valores. No exercício 11, propõe-se a construção do gráfico de duas funções afins em papel quadriculado, para valores reais de x e identificando os zeros das duas funções. No exercício 12, são apresentados alguns questionamentos mais complexos, como: “Sobre qual eixo os zeros das funções sempre se localizam? Das funções $y = x^2 + 8$ e $y = x^3 + 8$ qual não possui raízes para x real? E quais os zeros da função $y = x^2 + 5x + 6$?. Ainda nessa sessão, apresenta o quadro “Bate-papo”, onde sugere que os alunos conversem com um colega sobre a relação dos zeros da função $y = -x^2 + 4$ com as raízes da equação $-x^2 + 4 = 0$, testando as descobertas com outras funções também.

Os exercícios apresentados sobre funções, atendem a parte construtiva e de análise de zeros de uma função, inclusive em um nível avançado para um nono ano, poderia sugerir aqui, alguns exercícios com determinação de zeros de funções para funções afins, como preparação aos exercícios apresentados. Porém, a sessão não explorou a análise gráfica de funções representadas por situações problemas.

Na sequência, o autor apresenta o subitem “Reconhecendo se um gráfico é de uma função”, onde inicia reforçando o fato de que: “para existir uma função, é necessário que, para qualquer x de um conjunto de valores, corresponde um único y, de outro ou do mesmo conjunto de valores”, definindo um método geométrico para quando esses dois conjuntos forem o conjunto dos números reais, bastando que “Qualquer reta perpendicular ao eixo x deve intersectar o gráfico, sempre em um único ponto” (DANTE, 2015), e caso intercepte em nenhum ponto ou mais que um, esse gráfico não será gráfico de uma função. Apresenta alguns exemplos de gráficos acompanhados da análise com base na definição dada, como visualizado na Figura 84.

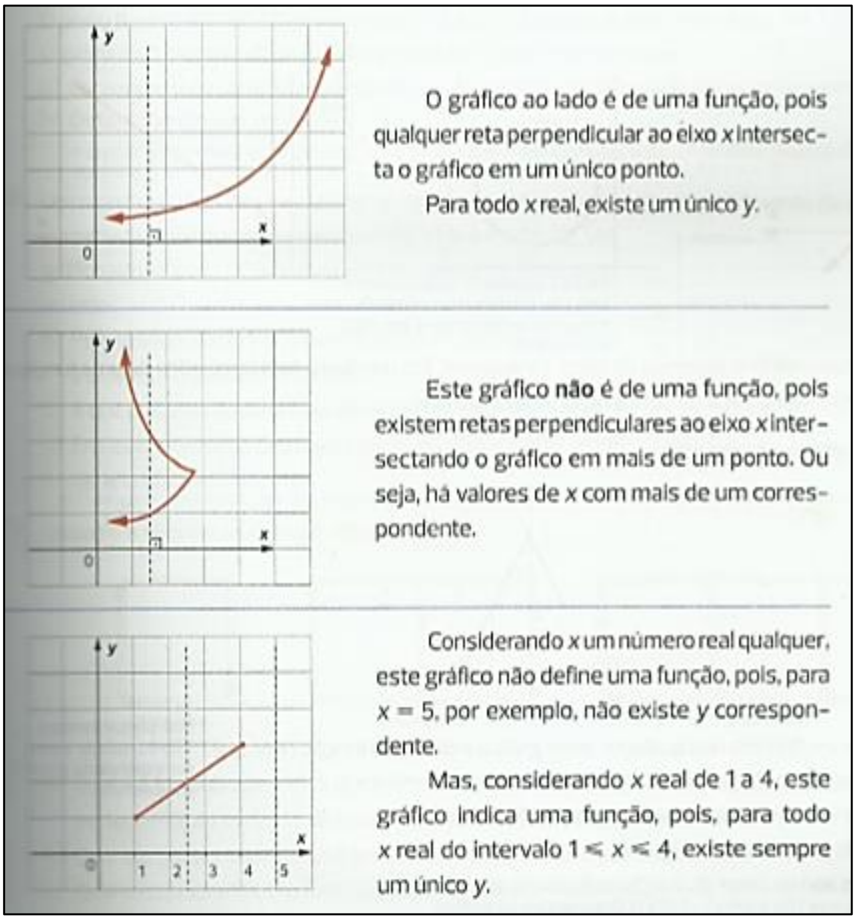
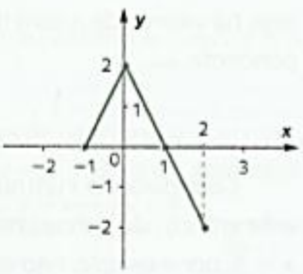


Figura 84 - Gráficos
Fonte: Dante (2015)

Nos “Exercícios” referente a este subitem, apresenta o número 13 com nove gráficos, para os alunos analisarem segundo a regra geométrica se representam gráficos de funções ou não. No 14, pede que o aluno represente em um plano cartesiano um gráfico de uma função e um que não seja função. Por último, o exercício 15, apresenta um gráfico, questionando: Para valores de x reais, este seria o gráfico de uma função? Para quais valores de x este seria o gráfico de uma função? Qual o valor de x quando $y = 0$? Qual o valor de y quando $x = 0$? E, quantos zeros esta função possuí? Aproveitando de forma significativa as análises gráficas referentes a domínio, imagem, zeros e interseção com o eixo das ordenadas, como pode-se verificar na Figura 85:


15. Observe o gráfico abaixo e responda.

a) Considerando x um número real qualquer, esse gráfico indica uma função? Por quê? Não, porque existem valores reais de x sem correspondente y ($x = 3$, por exemplo).

b) Para que valores de x este gráfico indica uma função? $x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 2$

c) Qual deve ser o valor de x para que se tenha $y = 0$? $x = 1$ ou $x = -1$

d) Qual é o valor de y quando $x = 0$? $y = 2$

e) Quantos e quais são os zeros da função indicada no item **b**? Dois zeros: -1 e 1 (os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ pertencem ao gráfico).

Figura 85 - Exercício 15
Fonte: Dante (2015)

Na continuação do tema, apresenta o título “Resolução de Problemas que envolvam o conceito de função”, onde o autor apresenta quatro situações problemas para serem resolvidos com os conceitos adquiridos nos itens anteriores. O exercício 16, trata da densidade demográfica de um material. O autor apresenta uma tabela com valores de volume (cm^3) e massa (g) e não foge do resolvido anteriormente, com determinação da densidade em questão, pois as variáveis são o volume e a massa, solicita o preenchimento da tabela fornecia, a representação gráfica e a análise da representação dessa função por uma linha contínua ou não. O exercício 17, é uma novidade, pois pede a comparação das funções que representam duas propostas de aulas de violão, trabalhando nesse caso desigualdades ou tabulação de valores para identificar quando um plano é melhor que o outro e quando custam o mesmo valor. O 18, trata de uma análise gráfica de duas funções afins plotadas em um único gráfico, enquanto o 19, é uma situação parecida com a atividade “Explorando e descobrir” do subitem “Variáveis”, pois apresenta uma sequência de figuras, formadas por palitos de fósforos montados em quadrados, pede a fórmula que representa a quantidade de palitos P em função do número de quadrados x, e posteriormente valores numéricos baseados nessa fórmula. Na sequência apresenta a teoria sobre função afim.

É considerado importante a Resolução de Problema no desenvolvimento dos conceitos matemáticos. E, ter obtido o gráfico das situações problemas apresentadas pelo autor, ou analisá-los, teria apresentado um significado maior para a representação de gráfico de função.

No final do capítulo, o autor coloca uma sessão referente a tratamento da informação com o título “Interpretação de gráficos relacionados com funções”. Descreve a relação de gráficos com dados de empresas e suas representações por funções, apresentando um questionário sobre um gráfico que descreve o crescimento do quadro de funcionários de uma empresa, trabalhando com valores aproximados. Se destaca nesse exercício, a projeção do número de funcionários da empresa para anos que não estão representados graficamente, com base na lei de formação que apresenta valores aproximados. A situação é apresentada com enunciado na Figura 86 e itens na Figura 87.

Na sessão “Outros contextos”, são apresentados exercícios de situações problemas como promoção de aluguel de vídeos, para ser comparado com o preço normal e determinar qual é mais compensatório a longo prazo; cortes de cabelos com horários fixos e sem horários fixos, para relacionar e analisar sob o olhar matemático de função, identificando variáveis e valores; análise de planos de operadoras de telefonia celular de acordo com gastos mensais citados. E a última sessão de exercícios do capítulo, se refere a “Revisão cumulativa”, envolvendo conteúdos que foram estudados neste capítulo e outros que são conhecimentos adquiridos anteriormente, os que envolvem o conceito de relações e funções são exercícios de análise e interpretação gráfica.

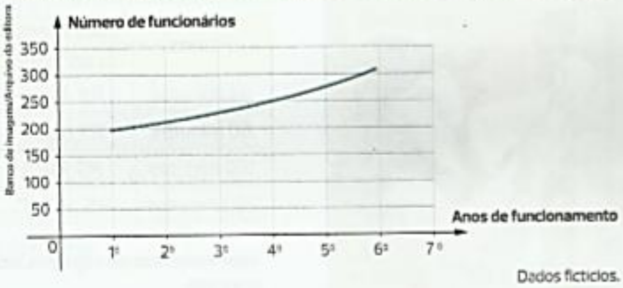
49. O conhecimento sobre gráficos é muito importante na área de negócios e administração de empresas. Informações apresentadas na forma de gráficos são úteis por permitirem uma assimilação clara e rápida, possibilitando ter uma visão panorâmica de diferentes dados estatísticos, como os resultados de uma pesquisa de satisfação de clientes, das principais preferências de marca com relação a determinado produto no mercado, do acompanhamento da produção e do lucro de uma empresa, entre outros tópicos.

Detalhe de pessoas analisando gráficos.

Vejamos a seguir um tipo de situação que envolve administração de empresas e interpretação de gráficos, relacionada ao assunto estudado neste capítulo.

Uma empresa do setor educacional completou 6 anos de funcionamento e registrou, nesse período, crescimento no quadro de funcionários, conforme mostra o gráfico:

Crescimento do quadro de funcionários da empresa



Dados fictícios.

b) Não se preocupe se o aluno só colocar valores aproximados, pois a ideia é que ele aprimore suas hipóteses no decorrer das resoluções dos próximos itens.

Figura 86 - Exercício 49: enunciado
Fonte: Dante (2015)

Utilizando esses dados, faça o que se pede em seu caderno. Veja as resoluções dos itens **b** e **c** no Manual do Professor.

a) Em que ano de funcionamento é possível identificar exatamente o número de funcionários por meio desse gráfico? No 4º ano de funcionamento (no 4º ano, há uma intersecção entre as linhas e é possível verificar, pelo gráfico, que havia 250 funcionários nesse ano).

b) Construa em seu caderno uma tabela que relacione o ano de funcionamento com o número de funcionários e registre os valores exatos ou aproximados encontrados nesse gráfico.

c) O dono da empresa observou que, nesse intervalo de 6 anos, poderia escrever uma relação entre o ano de funcionamento (A) e o número de funcionários dessa empresa (N), em que a expressão representaria uma função quadrática. Entre as funções abaixo, qual é aquela que se relaciona a essa situação? Justifique sua resposta.

- $N = 2A^2 + 2A + 200$
- $N = 3A^2 + A + 180$
- X $N = 3A^2 + 3A + 190$

d) Utilizando a função encontrada no item **c** e considerando que o primeiro ano de funcionamento da empresa foi 2006, responda:

- Se o crescimento continuar nesse ritmo, quantos funcionários a empresa terá em 2020? 910 funcionários (2020 será o 15º ano de funcionamento, portanto, basta achar o valor de N para $A = 15$ usando a função anterior: $N = 3 \cdot 15^2 + 3 \cdot 15 + 190 = 910$)
- Em que ano o número de funcionários será igual a 736? Em 2018. ($736 = 3 \cdot A^2 + 3 \cdot A + 190 \Rightarrow A' = 13$ ou $A'' = -14$ (não serve); $2006 + 13 - 1 = 2018$)

Figura 87 - Exercício 49: itens
Fonte: Dante (2015)

4.5 COLEÇÃO MATEMÁTICA BIANCHINI

O livro do 9º ano da Coleção Matemática Bianchini de Edwaldo Bianchini, pela editora Moderna, apresenta os conceitos de relações e funções no seu capítulo 7 sob o título “Estudo das funções”. Nas orientações gerais sobre o capítulo, o autor coloca como objetivos compreender a ideia de função. Ele inicia a abordagem dos conceitos com a apresentação do Subtítulo 1, “Conceito de função”, apresentando uma situação de compra de Tv a cabo que cobra R$ 95,00 fixos mais R$ 5,00 por programa extra comprado, de modo que o valor a ser pago (preço) no final de cada mês depende do número de programas comprados pelo assinante, vinculando o valor pago de acordo com o número de programas pela tabela da Figura 88:

Número de programas extras	Preço (em real)
0	95
1	$95 + 1 \cdot 5$
2	$95 + 2 \cdot 5$
3	$95 + 3 \cdot 5$
4	$95 + 4 \cdot 5$

Figura 88 - Função: Tabela
Fonte: Bianchini (2015)

Então, indica por x o número de programas extras comprados e por y o preço a pagar, relaciona as duas grandezas pela sentença: $y = 95 + x \cdot 5$ ou $y = 95 + 5x$, na sequência apresenta a determinação de valores numéricos, ao substituir na sentença os valores 0,1 e 2 para x, assim para cada valor de x, obteve um único valor para y, e afirmou que o preço a pagar (y) é obtido em função do número de programas extras comprados (x) e conclui de forma geral que:

> Dizemos que a grandeza *y* é **função** da grandeza *x* se há entre elas uma correspondência tal que, para cada valor de *x*, exista um único valor de *y*.

Figura 89 - Função: Relação Entre Grandezas
Fonte: Bianchini (2015)

O autor afirma que, nessa função que relaciona o número de programas extras comprados (x) e o preço a pagar (y), a sentença $y = 95 + 5x$ é chamada lei de formação, e as letras x e y são chamadas de variáveis. Afirmando que y está em função de x pela igualdade $y = f(x)$ e que o caso acima se registra como $f(x) = 95 + 5x$.

O autor utiliza a palavra relacionar nas suas colocações, mas se refere as variáveis da forma, “é função de”. Ele considera valores a serem pagos de acordo com a quantidade de canais, apresentando a representação numérica da obtenção do valor a ser pago e facilitando a compreensão da obtenção da expressão que descreve a situação. Utiliza novamente cálculos numéricos para garantir que para cada valor de x, existe um único valor de y, fazendo definições como a de variáveis.

Na situação dois, ele apresenta um vendedor de assinaturas de revista, cujo salário varia de acordo com as assinaturas que ele vende por mês, sendo que ele recebe um valor fixo de R$ 1.200,00 mais comissão de R$ 40,00 para cada assinatura vendida, apresentando a tabela com a relação entre o número de assinaturas vendidas e o salário e como no exemplo anterior, mostrando o cálculo numérico para a obtenção do valor do salário, como mostrado na Figura 90.

Número de assinaturas vendidas	Salário de Paulo (em real)
0	1.200
1	$1.200 + 1 \cdot 40 = 1.240$
2	$1.200 + 2 \cdot 40 = 1.280$
3	$1.200 + 3 \cdot 40 = 1.320$
4	$1.200 + 4 \cdot 40 = 1.360$
5	$1.200 + 5 \cdot 40 = 1.400$

Figura 90 - Função: Tabela
Fonte: Bianchini (2015)

Conclui que, a lei da função é $f(x) = 1.200 + 40x$, onde $f(x)$ representa o salário de Paulo e x o número de assinaturas vendidas. Apresenta com base nessas conclusões, exemplos de como calcular o valor numérico de uma função, e neste caso, se Paulo vender 59 assinaturas ou mesmo, quantas assinaturas ele vendeu se ao fim do mês recebeu R$ 3.240,00 de salário.

Na terceira situação problema, o autor apresenta a situação da construção de um cercado para galinhas com uma das laterais sendo um murro e as demais de tela, num total de 16 metros de tela. Apresentando primeiro uma situação de construção com 3 metros de largura, consequentemente o comprimento terá 10 metros, para então apresentar a tabela da Figura 91, com mais possibilidade:

Largura (em metro)	Comprimento (em metro)
1	$16 - 2 \cdot 1 = 14$
2	$16 - 2 \cdot 2 = 12$
3,5	$16 - 2 \cdot 3{,}5 = 9$
5	$16 - 2 \cdot 5 = 6$
6,4	$16 - 2 \cdot 6{,}4 = 3{,}2$

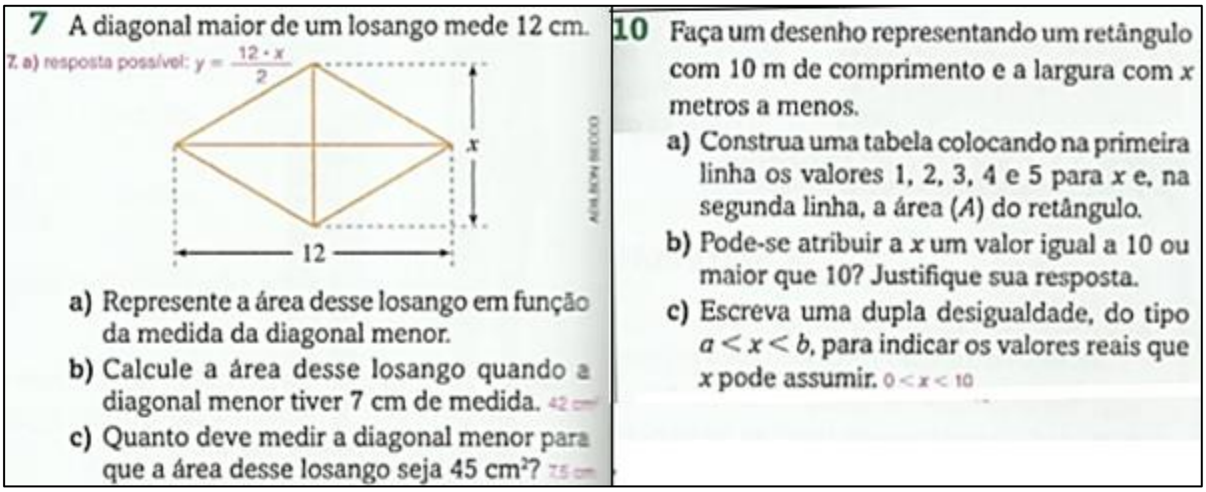
Figura 91 - Tabela De Valores
Fonte: Bianchini (2015)

Ele observa que, o comprimento y é uma função da largura x, que se relacionam pela lei $f(x) = 16 - 2x$, em que x assume valores entre 0 e 8. Abre aqui questionamentos sobre a determinação da largura do galinheiro para um comprimento de 7,5 metros, e apresenta a resolução substituindo na lei de formação o valor 7,5 no lugar da letra y. Como segundo questionamento, pergunta o valor da largura para se ter um galinheiro quadrado? Afirma que, para esse caso, a largura é igual ao comprimento e substituindo na lei de formação o termo f(x) pelo valor de x, determinando seu valor, conclui que a largura será de $\frac{16}{3}$.

Podemos observar que na escolha da contextualização dos conceitos, o autor escolheu dois exemplos, um de domínio discreto e um de domínio contínuo, porém limitado superiormente e inferiormente, devida a situação em que se aplica. Ele foi incluindo conceitos por partes, na situação um, o conceito de variáveis, na dois, o de determinação numérica, mas sem defini-los, e na situação três explora um pouco mais os cálculos numéricos envolvendo a função.

Na sequência, apresenta a sessão “Exercícios propostos” com dez exercícios. Os Exercícios 1, 3 e 5 tratam de situações problemas com grandezas variáveis, onde é pedido aos alunos que determinem a lei de formação da função expressa na situação, calculando alguns valores numéricos de acordo com o pedido na situação, utilizando a lei de formação da função. Nas “Orientações gerais do capítulo”, sugere perguntas a serem feitas aos alunos na resolução do exercício 1, que trata da compra de blusas com preço unitário. Ele sugere perguntas relacionadas com a quantidade de produtos comprados, se o método de determinação do preço seria o mesmo para pequenas e grandes quantidades e como seria para mercadorias diferentes. Enquanto que para o exercício 3, sugere que os alunos construam uma tabela de valores para organizar dados, o que poderá ajudar na percepção de regularidades presente nos cálculos, chegando na lei das funções. O exercício seis apresenta uma função e pede que o aluno determine o valor numérico da função, ficando como sugestão ao professor a sua resolução em forma de tabela, pois segundo o autor, organizará os cálculos e valores encontrados e possibilitará a observação de como a função se comporta de acordo com valores de x.

No exercício dois, o aluno deverá verificar se a relação que associa cada mãe a sua quantidade de filhos é uma função, considerando também o inverso, se associar cada filho a sua mãe é uma função. Os exercícios 4, 7 e 10 tratam de representar situações geométricas, associando medidas a variáveis, como o perímetro de triângulos, a área de um losango de acordo com sua diagonal maior, e a área de um retângulo utilizando o comprimento fixo e a largura variável, respectivamente. Especificamente, no exercício 4, os alunos devem determinar as expressões representam perímetro, no 7, devem determinar a lei de formação da área e alguns valores de áreas dada a medida da diagonal maior, sendo sugestão do autor retomar a fórmula do cálculo da área de losango $A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$. Sugere questionar sobre os valores que a variável pode assumir criando a percepção do intervalo envolvido. No 10, devem representar a situação geometricamente, determinando valores inteiros para a largura de acordo com seus respectivos comprimentos, representando a situação em uma tabela, na qual devem analisar os possíveis valores de largura a serem usados, expressando esses valores por um intervalo real. O autor ainda sugere, o desenvolvimento desse exercício em duplas com assistência do professor para encontrar a relação que possibilita calcular a área do retângulo. Deixamos os exercícios 7 e 10 para observação do leitor na Figura 92.


7 A diagonal maior de um losango mede 12 cm.

7. a) resposta possível: $y = \frac{12 \cdot x}{2}$

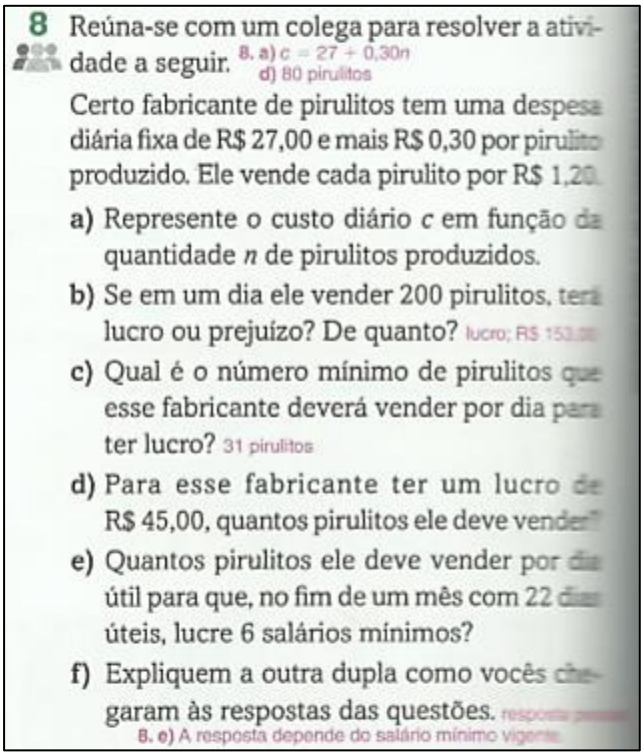
a) Represente a área desse losango em função da medida da diagonal menor.
b) Calcule a área desse losango quando a diagonal menor tiver 7 cm de medida. 42 cm²
c) Quanto deve medir a diagonal menor para que a área desse losango seja 45 cm²? 7,5 cm

10 Faça um desenho representando um retângulo com 10 m de comprimento e a largura com x metros a menos.
a) Construa uma tabela colocando na primeira linha os valores 1, 2, 3, 4 e 5 para x e, na segunda linha, a área (A) do retângulo.
b) Pode-se atribuir a x um valor igual a 10 ou maior que 10? Justifique sua resposta.
c) Escreva uma dupla desigualdade, do tipo $a < x < b$, para indicar os valores reais que x pode assumir. $0 < x < 10$

Figura 92 - Exercícios 7 e 10
Fonte: Bianchini (2015)

O exercício 8 é diferenciado, por pedir que a resolução seja em dupla. Apresenta uma situação de gastos com a produção de pirulitos, uma parte fixa e outra unitária, e um valor de venda (Figura 93). Nesta questão, os alunos devem determinar a lei que expressa o custo de produção c em função do número n de pirulitos, respondendo questões sobre lucro e prejuízo de acordo com certo número de vendas de pirulitos. Devem também, analisar qual o valor mínimo de pirulitos produzidos para não haver prejuízo, quantas unidades foram vendidas para obter determinado valor, quantas unidades devem ser vendidas em um mês com 22 dias úteis, para se lucrar seis salários mínimos e finalmente explicar para outra dupla a resolução feita.

Para o primeiro subtítulo a gama de exercícios foi grande e de certa forma apropriada, pois abordou situações em diversos contextos, representando situações geométricas, situações problemas similares aos exemplos apresentados e mesmo alguns exercícios de fixação, para determinação de valor numérica da função.



8 Reúna-se com um colega para resolver a atividade a seguir. 8. a) $c = 27 + 0,30n$ d) 80 pirulitos

Certo fabricante de pirulitos tem uma despesa diária fixa de R$ 27,00 e mais R$ 0,30 por pirulito produzido. Ele vende cada pirulito por R$ 1,20.

a) Represente o custo diário c em função da quantidade n de pirulitos produzidos.

b) Se em um dia ele vender 200 pirulitos, terá lucro ou prejuízo? De quanto? lucro; R$ 153,00

c) Qual é o número mínimo de pirulitos que esse fabricante deverá vender por dia para ter lucro? 31 pirulitos

d) Para esse fabricante ter um lucro de R$ 45,00, quantos pirulitos ele deve vender?

e) Quantos pirulitos ele deve vender por dia útil para que, no fim de um mês com 22 dias úteis, lucre 6 salários mínimos?

f) Expliquem a outra dupla como vocês chegaram às respostas das questões. resposta pessoal

8. e) A resposta depende do salário mínimo vigente.

Figura 93 - Exercício 8
Fonte: Bianchini (2015)

Na sequência, apresenta ainda uma sessão com o título “Pense mais um pouco...” onde apresenta o mapa político brasileiro, da Figura 94, relacionando a escala do mapa com o conteúdo de funções. Em um primeiro momento, deve ser determinada a lei da função que relaciona a distância real y, em quilômetros, entre duas cidades do mapa em função da distância x, em centímetros, medidas no mapa. Em seguida devem usar essa lei e a medida da distância entre São Paulo e Florianópolis no mapa, para aplicar a lei da função e descobrir a distância real, enquanto que nos próximos itens o autor fornece distâncias reais, pedindo que identifiquem observando o mapa qual capital é compatível com a distância fornecida, dada uma capital de partida, e quais as cidades capitais que estariam ao alcance de um avião dada uma quilometragem de voo e uma cidade de partida.

Observamos aqui que esta Figura 94, não está no tamanho apresentado pelo autor em seu livro e que a realização da atividade, só é possível com o tamanho adequado da figura, para que a escala represente valores reais.

Figura 94 - Mapa Político Brasileiro
Fonte: Bianchini (2015)

O autor ainda apresenta uma sessão com o título “Para saber mais”, onde apresenta o texto “A matemática na história” e descreve o descobrimento e evolução do conceito de função no transcorrer da história do desenvolvimento humano, citando os principais matemáticos envolvidos nessa teoria.

O próximo subitem apresentado é intitulado “Gráfico de uma função”. Ele apresenta a construção do gráfico de uma função utilizando a função $y = x + 1$, para x sendo um número inteiro qualquer, organizando uma tabela de valores, onde atribuí valores para x, obtendo valores para y, determinando pares ordenados correspondentes. Marca em um plano cartesiano os pares ordenados encontrados, afirmando que estes são apenas alguns dos pontos do gráfico dessa função, pois existem infinitos pares ordenados (x, y) que satisfazem a lei $y = x + 1$, para x inteiro. Segue abaixo a tabela e gráfico apresentados pelo autor nas Figura 95 e Figura 96:

Quadro com alguns pontos do gráfico de *f*

x	$y = x + 1$	(x, y)
-2	$y = -2 + 1 = -1$	$(-2, -1)$
-1	$y = -1 + 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$y = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$y = 1 + 1 = 2$	$(1, 2)$
3	$y = 3 + 1 = 4$	$(3, 4)$

Figura 95 - Função: Tabela
Fonte: Bianchini (2015)

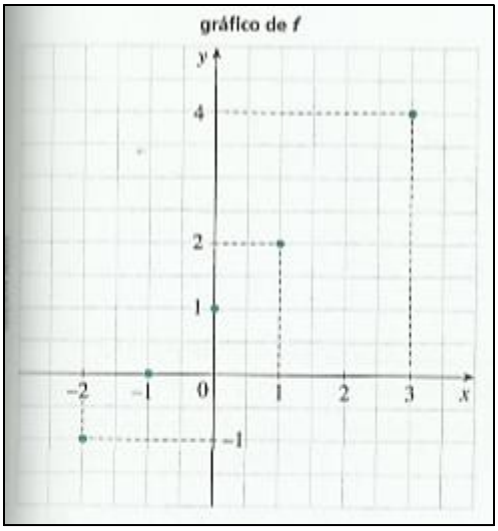


Figura 96 - Função: Gráfico
Fonte: Bianchini (2015)

O autor faz a observação de que existe uma reta que passa pelos pontos desse gráfico, mas nem todos os pontos da reta seriam pontos do gráfico e usa como exemplo o ponto com abscissa 0,5, que não estaria no gráfico por não ser um número inteiro. Assim, considera na sequência a mesma função, porém agora, com x sendo qualquer número racional, construindo uma nova tabela com alguns valores racionais e um novo gráfico com os pontos anteriores e os novos pontos, como abaixo, nas Figura 97 e Figura 98:

Quadro com alguns pontos do gráfico de *g*

x	$y = x + 1$	(x, y)
$-0{,}5$	$y = -0{,}5 + 1 = 0{,}5$	$(-0{,}5; 0{,}5)$
$0{,}5$	$y = 0{,}5 + 1 = 1{,}5$	$(0{,}5; 1{,}5)$
$\frac{3}{2}$	$y = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$
$2{,}3$	$y = 2{,}3 + 1 = 3{,}3$	$(2{,}3; 3{,}3)$

Figura 97 - Funções: Tabela
Fonte: Bianchini (2015)

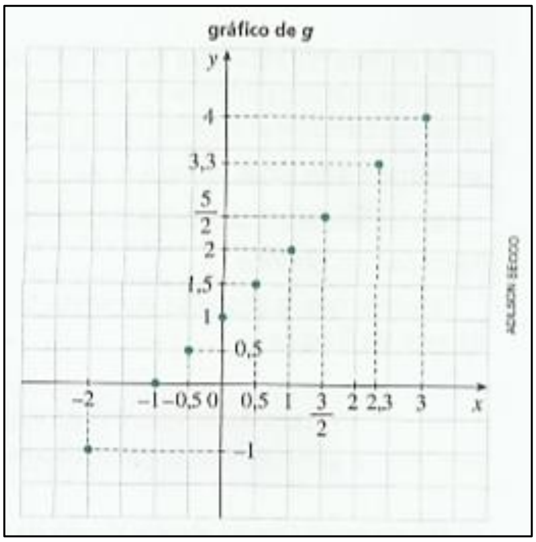


Figura 98 - Funções: Gráfico
Fonte: Bianchini (2015)

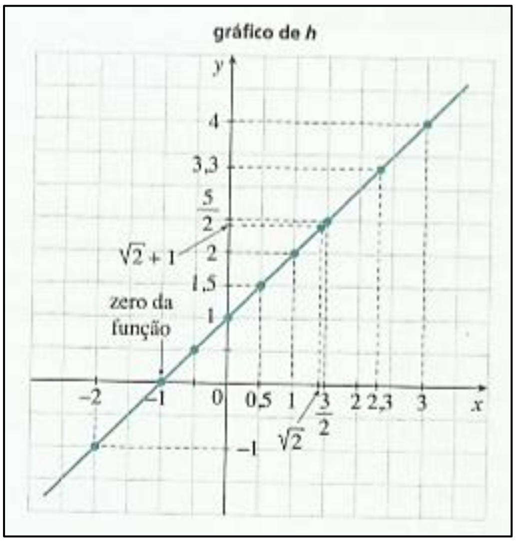


Figura 99 - Função: Gráfico
Fonte: Bianchini (2015)

Observa novamente, que existem infinitos pontos com abscissas racionais e que uma reta poderia passar pelos pontos, mas valores de abscissas como raiz de dois não podem ser representados, afirmando que o termo infinito não significa todos e, portanto, deve-se imaginar uma "reta com buracos". Seguindo a lógica anterior, considera a mesma função, mas agora com x representando qualquer valor real. Como agora x pode representar valores como raiz de dois e outros valores irracionais, é possível traçar ama reta pelos pontos do gráfico da Figura 99.

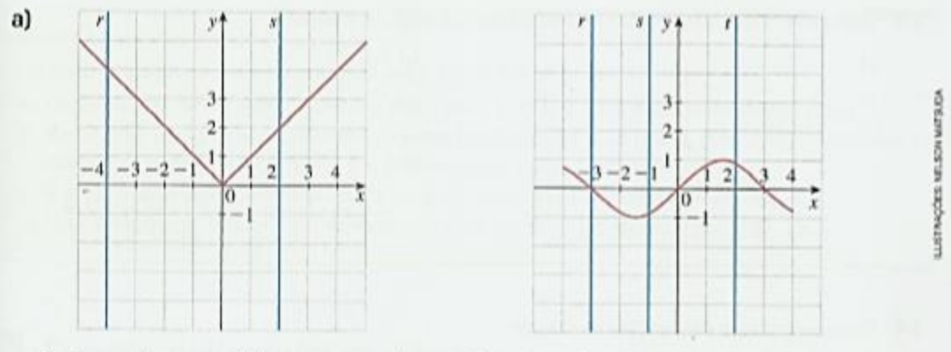
Utilizando a mesma representação gráfica, o autor determina que, a abscissa do ponto que tem $y = 0$ é $x = -1$ e este valor de x é dito zero da função, apresentando a definição de zero da função, Figura 100, e afirma que para calcular o zero de uma função basta resolver a equação $x + 1 = 0$, nesse exemplo, obtendo x = -1.

Zero da função é todo valor de *x* para o qual *y* é igual a zero, ou seja, é a abscissa do ponto onde o gráfico da função cruza o eixo dos *x*.

Figura 100 - Zero De Uma Função
Fonte: Bianchini (2015)

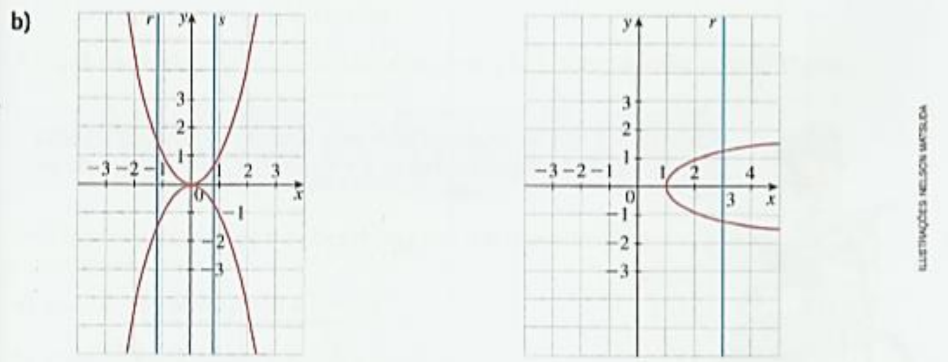
O autor consegue atingir o que pede Rezende (2003), pois, a contextualização para obtenção do gráfico da função como uma reta, apresentando a mesma função, porém, alterando o seu domínio, comporta a característica de variabilidade do gráfico da função, descartando a ideia de que ele representa algo estático, pronto e acabado. Apresenta a ideia simples de definir zero da função, definindo-o a partir do gráfico da função e, após apresentar seu significado, obtê-lo algebricamente, simplificando a compreensão do conceito geométrico.

Na apresentação do subitem "Como reconhecer o gráfico de uma função", considera apenas funções em que assume valores reais, relembra o fato de que quando y é função de x, para cada valor de x existe um único valor de y. Assim, afirma que, em uma função representada graficamente, para cada abscissa haverá somente um ponto correspondente no gráfico, e sua verificação geométrica se dá pelo traçado de retas perpendiculares ao eixo x, que quando estiver interceptando o gráfico em mais de um ponto, não representará uma função. Apresenta na Figura 101 dois exemplos de gráficos que representam funções e na Figura 102, dois que não representam funções, argumentando conforme o conceito que apresentou.



Cada um desses gráficos representa uma função, pois, para qualquer valor de *x*, temos um único valor de *y* correspondente.
Em ambos os casos, qualquer reta perpendicular ao eixo dos *x* interceptará os gráficos em um único ponto.

Figura 101 - Funções: Gráficos
Fonte: Bianchini (2015)



Já esses gráficos não representam nenhuma função, pois existe valor de *x* com dois valores de *y* correspondentes.
Observe, em cada caso, que a reta *r*, perpendicular ao eixo dos *x*, intercepta os gráficos em dois pontos com ordenadas (*y*) diferentes.

Figura 102 - Gráficos Que Não São Funções
Fonte: Bianchini (2015)

Na sequência é apresentada a sessão “Exercícios propostos”, do exercício 11 ao 15. No exercício 11 é pedida a construção gráfica em papel quadriculado da função $y = -x + 1$, para x sendo um inteiro qualquer, depois, para x um número real qualquer. No 12, é apresentada uma situação problema que determina a distância percorrida (y) por um veículo em determinado tempo (x) dada sua velocidade média (Figura 103), para ser determinada uma tabela utilizando os valores de tempo (x) como 0, 1, 2, 3, 4 e 5, partindo dela, pede para determinar a lei da função com y em função de x, questiona sobre x poder ou não assumir um valor negativo e pede a representação gráfica da situação. Os exercícios 13 e 14 tratam da determinação do zero da função, porém, no 13 deve ser obtido pela observação gráfica e no 14 pela resolução da equação determinada pela lei da função. O 15 pede para determinar quais dos seis gráficos apresentados representam uma função.

12 Um automóvel percorre uma estrada à velocidade constante de 80 km por hora.

a) Indicando por x o tempo transcorrido (em hora) e por y a distância percorrida (em quilômetro), monte uma tabela com os seguintes valores para x: 0, 1, 2, 3, 4 e 5. Em seguida, escreva a lei da função que fornece y em relação a x. $y = 80x$

b) A variável x pode assumir um número negativo? não

c) Represente, em uma folha de papel quadriculado, o gráfico correspondente. construção de gráfico

Figura 103 - Exercício 12
Fonte: Bianchini (2015)

Na sessão “Pense mais um pouco” que está logo na sequência, pede que considere a situação de que o preço de uma revista é R$ 6,00, e represente em uma tabela a quantia de revistas de 0 a 6 e o valor pago para cada quantidade, representando também, os pares ordenados em um plano cartesiano com x sendo o número de revistas e y o preço a pagar. Questiona sobre a possibilidade de comprar 4,5 e $\sqrt{3}$ revistas e se será possível traçar uma reta pelos pontos representados. Na sequência o autor inicia o caso específico de função polinomial do 1º grau.

Como na sessão anterior o autor foi pertinente na escolha das atividades relacionadas com os conceitos apresentados, abordou nelas todos os conceitos trabalhados, explorando a representação gráfica de situações problemas nos exercícios e fazendo questionamentos sobre situações intrigantes, como a de se comprar meia revista. O que faltou para poder dizer que foi explorada a representação gráfica na sua totalidade foi a interpretação gráfica de situações problemas.

5 CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE AS OBRAS

Serão apresentadas nesta sessão, considerações gerais sobre cada livro analisado, quanto as suas concordâncias ou não com os autores utilizados para o embasamento teórico no desenvolvimento desse trabalho. As considerações finais serão feitas por obra individualizada, na sequência apresentada no capítulo anterior.

No que se refere ao livro de 9º ano da coleção Praticando Matemática dos autores Andrini e Vasconcellos (2015), podemos observar que os conceitos apresentados dentro do tema funções, e não consideramos aqui o tema relação, por este não ter sido definido como algo independente de função, estão dispostos de forma fragmentada, como “caixinhas”. Ou seja, os autores não criaram um ambiente ou linha de pensamento que conectasse os conceitos desde o primeiro subtítulo até o último apresentado, quando poderiam ter apresentado uma situação problema que permeasse por todas as definições e conceitos, mostrando que uma função e a sua análise é algo transformável, que pode ser manipulada e que dentro de cada representação, existem interpretações que apresentam novos significados as variáveis.

Quando citamos autores como Caraça (1952), Caetano e Paterline (2013), Silva et al. (2018) e Lima (2013) como referenciais aos conceitos de relações e funções, podemos observar que todos eles tratam função como um caso particular de relações, ou seja, não faz sentido trabalhar um caso particular de um conceito sem nem ao menos fazer referência a ele. Contrariando a sequência de definições defendidas por estes autores citados, o livro apresenta apenas o conceito de função, apresentando relação como algo subentendido pelos alunos, ou seja, como um conhecimento pré-adquirido ou mesmo intuitivo dentro do contexto. No conceito de função, os autores aproximam sua definição da apresentada por Caetano e Paterline (2013), ao estabelecerem a existência de dois conjuntos, com uma relação definida entre seus elementos de forma que todos os elementos do primeiro conjunto estejam relacionados com apenas um elemento do segundo. Os termos domínio e imagem são abordados posteriormente a esta definição, mas sem conexões significativas com os conceitos de conjuntos como deveriam ter dentro da definição formal do conceito de função. Quanto a análise do domínio de uma função, deixaram clara a diferença em considerar um domínio contínuo ou discreto de acordo com a situação problema apresentada.

Dentre as representações existentes para funções, os autores se utilizaram de uma gama maior do que as mencionadas como essenciais por Caetano e Paterline (2013), que seriam expressões literais, representações algébricas, tabelas e gráficos. Os autores utilizaram todas estas citadas, acompanhadas dos diagramas e de pares ordenados. Quanto ao tratamento dado as diferentes representações, a forma fragmentada com que abordaram o conteúdo, não permitiu a transposição do conceito em suas variadas formas de representações dentro de um mesmo contexto, por exemplo, não se percebeu a conexão entre a representação na forma de diagrama e a representação gráfica de uma função, ou seja, não atendeu o pensamento de Duval (2011) no sentido de constituir uma variável cognitiva de tratamento no desenvolvimento das práticas heurísticas. Assim como, o tratamento interno de cada representação não foi explorado na significância dos conceitos, por exemplo, o conceito de domínio e imagem é usual em livros matemáticos, para casos finitos, serem exemplificados pela representação da função em diagramas, permitindo incluir o conceito de contradomínio de uma função.

Na apresentação do conceito de função, os autores seguem a ideia de Ponte (1990) ao abordar o tema como correspondência entre dois conjuntos numéricos e salientar os exemplos “bem comportados”. Porém, cometem o mesmo erro apontado por Zuffi (2016), ao não conseguir a conexão necessária entre o conceito formal e o conceito contextualizado de maneira significativa. Apresentam os conceitos e posteriormente as análises de situações problemas envolvendo-os. Assim, os conceitos parecem de forma postulada, quando o entendimento poderia ser maior, se o conceito fosse obtido pela situação problema em si. Na representação gráfica de uma função, utilizam o mesmo processo criticado por Rezende (2003), ao considerar a lei de formação de uma função, obter com ela uma tabela de valores, geralmente valores inteiros e induzir o aluno ao formato da curva obtida. A consideração de todos os números reais para a obtenção dos pares ordenados que representam os pontos do gráfico da função, poderiam ter sido mais explorados, juntamente com a sugestão de Ponte (1992) quanto ao uso de tecnologias, como software gráfico, para a obtenção das curvas que representam gráficos de funções.

Uma das metodologias abordadas como forma de obtenção de conceitos e mesmo nos exercícios é a Resolução de Problemas de forma individual ou em duplas/grupos, atendendo sugestões de Meneghetti e Redling (2012) e Moura et al. (2003). Entre os exercícios propostos também podemos observar a existência daqueles que exploram a conversão entre registros gráficos e algébricos.

No que trata o livro do 9º ano da coleção Vontade de saber de Souza e Pataro (2015), pode-se afirmar que de um modo geral, não tratou nem de relações e nem de funções no seu sentido matemático, a palavra noção reinou continuamente no transcorrer da sequência apresentada pelos conceitos. O problema que se pode enfrentar em um futuro não muito distante, quando o aluno for aprender estes conceitos no Ensino Médio e dentro da linguagem matemática, é a visão limitada do conceito de função, dificultando a vinculação com conceitos como domínio, contradomínio, imagem, ou mesmo a vinculação da linguagem matemática a situações cotidianas representadas por funções, pois no Ensino Médio, se parte do pressuposto que a ideia de variabilidade, de variáveis dependente e independente, transformação entre as representações como linguagem literal para a algébrica, algébrica para tabular, tabular para conjuntos de pontos e conjuntos de pontos para gráficos e análise de gráficos tenham sido desenvolvidos no Ensino Fundamental.

Pensando em termos das referências bibliográficas apresentadas neste trabalho, podemos afirmar que o tratamento que o autor apresentou inicialmente, a situação da criptografia, desenvolve uma pequena ideia do que seria uma relação, mas dentro da concepção de relação que Caraça (1952) nos apresenta, se torna insuficiente e limitado para configurar relação, por abordar apenas a relação que convenientemente relaciona elemento a elemento de cada conjunto apresentado. Ponderando a sequência apresentada, percebe-se que, sua intenção não era definir relação em si, mas sim a vinculação de elementos de dois conjuntos, que dizemos estar relacionados ao obedecerem a uma regra e o fato de estarem relacionados um a um, configuraria uma função, neste sentido inseriu o comentário de que em casos como esse da criptografia podemos chamá-los de função.

Porém, a definição de função, não condiz com nenhuma definição considerada pelos autores referenciados neste trabalho, mesmo entre os que não consideram uma linguagem matematicamente formal como Caetano e Paterline (2013), pois todos estes autores apresentam função como uma relação entre dois conjuntos, fato que Souza e Pataro (2015) não consideraram em momento algum. Afirmam que, expressões do tipo: “a conta do telefone depende dos minutos utilizados” é uma função é no mínimo errôneo, essa situação apenas mostra a relação de dependência entre duas grandezas que pode ser representada por meio de uma função, quando apresentar uma lei de formação bem definida, pois neste caso o domínio e contradomínio estão definidos pelas grandezas tempo em minutos e valor em reais, respectivamente.

Em termos de representação de funções, os autores atendem as representações básicas consideradas por Caetano e Paterline (2013), pois apresentam representação por linguagem literal, algébrica, tabular, por diagrama, por pares ordenados e gráfica. Porém, vai contra os princípios de Duval (2011), pois não considera a transição entre as representações, ao ignorar o processo numérico envolvido na obtenção dos elementos da variável independente nas tabelas apresentadas, que quando considerados permitem ao observador identificar quais valores estão variando em função de qual, facilitando a obtenção da expressão algébrica que representa a função. Outra situação na qual ignorou o processo foi na transição entre as representações tabular e por diagrama, não considerando fazer observações sobre quais valores são representados no primeiro “balão”, quais são representados no segundo e qual o significado das setas utilizadas. Para esta representação, também poderia ter explorado a sua obtenção pela lei de formação, ou mesmo a hipótese que não necessariamente o segundo conjunto terá todos os seus elementos relacionados. Na obtenção de suas representações gráficas, não ponderou considerações esclarecedoras quanto a escolha de valores para a variável independente, de forma a obter uma representação aproximada para a curva que representa a função, o que segundo Rezende (2003) compromete o conceito de variabilidade que uma função representa.

Quanto ao seu método de abordagem no âmbito educacional, ele faz uma tentativa de trabalhar o conceito contextualizado, mas como afirma Zuffi (2016), não conseguiu fazer a conexão com o conceito formal, ou melhor, não apresentou tentativas de fazer conexões com o contexto formal. Na utilização da metodologia de Resolução de Problemas, os autores utilizaram uma abordagem com pouca exploração, limitando as análises das situações-problema envolvidas, e sua ausência foi notada principalmente no que trata dos conceitos de análise gráfica.

Na análise do livro de 9º ano da coleção Matemática Compreensão e Prática de Silveira (2015), podemos verificar que o autor trata apenas do conceito de função, utilizando relação como um conceito subentendido. De modo geral, ele desenvolve os conceitos por meio da contextualização de situações problemas, o que é sugerido pelos autores Meneghetti e Redling (2012) e Moura et al. (2003), mas apresentando análises que desenvolviam apenas a ideia dos conceitos, sem aprofundá-los para a obtenção das definições. O conceito de relação, ficou subentendido nas contextualizações apresentadas com as situações problemas que envolviam grandezas, minimizando seu significado. Quanto ao conceito de função, desenvolveu somente a ideia de função como relação entre grandezas, onde para cada elemento da primeira grandeza tem-se apenas um elemento da segunda correspondente, configurando função como uma relação biunívoca, o que não condiz com a definição e significado de função apresentado pelos autores citados neste trabalho, que configuram função como uma relação unívoca.

Quanto aos elementos e notações envolvidos no conceito de funções, houve a apresentação dos conceitos de variável dependente e independente, de lei de formação, notação e valor numérico. Porém, conceitos como domínio, contradomínio e imagem de função, essenciais matematicamente para essa definição, foram negligenciados, nem sequer citados. Em todos os casos, dos conceitos acima que foram apresentados, não houve aprofundamento na investigação destes elementos para obter maior compreensão dos mesmos por parte dos alunos, no sentido de não terem sido explorados de forma convincente na resolução das atividades.

Nas representações de função, o autor apresentou o considerado mínimo por Caetano e Peterline (2013), com representações literais e algébricas, tabelas e gráficos. Quanto ao tratamento das informações dentro de cada representação, podemos dizer que não foram exploradas muitas análises nesse sentido, e na transformação de uma representação para a outra os processos não ocorreram de forma clara, de modo a interligar as representações, indo contra as sugestões de Duval (2012). Quanto as representações gráficas, a exploração foi mínima, explorando a sua construção no texto base, mas sem considerar a mesma construção nas atividades a serem realizadas pelos alunos, e ainda, não possibilitou reflexões sobre dados gráficos representados. E mesmo na sua obtenção, os valores utilizados como variável independente na formação dos pares ordenados para a representação gráfica, eram em sua grande maioria, inteiros, mesmo quando o domínio da situação analisada era o conjunto dos números reais. Conceitos como zero da função poderiam ter sidos explorados, ou mesmo a observação de gráficos para a responder perguntas pertinentes, como valores de máximo ou mínimo.

Um dos pontos positivos apresentados, foi uma situação problema, para ser resolvida em equipe, onde apresenta na sua resolução os conceitos de funções desenvolvidos até o momento, contextualizados em uma situação de viagem, considerando distâncias entre pontos turísticos e rotas de viagem feitas com valores gastos em um carro de aluguel. Essa atividade sugere uma sequência de estratégias de resolução para a obtenção dos resultados requeridos, com direito a verificação de respostas e pesquisa sobre as cidades e pontos turísticos envolvidos no enunciado.

Quanto a análise desenvolvida sobre o livro do 9º ano da coleção Teláris de Dante (2015), concluímos que o autor aborda dentro do contexto de funções, quase todos os conceitos considerados relevantes para a teoria inicial, sendo os conceitos apresentados por ele: definição de grandezas variáveis, variáveis dependentes e independentes, definição de função, lei de formação da função, gráfico de função, zero da função. As teorias que faltaram definir, foram usadas de forma subjetiva, como a definição de relação, de valor numérico e de domínio e imagem.

No que trata do conceito de relação, podemos afirmar que somente a noção intuitiva esteve presente no desenvolvimento do conceito de função, sem ao menos uma descrição do que é uma relação. Quanto ao tratamento dado ao conceito de função, podemos dizer que o autor adotou para a definição, a conceituação de Caetano e Paterline (2013), ao utilizar dois conjuntos cujos elementos estão relacionados de acordo com uma regra, de tal forma que para cada elemento do primeiro haverá apenas um correspondente no segundo. Porém, não definiu domínio, contradomínio e imagem de função, elementos estes citados em todas as definições apresentadas com referencial teórico deste trabalho. Mas, na construção gráfica de situações envolvendo relação de grandezas, utilizou a análise do domínio para determinar o tipo de gráfico que seria obtido.

Na utilização de representações de funções, o autor satisfaz as expectativas de Caetano e Paterline (2013), ao apresentar as representações de funções por expressões literais e algébricas, tabular e gráficas. Ele não corresponde as expectativas de Duval (2011) quanto a dar um bom tratamento ao conceito dentro de cada uma de suas representações, podemos considerar isso, ao não ter explorado análises gráficas com gráficos que representam funções e ter apresentado apenas um tipo de curva expressa por função. Além disso, as transposições entre as representações ocorreram de forma direta, sem considerar os processos numéricos envolvidos, o que segundo Ponte (1992), facilitaria a compreensão da transposição entre as representações.

Quanto ao processo metodológico de apresentação dos conceitos, ora se deram de forma explanatória e ora de forma contextualizada. Observou-se a presença de situações problemas na contextualização dos conceitos apresentados e na resolução dos exercícios no subtítulo 1, porém quando chegou a parte de representação gráfica de uma função, perdeu-se essa contextualização na apresentação do conceito, ou seja, o autor confirmou a colocação de Zuffi (2016), quanto a falta de vinculação entre os conceitos formais e a contextualização.

Nas considerações finais, sobre análise do livro do 9º ano da coleção Matemática Bianchini de Bianchini (2015), observou-se que o autor não abordou os conceitos de relações e nem de funções como sugerido pelas referencias citadas neste trabalho, optando por uma abordagem contextualizada na inserção de todos os conceitos e de maneira a explorar a resolução de situações problemas nas atividades propostas, com envolvimento de geometria, interdisciplinaridade, exercícios de fixação e atendendo os conceitos apresentados.

O autor não apresenta uma definição formal de função, como a determinação de uma relação entre elementos de dois conjuntos, apenas salienta a regra de relacionar cada elemento referente a uma grandeza com apenas um elemento correspondente na outra grandeza. Também não são definidos os conjuntos domínio, contradomínio e imagem. Apresenta a definição de variáveis, sem diferenciar variável dependente de variável independente e a relação existente entre elas, na verdade, essa relação ele determina como lei de formação da função, utilizando para obtê-la o processo utilizado na determinação do valor da função, y, expressando o cálculo envolvido partindo de x, permitindo a visualização da estrutura da lei de formação.

Sobre as formas de representações o autor apresenta a linguagem literal, a linguagem algébrica, a tabular, a de pares ordenados e a representação gráfica, satisfazendo o mínimo necessário citado por Caetano e Paterline (2013) em termos de representação. Entre os livros analisados, podemos considerar que este foi o único que apresentou o que Duval (2011) considera como uma transposição significativa entre as suas múltiplas representações, sempre observando a passagem numérica de uma representação a outra. Quanto a representação gráfica, o procedimento adotado apresentou o gráfico de uma função com variabilidade ao introduzir o domínio da função inicialmente como números inteiros, e ir expandindo o conjunto até chegar nos números reais, criou a simulação de completude da reta que representava o gráfico em questão, uma pena não ter abordado a mesma linha para uma função quadrática. Aproveitou essa situação para, partindo da representação gráfica, definir o zero da função como o valor x para o qual se tem o valor da função igual a zero, repassando esse conceito para a sua representação na forma algébrica, obtendo a abscissa do par ordenado representado no gráfico como zero da função. Como complementação da parte gráfica, ficou faltando a análise de gráficos de situações problemas ara determinação de pontos de máximo, mínimo ou de mudança de sentido da curva com suas devidas interpretações.

Porém, apesar dos benefícios citados o autor não conseguiu fugir da teoria de Zuffi (2016) quanto a não conseguir relacionar o teórico formal com a contextualização.

6 CONCLUSÕES

Ao iniciarmos o estudo sobre a abordagem do conceito de funções nos livros didáticos do PNLD, constatamos que os livros disponibilizados para escolha nas escolas atendem aos PCNs, quanto a abordagem dada aos conceitos de relações e funções. Ao analisarmos os PCNs, se verificou que eles apresentam como objetivo no ensino de relação e função no Ensino Fundamental Dois, o desenvolvimento da capacidade do aluno de resolver situações-problemas que envolvem a variação de duas grandezas direta ou inversamente proporcionais, e representar em um sistema de coordenadas cartesianas essa variação. O que, segundo eles, possibilitará ao professor, a verificação da capacidade do aluno resolver situações problema (escalas, porcentagem e juros simples) que envolvem a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias como as regras de três; de representação em um sistema de coordenadas cartesianas, analisar a variação de grandezas envolvidas em um fenômeno e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não-proporcional.

As DCEs de matemática do Estado do Paraná, no qual é baseado o registro de classe online, subdividindo os conteúdos em Estruturantes e Específicos como no documento, salienta apenas a importância do entendimento de variável, a representação gráfica e o entendimento de função afim e quadrática. Já a BNCC, que será a base da Educação Básica de 2018 em diante, não salienta nenhuma metodologia de ensino ou teorias a serem relacionadas, como proporcionalidade, apenas cita como fundamental, o aluno determinar valor numérico de uma função e representá-las nas suas formas algébricas e gráficas, deixando a cargo do professor o tipo de análise que abordará dentro dessas concepções.

Porém, quando analisamos os conceitos de função apresentados pelas referências bibliográficas citadas, como Carraça (1952), Caetano e Parteline (2013), entre outros, observa-se a importância de apresentar a conceituação de relação, por “se tratar de um instrumento matemático onde a essência é a correspondência de dois conjuntos, cujos elementos são ditos variáveis com domínio discreto ou contínuo” (CARRAÇA, 1952) e para Fainguelernt e Gottlieb (2007) essa conceituação pode ser apresentada com o mesmo sentido que no cotidiano, com comparação de grandezas ou características e que apresentem significado quando estabelecidas dentro de um contexto. Complementamos a ideia de relação citando Caetano e Paterline (2013) quanto as verificações necessárias para obter uma relação, identificar com precisão os conjuntos de partida e chegada; aplicar corretamente a regra que define a relação; verificar se há algum elemento no conjunto de partida que se relaciona com apenas um, mais de um elemento do conjunto de chegada ou nenhum deles; verificar se “restam” elementos no conjunto de chegada, ou seja, se algum elemento desse conjunto não entra na relação.

Pela citação de Caetano e Paterline (2013) e a definição apresentada pelos próprios de função, onde afirmam que uma função é constituída de um conjunto de partida A, de um conjunto de chegada B e de uma relação entre esses conjuntos que satisfaça as seguintes condições particulares: todo elemento de A faz parte da relação e cada elemento de A esta relacionado com um único elemento de B, conseguimos identificar a diferença entre os conceitos de relação e função. De fato, função é um caso particular de relação, diferenciadas apenas pela regra de que cada elemento de A está relacionado com um único elemento de B.

Considerando as referências com relação a atual situação de ensino desses conceitos, podemos observar que nos trabalhos desenvolvidos anteriormente, Zuffi (2016) constatou que os docentes utilizam o conceito formal e o contextualizado, mas não conseguem fazer a vinculação entre os dois, e Rezende (2003) critica a forma como o conceito é tratado em sala de aula, considerando somente sua expressão analítica, com uma correspondência estática entre as variáveis x e y, com obtenção de gráficos com curvas induzidas pelos professores e sem considerar a diferença entre um domínio discreto e/ou contínuo, dificultando a observação da variabilidade e funcionalidade do conceito. Além de todas essas dificuldades Ponte (1992), afirma que a dificuldade de abstração, ou seja, de obter uma representação algébrica, apresentada pelos alunos dificulta a obtenção e interpretação do gráfico de uma função, e esta dificuldade para Caetano e Paterline (2013) pode estar relacionada à incompreensão de conceitos que estão ali subentendidos, como determinar o domínio mais adequado a cada situação, ou relaciona-la a outras representações.

Nesse contexto de dificuldades, Ponte (1992), apresenta como sugestão estratégica para deixar os alunos mais confiantes, a utilização de valores numérico na apresentação de expressões numéricas, que inclusive apareceram muito no desenvolvimento histórico desses conceitos. Essa estratégia, colabora com a teoria de múltiplas representações de Duval (2011), ao permitir, a observação, da ligação entre duas representações diferentes na transposição de representação. Mas, além da transposição, Duval (2011) relata a importância de fazer o tratamento correto dentro de cada representação utilizada no conceito, buscando a totalidade da compreensão.

Quanto a abordagem do conteúdo, a metodologia mais sugerida pelos autores é a Resolução de Problemas ou mesmo a contextualização do conceito. Como sugestões de melhorar as práticas pedagógicas, podemos citar o desenvolvimento de atividades em duplas ou grupos de forma a permitir o debate entre os alunos, a utilização de software de representação gráfica ou planilhas de cálculo e principalmente a consideração de atividades que permitam a transição entre as representações nos dois sentidos.

Tendo feito todas essas considerações, concluímos que apesar dos livros didáticos analisados atenderem os PCNs e a BNCC, não podemos considerá-los suficientes na obtenção das concepções matemáticas necessárias para uma boa compreensão dos conceitos de relações e funções. Todos os autores sem exceções não abordaram a definição de função como um caso particular de relação, como recomendado pelas referências bibliográficas mencionadas, e limitam a ideia de função apenas como relações entre grandezas, sem considerar casos diferentes. Não significa que o autor deveria abordar todas os casos de relações e funções, mas apenas alguns exemplos, que não sejam de relações de grandezas. Pois, os autores procuraram iniciar o tema com uma contextualização de relação entre grandezas, onde todas as variáveis correspondentes a uma grandeza se relacionavam a apenas uma variável correspondente a segunda grandeza. E quatro, dos cinco livros analisados, não apresentaram um exemplo do que não é função, deixando essa conclusão de forma subentendida.

As conclusões aqui obtidas, podem ser comparadas com o trabalho desenvolvido por Silva (2007), que também analisou a abordagem de livros didáticos sobre o conceito de funções no Ensino Fundamental. Silva (2007) constatou que:

> a maioria dos livros analisados adota como ponto de partida para a construção do conceito de função a exploração da relação de dependência entre grandezas por meio da resolução de problemas. No entanto, percebemos que ainda existe uma certa preocupação de alguns autores com o conceito formal de função como um caso particular de relação. (SILVA, 2007, p.88)

Em nossas análises percebemos que continua o sistema da maioria dos livros abordar o conceito de função com base em situações que exploram a relação entre grandezas, utilizando principalmente o método de Resolução de Problemas, porém, diferente do que a análise de Silva (2007) nos proporciona, aqui os autores não se preocuparam em relatar o conceito formal de função como um caso particular de relação. Também concordamos com ele, quando fala da utilização da metodologia de Resolução de Problemas, afirmando que

> contrapõe-se e vai além do modelo tradicional (definição → exemplos → exercícios de aplicação), na medida em que oferece ao aluno a possibilidade de formular hipóteses, construir estratégias de resolução e argumentação, relacionar diferentes conhecimentos e validar seus procedimentos. (SILVA, 2007, p.89)

Essa concordância é baseada na observação da apresentação, em todos os livros didáticos analisados, de exercícios que se apresentam como situações problemas que, instigam o pensamento crítico e criatividade do aluno na obtenção das respostas, ao questionarem sobre situações que necessitam da análise de dados, fugindo do padrão tradicional apresentado por Silva (2007) na citação acima. Ainda cita em seu trabalho, o fato de os autores dos livros didáticos terem se preocupado com a contextualização e interdisciplinaridade, mas, que os mesmos teriam dado pouca ênfase em trabalhos com padrões generalizáveis, enquanto que neste trabalho, a maioria dos autores dos livros didáticos buscaram enfatizar a contextualização em suas atividades, mas poucas envolviam temas interdisciplinares, sendo estas destacadas quando observadas. Quanto aos padrões de generalização, a maioria dos livros abordaram, solicitando a elaboração de tabela de dados para posteriormente obter a expressão que representa o termo geral ou, questionando sobre valores numéricos, que auxiliavam na obtenção do termo geral.

No que trata da construção do gráfico de funções, Silva (2007) observou em seu trabalho que, a passagem do discreto para o contínuo é automática e insuficiente na maioria dos livros, e observamos as mesmas dificuldades em alguns livros, quando apresentam apenas alguns pares ordenados de números inteiros em uma tabela, com suas localizações no plano e traçando uma linha contínua para os ligar, sem discutir os valores que estão entre os números inteiros. Maggio, Soares e Nehring (2010) constataram o mesmo detalhe em seu trabalho “ Registros De Representação

Semiótica Da Função Afim: Análise De Livros Didáticos De Matemática No Ensino Médio", e dizem que embora os livros apontem variáveis pertinentes aos registros algébrico e gráfico da função afim, eles não as utilizam no esboço dos gráficos, fato este que não possibilita aos alunos realizar análises globais.

Quanto as múltiplas representações, Silva (2007) concluiu que:

> não se deve subestimar a articulação dos registros, isto é, a identificação dos objetos matemáticos por suas múltiplas representações, pois esta atividade é fundamental para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática. (SILVA, 2007, p.94)

Como verificou-se que dos cinco livros analisados, apenas um apresentou a transposição entre as múltiplas representações de função, da forma como salienta Duval (2011), persistindo nessa dificuldade que foi constata por Silva (2007), seguimos com o mesmo conselho dele, que livros didáticos e professores desenvolvam trabalhos de conversão de representações com maior intensidade, pois, para Maggio, Soares e Nehring (2010), os fatos observados, se refletem nas ações pedagógicas dos professores que trabalham com o conceito e aplicação da função, onde os alunos apresentaram dificuldades frente à resolução de situações-problema envolvendo a conversão entre os registros gráfico e algébrico da função, refletindo no ensino da Matemática nas salas de aula.

Para melhor visualizar e compreender os dados obtidos, é apresentada um quadro com as características observadas na análise dos livros didáticos. Observando quadro, percebemos que existem características que são contempladas em todas as coleções como: o desenvolvimento da ideia de função, a definição de lei de formação, as representações por expressões literais, algébricas, tabelas e gráficos e a presença da Resolução de Problemas como uma das metodologias empregadas. Enquanto características como: definição de relação, definição de valor da função, domínio e imagem, representação por diagramas, transposição das representações de forma significativa, tratamento interno da representação gráfica e intersecção com o eixo das ordenadas, não aparecem ou quando aparecem nos livros, são poucos. Entre os conceitos que não aparecem ou aparecem pouco, alguns são fundamentais para a compreensão do conceito de função na sua totalidade, como relações, domínio, imagem, tratamento de gráfico e transposição entre representações.

ANÁLISE DE CARACTERÍSTICAS APRESENTADAS PELOS LIVROS DIDÁTICOS					
O QUE A COLEÇÃO APRESENTA:	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Definição/ideia de relação:	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
Definição de função:	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
Ideia de função:	**2**	**1**	**1**	**2**	**2**
Definição de variáveis:	**0**	**1**	**2**	**2**	**2**
Definição de variáveis dependente e independente:	**0**	**2**	**2**	**2**	**0**
Lei de formação da função:	**2**	**1**	**2**	**2**	**2**
Definição de valor da função:	**0**	**0**	**2**	**0**	**0**
Valor da função subentendido:	**2**	**2**	**0**	**2**	**2**
Definição de domínio e imagem:	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
Representações por expressões literais, algébricas, tabelas e gráficos:	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
Representação por diagramas:	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**
Representação por pares ordenados:	**2**	**1**	**1**	**2**	**2**
Transposição entre as representações segundo Duval (2011):	**1**	**0**	**0**	**0**	**2**
Tratamento interno na representação gráfica (análise gráfica):	**1**	**0**	**0**	**2**	**0**
Representação gráfica observando restrições do domínio:	**2**	**2**	**1**	**1**	**2**
Representações gráficas de diferentes tipos:	**2**	**2**	**2**	**2**	**0**
Verificação da curva do gráfico representar função ou não:	**0**	**2**	**0**	**2**	**2**
Definição de zero da função:	**2**	**0**	**0**	**2**	**2**
Intersecção com o eixo das ordenadas:	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**
Resolução de problemas:	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**
Contextualização dos conceitos:	**1**	**2**	**2**	**2**	**2**
Atividades em nível satisfatório com o apresentado conceitualmente:	**1**	**1**	**0**	**2**	**1**

Legenda:

A - Coleção praticando matemática (ANDRINI e , 2015)

B - Coleção Vontade de saber (SOUZA e PATARO, 2015)

C - Coleção Matemática: compreensão e prática (SILVEIRA, 2015)

D - Coleção projeto Teláris (DANTE, 2015)

E - Coleção Matemática Bianchini (BIANCHINI, 2015)

0 – Não apresenta

1- Apresenta parcialmente

2 – Apresenta

Quadro 1- Análise De Características Apresentadas Pelos Livros Didáticos
Fonte: Autoria própria

Com base no que foi apresentado, quanto ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), e a participação dos PCNs e da BNCC na determinação dos conceitos mínimos necessários para relações e funções, e considerando, as definições e estudos apresentados pelos autores referenciados nesse trabalho, concluímos que, um livro didático estar enquadrado nos padrões dos Currículos Nacionais para a Educação Básica, não garante a abordagem do conteúdo de relações e funções, de forma a atender a conceituação matemática necessária, nem a utilização da metodologia mais eficiente para garantir a captura da essência do conceito em todas as suas formas de representação, formando a concepção de variação, e tornando o conceito uma ferramenta utilizada na análise e modelagem de situações práticas nas áreas de estudos afins.

O conceito de função, é mais do que relações entre grandezas e a análise de suas proporcionalidades, como sugerem os PCN. E, é mais que valor numérico, representação algébrica e gráfica, como sugere a BNCC. Sua compreensão consiste em relacionar conjuntos numéricos, de situações reais ou não, compreendendo os tipos de relações que os vinculam, determinando função como a relação entre todos os elementos de um conjunto a um único elemento do outro com quem se relaciona. Deve-se compreender, que esse conceito é determinado por cálculos numéricos, que podem ser expressos por uma equação algébrica, uma lei, sintetizando o conceito, ou por pares ordenados, que se representados em um plano cartesiano mostram o comportamento da função de acordo com o crescimento dos valores da variável independente, mas acima de tudo, que se trata de variação de valores.

Como referenciais curriculares da Educação Básica, os PCNs e a BNCC, não cumprem seus papéis quanto, oferecer embasamento curricular de forma a garantir uma aprendizagem de qualidade dentro do considerado conhecimento mínimo a nível nacional, pois suas indicações foram respeitadas por todos os autores cujos livros fazem parte do PNLD e mesmo assim, podemos identificar a ausência de conceitos e habilidades importantes para a compreensão dos conceitos de relações e funções. Constatada essa insuficiência dos currículos em garantir a base matemática essencial desses conceitos, caberá ao professor, dentro das suas limitações de tempo e qualificação, complementar os conceitos e desenvolvimentos apresentados nos livros didáticos, afim de garantir o mínimo necessário para a compreensão de relações e funções. O assunto ainda é amplo para debate. E, fica indicada a sugestão da elaboração de uma sequência didática, com apresentações de conceitos e sugestões de atividades, a vir ser utilizada em sala de aula por professores.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando matemática, 9º ano**. 4ªed. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini: Ensino fundamental, 9º ano**. 8ªed. São Paulo: Moderna, 2015.

BRASIL. Decreto nº 9.099 de 18 de Julho de 2017: Dispõe sobre o Programa Nacional do Livro e do Material Didático. Brasília, 2017. **Diário Oficial da União** - Seção 1 - 19/7/2017, Página 7. Disponível em : < http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2017/Decreto/D9099.htm>. Acesso em: 15.jan.2018.

BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação: **Programas do Livro: Histórico**. Brasília: FNDE, 2017. Disponível em: http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/historico. Acesso em: 10.nov.2017.

BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação: **Programas do Livro: Dados Estatísticos: PNLD 2017 - Coleções mais distribuídas por componente curricular - Séries finais Ensino Fundamental**. Brasília: FNDE, 2017. Disponível em: http://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/dados-estatisticos. Acesso em: 11. nov.2017.

BRASIL. Lei Nº9.394/96: **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília: MEC, 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm . Acessado em: 25.ago.2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base – BNCC**. Brasília, DF, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília : MEC / SEF, 1998. 148 p.

BRITO, Dirceu dos Santos; ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. O conceito de função em situações de modelagem matemática. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp – v.13 – n. 23 – jan./jun. 2005 p.63

CAETANO, Paulo Antonio Silvane; PATERLINE, Roberto Ribeiro. Funções Elementares: Módulo II. Cuiabá – MT: Central de Texto, 2013. - Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio.

CARAÇA; Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 2ª ed. Lisboa: Tipografia Matemática, 1952.

CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Convergências: matemática, 9º ano: anos finais: ensino fundamental**. 1ªed. São Paulo: Edições SM, 2015.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: Educ, p. 167-175, 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto teláris: matemática: ensino fundamental 2, 9º ano**. 2ªed. São Paulo: Ática, 2015.

DUVAL, Raymund. **Ver e Ensinar Matemática de Outra Forma – Entrar no Mundo Matemático de Pensar: Os registros de Representações Semióticas**. 1ªed. São Paulo: PROEM, 2011.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman; GOTTLIEB, Franca Cohen. **Guia de estudos de matemática – relações e funções**. 1.ed. Rio de Janeiro: EditoraCiência Moderna Ltda., 2007.

GAY, Mara Regina Garcia. **Projeto Aribabá: matemática, 9º ano**. 4ªed. São Paulo: Moderna,2014.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MAGARINUS, Renata. **Uma Proposta Para O Ensino De Funções Através Da Utilização De Objetos De Aprendizagem**. Santa Maria, 2013. 99 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS).

MAGGIO, Deise Pedroso; SOARES, Maria Arlita da Silveira; NEHRING, Cátia Maria. Registros de representação semiótica da função afim: análise de livros didáticos de matemática no ensino médio. **Revemat**: R. Eletr. de Edu. Matem. Florianópolis, v. 05, n. 1, p.38-47, 2010.

MATOS FILHO, Maurício A; et.al.: **A Transposição Didática em Chevallard: As Deformações/Transformações Sofridas Pelo Conceito De Função Em Sala De Aula**. VIII Congresso nacional de educação – EDUCERE, Formação de Professores. UFRPE, 2008.

MENEGHETTI, Renata Cristina Geromel; REDLING, Julyette Priscila. Tarefas Alternativas para o Ensino e a Aprendizagem de Funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio. **Bolema**, v.26, n.42a, p.193-230, 2012.

MOREIRA, Antonio Flavio Barbosa; SILVA, Tomaz Tadeu da. **Currículo, cultura e sociedade**. 8ªed. São Paulo: Cortez, 2005.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de; MORETTI, Vanessa Dias. Investigando a aprendizagem do conceito de função a partir dos conhecimentos prévios e das interações sociais. **Ciência & Educação**, v. 9, n. 1, p. 67-82, 2003.

MOVIMENTO PELA BASE NACIONAL COMUM. Linha do Tempo. 2017. Disponível em: < http://movimentopelabase.org.br/linha-do-tempo/>. Acesso em: 28.nov.2018.

PARANÁ. Secretária Da Educação. **Diretrizes curriculares da educação básica matemática**. 1ªed. Paraná: Secretária da Educação, 2008.

PIRES, Célia Maria Carolino. Educação Matemática e sua Influência no Processo de Organização e Desenvolvimento Curricular no Brasil. **Boletim de Educação Matemática** - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, vol. 21, núm. 29, p. 13-42, 2008.

PONTE, João Pedro da. O Conceito de Função no Currículo de Matemática. **Educação e Matemática**, nº 15, p. 3-9,1990.

PONTE, J. P. da. The history of the concept of function and some educational implications. **The Mathematics Educator Online**, V.3, n.2, 1990, p.3-9. Disponível em: < http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos-por-temas.htm>. Acesso em: 12.mai.2018.

REZENDE, Wanderley Moura. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. São Paulo, 2003. 450 f. Tese de doutorado – Programa de Pós-graduação em Educação. Universidade de São Paulo.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. **Álgebra para a formação do professor: Explorando os conceitos de equação e de função**. Coleção Tendências em Educação Matemática. 1ªed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

RIO, Dermival Ribeiro. **Minidicionário escolar da língua portuguesa**. São Paulo: DCL,2010.

SACRISTÁN, J. Gimeno. **O currículo: uma reflexão sobre a prática**. 3ªed. Porto Alegre: ArtMed,200.

SÃO PAULO (ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias.**1ªed. São Paulo: SE, 2011.72 p.

SILVA, Umberto Almeida. **Análise da Abordagem de Função Adotada em Livros Didáticos em Matemática da Educação Básica**. São Paulo, 2007. 110 f. Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontificia Universidade Catolica de São Paulo.

SILVA, Alexandre Souza da;et al. **Livro aberto de matemática: Repensando o ensino de matemática atraves de uma iniciativa aberta e colaborativa: Ensino Médio: Introdução as funções**. Disponível em: < https://www.umlivroaberto.com/wp/?page_id=97>. Acesso em: 19.set.2018.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e prática, 9º ano**. 3ªed. São Paulo: Moderna, 2015.

SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patricia Rosana Moreno. **Vontade de saber matemática, 9º ano**. 3ªed. São Paulo: FTD, 2015.

SOUZA, Valdirene Rosa de. **Funções no Ensino médio: História e Modelagem**. São Paulo, 2011. 173f. – Mestrado Profissional no Ensino de Matemática, Pontificia Universidade Católica.

UNESCO: Organização das Nações unidas para a Educação, a Ciência e a cultura. Representação da UNESCO no Brasil: Redes UNESCO: CONSED. 2017. Disponível em: < http://www.unesco.org/new/pt/brasilia/about-this-office/networks/specialized-communities/specialized-communities-ed/consed/>. Acesso em: 25.nov.2018.

UNESCO: Organização das Nações unidas para a Educação, a Ciência e a cultura. Representação da UNESCO no Brasil: Redes UNESCO: UNDIME. 2017. Acesso em:

http://www.unesco.org/new/pt/brasilia/about-this-office/networks/specialized-communities/specialized-communities-ed/undime/>. Acesso em: 25.nov.2018

ZUFFI, Edna Maura. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Hipátia**, Campos do Jordão (SP), v. 1, n.1, p. 1-10, dez. 2016.

ANEXO A - Coleções mais distribuídos - PNLD 2017 - anos finais do ensino fundamental

FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO - FNDE

PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO - PNLD

COLEÇÕES MAIS DISTRIBUÍDOS - PNLD 2017 - ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Matemática

tem	ódigo da oleção	Nome da Coleção	C ódigo do Livro	N ome do Título	ipo	tde de xemplares	tde de xemplares
o	008P17022	PRATICANDO MATEMÁTICA	0 008P17022006I	PRATICANDO MATEMÁTICA- EDIÇÃO RENOVADA	LIVRO DO ALUNO	49.842	.808.812
			0 008P17022006I	PRATICANDO MATEMÁTICA- EDIÇÃO RENOVADA	MANUAL DO PROFESSSOR	4.770	
			0 008P17022007I	PRATICANDO MATEMÁTICA- EDIÇÃO RENOVADA	LIVRO DO ALUNO	11.792	
			0 008P17022007I	PRATICANDO MATEMÁTICA- EDIÇÃO RENOVADA	MANUAL DO PROFESSSOR	4.366	
			0 008P17022008I	PRATICANDO MATEMÁTICA- EDIÇÃO RENOVADA	LIVRO DO ALUNO	73.647	
			0 008P17022008I	PRATICANDO MATEMÁTICA- EDIÇÃO RENOVADA	MANUAL DO PROFESSSOR	4.018	
			0 008P17022009I	PRATICANDO MATEMÁTICA- EDIÇÃO RENOVADA	LIVRO DO ALUNO	16.792	
			0 008P17022009I	PRATICANDO MATEMÁTICA- EDIÇÃO RENOVADA	MANUAL DO PROFESSSOR	3.585	
o	097P17022	VONTADE DE SABER	0 097P17022006I	VONTADE DE SABER MATEMÁTICA	LIVRO DO ALUNO	68.231	.081.216
			0 097P17022006I	VONTADE DE SABER MATEMÁTICA	MANUAL DO PROFESSSOR	2.773	
			0 097P17022007I	VONTADE DE SABER MATEMÁTICA	LIVRO DO ALUNO	27.356	
			0 097P17022007I	VONTADE DE SABER MATEMÁTICA	MANUAL DO PROFESSSOR	2.401	
			0 097P17022008I	VONTADE DE SABER MATEMÁTICA	LIVRO DO ALUNO	86.971	
			0 097P17022008I	VONTADE DE SABER MATEMÁTICA	MANUAL DO PROFESSSOR	2.051	
			0 097P17022009I	VONTADE DE SABER MATEMÁTICA	LIVRO DO ALUNO	49.686	
			0 097P17022009I	VONTADE DE SABER MATEMÁTICA	MANUAL DO PROFESSSOR	1.747	
			0 029P17022006I	MATEMÁTICA- COMPREENSÃO E PRÁTICA	LIVRO DO ALUNO	66.979	
			0 029P17022006I	MATEMÁTICA- COMPREENSÃO E PRÁTICA	MANUAL DO PROFESSSOR	.100	
			0 029P17022007I	MATEMÁTICA- COMPREENSÃO E PRÁTICA	LIVRO DO ALUNO	40.632	

o	029P17022	E PRÁTICA	MATEMÁTICA- COMPREENSÃO	0 029P17022007I	MATEMÁTICA- COMPREENSÃO E PRÁTICA	MANUAL DO PROFESSSOR	.839	.334.022
				0 029P17022008I	MATEMÁTICA- COMPREENSÃO E PRÁTICA	LIVRO DO ALUNO	11.341	
				0 029P17022008I	MATEMÁTICA- COMPREENSÃO E PRÁTICA	MANUAL DO PROFESSSOR	.593	
				0 029P17022009I	MATEMÁTICA- COMPREENSÃO E PRÁTICA	LIVRO DO ALUNO	84.144	
				0 029P17022009I	MATEMÁTICA- COMPREENSÃO E PRÁTICA	MANUAL DO PROFESSSOR	.394	
o	033P17022	MATEMÁTICA	PROJETO TELÁRIS	0 033P17022006I	PROJETO TELÁRIS MATEMÁTICA- 6º ANO	LIVRO DO ALUNO	63.288	.325.800
				0 033P17022006I	PROJETO TELÁRIS MATEMÁTICA- 6º ANO	MANUAL DO PROFESSSOR	.663	
				0 033P17022007I	PROJETO TELÁRIS MATEMÁTICA- 7º ANO	LIVRO DO ALUNO	34.615	
				0 033P17022007I	PROJETO TELÁRIS MATEMÁTICA- 7º ANO	MANUAL DO PROFESSSOR	.374	
				0 033P17022008I	PROJETO TELÁRIS MATEMÁTICA- 8º ANO	LIVRO DO ALUNO	09.029	
				0 033P17022008I	PROJETO TELÁRIS MATEMÁTICA- 8º ANO	MANUAL DO PROFESSSOR	.122	
				0 033P17022009I	PROJETO TELÁRIS MATEMÁTICA- 9º ANO	LIVRO DO ALUNO	85.790	
				0 033P17022009I	PROJETO TELÁRIS MATEMÁTICA- 9º ANO	MANUAL DO PROFESSSOR	.919	
o	047P17022		MATEMÁTICA- BIANCHINI	0 047P17022006I	MATEMÁTICA- BIANCHINI	LIVRO DO ALUNO	97.113	.083.933
				0 047P17022006I	MATEMÁTICA- BIANCHINI	MANUAL DO PROFESSSOR	.541	
				0 047P17022007I	MATEMÁTICA- BIANCHINI	LIVRO DO ALUNO	76.977	
				0 047P17022007I	MATEMÁTICA- BIANCHINI	MANUAL DO PROFESSSOR	.343	
				0 047P17022008I	MATEMÁTICA- BIANCHINI	LIVRO DO ALUNO	53.919	
				0 047P17022008I	MATEMÁTICA- BIANCHINI	MANUAL DO PROFESSSOR	.120	
				0 047P17022009I	MATEMÁTICA- BIANCHINI	LIVRO DO ALUNO	31.017	
				0 047P17022009I	MATEMÁTICA- BIANCHINI	MANUAL DO PROFESSSOR	.903	
o	036P17022	MATEMÁTICA	PROJETO ARARIBÁ-	0 036P17022006I	PROJETO ARARIBÁ- MATEMÁTICA	LIVRO DO ALUNO	83.339	73.373
				0 036P17022006I	PROJETO ARARIBÁ- MATEMÁTICA	MANUAL DO PROFESSSOR	.435	
				0 036P17022007I	PROJETO ARARIBÁ- MATEMÁTICA	LIVRO DO ALUNO	69.919	
				0 036P17022007I	PROJETO ARARIBÁ- MATEMÁTICA	MANUAL DO PROFESSSOR	.279	
				0 036P17022008I	PROJETO ARARIBÁ- MATEMÁTICA	LIVRO DO ALUNO	57.624	
				0 036P17022008I	PROJETO ARARIBÁ- MATEMÁTICA	MANUAL DO PROFESSSOR	.125	

			0 036P17022009I	PROJETO ARARIBÁ- MATEMÁTICA	LIVRO DO ALUNO	45.61	
			0 036P17022009I	PROJETO ARARIBÁ- MATEMÁTICA	MANUAL DO PROFESSSOR	.03	
o	066P17022	CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA	0 066P17022006I	CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA6	LIVRO DO ALUNO	66.01	96.310
			0 066P17022006I	CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA6	MANUAL DO PROFESSSOR	.78	
			0 066P17022007I	CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA7	LIVRO DO ALUNO	52.48	
			0 066P17022007I	CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA7	MANUAL DO PROFESSSOR	.66	
			0 066P17022008I	CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA8	LIVRO DO ALUNO	38.82	
			0 066P17022008I	CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA8	MANUAL DO PROFESSSOR	.46	
			0 066P17022009I	CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA9	LIVRO DO ALUNO	24.77	
			0 066P17022009I	CONVERGÊNCIAS MATEMÁTICA9	MANUAL DO PROFESSSOR	.29	
o	051P17022	MATEMÁTICANOS DIAS DE HOJE NAMEDIDACERTA	0 051P17022006I	MATEMÁTICANOS DIAS DE HOJE NAMEDIDACERTA	LIVRO DO ALUNO	07.84	91.852
			0 051P17022006I	MATEMÁTICANOS DIAS DE HOJE NAMEDIDACERTA	MANUAL DO PROFESSSOR	.49	
			0 051P17022007I	MATEMÁTICANOS DIAS DE HOJE NAMEDIDACERTA	LIVRO DO ALUNO	9.31	
			0 051P17022007I	MATEMÁTICANOS DIAS DE HOJE NAMEDIDACERTA	MANUAL DO PROFESSSOR	.40	
			0 051P17022008I	MATEMÁTICANOS DIAS DE HOJE NAMEDIDACERTA	LIVRO DO ALUNO	1.12	
			0 051P17022008I	MATEMÁTICANOS DIAS DE HOJE NAMEDIDACERTA	MANUAL DO PROFESSSOR	.30	
			0 051P17022009I	MATEMÁTICANOS DIAS DE HOJE NAMEDIDACERTA	LIVRO DO ALUNO	4.15	
			0 051P17022009I	MATEMÁTICANOS DIAS DE HOJE NAMEDIDACERTA	MANUAL DO PROFESSSOR	.21	
o	012P17022	DESCOBRINDO E APLICANDO AMATEMÁTICA	0 012P17022006I	DESCOBRINDO E APLICANDO AMATEMÁTICA	LIVRO DO ALUNO	7.62	40.067
			0 012P17022006I	DESCOBRINDO E APLICANDO AMATEMÁTICA	MANUAL DO PROFESSSOR	.80	
			0 012P17022007I	DESCOBRINDO E APLICANDO AMATEMÁTICA	LIVRO DO ALUNO	0.34	
			0 012P17022007I	DESCOBRINDO E APLICANDO AMATEMÁTICA	MANUAL DO PROFESSSOR	.72	
			0 012P17022008I	DESCOBRINDO E APLICANDO AMATEMÁTICA	LIVRO DO ALUNO	4.67	
			0 012P17022008I	DESCOBRINDO E APLICANDO AMATEMÁTICA	MANUAL DO PROFESSSOR	.65	
			0 012P17022009I	DESCOBRINDO E APLICANDO AMATEMÁTICA	LIVRO DO ALUNO	0.62	
			0 012P17022009I	DESCOBRINDO E APLICANDO AMATEMÁTICA	MANUAL DO PROFESSSOR	.60	